Introduction à la relativité générale

Laurent Baulieu

Contents

1 Relativité galiléenne et relativité restreinte

L'existence d'un temps absolu et de référentiels inertiels tels que "les mouvements relatifs des corps sont les mêmes si on les observe de référentiels inertiels différents" font partie des postulats fondamentaux des Principia de Newton. La mécanique Newtonienne a donc la propriété qu'aucune expérience effectuée dans une enceinte close ne doit pouvoir détecter un mouvement en translation uniforme de cette enceinte par rapport à un référentiel inertiel. Ceci constitue le principe de relativité Galiléenne.

Ce principe s'exprime mathématiquement par l'invariance des équations de la physique sous le groupe des transformations de Galilée. Etant donné un choix de coordonnées cartésiennes, une transformation de Galilée générique s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1}$$

Dans ces équations, x, y, z sont les coordonnées de la position d'un objet mesurée au temps t dans un référentiel inertiel K tandis que les quantités avec des primes correspondent à un autre référentiel inertiel K' glissant à vitesse constante v le long de l'axe des x de K.

Newton était très en avance sur ses contemporains: malgré les succès expérimentaux de sa théorie, il critiquait sévèrement l'idée de temps absolu et ne pouvait accepter la propriété de propagation instantanée des interactions impliquée par l'équation $t' = t$.

Il fallut attendre le début du XX^{eme} siècle pour concilier les lois de la mécanique et la propagation à vitesse finie des interactions par l'abandon du cadre galiléen. Cette révolution, provoquée par Einstein, fut la conséquence d'études approfondies des conséquences théoriques et expérimentales des équations de Maxwell. Les physiciens de la fin du siècle dernier avaient constaté que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous le groupe des transformations de Galilée. Il semblait donc possible d'imaginer des expériences d'électromagnétisme montrant la non équivalence de référentiels inertiels. Hors, l'expérience de Michelson et Morley avait démontré qu'on ne peut mesurer de la sorte la vitesse de la terre par rapport aux étoiles. Un grand nombre d'hypothèses sur la structure de la matière et du milieu de propagation des ondes furent alors échafaudées pour réconcilier l'idée d'invariance de la physique sous le groupe des transformations de Galilée et la description des phénomènes électromagnétiques par les équations de Maxwell. Cette situation dura une vingtaine d'années pendant lesquelles aucune tentative ne se révéla satisfaisante. Pour lever l'ensemble des paradoxes soulevés par ses contemporains, Einstein comprit en 1906 qu'il ne s'agissait pas de trouver une structure interne plus ou moins compliquée des corps sur lesquels agissent les champs électromagnétiques, mais qu'il fallait modifier radicalement la géométrie de l'espace-temps. Son idée géniale et révolutionnaire fut de garder la forme des équations de Maxwell et le concept de particule ponctuelle tout en abandonnant le système des équations (1) pour passer d'un référentiel inertiel à un autre.

Le postulat d'Einstein fut que le groupe d'invariance des équations de la physique lorsqu'on passe d'un référentiel inertiel à un autre est réalisé par les transformations suivantes

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{2}$$

Ces formules sont appellées "transformations de Lorentz". C'est en effet Lorentz qui les découvrit en tant que groupe d'invariance des équations de Maxwell. Cependant, il n'en perçut pas l'importance fondamentale. C'est Einstein qui fit la remarque essentielle que l'électrodynamique et le principe de relativité redeviennent compatibles en remplaçant purement et simplement les formules de changement de référentiels (1) par les formules (2), et qu'en particulier on explique de la sorte les résultats de l'expérience de Michelson et Morley. Ainsi, la notion de temps absolu disparait, et on aboutit à un nouveau cadre pour la physique, celui de la relativité restreinte.

Dans le cas des changements de référentiels avec v très petit devant la vitesse de la lumière c, les transformations de Lorentz (2) s'identifient aux transformations de Galilée (1). L'invariance de Galilée, et ses conséquences telles que la notion de temps absolu et la propagation instantanée des interactions, sont donc une excellente approximation de la réalité tant que l'on considère des phénomènes où les vitesses caractéristiques mises en jeu sont très faibles devant celle de la lumière. Le passage aux transformations (2) ouvre un chapître nouveau de la physique, avec des applications immédiates telle la correspondance entre masse et énergie.

2 Le problème de la gravitation en relativité restreinte

Une des conséquences profondes des lois de changement de référentiels (2) est l'inexistence d'un temps absolu. La durée des phénomènes réels, tels l'écart des pulses d'une horloge atomique, la durée de vie d'une particule instable, ou bien, plus troublant d'un point de vue anthropomorphique, celle d'un être vivant, dépendent du référentiel d'observation. Il en est de même de la notion de simultanéité de deux évènements.

Par exemple, un observateur immobile par rapport à un muon le voit se désintégrer après une durée moyenne de $\tau \sim 10^{-6}s$. S'il l'observe après sa création dans un accélérateur qui lui confère une vitesse v proche de celle de la lumière, ou encore dans une gerbe cosmique, il ne le voit se désintégrer qu'au bout d'une durée $\tau/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Le facteur de dilatation n'est important que si v est très proche de c. Il faut noter qu'au moment de la désintégration du muon l'observateur a réellement vieilli de $\tau/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Si on remplace le muon par un être humain, on aboutit au "paradoxe" célèbre des jumeaux de Langevin dont nous reparlerons plus tard.

D'un point de vue mathématique, lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre, les phénomènes de dilatations des intervalles de temps et de longueur découlent de la conservation sous les transformations (2) d'une distance appelée distance propre que l'on peut définir à partir des coordonnées de temps et d'espace x_a, y_a, z_a, t_a et x_b, y_b, z_b, t_b de deux événements P_a et P_b (par exemple les coordonnées dans l'espace-temps des événement de création et de désintégration d'une particule). On peut vérifier en effet que la quantité

$$|P_aP_b|^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2 - (z_b - z_a)^2 \qquad (3)$$

garde la même valeur dans tout référentiel inertiel, en vertu des lois de transformations (2). Réciproquement, on peut construire les transformations (2) comme la partie connexe agissant sur les variables de temps et d'espace du groupe de transformations linéaires laissant invariante la forme quadratique (3).

La possibilité de mélanger les coordonnées de temps et d'espace selon les formules (2), et la symétrie qui apparaît donc entre espace et temps rend naturel le groupement des coordonnées (t, x, y, z) d'un événement dans un quadrivecteur $x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$, avec $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Ainsi la forme quadratique exprimant la distance entre les deux événements P_a et P_b s'écrit

$$|P_a P_b|^2 = (x_b - x_a)^\mu (x_b - x_a)_\mu = (x_b - x_a)^\mu g_{\mu\nu} (x_b - x_a)^\nu \tag{4}$$

où $g_{\mu\nu}$ est la matrice suivante

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Une fois que l'on se donne les lois de transformation des coordonnées d'un événement lorsqu'on passe d'un référentiel inertiel à un autre, le formalisme tensoriel donne une méthode systématique d'écrire des lois physiques satisfaisant au principe d'invariance relativiste: on décrit les objets physiques par des tenseurs formés à partir des représentations irréductibles du groupe associé aux transformations de Lorentz (2) et on demande que les équations de la physique soient des équations d'égalités entre tenseurs de même rang. De la sorte on aboutit systématiquement à ce que les équations différentielles de la physique aient la même expression dans n'importe quel référentiel inertiel. En prenant comme example le cas de l'électromagnétisme, et sans entrer dans les détails, il est facile de voir que les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) &= j^\mu(x) \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\nu\rho}(x) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est défini à partir du quadri-potentiel $A_\mu = (\vec{A}, V)$ et $j^\mu = (\vec{j}, \rho)$ est le quadri-courant, sont la généralisation invariante de Lorentz des équations de l'électrostatique

$$\begin{aligned} div\vec{E}(\vec{x}) &= \rho(\vec{x}) \\ \vec{rot}\vec{E}(\vec{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Sous la forme 6, les équations de Maxwell expriment automatiquement la propriété des champs électriques et magnétiques de se transmuter les uns en les autres en fonction du référentiel d'observation des phénomènes élecro-magnétiques.

Le cadre physique introduit par Einstein en 1906 est appelé relativité restreinte en ce sens qu'il prend en compte l'équivalence des référentiels galiléens mais ne contient pas les ingrédients nécessaires à la description de la gravité. L'introduction de la gravitation dans le formalisme relativiste a nécessité un nouveau saut conceptuel, la découverte de la relativité générale par Einstein en 1915.

Einstein se heurta en effet au problème suivant. Les équations de Newton décrivant les phénomènes de gravitation s'écrivent en effet

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = \mu(\vec{x}) \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -grad\varphi(\vec{x}) \tag{8}$$

Elles décrivent la dynamique de distributions massiques de densité μ à des vitesses faibles devant celle de la lumière, φ étant le potentiel gravitationnel engendré. Il est clair que ces équations ne respectent pas plus le principe d'invariance de Lorentz que les équations de l'electrostatique prises isolément. Il s'est avéré que toute tentative "naive" d'essayer de les rendre covariantes de Lorentz, comme par exemple d'essayer d'intégrer le potentiel gravitationnel comme composante d'un tenseur dans un référentiel donné, mène à des théories contraires à l'expérience.

Pour arriver à une théorie cohérente de la gravitation, Einstein s'est basé sur l'observation en apparence anodine que localement, c'est-à-dire dans une petite région d'espace-temps, on peut annuler un champ de gravité en se plaçant dans un référentiel accéléré judicieusement choisi. Ainsi, dans un ascenceur en chute libre, il est impossible de détecter la présence de la pesanteur; dans une fusée située dans une zone où il n'existe pas de champ gravitationnel, l'accélération due aux moteurs plaquera les passagers au plancher et simulera la pesanteur, un objet semblera tomber comme s'il était soumis a son poids, etc. Le postulat que pour tous les phénomènes physiques, en particulier ceux gouvernés par les lois de l'électromagnétisme, on puisse remplacer localement l'effet de la pesanteur par un choix de référentiel accéléré, constitue le principe d'équivalence. Ce principe a des conséquences profondes. Nous verrons qu'il conduit à la nécessité d'un cadre de géométrie non euclidienne.

Mathématiquement, le principe d'équivalence revient à généraliser l'invariance de Lorentz par l'invariance sous n'importe quel changement de coordonnées et d'autoriser l'espace-temps à devenir une variété courbe. On aboutit à la conclusion que la gravitation est liée à la géométrie de l'espace-temps.

Donnons un premier aperçu de la manière dont la gravitation peut être reliée à la métrique de l'espace-temps. Considérons un système physique en présence de gravitation. Utilisons la possibilité d'annuler localement l'effet du champ de gravitation en se plaçant dans un référentiel convenablement choisi (par exemple l'ascenceur évoqué plus haut). Dans ce référentiel, dont les coordonnées sont dénotées x^μ, l'électromagnétisme doit être décrit par les équations de Maxwell et il doit rester comme invariance résiduelle de la physique le groupe des transformations de Lorentz. Etant donnés deux événements proches $P = (t, x, y, z)$ et $P + dP = (t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ dans la région où notre choix de coordonnées annule la pesanteur, nos connaissances de relativité restreinte nous imposent de considérer l'élément différentiel suivant

$$ds^2 = |P, P + dP|^2 = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu \tag{9}$$

$g_{\mu\nu}$ étant la métrique pseudo-euclidienne plate définie plus haut. On suppose que ds^2 est mesurable par des expériences. Lorsqu'on retourne par changement de coordonnées $x \to x'$ dans le référentiel initial où la pesanteur n'est plus annulée par l'accélération inertielle, et si on suppose que l'intervalle invariant $ds^2 = |P, P + dP|^2$ garde la même valeur, on a

$$ds^2 = |P, P + dP|^2 = dx'^\mu g'_{\mu\nu}(x') dx'^\nu \tag{10}$$

La matrice $g'_{\mu\nu}(x')$ a désormais des éléments qui dépendent des coordonnées. D'une part ces éléments de matrice sont liés à la valeur du champ de gravitation au point P puisqu'ils se calculent en fonction des formules du changement de coordonnées qui annule la pesanteur, et d'autre part ds^2 peut être interprété comme élément de longueur dans une variété courbe. C'est la première manifestation d'un lien possible entre gravitation et géométrie de l'espace-temps.

