Géométrie différentielle et applications

Laurent Busé

Géométrie Différentielle et Applications

Notes du cours de Matrise M.I.M. de l'UNSA 2003-2004*

Table des matières

Ce cours (d'environ 26 heures), *présenté ici dans ses grandes lignes* (notamment sans les preuves), est inspiré du cours de Pierre Pansu "Topologie et Géométrie Différentielle" disponible à l'adresse http://www.math.u-psud.fr/~pansu/.

*par Laurent Busé, INRIA Sophia-Antipolis. Email: lbuse@sophia.inria.fr

1 Intersection de deux surfaces

1.1 Surfaces : définition et représentations

On appellera surface (lisse) une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ de classe au moins $\mathcal{C}^1$. On appellera également courbe (lisse) une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ de classe au moins $\mathcal{C}^1$.

Définition 1.1 (sous-variété) *Une partie X de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d et de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) si pour tout $P \in X$ il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de P, un sous-espace affine $\mathbb{A}_d$ de dimension d et un difféomorphisme $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, tels que $\phi(U \cap X) = V \cap \mathbb{A}_d$.*

Une telle définition des surfaces par redressement sur un espace affine est difficile à manipuler en pratique (montrer que X est une surface peut, par exemple, s'avérer difficile), mais elle fournit deux types de *représentations* des surfaces qui sont couramment utilisées :

Proposition 1.2 (représentation implicite des surfaces) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) telle que pour tout point $P \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $f(P) = 0$ la différentielle $d_P(f)$ est non nulle. Alors l'ensemble $f^{-1}(0)$ est une surface $\mathcal{C}^k$.*

Par exemple, la sphère est une surface représentée implicitement par l'équation $x^2+y^2+z^2-1 = 0$.

Proposition 1.3 (représentation paramétrique des surfaces) *Soit $(u, v) \mapsto X(u, v)$ une application $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) définie sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Si $\frac{\partial X}{\partial u}(0)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(0)$ sont linéairement indépendants alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant l'origine et tel que $X(U)$ est une surface $\mathcal{C}^k$.*

1.2 Plan tangent

Définition 1.4 *Soit X une surface. Son plan tangent en $P \in X$ est l'ensemble des vecteurs vitesses en P des courbes contenus dans X et passant par P. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, il est noté $T_P X$.*

N.B : Le plan tangent défini ainsi est un plan *vectoriel* et non affine. Il passe par l'origine et donc, en général, ne passe pas par le point P.

Suivant la représentation de X que l'on se donne, c'est-à-dire par redressement, par équation implicite ou bien par paramétrisation, on peut calculer le plan tangent à X en un point P de la façon suivante :

Proposition 1.5 *Le plan tangent à une surface X en un point $P \in X$ peut être défini par l'une des trois constructions équivalentes suivantes :*

- (redressement) *Si le difféomorphisme ϕ redresse X sur un plan π au voisinage de P, alors $T_P X = (d_P\phi)^{-1}(\pi) = d_{\phi(P)}\phi^{-1}(\pi)$.*
- (rep. implicite) *Si f est une équation non-dégénérée (au sens de la proposition 1.2) de X au voisinage de P alors $T_P X = \mathrm{Ker}(d_P f)$ (c'est le plan orthogonal au "vecteur" ${}^t(d_P f)$ de $\mathbb{R}^3$).*
- (rep. paramétrique) *Si $(u, v) \mapsto X(u, v)$ est une paramétrisation locale de X au voisinage de P telle que $X(0, 0) = P$, alors $T_P X = \mathrm{Im}(d_{(0,0)}X)$ (c'est le plan vectoriel engendré par $\frac{\partial X}{\partial u}(0, 0)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(0, 0)$).*

1.3 Intersection de deux surfaces

On s'interroge ici sur la condition pour que deux surfaces s'intersectent en une ou plusieurs courbes.

Définition 1.6 (transversalité) *Deux surfaces X_1 et X_2 de $\mathbb{R}^3$ sont dites transverses si en tout point $p \in X_1 \cap X_2$ les plans tangents $T_P X_1$ et $T_P X_2$ sont distincts.*
Deux courbes C_1 et C_2 tracées sur une même surface X de $\mathbb{R}^3$ sont dites transverses si en tout point $P \in C_1 \cap C_2$ les droites $T_P C_1$ et $T_P C_2$ sont distincts (i.e engendrent $T_P X$).
Une courbe C est dite transverse à une surface X si en tout point $P \in C \cap X$ la droite $T_P C$ n'est pas contenue dans $T_P X$ (i.e $T_P C$ et $T_P X$ engendrent $\mathbb{R}^3$).

Théorème 1.7 *Si X_1 et X_2 sont deux surfaces transverses de $\mathbb{R}^3$, alors leur intersection est une réunion de courbes disjointes (chaque courbe est une composante connexe de cette intersection).*

1.4 Cheminement

Étant donnée une courbe C obtenue comme composante connexe de l'intersection transverse de deux surfaces X_1 et X_2, on voudrait pouvoir se déplacer (on dit aussi marcher ou "walking methods") sur cette courbe de proche en proche à partir d'un point supposé connu $p \in C$ (l'obtention d'un tel point n'est pas du ressort de la géométrie différentielle), en d'autres termes on voudrait en calculer une "paramétrisation approchée".

Soit $t \mapsto c(t)$ une paramétrisation (locale) de C d'origine P, c'est-à-dire $c(0) = P$. Étant donné un pas $h > 0$, une paramétrisation approchée de C est la donnée d'une suite de points $P_j \in \mathbb{R}^3$ tels que P_j est proche de $c(jh)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On pose évidemment $P_0 = c(0) = P$. On cherche à calculer les points P_j de proche en proche, c'est-à-dire P_{j+1} en fonction de P_j. Pour cela on procède en deux étapes :

1. Calcul d'un "vecteur vitesse" $\vec{v}$ en P_j. D'où une première approximation Q du point P_{j+1} cherché : $Q := P_j + h\vec{v}$.
2. On raffine $Q = Q_0$ par une méthode itérative (par exemple une *méthode de Newton*) $Q_{k+1} = H(Q_k)$. Pour un k bien choisi on pose alors $P_{j+1} = Q_k$ (noter la nécessité de la recherche de la première approximation Q de P_{j+1} pour de telles méthodes).

Nous décrivons maintenant, sans entrer dans les détails, les trois cas correspondants au fait que X_1 et X_2 soient représentées de manière implicite ou paramétrique.

Cas où X_1 est paramétrée et X_2 représentée implicitement

Au voisinage de P la surface X_1 est ainsi donnée par la paramétrisation $(u, v) \mapsto X_1(u, v)$ et la surface X_2 est décrite par l'équation $f_2(x, y, z) = 0$. La courbe C peut donc être décrite comme le lieu des zéros de la fonction composée

$$(u, v) \mapsto f(u, v) = f_2(X_1(u, v))$$

au voisinage de $(0, 0)$. Supposant que $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) \neq 0$, le théorème A.7 de la fonction implicite nous dit qu'au voisinage de $(0, 0)$

$$\{(u, v) \ : \ f(u, v) = 0\} = \{(u, v) \ : \ v = \phi(u))\}.$$

Ainsi la courbe à approcher est représentée par $t \mapsto X_1(t, \phi(t))$. Il suffit donc de construire une suite de points p_j proches de $\phi(jh)$ puis de poser $P_j = X_1(jh, p_j)$.

Supposons p_j (et donc P_j) connu et construisons p_{j+1} (et donc P_{j+1}) (rappelons que l'on connaît $P_0 = P$ et donc $p_0 = 0$). L'identité $f(u, \phi(u)) = 0$ fournit par différentiation :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, \phi(u)) + \phi'(u)\frac{\partial f}{\partial v}(u, \phi(u)) = 0.$$

Substituant jh à u et utilisant le fait que $\phi((j + 1)h) - \phi(jh) = \phi'(jh)h + O(h^2)$ on obtient une première approximation q de p_{j+1} :

$$q := p_j - h\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(jh, p_j)}{\frac{\partial f}{\partial v}(jh, p_j)}.$$

Le point $Q := X_1((j+1)h, q)$ est proche de $c((j+1)h)$ de l'ordre de h^2. Pour améliorer cette approximation on est donc amener à chercher un point de la forme $((j+1)h, q+t)$ en résolvant l'équation $g(t) := f((j+1)h, q+t) = 0$, ce qui se fait par une méthode itérative du type *Newton* dont la discussion dépasse l'objectif de ce cours.

Cas où X_1 et X_2 sont représentées implicitement

Au voisinage de P les surfaces X_1 et X_2 sont maintenant respectivement représentées par les équations $f_1(x,y,z) = 0$ et $f_2(x,y,z) = 0$. Supposons le point P_j, approximation de $c(jh)$ construit. Alors il est clair que

$$\frac{c'}{\|c'\|}(jh) = \frac{\nabla_{f_1}}{\|\nabla_{f_1}\|}(jh) \wedge \frac{\nabla_{f_2}}{\|\nabla_{f_2}\|}(jh).$$

Une première approximation Q de P_{j+1} est donc

$$Q := P_j + h\frac{\nabla_{f_1}}{\|\nabla_{f_1}\|}(P_j) \wedge \frac{\nabla_{f_2}}{\|\nabla_{f_2}\|}(P_j).$$

Il faut maintenant améliorer le point Q à l'aide d'une méthode itérative. Le point que l'on vise est le point d'intersection de la courbe C et du plan parallèle à distance h du plan normal à C en P_j. En d'autres termes on cherche des réels t_1 et t_2 tels que

$$g(t_1, t_2) := Q + t_1\frac{\nabla_{f_1}}{\|\nabla_{f_1}\|}(P_j) + t_2\frac{\nabla_{f_1}}{\|\nabla_{f_1}\|}(P_j) \wedge \frac{\nabla_{f_2}}{\|\nabla_{f_2}\|}(P_j) = 0.$$

Cas où X_1 et X_2 sont paramétrées

Au voisinage de P nos deux surfaces X_1 et X_2 sont resp. représentées par des paramétrisations locales $(u_1, v_1) \mapsto X_1(u_1, v_1)$ et $(u_2, v_2) \mapsto X_2(u_2, v_2)$. On a $P = X_1(0,0) = X_2(0,0)$. Les images réciproques de la courbe C par les paramétrisations X_1 et X_2 fournissent ainsi deux courbes C_1 et C_2 respectivement dans les espaces de paramètres (u_1, v_1) et (u_2, v_2). Ce sont ces courbes que l'on cherche à approcher plutôt que C, on en déduit ensuite facilement une approximation de C.

