

Variations sur la notion de contrôlabilité

Michel Fliess

▶ **To cite this version:**

Michel Fliess. Variations sur la notion de contrôlabilité. Doctoral. Société mathématique de France, Paris, 2000. inria-00001042

HAL Id: inria-00001042
https://cel.hal.science/inria-00001042

Submitted on 19 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Journée Soc. Math France, 17 juin 2000

VARIATIONS SUR LA NOTION DE CONTRÔLABILITÉ

par

Michel Fliess

Table des matières

1. Introduction 2
1.1. Une grue *plate* 2
1.2. Où est la contrôlabilité ? 6
1.3. Passage à la dimension infinie 8
1.4. Quelques références 10
1.5. Applications 11
1.5.1. Systèmes plats 11
1.5.2. Systèmes à retards 11
1.5.3. Équations aux dérivées partielles 11
2. Systèmes linéaires abstraits 12
2.1. Généralités 12
2.2. Commandabilité 12
2.3. π–liberté 12
3. Systèmes linéaires de dimension finie 13
3.1. Représentation d'état 13
3.2. Contrôlabilité 14
3.3. Digression : robustesse 15
3.4. Digression : commande prédictive d'un moteur électrique 16
4. Systèmes linéaires de dimension infinie 18
4.1. Où est la dimension infinie ? 18
4.2. Théorème de Quillen-Suslin et commandabilité libre 19
4.3. Systèmes à retards 20
4.4. Exemple de bras de robot téléopéré 20
4.5. Systèmes à paramètres répartis 22
4.6. Généralisations en dimension infinie 23
5. Systèmes non linéaires 24

5.1. Algèbre différentielle 24
5.2. Systèmes 25
5.2.1. Représentations d'état 25
5.2.2. Équivalence et platitude 26
5.2.3. Platitude et systèmes linéaires contrôlables 26
5.2.4. Digression : systèmes non linéaires à retards 26
5.3. Géométrie différentielle 26
5.3.1. Systèmes 28
5.3.2. Équivalence et platitude 28
5.3.3. Digression : accessibilité forte 29
5.4. Quelques problèmes ouverts en non-linéaire 30
5.4.1. Caractérisation de la platitude 30
5.4.2. Une variante du théorème de Lüroth 30
5.4.3. Classification 31
5.4.4. Contrôlabilités 31
5.4.5. Caractérisation trajectorienne de la contrôlabilité 31
5.4.6. Algèbre différentielle réelle 32
5.4.7. Calcul formel 32
5.4.8. Généricité 32
6. En guise de conclusion 32
Références 33

1. Introduction

Le lecteur peu familier de la théorie du contrôle trouvera dans les lignes qui suivent une explication de notre problématique.

1.1. Une grue *plate*. — La figure représente une grue. Il s'agit de transporter la

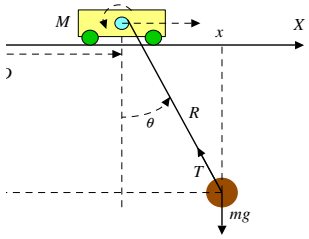


FIGURE 1. La grue

charge m, tout en esquivant, si nécessaire, des obstacles, en jouant sur le déplacement D du chariot sur le rail OX et la longueur R du filin. La tâche est difficile si l'on veut

aller vite à cause des oscillations de m, d'où bien des études, théoriques et pratiques, en robotique et en automatique[(1)] (voir [**38**] et sa bibliographie).

La loi de Newton et la géométrie du modèle permettent d'écrire les équations du mouvement[(2)] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} m\ddot{x} &=& -T\sin\theta \\ m\ddot{z} &=& -T\cos\theta + mg \\ x &=& R\sin\theta + D \\ z &=& R\cos\theta \end{array}\right. \tag{1}$$

où

- (x, z) (les coordonnées de la charge m), T (la tension du filin) et θ (l'angle du filin avec l'axe verticale OZ) sont les inconnues ;
- D et R sont les *contrôles*, ou *commandes*, c'est-à-dire les variables sur lesquelles on agit.

Un calcul immédiat démontre que $\sin\theta$, T, D et R sont fonctions de (x, z) et d'un nombre fini de leurs dérivées :

$$\begin{array}{rcl} \sin\theta &=& \dfrac{x-D}{R} \\ T &=& \dfrac{mR(g-\ddot{z})}{z}, \\ (\ddot{z}-g)(x-D) &=& \ddot{x}z, \\ (x-D)^2+z^2 &=& R^2 \end{array}$$

donc,

$$\left\{\begin{array}{rcl} D &=& x - \dfrac{\ddot{x}z}{\ddot{z}-g} \\ R &=& \sqrt{z^2 + \left(\dfrac{\ddot{x}z}{\ddot{z}-g}\right)^2} \end{array}\right.$$

Donnons-nous une loi horaire $(x(t), z(t))$ pour la charge m, satisfaisant les objectifs mentionnés plus haut, à savoir contourner les obstacles, sans engendrer d'oscillations. Les autres variables du système, notamment les contrôles D et R, s'obtiennent sans intégrer d'équations différentielles, comme fonctions de x, z et d'un nombre fini de leurs dérivées. La grue est un système non linéaire, appelé *(différentiellement) plat*, et le couple (x, z) est appelé *sortie plate*, ou *linéarisante*. On trouvera ci-dessous des simulations[(3)]. Les figures 2 et 3 démontrent l'absence d'oscillations[(4)]. Les deux

---

(1) L'*automatique*, terme populaire chez les ingénieurs, doit être comprise comme synonyme du *contrôle* des mathématiciens (*control* en américain). Rappelons qu'en américain on dit aussi, ou, plutôt, disait, *automatic control*.

(2) Comme les mécaniciens, les automaticiens emploient la notation des fluxions, où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $x^{(\nu)} = \frac{d^\nu x}{dt^\nu}$.

(3) La loi horaire $(x(t), z(t))$ choisie est une fonction polynômiale du temps [**38**]. Pour cet exemple donc, comme pour tous ceux évoqués plus bas, en dimension finie ou non, les calculs numériques n'exigent jamais la discrétisation des équations différentielles.

(4) On "voit" sur la figure 2 que cela est dû à une accélération au début de la trajectoire *planifiée* de m, suivie d'une décélération en fin de course. Une telle propriété semble plus difficile à obtenir si

suivantes décrivent la regulation du chariot et du filin, la figure 6 illustre les efforts correspondants, qui sont les "vrais" contrôles.

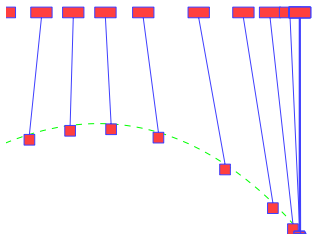


FIGURE 2. Non-oscillation de la charge

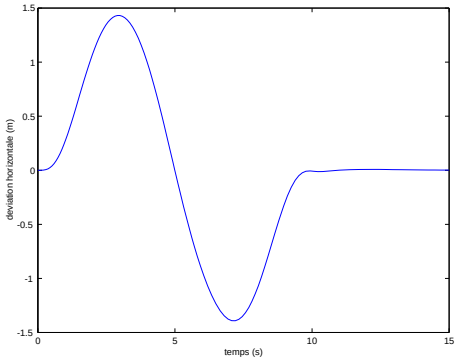


FIGURE 3. Déviation horizontale

Ce contrôle, dit en *boucle ouverte*, *open loop* en américain, doit, pour atténuer des perturbations d'origines diverses, comme, par exemple, des imperfections de modélisation, être accompagnée d'un *bouclage*, *feedback* en américain, facile à déterminer car (1) est équivalent, en un sens qui sera précisé, au système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^{(\alpha)} & = & u \\ z^{(\beta)} & = & v \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\alpha, \beta \geq 1$, et où u et v sont les *nouvelles* variables de contrôle[(5)]. Renvoyons à [**38**] pour plus de détails[(6)].

---

l'on avait voulu commencer par déterminer directement les commandes $D(t)$ et $R(t)$, ainsi qu'il est courant dans la littérature actuelle.

(5) Le bouclage en question stabilise (2). Ce peut être, par exemple, un bouclage *statique d'état* qui permet de placer les *pôles* de (2) dans le plan complexe.

(6) Pour sécuriser des grues conduites par un personnel non spécialisé, l'*US Navy* a lancé un vaste programme de recherche. La platitude du modèle correspondant permet d'envisager une aide efficace à la conduite, éventuellement à distance [**67**].

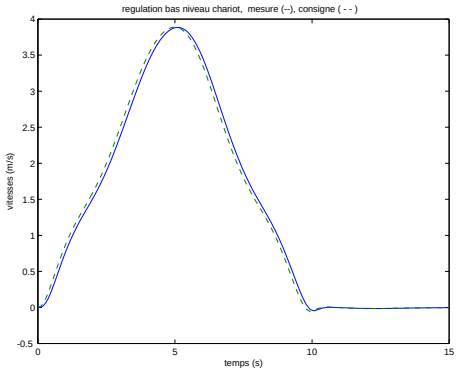


FIGURE 4. Régulation du chariot. Mesure (–), consigne (- -)

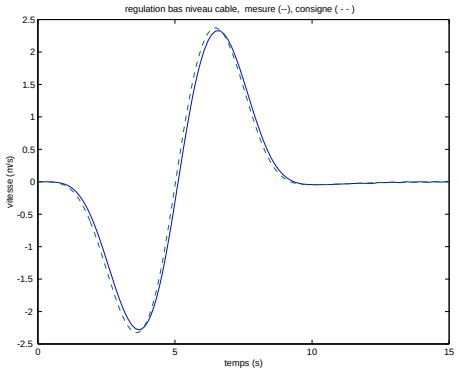


FIGURE 5. Régulation du filin. Mesure (–), consigne (- -)

La platitude est une propriété d'un système d'équations différentielles ordinaires, *sous-déterminé*, c'est-à-dire à moins d'équations que d'inconnues : il existe m variables $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ telles que :

1. Toute variable du système s'exprime comme fonction *différentielle*[(7)] de $\boldsymbol{y}$.
2. Toute composante de $\boldsymbol{y}$ s'exprime comme fonction différentielle des variables du système.
3. Les composantes de $\boldsymbol{y}$ et leurs dérivées sont fonctionnellement indépendantes.

Comme déjà dit, $\boldsymbol{y}$ est une *sortie plate*, ou *linéarisante*. Elle sert à planifier les trajectoires du système, c'est-à-dire à imposer un comportement désiré, satisfaisant des

(7) Une fonction différentielle [**99**] de $\boldsymbol{y}$ est une fonction des composantes de $\boldsymbol{y}$ et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini.

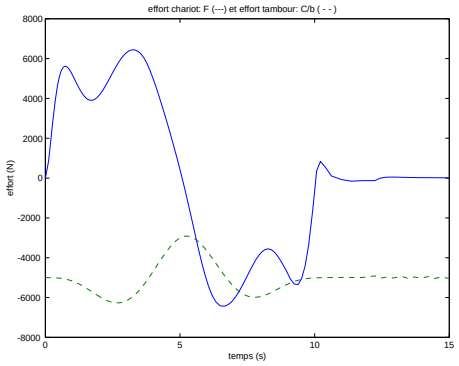


FIGURE 6. Forces correspondantes. Chariot (–), tambour (- -)

contraintes naturelles, souvent données par des inégalités, comme l'évitement d'obstacles[8].

1.2. Où est la contrôlabilité ? — La notion de contrôlabilité a été inventée en 1960 par Kalman (cf. [**60**]) à propos des systèmes linéaires de la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

où

- $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ et $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sont, respectivement, la commande et l'état,
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sont des matrices constantes.

L'état $\boldsymbol{x}$ évolue dans un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E, de dimension n. On dit que (3) est *contrôlable*, ou *commandable*, si on peut joindre deux points de l'espace d'état, c'est-à-dire si, et seulement si, étant donnés deux points $P_0, P_1 \in E$ et deux instants t_0, t_1, $t_0 < t_1$, il existe une commande $\boldsymbol{u}$, définie sur $[t_0, t_1]$, telle que $\boldsymbol{x}(t_\iota) = P_\iota$, $\iota = 0, 1$. La contrôlabilité est, avec l'*observabilité*, due aussi à Kalman, un concept clé pour la compréhension[9] des propriétés structurelles et qualitatives, comme la stabilisation.

L'extension de la contrôlabilité au non-linéaire de dimension finie et à la dimension infinie a suscité depuis près de quarante ans une littérature considérable, qui n'a en rien épuisé ce sujet riche et varié. Les auteurs, dans leur quasi-totalité, ont considéré des généralisations naturelles de (3). En dimension infinie linéaire, par exemple, l'état

[8] C'est là, d'un point de vue applicatif, l'essence de notre méthodologie, qui permet de simplifier la résolution de bien des questions pratiques. La généralisation à la dimension infinie, c'est-à-dire aux systèmes à retards et aux équations aux dérivées partielles, est accomplie plus bas.

[9] Les traités d'*automatique linéaire* sont, aujourd'hui, si abondants qu'il ne peut être question de les analyser. Mentionnons, toutefois, les livres américains de Kailath [**59**] et Sontag [**139**] et celui, français, de d'Andréa-Novel et Cohen de Lara [**2**]. On y trouvera des développements sur les bouclages statiques d'état évoqués plus haut.

appartient à un espace fonctionnel bien choisi. Pour le non-linéaire de dimension finie, on utilise

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{4}$$

où l'état $\boldsymbol{x}$ appartient à une variété différentiable, de dimension finie, $\mathbb{R}^n$ par exemple, dont F est un champ de vecteurs paramétré par la commande $\boldsymbol{u}$. Or, comme l'avait remarqué très tôt Rosenbrock [**114**] en linéaire de dimension finie, une écriture commode du phénomène étudié n'est pas nécessairement de type (3) ou (4). Ainsi, les équations (1) de la grue ne sont pas sous la forme (4), et il est, en un certain sens, impossible de les y ramener [**44**]. Examinons la dynamique linéaire à état et commande monodimensionnels

$$\dot{x} = \dot{u} \tag{5}$$

Elle diffère de (3) par la présence de la dérivée $\dot{u}$. D'après $x(t) = u(t) + c$, $c \in \mathbb{R}$, pour tout couple de points $P_0, P_1 \in \mathbb{R}$, il existe une commande permettant de les joindre dans un intervalle de temps $[t_0, t_1]$. Il ne faut pourtant pas croire que (5) soit contrôlable[(10)] car $x(t) - u(t)$ est une constante, c, non influencée par le choix futur de la commande.