La quantité $ds^2 = |P, P + dP|^2 = dx'^\mu g'_{\mu\nu}(x') dx'^\nu$ joue un rôle central en théorie de la gravitation. Etant donnés deux événements spatio-temporels voisins, tels la création suivi de la désintégration d'une particule instable, on peut trouver un référentiel tels que ces deux phénomènent aient lieu avec des coordonnés d'espace identiques, donc telles que $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2$. La quantité ds/c est appelée temps propre de la particule. L'expérience montre qu'il existe des horloges mesurant le temps propre, par exemples les horloges atomiques. Idéalement, on doit vérifier qu'une série d'horloges de temps propre au voisinage d'un observateur ne se désynchronisent pas, quel que soit le mouvement décrit par l'observateur et des horloges dans un champ de pesanteur, à condition que l'observateur et les horloges soient rigidement liés (pour éviter des phénomènes de contraction de Lorentz) et que le potentiel gravitationnel soit constant sur la portion d'espace qui les englobe. Des expériences de ce type ont été faites à bord d'avions effectuant des manœuvres brutales. Elles confirment l'existence d'horloges de temps propres.

Une fois admise l'existence d'horloges de temps propre, les propriétés de constance de la vitesse de la lumière c (égale par définition depuis 1983 à $299792458ms^{-1}$) et de propagation rectiligne de la lumière dans le référentiel où la pesanteur est annulée localement permettent de définir des règles mesurant les distances spatiales. En effet, on peut étalonner ces règles en comptant le temps que met un signal lumineux à franchir leur longueur puis en multipliant par c. On aboutit à une représentation de l'espace-temps par une variété de dimension quatre dont les coordonnées sont celles des évènements, et dans laquelle les observateurs disposent d'instruments (des horloges de temps propre) qui leur permettent d'avoir accès aux coordonnées de ces évènements.

Avant de décrire la théorie mathématique nécessaire pour prendre en compte le principe d'équivalence et aboutir à la théorie de la gravitation, nous allons décrire un certain nombre d'expériences par la pensée. Leur but est de nous convaincre de la nécessité d'introduire un cadre non euclidien de l'espace-temps.

3 Conséquences physiques du principe d'équivalence

Exprimons le principe d'équivalence sous sa forme précise: en présence de gravitation, dans toute région d'espace-temps suffisamment petite pour qu'on puisse négliger les variations spatiales et temporelles du champ de pesanteur, on peut toujours trouver un système de coordonnées tel que la gravitation n'ait aucune influence sur le mouvement des particules ou tout autre phénomène physique. Nous allons voir que ce principe a des implications physiques spectaculaires, dépassant le cadre de de la relativité restreinte. Nous allons démontrer la déviation de la lumière dans un champ de pesanteur et la désynchronisation d'horloges immobiles l'une par rapport à l'autre mais situées en des points différents d'un champ de gravitation.

3.1 Déviation de la lumière par un champ de pesanteur

Soit un rayon lumineux traversant un champ de pesanteur constant $\vec{g}$. Posons nous la question de déterminer sa trajectoire en supposant qu'à l'instant initial il est perpendiculaire à $\vec{g}$. Les postulats de la relativité restreinte ne sont pas suffisants pour résoudre ce problème.

Par contre, selon le principe d'équivalence, la propagation de la lumière dans le champ de pesanteur se doit d'être identique à ce qui se passerait si un rayon de lumière était émis dans une fusée en accélération uniforme dans un espace vide. Examinons donc ce qui se passe dans ce cas. C'est un problème élémentaire: une fois le rayon émis, il est évident qu'un observateur situé dans un référentiel inertiel extérieur à la fusée le verra se propager de façon rectiligne, avec la vitesse c. Par conséquent, pour un autre observateur assis dans la fusée, cette trajectoire sera vue comme une parabole en vertu du mouvement uniformément accéléré de la fusée.

Ce phénomène de courbure apparente de trajectoire est seulement la conséquence de la propagation de la lumière à vitesse finie et du mouvement d'accélération de l'observateur. Cependant, si on accepte le principe d'équivalence, le fait nouveau et remarquable est qu'une courbure analogue des trajectoires lumineuses doit être perçue par un observateur immobile dans un champ de pesanteur $\vec{g}$. En observant la concavité de la parabole, on doit conclure que la lumière est déviée par un champ de gravitation avec une attraction dans le sens des potentiels décroissant. Tout se passe donc comme si le photon était attiré dans un champ de pesanteur, exactement comme ce serait le cas pour une particule massive.

Einstein avait prédit l'effet de déviation de la lumière en 1911, longtemps avant l'établissement des lois de la relativité générale. Son argument était que, pour obtenir des bilans d'énergie cohérents, on doit attribuer à un photon de fréquence ω une masse $m = \hbar\omega/c^2$. Cette masse est soumise aux lois de la pesanteur, ce qui doit conduire à l'effet de déviation de la lumière indiqué plus haut. L'expérience d'Eddington de 1919 a effectivement démontré que, lors d'une eclipse de soleil, des rayons lumineux stellaires qui devraient être occultée par le disque solaire si leur propagation était rectiligne sont en fait déviés par le champ de gravitation du soleil et parviennent sur la terre.

3.2 Influence de la pesanteur sur le cours des horloges

En relativité restreinte, selon les formules (2), un écart de temps propre est inférieur à l'écart de temps correspondant mesuré dans n'importe quel autre référentiel en mouvement relatif. Par conséquent, si on observe deux horloges identiques se déplaçant en mouvement uniforme l'une par rapport à l'autre, on les verra se désynchroniser.

Nous allons démontrer qu'un phénomène de désynchronisation se produit également pour deux horloges identiques, immobiles l'une par rapport à l'autre, mais situées en des points où les potentiels gravitationnels sont différents. L'horloge placée au potentiel le plus élevé doit avancer par rapport à l'autre. Dans tout ce qui suit, nous supposerons l'existence (confirmée par l'expérience) d'horloges capable de mesurer le temps propre d'un petit système soumis à un quelconque champ de pesanteur ou d'accélération. Par exemple les diverse horloges atomiques que l'on peut imaginer devront donner des indications concordantes pour le rythme cardiaque d'un observateur immobile par rapport à elles, et ceci indépendamment de leur principe de construction! Comme nous l'avons déjà dit, la vérification pratique de l'existence de telles horloges se fait en les accélérant de diverses manières, tout en les gardant rigidement liées, et en constatant qu'elles ne se désynchronisent pas.

L'expérience par la pensée mettant en évidence l'influence de la pesanteur sur le cours du temps est la suivante. On considère deux horloges identiques situées dans un champ de gravitation uniforme $\vec{g}$ en des points A et B d'altitude z_A et z_B, avec $z = z_A - z_B > 0$. Dans cet exemple, on peut vérifier que les deux horloges sont identiques en controlant qu'elles indiquent les mêmes rythmes biologiques pour des organismes vivant identiques situés dans leur voisinage immédiat. Nous devons décrire la manière dont les horloges permettent de mesurer le temps. Prenons le cas d'horloges atomiques. Ce sont essentiellement des dispositifs d'émission de trains d'onde de lumière monochromatique dont on compte un nombre donné de périodes en un point donné. Pour chaque observateur une unité τ_0 de temps propre est écoulé quand il voit défiler un nombre N, arbitrairement choisi, de phases émis par l'horloge située à son voisinage. La question est de savoir si lorsque l'horloge en A émet un signal de N phases vers B, l'observateur en B les voit défiler en un temps égal à τ_0 mesuré sur son horloge. Si ce n'est pas le cas, on doit conclure que les deux horloges, bien que structurellement identiques et immobiles l'une par rapport à l'autre, se désynchronisent en raison de leurs positions en des points où le potentiel de gravitation prend des valeurs différentes.

Pour répondre à la question nous simulons le champ de pesanteur $\vec{g}$ par l'effet d'accélération d'une fusée dans un espace vide. Pour les deux observateurs, situés près de leur horloge de temps propre en A et B, tout doit se passer comme s'ils étaient dans un laboratoire immobile, en présence du champ $\vec{g}$. Des mesures de temps (appelé temps universel) peuvent être faites dans le référentiel inertiel par rapport auquel la fusée accélère.

Pour vérifier la synchronisation des horloges, l'observateur situé en A envoie un signal lumineux au moment $t = 0$ mesuré en temps universel, puis un autre au moment τ_0. Le premier signal arrive en B au moment T tel que

$$z - \frac{1}{2}gT^2 = cT \tag{11}$$

Le second signal arrive quant à lui au moment $T + \delta T$ tel que

$$\left(z + \frac{1}{2}g\tau_0^2\right) - \frac{1}{2}g(T + \delta T)^2 = c(T + \delta T - \tau_0) \tag{12}$$

Ces formules traduisent la propriété de propagation de la lumière à la vitesse c dans le référentiel universel et le fait que la fusée prend de la vitesse pendant le temps de parcours des signaux lumineux de A à B, si bien que le second signal effectue un parcours moindre que le premier. En combinant les deux équations, on trouve

$$\delta T \sim \tau_0(1 - \frac{gz}{c^2}) \tag{13}$$

En principe, pour comparer le temps universel au temps propre mesuré dans la fusée en un point donné d'espace, si v est la vitesse de la fusée au moment de la mesure, nous aurions du tenir compte du facteur de dilatation en $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ prévu par la relativité restreinte. Cet effet est en fait négligeable au premier ordre en $1/c^2$ puisque $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sim 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \sim 1 - g^2z^2/2c^4$.

δT est donc l'écart des deux signaux de synchronisation issues de A que l'observateur en B observera sur son horloge et on conclut que tout se passe comme si l'horloge en B retardait par rapport à l'horloge en A, bien qu'elle lui soit identique.

Le phénomène de désynchronisation d'horloges accélérées que nous venons de décrire n'est que la conséquence simple des lois cinématique de changement de référentiel et des propriétés de la propagation de la lumière dans un référentiel inertiel. Ce qui par contre dépasse les prédictions de la relativité restreinte est que le principe d'équivalence implique que les mêmes phénomènes de désynchronisation d'horloges doivent aparaître dans un référentiel inertiel où règne un champ de pesanteur uniforme: étant données deux horloges à des potentiels gravitationnels différents, celle située au potentiel inférieur retardera par rapport à l'autre. Cette propriété, conséquence directe du principe d'équivalence et de la définition du temps propre, est indépendante du principe de fonctionnement des horloges.