On cherche donc une suite de réels p_j tels que (jh, p_j) approche la courbe C_1 et une suite de points r_j du plan des paramètres (u_2, v_2) qui approche C_2 en demandant que $X_1(jh, p_j)$ soit proche de $X_2(r_j)$ dans $\mathbb{R}^3$. Supposons p_j et r_j connus (on a $p_0 = r_0 = 0$).

Supposant que la courbe C_1 est transverse aux droites $u_1 =$ constante, le vecteur $(1, \lambda)$ du plan de coordonnées (u_1, v_1) est tangent à C_1 en (jh, p_j) (en fait il faudrait dire en $(jh, c_1(jh))$ où $t \mapsto c_1(t)$ est une paramétrisation de C_1) si et seulement si son image par la différentielle de X_1 est dans le plan tangent à X_2. En d'autres termes, si et seulement si

$$\det\left(\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(jh, p_j) + \lambda\frac{\partial X_1}{\partial v_1}(jh, p_j), \frac{\partial X_2}{\partial u_2}(r_j), \frac{\partial X_2}{\partial v_2}(r_j)\right) = 0.$$

Si λ est la solution de cette équation, alors il existe des réels μ et ν uniques tels que

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(jh, p_j) + \lambda\frac{\partial X_1}{\partial v_1}(jh, p_j) = \mu\frac{\partial X_2}{\partial u_2}(r_j) + \nu\frac{\partial X_2}{\partial v_2}(r_j),$$

et, par suite, le vecteur (μ, ν) du plan de coordonnées est tangent à C_2 en r_j (toujours au sens approché). Nous obtenons donc les premières approximations suivantes de p_{j+1} et r_{j+1} :

$$q := p_j + h\lambda \text{ et } s := r_j + h\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Pour les raffiner on cherche un réel t et un vecteur w tels que

$$g(t,w) := X_1((j+1)h, q+t) - X_2(s+w) = 0.$$

Là encore une méthode du type Newton peut être utilisée.

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1 Soit $f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$. Pour quelles valeurs c l'ensemble $f(x,y,z) = c$ est-il une surface lisse ? Même question avec $g(x,y,z) = xyz^2$.

Exercice 1.5.2 Déterminer les plans tangents de la surface $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ aux points $(x,y,0)$, et montrer qu'ils sont tous parallèles à l'axe des z.

Exercice 1.5.3 Montrer que l'équation du plan tangent en $P = (x_0, y_0, z_0)$ d'une surface lisse représentée par l'équation non-dégénérée $f(x,y,z) = 0$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P)(z-z_0) = 0$$

Exercice 1.5.4 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Montrer que le graphe de f est une surface lisse de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1.5.5 Montrer que l'équation du plan tangent à une surface qui est le graphe d'une fonction différentiable $z = f(x,y)$, en un point $P = (x_0, y_0)$, est donnée par

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-y_0).$$

Exercice 1.5.6 (démoulage) Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Une surface X est dite démoulable dans la direction $\vec{v}$ si les surfaces translatées $X + t\vec{v}$ pour tout $t > 0$ sont deux à deux disjointes. Montrer que si le plan tangent $T_P X$ ne contient pas $\vec{v}$ alors il existe un voisinage de P dans X qui est démoulable dans la direction $\vec{v}$.

Exercice 1.5.7 Supposons qu'une surface lisse S rencontre un plan π en un unique point P. Montrer que π coïncide avec le plan tangent $T_P S$ (utiliser le théroème 1.7).

Exercice 1.5.8 (projection stéréographique) Une façon de définir un système de coordonnées de la sphère S^2, supposée donnée par $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$, est de considérer la projection stéréographique $\pi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ qui envoie un point $p = (x,y,z) \in S^2$ privée du pôle nord $N = (0,0,2)$ de sur l'intersection du plan de coordonnées (x,y) avec la droite joignant N et p. Calculer $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$. Déduire que S^2 est une surface lisse. Combien de cartes sont nécessaires pour recouvrir S^2 ?

Exercice 1.5.9 Montrer que les projections orthogonales du centre $(0,0,0)$ de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sur ces plans tangents est une surface lisse donnée par

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\} \setminus \{(0,0,0)\}$$

2 Orientations

Si l'on veut représenter un objet ou une forme en se donnant son bord (BRep, pour Boundary Representation) , c'est-à-dire une surface ou plus généralement une collection de morceaux de surfaces assemblés, il faut pouvoir dire, localement, de quel côté d'un de ces morceaux de surface se trouve cet objet. Cela consiste essentiellement à *orienter* chaque morceau de surface. L'objectif de ce qui suit est d'entrevoir la notion d'orientation d'une surface, ainsi que celle de surface à bord qui donne une définition précise d'un "morceau" de surface.

2.1 Orientation normale

Définition 2.1 *Orienter normalement une surface X en un point P c'est choisir l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux au plan tangent $T_P X$.*

Il est clair qu'un choix d'orientation normale en un point P détermine un choix d'orientation constante sur un voisinage du point P (c'est immédiat par redressement local).

Si une surface X est localement implicite ou paramétrée on peut naturellement définir des orientations normales :

- Soit f une équation locale de X, alors le champs de vecteurs $\frac{\nabla_f}{\|\nabla_f\|}$ définit localement une orientation normale de X. Remarquer que $-f$ définit l'orientation inverse par ce même procédé.
- Si $(u, v) \to X(u, v)$ est une paramétrisation locale de X, alors le champs de vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$ fournit localement, après normalisation, une orientation normale de X. Remarquer que la permutation de u et v inverse l'orientation obtenue par ce même procédé

Définition 2.2 *Une orientation normale d'une surface X est la donnée d'une orientation normale en tout point de X qui soit localement constante.*

De proche en proche on peut ainsi essayer d'orienter normalement une surface donnée X tout entière. Ce n'est pas toujours possible. On parle de *surface orientable*, par exemple la sphère, et de *surface non orientable*, par exemple la bande de Möbius.

2.2 Orientation tangente

Dans la paragraphe précédent l'orientation d'une surface se fait à l'aide des vecteurs normaux. Une autre possibilité est d'orienter les plans tangents d'une surface, généralisant ainsi la notion plus familière d'orientation d'une courbe par ses vecteurs tangents : orienter une courbe en un point P c'est choisir entre les deux vecteurs unitaires tangents en P, i.e. orienter la droite tangente en P.

Définition 2.3 *Une orientation tangente d'une surface X en un point P est la donnée d'une orientation du plan tangent $T_P X$, c'est-à-dire choisir quelles sont les bases orthonormées directes et indirectes de $T_P X$.*

Une orientation tangente en un point P d'une surface X permet de déterminer un choix d'orientation tangente constante sur un voisinage de P (cela consiste essentiellement à demander qu'un certain déterminant reste de signe constant au voisinage de P).

Définition 2.4 *Une orientation tangente d'une surface X est la donnée d'une orientation tangente en tout point $P \in X$ qui soit localement constante.*

Si l'on fixe une orientation de l'espace ambiant, ici $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, alors une orientation normale détermine une orientation tangente, et inversement. Par exemple, si $\Gamma(P)$ désigne la normale choisie en P ;

- dans $\mathbb{R}^2$: la tangente orientée $\tau(P)$ est telle que la base $\Gamma(P), \tau(P))$ soit directe.
- dans $\mathbb{R}^3$: une base (e_1, e_2) de $T_P X$ est directe si $\Gamma(P) = e_1 \wedge e_2$.

2.3 Orientation induite sur le bord d'une surface

Dans les deux paragraphes précédents nous avons introduit la notion d'orientation afin de donner du sens au fait qu'une surface peut border un objet, i.e. dire de quel côté de la surface se trouve l'objet. Nous nous intéressons maintenant au problème inverse : étant donné un fermé D de $\mathbb{R}^3$ tel que D est l'adhérence de son intérieur et tel que son bord soit une surface X (au moins localement), alors X hérite d'une orientation normale par la convention de la *normale sortante*. C'est donc ici l'objet qui induit une orientation sur son bord, et non plus le bord qui, au moyen de l'information supplémentaire d'orientation, permet de définir l'objet qu'il borde.

Nous introduisons donc maintenant la notion de surface à bord puis la notion d'orientation induite sur le bord d'une surface.

Définition 2.5 *Une surface à bord est une partie de $\mathbb{R}^3$ qui peut être localement redressée sur un plan ou sur un demi-plan.*

Par définition le bord d'une surface à bord est exactement constitué des points qui sont (localement) redressés sur le bord d'un demi-plan. Il est également clair qu'une surface à bord peut être localement prolongée au-delà de son bord (cela se voit trivialement en utilisant les redressements locaux). Une autre conséquence de la définition des surfaces à bord est que $T_P X$, pour X une surface à bord, est défini en tout point de X, en particulier même sur le bord de X (utiliser la définition du plan tangent à l'aide des redressements locaux).