La contrôlabilité doit donc recevoir une définition intrinsèque, indépendante de toute représentation particulière. A un système linéaire de dimension finie, associons un $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–module Λ de type fini. Le système est contrôlable si, et seulement si, Λ est libre[(11)]. Avec (3) on retrouve le concept classique : le sous-module de torsion de Λ correspond au sous-espace de non-contrôlabilité dans la décomposition de Kalman (voir, par exemple, [**2, 59**]). Ajoutons que (5) n'est pas contrôlable puisque l'élément $x - u$, qui vérifie $\frac{d}{dt}(x - u) = 0$, est de torsion.

Résumons-nous ! Un système linéaire de dimension finie est contrôlable si, et seulement si, il existe m variables $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ telles que :

1. toute variable du système s'exprime comme combinaison linéaire finie des composantes de $\boldsymbol{y}$ et de leurs dérivées ;
2. toute composante de $\boldsymbol{y}$ s'exprime comme combinaison linéaire finie des variables du système et de leurs dérivées ;
3. les composantes de $\boldsymbol{y}$ et leurs dérivées sont linéairement indépendantes.

Les systèmes non linéaires plats de 1.1 apparaissent comme des analogues non linéaires des systèmes linéaires contrôlables. Un système linéaire de dimension finie est, donc, plat si, et seulement si, il est contrôlable : la platitude est une généralisation, autre que celles usuelles dans la littérature (voir, par exemple, [**57, 58, 94, 139**]), de la contrôlabilité linéaire de Kalman. Ce sera le fil conducteur de notre exposé. Quant aux outils mathématiques, ils doivent user d'un nombre fini de dérivées, inconnu à l'avance. Deux choix possibles sont :

---

(10) Dans l'approche dite *polynômiale* de Rosenbrock [**114**], (5) n'est pas, non plus, contrôlable (voir [**2**]).

(11) Nous montrerons en 3.3, pour la *robustesse*, et en 3.4, pour la *commande prédictive* d'un moteur électrique, comment ce formalisme permet une solution facile de questions d'automatique posées dans la pratique.

1. L'algèbre différentielle et la géométrie algébrique différentielle, nées avant tout des travaux de Ritt [**112**] et Kolchin [**64**], sont apparues entre les deux Guerres Mondiales comme généralisations aux équations différentielles des concepts et outils de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique[(12)].

2. La géométrie différentielle des jets d'ordre infini, de création plus récente, s'est plus particulièrement développée autour de Vinogradov (voir [**65, 66**] et [**143, 146**]). Parente des travaux d'É. Cartan sur l'équivalence absolue [**16**], elle a eu un impact certain sur les questions classiques de physique mathématique que sont les symétries et les lois de conservation.

Ces deux voies se sont développées de manière indépendante et seuls de trop rares auteurs ont insisté sur leur parenté [**73, 143, 40, 42**]. Les confronter dans notre cadre, le contrôle, n'est pas chose facile. Néanmoins, la caractérisation de la platitude, qui est, comme nous le verrons brièvement en 5.4, un problème d'intégrabilité, semble, en l'état actuel, plus adaptée à la géométrie différentielle. Empressons-nous d'ajouter que l'économie d'écriture de l'algèbre différentielle et les notions de dimensions qui y ont été développées, comme le degré de transcendance différentielle[(13)], sont excellentes pour aborder des thèmes comme l'inversion entrée-sortie et la représentation d'état [**26, 28**], et divers types de *synthèse* par bouclage dynamique [**20, 22, 125**].

1.3. Passage à la dimension infinie. — Commençons par la classe la plus facile en dimension infinie, celle des systèmes à retards. Le système à un seul retard,

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t-1) \qquad a \in \mathbb{R} \tag{6}$$

où u est la commande et x l'état, joue un rôle certain dans les applications (voir, par exemple, [**100**] pour les *prédicteurs de Smith*). On lui associe, comme pour le $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–module Λ de (3), un module $\mathcal{B}$ sur l'anneau $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \sigma]$ des polynômes en deux indéterminées, où σ désigne l'opérateur de retard, $\sigma f(t) = f(t-1)$. Il découle du théorème de Quillen-Suslin, résolvant la conjecture de Serre, que $\mathcal{B}$ n'est pas libre, mais sans torsion. On récupère une base, c'est-à-dire un module libre, en introduisant l'avance σ^{-1}, c'est-à-dire en prenant le module localisé $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \sigma, \sigma^{-1}] \otimes_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \sigma]} \mathcal{B}$, qui est libre de base x, car

$$u(t) = \dot{x}(t+1) - x(t+1) \tag{7}$$

(12) Un texte récent, dû à Buium et Cassidy [**14**], dispense un résumé lucide et lumineux de l'histoire de l'algèbre différentielle et de ses développements les plus récents.

(13) Voir [**40, 42**] pour une généralisation à la géométrie différentielle des jets infinis, qui a permis d'élucider certains points en mécanique non holonome et en théorie de jauge. Cette carence de la géométrie différentielle tient, sans doute, au fait qu'à l'exception notable de Gromov [**53**], les équations différentielles sous-déterminées ont été peu étudiées.

On dit, avec [**48**], que (6) est *contrôlable σ–libre*, propriété fondamentale pour, comme avec la grue, imposer une trajectoire[(14)]. Ce type de contrôlabilité sera au cœur de nos préoccupations[(15)].

En guise de système à *paramètres répartis*, ou *distribués*, c'est-à-dire régi par des équations aux dérivées partielles, examinons l'équation de la chaleur à une seule variable d'espace :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) w(z,t) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad t \geq 0 \tag{8}$$

La condition initiale est $w(z,0) = 0$. Les conditions aux bords sont

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial t} = 0$$

et

$$w(1,t) = u(t)$$

où $u(t)$ est la commande. Le calcul opérationnel usuel (voir [**23**]) transforme (8) en l'équation différentielle ordinaire en la variable indépendante z

$$\hat{w}_{zz} - s\hat{w} = 0 \tag{9}$$

avec conditions aux deux bouts $\hat{w}_z(0) = 0$, $\hat{w}(1) = \hat{u}$. Le paramètre s désigne, évidemment, la dérivation par rapport au temps ; $\hat{u}$ et $\hat{w}$ sont, dans l'interprétation aujourd'hui dominante, les transformées de Laplace[(16)]. Réécrivons la solution de (9)

$$\hat{w} = \frac{\mathrm{ch}(z\sqrt{s})}{\mathrm{ch}(\sqrt{s})}$$

sous la forme

$$Q\hat{w} = P\hat{u} \tag{10}$$

où $P = \mathrm{ch}(z\sqrt{s})$, $Q = \mathrm{ch}(\sqrt{s})$. Pour les mêmes raisons qu'en (6), le $\mathbb{C}[P,Q]$–module correspondant[(17)] est sans torsion, mais non libre. Le module localisé sur $\mathbb{C}[P,Q,(PQ)^{-1}]$ est libre, de base $\hat{\zeta} = \hat{w}(0)$:

$$\begin{array}{rcl} \hat{w} & = & \mathrm{ch}(z\sqrt{s})\hat{\zeta} \\ \hat{u} & = & \mathrm{ch}(\sqrt{s})\hat{\zeta} \end{array} \tag{11}$$

---

(14) La non-causalité de (7) est sans importance puisque l'on désire suivre une trajectoire planifiée, c'est-à-dire prescrite à l'avance.

(15) On notera l'influence de la géométrie algébrique moderne de Grothendieck (cf. [**54**]) dans de tels changements d'anneaux de base par produits tensoriels, afin d'obtenir la propriété souhaitée (voir [**48, 86**]).

(16) $\hat{u} = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} u(\tau) d\tau$, $\hat{w}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} w(z,\tau) d\tau$. Nous suivrons ici l'approche remarquable du calcul opérationnel due à Mikusiński [**84, 85**], qui nous évitera toute difficulté analytique.

(17) Nous n'utilisons pas un $\mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right]$–module, c'est-à-dire un point de vue de $\mathcal{D}$–modules, car la prise en compte de la commande u au bord y semble plus délicate.

Pour calculer une trajectoire désirée, on explicite l'action de $\mathrm{ch}(z\sqrt{s})$ sur $\zeta(t)$ par la formule[18]

$$\sum_{\nu\geq 0} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}\frac{d^\nu \zeta}{dt^\nu} \tag{12}$$

en supposant ζ fonction Gevrey de classe < 2, plate en $t = 0$.

Avec l'équation des cordes vibrantes

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w(z,t) = 0$$

et des conditions initiales nulles et identiques aux bords, le calcul opérationnel fournit des solutions analogues, à ceci près qu'il faut y remplacer $e^{\pm x\sqrt{s}}$ par $e^{\pm xs}$. On aboutit, ainsi, à un système à retards [**89, 92**]. L'équation, dite des télégraphistes,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b\frac{\partial}{\partial t} - c\right) w(z,t) = 0$$

où $a > 0$, $b, c \geq 0$, nécessite des fonctions de Bessel (voir [**47, 128**]). Au contraire du cas parabolique de l'équation de la chaleur, la planification des trajectoires pour ces équations hyperboliques utilise le passé et le futur sur un intervalle fini (théorème de Paley-Wiener).

1.4. Quelques références. — Les systèmes non linéaires plats ont été découverts, comme outil du contrôle, par Jean Lévine, Philippe Martin, Pierre Rouchon et l'auteur, et mathématisés d'abord grâce à l'algèbre différentielle [**36, 38**]. Leur présentation dans le langage des *diffiétés* de Vinogradov, c'est-à-dire dans une géométrie différentielle des jets infinis, se trouve pour la première fois en [**37**] (voir, aussi, [**43**]). Pomet [**106**], de façon très voisine, van Nieuwstadt, Rathinam et Murray [**93**], dans le langage des formes extérieures d'É. Cartan, ont aussi proposé une définition de la platitude par géométrie différentielle. Il y a longtemps déjà, Hilbert, dans un article [**55**] isolé de son œuvre, avait, à propos d'un exemple, remarqué la possibilité d'une paramétrisation ne nécessitant pas d'intégrations d'équations différentielles[19], sans la définir formellement (voir, aussi, Cartan [**15**]).

Comme beaucoup d'autres choses, c'est Kalman (cf. [**61**]) qui, pour les systèmes linéaires de dimension finie, a introduit les modules en contrôle. Il l'a fait pour la représentation d'état et aboutit à un module de torsion, finiment engendré, sur un anneau principal. La généralisation aux systèmes à retards est dû à Kamen [**62**] (voir, aussi, [**136**]). De manière entièrement dissemblable, l'équivalence entre systèmes linéaires et modules, due à l'auteur [**29, 30**], prend en compte toutes les variables, sans nécessairement, comme le point de vue *comportemental*, ou *behavioral*, de Willems (voir [**105**]), faire de distinctions entre ces variables. Cette approche, valable aussi

[18] On peut interpréter l'infinitude de cette série comme étant liée à la dimension infinie, commentaire qui s'étend aux systèmes à retards (voir, par exemple, la formule (7)), si l'on regarde les opérateurs de retard et d'avance à l'aide d'un développement infini en puissances de la dérivation. Rappelons qu'en dimension finie on utilise seulement un nombre fini de dérivées.

[19] Hilbert écrit explicitement *integrallos*.

avec des coefficients non constants, a servi à préciser diverses propriétés structurelles (voir [**11, 12, 31, 33**]). Le cas des systèmes à retards est le fait d'Hugues Mounier et l'auteur (voir [**48, 86**]), celui des équations aux dérivées partielles de Mounier, Rouchon, Joachim Rudolph et l'auteur [**50, 92**][(20)].

On trouvera en [**49, 67, 78, 83, 118, 120, 126**] d'autres tours d'horizon, avec des perspectives différentes.

1.5. Applications. — Il y a eu, en peu d'années, un grand nombre d'illustrations concrètes. Beaucoup ont été testées avec succès en laboratoire. Certaines sont exploitées industriellement[(21)].

1.5.1. Systèmes plats. — Le classement par rubriques donne une idée de l'ubiquité de la platitude :

- robotique [**63, 70**], et véhicules non holonomes [**38, 39, 121**] ;
- aéronautique [**76, 77**] ;
- moteurs électriques [**74, 81, 82, 133, 147**], et paliers magnétiques [**68, 131**] ;
- industrie automobile, que cela soit pour les suspensions actives [**67**], les embrayages [**69**], ou les balais d'essuie-glace [**7**] ;
- hydraulique [**6**] ;
- génie chimique avec divers types de réacteurs [**102, 115, 117, 123, 127, 134**] ;
- agro-alimentaire [**5**].

1.5.2. Systèmes à retards. — Ils ont été appliqués à l'aérodynamique, au raffinage et aux antennes [**89, 102, 103**]. Certaines situations, comme celles des réseaux à haut débit [**88**], nécessitent des retards variables.

1.5.3. Équations aux dérivées partielles. — La commande de l'équation des cordes vibrantes, qui se rattache, comme nous l'avons vu, aux systèmes à retards, a été appliquée à diverses situations de verges flexibles [**89, 92**], qui peuvent se matérialiser à propos de certains problèmes de forage [**87**]. L'équation de la chaleur a été utilisée pour un réacteur chimique [**51**] et un échangeur de chaleur [**128**]. Les calculs [**50**] faits pour éviter les vibrations d'une barre, modélisée par l'équation d'Euler-Bernoulli, ont été confirmés expérimentalement en [**3, 56**]. L'équation des télégraphistes [**47**] a conduit à une restauration active de signal le long d'un câble et au contrôle d'un échangeur de vapeur [**128**]. On trouvera en [**102, 116**] d'autres cas, notamment en génie chimique ou électrique, et sur certains types de cables, parfois avec des équations plus générales.

Remerciements L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Jean Lévine, Richard Marquez, Hugues Mounier et Pierre Rouchon pour leur aide lors de la rédaction. Ce travail a été effectué sous l'auspice de la commission européenne TMR, contrat ERBFMRXT-CT970137.

(20) Renvoyons à [**95, 104, 108**] pour d'autres points de vue sur l'utilisation des modules en contrôle linéaire.

(21) Des raisons de confidentialité ne permettent pas d'inclure les références correspondantes.

2. Systèmes linéaires abstraits

2.1. Généralités. — Soit A un domaine d'intégrité, c'est-à-dire un anneau commutatif sans diviseurs de zéro, supposé, pour simplifier, noethérien. Un *système A–linéaire*, ou un A–système, Λ est un A–module de type fini. La catégorie des A–systèmes est, donc, celle des A–modules de type fini.