La première expérience vérifiant la désynchronisation des horloges immobiles dans un champ de gravitation a été réalisée en 1960. Elle repose sur l'effet Mössbauer. On cherche à exciter un système d'atomes par une radiation émise par un système identique. En choisissant des systèmes avec des raies d'excitation et d'absorption très étroites, on se rend compte que l'effet résonnant qui a lieu lorsque les deux systèmes sont à la même altitude disparait lorsque l'un est plus haut que l'autre (dans les expériences une dizaine de mètres suffit). L'effet réapparait si la pesanteur est annulée par un dispositif d'accélération du dispositif expérimental.

La formule trouvée se généralise en la relation suivante entre le temps universel t (dans notre exemple c'est le temps mesuré par l'horloge du référentiel par rapport auquel la fusée est en mouvement d'accélération) et le temps propre τ (le temps vu par chacun des observateurs sur son horloge)

$$\tau(z) = t(1 + \frac{\varphi(z)}{c^2}) \tag{14}$$

où $\varphi(z)$ est le potentiel gravitationnel.

3.3 Décalage des fréquences

Comme corollaire de ce qui précède, on a le décalage de la fréquence d'une radiation lumineuse mesurée en un point situé à un potentiel gravitationnel différent de celui du point d'émission. Ce phénomène a trouvé sa confirmation en astrophysique avec l'observation d'un "décalage vers le rouge" de la lumière émise des étoiles.

Reprenons notre fusée. De ce qui a été dit plus haut, sur l'horloge liée à l'observateur en B, les N phases émises de A défileront en une durée inférieure à τ_0. Cela signifie que la fréquence observée en B est plus élevée, avec

$$\omega_B = \omega_A(1 + \frac{gz}{c^2}) \tag{15}$$

Réciproquement, un signal émis de B avec une fréquence donné sera observé en A avec une fréquence moindre. Cette formule doit être valable lorsqu'on remplace la fusée par un champ de pesanteur équivalent. En raison du décalage de fréquence, un observateur non averti pourra être induit en erreur et penser que la radiation arrivant de A a été émise par des atomes différents de ceux qui s'y trouvent; de façon analogue, s'il veut exciter un atome situé en altitude, il doit lui envoyer un photon d'énergie supérieure à ce qui serait nécessaire si cet atome était à la même altitude que l'appareil envoyant le photon.

Dans une situation générale on aura l'équation

$$\omega(z)(1 + \frac{\varphi(z)}{c^2}) = \omega(z')(1 + \frac{\varphi(z')}{c^2}) \tag{16}$$

En astronomie, la lumière reçue sur la terre est émise par des astres où la pesanteur est très grande $(-\varphi(astre) >> -\varphi(terre))$. La formule précédente montre que la fréquence de cette lumière astrale, mesurée dans les laboratoires terrestres, aura une fréquence moindre que la fréquence d'émission. Tout se passe comme si les photons devaient travailler contre le champ de gravitation, comme ce serait le cas d'une particule massive qui devrait abandonner une partie de son énergie pour vaincre la barrière de pesanteur de l'étoile et arriver sur la terre.

Pour bien se convaincre de la validité de la formule de décalage des fréquences dans un champ de gravitation, nous pouvons en donner une démonstration basée sur la formule de l'effet Doppler. La différence de raisonnement est illusoire, car l'effet Doppler repose sur la propriété évidente, déjà utilisé dans l'explication précédente, que lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre, accéléré ou non, le nombre de phases d'un signal lumineux périodique reste identique à lui même.

Reprenons donc le cas de la fusée accélérant uniformément et simulant le champ de pesanteur. Le signal émis de A vers B est, au moment de l'émission, un photon de fréquence ω, selon une horloge placée en A. A son arrivée en B, la mesure de sa fréquence indiquera un décalage Doppler puisque B va à la rencontre de A avec une vitesse acquise $\Delta v = gT \sim gz/c$ due à l'accélération de la fusée pendant le parcours $T \sim z/c$ du photon. Ainsi, en utilisant la formule de l'effet Doppler à l'ordre le plus bas en $1/c$, la fréquence vue par l'horloge attachée à B est

$$\omega_B \sim \omega_A(1 + \frac{\Delta v}{c}) \sim \omega_A(1 + \frac{gz}{c^2}) \tag{17}$$

Cette formule est bien identique à celle trouvée plus haut à partir des formules de désynchronisation des horloges.

3.4 Décalage des horloges et conservation de l'énergie

La formule de décalage des fréquences en présence de gravitation se comprend encore en disant que lorsque le photon "tombe" dans le champ de gravitation, son énergie en B doit égaler l'énergie en A plus l'énergie potentielle de gravitation qu'il récupère. Nous allons imaginer un cycle de phénomènes qui précise cette explication.

Considérons de nouveau A et B, dans le référentiel immobile où règne la pesanteur uniforme $\vec{g}$. On symbolise les horloges par des atomes à deux niveaux d'énergie E_0 et E_1. Les photons émis ont la fréquence ω telle que $\omega = E_1 - E_0$.

Prenons un atome dans l'état E_1 posé au point B et portons le au point A. Pour cela on fournit l'énergie $m_1 gz$ avec $m_1 = E_1/c^2$. Si on le laisse se désintégrer, il émet un photon d'énergie $\hbar\omega$, mesuré en A, et sa masse devient $m_0 = E_0/c^2$. Si on le redescend en B on récupére l'énergie gravitationnelle $m_0 gz$. Dans cette suite d'événement, l'opérateur aura donc apporté l'énergie

$$\frac{E_1 - E_0}{c^2} gz \tag{18}$$

Si on récupère finalement en B le photon émis en A de telle sorte qu'on retrouve l'état initial (l'atome dans l'état E_1), nous devons avoir conservation de l'énergie. L'énergie du photon $E_{photon} = \hbar\omega_B$ à l'endroit où on le récupère doit être telle que

$$E_0 + E_{photon} = E_1 + \frac{E_1 - E_0}{c^2} gz \tag{19}$$

Ceci donne

$$E_{photon} = (E_1 - E_0)(1 + \frac{gz}{c^2}) \tag{20}$$

soit

$$\omega_B = \omega(1 + \frac{gz}{c^2}) \tag{21}$$

Nous retrouvons encore la formule (15).

On peut arriver au résultat de façon plus directe encore. La masse du photon en A étant $m_{photon} = \hbar\omega_A/c^2$, il gagne l'énergie $m_{photon} gz$ en "tombant" de B en A, si bien que l'énergie en B est

$$E_B = \hbar\omega_B = \hbar\omega_A(1 + \frac{gz}{c^2}) \tag{22}$$

ce qui correspond bien à ce que nous avons déjà trouvé.

3.5 Dérivation des équations d'Euler-Lagrange de la mécanique classique à partir du principe d'équivalence

Il est bien évident que l'influence de la pesanteur sur le déroulement du temps oblige à reconsidérer la théorie Newtonienne de la gravitation. Avant d'aborder les complications mathématiques nécessaires pour construire une théorie de la gravitation qui tienne compte du principe d'équivalence de manière satisfaisante, nous allons montrer que les résultats que nous avons obtenus par simple application du principe d'équivalence suggèrent une interprétation géométrique inattendue des équations d'Euler-Lagrange de la théorie Newtonienne. L'idée selon laquelle, en relativité générale, les particules test suivent des géodésiques de l'espace-temps peut être considérée comme inspirée de ce qui suit.

Considérons le problème suivant. Soient M et P deux points d'un espace galiléen où règne un potentiel gravitationnel $\varphi(z)$. Pour repérer des suites d'évènements, dénotons génériquement par z leurs coordonnées d'espace et t leurs coordonnée de temps universel. La question est de savoir s'il existe un principe géométrique simple déterminant la trajectoire décrite par une particule massive pour joindre les deux points M et P en un laps de temps universel T.

D'après ce que nous avons vu le temps propre est une quantité intrinsèque pour la particule et mesurable. Imaginons que le principe à respecter est que la durée mesurée en temps propre de la particule soit maximale pour la trajectoire effectivement réalisée. Nous avons postulé l'existence d'horloges mesurant le temps propre. Cela signifie que nous pouvons symboliser la particule comme un astronaute lancé de M au temps $t=0$ et arrivant en P au temps universel T tout en consultant sa montre à chaque instant de sa chute pour connaitre l'écoulement de son temps propre. Bien entendu, il est censé rester rigoureusement immobile pour que la lecture de temps propre ne soit pas modifiée par une contraction de Lorentz due à des mouvements corporels, et ses dimensions doivent être telles que le potentiel de gravitation ne varie pas sensiblement sur le volume de son corps. Parmi toutes les trajectoires qu'il pourrait choisir s'il n'était soumis à aucune loi déterministe, nous allons déterminer celle qui maximise le temps propre. Supposons d'abord qu'au point $\vec{r}$ de sa trajectoire sa vitesse par rapport au référentiel universel soit nulle. Etant donné qu'il règne au point considéré le potentiel gravitationnel $\varphi(\vec{r})$, le principe d'équivalence implique que la relation entre une durée dt en temps universel et le temps propre correspondant $d\tau$ mesuré par sa montre, est

$$d\tau \sim dt(1+\varphi(\vec{r})/c^2) \tag{23}$$

Si de plus l'astronaute se déplace à une vitesse $\vec{v}$, un facteur de contraction de Lorentz $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ doit être pris en compte en fonction des formules de relativité restreintes (2). Le long de la trajectoire, la montre de l'astronaute indiquera donc une durée totale

$$\int_0^T dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(1+\varphi(\vec{r})/c^2) \sim \int_0^T dt(1-\frac{1}{2}\frac{v}{c}^2(t)+\frac{\varphi(\vec{r}(t))}{c^2}) \tag{24}$$

On voit donc que le principe qui revient à choisir la trajectoire telle que le temps propre de l'objet soit maximal est de considérer que cette trajectoire est celle rendant minimale l'action d'Euler-Lagrange

$$I[\vec{r}] = \int_0^T dt\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - m\varphi(\vec{r}(t))\right) \tag{25}$$

Le calcul variationnel indique que la trajectoire rendant $I[\vec{r}]$ extrêmal est déterminée par l'équation suivante

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{d\varphi(\vec{r})}{d\vec{r}} \tag{26}$$

Nous venons donc de dériver l'équation de la mécanique Newtonienne par une méthode qui lui donne un sens géométrique profond.

Le message essentiel est que les trajectoires classiques correspondent à des géodésiques dans un espace temps à métrique non euclidienne. En effet une petite variation du temps propre $d\tau$ de la particule est un invariant que nous avons évalué

$$d\tau = dt\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v(t)^2}{c^2} + \frac{\varphi(\vec{r}(t))}{c^2}\right) \tag{27}$$

Comme la définition de la vitesse dans le référentiel universel est $d\vec{r} = \vec{v}dt$, nous aboutissons à l'existence d'une métrique à priori non euclidienne $g_{\mu\nu}(\vec{r})$ telle que

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v(t)^2}{c^2} + \frac{\varphi(\vec{r}(t))}{c^2}\right)^2 \\ &\sim c^2 dt^2 \left(1 + \frac{2\varphi(\vec{r})}{c^2}\right) - d\vec{r}^2 \end{aligned} \tag{28}$$

soit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 2\varphi(\vec{r}(t))/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

La présence du potentiel semble donc revenir à une distorsion de la métrique pseudo-euclidienne de la relativité restreinte. Tout le formalisme de la relativité générale consistera à exprimer l'idée que la pesanteur, et donc les systèmes de masse induisant la pesanteur, déforment la géométrie de l'espace-temps en une structure non euclidienne et que les trajectoires des corpuscules décrivent des géodésiques dans cet espace. Il s'agira en particulier de trouver une équation déterminant la métrique.