Soit X une surface à bord dans $\mathbb{R}^3$ (non forcément supposé orienté), munie d'une orientation tangente, alors on en déduit une orientation tangente du bord de X, noté ∂X. En effet, ∂X hérite d'une orientation normale par la normale sortante : en chaque point $P \in \partial X$ c'est le vecteur unitaire $\delta(P) \in T_P X$ qui est orthogonal à $T_P \partial X$ et qui pointe vers l'extérieur de X (après redressement local sur un demi-plan). Il s'en suit une orientation tangente de ∂X : en chaque point $P \in \partial X$ c'est le vecteur unitaire $\tau(P) \in T_P \partial X$ tel que la base $(\delta(P), \tau(P))$ de $T_P X$ soit directe.

Si de plus l'orientation de X provient d'une orientation normale (c'est par exemple le cas si $\mathbb{R}^3$ est orienté) $P \mapsto \Gamma(P)$, alors en tout point $P \in \partial X$ on a $\delta(P) \wedge \tau(P) = \Gamma(P)$.

3 Courbure des courbes

L'objet de cette partie est de définir une paramétrisation naturelle pour une courbe paramétrée donnée, paramétrisation appelée *paramétrisation par l'abscisse curviligne*, puis d'en déduire des invariants géométriques des courbes, parmi lesquels la *courbure*. Cela nous permettra en particulier de donner des conditions de raccord pour deux courbes en un point.

3.1 Abscisse curviligne

Définition 3.1 (longueur) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t \in I \mapsto X(t)$ une courbe paramétrée X de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. La longueur de X est*

$$\mathrm{long}(X) := \int_I \|X'(t)\| dt.$$

La longueur de l'arc de X délimité par les points $X(t_0)$ et $X(t_1)$ vaut $\left| \int_{t_0}^{t_1} \|X'(t)\| dt \right|$.

Cette définition est consistante car la longueur d'une courbe ne dépend pas du choix d'une paramétrisation. Remarquer que la longueur est invariante par toute isométrie de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2 (abscisse curviligne) *Soit $t \in I \mapsto X(t)$ une paramétrisation d'une courbe X de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit t_0 fixé. L'abscisse curviligne d'origine $X(t_0)$ de X est la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (indépendante du choix de paramétrisation $t \mapsto X(t)$)*

$$\begin{array}{rcl} s : I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|X'(t)\| dt. \end{array}$$

Si la paramétrisation $t \mapsto X(t)$ est injective, alors on peut voir s comme une fonction sur $X = X(I) \subset \mathbb{R}^n$, fonction associant à tout point $x := X(t) \in X$ la valeur $s(t)$.

Si la paramétrisation $t \mapsto X(t)$ est injective (donc bijective sur son image) et $X'(t)$ ne s'annule pas sur I, alors $s : I \to s(I)$ est un difféomorphisme entre les deux intervalles I et $J := s(I)$ de $\mathbb{R}$: c'est un changement de coordonnées curvilignes (voir théorème A.6). On obtient ainsi une nouvelle paramétrisation de X :

$$\begin{array}{ccc} J = s(I) & \xrightarrow{X\circ\sigma} & X \subset \mathbb{R}^n \\ s & \mapsto & X_1(s) = X(\sigma(s)), \end{array}$$

où $\sigma : J \to I$ est l'inverse de $s : I \to J$.

Cette nouvelle paramétrisation $s \mapsto X_1(s)$ de la courbe X s'appelle une *paramétrisation par l'abscisse curviligne*. Par construction elle n'est définie que pour les courbes X possédant une paramétrisation $t \mapsto X(t)$ injective et telle que $X'(t)$ ne s'annule pas sur I, mais cette restriction n'est pas essentielle (voir théorème 3.6).

Voici quelques propriétés de la paramétrisation par l'abscisse curviligne :

1. $s \mapsto X_1(s)$ est au moins aussi régulière que $t \mapsto X(t)$.
2. $X_1(0) = X(t_0)$ (ce point est appelé l'origine) et $\|X_1'(s)\| = 1$ pour tout s.
3. $s \mapsto X_1(s)$ est unique au signe près : il y a exactement deux paramétrisations de X par l'abscisse curviligne d'origine $X(t_0)$; elles diffèrent par le changement de coordonnées curvilignes $t \mapsto -t$. Choisir une de ces deux paramétrisations revient donc à choisir une orientation de X.
4. Pour tout s on a $X_1'(s).X_1''(s) = 0$ (en dérivant $\|X_1'(s)\| = 1$).

En résumé, étant donné une courbe plongée dans $\mathbb{R}^n$ (de classe $\mathcal{C}^1$) *orientée* et *pointée* on a construit une paramétrisation naturelle. Les grandeurs géométriques associées à cette paramétrisation vont donc fournir des invariants de la courbe.

Remarque 3.3 *En général l'abscisse curviligne est difficile à calculer, et elle n'est qu'exceptionnellement donnée par une formule close. Par exemple l'abscisse curviligne d'origine* $(0,0)$ *sur la parabole* $t \mapsto (t, t^2)$ *est*

$$s(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{1+u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(\log(t+\sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2}\right).$$

3.2 Courbes planes

Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne (X est donc supposée orientée et pointée, et le plan est lui aussi supposé orienté). On sait que $\|X'(s)\| = 1$ pour tout s, et aussi que $X''(s)$ est orthogonal à $X'(s)$. Si $\nu(s)$ désigne la normale unitaire à X au point $X(s)$ telle que $(X'(s), \nu(s))$ soit une base orthonormée directe (orientation normale induite par l'orientation du plan), alors $X''(s)$ est colinéaire à $\nu(s)$, i.e. $X''(s) = \kappa(s)\nu(s)$ où $\kappa(s)$ est une fonction de s à valeur dans $\mathbb{R}$: c'est la *courbure* de X, elle correspond, au signe près, à la norme de l'accélération de X.

Définition 3.4 (courbure) *Soit* $s \mapsto X(s)$ *une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne. On suppose le plan orienté. Soit* $\nu(s)$ *le vecteur unitaire tel que* $(X'(s), \nu(s))$ *soit une base orthonormée directe. Alors la courbure de* X *au point* $X(s)$ *est*

$$\kappa(s) := \kappa(X(s)) = X''(s).\nu(s) = \det(X'(s), X''(s)).$$

En particulier $\|X''(s)\| = |\kappa(s)|$ *pour tout* s.

La courbure est vue comme une fonction définie le long de la courbe. Elle ne dépend pas d'un choix de paramétrisation de X, seulement de son orientation (et de celle du plan). Cependant il existe une formule qui permet de calculer la courbure (et sa dérivée) à partir d'une paramétrisation donnée.

Proposition 3.5 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe plane paramétrée. Sa courbure au point $X(t)$ est donnée par la formule*

$$\kappa(X(t)) = \frac{\det(X'(t), X''(t))}{\|X'(t)\|^3},$$

et la dérivée de κ par rapport à l'abscisse curviligne est donnée par

$$\frac{\partial \kappa}{\partial s}(X(t)) = \frac{\det(X'(t), X'''(t)) - 3\kappa(X(t))\|X'(t)\|X'(t).X''(t)}{\|X'(t)\|^4}.$$

Quelques remarques :

- On suppose implicitement que $t \mapsto X(t)$ est injective et $X'(t) \neq 0$ pour tout t.
- Le signe de la courbure change si l'on change le sens de parcours de X, ou bien l'orientation du plan.
- Une isométrie du plan qui préserve l'orientation (c'est-à-dire une translation ou une rotation) laisse invariante la courbure, et une isométrie renversant l'orientation (c'est-à-dire une symétrie par rapport à une droite) change le signe de la courbure.
- Dire que $\kappa(s) \neq 0$ pour tout s c'est dire que si $t \mapsto X(t)$ est une paramétrisation (injective et telle que $X'(t) \neq 0$ pour tout t) de X alors $X'(t)$ et $X''(t)$ sont indépendants pour tout t.

Nous arrivons au résultat important suivant qui dit essentiellement qu'une courbe est déterminée par sa courbure.

Théorème 3.6 *Soit κ une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$, P un point et v un vecteur unitaire dans le plan. Il existe une unique courbe X de classe $\mathcal{C}^2$, paramétrée par son abscisse curviligne $s \mapsto X(s)$, telle que $\kappa(s)$ soit la courbure de X en $X(s)$, $X(t_0) = P$ et $X'(t_0) = v$.*

Il faut remarquer que κ impose l'allure de la courbe dont elle est la courbure. La courbure étant invariante par isométrie (préservant l'orientation) il faut imposer à la courbe de passer par un point P avec une direction tangente v imposée pour obtenir l'unicité dans le théorème précédent.

Soit X une courbe et P un point de X. La tangente $T_P X$ à X au point P fournit une approximation locale de X en P à l'ordre 1, c'est-à-dire approche X par la meilleure droite possible (qui se trouve être la tangente). La courbure permet de fournir des approximations à l'ordre 2 ; la courbe est alors localement approchée par des arcs de cercles particuliers appelés *cercles osculateurs*.

Soit X une courbe orientée de classe $\mathcal{C}^2$, P un point de X, $\tau(P)$ le vecteur tangent en P et $\nu(P)$ le vecteur normal direct ($(\tau(P), \nu(P))$ est une base orthonormée directe). Pour tout réel r on note $C(r)$ le cercle de rayon $|r|$ et de centre le point $P + r\nu(P)$. Il est par construction tangent à X au point P.

Proposition 3.7 *Le cercle $C(r)$ à un contact d'ordre 2 avec la courbe X au point P si et seulement si $r\kappa(P) = 1$, où $\kappa(P)$ désigne la courbure de X en P. Le cercle $C(r)$ est, dans un voisinage de P, entièrement du côté de $\nu(P)$ si $1 - r\kappa(P) > 0$, et entièrement du côté opposé de $\nu(P)$ si $1 - r\kappa(P) < 0$.*

Si $\kappa(P) = 0$ on dit que X possède un point d'inflexion en P ; elle a alors un point de contact d'ordre 2 avec sa tangente.