Une *entrée*, ou un *contrôle*, ou, encore, une *commande*, est une partie finie $\boldsymbol{u} \subset \Lambda$, peut-être vide, telle que le module quotient $\Lambda/\mathrm{span}_A(\boldsymbol{u})$ est de torsion. L'entrée $\boldsymbol{u}$ est dite *indépendante* si le A–module $\mathrm{span}_A(\boldsymbol{u})$ est libre, de base $\boldsymbol{u}$. Une *A–dynamique* $\mathcal{D}$ est un A–système muni d'une entrée $\boldsymbol{u}$. Pour une A–dynamique sans entrée, c'est-à-dire $\boldsymbol{u} = \emptyset$, $\mathcal{D}$ est de torsion.

Une *sortie* est une partie finie $\boldsymbol{y} \subset \Lambda$. Un *$A$–système entrée-sortie* $\mathcal{S}$ est une A–dynamique munie d'une sortie.

Soit B un anneau commutatif noethérien qui est, aussi, une A–algèbre. Le système ${}_B\Lambda = B \otimes_A \Lambda$ est un B–module, c'est-à-dire un B–système, appelé *B–extension* de Λ. Ici, B sera toujours obtenue par *localisation*, c'est-à-dire $B = S^{-1}A$, où S est une partie multiplicativement stable.

2.2. Commandabilité. — L'A–système Λ est dit *B–contrôlable sans torsion* (resp. *B–contrôlable projectif*, *B–contrôlable libre*) si le B–module ${}_B\Lambda$ est sans torsion (resp. projectif, libre). On sait que la B–commandabilité libre (resp. projective) implique la B–commandabilité projective (resp. sans torsion).

Supposons Λ B–contrôlable libre. Toute base du B–module libre ${}_B\Lambda$ est appelée *sortie B–plate*, ou *B–basique*.

***Remarque* 2.2.1**. — *Le système entrée-sortie A–linéaire $\mathcal{S}$ est dit* B–observable[(22)] *si* ${}_B\mathcal{S} = \mathrm{span}_B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$.

2.3. π–liberté. — Le résultat suivant [**48**], capital en dimension infinie, découle directement de [**124**, Proposition 2.12.17, p. 233].

***Théorème* 2.3.1**. — *Soient*
- *un système A–linéaire Λ,*
- *$B = S^{-1}A$ une A–algèbre, où S est une partie multiplicativement stable de A, tels que ${}_B\Lambda$ soit B–contrôlable libre.*

Il existe, alors, un élément $\pi \in \mathcal{S}$ tel que Λ soit $A[\pi^{-1}]$–contrôlable libre.

On dit que Λ est *(contrôlable) π–libre* et π sera nommé élément *libérateur*. Toute base du $A[\pi^{-1}]$–module libre $A[\pi^{-1}] \otimes_A \Lambda$ est appelée *sortie (plate) π–libre*, ou *sortie π–plate*.

---

(22) On trouvera en [**46**] (voir, aussi, [**32**]), des développements récents sur l'observabilité et les *observateurs intégraux exacts*. Renvoyons à [**75**] pour une application à un moteur électrique.

3. Systèmes linéaires de dimension finie

Un système linéaire sur l'anneau principal $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ des polynômes différentiels de la forme

$$\sum_{\text{finie}} a_\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, \qquad a_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0$$

est dit de dimension finie. Considérons, en effet, une dynamique $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–linéaire $\mathcal{D}$, d'entrée $\boldsymbol{u}$. Le module de torsion $\mathcal{D}/\mathrm{span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{u})$, qui est de type fini, est, en tant que $\mathbb{R}$–espace vectoriel, de dimension finie.

3.1. Représentation d'état. — Soit $\mathcal{D}$ une $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–dynamique. Posons $n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}/\mathrm{span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{u}))$. Choisissons dans $\mathcal{D}$ un ensemble $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ dont le résidu[23] $\underline{\boldsymbol{\eta}} = (\underline{\eta}_1, \ldots, \underline{\eta}_n)$ en $\mathcal{D}/\mathrm{span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{u})$ est une base. Il vient

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\eta}_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \underline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\eta}_n \end{pmatrix}$$

où $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Donc

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^{\nu} G_\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{13}$$

où $G_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times m}$. On appelle η un *état généralisé*, et (13) une *représentation d'état généralisée*.

Soit $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n)$ un autre état généralisé. Comme les résidus de $\boldsymbol{\eta}$ et de $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ dans $\mathcal{D}/\mathrm{span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{u})$ en sont des bases en tant qu'espace vectoriel, il vient

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} + \sum_{\text{finie}} Q_\gamma \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{14}$$

où $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(P) \neq 0$, $Q_\gamma \in \mathbb{R}^{n\times p}$. On remarque que (14) dépend en général de l'entrée et d'un nombre fini de ses dérivées.

Supposons en (13) $\nu \geq 1$ et $G_\nu \neq 0$. Posons, selon (14),

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\eta}_n \end{pmatrix} + G_\nu \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Il vient

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\eta}_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\eta}_n \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} \overline{G}_\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

[23] C'est-à-dire l'image canonique dans $\mathcal{D}/\mathrm{span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{u})$.

L'ordre maximal de dérivation de $\boldsymbol{u}$ y est au plus $\nu - 1$. Par récurrence, on aboutit à

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{15}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. On appelle (15) une *représentation d'état kalmanienne*[24] ; $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est un *état kalmanien*. Deux états kalmaniens $\boldsymbol{x}$ et $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ sont reliés par une transformation indépendante de l'entrée :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{16}$$

où $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(P) \neq 0$. Nous avons démontré le

***Théorème* 3.1.1**. — *Toute dynamique $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–linéaire admet une représentation d'état kalmanienne (15). Deux états kalmaniens sont reliés par (16).*

***Remarque* 3.1.1**. — *On peut, contrairement à une vaste littérature récente sur les systèmes linéaires* implicites*, toujours se ramener à une représentation kalmanienne. C'est dû au fait que le groupe engendré par les transformations d'état (14) est plus gros que ceux admis dans ces travaux sur l'implicite. Il est instructif de rappeler que les transformations d'état dépendant du contrôle, négligées jusqu'à présent par les théoriciens, avaient été parfois, il y a longtemps, utilisées en pratique.*

3.2. Contrôlabilité. — L'anneau $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ étant principal, $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–contrôlabilités sans torsion et libre se confondent. Nous dirons, donc, qu'un système $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–linéaire est *contrôlable* si, et seulement si, il est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–contrôlable libre.

La dynamique (15) est *contrôlable au sens de Kalman* (voir **[60]** et **[2, 59, 139]**) si, et seulement si, le critère de Kalman

$$\mathrm{rg}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$$

est vérifié. La démonstration du résultat suivant a été esquissée en 1.2 :

***Théorème* 3.2.1**. — *La dynamique (13) est contrôlable au sens de Kalman si, et seulement si, elle est contrôlable.*

3.3. Digression : robustesse. — Un système $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–linéaire Λ^{pert} est dit *perturbé*[25] si l'on y a distingué un sous-ensemble fini de *perturbations* $\boldsymbol{\varpi} = (\varpi_1, \ldots, \varpi_q)$.

[24] C'est Kalman qui a répandu ces représentations d'état (cf. **[60, 61]**).

[25] Conserver des performances acceptables en dépit d'une certaine méconnaissance du modèle est un chapitre primordial de l'automatique, appelé *robustesse*. Cette ignorance peut se traduire mathématiquement en linéaire par la présence de pertubations additives.

Le quotient $\Lambda = \Lambda^{\rm pert}/{\rm span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{\varpi})$ est le système *non perturbé*. Dans une dynamique perturbée $\mathcal{D}^{\rm pert}$, on suppose

$$ {\rm span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{u}) \cap {\rm span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{\varpi}) = \{0\} $$

ce qui signifie que commandes et perturbations n'interagissent pas. Alors, la restriction du morphisme canonique $\mathcal{D}^{\rm pert} \to \mathcal{D} = \mathcal{D}^{\rm pert}/{\rm span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{\varpi})$ à ${\rm span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{u})$ est un isomorphisme : on notera encore, par léger abus de notation, $\boldsymbol{u}$ l'image de $\boldsymbol{u}$ dans $\mathcal{D}$.

Restreignons-nous à une dynamique *monovariable*, c'est-à-dire où $m = 1$, telle que la dynamique non perturbée soit contrôlable. Soit z une base de $\mathcal{D}$ qui est de rang 1. Il vient $u = \omega z$, $\omega \in \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$, $\omega \neq 0$, et, donc, $u = \omega z^{\rm pert} + \epsilon$, où $z^{\rm pert} \in \mathcal{D}^{\rm pert}$ a pour image $z \in \mathcal{D}$ et $\epsilon \in {\rm span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{\varpi})$. On en déduit facilement [**45**] la représentation d'état perturbée

$$ \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1^{\rm pert} & = & x_2^{\rm pert} \\ \cdots & & \\ \dot{x}_{n-1}^{\rm pert} & = & x_n^{\rm pert} \\ \dot{x}_n^{\rm pert} & = & \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{\rm pert} + bu + \epsilon' \end{array} \right. $$

$a_1, \ldots, a_\nu, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, où la perturbation $\epsilon' \in {\rm span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\boldsymbol{\varpi})$ est *assortie*, c'est-à-dire vérifie ce qu'on appelle en américain la *matching condition* d'Utkin [**142**][(26)]. Cette condition permet, grâce à des hypothèses naturelles sur ϵ', d'*atténuer*, et c'est un résultat important rendu possible par notre démarche, la perturbation par un bouclage approprié. Cette propriété, toujours vérifiée dans notre cadre, suppose dans le point de vue ancien un changement d'état dépendant des perturbations. Considérons, en effet,

$$ \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1^{\rm pert} & = & x_2^{\rm pert} + \varpi_1 \\ \dot{x}_2^{\rm pert} & = & u + \varpi_2 \end{array} \right. $$

Posons $x_1^{\rm pert} = \tilde{x}_1^{\rm pert}$, $x_2^{\rm pert} = \tilde{x}_2^{\rm pert} - \varpi_1$. Il vient

$$ \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}}_1^{\rm pert} & = & \tilde{x}_2^{\rm pert} \\ \dot{\tilde{x}}_2^{\rm pert} & = & u + \varpi_2 + \dot{\varpi}_1 \end{array} \right. $$

La généralisation au cas multivariable ($m \geq 2$) se fait par la forme de Brunovský perturbée (cf. [**45**]).

3.4. Digression : commande prédictive d'un moteur électrique. — La *commande prédictive*, due, avant tout, à Richalet [**111**], s'est largement popularisée dans l'industrie[(27)]. C'est une forme de commande "anticipante", *feedforward* en américain, qui consiste à imposer un comportement "désiré" au système. Notre point-de-vue permet de résoudre plusieurs, sinon la plupart des problèmes ouverts[(28)] concernant ce

[(26)] Cette condition a été définie à propos du contrôle par *modes glissants*, *sliding modes* en américain, pour lequel les modules sont aussi fort utiles (voir [**52**] pour une étude préliminaire).

[(27)] Renvoyons à [**45**] pour une analyse bibliographique plus fouillée.

[(28)] Un *problème ouvert* en mathématiques appliquées n'a pas le même contenu qu'en mathématiques pures. Il n'y a pas, en d'autres termes, d'analogues du dernier théorème de Fermat, ni des conjectures de Riemann ou Poincaré, c'est-à-dire d'énoncés précis à démontrer. Un rapide commentaire s'impose donc. Un problème ouvert est, dans les sciences de l'ingénieur, un magma plus ou moins flou, auquel

type de commande, à savoir la stabilisation et la robustesse, le déphasage non minimal, la prise en compte des contraintes, tout en simplifiant considérablement la génération de trajectoires. L'exemple suivant, emprunté à [**45**], est un moteur électrique à courant continu

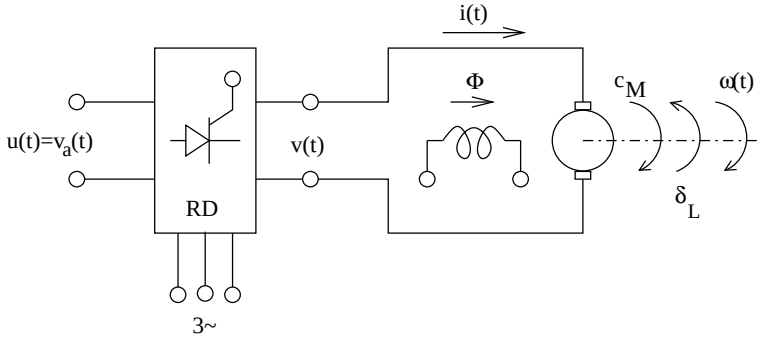


FIGURE 7. Moteur à courant continu

régi par les équations

$$\dot{x}_1 = \frac{R_i}{T_M k_\Phi} x_2 - \frac{1}{J}\varpi_L \tag{17a}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{J}{T_M T_i k_\Phi} x_1 - \frac{1}{T_i} x_2 + \frac{k_{RD}}{R_i T_i} u \tag{17b}$$

où $x_1 = \omega$ est la vitesse angulaire de la tige du rotor, $x_2 = i$ le courant rotorique. Le contrôle u est la tension source, ϖ_L est la perturbation due au couple de charge.

Les valeurs nominales des paramètres sont $J = 2.7$ kgm^2, $k_\Phi = 2.62$ Nm/A, $k_{RD} = 500$, $T_M = 0.1829$ s, $T_i = 0.033$ s, $R_i = 0.465$ Ω. Les spécifications nominales du moteur sont : puissance 22 kW, tension 440 V, courant 52.6 A, vitesse angulaire 157 rad/s. Le moteur supporte, pendant de courtes périodes, une surcharge approximative de 1.6 à 15 fois les valeurs nominales de la tension et du courant.

Commençons par le cas non perturbé, c'est-à-dire $\varpi_L = 0$. Il est immédiat de vérifier qu'alors (17) est contrôlable. Une sortie plate est $z = x_1$, que l'on peut mesurer. Il vient, alors,

$$\begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \frac{T_M k_\Phi}{R_i}\dot{z} \\ u &= \frac{R_i J}{T_M k_\Phi k_{RD}} z + \frac{T_M k_\Phi}{k_{RD}}\dot{z} + \frac{T_i T_M k_\Phi}{k_{RD}}\ddot{z} \end{aligned}$$

---

une traduction mathématique donne éventuellement corps. Parmi l'infinité de traductions possibles, certaines reflètent mieux les buts visés et admettent une solution élégante. Le débat épistémologique se déplace donc sur un terrain nouveau qu'un tel exposé ne permet de creuser.