On peut donner le raisonnement intuitif suivant pour comprendre comment l'idée de courbure de l'espace-temps permet d'interpréter l'attraction des corps. Prenons le cas simplifié d'un espace-temps courbe à deux dimensions d'espace, par exemple une sphère. Soient deux particules test dans un voisinage dont les dimensions sont petites par rapport à la courbure. Selon le principe d'Einstein, elles doivent se déplacer à vitesse constante sur des géodésiques, c'est à dire des grands cercles. Si l'on observe ces particules pendant un temps suffisamment court, leurs trajectoires apparaissent parallèles et les principes Newtoniens sont respectés. Au bout d'un certain temps, un observateur verra les particules se rapprocher jusqu'à converger. Il pourra alors conclure qu'il existe une force d'attraction entre les deux particules.

4 Evidence d'une structure non euclidienne de l'espace-temps

Un espace de courbure non nulle est caractérisé, entre autres, par la non fermeture d'un parallélogramme dessiné par un observateur lié à l'espace. Il faut bien sur définir la manière selon laquelle l'observateur procédera. Dans le cas des espaces de type variété métrique, il peut disposer de règles indéformables qui lui permettent de mesurer des éléments de longueur. Ainsi, par des observations locales, il pourra mesurer des angles. On suppose en effet que sur une région très petite de l'espace les formules de la géométrie euclidienne (ou pseudo-euclidienne) sont valables. Pour une courbe finie tracée dans l'espace, la longueur totale est l'intégrale de petites longueurs mesurées de proche en proche. Etant donnés deux points, il est possible de trouver "expérimentalement", par essais successifs, le segment de courbe de longueur minimal les reliant. Un tel segment est appelé géodésique. Muni de règles, on peut donc tenter de tracer des parallélogrammes. Par exemple, sur une sphère, si on tente de fermer un carré en partant d'un point et en traçant successivement quatre segments géodésiques de longueurs égales et à angles droit, le point final ne coincidera pas avec le point initial. En revanche, sur un plan ou un cylindre, à la fin de la même série d'opérations, on retrouvera le point initial. Une autre façon de décrire un espace avec courbure est de l'imaginer comme un plan sur lequel la longueur des règles dépendent du point. Un exemple particulièrement évocateur est celui où l'espace est représenté comme une plaque de métal plane avec un sytème de chauffage tel que la température n'y soit pas uniforme. Si on utilise des règles métalliques, en raison de leur dilatation, l'unité de longueur dépendra du point où on fait une mesure. Si on tente de tracer un carré en utilisant ces "règles molles", les figure résultant de quatre segments jointifs de même longueur et à angles droits seront analogues à celles tracées sur la sphère avec des règles absolues. On peut imaginer une distribution de température, c'est-à-dire une définition de la métrique, telle que, d'une part le plan ainsi déformé, et d'autre part la sphère privée d'un point construite avec des règles indéformable, soient des espaces équivalents.

Pour des espaces à courbure non nulle il est possible de définir des cercles comme des ensembles de points situés à la même distance R d'un centre. La valeur du rapport de la circonférence d'un tel cercle mesuré comme décrit ci dessus divisée par le rayon R diffère de 2π. Dans la limite $R \to 0$ la différence entre 2π et le rapport circonférence/rayon définit la courbure de l'espace.

L'effet de désynchronisation des horloges discuté plus haut implique que l'espace-temps n'est pas euclidien. En effet la propriété que le temps propre lu sur une horloge n'est pas le même lorsque le potentiel gravitationnel varie est tout à fait analogue à l'effet de dilatations de règles métalliques prises comme étalons de longueur dans l'exemple du plan chauffé de manière non uniforme. La courbure résultante affecte l'espace-temps (et pas seulement l'espace) qui se réduit localement à l'espace pseudo-euclidien de la relativité restreinte, où temps et espace se transforment l'un dans l'autre par changement de référentiel.

On voit ainsi apparaître une description logiquement cohérente de la gravitation, c'est à dire une théorie compatible avec la relativité restreinte et le principe d'équivalence.

Le shéma est le suivant. La description des phénomènes se fait par leur positionnement dans un espace à quatre dimensions grâce au choix d'un système de coordonnées. Par changement de coordonnées, cet espace peut être réduit sur un petit voisinage d'un point quelconque à une variété muni de la métrique plate pseudo-euclidienne $(1, -1, -1, -1, -1)$. Si de la matière est introduite, elle crée une distribution de masse qui induit un champ de pesanteur. A son tour ce champ de pesanteur induit une déformation de la métrique qui affectera le déplacement des particules massives. On doit donc aboutir à une description qui relie géométrie de l'espace-temps et distribution des masses. Par invariance relativiste et pour tenir compte de la relation masse-énergie intervenant par exemple dans les phénomènes électromagnétiques, la notion de distribution de masse doit être généralisée en tenseur d'énergie-impulsion du système. L'équation fondamentale de la relativité générale sera en fait une équation reliant le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ crée par les particules et le tenseur de courbure de l'espace-temps $R_{\mu\nu}$. L'équation traite tous les phénomènes gravitationnels est des plus simple! Elle s'écrit

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{30}$$

Le coefficient de proportionnalité κ, avec une dimension inverse à celle d'une masse, est relié à la constante de gravitation universelle de la théorie de Newton.

La dynamique d'une particule test sera déterminée de manière non contradictoire avec ce principe en supposant qu'elle décrit des géodésiques de l'espace-temps, ce qui revient à dire qu'elle choisit la trajectoire rendant maximal le temps propre nécessaire pour relier deux points donnés en une durée de temps universel déterminée (quelques subtilités doivent en fait être rajoutées lorsqu'il s'agit de particules avec spin).

La réalisation mathématiquement précise de ces idées consistera à demander l'invariance par changement de coordonnées des lois de la physique dans une variété métrique à quatre dimensions localement pseudo-euclidienne. Les équations de la dynamique assurant le principe de localité des interactions dériveront d'un principe de moindre action.

Ce qui ressort de ce chapitre est la suggestion de devoir introduire un espace-temps courbé pour tenir compte des phénomènes gravitationnels. Ceci nécessite quelques connaissances mathématiques dont nous allons donner bientôt quelques ingrédients. Mais avant cela, il convient de bien réaliser que le recours à un espace courbe n'est pas le résultat d'une fuite vers un formalisme inutilement compliqué mais bien la conséquence naturelle et incontournable du principe d'équivalence. Remarquons qu'un lecteur critique pourrait nous reprocher de n'avoir considéré dans nos raisonnements que des champs de gravitation uniformes qui par définition même peuvent être annulés globalement par le choix d'un référentiel accéléré. D'une part, ce n'est pas une situation réaliste car il n'existe pas de distribution de matière pouvant créer un tel champ. D'autre part, la courbure de l'espace-temps serait nulle, puisqu'on peut annuler la pesanteur de façon globale. Par conséquent, tout en admettant le phénomène d'influence de la pesanteur sur l'écoulement du temps propre, on pourrait mettre en doute notre conclusion sur le nécessité d'introduire une courbure sur l'espace-temps. La réponse à cette objection est d'utiliser le principe d'équivalence dans des situations où le champ de pesanteur ne peut être annulé de façon globale par un choix de système de coordonnées. L'exemple simple est celui du vrai champ de pesanteur régnant sur la terre. Dans ce cas, on remplace partout autour de la terre les référentiels Lorentzien de la relativité restreinte par des référentiels localement accélérés le long du champ de pesanteur. En se bornant à de petites régions d'espace, on aboutit aux mêmes conclusions sur les retards d'horloges, de déviation de rayons lumineux que dans le cas du champ uniforme, mais comme la pesanteur est en fait un champ radial dirigé en tout point vers le centre de la terre, il est clair que la structure de l'espace-temps défini comme la réunion de ces systèmes ne peut être celle d'un espace globalement plat.

5 Introduction au cadre mathématique de la relativité générale

La prise en compte du principe d'équivalence nous a amené à l'idée que l'espace-temps est une variété Riemannienne de dimension 4. La possibilité du positionnement dans l'espace-temps de tout événement, tel une collision de particules ou la création puis la désintégration d'une particule nécessite la donnée d'au moins un ensemble de coordonnées universelles $x^\mu = (x, y, z, t)$ accessibles à l'expérimentateur. Ceci constitue une hypothèse qu'on suppose toujours vraie. Physiquement nous avons souligné le fait remarquable que la nature nous fournit des horloges capables de mesurer le temps propre d'un système suffisamment petit. Cette possibilité, combinée aux propriétés de propagation de la lumière dans un référentiel localement inertiel nous donne un accès à des mesures physiquement réalisables de temps et d'espace sur la variété. Il est donc sous-entendu que l'espace-temps est une variété métrique, c'est à dire qu'en chaque événement de coordonnées x^μ on a une métrique $g_{\mu\nu}$. Etant donnés deux événements très proches, avec un écart de coordonnées dx^μ, leur distance d'espace-temps est

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{31}$$

ds^2 est un invariant par changement de coordonnées. On peut toujours trouver un choix de coordonnées x'^μ dans lequel la distance spatiale entre les deux objets est nulle. Alors on a $ds^2 = c^2 g'_{00} dt'^2$. Seul un écart de temps sépare les deux événements. Ceci indique que le temps propre τ d'un système physique est lié à la métrique de l'espace-temps par la formule

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{ds^2} = \sqrt{g'_{00}}dt' \tag{32}$$

Les horloges atomiques, et peut être même les horloges biologiques[1], nous donnent donc accès à l'élément de longueur de l'espace-temps.

En supposant déterminées des lois physiques autres que gravitationnelles, par exemple celles de l'électromagnétisme selon les équations de Maxwell, dans une petite région d'espace isolée comme l'intérieur d'un ascenceur en chute libre, une question fondamentale est de pouvoir relier des phénomènes en des points différents. Ce problème n'est pas trivial car on sait que si on s'éloigne de l'ascenceur, l'effet de la pesanteur se fera sentir d'une manière ou d'une autre, ce qui revient à dire que des effets liés à la métrique d'espace-temps non uniformément plate vont se manifester. Il est en effet clair qu'il n'existe pas de choix de coordonnées permettant d'annuler de façon globale un champ de gravitation réaliste. Le problème se résoud cependant de façon complète et extraordinairement simple d'un point de vue mathématique en demandant que les lois de la physiques soient invariantes par changement de coordonnées, c'est à dire que leurs équations aient la même forme quel que soit le référentiel choisi. La réalisation du programme aboutissant à de telles équations invariantes nécessite la connaissance du calcul tensoriel dont nous allons bientôt donner les ingrédients utiles pour les physiciens.

L'idée de base sera de partir des lois de la physique que l'on suppose connues dans référentiel localement plat où l'élément de longueur s'écrit $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ et tel qu'il reste comme symétrie résiduelle la symétrie de Lorentz. Dans ce référentiel les lois de la physique sont les plus simples. Un tel référentiel existe toujours car en un point de la variété, nous pourrons toujours choisir un système de coordonnées telle que la métrique $g_{\mu\nu}$ soit diagonale et ses dérivées premières s'annulent. La prise en compte de la pesanteur reviendra à passer par changement de coordonnées dans un référentiel bien choisi. Une théorie électromagnétique juste sera donc obtenue si nous savons exprimer les équations de Maxwell sous une forme valable dans

[1]De très intéressantes considérations peuvent être faite en posant la question de la différence entre les horloges atomiques gérant les ordinateurs et les horloges biologiques qui doivent exister pour contrôler le fonctionnement du cerveau

un référentiel quelconque. Remarquons que par changement de coordonnées, nous nous sommes ramenés localement le plus près possible de l'espace plat: il est impossible d'annuler les dérivées secondes des g, puisque ces quantités sont reliées à la courbure de l'espace-temps qui est une quantité intrinsèque, impossible à modifier par un choix de coordonnées. Pour trouver la loi de la gravitation, on devra trouver une loi invariante par changement de coordonnées reliant la géométrie aux distributions de masse de l'univers, et plus généralement à son tenseur d'énergie-impulsion.