Si $\kappa(P) \neq 0$ alors $R = \frac{1}{\kappa(P)}$ s'appelle le rayon de courbure en P à la courbe X et le cercle $C(R)$ s'appelle le cercle osculateur en P à la courbe X.

La notion de courbure est très utile et à de nombreuses conséquences, aussi bien théoriques que pratiques (par exemple en Conception Assistée par Ordinateur). Nous mentionnons ici la caractérisation d'une courbe *localement convexe*.

Définition 3.8 (convexité locale) *Une courbe plane X est dite localement convexe si pour tout point $P \in X$ il existe un réel r et un convexe $C \subset B(P, r)$ tel que le bord de C dans $B(P, r)$ coïncide avec l'intersection de X et $B(p, r)$. Autrement dit X coïncide localement avec le bord d'un convexe.*

Proposition 3.9 *Une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ est localement convexe en tout point si et seulement si sa courbure garde un signe constant.*

3.3 Courbes gauches

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que la courbure permet de déterminer une courbe plane à déplacement près. Nous allons maintenant voir qu'une telle détermination existe également pour les courbes gauches mais nécessite deux invariants : la *courbure* et la *torsion*.

Définition 3.10 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe X de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne.*

- *La tangente à X au point $X(s)$ est la droite passant par le point $X(s)$ et dirigée par le vecteur unitaire $\tau(s) := X'(s)$.*
- *Le nombre $\kappa(s) := \|X"(s)\|$ s'appelle la* courbure *de X au point $X(s)$. Lorsque $\kappa(s) = 0$ on dit que $X(s)$ est un point d'inflexion de la courbe X.*
- *Si $X(s)$ n'est pas un point d'inflexion on appelle* normale unitaire orientée *le vecteur*

$$\nu(s) := \frac{X"(s)}{\|X"(s)\|},$$

et on appelle binormale *le vecteur unitaire $b(s) := \tau(s) \wedge \nu(s)$; il est tel que la base $(\tau(s), \nu(s), b(s))$ soit orthonormée directe.*

Le repère mobile $s \mapsto (X(s), \tau(s), \nu(s), b(s))$ s'appelle le repère de Frenet *de la courbe.*

Il est important de remarquer ici que la courbure d'une courbe gauche est positive ou nulle par définition, elle ne dépend donc pas de l'orientation de la courbe, ni même de l'orientation de $\mathbb{R}^3$. Il en est de même pour le vecteur normal orienté ν. Par contre la binormale dépend de l'orientation de la courbe et de $\mathbb{R}^3$.

Noter également qu'une courbe gauche est une droite si et seulement si sa courbure est nulle.

Proposition 3.11 *Soient X une courbe de $\mathbb{R}^3$ et P un point sur X.*

Si P est un point d'inflexion alors X admet en P un contact d'ordre 2 avec sa tangente. De plus, un plan admet un contact d'ordre 2 avec X en P si et seulement s'il contient la tangente en P.

Si P n'est pas un point d'inflexion alors un unique plan admet un contact d'ordre 2 avec X en P, c'est le plan engendré par τ et ν (où (τ, ν, b) désigne le repère de Frenet de X en P) appelé plan osculateur *de X en P.*

Comme dans le cas des courbes planes, il est possible de calculer la courbure d'une courbe gauche à partir d'une paramétrisation quelconque.

Proposition 3.12 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe X de $\mathbb{R}^3$ telle que $X'(t)$ ne s'annule pas. La courbure de X au point $X(t)$ est donnée par la formule*

$$\kappa(X(t)) = \frac{\|\frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2}\|}{\|\frac{dX}{dt}\|^3}(X(t)).$$

Si la courbure est non nulle en $X(t)$ le plan osculateur de X en $X(t)$ est engendré par $X'(t)$ et $X''(t)$.

On introduit maintenant la *torsion* d'une courbe gauche.

Définition 3.13 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe X de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. On suppose que X n'a pas de point d'inflexion. La fonction $\theta(s) := \nu'(s).b(s)$ s'appelle la* torsion *de la courbe X.*

Remarque 3.14 *Puisque le repère de Frenet est orthonormé la matrice A dont les colonnes sont les composantes des dérivées de τ, ν et b dans la base (τ, ν, b) est antisymétrique. Deux composantes sont données par la courbure car $\tau' = \kappa\nu$, et la troisième est baptisée torsion :*

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \tau' & \nu' & b' \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \tau \\ \nu \\ b \end{array} \end{array} .$$

Plus explicitement, on a ainsi les relations :

$$\tau' = \kappa\nu, \quad \nu' = -\kappa\nu + \theta b, \quad b' = -\theta\nu.$$

D'un point de vu géométrique la torsion mesure le fait qu'une courbe ne reste pas dans un plan.

Proposition 3.15 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe X de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne, sans point d'inflexion. On a alors*

$$(X(s) - X(0)).b(0) = \kappa(0)\theta(0)\frac{s^3}{6} + o(s^3).$$

Autrement dit la torsion mesure à quelle vitesse la courbe s'éloigne de son plan osculateur.

Le résultat suivant montre que l'on peut calculer la torsion, tout comme la courbure, à partir d'une paramétrisation quelconque.

Proposition 3.16 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe X de $\mathbb{R}^3$ munie d'un paramétrage de classe $\mathcal{C}^3$ quelconque sans point d'inflexion. Sa torsion est donnée par la formule*

$$\theta = \frac{\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3})}{\kappa^2 \| \frac{dX}{dt} \|^6} = \frac{\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3})}{\| \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} \|^2}.$$

Une courbe gauche est déterminée par sa courbure et sa torsion à déplacement près :

Théorème 3.17 *Soit κ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive et θ un fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. Soit (P, τ_0, ν_0, b_0) un repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^3$ orienté. Il existe une et une seule courbe X de classe $\mathcal{C}^3$, paramétrée par son abscisse curviligne $s \in I$, sans point d'inflexion, telle que :*
- *La courbure de X en $X(s)$ est $\kappa(s)$,*
- *La torsion de X en $X(s)$ est $\theta(s)$,*
- *$X(0) = P$, $X'(0) = \tau_0$ et $X''(0) = \kappa(0)\nu_0$.*

3.4 Condition de raccord de deux courbes

Le problème de raccord de courbes est un problème important en CAO. Nous mentionnons ici comment la courbure et la torsion permettent de donner des conditions de régularité géométrique (c'est-à-dire ne dépendant pas d'un choix de paramétrisation) pour le raccord de deux courbes en un point donné.

Cas des courbes planes

Soient X_1 et X_2 deux courbes de classe $\mathcal{C}^3$ d'origine P de $\mathbb{R}^2$. On met ces deux courbes bout à bout de manière compatible avec les orientations, obtenant ainsi une courbe X. On a alors les conditions de raccord suivantes :
- La courbe X est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les courbes X_1 et X_2 ont même tangente en P.
- La courbe X est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si les courbes X_1 et X_2 ont même tangente et même courbure en P.
- La courbe X est de classe $\mathcal{C}^3$ si et seulement si les courbes X_1 et X_2 ont même tangente, même courbure et même dérivée de courbure en P.

Cas des courbes gauches

Soient X_1 et X_2 deux courbes de classe $\mathcal{C}^3$ d'origine P de $\mathbb{R}^3$. On met ces deux courbes bout à bout de manière compatible avec les orientations, obtenant ainsi une courbe X. On a alors les conditions de raccord suivantes :

- La courbe X est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les courbes X_1 et X_2 ont même tangente en P.
- La courbe X est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si les courbes X_1 et X_2 ont même tangente, même courbure et même normale orientée en P.
- La courbe X est de classe $\mathcal{C}^3$ si et seulement si les courbes X_1 et X_2 ont même tangente, même courbure, même normale orientée, même dérivée de courbure et même torsion en P.

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1 Calculer la courbure d'un cercle de rayon R (dans les deux sens possibles). Calculer au point $(0,0)$ la courbure de la parabole $y = x^2$ dans le sens des x croissants.

Exercice 3.5.2 Soit $t \mapsto (t, f(t))$ le graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle. Calculer sa courbure. Dans quelles conditions la dérivée seconde en est-elle une bonne approximation ?

Exercice 3.5.3 Montrer qu'une courbe plane à une courbure constante si et seulement si c'est une droite ou un cercle.

Exercice 3.5.4 Soit $t \mapsto D(t)$ une famille de droites du plan. On appelle *enveloppe* de cette famille une courbe plane $X : t \mapsto X(t)$ telle que pour tout t la droite $D(t)$ en tangente à X en $X(t)$.

1. Supposons que $D(t)$ soit la droite passant par un point $P(t)$ et de vecteur directeur $u(t)$ ($\neq 0$ pour tout t). Montrer que si la $\det(u(t), u'(t)) \neq 0$ pour tout t alors la famille $D(t)$ admet une enveloppe. Que devient cette hypothèse si $u(t)$ est supposée unitaire pour tout t.
2. Trouver l'enveloppe de $t \mapsto D(t) : 2tx - y - 2pt^2 = 0$. Même question pour la famille $t \mapsto D(t)$: $(3t - t^6)x + (3t^2 - 1)y - 2t^3 = 0$.
3. Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par son abscisse curviligne. Montrer que si X n'a pas de point d'inflexion la famille de ses normales possède une enveloppe, appelée *développée* de X. Montrer que la développée est de X est le lieu des centres des cercles osculateurs de X.
4. Calculer la développée de $y^2 = 2px$.

Exercice 3.5.5 Calculer la courbure et la torsion de la courbe $t \mapsto X(t) = (t, t^2, t^3)$. Quel est le plan osculateur en $t = 0$? la normale ? la binormale ?