Une fois fixée la loi horaire prédite $z^\star(t)$, ces équations déterminent $(x_1^\star(t),\ x_2^\star(t),\ u^\star(t))$. Transférons z du repos $x_1(t_0) = 0$ rad/s à la valeur $x_1(t_T) = 145$ rad/s en l'intervalle de temps $T = t_T - t_0 = 0.5$ s.

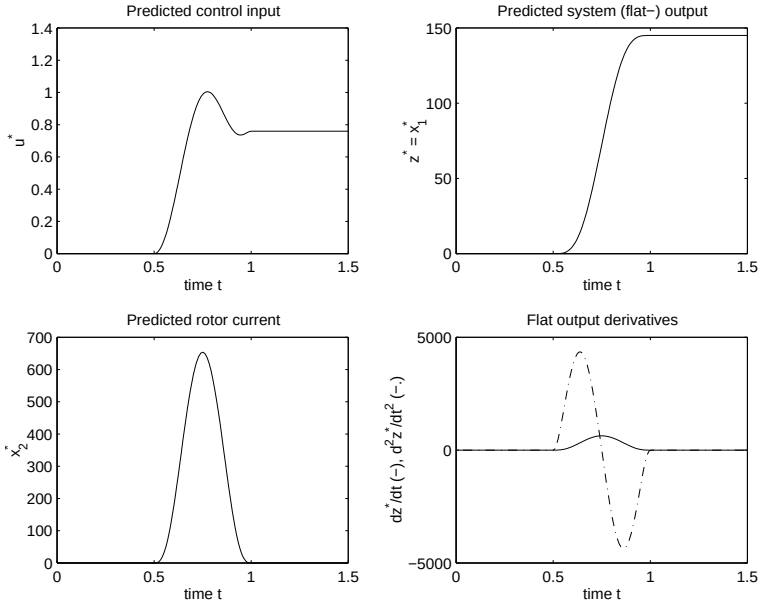


FIGURE 8. Trajectoires prédites du moteur

La figure 8 présente ces trajectoires prédites, calculées par interpolation polynômiale de manière à assurer la continuité aux deux bouts.

Dans une seconde étape, on *atténue* la perturbation en posant $u = u^\star + u_\varepsilon$, où $u_\varepsilon(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_0 \int_0^t e_1(\tau)\, d\tau$, $e_1(t) = z(t) - z^\star(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, est un *correcteur PI*, ou *propotionnel-intégral*[29]. La figure 9 donne des simulations.

Pour éviter des saturations, on doit satisfaire la contrainte $x_{2\,\max} < 500$ A. Un changement d'échelle de temps $\frac{d}{dt} = \sigma \frac{d}{d\tau}$, $\sigma > 0$, donne

$$\begin{aligned} x_1 &= z,\ x_2 = \frac{T_M k_\Phi}{R_i}\, \sigma \frac{d}{d\tau} z \\ u &= \frac{R_i J}{T_M k_\Phi k_{RD}} z + \frac{T_M k_\Phi}{k_{RD}}\, \sigma \frac{d}{d\tau} z + \frac{T_i T_M k_\Phi}{k_{RD}}\, \sigma^2 \frac{d^2}{d\tau^2} z \end{aligned}$$

Les simulations de la figure 10, avec $\sigma = 0.5$, fournissent un résultat très satisfaisant.

***Remarque* 3.4.1**. — *On trouvera en* [**74**] *un exemple de moteur électrique réel commandé selon ces techniques.*

[29] Un tel correcteur et, plus généralement, les correcteurs PID, ou proportionnels-intégraux-différentiels, sont d'un grand usage dans l'industrie (cf. [**4**]).

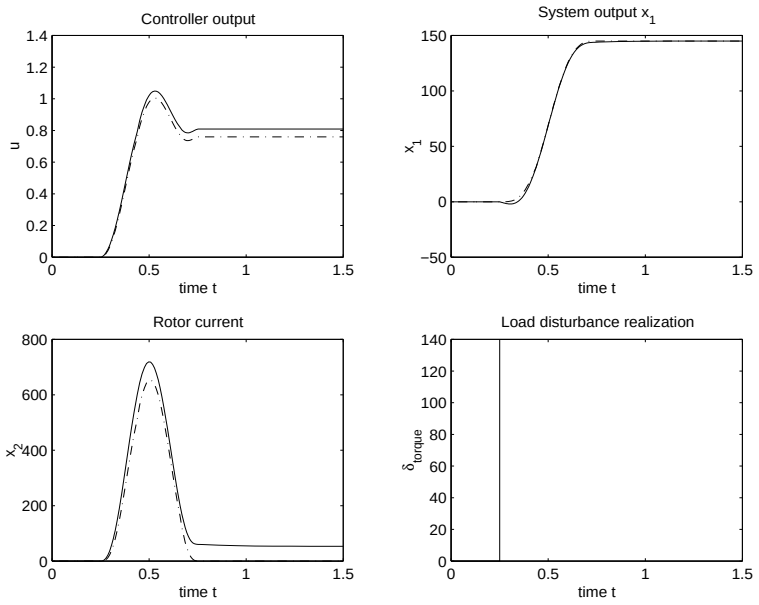


FIGURE 9. Réponse en boucle fermée (–) et trajectoires prédites (–·)

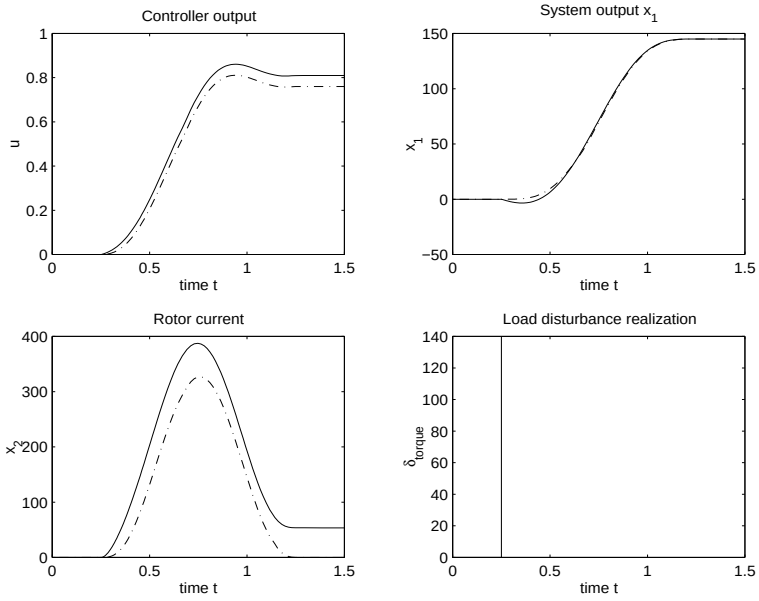


FIGURE 10. Comportement avec changement d'échelle de temps : réponse en boucle fermée (–) et trajectoires prédites (–·)

4. Systèmes linéaires de dimension infinie

4.1. Où est la dimension infinie ? — Soit un module de torsion de type fini T, sur l'anneau de polynômes $\mathbb{R}[\omega_1, \ldots, \omega_\rho]$ en $\rho \geq 2$ indéterminées. Soit $\mathfrak{I}$ l'idéal de $\mathbb{R}[\omega_1, \ldots, \omega_\rho]$, annulateur de T. Supposons l'existence de $\chi \in \mathbb{R}[\omega_1, \ldots, \omega_\rho]$, $\chi \notin \mathbb{R}$, tel que $\mathfrak{I} \cap \mathbb{R}[\chi] = \{0\}$. Il existe donc au moins un élément $\tau \in T$ tel que $\mathrm{span}_{\mathbb{R}[\omega_1,\ldots,\omega_\rho]}\{\chi^\nu \tau \mid \nu \geq 0\}$ soit de dimension infinie en tant que $\mathbb{R}$–espace vectoriel. Il en découle que T est aussi un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension infinie. Prenons une dynamique $\mathbb{R}[\omega_1, \ldots, \omega_\rho]$–linéaire $\mathcal{D}$. Ce qui précède s'applique au module de torsion $\mathcal{D}/\mathrm{span}_{\mathbb{R}[\omega_1,\ldots,\omega_\rho]}(\boldsymbol{u})$.

4.2. Théorème de Quillen-Suslin et commandabilité libre. — Plutôt que, dans un tel exposé, invoquer de nombreux exemples concrets, examinons le système $\mathbb{R}[\omega_1, \omega_2]$–linéaire

$$\omega_1 w_1 = \omega_2 w_2 \tag{18}$$

qui se rencontre souvent (voir les systèmes (6) et (8)).

***Proposition* 4.2.1**. — *Le système (18) n'est pas $\mathbb{R}[\omega_1, \omega_2]$–contrôlable libre, mais il est $\mathbb{R}[\omega_1, \omega_2]$–contrôlable sans torsion.*

Démonstration. — Réécrivons (18) sous la forme

$$(\omega_1, -\omega_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0$$

La matrice de présentation $(\omega_1, -\omega_2)$ est de rang *générique* 1, c'est-à-dire de rang 1 sur le corps de fractions $\mathbb{R}(\omega_1, \omega_2)$. D'après la résolution de la conjecture de Serre [**132**] par Quillen [**109**] et Suslin [**140**], (18) n'est pas $\mathbb{R}[\omega_1, \omega_2]$–contrôlable libre, car ce rang chute si l'on remplace ω_1 et ω_2 par 0. D'après [**145**], (18) est $\mathbb{R}[\omega_1, \omega_2]$–contrôlable sans torsion car les mineurs sont premiers entre eux. □

***Remarque* 4.2.1**. — *On trouvera d'autres applications du théorème de Quillen-Suslin en* [**48**].

4.3. Systèmes à retards. — Un système linéaire à *retards* est un système $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \sigma_1, \ldots, \sigma_r]$–linéaire, où $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont les opérateurs de retards :

$$(\sigma_\iota f)(t) = f(t - h_\iota), \qquad \iota = 1, \ldots, r,\ h_\iota > 0$$

Il est, toujours, loisible de se ramener à la situation où les h_ι sont incommensurables, c'est-à-dire où le $\mathbb{Q}$–espace vectoriel qu'ils engendrent est de dimension r. Alors, $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \sigma_1, \ldots, \sigma_r]$ est isomorphe à un anneau de polynômes en $r + 1$ indéterminées.

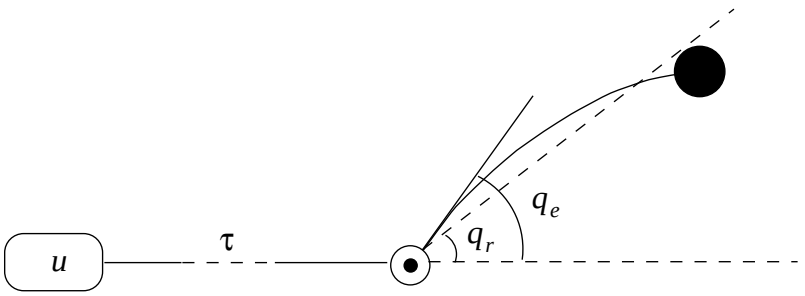


Figure 10 : Bras de robot téléopéré

Soit Λ un système $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \sigma_1, \ldots, \sigma_r]$–linéaire, que nous supposons $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \sigma_1, \ldots, \sigma_r]$–contrôlable sans torsion. Soit $\mathbb{R}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ le corps de fractions de $\mathbb{R}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r]$. Introduisons par localisation le système $\mathbb{R}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)[\frac{d}{dt}]$–linéaire

$$\mathbb{R}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)\left[\frac{d}{dt}\right] \otimes_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \sigma_1, \ldots, \sigma_r]} \Lambda$$

qui, étant sans torsion, est libre car $\mathbb{R}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)[\frac{d}{dt}]$ est un anneau principal. D'après le théorème 2.3.1, Λ est π–libre, $\pi \in \mathbb{R}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r]$. Nous avons vu, dans l'introduction, que (6) est σ–libre.

4.4. Exemple de bras de robot téléopéré. — On considère un robot flexible, téléopéré à distance. Plus précisément, prenons un modèle simple du premier mode d'un robot flexible à un bras, actionné par un moteur recevant ses ordres d'une plate-forme distante. Notons

- τ le temps de transmission des ordres,
- $q_r(t)$ le déplacement rigide,
- $q_e(t)$ le premier mode du déplacement élastique,
- $\mathcal{C}(t)$ le couple moteur actionnant le bras.

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} M_{rr} & M_{re} \\ M_{er} & M_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K_e q_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où M_{xy} désignent les masses équivalentes et K_e la raideur élastique. Par ailleurs, le moteur étant téléopéré, les ordres $u(t)$ sont transmis depuis un module distant et arrivent avec un retard de transmission τ :

$$u(t) = \mathcal{C}(t - \tau)$$

Les équations du système se réécrivent alors :

$$\begin{aligned} M_{rr}\ddot{q}_r(t) + M_{re}\ddot{q}_e(t) &= u(t - \tau) \\ M_{er}\ddot{q}_r(t) + M_{ee}\ddot{q}_e(t) &= -K_e q_e(t) \end{aligned}$$

Ce système est σ–libre, de sortie σ–plate

$$\omega(t) = M_{er} q_r(t) + M_{ee} q_e(t)$$

où σ désigne l'opérateur retard d'amplitude τ. En effet,

$$\begin{aligned} q_e(t) &= -\frac{1}{K_e}\,\ddot{\omega}(t) \\ q_r(t) &= \frac{1}{M_{er}}\,(\omega(t) - M_{ee}q_e(t)) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} q_r(t) &= \frac{1}{M_{er}}\,\omega(t) - \frac{M_{ee}}{K_e M_{er}}\,\omega(t) \\ q_e(t) &= -\frac{1}{K_e}\,\ddot{\omega}(t) \\ u(t) &= \frac{M_{rr}}{M_{er}}\,\ddot{\omega}(t+\tau) + \frac{1}{K_e}\left(\frac{M_{rr}M_{ee}}{M_{er}} - M_{re}\right)\omega^{(4)}(t+\tau) \end{aligned}$$

Pour une trajectoire désirée $\omega_d(t)$ arrêt-arrêt :

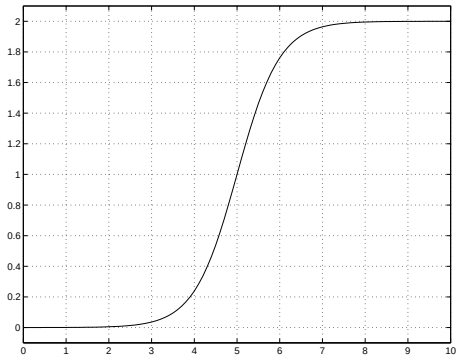


Figure 11 : Trajectoire désirée $\omega_d(t)$

on obtient une loi de commande en boucle ouverte réalisant le suivi exact de la forme :

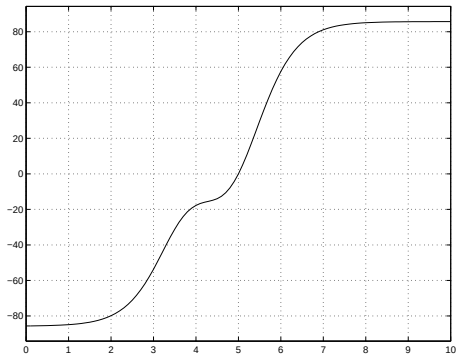


Figure 12 : Commande en boucle ouverte $u_d(t)$

4.5. Systèmes à paramètres répartis. — Par manque de place, concentrons-nous sur l'équation de la chaleur (8). Dans la version due à Mikusiński [**84, 85**] du calcul opérationnel (voir aussi [**144**]), $Q = \mathrm{ch}\sqrt{s}$ appartient au corps des *opérateurs* et $P = \mathrm{ch}z\sqrt{s}$ est une *fonction opérationnelle*. On peut démontrer que P et Q sont $\mathbb{C}$–algébriquement indépendantes. Il s'ensuit que (10), qui est de même nature que (18), est $\mathbb{C}[P,Q]$–contrôlable sans torsion, mais n'est pas $\mathbb{C}[P,Q]$–contrôlable libre. D'après (11), il est clair que (10) est PQ–libre[(30)].