5.1 Nécessité du calcul tensoriel. Formalisme de base

Notre programme est le suivant. Nous supposons que les phénomènes physiques peuvent être décrits en terme de champs locaux définis sur une variété métrique de dimension quatre localement pseudo-euclidienne. En fonction des considérations précédentes, nous devons définir un formalisme qui permettent de répondre aux exigences suivantes:

(1) Il est nécessaire de classer les champs en fonction de la façon dont ils se transforment par changement de coordonnées.

(2) On doit écrire des équations covariantes par rapport aux changements de coordonnées, c'est-à-dire qui prennent la même forme dans n'importe quel système de coordonnées.

Etant donné le fait que nous avons un espace-temps courbé, nous adoptons le point de vue de Cartan consistant à observer cette variété en la plongeant un espace de dimension supérieure mais sans courbure. C'est la généralisation de l'étude des surfaces plongées dans l'espace tridimensionnel euclidien. Cette méthode présente l'avantage de permettre de "visualiser" les plan tangents en chaque point de la variété.

Considérons donc un point de l'espace-temps de coordonnées x^μ. Avant de chercher à introduire la notion de champ en ce point, considérons les objets naturellement définis par la géométrie de son voisinage. Nous avons tout d'abord le plan tangent qui a une structure Minkowskienne. Par définition, le plan tangent contient les formes différentielles dx^μ que nous pouvons identifier aux petits accroissements des coordonnées $x^\mu = (t, x, y, z)$ de la variété. Si nous effectuons un changement de coordonnées $x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x)$, nous avons la loi de transformation

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{33}$$

Si la variété est munie d'une métrique $g_{\mu\nu}$, le carré de l'élément de longueur $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ est un invariant par changement de coordonnées. Par conséquent $g_{\mu\nu}$ doit avoir la loi de transformation suivante

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \tag{34}$$

La vérification que ds^2 a bien la même valeur dans les deux systèmes de coordonnées repose sur la propriété

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{35}$$

Nous désirons introduire des champs locaux avec des propriétés bien définies par rapport aux changements de coordonnées. De tels objets sont appelés tenseurs par rapport à ces transformations.Par définition si les composantes d'un tenseur sont connues dans un système de coordonnées, elles le sont dans tout autre, exactement comme les différentielles dx^μ.

Par définition un 4-vecteur contravariant A^μ et un 4-vecteur covariant B_μ sont des objets dont les composantes se transforment par changement de coordonnées $x \to x'$ de la façon suivante

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \tag{36}$$

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \tag{37}$$

Plus généralement, un tenseur de rang p, q $T^{\mu_1 \ldots \mu_p}_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ à p indices contravariant et q indices covariants est un objet à $4p \times 4q$ composantes qui se transforme comme un produit de p 4-vecteurs contravariants et q 4-vecteurs covariants, c'est à dire

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_p}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \to T'^{\mu'_1 \ldots \mu'_p}_{\nu'_1 \ldots \nu'_q} = \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \ldots \frac{\partial x'^{\mu'_p}}{\partial x^{\mu_p}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \ldots \frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x'^{\nu'_q}} T^{\mu_1 \ldots \mu_p}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \tag{38}$$

Un scalaire est une quantité qui ne se transforme pas. Par exemple l'élément de longueur $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ est un scalaire. L'opération $d = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ est une opération scalaire. La vitesse de la lumière, et plus généralement toute constante physique, est une quantité scalaire. Le quadripotentiel électromagnétique A_μ est un vecteur et la 1-forme $A = A_\mu dx^\mu$ un scalaire, etc...

On a un certain nombre de propriétés évidentes que nous allons exprimer dans le langage des physiciens

- $g_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique covariant de rang deux.

- Si un tenseur est nul dans un système de coordonnées, il est nul dans tout autre système.

-Le produit d'un tenseur par un tenseur est un tenseur. Si un tenseur est égal au produit d'un tenseur par quelque chose, le quelque chose est un tenseur.

-Les propriétés de symétrie et d'antisymétrie d'indices d'un tenseur sont conservées par changement de coordonnées.

- Si $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ est un tenseur de rang (p,q) l'objet $g_{\mu_1\mu_2} T^{\mu_1\mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ est un tenseur de rang $(p-2,q)$. Une application simple de cette propriété est la propriété de tensorialité de la métrique $g_{\mu\nu}$ puisque dx^μ est un vecteur et l'élément de longueur ds^2 un scalaire. Si A^μ est un vecteur contravariant, on vérifie facilement que l'objet $g_{\mu\nu}A^\mu$ est un vecteur covariant. La donnée de la métrique $g_{\mu\nu}$ permet donc une identification entre indices contravariants et covariants. La matrice inverse $g^{\mu\nu}$ de la métrique $g_{\mu\nu}$, telle que $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ est un tenseur.

- Les composantes du repère mobile e^a_μ que l'on peut définir au dessus de chaque point forment des 4-vecteurs covariants qui prennent leurs valeurs dans l'espace de représentation du plus bas ordre du groupe de Lorentz (l'indice a est un indice de Lorentz). L'objet inverse $e^{a\mu}$ tel que $e^{a\mu}e^b_\nu = \delta^\mu_\nu \eta^{ab}$, où η^{ab} est la métrique Minkowskienne plate, est un 4-vecteur contravariant à valeur dans cette même représentation. On a également l'équation $e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab} = g_{\mu\nu}$.

-Soit $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ l'objet qui vaut 1 ou -1 selon que les indices $\mu\nu\rho\sigma$ forment une permutation paire ou impaire de 0, 1, 2, 3, ou 0 si au moins deux des indices sont identiques. Un calcul élémentaire montre que $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ n'est pas un tenseur. En revanche, dénotant $-g = -\det(g_{\mu\nu}) > 0$, un calcul analogue reposant sur la définition du déterminant et $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ montre que $\sqrt{-g}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est un tenseur antisymétrique de rang quatre. On en déduit que $d^4x\sqrt{-g} = \frac{1}{16}\sqrt{-g}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$ est un scalaire. C'est l'élément d'intégration invariant utilisé pour définir l'intégration sur la variété. En effet utilisant ce qui précède, si f est une fonction scalaire, on voit que $\int d^4x\sqrt{-g}f(x)$ est un nombre indépendant du choix de coordonnées.

Pour écrire des équations covariantes par rapport aux changements de coordonnées (on utilise souvent la terminologie d'équations invariantes), il suffit d'écrire des égalités entre des tenseurs de même rang. Nous allons voir que la notion de dérivation doit être modifiée pour obtenir une opération covariante et finalement écrire des équations différentielles covariantes par rapport aux changements de coordonnées.

5.2 Dérivation covariante; connection affine

Considérons une fonction scalaire f. Soit $x + dx$ les coordonnées d'un point voisin de celui de coordonnées x. Par changement de coordonnées $x \to x'$, on a la propriété

$$df(x') = f(x' + dx') - f(x') = f(x + dx) - f(x) = df(x) \tag{39}$$

En utilisant un développement de Taylor, on voit facilement que, agissant sur une fonction scalaire, l'opération de dérivation se transforme comme un vecteur covariant, c'est à dire

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x'^\nu} \tag{40}$$

En d'autres termes, si $f(x)$ est une fonction scalaire, $df(x)$ est aussi un scalaire et $\partial_\mu f(x)$ un vecteur.

En revanche, si nous considérons un vecteur covariant B_μ, nous avons par définition

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \tag{41}$$

Si nous comparons cette équation à l'équation similaire valide au point voisin de coordonnées $x + dx$, nous obtenons au premier ordre en dx^μ

$$\frac{\partial B'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial B_\rho}{\partial x^\sigma} + B_\rho \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \tag{42}$$

La présence du dernier terme implique que $\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu}$ n'est pas un tenseur. C'est seulement pour la classe des transformations affines, c'est à dire telles que les x' sont des fonctions linéaires des x, que les $\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$ s'annulent, et que $\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu}$ se transforme comme un tenseur.

Nous voyons donc que l'objet de composantes $B_\mu(x + dx) - B_\mu(x)$ n'est pas un tenseur et n'a donc pas de signification géométrique. Pour visualiser ceci, considérons une courbe qui relie les points de coordonnées x et $x + dx$.

Vouloir interpréter la différence $B_\mu(x+dx)-B_\mu(x)$ revient à vouloir comparer deux vecteurs en deux points différents, opération qui n'a généralement pas de sens, car ces deux objets vivent en fait dans des espaces différents, les plans tangents en ces points. Pour comparer deux objets en deux points différents, il faut en fait introduire un nouveau concept, qui est le transport de l'un des deux objets au point où l'autre est défini, de telle sorte que l'objet transporté ait les mêmes lois de transformation que l'autre au point considéré pour que l'opération de soustraire les composantes de l'objet transporté à l'autre ait un sens indépendant du choix du système de coordonnées.

Considérons ce qui se passe en géométrie euclidienne. Si on veut comparer deux vecteurs en deux points, il suffit de comparer leurs composantes en coordonnées cartésiennes. Si elles sont identiques, il est évident que les deux vecteurs sont parallèles, dans un sens géométrique. On peut ainsi comparer deux figures en des points différents et conclure éventuellement qu'elles sont par exemple identiques. Par contre, avec un choix de coordonnées curvilignes, il faut abandonner cette idée de soustraire les composantes pour comparer des figures géométriques, comme le montre par exemple le fait d'utiliser des cordonnées polaires sur le plan. Il est donc nécessaire d'imaginer la transcription analytique de l'idée de transport parallèle d'une des deux figures vers l'autre pour pouvoir les juxtaposer et les comparer.

La trop grande naiveté consistant à vouloir comparer deux vecteurs en des points différents en ne tenant compte que de leurs composantes est encore plus évidente pour les variétés courbes. Prenons d'abord le cas où on dispose d'une métrique. Si on définissait l'idée de constance d'un vecteur se déplaçant le long d'une courbe en demandant que ses coordonnées x^μ soient constantes, on tomberait sur l'absurdité que sa longueur n'est pas constante, puisque la métrique dépend du point. La contradiction apparaît même dans le cas des variété non métriques, puisque pour tout autre choix de coordonnées x' qui ne s'obtient pas par une transformation linéaire des coordonnées constantes x, cette définition de la constance du vecteur n'est pas maintenue, étant donné que la matrice de changement de coordonnées $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$ dépend du point.

Il faut donc trouver une définition générale de la notion de transport parallèle, valable pour les variétés courbes, qu'elles soient métrique ou non. Ce qui se passe pour des choix de coordonnées curvilignes dans les espaces euclidiens apparaîtra comme un cas particulier.