Exercice 3.5.6 Montrer que la torsion d'une courbe sans point d'inflexion est nulle si et seulement si celle-ci est contenue dans un plan.

Exercice 3.5.7 Soient X une courbe et P un point de X qui n'est pas un point d'inflexion. Montrer qu'il existe exactement un cercle qui a un contact d'ordre 2 avec X en P. Donner son rayon et son centre.

Exercice 3.5.8 Une hélice est une courbe qui, dans un repère orthonormé, admet une paramétrisation de la forme

$$t \mapsto (R\cos(t), R\sin(t), \alpha t)$$

où $R > 0$ et $\alpha \neq 0$ sont des constantes réelles.

1. Calculer la courbure et la torsion de cette hélice.
2. Montrer qu'une courbe a une courbure et une torsion constante si et seulement si c'est un cercle ou une hélice.

4 Courbure des surfaces

Comme pour le cas des courbes, nous allons définir des invariants d'une surface indépendants d'une paramétrisation, la première et la deuxième formes fondamentales. Cela nous permettra de donner des conditions de raccord pour deux surfaces.

4.1 Première forme fondamentale

Soit X une surface de $\mathbb{R}^3$. En tout point de X le plan tangent hérite d'une structure euclidienne (existence d'un produit scalaire) de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$.

Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X. On sait que l'espace tangent à X est engendré par les vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ (on omet volontairement de ne pas préciser le point de X que l'on considère pour alléger les notations). Tout vecteur w de l'espace tangent s'écrit donc

$$w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v},$$

où a et b sont des réels. Au produit scalaire sur l'espace tangent à X (qui est induit par celui de $\mathbb{R}^3$) est associée une forme quadratique (dépendant du point (u,v)) appelée *première forme fondamentale* de la surface X :

$$\|w\|^2 = a^2\|\frac{\partial X}{\partial u}\|^2 + 2ab\frac{\partial X}{\partial u}.\frac{\partial X}{\partial v} + b^2\|\frac{\partial X}{\partial v}\|.$$

Définition 4.1 *La forme quadratique $I_P(w) := \|w\|^2$ sur T_PX, P étant un point de X et $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X telle que $X(0,0) = P$, s'appelle la première forme fondamentale de X en P. On note traditionnellement*

$$E := \|\frac{\partial X}{\partial u}(0,0)\|^2, \;\; F := \frac{\partial X}{\partial u}(0,0).\frac{\partial X}{\partial v}(0,0), \;\; \text{et } G := \|\frac{\partial X}{\partial v}(0,0)\|^2.$$

Ainsi si $w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$, alors $I_P(w) = a^2E + 2abF + b^2G$.

Il faut noter que les quantités E, F et G peuvent être les mêmes pour deux surfaces différentes. En voici une illustration :

- Un plan π passant par un point P et dirigé par les vecteurs orthonormaux w_1 et w_2 peut être paramétré par $(u,v) \mapsto P + uw_1 + vw_2$, et donc $E = 1$, $F = 0$ et $G = 1$.
- Un cylindre droit peut être paramétré par $(u,v) \mapsto X(u,v) := \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ v \end{pmatrix}$, où (u,v) sont les points de $\mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq u < 2\pi$. Ici encore on obtient $E = 1$, $F = 0$ et $G = 1$.

La première forme fondamentale d'une surface permet de répondre à des questions métriques sur une surface X, par exemple le calcul de la longueur d'un arc de courbe tracé sur X, ou bien encore le calcul de l'aire d'une région de X.

Calcul de la longueur d'un arc tracé sur une surface

Soit $X \subset \mathbb{R}^3$ une surface localement paramétrée par $(u,v) \mapsto X(u,v)$. Soit $t \in I \mapsto c(t) := (u(t), v(t))$ une courbe tracée dans le domaine des paramètres, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. La longueur de l'arc de courbe $t \in I \mapsto X(u(t), v(t)) = X \circ c(t)$ tracée sur X est donnée par

$$\begin{aligned}
\text{longueur}(X \circ c) &= \int_I \|(X \circ c)'(t)\| dt \\
&= \int_I \|u'(t)\frac{\partial X}{\partial u} + v'(t)\frac{\partial X}{\partial v}\| dt \\
&= \int_I \sqrt{u'(t)^2E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2G}\, dt.
\end{aligned}$$

Cette formule est souvent résumée par $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, où les différentielles sont prises par rapport à la variable t et s désigne l'abscisse curviligne de la courbe tracée sur X.

Calcul de l'aire d'une surface localement paramétrée

Définition 4.2 *L'aire d'une surface localement paramétrée par $(u, v) \mapsto X(u, v)$ où $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par l'intégrale*

$$\text{Aire}(X) := \int_U \|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\| dudv = \int_U \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Le fait que cette définition ait un sens, c'est-à-dire qu'elle soit indépendante d'un choix de paramétrisation, résulte (presque immédiatement) du théorème de changement de variables A.8 sous une intégrale. La deuxième égalité donnée dans cette définition découle des définitions : si ϕ désigne l'angle entre les vecteur $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$, on a

$$\|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\|^2 = \|\frac{\partial X}{\partial u}\|^2 \|\frac{\partial X}{\partial v}\|^2 sin(\phi)^2,$$

mais $\sin(\phi)^2 = 1 - \cos(\phi)^2$ et on sait que

$$\|\frac{\partial X}{\partial u} . \frac{\partial X}{\partial v}\|^2 = \|\frac{\partial X}{\partial u}\|^2 \|\frac{\partial X}{\partial v}\|^2 cos(\phi)^2,$$

d'où l'égalité $\|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\|^2 = EG - F^2$.

4.2 Deuxième forme fondamentale

La seconde forme fondamentale joue pour une surface le rôle que joue la courbure pour les courbes : elle contient l'information au deuxième ordre, indépendamment de tout choix de paramétrisation. Cependant c'est un objet un peu plus complexe : une forme quadratique sur le plan tangent.

Dans tout ce qui suit X désigne une surface de $\mathbb{R}^3$ orientée normalement par $P \in X \mapsto \Gamma(P)$ où $\Gamma(P)$ est un vecteur unitaire orthogonal au plan tangent $T_P X$ au point P de X. Rappelons que si X est représentée (localement) par une équation implicite ou bien par une paramétrisation alors il existe une façon naturelle de définir une orientation normale de X, et donc de définir l'application Γ. Voir le paragraphe 2.1.

Définition 4.3 *L'application $X \to \mathbb{R}^3 : P \mapsto \Gamma(P)$ prend ses valeurs dans la sphère $S^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\}$. L'application co-restreinte $\Gamma : X \to S^2 : P \mapsto \Gamma(P)$ est différentiable et est appelée l'application de Gauss de X.*

Soit P un point de X. Par construction les plans tangents $T_P X$ et $T_{\Gamma(P)} S^2$ coïncident, ainsi la différentielle de l'application de Gauss de X en P définit un endomorphisme linéaire sur $T_P X$, c'est-à-dire $d_P \Gamma : T_P X \to T_P X$. Les résultats de l'appendice B permettent de définir la seconde forme fondamentale de X en P :

Proposition 4.4 *La différentielle $d_P \Gamma : T_P X \to T_P X$ est un endomorphisme linéaire auto-adjoint.*

Définition 4.5 *La forme quadratique II_P définie sur le plan tangent $T_P X$ par $II_P(w) = -\langle d_P \Gamma(w), w \rangle$ est appelée la seconde forme fondamentale de X en P.*

Cette forme quadratique permet de donner des informations géométriques sur la surface au point P, ce que nous allons maintenant entrevoir.

Courbure normale

Soit C une courbe paramétrée par son abscisse curviligne $s \mapsto c(s)$ et tracée sur X. On suppose que $(P = c(0), \tau, \nu, b)$ est le repère de Frenet de $s \mapsto c(s)$ en P (et donc que P n'est pas un point d'inflexion). Alors $II_P(\tau)$ est appelée la *courbure normale* de C dans X en P. Cette terminologie est justifiée par le calcul suivant :

$$II_P(\tau) = -\langle d_P\Gamma(\tau), \tau\rangle = -\langle (\Gamma \circ c)'(0), c'(0)\rangle = \langle \Gamma(P), c''(0)\rangle,$$

la dernière égalité provenant de la dérivation de l'égalité $\langle (\Gamma \circ c)(s), c'(s)\rangle = 0$ (vraie car C est tracée sur X). En d'autres termes, $II_P(\tau)$ calcule la composante normale à X de l'accélération de la courbe C en P.

Si l'on pousse le calcul légèrement plus loin on obtient $II_P(\tau) = \kappa(P)\langle \Gamma(P), \nu\rangle$, où $\kappa(P)$ désigne la courbure de la courbe C de $\mathbb{R}^3$ au point P, qui nous conduit à l'interprétation géométrique suivante : la seconde forme fondamentale évaluée en un vecteur $t \in T_P X$ calcule, au signe près, la courbure de la section normale de direction t de X (i.e. la courbe plane obtenue en coupant X par un le plan $\langle t, \Gamma(P)\rangle$). Noter que cette courbure dépend par conséquent *quadratiquement* de t.

Courbures principales

D'après l'appendice B il existe une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de $T_P X$ dans laquelle $d_p\Gamma : T_P X \to T_P X$ admet pour matrice

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } k_1 \geq k_2,$$

où k_1 et k_2 correspondent respectivement au maximum et au minimum de la seconde forme fondamentale II_P restreinte au cercle unité de $T_P X$. En fait k_1 et k_2 sont les valeurs extrémales de la courbure normale en P. On les appelle les *courbures principales* en P, et leurs directions propres correspondantes (données par les vecteurs e_1 et e_2 de $T_P X$) sont appelées les *directions principales*. Ainsi une courbe tracée sur X dont la vitesse en tout point est une direction principale s'appelle une *ligne de courbure*.