D'après [**85**], on a

$$\mathrm{ch}z\sqrt{s} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} s^n$$

où la série du second membre converge *opérationnellement*. Pour que (12) soit valide, il suffit que la fonction $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie les conditions suivantes :

1. ζ est C^∞, à support contenu dans $[0, +\infty[$; en particulier, ζ est plate en $t = 0$, donc $\zeta^{(n)}(0) = 0$, pour tout $n \geq 0$.
2. ζ est Gevrey d'ordre[(31)] < 2.

La fonction C^∞

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t \leq 0 \\ e^{\frac{-1}{t^d}} & \text{si } \ t > 0 \end{cases}$$

où $d > 0$, est plate en $t = 0$, à support dans $[0, +\infty[$. Elle est Gevrey de classe $1 + \frac{1}{d}$ (cf. [**113**]). Prendre pour ζ une telle fonction n'est pas satisfaisant, car cela revient à obtenir un comportement désiré asymptotiquement, c'est-à-dire pour $t \to +\infty$. On y remédie, en introduisant avec Ramis [**110**], la fonction Gevrey de classe $1 + \frac{1}{d}$

$$\eta_d(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t \leq 0 \\ C\int_0^t \exp\left(\dfrac{-1}{\tau^d(1-\tau)^d}\right) d\tau & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } \ t \geq 1 \end{cases}$$

où

$$C = \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{\tau^d(1-\tau)^d}\right) d\tau$$

est une constante de normalisation, représentée dans la figure 13 pour $d = 1$.

---

(30) Il est évident que (10) est, aussi, P–libre, ou Q–libre. L'élément π du théorème 2.3.1 n'est pas unique.

(31) Rappelons que la fonction ζ est dite Gevrey, de classe ou d'ordre $\mu \geq 1$ si, et seulement si,
- elle est C^∞,
- pour tout compact $C \subset \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 0$, on a

$$| \zeta^{(n)}(t) | \leq c^{n+1}(n!)^\mu$$

où $c > 0$ est une constante dépendant de ζ et C.

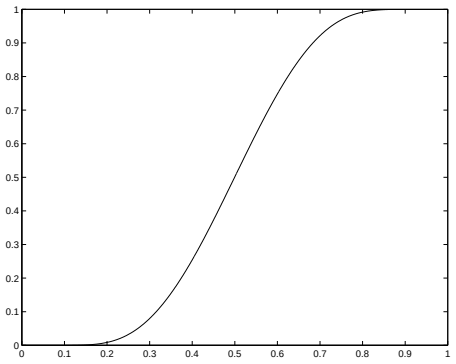


FIGURE 13. La fonction de Gevrey utilisée pour $d = 1$

On trouvera la mise-en-œuvre [**50**] de cette méthode à propos de l'équation d'Euler-Bernoulli des poutres flexibles, qui a été testée avec succès en [**3, 56**].

4.6. Généralisations en dimension infinie. — Au-delà du linéaire de dimension finie, les définitions de la contrôlabilité ont été nombreuses et variées. Pour les systèmes à retards, une comparaison entre la plupart des notions existantes a été menée à bien grâce aux modules [**48, 86**]. Il serait instructif de la poursuivre pour les équations aux dérivées partielles.

Le contrôle d'équations aux dérivées partielles à plusieurs variables d'espace est, bien entendu, à étudier. Pour des géométries simples, les transformations intégrales classiques (cf. [**135**]) semblent être la continuation naturelle de ce qui précède.

On trouvera quelques exemples concrets d'équations aux dérivées partielles non linéaires en [**72, 120**], traités avec le même esprit.

5. Systèmes non linéaires

Nous traiterons les deux formalismes évoqués en introduction, l'algèbre différentielle, introduite en 1985 en contrôle par l'auteur (voir [**26**]), et la géométrie différentielle des jets infinis.

5.1. Algèbre différentielle. — Un *anneau différentiel (ordinaire)* est un anneau commutatif A, muni d'une seule[(32)] dérivation, notée $\frac{d}{dt} = \dot{}$, telle que, pour tout $a \in A$, $\dot{a} \in A$, de sorte que, pour tout $a, b \in A$,

- $\frac{d}{dt}(a + b) = \dot{a} + \dot{b}$,
- $\frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b}$.

[(32)] Un anneau différentiel muni de plusieurs dérivations est dit *partiel*. Nous limitant aux équations différentielles ordinaires, nous n'en aurons pas besoin.

Une *constante* est un élément $c \in A$, tel que $\dot{c} = 0$. L'ensemble des constantes de A forme le sous-anneau des constantes. Un *idéal différentiel* de A est un idéal, clos pour la dérivation. Un morphisme $\phi : A \to B$ d'anneaux différentiels est un morphisme d'anneaux, qui commute avec la dérivation : $\frac{d}{dt}\phi = \phi\frac{d}{dt}$.

***Exemple* 5.1.1**. — *Dans l'anneau différentiel $k\{X_1, \ldots, X_n\}$ des polynômes sur k en les indéterminées différentiels $X_1, \ldots, X_n$, tout élément est un polynôme en les indéterminées $\{X_\iota^{(\nu_\iota)} \mid \iota = 1, \ldots, n,\ \nu_\iota \geq 0\}$.*

Un *corps différentiel (ordinaire)* est un anneau différentiel qui est un corps. Nous nous restreindrons aux corps de caractéristique nulle par souci de simplicité : on ne connait pas encore de phénomènes concrets régis par des équations différentielles à coefficients dans un corps de caractéristique non nulle[(33)].

Ce qui suit est une transcription des propriétés élémentaires d'extensions de corps non différentiels. Une *extension différentielle* K/k consiste en la donnée de deux corps différentiels k, K, $k \subseteq K$, tels que la dérivation de k soit la restriction à k de la dérivation de K.

Notation On note $k\langle\Sigma\rangle$ le sous-corps différentiel de K engendré par k et une partie $\Sigma \subseteq K$.

Un élément $\xi \in K$ est *différentiellement k–algébrique* si, et seulement si, la famille des dérivées $\{\xi^{(\nu)} \mid \nu \geq 0\}$ est k–algébriquement dépendante ; ξ satisfait donc une équation différentielle algébrique $P(\xi, \ldots, \xi^{(n)}) = 0$, où P est un polynôme sur k en $n+1$ indéterminées. Sinon, ξ est dit *différentiellement k–transcendant*. L'extension K/k est différentiellement algébrique si, et seulement si, tout élément de K est différentiellement k–algébrique ; sinon, elle est dite différentiellement transcendante. Un ensemble $\{\xi_i \mid i \in I\}$ d'éléments de K est dit *différentiellement k–algébriquement indépendant* si, et seulement si, l'ensemble $\{\xi_i^{(\nu_i)} \mid i \in I,\ \nu_i \geq 0\}$ est algébriquement k–indépendant. Un tel ensemble est appelé *base de transcendance différentielle* de K/k si, et seulement si, il est maximal par rapport à l'inclusion. Deux telles bases ont même cardinalité qui est le *degré de transcendance différentiel* de K/k, noté deg tr diff(K/k). Rappelons que deg tr diff$(K/k) = 0$ si, et seulement si, K/k est différentiellement algébrique.

Soit K/k une extension différentielle de type fini. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes [**64**] :

- K/k est différentiellement algébrique ;
- deg tr $(K/k) < \infty$, c'est-à-dire le degré de transcendance (non différentiel) de K/k est fini.

Soient k un corps différentiel et K/k une extension algébrique au sens usuel, c'est-à-dire non différentielle. Alors, K possède une structure canonique de corps différentiel, telle que K/k soit une extension différentielle.

5.2. Systèmes. — Un *k–système* est une extension différentielle K/k de type fini.

(33) Ce n'est pas vrai pour les équations aux différences !

***Remarque* 5.2.1**. — *En pratique, un système est donné par des équations différentielles algébriques, c'est-à-dire par un idéal différentiel* $\Im$ *de* $k\{X_1, \ldots, X_n\}$. *Supposons* $\Im$ *premier*[34] *; alors* K *est le corps de fractions de* $k\{X_1, \ldots, X_n\}/\Im$. *Si* $\Im$ *n'est pas premier, on s'y ramène grâce à la généralisation différentielle du théorème de décomposition de Lasker-Noether, due à Raudenbush et Ritt (cf.* [**112**], [**64**]*).*

Une *k–dynamique* est un k–système K/k, muni d'une *entrée* $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ telle que l'extension $K/k\langle \boldsymbol{u} \rangle$ soit différentiellement algébrique. L'entrée est dite *indépendante* si, et seulement si, $\boldsymbol{u}$ est une base de transcendance différentielle de K/k.

Un *k–système entrée-sortie* est une k–dynamique munie d'une *sortie*, c'est-à-dire une partie finie $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ de K.

5.2.1. Représentations d'état. — Soit n le degré de transcendance de $K/k\langle \boldsymbol{u} \rangle$ et $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ une base de transcendance. Il vient [**26, 28**]

$$F_i(\dot{x}_i, \boldsymbol{x}, u_1, \dot{u}_1, \ldots, u_1^{(\alpha_{1i})}, \ldots, u_m, \dot{u}_m, \ldots, u_m^{(\alpha_{mi})}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \tag{19}$$

où les F_i sont des polynômes sur k. Deux antinomies notables sont à noter par rapport à (4), c'est-à-dire par rapport à la représentation d'état non linéaire usuelle :

1. La présence en (19) de dérivées de l'entrée[35] est confirmée par la grue de l'introduction [**44**].
2. La forme implicite de (19) par rapport à $\dot{x}_i$, confirmée par un circuit électrique non linéaire [**35**], est reliée aux *points d'impasse* des équations différentielles ordinaires.

5.2.2. Équivalence et platitude. — Deux systèmes K_1/k et K_2/k sont dits *équivalents* si, et seulement si, les les clôtures algébriques $\bar{K}_1$ et $\bar{K}_2$ de K_1 et K_2 sont telles que les extensions différentielles $\bar{K}_1/k$ et $\bar{K}_2/k$ soient différentiellement isomorphes. Par manque de place, nous ne donnerons pas la traduction en terme de bouclage *endogène*, qui est un bouclage *dynamique* particulier[36].

Par analogie avec la situation non différentielle, l'extension K/k est dite *différentiellement transcendante pure* si, et seulement si, il existe une base de transcendance différentielle $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ de K/k, telle que $K = k\langle \boldsymbol{b} \rangle$. Un système est dit *(différentiellement) plat* si, et seulement si, il est équivalent à une extension différentiellement transcendante pure $k\langle \boldsymbol{b} \rangle/k$. Alors, $\boldsymbol{b}$ est appelée *sortie (différentiellement) plate*, ou *linéarisante*, du système plat.

5.2.3. Platitude et systèmes linéaires contrôlables. — Soit Λ un $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–système linéaire, c'est-à-dire un $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–module de type fini. La $\mathbb{R}$–algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(\Lambda)$ possède une structure canonique d'anneau différentiel. Soit L le corps différentiel de

---

[34] Les idéaux différentiels rencontrés en pratique sont le plus souvent premiers. C'est, notamment, vrai lorsqu'on a une représentation de type (4) à second membre polynômial (voir [**25**]).

[35] L'exemple élémentaire $\dot{x} = (\dot{u})^2$ démontre qu'en non-linéaire il est en général impossible de chasser les dérivées de l'entrée par un changement d'état dépendant de l'entrée et de ses dérivées. Renvoyons à [**21**] pour un résultat général.

[36] Un type important de bouclages endogènes et, donc, dynamiques, est fourni par les bouclages *quasi-statiques* [**20**], également utiles en platitude [**22, 125, 129**].

fractions de $\mathrm{Sym}(\Lambda)$, qui n'a pas de diviseurs de zéro. Il est facile de vérifier que l'extension $L/\mathbb{R}$ est différentiellement transcendante pure si, et seulement si, Λ est libre. Nous avons esquissé la démontration[37] du

***Théorème* 5.2.1**. — *Un système non linéaire est plat si, et seulement si, il est équivalent à un système linéaire contrôlable.*

On en déduit le

***Corollaire* 5.2.1**. — *Un système $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–linéaire est plat si, et seulement si, il est contrôlable.*

5.2.4. Digression : systèmes non linéaires à retards. — Un formalisme pour les systèmes non linéaires à retards (cf. [**27**]) est donné par les *corps différentiels aux différences* [**18**], qui généralisent les corps différentiels et les *corps aux différences* [**17**]. Un tel corps K, supposé de caractéristique nulle, sera ici muni d'une seule dérivation $\frac{d}{dt}$ et d'un ensemble fini $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ d'injections $K \to K$, qui représentent les retards. Un système non linéaire à retards est, alors, une extension K/k de type fini. Le concept de platitude s'étend à ce cadre (voir [**90, 91, 130**], où des exemples concrets sont présentés).