Pour définir le transport parallèle, nécessaire pour comparer des vecteurs et des tenseurs en des points différents, nous allons introduire un objet intrinsèque appelé connection affine. Son existence permet de généraliser de façon naturelle l'opération de dérivation par rapport à des coordonnées cartésiennes en une opération covariante, appelée dérivation covariante. La définition de la connection est possible pour toute variété. Pour une variété métrique sans torsion, nous verrons que la connection affine est calculable en fonction de la métrique.

Considérons donc deux points voisins de coordonnées x et $x+dx$. Soit le champ de vecteurs $A^\mu(x)$. On a vu que les composantes de l'objet $A^\mu(x)+\partial_\nu A^\mu(x)dx^\nu$, ne se transforment pas comme un vecteur au point x. L'idée est de considérer un accroissement $\delta_{||}A^\mu$ des composantes de $A^\mu(x+dx)$ qui soit une fonction linéaire des dx^μ et des A^ν telle que la quantité

$$A^\mu(x+dx)+\delta_{||}A^\mu \tag{43}$$

c'est-à-dire

$$A^\mu(x)+\partial_\nu A^\mu(x)dx^\nu+\delta_{||}A^\mu \tag{44}$$

se transforme comme un vecteur au point $x+dx$. Ceci constitue la définition du transport parallèle $\delta_{||}A\mu$.

Remarquons que pour un choix de coordonnées cartésiennes au point x, $\delta_{||}A^\mu$ doit s'annuler. $\delta_{||}A\mu$ n'étant pas un tenseur, cette quantité ne s'annule généralement pas pour d'autres choix de coordonnées.

Par définition, la loi de transformation de $\delta_{||}^A\mu$ doit être telle qu'elle compense la différence entre la loi de transformation de $A^\mu(x)+\partial_\nu A^\mu(x)dx^\nu$ et celles d'un vecteur au point $x+dx$. Nous allons maintenant déterminer cette loi et aboutir à la notion de connection affine.

Par hypothèse, on peut paramétrer $\delta_{||}A\mu$ de la manière suivante

$$\delta_{||}A^\mu=\Gamma^\mu_{\nu\rho}dx^\nu A^\rho \tag{45}$$

La donnée des nombres $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ définit la connection affine dans le référentiel considéré. On définit aussi

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}=g_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\rho} \tag{46}$$

donc

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho}=g^{\mu\tau}\Gamma_{\tau\nu\rho} \tag{47}$$

L'hypothèse que $A^\mu(x)+\Gamma(x)^\mu_{\nu\rho}dx^\nu A^\rho(x)$ soit un vecteur au point $x+dx$, implique

$$A'^\mu(x'+dx')+\Gamma'(x')^\mu_{\nu\rho}dx'^\nu A'^\rho(x) = (A^\sigma(x+dx)+\Gamma^\sigma_{\nu\rho}(x+dx)dx^\nu A^\rho)\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\right)_{x+dx} \tag{48}$$

En utilisant

$$\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\right)_x + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}dx^\tau \tag{49}$$

et

$$A^\mu dx^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\tau}A'^\sigma dx'^\tau \tag{50}$$

on obtient facilement

$$\Gamma'^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\rho}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \tag{51}$$

Cette loi de transformation par changement de coordonnées doit être considérée comme la définition même de la connection Γ. La présence du dernier terme, non homogène, montre que Γ n'est pas un tenseur. Plus précisément, nous voyons que la partie antisymétrique en $\nu\rho$ de $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, appelée torsion, est un tenseur tandis que la partie symétrique n'est pas un tenseur.

Il découle de ce qui précède que la quantité

$$D_\nu A^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}A^\rho \tag{52}$$

est un tenseur. Pour des raisons évidentes, l'opération D est appellée dérivation covariante et $D_\nu A^\mu$ dérivée covariante de A.

L'introduction de la connection Γ, définie par la loi de transformation trouvée ci-dessus, permet de donner un sens à la notion de transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe arbitraire. Etant donnés deux point voisins de cette courbe de coordonnées x et $x+dx$, nous dirons que le vecteur A a été transporté parallèlement de x à $x+dx$ si ses composantes en ces deux points satisfont

$$A^\mu(x+dx) = A^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\nu\rho}A^\nu dx^\rho \tag{53}$$

c'est à dire

$$dx^\nu D_\nu A^\mu = 0 \tag{54}$$

On peut généraliser ceci au cas de points éloignés. En paramétrant la courbe avec un paramètre λ, on définit son vecteur tangent $\xi^\rho = \frac{dx^\rho}{d\lambda}$. Le fait que le vecteur A se transporte parallèlement le long de la courbe signifie que sa dérivée covariante le long de la courbe est telle que

$$\xi \cdot DA^\mu = \xi^\nu D_\nu A^\mu = 0 \tag{55}$$

Dans le cas où le système de coordonnées est tel que la connection s'annule le long de la courbe, le transport parallèle se fait sans variations des coordonnées. C'est évidemment ce qui se passe en géométrie euclidienne. Dans le cas général, pour une courbe donnée, on peut toujours trouver un système de coordonnées tel que la connection s'annule sur la courbe, cette propriété disparaissant dès qu'on s'en écarte. La dernière équation, construite pour garder la même forme quel que soit le système de coordonnées, indique la nécessaire variation des coordonnées lorsqu'on transporte parallèlement un vecteur d'un point à un autre. Un bon exercice est de l'appliquer pour exprimer la notion de parallélisme dans le cas des coordonnées polaires sur le plan.

Dès à présent, nous voyons qu'un vecteur transporté parallèlement d'un point de la variété à un autre peut donner des résultats différents en fonction des courbes suivis. C'est la conséquence de la non constance de la connection. Ce phénomène, inexistant en espace euclidien, est la manifestation de la courbure de l'espace. En relativité générale, il a des conséquences physiques importantes.

5.3 Transport parallèle pour les espaces avec une métrique; coefficients de Christoffel

Nous avons introduit la notion de connection pour n'importe quel type de variété, munie d'une métrique ou non. La quantité $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ est définie par la loi de transformation que nous avons établie en demandant que la dérivation D_μ soit une opération covariante, permettant de comparer deux vecteurs situés en des points différents.

Dans le cas des variétés métriques, une condition supplémentaire est exigée: le transport parallèle doit conserver l'angle de deux vecteurs ainsi que leur longueur, comme dans le cas de la géométrie euclidienne. L. En d'autre termes, nous demandons que par transport parallèle, le produit scalaire

$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\nu$ de deux vecteurs soit invariant. Nous allons voir que cette propriété donne une relation entre la métrique et la connection permettant de calculer les $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ en fonction des $g_{\mu\nu}$ pour les variétés Riemanniennes.

Considérons une courbe quelconque dans une variété. Soit une paramétrisation λ des points de cette courbe. La demande de conservation du produit scalaire signifie

$$\frac{d}{d\lambda}(g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu) = 0 \tag{56}$$

Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\rho}{d\lambda} A^\mu B^\nu + g_{\mu\nu}\frac{dA^\mu}{d\lambda} B^\nu + g_{\mu\nu} A^\mu \frac{dB^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{57}$$

Mais comme cette égalité est vraie pour toute courbe et tous vecteurs A et B, et que par définition du transport parallèle nous avons $dA^\mu/d\lambda = -\Gamma^\mu_{\rho\nu} A^\nu dx^\rho/d\lambda$ et une relation similaire pour B, on obtient

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - g_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} = 0 \tag{58}$$

Cette équation indique la nécessaire relation entre connection et dérivées de la métrique dans les variétés métriques.

Nous avons mentionné plus haut que la partie antisymétrique en $\mu\nu$ de la connection $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique appelé torsion, dont la donnée est une des caractérisations de la variété. Les variétés de torsion nulle sont appelées variétés Riemanniennes. Pour ces variétés $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ est donc symétrique en $\mu\nu$, propriété qui reste vrai dans tout référentiel. En utilisant les symétries d'indices il est facile d'inverser l'équation (58) par permutation circulaire des indices. On obtient l'expression suivante de la connection en fonction de la métrique

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right) \tag{59}$$

L'indice supérieur est de nature tensorielle. Il est naturel de définir

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right) \tag{60}$$

Cette quantité est appelée symbole de Christoffel. On a

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu} \tag{61}$$

Donnons maintenant quelques propriétés évidentes d'après ce qui précède. Puisque par définition le transport parallèle conserve le produit scalaire, nous avons

$$0 = \delta_{||}(A^{\mu}B_{\mu}) = \delta_{||}(A^{\mu})B_{\mu} + A^{\mu}\delta_{||}B_{\mu} \tag{62}$$

Pour un vecteur covariant, l'opération de transport parallèle signifie donc

$$\delta_{||}B_{\mu} = -\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}B_{\nu}dx^{\rho} \tag{63}$$

et sa dérivation covariante est

$$D_{\nu}B_{\mu} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}B_{\rho} \tag{64}$$

Pour une quantité scalaire, par exemple $f = A^{\mu}B_{\mu}$, on vérifie

$$D_{\mu}f = \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \tag{65}$$

En demandant que le transport parallèle et la dérivation covariante soient des opérations de différentiation, on trouve la façon dont ils agissent sur des produits de composantes de vecteurs et donc sur des tenseurs $T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots}$ de rang quelconque,

$$\begin{aligned} D_{\nu}T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} = \frac{\partial T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots}}{\partial x^{\nu}} &+ \Gamma^{\mu_1}_{\rho_1\nu}T^{\rho_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} \\ &+ \Gamma^{\mu_2}_{\rho_2\nu}T^{\mu_1\rho_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} + \ldots \\ &- \Gamma^{\rho_1}_{\nu_1\nu}T^{\rho_1\mu_2\cdots}_{\rho_1\nu_2\cdots} \\ &- \Gamma^{\rho_2}_{\nu_2\nu}T^{\mu_1\rho_2\cdots}_{\nu_1\rho_2\cdots} - \ldots \end{aligned} \tag{66}$$

L'équation (58) signifie que la dérivée covariante du tenseur métrique s'annule identiquement

$$D_{\rho}g_{\mu\nu} = 0 \tag{67}$$

Cette équation permet le type suivant de manipulation d'indices

$$g_{\mu\mu_1}D_{\nu}T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} = D_{\nu}\left(g_{\mu\mu_1}T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots}\right) = D_{\nu}T^{\mu_2\cdots}_{\mu\nu_1\nu_2\cdots} \tag{68}$$

Sous cette forme le caractère tensoriel de la dérivation covariante est explicite.

Il est donc possible de généraliser en espace courbe l'idée de dérivation. Le caractère intrinsèque de la définition de la dérivation covariante, et donc sa cohérence, repose sur son interprétation géométrique en terme de transport parallèle, indépendante du choix de système de coordonnées.

L'existence de l'opération D_μ permet l'écriture d'équations différentielles covariantes par rapport aux changements de coordonnées. L'application à la physique est claire: il devient possible de construire des théories basées sur des équations différentielles exprimant la propagation d'interactions locales tout en respectant le principe d'équivalence, exprimé comme l'invariance des équations par changement quelconque de coordonnées.

Il nous reste à introduire de nouvelles quantités, les géodésiques et le tenseur de courbure de la variété.

5.4 Géodésiques

En espace euclidien, parmi toutes les courbes qui relient deux points, le segment de droite joue un rôle privilégié. Si on sait mesurer les distances, sauf cas d'obstruction topologique, c'est la courbe de plus petite longueur reliant ces deux points. Il n'est en fait pas nécessaire de disposer d'une métrique pour distinguer le segment de droite parmi toutes les autres courbes. En effet on constate facilement que si on déplace parallèlement à lui même un vecteur d'un point d'une courbe à un autre, c'est seulement dans le cas où cette courbe est une droite que la figure formée en chaque point par le vecteur et le vecteur tangent à la courbe reste identique à elle même.