On définit également la *courbure moyenne* de X en P comme l'opposé de la trace de $d_P\Gamma$ et la *courbure de Gauss* comme le déterminant de $d_P\Gamma$ (noter que la trace et le déterminant sont des invariants de similitude, ils peuvent donc être calculer dans n'importe quelle base de $T_P X$).

Mentionnons deux résultats importants sur la courbure de Gauss :
- Un difféomorphisme isométrique (c'est-à-dire qui conserve les distances) entre 2 surfaces préserve la courbure de Gauss (en particulier il n'existe pas de carte plane isométrique de la terre, ni même d'une portion de la surface de la terre !).
- Le signe de la courbure de Gauss permet de positionner localement la surface par rapport à son plan tangent (voir ci-après).

Calcul des courbures

Nous donnons à présent des formules qui permettent, à partir d'une paramétrisation locale de X, de calculer la seconde forme fondamentale de X dans une base naturelle de $T_P X$.

Proposition 4.6 *Soit $(u, v) \mapsto X(u, v)$ une paramétrisation locale de X au point $P = X(0, 0)$. Dans la base $\langle \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0)\rangle$ de $T_P X$ la seconde forme fondamentale II_P en un point $w = a\frac{\partial X}{\partial u}(0) + b\frac{\partial X}{\partial v}(0)$ vaut*

$$II_P(w) = II_P(a\frac{\partial X}{\partial u}(0) + b\frac{\partial X}{\partial v}(0)) = a^2 A + 2abB + b^2 C$$

où l'on a

$$\begin{aligned} A &= \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right\|^{-1} \det \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(0), \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right), \\ B &= \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right\|^{-1} \det \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(0), \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right), \\ C &= \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right\|^{-1} \det \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(0), \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right). \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant des formules similaires pour la matrice de $d_P\Gamma$.

Proposition 4.7 *Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X en $P = X(0,0)$. On note*

$$I_P(du,dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \text{ et } II_P(du,dv) = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2$$

les première et seconde formes fondamentales de X en P dans la base $\langle \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \rangle$, de coordonnées (du,dv), de T_PX. Alors la matrice de $-d_P\Gamma$ dans cette même base (matrice qui n'est pas nécessairement symétrique) est donnée par

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Les courbures principales sont les valeurs propres de cette matrice et les droites propres les directions principales. En particulier la courbure de Gauss vaut $\frac{AC-B^2}{EG-F^2}$.

Distance du plan tangent à la surface

Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X au voisinage de $P = X(0,0)$. La distance d'un point $X(u,v)$ au plan tangent $T_PX = \langle \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \rangle$ de X au point P est donnée par

$$d := \langle X(u,v) - P, \Gamma(P) \rangle.$$

Or d'après la formule de développement limité de Taylor on a

$$X(u,v) = X(0,0) + \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}(0) \\ \frac{\partial X}{\partial v}(0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(0) & \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(0) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(0) & \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + o(u^2 + v^2).$$

On en déduit donc (cf. proposition 4.6)

$$d = \frac{1}{2}\, II_P \left(u \frac{\partial X}{\partial u}(0) + v \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right) + o(u^2 + v^2).$$

Remarquer que cette formule permet de donner la position de X au voisinage de T_PX suivant le signe de la seconde forme fondamentale. Ainsi si la courbure de Gauss (i.e. le déterminant de $d_P\Gamma$) est strictement positive alors II_P a un signe constant, et donc le plan tangent se trouve d'un même coté de la surface ; si la courbure de Gauss est strictement négative alors II_P change de signe et la surface traverse le plan tangent.

Seconde forme fondamentale et Hessienne

Nous justifions ici le fait que la seconde forme fondamentale “contient l'information au deuxième ordre”, tout comme la courbure pour les courbes.

Soit C une courbe plane passant par un point P. Alors, d'après le théorème de la fonction implicite A.7, dans le repère $(P, \tau(P), \nu(P))$ cette courbe est (dans un voisinage de P) un graphe $t \mapsto (t, f(t))$ où $f(0) = f'(0) = 0$. On en déduit que f admet comme développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(t) = \frac{1}{2}\kappa(P)t^2 + o(t^2),$$

développement dont nous aurions pu partir pour définir la courbure en P.

Revenons à notre surface X. Dans un voisinage du point P elle est le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$, toujours d'après le théorème A.7. On en déduit donc une paramétrisation locale de la forme $(u, v) \mapsto X(u, v) = (u, v, f(u, v))$. On peut alors donner une orientation normale par

$$\Gamma(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial_x f^2 + \partial_y f^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y}$, et on déduit

$$II_P(du, dv) = \frac{\partial_{xx} f}{\sqrt{1 + \partial_x f^2 + \partial_y f^2}} du^2 + \frac{\partial_{xy} f}{\sqrt{1 + \partial_x f^2 + \partial_y f^2}} dudv + \frac{\partial_{yy} f}{\sqrt{1 + \partial_x f^2 + \partial_y f^2}} dv^2,$$

dans la base $(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v})$ de $T_P X$. Par choix de repère on peut supposer que $f(0, 0) = 0$ (on suppose que P est l'origine) et que $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$ (i.e. on suppose que $\Gamma(P)$ est le vecteur $(0\ 0\ 1)$). Alors la seconde forme fondamentale s'écrit

$$II_P(du, dv) = \partial_{xx} f(0, 0)du^2 + \partial_{xy} f(0, 0)dudv + \partial_{yy} f(0, 0)dv^2,$$

qui n'est autre que la *Hessienne* de la fonction $f(x, y)$ en $(0, 0)$. Le développement limité de f en $(0, 0)$ s'écrit

$$f(x, y) = \frac{1}{2} II_P(x, y) + o(x^2 + y^2).$$

4.3 Condition de raccord de deux surfaces

Nous mentionnons ici un résultat motivant l'étude de la première et de la deuxième formes fondamentales d'une surface : la donnée de conditions de raccord entre deux surfaces.

Soit C une courbe de $\mathbb{R}^3$ et deux surfaces à bord X_1 et X_2 de classe $\mathcal{C}^2$, de même bord C. on suppose que $X_1 \cap X_2 = C$. Soit X l'ensemble de $\mathbb{R}^3$ obtenu en recollant X_1 et X_2 le long de C.

Théorème 4.8 *L'ensemble $X = X_1 \cup X_2$ est une surface de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les orientations induites de X_1 et X_2 sur C sont opposées, et en tout point de C les plans tangents à X_1 et X_2 coïncident.*

X est une surface de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si les orientations induites de X_1 et X_2 sur C sont opposées, les plans tangents à X_1 et X_2 coïncident en tout point de C ainsi que leur seconde forme fondamentale.

Une conséquence un peu plus géométrique de ce théorème est la suivante : pour que X soit une surface de classe $\mathcal{C}^2$ il faut et il suffit qu'en tout point de C passe une courbe transverse à C et contenue dans X.

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1 On considère la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par latitude (θ) et longitude (ϕ)

$$X(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \ \phi \in [0;2\pi[.$$

Écrire la première forme fondamentale. Calculer la longueur d'un parallèle $\phi \mapsto (\theta,\phi), \phi \in [0;2\pi[$. Calculer l'aire de la sphère unité.

Exercice 4.4.2 On considère le tore défini par la paramétrisation

$$(u,v) \mapsto X(u,v) := \begin{pmatrix} (a + r\cos(u))\cos(v) \\ (a + r\cos(u))\sin(v) \\ r\sin(u) \end{pmatrix},$$

où $0 \le u, v < 2\pi$ et $a \ge r \ge 0$. Calculer son aire.

Exercice 4.4.3 Calculer la deuxième forme fondamentale de la sphère paramétrée en 4.4.1.

Exercice 4.4.4 (Surfaces de révolution) Soit X une surface de révolution décrite par une courbe plane située dans un plan vertical (la méridienne) que l'on fait tourner autour de l'axe des z.

1. Paramétrer la surface X.
2. Calculer la seconde forme fondamentale de X.
3. Calculer les courbures principales et les directions principales.
4. Calculer la courbure de Gauss.
5. Expliciter les résultats pour le cas particulier du tore.

5 Courbes et Surfaces B-Splines

Les catalogues de formes simples (segments de droites, portions de plans, arcs de cercles ou de coniques, patches d'ellipsoïdes,...) proposés par les logiciels de CAO ne suffisent pas. Le "designer" a besoin de familles plus riches de courbes et de surfaces dépendant de paramètres. Il souhaite notamment

- disposer de suffisamment de paramètres pour pouvoir spécifier des conditions aux limites et des contraintes,
- deviner l'effet de chaque modification d'un paramètre pour modéliser facilement le profil d'un objet,
- que le calcul de la courbe ou de la surface en fonction des paramètres soit simple et rapide.

Les courbes et surfaces B-Splines, ainsi que leurs variantes, possèdent ces propriétés. Nous les introduisons dans ce qui suit.