5.3. Géométrie différentielle. — Soit I un ensemble dénombrable, fini ou non, de cardinalité ℓ. Notons $\mathbb{R}^\ell$ l'ensemble des applications $I \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}^\ell$ est muni de la topologie produit, qui est de Fréchet. Pour tout ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^\ell$, soit $C^\infty(\mathcal{V})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{V} \to \mathbb{R}$, dépendant d'un nombre fini de variables et C^∞. Une $\mathbb{R}^\ell$-variété C^∞ est définie comme en dimension finie par un $\mathbb{R}^\ell$–atlas. Les notions de fonctions, de champs de vecteurs, de formes différentielles C^∞ sur un ouvert sont claires. Si $\{x_i \mid i \in I\}$ sont des coordonnées locales, remarquons qu'un champ de vecteurs peut correspondre à l'expression infinie $\sum_{i \in I} \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, tandis qu'une forme différentielle $\sum_{\text{finie}} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ est toujours finie. La notion de morphisme (local) C^∞ entre deux $\mathbb{R}^\ell$ et $\mathbb{R}^{\ell'}$–variétés C^∞, où ℓ et ℓ' ne sont pas nécessairement égaux, est claire de même que la notion d'isomorphisme (local). Par contre, la non-validité du théorème des fonctions implicites dans ces espaces de Fréchet de dimension infinie interdit l'équivalence des diverses caractérisations usuelles des submersions et immersions (locales) entre variétés de dimension finie. Choisissons avec [**146**] la définition suivante : une *submersion* (resp. *immersion*) (locale) C^∞ est un morphisme (local) C^∞ tel qu'il existe des coordonnées locales où c'est une projection (resp. injection).

Une *diffiété* $\mathcal{M}$ est une $\mathbb{R}^\ell$–variété C^∞, munie d'une *distribution de Cartan* $C\mathcal{TM}$, c'est-à-dire une distribution de dimension finie et involutive. La dimension n de $C\mathcal{TM}$ est la *dimension de Cartan* de $\mathcal{M}$. Une section (locale) de $C\mathcal{TM}$ est un *champ de Cartan* (local) de $\mathcal{M}$. La diffiété est dite *ordinaire* (resp. *partielle*) si, et seulement

[37] D'après une démonstration analogue, deux systèmes $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–linéaires sont équivalents si, et seulement si, les modules correspondants sont isomorphes.

si, $n = 1$ (resp. $n > 1$). Un morphisme C^∞ (local) entre diffiétés est dit de *Lie-Bäcklund*[38] si, et seulement si, il est compatible avec les distributions de Cartan. Les notions de submersions et d'immersions de Lie-Bäcklund (locales) sont claires. Alors, la *catégorie des équations différentielles* est celle des diffiétés munies des morphismes de Lie-Bäcklund.

Restreignons-nous, dorénavant, aux diffiétés ordinaires, c'est-à-dire aux équations différentielles ordinaires.

***Exemple* 5.3.1**. — *Soit la diffiété de coordonnées globales* $\{t, y_i^{(\nu_i)} \mid i = 1, \ldots, m; \nu_i \geq 0\}$ *et de champ de Cartan*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu_i \geq 0} y_i^{(\nu_i+1)} \frac{\partial}{\partial y_i^{(\nu_i)}}$$

Notée $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\infty^m$ *et appelée diffiété* triviale, *car elle correspond à l'équation triviale* $0 = 0$, *elle joue un rôle fondamental.*

Une diffiété $\mathcal{M}$ est dite (localement) de *type fini*[39] si, et seulement si, il existe une submersion de Lie-Bäcklund (locale) $\mathcal{M} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_m^\infty$ dont les fibres sont de dimension finie ; m est la *dimension différentielle* (locale) de $\mathcal{M}$.

***Exemple* 5.3.2**. — *Soit la dynamique non linéaire*

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{20}$$

où l'état $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et le contrôle* $u = (u_1, \ldots, u_m)$ *appartiennent à des ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$ *;* $F = (F_1, \ldots, F_n)$ *est un m-tuple de fonctions* C^∞ *de leurs arguments. Associons à (20) la diffiété* $\mathcal{D}$ *de coordonnées* $\{t, x_1, \ldots, x_n, u_i^{(\nu_i)} \mid i = 1, \ldots, n; \nu_i \geq 0\}$. *La distribution de Cartan est engendrée par le champ de Cartan*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} F_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu_i \geq 0} u_i^{(\nu_i+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(\nu_i)}}$$

Une *fibration de Lie-Bäcklund* (local) est un triplet $\sigma = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, \pi)$, où $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ est une submersion de Lie-Bäcklund (locale) entre deux diffiétés. Pour tout $b \in \mathcal{B}$, $\pi^{-1}(b)$ est une *fibre*. Soit une autre fibration de Lie-Bäcklund $\sigma' = (\mathcal{X}', \mathcal{B}, \pi')$ de même base $\mathcal{B}$. Un morphisme de Lie-Bäcklund $\alpha : \sigma \to \sigma'$ est un morphisme de Lie-Bäcklund $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ tel que $\pi = \pi'\alpha$. La notion d'isomorphisme de Lie-Bäcklund est claire.

---

[38] Cette terminologie est due à Ibragimov (voir [**1**] et, aussi, [**146**]). Elle a été critiquée par plusieurs auteurs (voir, par exemple, [**99**]). Vinogradov et son école parlent de *C-morphisme* (voir [**65, 66**]), car ces morphismes généralisent les transformations de contact classiques. Il convient d'ajouter que la théorie des diffiétés n'en étant qu'à ses débuts, la terminologie est fluctuante selon les auteurs.

[39] Voir [**40**] pour une définition intrinsèque.

5.3.1. Systèmes. — Un *système* [**40**] est une fibration de Lie-Bäcklund (locale) $\sigma = (S, \mathbb{R}, \tau)$, où

- S est une diffiété de type fini à champ de Cartan ∂_S donné,
- $\mathbb{R}$ est muni d'une structure canonique de diffiété, de coordonnée globale t, et de champ de Cartan $\frac{\partial}{\partial t}$,
- les champs de Cartan ∂_S et $\frac{\partial}{\partial t}$ sont τ–associés.

Un *morphisme de Lie-Bäcklund* (resp. une *immersion*, une *submersion*, un *isomorphisme* de Lie-Bäcklund) (local) $\varphi : (S, \mathbb{R}, \tau) \to (S', \mathbb{R}, \tau')$ entre deux systèmes est un morphisme (resp. immersion, submersion, isomorphisme) de Lie-Bäcklund (local) entre S et S' tel que

- $\tau = \tau' \varphi$,
- ∂_S et $\partial_{S'}$ sont φ–associés.

Une *dynamique* est une submersion de Lie-Bäcklund (locale) $\delta : (S, \mathbb{R}, \tau) \to (U, \mathbb{R}, \mu)$, telle que les champs de Cartan ∂_S and ∂_U sont δ–associés. En général, U est un ouvert de la diffiété triviale $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$: il joue le rôle de contrôle. Remplaçons, par léger abus de notation, ∂_S et ∂_U, qui sont des dérivations totales par rapport à t, par $\frac{d}{dt}$.

5.3.2. Équivalence et platitude. — Deux systèmes $(S, \mathbb{R}, \tau)$ et $(S', \mathbb{R}, \tau')$ sont dits (localement) *différentiellement équivalents* si, et seulement si, ils sont (localement) Lie-Bäcklund isomorphes. Ils sont dits (localement) *orbitalement équivalents* si, et seulement si, S et S' sont (localement) Lie-Bäcklund isomorphes. La première définition préserve le temps[(40)], mais non la seconde : elle introduit un *changement de temps*[(41)].

Le triplet $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m_\infty, \mathbb{R}, \mathrm{pr})$, où $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m_\infty = \{t, y_i^{(\nu_i)}\}$ est le système trivial et pr la projection $\{t, y_i^{(\nu_i)}\} \mapsto t$, est un *système trivial*. Le système $(S, \mathbb{R}, \tau)$ est (localement) *différentiellement plat* si, et seulement si, il est (localement) différentiellement équivalent à un système trivial ; il est (localement) *orbitalement plat* si, et seulement si, il est (localement) orbitalement équivalent à la diffiété triviale. L'ensemble $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ est une sortie *sortie plate*, ou *linéarisante*. On vérifie, comme en 5.2.3, qu'un système est (orbitalement) plat si, et seulement si, il est (orbitalement) équivalent à un système linéaire commandable.

5.3.3. Digression : accessibilité forte. — En théorie géométrique habituelle (voir [**57, 58, 94, 139**]), une dynamique affine en contrôle est un objet privilégié d'étude :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\boldsymbol{x}) \tag{21}$$

L'état $\boldsymbol{x}$ appartient à une variété différentiable C^∞ de dimension n. Soit L la *distribution d'accessibilité faible*, c'est-à-dire la distribution sous-tendue par l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ engendrée par les champs de vecteurs $f_0, f_1, \ldots, f_m$. L'*algèbre de Lie d'accessibilité forte* L_0 est la distribution sous-tendue par l'idéal de Lie $\mathcal{L}_0$ de $\mathcal{L}$ engendré par

(40) Comme celle donnée avec les corps différentiels.

(41) Ce changement de temps est très utile en pratique (planification de trajectoires [**38**], bouclage stabilisant [**39**]) car il permet de "s'affranchir" de certaines singularités.

$f_1, \ldots, f_m$. La dynamique (21) satisfait localement la condition de Lie d'accessibilité forte [**141**] (voir, aussi, [**57, 58, 94, 139**]), si, et seulement si, L_0 est localement de dimension n.

Une *intégrale première* locale, ou une *constante de mouvement*, I sur la diffiété $\mathcal{M}$ est une fonction C^∞ locale I de $\mathcal{D}$ à valeurs réelles, telle que $\frac{dI}{dt} = 0$. Elle est dite *triviale* si, et seulement si, c'est une constante.

***Proposition* 5.3.1**. — *Pour (21), les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *(21) satisfait localement la condition de Lie d'accessibilité forte,*
- *toute intégrale première locale de la diffiété associée $\mathcal{M}$ est triviale.*

Démonstration. — Supposons que (21) ne satisfasse pas localement la condition de Lie d'accessibilité forte. Alors, (21) se décompose localement de façon suivante (voir [**57, 94**]) :

$$\begin{array}{c} \dot{\overline{\boldsymbol{x}}} = \overline{f}_0(\overline{\boldsymbol{x}}) \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{f}_0(\overline{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^m u_i \tilde{f}_i(\overline{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) \end{array} \tag{22}$$

où $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_\kappa)$ et $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_{\kappa+1}, \ldots, \tilde{x}_n)$. L'application du théorème de redressement des champs de vecteurs à $\dot{\overline{\boldsymbol{x}}} = \overline{f}_0(\overline{\boldsymbol{x}})$ fournit localement κ intégrales premières locales non triviales. Supposons maintenant l'existence d'une integrale première $I(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\alpha)})$ telle qu'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ vérifiant $\frac{\partial I}{\partial u_i^{(\alpha)}} \neq 0$. Alors, $\frac{dI}{dt}$, qui contient le terme $u_i^{(\alpha+1)} \frac{\partial I}{\partial u_i^{(\alpha)}}$, est identiquement nulle si $\frac{\partial I}{\partial u_i^{(\alpha)}}$ l'est. Par récurrence il en découle que I ne dépend que de $t, x_1, \ldots, x_n$. L'existence d'une telle intégrale première contredit la condition de Lie d'accessibilité forte. □

Il ne semble pas exister de définition de l'accessibilité forte valable pour un système non linéaire arbitraire. Une diffiété est dit *localement fortement accessible* si, et seulement si, toute intégrale première locale y est triviale.

***Exemple* 5.3.3**. — *Il est aisé de démontrer que tout système trivial est localement fortement accessible* [**42**]. *Il en découle que tout système localement orbitalement plat l'est aussi.*

5.4. Quelques problèmes ouverts en non-linéaire. — On trouvera en [**41**] des précisions supplémentaires sur certains des problèmes abordés.

5.4.1. Caractérisation de la platitude. — Aucun critère général de platitude n'est connu. C'est avant tout, semble-t-il, un problème d'intégrabilité[(42)] pour lequel la géométrie différentielle est mieux adaptée[(43)]

[(42)] On s'en persuadera en considérant le système linéaire *tangent*, ou *variationel*, attaché au système (voir [**38**] pour une approche algébrique par différentielles de Kähler, et [**42**] pour l'analogue en géométrie différentielle des jets infinis). Si l'on fait l'hypothèse, naturelle d'après ce qui précède, de la forte accessibilité du système, le linéaire tangent, qui est à coefficients variables, est contrôlable (cf. [**19, 137, 138**]). Le module correspondant, défini sur un anneau principal non commutatif, est libre [**29**]. La platitude équivaut à l'existence d'une base intégrable, c'est-à-dire dont les composantes sont les différentielles de fonctions.

[(43)] Des résultats partiels existent déjà (voir [**79, 80, 93, 101, 107**]).

***Exemple* 5.4.1**. — *La dynamique*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^{(\alpha_1)} & = & u_1 \\ x_2^{(\alpha_2)} & = & u_2 \\ \dot{x}_3 & = & u_1 u_2 \end{array} \right.$$

$\alpha_1, \alpha_2 > 0$, *est plate. Une sortie plate est*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & x_3 + \sum_{\iota=1}^{\alpha_1} x_1^{(\alpha_1-\iota)} u_2^{(\iota-1)} \\ y_2 & = & x_2 \end{array} \right.$$

Il faut donc utiliser des dérivations d'ordre $\min(\alpha_1, \alpha_2)$ *du contrôle et l'on ne sait s'il en existe avec des ordres de dérivation moindre.*

La difficulté tient au fait que l'on ne sait pas borner *a priori* pour un système donné l'ordre de dérivation nécessaire pour vérifier son éventuel platitude. Si c'était le cas, un critère d'intégrabilité (cf. [**13**]) serait une réponse satisfaisante. Que l'on permette à l'auteur de suggérer l'écriture d'une cohomologie de Spencer d'ordre infini, c'est-à-dire indépendante de l'ordre de dérivation.

5.4.2. Une variante du théorème de Lüroth. — Une conjecture essentielle, que nous expliciterons dans nos deux langages, est la suivante :

- Soit K/k un système plat. Pour tout corps différentiel L, $k \subset L \subset K$, L/k est aussi un système plat[(44)]. C'est une variante du théorème de Lüroth, généralisé aux corps différentiels par Ritt [**112**][(45)].
- L'image par une submersion de Lie-Bäcklund d'un système trivial (resp. une diffiété triviale) est un système trivial (une diffiété triviale).