La question est de généraliser la notion de droite en espace non euclidien. La définition adoptée pour tout espace est la suivante: une courbe reliant deux points donnés est une géodésique à condition que le transport parallèle entre deux points quelconques de cette courbe transforme tout vecteur tangent en un autre vecteur tangent.

Cette définition géométrique se traduit analytiquement de la façon suivante. Repérons les points x^μ d'une géodésique par une paramétrisation λ et soit $\xi^\mu(\lambda)$ un champ de vecteurs tangents à la géodésique. La définition que nous venons de donner signifie l'équation suivante sur $\xi^\mu(\lambda)$

$$\frac{d\xi^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\xi^\rho = 0 \tag{69}$$

Cette équation différentielle peut être mise sous une forme plus élégante. Un choix particulier de vecteur tangent est en effet $\xi^\mu = dx^\mu/d\lambda$. Un vecteur tangent quelconque diffère de $dx^\mu/d\lambda$ par un facteur de dilatation $f(\lambda)$. Sans perte de généralité, on peut donc écrire l'équation de la géodésique sous la forme

$$\frac{d}{d\lambda}\left(f(\lambda)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}f(\lambda)\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \tag{70}$$

On peut toujours redéfinir la paramétrisation en $\lambda \to s = s(\lambda)$ telle que $d\lambda/ds = f(\lambda)$. On obtient alors l'équation de la géodésique sous la forme suivante, appelée "forme normale"

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} = 0 \tag{71}$$

Cette équation reste du même type pour la classe des paramétrisations $s \to as+b$, où a et b sont des constantes. De telles paramétrisations sont appelées paramétrisations affines.

La forme des équations des géodésiques est la même quel que soit le système de coordonnées. C'est donc une équation tensorielle. Le paramètre s peut être utilisée comme mesure de la "longueur" de la courbe s'étendant entre les points $x(0)$ et $x(s)$. Les redéfinitions linéaires de s mentionnées ci-dessus signifient un changement des unités de longueurs. Si l'espace est métrique, nous allons voir que (i) l'élément de paramétrisation affine ds s'identifie avec l'élément de longueur tel que $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ et (ii) une géodésique reliant deux points est la courbe de longueur extrémale reliant ces deux points.

Considérons donc le cas de variété munies d'un tenseur métrique. Tout d'abord, étant donné que le transport parallèle conserve la norme des vecteurs, un champ de vecteurs tangents à une géodésique doit rester de longueur constante le long de la courbe. Si nous choisissons $\xi^\mu = dx^\mu/ds$, nous avons donc en tout point de la courbe

$$|\xi|^2 = g_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} = cte \tag{72}$$

On déduit donc de cette équation que $ds^2 = cte^{-1}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ si bien que s est bien, à une constante multiplicative près, la paramétrisation de la longueur d'arc pour la courbe.

On peut utiliser l'expression de Γ en fonction de la métrique. On obtient donc

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{73}$$

En espace euclidien, pour lequel on peut choisir des coordonnées cartésiennes, la solution de l'équation des géodésiques donne une droite d'équation $x^\mu = a^\mu + b^\mu s$.

Dans le cas général, étant donné un point de la variété, une seule géodésique est issue de ce point avec une direction donnée. On en déduit la possibilité de matérialiser la variété comme une une réunion de géodésiques. Ces dernières ne peuvent se rencontrer dans un voisinage suffisamment petit, ce qui est la généralisation de l'idée de parallélisme. La manière dont deux géodésiques voisines ont tendance à s'écarter caractérise la courbure de la variété.

A ce point de développement du formalisme, nous sommes en position de mieux comprendre l'interprétation, selon le principe d'équivalence, des équations d'Euler-Lagrange de la mécanique non relativiste comme résultant de la minimisation du temps propre des particules et d'une déformation de l'espace-temps. En effet, considérons la variété de coordonnées $x^\mu = (ct, x^i)$ où t est le temps absolu Newtonien et x^i les coordonnées Cartésiennes de l'espace. On peut utiliser le temps t comme paramètre de n'importe quelle trajectoire, donc $ct = s$. Les équations de Newton s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{dV}{dx^i} &= 0 \\ \frac{d^2t}{ds^2} &= 0 \end{aligned} \tag{74}$$

Il est facile de vérifier à des termes en $1/c^4$ près qu'elles peuvent être écrites sous la forme suivante

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} = 0 \tag{75}$$

avec

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right) \tag{76}$$

et

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} \\ g_{00} &= 1+\frac{V}{c} \\ g_{0i} &= 0 \end{aligned} \tag{77}$$

Si des coordonnées curvilignes sont utilisées pour repérer l'espace, la même équation devra être utilisée, en remplaçant δ_{ij} par l'expression de la métrique euclidienne dans les nouvelles coordonnées. On pourra donc toujours écrire les équations de Newton sous la forme

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds}=0 \tag{78}$$

Cette équation exprime mathématiquement le principe d'équivalence en théorie Newtonienne. Elle indique qu'il n'est pas possible de distinguer par des considérations locales une force inertielle d'une force extérieure dérivant d'un potentiel.

Revenant à la notion de géodésique, nous allons démontrer qu'il est bien équivalent de définir une géodésique par la contrainte que son vecteur tangent est généré par transport parallèle ou que sa longueur est extremale.

Dans un espace muni d'une métrique $g_{\mu\nu}$, la longueur d'une courbe dont les points $x^\mu(\lambda)$ sont repérés par une paramétrisation quelconque λ avec $\lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_f$ est

$$\begin{aligned} s[\lambda_i,\lambda_f] &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_f}\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \\ &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} \end{aligned} \tag{79}$$

La trajectoire rendant extremale s est telle que

$$\delta\int_{\lambda_i}^{\lambda_f}\sqrt{L(x^\mu,\dot{x}^\mu)}d\lambda=0 \tag{80}$$

avec

$$L(x^\mu,\dot{x}^\mu)=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{81}$$

Nous allons résoudre cette équation sous une forme plus générale

$$\delta \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} F[L(x^\mu, \dot{x}^\mu)] d\lambda = 0 \tag{82}$$

où $F[L]$ est une fonction de L à priori arbitraire, monotone et différentiable.

On a par application standard du principe variationnel

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \tag{83}$$

soit

$$\frac{d}{d\lambda}\left(F'[L] g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2} F'[L] \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \tag{84}$$

Nous avons la possibilité de choisir le paramètre λ égal à la longueur d'arc s sur la courbe. Avec ce choix il est clair que $L(s) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{1}{2}(ds/ds)^2 = \frac{1}{2}$, ce qui revient à dire que L est constant le long de la courbe. Par conséquent, la fonction F étant donnée, $F(L)$ et $F'(L)$ sont aussi des constantes le long de la courbe, indépendante de la valeur de s.

Nous avons donc l'équation

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \tag{85}$$

Une fois dévelopée, cette équation est exactement la même que l'équation (73) d'une géodésique définie à partir de la notion de transport parallèle.

Remarquons que l'application du principe variationnel donne la même équation pour la courbe, indépendamment du choix de la fonction F. C'est parce que nous avons choisi de paramétrer la courbe par sa longueur. En prenant le cas particulier $F(L) = \sqrt{L}$ nous voyons donc que l'équation (73) d'une géodésique est bien la contrainte qui rend extrémale la longueur de la courbe définie en (79) puisque cette longueur peut être exprimée sans perte de généralité dans n'importe quelle paramétrisation, en particulier la paramétrisation propre apparaissant dans (73).

Nous avons démontré ce que nous voulions, c'est à dire l'identification des géodésiques comme courbes de longueur extrêmale. Un des intérêts de disposer de ces deux définitions est de permettre des méthodes différentes de traçage et de visualisation des géodésiques.

L'expression suivante de l'equation des géodésiques

$$\delta \int_{s_i}^{s_f} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds = 0 \tag{86}$$

est particulièrement utile pour mettre une fois encore en évidence le lien entre les trajectoires des particules de la mécanique et les géodésiques d'un certain espace. En effet, dans la limite non relativiste pour laquelle $s \sim ct$, on trouve dans la limite de l'espace plat, avec $g_{00} = 1$, $L = c^2 - \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^2$, c'est-à-dire la fonction de Lagrange bien connue d'une particule libre non relativiste de masse unité.

5.5 Le tenseur de courbure

Sur une variété courbe, telle la sphère, un certain nombre de lois de la géométrie euclidienne ne sont pas vraies. Par exemple, la somme des angles d'un triangle formé de trois géodésiques reliant trois points diffère de π, la figure formée de quatre segments de géodésiques égaux et à angles droits tracés en partant d'un point ne se referme pas sur ce point, le rapport de la circonférence d'un cercle sur son rayon diffère de 2π, etc...

Tous ces faits se résument aux propriétés suivantes. Si on considère un ensemble de points donnés sur la variété et le chemin fermé C constitué des géodésiques reliant ces points dans un ordre donné, alors si on fait glisser par transport parallèle un vecteur le long de C, le vecteur obtenu après un tour complet ne sera pas identique au vecteur initial. Cela résulte du fait que l'angle du vecteur transporté parallèlement avec le vecteur tangent à la géodésique doit rester fixe le long de chaque segment de géodésique, et l'exemple de la sphère montre clairement l'apparition d'un déficit angulaire après un cycle. Une conséquence de cette propriété est que contrairement à ce qui se passe en géométrie euclidienne, le transport parallèle d'un vecteur d'un point à un autre donne un résultat dépendant du chemin suivi. Cette propriété quasi évidente en théorie des surfaces, a des conséquences importantes dans le cadre de la relativité générale. En effet, dans cette théorie, l'élément de longueur d'une ligne d'univers parcourue par un système physique (de petites dimensions) est le temps propre de ce système. On peut généralement relier deux évènements de l'espace-temps, tels le point de départ d'un astronaute de la terre et son point de retour sur la terre, par des circuit géodésiques différents. S'il est vrai que les diverses forces auquelles il est soumis pendant son périple se ramènent à un effet de courbure de l'espace-temps, et que les trajectoires dans l'espace-temps sont bien des géodésiques, alors l'astronaute subit un vieillissement, c'est à dire un écoulement de temps propre, qui ne coincidera pas à son retour avec celui de ses congénères restés sur la terre, précisément car les chemins géodésiques suivis sont différents! Ceci constitue l'explication correcte du fameux "paradoxe" des jumeaux de Langevin. Ce phénomène peut encore se traduire par l'assertion que la différentielle du temps propre n'est pas une différentielle exacte.[2]

Nous avons vu que les équations des géodésiques dépendent de la connection. Nous avons aussi indiqué que la façon dont des géodésiques s'écartent l'une de l'autre est fonction de la courbure. Il s'agit donc maintenant de préciser le lien entre la courbure et la connection de la variété.

Considérons un vecteur de composantes A_μ. Supposons que sur un contour Γ ces composantes soient telles qu'il se déplace par transport parallèle. Cela signifie que lorsqu'on passe du point x au point $x + dx$ ses coordonnées ont varié de A_μ à $A_\mu + \delta_{||} A_\mu$ avec $\delta_{||} A_\mu = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma dx^\nu$. Bien entendu $\delta_{||} A_\mu$ ne forme pas les composantes d'un vecteur au point x mais l'objet

$$\Delta A_\mu = - \oint_\Gamma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma dx^\nu \tag{87}$$

représente bien les composantes d'un vecteur qui exprime la différence en un point entre le vecteur de départ et ce qu'il est devenu après transport parallèle le long du chemin fermé Γ.