5.1 Fonctions B-Splines : définition et principales propriétés

On se donne une suite de réels $t_0 \le \ldots \le t_m$ appelés *noeuds*. S'il y a exactement r noeuds t_i égaux à τ on dit que τ est un noeud de multiplicité (ou d'ordre) r. Pour tout $i = 0,\ldots,m-1$ et $j = 1,\ldots,m+1-i$ on définit la fonction d'une variable réelle

$$\omega_{i,j}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+j}-t_i} & \text{si } t_{i+j} > t_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 5.1 (fonctions B-Splines) *On définit par récurrence sur l'entier k les fonctions B-Splines $B_{i,k}$ pour $i = 0, \ldots, m-k-1$ par les relations*

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \textit{si } t \in [t_i, t_{i+1}[, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases},$$

et pour tout $k \geq 1$

$$B_{i,k}(t) = \omega_{i,k}(t)B_{i,k-1}(t) + (1 - \omega_{i+1,k}(t))B_{i+1,k-1}(t).$$

Proposition 5.2 *Propriétés générales des fonctions B-Splines :*

1. *La fonction $B_{j,k}$ est sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ un polynôme de degré inférieur ou égal à k,*
2. *La fonction $B_{i,k}$ s'annule en dehors de l'intervalle $[t_i, t_{i+k+1}[$,*
3. *La fonction $B_{i,k}$ s'annule aussi en t_i sauf si $t_i = \cdots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ auquel cas $B_{i,k}(t_i) = 1$,*
4. *$0 < B_{i,k}(t) \leq 1$ sur l'intervalle $]t_i, t_{i+k+1}[$,*
5. *Sur l'intervalle $]t_i, t_{i+k+1}[$ la fonction $B_{i,k}$ ne prend la valeur 1 que si $t_{i+1} = \cdots = t_{i+k}$ et en ce point seulement,*
6. *Sur l'intervalle $[t_k, t_{m-k}[$ les fonctions $B_{i,j}$ forment une partition de l'unité, c'est-à-dire on a l'identité $\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} \equiv 1$,*
7. *La fonction $B_{i,k}$ est $\mathcal{C}^\infty$ à droite de chaque point.*
8. *Au voisinage d'un noeud de multiplicité r la fonction $B_{i,k}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-r}$.*

Mentionnons deux cas particuliers de fonctions B-Splines liés au choix des noeuds : les B-Splines uniformes et les polynômes de Bernstein.

B-Splines uniformes. Elles correspondent au cas où les noeuds t_i sont uniformément répartis. On pose $t_i = i$ pour tout $i = 0, \ldots, m$. Alors on montre que

$$B_{i,k}(t+1) = B_{i-1,k}(t) \text{ et } B_{0,k}(k+1-1) = B_{0,k}(t).$$

Ces formules ont pour conséquences qu'il suffit de calculer les $B_{0,k}$ car toutes les autres fonctions B-Splines s'en déduisent par translation. La relation de récurrence qui définit alors les B-Splines devient ainsi

$$B_{0,k}(t) = \frac{t}{k}B_{0,k-1}(t) + \frac{k+1-t}{k}B_{0,k-1}(t-1).$$

Polynômes de Bernstein. Ils correspondent aux fonctions B-Splines obtenus avec les deux noeuds 0 et 1 de multiplicité $k+1$ chacun, i.e on pose $t_0 = \cdots = t_k = 0$ et $t_k = \cdots = t_{2k+1} = 1$. Dans ce cas on a pour tout $i = 0, \ldots, k$,

$$B_{i,k}(t) = \begin{cases} C_k^i t^i (1-t)^{k-i} & \text{pour } t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et les autres fonctions B-Splines sont nulles. On obtient en particulier $B_{k-i,k}(t) = B_{i,k}(1-t)$. Remarquer également que les fonctions $w_{i,j}$ non nulles sont égales à t.

5.2 Courbes B-Splines

Définition 5.3 *On se donne un vecteur de noeuds $(t_0, \ldots, t_m)$ et des points $P_0, \ldots, P_m$ dans $\mathbb{R}^n$, appelés* points de contrôles *et qui forment ensemble le* polygone de contrôle. *La* courbe B-Spline de degré *k associée est*

$$t \mapsto X_k(t) = \sum P_i B_{i,k}(t).$$

Remarque 5.4 *Dans le cas où les fonctions B-Splines sont les polynômes de Bernstein (deux noeuds de même multiplicité) on parle alors de* courbe de Bézier*. Dans ce cas, seuls les $k+1$ premiers points de contrôle interviennent.*

Ces courbes possèdent des propriétés géométriques très intéressantes, propriétés qui découlent presque immédiatement des propriétés des fonctions B-Splines énoncées dans la proposition 5.2.

Proposition 5.5 *La courbe B-Spline $t \mapsto X_k(t)$ a les propriétés suivantes :*

1. *Les composantes de $X_k(t)$ sont sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ des polynômes de degré k,*
2. *en un noeud de multiplicité r la courbe est de classe $\mathcal{C}^{k-r}$,*
3. *Si $t \in [t_i, t_{i+1}[$ alors $X_k(t)$ ne dépend que des points de contrôle $P_{i-k}, \dots, P_i$ et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points,*
4. *Si $t_i = \cdots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ est un noeud de multiplicité $k+1$ alors on a $X_k(t_i) = P_i$ et $X_k'(t_i) = \frac{k}{t_{i+k+1}-t_i}(P_{i+1} - P_i)$.*

On dit qu'une courbe B-Spline est *vissée* aux extrémités si elle est de degré k et si les noeuds extrêmes t_0 et t_m sont de multiplicités $k+1$ (i.e. $t_0 = \cdots = t_k < t_{k+1}$ et $t_{m-k} = \cdots = t_m$). Dans ce cas le nombre de points de contrôle effectivement utiles est $m-k-1$. De plus, il résulte de la proposition précédente qu'une courbe vissée aux extrémités est tangente à son polygone de contrôle aux extrémités. Noter que les courbes de Bézier sont des courbes vissées aux extrémités.

Nous décrivons à présent deux des principaux algorithmes utilisés pour manipuler ces courbes B-Splines.

Algorithme de de Casteljau. Cet algorithme permet de calculer et tracer une courbe B-Spline à partir des points de contrôle en effectuant des combinaisons convexes successives avec des poids linéaires en t.

Le point de départ de cet algorithme repose sur le calcul suivant :

$$\begin{aligned} X_k(t) &= \sum P_i B_{i,k}(t) \\ &= \sum P_i \left(\omega_{i,k}(t) B_{i,k-1}(t) + (1-\omega_{i+1,k}(t))\, B_{i+1,k-1}(t)\right) \\ &= \sum \left(\omega_{i,k}(t) P_i + (1-\omega_{i,k}(t)) P_{i-1}\right) B_{i,k-1}(t). \end{aligned}$$

En d'autres termes $X_k(t)$ coïncide avec la valeur en t de la courbe B-Spline de degré $k-1$ associé au polygone de contrôle $\omega_{i,k}(t)P_i + (1-\omega_{i,k}(t))P_{i-1}$.

Proposition 5.6 *Fixons un vecteur de noeuds $(t_0, \dots, t_m)$ et un polygone de contrôle $(P_0, \dots, P_m)$. On cherche à calculer la courbe B-Spline de degré k correspondante.*

Soit $t \in [t_i, t_{i+1}[$. On pose $P_j^0 = P_j$ pour $j = i-k, \dots, i$. Puis, pour $r = 0, \dots, k-1$, on pose

$$P_j^{r+1} = \omega_{j,k-r}(t) P_j^r + (1-\omega_{j,k-r}(t)) P_{j-1}^r \text{ pour } j = i-k+r+1, \dots, i.$$

Alors $P_i^k = X_k(t)$.

En pratique on dispose les points P_j^r sous la forme d'un triangle où chaque ligne correspond à un r constant. On passe d'une ligne à l'autre par combinaison linéaire convexe des deux points voisins précédents. Remarquer que géométriquement les points P_j^r forme un polygone pour chaque r fixé. On aboutit à un segment d'extrémité P_{i-1}^{k-1}, P_i^{k-1} et dont le point P_i^k est sur notre courbe B-Spline.

Remarque 5.7 *Il faut noter que dans le cas des courbes de Bézier les $\omega_{j,k}(t)$ valent tous t. Les combinaisons convexes linéaires sont donc ici des calculs de barycentres.*

Algorithme d'ajout d'un noeud. Ajouter un noeud consiste à se donner un nouveau noeud $\bar{t}$ et à calculer un nouveau polygone de contrôle qui donne la même courbe B-Spline de degré k. Ainsi si le designer se sent un peu à l'étroit pour ajuster sa courbe il peut disposer d'un paramètre supplémentaire.

Proposition 5.8 *Fixons un vecteur de noeuds $(t_0, \ldots, t_m)$ et un polygone de contrôle $(P_0, \ldots, P_m)$. Soit $t \mapsto X_k(t)$ la courbe B-Spline de degré k correspondante. Soit $\bar{t} \in [t_j, t_{j+1}[$ un noeud supplémentaire. On pose*

$$\overline{P}_i = \begin{cases} P_i \quad si \quad t_{i+k} \leq \bar{t}, \\ (1 - \omega_{i,k}(\bar{t}))P_{i-1} + \omega_{i,k}(\bar{t})P_i \quad si \quad t_i < \bar{t} < t_{i+k}, \\ P_{i-1} \quad si \quad \bar{t} \leq t_i. \end{cases}$$

Soit $\overline{X}_k$ la courbe B-Spline de degré k associée au vecteur de noeud $(t_0, \ldots, t_j, \bar{t}, t_{j+1}, \ldots, t_m)$ et au polygone de contrôle $(\ldots, \overline{P}_i, \ldots)$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\overline{X}_k(t) = X_k(t)$.

Courbes B-Splines rationnelles (NURBS)

Un cercle ne peut pas être paramétré par des polynômes (car si P et Q sont des polynômes non constants alors $P^2 + Q^2$ est aussi non constant), mais admet cependant une paramétrisation rationnelle :

$$t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right).$$

On est donc amené à introduire une "version rationnelle" des fonctions B-Splines.

Définition 5.9 (courbe B-Spline rationnelle) *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds, soit* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle de $\mathbb{R}^n$ et w_i des poids (des réels) attachés à chaque point de contrôle P_i. On suppose que les poids ne sont pas tous nuls. La* courbe B-Spline rationnelle (NURBS) *de degré k associée à ces données est la courbe paramétrée par*

$$t \mapsto X_k(t) = \frac{\sum_i w_i B_{i,k}(t) P_i}{\sum_i w_i B_{i,k}(t)}.$$

Lorsque $\mathbf{t} = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ *on parle alors de* courbe de Bézier rationnelle.