Dans le jargon du contrôle, sa véracité impliquerait que tout système linéarisable par bouclage dynamique (voir [**38, 43**]) est (différentiellement) plat, c'est-à-dire linéarisable par bouclage endogène. Une autre conséquence serait une meilleure prise en compte des symétries naturelles du système pour examiner la platitude et déterminer les sorties plates[(46)].

5.4.3. Classification. — Il faudrait une classification (locale) des systèmes à une équivalence près, équivalence décrite en en 5.2.2 et 5.3.2, où la classe la plus simple serait celle des systèmes plats. En voici la signification dans les deux langages employés :

1. Il s'agit de décrire les extensions de type fini K/k de corps différentiels ordinaires à une extension algébrique[(47)] de K près[(48)].

[(44)] Une extension algébrique L/k est considérée comme un système plat trivial.

[(45)] Dans cet ordre, mentionnons qu'Ollivier [**97**] a utilisé la platitude pour répondre par la négative à une question posée par Ritt [**112**] sur la généralisation du théorème de Lüroth différentiel. Citons aussi [**98**] pour une réponse négative à un problème de Ritt sur une généralisation différentielle d'un problème de M. Noether.

[(46)] Voir [**122**] pour un cas particulier.

[(47)] Il s'agit d'une extension algébrique usuelle, c'est-à-dire non différentielle.

[(48)] Le *défaut* [**38**] en est une première ébauche. En voici la définition. Parmi toutes les bases de transcendance différentielle de l'extension différentielle K/k, il en existe une, $\boldsymbol{b}$, telle que le degré de transcendance (non différentielle) de $K/k\langle \boldsymbol{b} \rangle$ soit minimum. Ce degré de transcendance est le défaut.

2. Contrairement à la géométrie locale des variétés différentiables de dimension finie, celle des diffiétés n'est pas triviale[49] (voir [**40**] pour quelques précisions). Classifier localement les systèmes non linéaires[50] revient à décrire cette géométrie locale à un changement de coordonnées près[51].

Beaucoup des propriétés de synthèse y trouveraient une interprétation simple et naturelle[52].

5.4.4. Contrôlabilités. — Déterminer, éventuellement comme conséquence de la classification précédente, une hiérarchie de contrôlabilités où
- la plus faible serait l'accessibilité forte ;
- la plus forte serait la platitude, différentielle ou orbitale.

5.4.5. Caractérisation trajectorienne de la contrôlabilité. — Rappelons très brièvement la caractérisation trajectorienne de la contrôlabilité linéaire, due à Willems (cf. [**105**]), qui ne distingue pas, elle aussi, les variables du système :

Un système linéaire de dimension finie, à coefficients constants, est contrôlable si, et seulement si, il est possible de joindre toute trajectoire passée à toute trajectoire future.

Le lien avec la liberté du $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–module correspondant[53] est donné en [**30**]. On se convainc aisément
- que les systèmes vérifiant les divers critères habituels de contrôlabilité non linéaire ne satisfont pas une telle propriété,
- qu'un système (orbitalement) plat possède une propriété analogue en dehors de toute singularité.

Caractériser les systèmes non linéaires jouissant localement d'une telle propriété.

5.4.6. Algèbre différentielle réelle. — Il faudrait développer une algèbre différentielle réelle pour mieux tenir compte des besoins du contrôle.

***Exemple* 5.4.2.** — *Le système*[54]

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{x}_3 \tag{23}$$

Il est nul si, et seulement si, le système est plat. Rappelons la commande à haute fréquence utilisée en [**38**] pour certains systèmes de défaut non nul.

[49] Une diffiété n'est pas, en général, localement Lie-Bäcklund isomorphe à une diffiété triviale !

[50] D'après le théorème de redressement des champs de vecteurs, la classification locale des systèmes dynamiques, c'est-à-dire non contrôlés, de dimension finie, est triviale en dehors des singularités !

[51] Ce point de vue se transpose, évidemment, à la géométrie algébrique différentielle, c'est-à-dire à la *variété algébrique différentielle* (cf. [**14**]) correspondant au système non linéaire.

[52] Dans le formalisme des corps différentiels, c'est déjà le cas pour le *découplage* et le *rejet de perturbations* par bouclage quasi-statique (cf. [**20**]).

[53] Une trajectoire [**30**] d'un système $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–linéaire Λ est, alors, un morphisme de $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$–modules $\Lambda \to C^\infty(t_0, t_1)$, $-\infty \leq t_0 < t_1 \leq +\infty$.

[54] Exemple dû à P. Rouchon (communication personnelle).

n'est pas plat sur $\mathbb{R}$*, d'après le critère de la variété réglée* [**38, 119**]. *Il l'est sur* $\mathbb{C}$. *Réécrivons, en effet, (23) sous la forme* $\dot{x}_3 = \dot{z}_1\dot{z}_2$, *où*[55] $z_1 = x_1 + x_2\sqrt{-1}$, $z_2 = x_1 - x_2\sqrt{-1}$. *Une sortie plate est donnée par*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_3 - \dot{z}_1 z_2 \\ y_2 &= z_1 \end{aligned}$$

car $z_2 = -\frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}$.

Un calcul analogue démontrerait que $\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = \dot{x}_3$ *est plat sur* $\mathbb{R}$.

5.4.7. Calcul formel. — La mise au point d'algorithmes, relevant, par exemple, du calcul formel, serait d'un grand secours. Les méthodes constructives de l'algèbre différentielle ont déjà eu un impact certain en contrôle non linéaire (voir, par exemple, [**24, 25, 34, 71, 96**]). Les travaux récents de Boulier et coll. [**9, 10**] devraient y être d'une grande importance.

5.4.8. Généricité. — La platitude, qui n'est pas une propriété générique (cf. [**119**]), est très souvent rencontrée en pratique. N'y a-t-il point là, et c'est une question de nature épistémologique, une contradiction avec le rôle prépondérant parfois accordée à la généricité ?

6. En guise de conclusion

Diverses parties ont été enseignées en théorie du contrôle. Cela permet, tout en insistant sur les applications, d'éclairer certains chapitres d'algèbre, d'analyse ou de géométrie, rarement abordés dans les cours de mathématiques appliquées. Plusieurs expériences, en France et à l'étranger, ont amplement démontré la possibilité de faire passer le message à un public non mathématicien, comme, parfois, celui des ingénieurs, grâce, notamment, à des travaux pratiques sur ordinateurs.

Références

[1] R.L. Anderson et N.H. Ibragimov, *Lie-Bäcklund Transformations in Applications*, SIAM, Philadelphie, 1979.

[2] B. d'Andréa-Novel et M. Cohen de Lara, *Commande linéaire de systèmes dynamiques*, Masson, Paris, 1993.

[3] Y. Aoustin, M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon et J. Rudolph, Theory and practice in the motion planning control of a flexible robot arm using Mikusiński's operators, *Proc.* 4^{th} *Sympos. Robotics Control*, Nantes, 1997, p. 287–293.

[4] K.J. Aström et T. Hägglund, *Automatic Tuning of PID Controllers*, 2^{nd} ed., Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.

[55] Selon une certaine tradition en électricité, on écrit $\sqrt{-1}$ au lieu de i.

[5] R. Baron, L. Boillereaux et J. Lévine, Platitude et conduite non-linéaire : illustration en extrusion et en photobioréacteur, à paraître.

[6] R. Bindel, R. Nitsche, R. Rothfuß et M. Zeitz, Flachheitsbasierte Regelung eines hydraulischen Antriebs mit zwei Ventilen für einen Großmanipulator, *Automatisierungstechnik*, **48**, 2000, 124–131.

[7] L. Bitauld, M. Fliess et J. Lévine, A flatness based control synthesis of linear systems : an application to windshield wipers, *Proc.* 4^{th} *Europ. Control Conf.*, Bruxelles, 1997.

[8] J. Boichet, E. Delaleau, N. Diep, J. Lévine, Modelling and control of a 2 D.O.F. high-precision positionning system, *Proc.* 5^{th} *Europ. Control Conf.*, Karlsruhe, 1999.

[9] F. Boulier, Triangulation de systèmes différentiels, à paraître.

[10] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier et M. Petitot, Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals, à paraître.

[11] H. Bourlès et M. Fliess, Poles and zeros of linear systems : an intrinsic approach, *Internat. J. Control*, **68**, 1997, 897–922.

[12] H. Bourlès et B. Marinescu, Poles and zeros at infinity of linear time-varying systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **44**, 1999, 1981–1985.

[13] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt et P.A. Griffiths, *Exterior Differential Systems*, Springer, New York, 1991.

[14] A. Buium et P.J. Cassidy, Differential algebraic geometry and differential algebraic groups : From algebraic differential equations to diophantine geometry, *Selected Works of Ellis Kolchin*, H. Bass, A. Buium, P.J. Cassidy, Eds, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1999, p. 567–636.

[15] É. Cartan, Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles, *J. reine angew. Math.*, **45**, 1915, 86-91. Œuvres complètes, t. III, p. 1169–1174, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[16] É. Cartan, Les problèmes d'équivalence, *Séminaire de Mathématiques*, 1937, p. 113–136. Œuvres complètes, t. III, p. 1311–1334, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[17] R.M. Cohn, *Difference Algebra*, Interscience, New York, 1965.

[18] R.M. Cohn, A difference-differential basis theorem, *Canad. J. Math.*, **22**, 1970, 1224–1237.

[19] J.-M. Coron, Linearized control systems and applications to smooth stabilization, *SIAM J. Control Optim.*, **32**, 1994, 358–386.

[20] E. Delaleau et P.S. Pereira da Silva, Filtrations in feedback systems : Part I – Systems and feedbacks, Part II – Input-output decoupling and disturbance decoupling, *Forum Math.*, **10**, 1998, 147–174 & 259–276.

[21] E. Delaleau et W. Respondek, Lowering the orders of derivatives of control in generalized state space systems, *J. Math. Systems Estim. Control*, **5**, 1995, 1–27.

[22] E. Delaleau et J. Rudolph, Control of flat systems by quasi-static state feedbacks of generalized states, *Internat. J. Control*, **71**, 1998, 745–765.

[23] G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Springer, Berlin, 1937.

[24] S. Diop, Elimination in control theory, *Math. Control Signals Systems*, **4**, 1991, 17–32.

[25] S. Diop, Differential-algebraic decision methods and some applications to system theory, *Theoret. Comput. Sci.*, **98**, 1992, 137–161.

[26] M. Fliess, Automatique et corps différentiels, *Forum Math.*, **1**, 1989, 227–238.

[27] M. Fliess, Some remarks on nonlinear input-output systems with delays, *New Trends in Nonlinear Control Theory*, J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, D. Leborgne, Eds, Lect. Notes Control Informat. Sci. **122**, Springer, Berlin, 1989, p. 172–181.

[28] M. Fliess, Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics, *IEEE Trans. Automat. Control*, **35**, 1990, 994–1001.

[29] M. Fliess, Some basic structural properties of generalized linear systems, *Systems Control Lett.*, **15**, 1990, 391-396.

[30] M. Fliess, A remark on Willems' trajectory characterization of linear controllability, *Systems Control Lett.*, **19**, 1992, 43-45.

[31] M. Fliess, Une interprétation algébrique de la transformation de Laplace et des matrices de transfert, *Linear Algebra Appl.*, **203–204**, 1994, 429–442.

[32] M. Fliess, Sur des pensers nouveaux faisons des vers anciens, *Actes Conf. Internat. Franc. Automat. (CIFA)*, Lille, 2000.

[33] M. Fliess et H. Bourlès, Discussing some examples of linear system interconnections, *Systems Control Lett.*, **27**, 1996, 1–7.

[34] M. Fliess et S.T. Glad, An algebraic approach to linear and nonlinear control, *Essays on Control : Perspectives in the Theory and its Applications*, H. Trentelman, J. Willems, Eds, Birkhäuser, Boston, 1993, p. 223-267.

[35] M. Fliess et M. Hasler, Questioning the classic state space description via circuit examples, *Realization and Modelling in System Theory*, M.A. Kashoek, J.H. van Schuppen, A.C.M. Ran, Eds, Birkäuser, Bâle, 1990, p. 1-12.

[36] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **I – 315**, 1992, 619–624.

[37] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **I – 317**, 1993, 981–986.

[38] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and applications, *Internat. J. Control*, **61**, 1995, 1327-1361.

[39] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems, *Proc.* 3^{rd} *European Control Conf.*, Rome, 1995, p. 1882-1887.

[40] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, Deux applications de la géométrie locale des diffiétés, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **66**, 1997, 275-292.

[41] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, Some open questions related to flat nonlinear systems, *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, V.D. Blondel, E.D. Sontag, M. Vidyasagar, J.C. Willems, Eds, Springer, Londres, 1998, p. 99–103.

[42] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, Nonlinear control and diffieties with an application to physics, *Secondary Calculus and Cohomological Physics*, M. Henneaux, J. Krasil'shchuk, A. Vinogradov, Eds, Contemp. Math. **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 81–91.

[43] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **44**, 1999, 922–937.

[44] M. Fliess, J. Lévine et P. Rouchon, A generalised state variable representation for a simplified crane description, *Internat. J. Control*, **58**, 1993, 277–283.

[45] M. Fliess et R. Marquez, Continuous-time linear predictive control and flatness : a module-theoretic setting with examples, *Internat. J. Control*, **73**, 2000, 606–623.

[46] M. Fliess, R. Marquez et E. Delaleau, State feedbacks without asymptotic observers and generalized PID regulators, *Nonlinear Control in the Year 2000*, A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, W. Respondek, Eds, Springer, Londres, 2000.

[47] M. Fliess, P. Martin, N. Petit et P. Rouchon, Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal, *Traitem. Signal*, **15**, 1998, 619–625.

[48] M. Fliess et H. Mounier, Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach, *ESAIM : Control Optimisation Calculus Variations*, **3**, 1998, 301–314.

[49] M. Fliess et H. Mounier, Tracking control and π–freeness of infinite dimensional linear systems, *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision*, G. Picci, D.S. Gilliam, Eds, Birkhäuser, Bâle, 1999, p. 45–68.

[50] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon et J. Rudolph, Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible, *Proc. ESAIM*, **2**, 1997, 183–193.