Remarque 5.10 *Géométriquement la courbe B-Spline rationnelle est la projection centrale d'une courbe B-Spline dans $\mathbb{R}^{n+1}$ bien choisie. Il faut noter que $X_k(t)$ est* homogène *en les w_i, i.e. multiplier tous les poids par une même constante ne change pas la courbe.*

Voici les principales propriétés des courbes B-Splines rationnelles.

Proposition 5.11 *Soient* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds,* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle et* $\mathbf{w}$ *un vecteur de poids non nul. La courbe B-Spline rationnelle X_k de degré k associée à ces données a les propriétés suivantes :*

1. *Sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, les coordonnées de X_k sont des fractions rationnelles de degré k,*
2. *En un noeud de multiplicité r la courbe X_k est de classe $\mathcal{C}^{k-r}$.*
3. *Si $t_0 = t_1 = \cdots = t_k < t_{k+1}$ est un noeud de multiplicité $k+1$ et si les poids w_0 et $W-1$ sont non nuls, alors la courbe X_k est tangente à P_0 au polygone de contrôle.*
4. *Si $t \in [t_i, t_{i+1}[$ le point $X_k(t)$ ne dépend que des points de contrôle $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \ldots, P_i$ et des poids $w_{i-k}, \ldots, w_i$. Si de plus les poids sont tous positifs ou nuls alors $X_k(t)$ est dans l'enveloppe convexe des points $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \ldots, P_i$*

5.3 Surfaces B-Splines

Il est possible d'étendre à la dimension 2 l'idée des courbes B-Splines. La façon la plus directe est ce que l'on appelle les *surfaces B-Splines produits tensoriels* qui consistent à réaliser une surface comme une famille de courbes B-Splines au-dessus d'une autre courbe B-Spline.

Définition 5.12 *La surface B-Spline de bidegré* (k, l) *associée aux vecteurs de noeuds* $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_m)$ *et* $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ *et au réseau de points de contrôle* $\mathbf{P}$ *est la surface paramétrée par*

$$(u, v) \mapsto \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} P_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,l}(v).$$

dans le cas particulier où les deux noeuds $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *sont de la forme particulière* $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ *on parle de* carreau de Bézier*.*

Il est également possible de donner une définition "rationnelle" de ces surfaces.

Définition 5.13 *Avec les notations de la définition précédente, si l'on se donne en plus un poids* $w_{i,j}$ *pour chaque point de contrôle, la* surface B-Spline rationnelle (NURBS) de bidegré (k, l) *associée à toutes ces données et la surface paramétrée*

$$(u, v) \mapsto \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j} P_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,l}(v)}.$$

Il faut noter que, par construction, la restriction d'une surface B-Spline (rationnelle) à toute droite du plan (u, v) parallèle aux axes est une courbe B-Spline (rationnelle). (cela n'est pas le cas pour les droites obliques). Noter également qu'il existe une théorie des fonctions B-Splines en plusieurs variables, et donc des généralisations moins "naïves" des courbes B-Splines.

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1 Soient $t_0 = \cdots = t_3 = 0$, $t_4 = \cdots = t_7 = 1$ et $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (2, -1)$ and $P_3 = (3, 0)$. Calculer $X_3(t)$ pour tout $t \in [0, 1[$. Faire la construction géométrique pour $t = \frac{1}{2}$ et $t = \frac{1}{4}$.

Exercice 5.4.2 Une conique est une courbe plane définie par une équation de degré 2. Soit C une conique non vide et non dégénérée (i.e. no réduite à deux droites). Soit P un point de C. Montrer que C admet une paramétrisation rationnelle à l'aide des droites du plan passant par le point P.

A Quelques rappels de calcul différentiel

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ et $a \in U$.

Définition A.1 *f est dite* différentiable *en a si f admet un DL d'ordre 1 en a, c'est-à-dire si*

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + o(h), \text{ où } h \in \mathbb{R}^n \text{ et } L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \text{ est linéaire.}$$

L'application linéaire *L est notée $d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et appelée* différentielle de f en *a.*

En termes de coordonnées la matrice de $d_a f$ n'est rien d'autre que la matrice jacobienne de f en a : $\left(\frac{\partial f_j}{x_i}(a)\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, notant $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $\mathbb{R}^n$.

Rappelons l'inévitable et omniprésent théorème de dérivation des fonctions composées.

Théorème A.2 (dérivation des fonctions composées) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable en a et $g : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$d_a g \circ f = d_{f(a)} g \circ d_a f.$$

Rq : Il est clair que si f admet une fonction réciproque différentiable $g = f^{-1}$ alors $d_a f$ est un isomorphisme linéaire et on a forcément $n = p$. Mais attention, il existe des bijections différentiables dont la réciproque n'est pas différentiable (par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$).

Définition A.3 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ et $a \in U$. f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ en a, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si f admet des dérivées partielles d'ordre k* continues *en a.*

Cette définition entraîne immédiatement le résultat bien connu et très utile (pour montrer qu'une fonction est différentiable) : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a alors f est différentiable en a.

Définition A.4 *On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^p$ est un difféomorphisme de U sur V de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ si $f \in \mathcal{C}^k$, f^{-1} est bijective et $f^{-1} \in \mathcal{C}^k$. En particulier, si $U = V$ on dit que f est un changement de coordonnées curvilignes.*

Nous pouvons maintenant énoncer quelques théorèmes centraux du calcul différentiel.

Théorème A.5 (inversion locale) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ et soit $a \in U$ tel que $Df(a)$ est inversible. Alors il existe un ouvert $W \subset U$ contenant a tel que $f : W \to f(W)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$. Dans ce cas on dit que f est difféomorphisme local en a.*

Attention : si f est un difféomorphisme local en tout point de U alors f n'est pas nécessairement un difféomorphisme. Par exemple $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* : x \mapsto x^2$ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas bijective, donc pas un difféomorphisme.

Les deux résultats importants suivants sont des conséquences, presque immédiates, du théorème d'inversion locale :

Théorème A.6 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ telle que f est un difféomorphisme local en tout point de U et est bijective, alors f est un difféomorphisme de U sur V de classe $\mathcal{C}^k$.*

Théorème A.7 (fonction implicite) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, où $n, p \geq 1$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$. Supposons que le point $(x_0, y_0) \in U$ vérifie $f(x_0, y_0) = 0$ et que $d_2 f(x_0, y_0)$ soit inversible ($d_2 f(x_0, y_0)$ désigne la différentielle de l'application $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p : y \mapsto f(x_0, y)$ au point y_0). Alors il existe un voisinage U_0 de (x_0, y_0) dans U, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une application $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que*

$$\{(x, y) \in U_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, \phi(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid x \in \Omega\}.$$

Un autre théorème très utile est celui du changement de variables sous une intégrale. Nous le rappelons.

Théorème A.8 (changement de variables) *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et suppons donné $\psi : U \to V : x \mapsto y = \psi(x)$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.*

Soit $f : V \to \mathbb{C}$, alors on a

$$\int_V f(y)dy_1dy_2\dots dy_n = \int_U f(\psi(x)).|\det(D_x\psi)|dx_1dx_2\dots dx_n$$

dès que $f(y)$ est intégrable sur V pour dy ou bien, ce qui est équivalent, $f(\psi(x)).|\det(D_x\psi)|$ est intégrable sur X pour dx.

Noter qu'en pratique on utilise le théorème d'inversion locale A.5 pour montrer que ψ est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme, c'est-à-dire que l'on montre que ψ est bijective de U sur V, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que $\det(D_x\psi) \neq 0$ pour tout $x \in U$.

B Formes quadratiques dans le plan

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 (bien que le cas de la dimension n ne soit pas beaucoup plus compliqué) muni d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

Définition B.1 *On dit qu'une application linéaire $A : V \to V$ est auto-adjointe si $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ pour tout $v, w \in V$.*

Il faut ici remarquer que la matrice de A dans une base *orthonormée* $\{e_1, e_2\}$ est une matrice *symétrique* car on a dans ces conditions

$$\langle Ae_1, e_2\rangle = \langle e_1, Ae_2\rangle = \langle Ae_2, e_1\rangle.$$

À toute application auto-adjointe A on peut associer une forme bilinéaire

$$B : V \times V \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle Av, w\rangle.$$

Puisque A est auto-adjointe on déduit que B est une forme bilinéaire *symétrique*. Inversement soit B une forme bilinéaire symétrique sur V, on peut lui associer une application linéaire $A : V \to V$ auto-adjointe par $\langle Av, w\rangle = B(v, w)$.

On a ainsi une correspondance bijective entre les application linéaires auto-adjointes et les formes bilinéaires symétriques sur V.

Définition B.2 *À toute forme bilinéaire symétrique $B : V \times V \to \mathbb{R}$ correspond une forme quadratique Q sur V donnée par*

$$Q(v) = B(v, v), \ v \in V.$$

La connaissance de Q permet de déterminer complètement B par la formule

$$B(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v + w) - Q(v) - Q(w)].$$

On a ainsi une correspondance bijective entre les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques sur V.

Théorème B.3 *Soit $A : V \to V$ une application linéaire auto-adjointe. Alors il existe une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de V telle que la matrice de A dans cette base soit diagonale de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 \geq \lambda_2.$$

De plus λ_1 et λ_2 sont les maximum et minimum de la forme quadratique associée à A (c'est-à-dire $Q(v) = \langle Av, v \rangle$) restreinte au cercle unité $\{v \in V : \|v\| = 1\}$.

En d'autres termes, si Q est une forme quadratique sur V alors il existe une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de V telle que pour tout $v = xe_1 + ye_2$ on ait $Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$.