[51] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon et J. Rudolph, Controlling the transient of a chemical reactor : a distributed parameter approach, *Proc. CESA'98 IMACS Multiconf.*, Hammamet, Tunisie, 1998.

[52] M. Fliess et H. Sira-Ramírez, Régimes glissants, structures variables linéaires et modules, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **I–317**, 1993, 703–706.

[53] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer, Berlin, 1986.

[54] A. Grothendieck et J.A. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique, I*, Springer, Berlin, 1971.

[55] D. Hilbert, Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen, *Math. Annalen*, **73**, 1912, 95-108. *Gesammelte Abhandlungen*, 3. Bd., S. 81–93, Chelsea, New York, 1965.

[56] D. Hisseine, B. Lohmann et A. Kuczynski, Two control approaches for a flexible link manipulator, *Proc. IASTED Conf. Robotics Automation*, Santa Barbara, 1999.

[57] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3^{nd} ed., Springer, New York, 1995.

[58] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[59] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[60] R.E. Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems, *J. SIAM Control*, **1**, 1963, 152–192.

[61] R.E. Kalman, Algebraic theory of linear systems, *Topics in Mathematical System Theory*, R.E. Kalman, P.L. Farb, M.A. Arbib, Eds, McGraw-Hill, New York, 1969, p. 237–339.

[62] E.W. Kamen, On an algebraic theory of systems defined by convolution operators, *Math. Syst. Th.*, **9**, 1975, 57–74.

[63] B. Kiss, J. Lévine et B. Lantos, Trajectory planning for dextrous manipulation with rolling contacts, *Proc.* 37^{th} *IEEE Conf. Decision Control*, Tempa, FL, 1999, p. 2118–2119.

[64] E.R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, New York, 1973.

[65] I.S. Krasil'shchik, V.V. Lychagin et A.M. Vinogradov, *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New york, 1986.

[66] I.S. Krasil'shchik et A.M. Vinogradov, Eds, *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[67] J. Lévine, Are there new industrial perspectives in the control of mechanical systems ?, *Advances in Control : Highlights of ECC'99*, P.M. Frank, Ed., Springer, Londres, 1999, p. 197–226.

[68] J. Lévine, J. Lottin et J.C. Ponsart, A nonlinear approach to the control of magnetic bearings, *IEEE Trans. Control Systems Technology*, **4**, 1996, 524–544.

[69] J. Lévine et B. Rémond, Flatness based control of an automatic clutch, *Proc. MTNS-2000*, Perpignan, 2000.

[70] Y. Lenoir, P. Martin et P. Rouchon, $2k\pi$, the juggling robot, *Proc.* 37^{th} *IEEE Conf. Decision Control*, Tampa, FL, 1998, p. 1995–2000.

[71] L. Ljung et T. Glad, On global identifiability for arbitrary model parametrizations, *Automatica*, **30**, 1994, 265–276.

[72] A.F. Lynch et J. Rudolph, Flatness based boundary control of a nonlinear parabolic equation modelling a tubular reactor, *Nonlinear Control in the Year 2000*, A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, W. Respondek, Eds, Springer, Londres, 2000.

[73] Yu. I. Manin, Algebraic aspects of nonlinear differential equations, *J. Soviet. Math.*, **11**, 1979, 1–122.

[74] R. Marquez et E. Delaleau, Une application de la commande prédictive linéaire basée sur la platitude, *Actes Journées Doctorales d'Automatique*, Nancy, France, 1999, p. 148–152.

[75] R. Marquez R., E. Delaleau et M. Fliess, Commande par PID généralisé d'un moteur électrique sans capteur mécanique, *Actes Conf. Internat. Franc. Automat. (CIFA)*, Lille, 2000.

[76] P. Martin, Aircraft control using flatness, *Proc. CESA'96 IMACS Multiconf.*, Lille, 1996, p. 194–199.

[77] P. Martin, S. Devasia et B. Paden, A different look at output feedback : control of a VTOL aircraft, *Automatica*, **32**, 1996, 101–108.

[78] P. Martin, R.M. Murray et P. Rouchon, Flat systems, *Plenary Lectures and Mini-Courses, ECC-97*, G. Bastin, M. Gevers, Eds, Bruxelles, 1997, p. 211–264.

[79] P. Martin et P. Rouchon, Feedback linearization of driftless systems, *Math. Control Signal Syst.*, **7**, 1994, 235–254.

[80] P. Martin et P. Rouchon, Any (controllable) driftless system with 3 inputs and 5 states is flat, *Systems Control Lett.*, **25**, 1995, 167–173.

[81] P. Martin et P. Rouchon, Two remarks on induction motors, *Proc. CESA'96 IMACS Multiconf.*, Lille, 1996, p. 76–79.

[82] P. Martin et P. Rouchon, Flatness and sampling control of induction motors, *Proc. IFAC World Congress*, San Francisco, 1996, p. 389–394.

[83] P. Martin et P. Rouchon, Systèmes plats, planification et suivi de trajectoires, *Notes Journées X-UPS*, 1999 (`http ://math.polytechnique.fr/xups/vol99.html`).

[84] J. Mikusiński, *Operational Calculus*, vol. 1, Pergamon, Oxford & PWN, Varsovie, 1983.

[85] J. Mikusiński et T.K. Boehme, *Operational Calculus*, vol. 2, Pergamon, Oxford & PWN, Varsovie, 1987.

[86] H. Mounier, Algebraic interpretations of the spectral controllability of a linear delay system, *Forum Math.*, **10**, 1998, 39–58.

[87] H. Mounier, Systèmes d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux bords non linéaires : construction d'observateurs sur des systèmes mécaniques (trains de tiges de forage) avec vibrations en torsion et traction-compression, *Rapport Inst. Français Pétrole*, Rueil-Malmaison, 1997.

[88] H. Mounier, M. Mboup, N. Petit, P. Rouchon et D. Seret, High speed network congestion control with a simplified time-varying delay model, *Proc. IFAC Conf. System Structure Control*, Nantes, 1998, p. 43–47.

[89] H. Mounier, P. Rouchon et J. Rudolph, Some examples of linear systems with delays, *J. Europ. Syst. Autom.*, **31**, 1997, 911–925.

[90] H. Mounier et J. Rudolph, Flatness based control of nonlinear delay systems : example of a class of chemical reactors, *Internat. J. Control*, **71**, 1998, 871–890.

[91] H. Mounier et J. Rudolph, Load position tracking using a PM stepper motor with a flexible shaft : a δ–flat nonlinear delay system, *Proc.* 5^{th} *Europ. Control Conf.*, Karlsruhe, 1999.

[92] H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess et P. Rouchon, Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as a delay system, *ESAIM : Control Optimisation Calculus Variations*, **3**, 1998, 315–321.

[93] M. van Nieuwstadt, M. Rathinam et R.M. Murray, Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems, *SIAM J. Control Optimiz.*, **36**, 1998, 1225–1239.

[94] H. Nijmeijer et A.J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer, New York, 1990.

[95] U. Oberst, Multidimensional constant linear systems, *Acta Math. Appl.*, **20**, 1990, 1–175.

[96] F. Ollivier, Le problème de l'identifiabilité globale : étude théorique, méthodes effectives et bornes de complexité, *Thèse*, École polytechnique, Palaiseau, 1990.

[97] F. Ollivier, Une réponse négative au problème de Lüroth différentiel en dimension 2, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **I–327**, 1998, 881-886.

[98] F. Ollivier, Une réponse négative au problème de Noether différentiel, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **I–328**, 1999, 99–104.

[99] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2^{nd} ed., Springer, New York, 1993.

[100] Z.J. Palmor, Time-delay compensation – Smith predictor and its modifications, *The Control Handbook*, W. Levine, Ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, p. 224–237.

[101] P.S. Pereira da Silva, Flatness of nonlinear control systems and exterior differential systems, *Nonlinear Control in the Year 2000*, A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, W. Respondek, Eds, Springer, Londres, 2000.

[102] N. Petit, *Thèse*, École des Mines, Paris, 2000.

[103] N. Petit, Y. Creff et P. Rouchon, δ–freeness of a class of linear delayed systems, *Proc.* 4^{th} *Europ. Control Conf.*, Bruxelles, 1997.

[104] H.K. Pillai et S. Shankar, A behavioral approach to control of distributed systems, *SIAM J. Control Optimiz.*, **37**, 1999, 388–408.

[105] J.W. Polderman et J.C. Willems, *Introduction to Mathematical System Theory : A Behavioral Approach*, Springer, New York, 1998.

[106] J.-B. Pomet, A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization, *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions*, B. Jakubczyk, W. Respondek, T. Rzeżuchowski, Eds, Banach Center Publications, Varsovie, 1995, p. 319-339.

[107] J.-B. Pomet, On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs, *ESAIM : Control Optimisation Calculus Variations*, **2**, 1997, 151–230.

[108] J.-F. Pommaret et A. Quadrat, Localization and parametrization of linear multidimensional control systems, *Systems Control Lett.*, **37**, 1999, 247–360.

[109] D. Quillen, Projective modules over polynomial rings, *Invent. Math.*, **36**, 1976, 167–171.

[110] J.-P. Ramis, Dévissage Gevrey, *Astérisque*, **59–60**, 1979, 173–204.

[111] J. Richalet, *Pratique de la commande prédictive*, Hermès, Paris, 1993.

[112] J.F. Ritt, *Differential Algebra*, Amer. Math. Soc., New York, 1950.

[113] L. Rodino, *Linear Differential Operators in Gevrey Spaces*, World Scientific, Singapour, 1993.

[114] H.H. Rosenbrock, *State-space and Multivariable Theory*, Nelson, Londres, 1970.

[115] R. Rothfuß, *Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*, VDI, Düsseldorf, 1997.

[116] R. Rothfuss, U. Becker et J. Rudolph, Controlling a solenoid valve – a distributed parameter approach, *Proc. MTNS-2000*, Perpignan, 2000.

[117] R. Rothfuss, J. Rudolph et M. Zeitz, Flatness based control of a nonlinear chemical reactor model, *Automatica*, **32**, 1996, 1433-1439.

[118] R. Rothfuß, J. Rudolph et M. Zeitz, Flachheit : Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme, *Automatisierungstechnik*, **45**, 1997, 517–525.

[119] P. Rouchon, Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization, *J. Math. Systems Estim. Control*, **5**, 1995, 345–358.

[120] P. Rouchon, Motion planning, equivalence, infinite dimensional systems, *Proc. MTNS-2000*, Perpignan, 2000.

[121] P. Rouchon, M. Fliess, J. Lévine et P. Martin, Flatness, motion planning and trailer systems, *Proc.* 32^{nd} *IEEE Conf. Decision Control*, San Antonio, TX, 1993, p. 2700–2705.

[122] P. Rouchon et J. Rudolph, Invariant tracking and stabilization, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, D. Aeyels, F. Lamnabhi-Lagarrigue, A. van der Schaft Eds, Lect. Notes Control Inform. Sci. **246**, Springer, Berlin, 1999, p. 261–273.

[123] P. Rouchon et J. Rudolph, Réacteurs chimiques différentiellement plats : planification et suivi de trajectoires, *Automatique et procédés chimiques*, J.P. Corriou, Ed., Hermès, Paris, 2000.

[124] L.H. Rowen, *Ring Theory*, Academic Press, Boston, 1991.

[125] J. Rudolph, Well-formed dynamics under quasi-static state feedback, *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions*, B. Jakubczyk, W. Respondek, T. Rzeżuchowski, Eds, Banach Center Publications, Varsovie, 1995, p. 349–360.

[126] J. Rudolph, *Flachheitbasierte Folgerregelung*, Vorlesung Uni. Linz, 2000.

[127] J. Rudolph, Flatness-based control by quasi-static feedback illustrated on a cascade of two chemical reactors, *Internat. J. Control*, **73**, 2000, 115–131.

[128] J. Rudolph, Randsteuerung von Wärmetauschern mit örtlichen verteilten Parametern : ein flachheitsbasierter Zugang, *Automatisierungstechnik*, 2000.

[129] J. Rudolph et E. Delaleau, Some examples and remarks on quasi-static feedback of generalized states, *Automatica*, **34**, 1998, 993–999.

[130] J. Rudolph et H. Mounier, Trajectory tracking for π–flat nonlinear delay systems with a motor example, *Nonlinear Control in the Year 2000*, A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, W. Respondek, Eds, Springer, Londres, 2000.

[131] J. Rudolph, F. Woittennek et J. von Löwis, Zur Regelung einer elektromagnetisch gelagerten Spindel, *Automatisierungstechnik*, **48**, 2000, 132–139.

[132] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.*, **61**, 1955, 197–278.

[133] H. Sira-Ramírez, A passivity plus flatness controller for the permanent magnet stepper motor, *Asian J. Control*, **2**, 2000, 1–9.

[134] H. Sira-Ramírez, Passivity *vs* flatness in the regulation of an exothermic chemical reactor, *Europ. J. Control*, 2000.

[135] I.N. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1972.

[136] E.D. Sontag, Linear systems over commutative rings : a survey, *Ricerche Automatica*, **7**, 1976, 1–34.

[137] E.D. Sontag, Finite dimensional open loop control generator for non-linear control systems, *Internat. J. Control*, **47**, 1988, 537–556.

[138] E.D. Sontag, Universal nonsingular controls, *Systems Control Lett.*, **19**, 1992, 221–224.

[139] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2^{nd} ed., Springer, New York, 1998.

[140] A.A. Suslin, Projective modules over a polynomial ring are free, *Soviet. Math. Dokl.*, **17**, 1976, 1160–1164.

[141] H.J. Sussmann et V. Jurdjevic, Controllability of nonlinear systems, *J. Differential Equations*, **12**, 1972, 95-116.

[142] V.I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer, Berlin, 1992.

[143] T. Tsujishita, Formal geometry of systems of differential equations, *Sugaku Expos.*, **3**, 1990, p. 25-73.

[144] K. Yosida, *Operational Calculus – A Theory of Hyperfunctions*, Springer, New York, 1984.

[145] D.C. Youla et G. Gnavi, Notes on n–dimensional system theory, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **26**, 1979, 105–111.

[146] V.V. Zharinov, *Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, World Scientific, Singapour, 1992.

[147] M. Zribi, H. Sira-Ramírez et A. Ngai, Static and dynamic sliding mode control schemes for a PM stepper motor, *Internat. J. Control*, à paraître.

Michel Fliess, Journée Soc. Math France, 17 juin 2000, Centre de Mathématiques et Leurs Applications (CNRS–UMR 8536), École Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan.

Mél : fliess@cmla.ens-cachan.fr