L'idée est de considérer un chemin englobant une région suffisamment petite pour obtenir un résultat ne dépendant pas des détails du contour et arriver à une caractérisation locale de la courbure de la surface. En d'autres termes on va faire le développement de ΔA_μ à l'ordre le plus bas en l'élément de surface $\Sigma^{\rho\sigma} = dx^\rho \wedge dx^\sigma$ englobé par le contour et arriver à une formule

[2] Ce paradoxe peut aussi se résoudre avec les formules que nous avons dérivées par simple application du principe d'équivalence, reliant l'intervalle de temps propre et celui de temps universel en fonction de la vitesse et du potentiel auquel est soumis le système. Par ces formules, on aboutit à la conclusion que pour un circuit fermé les effets de désynchronisation dus aux contractions de Lorentz s'ajoutent sur tout le circuit, tandis que ceux dus à l'accélération se compensent entre les phases d'accélération et de décélération. La résolution du "paradoxe" des jumeaux de Langevin est une interessante illustration de la conclusion selon laquelle le principe d'équivalence implique que l'espace-temps soit représenté par une variété courbe.

du type

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} R^\nu_{\mu\sigma\tau} A_\nu \Sigma^{\sigma\tau} \tag{88}$$

ΔA_μ étant un vecteur, $R^\nu_{\mu\rho\sigma}$ est nécessairement un tenseur de rang 4. C'est le tenseur de courbure de Riemann.

Le calcul de R comme fonction de la connection est élémentaire. Supposant le contour Γ infinitésimal, il suffit d'appliquer la formule de Stokes à l'expression (87) de ΔA_μ et d'utiliser la propriété que A est transporté parallèlement à lui même le long du contour, c'est-à-dire l'identité

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma \tag{89}$$

On obtient

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Gamma^\nu_{\mu\tau} A_\nu)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial(\Gamma^\nu_{\mu\sigma} A_\nu)}{\partial x^\sigma} \right) \Sigma^{\sigma\tau} \tag{90}$$

Par comparaison avec (88), on trouve l'expression du tenseur de Riemann

$$R^\nu_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\tau}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\sigma}}{\partial x^\tau} + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} \Gamma^\rho_{\mu\tau} - \Gamma^\nu_{\rho\tau} \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \tag{91}$$

Il est commode de définir

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\tau} R^\tau_{\nu\rho\sigma} \tag{92}$$

Il est facile de trouver des formule analogues pour un vecteur covariant. On peut procéder soit par calcul direct, soit à partir de la formule précédente en observant qu'un scalaire tel que $A^\mu B_\mu$ ne varie pas par transport parallèle, $\Delta(A^\mu B_\mu) = 0$. On obtient par l'une ou l'autre méthode

$$\Delta B^\mu = \oint_\Gamma \Gamma^\mu_{\sigma\nu} B^\sigma dx^\nu = -\frac{1}{2} R^\mu_{\nu\sigma\tau} B^\nu \Sigma^{\sigma\tau} \tag{93}$$

Par examen de ce qui se passe pour un produit de composante de vecteurs, on obtient ensuite les formules donnant la valeur de l'intégrale de contour d'un tenseur de rang quelconque déplacé parallèlement à lui même le long d'un contour infinitésimal en fonction du tenseur de courbure.

Les formule suivantes, expriment la non-commutativité de la dérivation covariante en espace courbe,

$$(D_\sigma D_\tau - D_\tau D_\sigma) B_\mu = R^\nu_{\mu\sigma\tau} B_\nu \tag{94}$$

$$(D_\sigma D_\tau - D_\tau D_\sigma)A^\mu = R^\mu_{\nu\sigma\tau} A^\nu \tag{95}$$

$$(D_\sigma D_\tau - D_\tau D_\sigma)B_{\mu\rho} = R^\nu_{\mu\sigma\tau} B_{\nu\rho} + R^\nu_{\rho\sigma\tau} B_{\mu\nu} \tag{96}$$

et ainsi de suite. Ces équations s'écrivent comme suit

$$[D, D] = R \tag{97}$$

Il est possible de démontrer que la définition d'un espace euclidien est d'être une variété telle que son tenseur de Riemann soit globalement nul.

Dans le cas des espaces de Riemann, le tenseur de Riemann est calculable en fonction de la métrique, grâce à l'expression des Γ calculée plus haut en fonction des $g_{\mu\nu}$.

On trouve aisément les relations suivantes de symétrie d'indices

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\nu\mu\rho\sigma} \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\mu\nu\sigma\rho} \\ R_{\rho\sigma\mu\nu} &= R_{\mu\nu\sigma\rho} \end{aligned} \tag{98}$$

En raison de ces symétries, le seul tenseur de rang 2 non nul que l'on peut former à partir du tenseur de Riemann s'obtient en contractant le premier et le troisième indice. Le tenseur obtenu est le tenseur de Ricci

$$R_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{99}$$

Ce tenseur symétrique joue un rôle très important en relativité générale.

La courbure scalaire R de l'espace est obtenue par contraction des deux derniers indices laissés libres

$$R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} \tag{100}$$

6 Invariance par reparamétrisation et relativité générale

6.1 L'invariance par reparametrisation vue comme symétrie de jauge

Les symétries de jauge jouent un rôle essentiel en physique. Considérons l'électrodynamique en espace plat. Le champ fondamental est le quadri-potentiel A^μ dont la composante temporelle est le potentiel électrostatique et les composantes d'espace le potentiel vecteur du champ magnétique. Les champs mesurables en physique sont les champs électriques et magnétiques, identifiés comme composantes du tenseur électromagnétique

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{101}$$

Cet objet est invariant sous la transformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \epsilon \tag{102}$$

où $\epsilon(x)$ est une fonction arbitraire. Cette invariance a des conséquences profondes. Elle implique en particulier que le photon est une particule de masse nulle avec deux états d'hélicité. En formalisme Lagrangien l'invariance de jauge est manifeste au niveau du Lagrangien de Maxwell

$$L_{Maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \tag{103}$$

Elle implique la conservation du courant électromagnétique j^μ

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{104}$$

Le point de vue actuel est que la symétrie de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \epsilon$ est la propriété fondamentale de l'électrodynamique et doit guider sa construction, jusqu'à l'établissement de la théorie quantique.

Considérons aussi le cas de la mécanique quantique non relativiste. Si on considère une fonction d'onde Ψ en représentation de Schödinger la physique est invariante par changement de phase

$$\Psi \rightarrow \exp i\alpha \ \Psi \tag{105}$$

La conséquence de cette symétrie est la conservation du courant probabiliste de la première quantification. Elle joue donc un rôle essentiel dans l'interprétation de la théorie.

Ces exemples et bien d'autres soulignent l'importance de la prise en considération des invariances des équations de la physique et des Lagrangiens qui leur correspondent.

Nous allons montrer que l'invariance par reparamétrisation est une symétrie de jauge, en ce sens que l'on peut considérer les lois de transformation des tenseurs par changement de coordonnées comme une symétrie. En partant du principe d'équivalence, nous sommes parvenu à l'idée que les équations de base doivent être covariantes par changement de reparamétrisation et nous avons établi un formalisme tensoriel exprimant cette idée. Si les champs sont des tenseurs, dénotés génériquement par φ, pour satisfaire au critère de localité des interactions on peut considérer le cas où leurs équations d'évolution sont obtenues par principe variationnel à partir d'une action locale

$$I[\varphi, D_\mu\varphi, g_{\mu\nu}] = \int d^4x\sqrt{-g}L(\varphi, D_\mu\varphi, g_{\mu\nu}) \tag{106}$$

Nous avons mentionné plus haut que $d^4x\sqrt{-g}$ est un scalaire. Par conséquent la dépendance en φ et $g_{\mu\nu}$ du Lagrangien L doit doit être telle que L est une fonction scalaire. D'après ce que nous avons vu ceci sera réalisé si L est obtenu par contraction de tous les indices d'une somme de produits de champ φ et de leurs dérivées covariantes. Nous allons voir qu'un tel objet est caractérisé par une symétrie de jauge.

Considérons les changements de coordonnées infinitésimaux $x \to x'$ avec

$$x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu \tag{107}$$

où ξ^μ est infinitesimal et dépend du point.

Soit f une fonction scalaire, par exemple le Lagrangien L. Par changement de coordonnées, on a

$$f'(x') = f(x) \tag{108}$$

L'idée est de relier la manière dont f se transforme par changement de coordonnées à la définition d'une symétrie locale. On définit la variation infinitésimale δf comme suit

$$\begin{aligned} \delta_\xi f(x) &= f'(x') - f(x') \\ &= f(x) - f(x-\xi) = \xi^\mu\partial_\mu f(x) \end{aligned} \tag{109}$$

Si l'on considère deux transformations successives de paramètres ξ_1 et ξ_2, il est facile de vérifier que l'on a

$$(\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2} - \delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1})\, f = \delta_{\xi_3} f \tag{110}$$

avec

$$\xi_3^\mu = \xi_1^\nu\partial_\nu\xi_2^\mu - \xi_2^\nu\partial_\nu\xi_1^\mu \tag{111}$$

On a donc une structure d'algèbre de Lie pour les transformations infinitésimales δ.

Soit maintenant un vecteur A^μ. Par changement de coordonnées on a

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \tag{112}$$

On définit comme dans le cas de la fonction scalaire

$$\delta_\xi A^\mu(x) \;\; = \;\; A'^\mu(x') - A^\mu(x') \tag{113}$$

Un calcul élémentaire montre alors

$$\delta_\xi A^\mu(x) = \xi^\nu \partial_\nu A^\mu - A^\nu \partial_\nu \xi^\mu \tag{114}$$

Plus généralement, connaissant les propriétés tensorielles d'un champ T on calcule la variation δT telle que

$$\delta_\xi T(x) = T'(x') - T(x') \tag{115}$$

avec $x' = x - \xi$.

Le résultat trouvé pour $\delta_\xi T(x)$, au premier ordre en ξ,

$$\delta_\xi T(x) = L_\xi T(x) \tag{116}$$

est appelé dérivée de Lie le long du vecteur ξ de l'objet considéré.

La relation (110) trouvée dans le cas d'une fonction scalaire pour le commutateur de deux transformations se vérifie dans tous les cas, si bien qu'on a la structure d'algèbre de Lie

$$[L_\xi, L_{\xi'}] = L_{\{\xi,\xi'\}} \tag{117}$$

avec

$$\{\xi,\xi'\}^\mu = \xi^\nu \partial_\nu \xi'^\mu - \xi'^\nu \partial_\nu \xi^\mu \tag{118}$$

On a par exemple pour le tenseur métrique

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = L_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\partial_\nu \xi^\rho + g_{\nu\rho}\partial_\mu \xi^\rho + \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} \tag{119}$$

Utilisant la loi de dérivation en chaîne, on trouve facilement que la densité $\sqrt{-g}$ se transforme de la façon suivante

$$\delta_\xi \sqrt{-g} = \partial_\mu(\xi^\mu \sqrt{-g}) = L_\xi \sqrt{-g} \tag{120}$$

On voit que la propriété qu'un objet tel le Lagrangien L d'une théorie physique soit une fonction scalaire peut être mise sous la forme de l'équation suivante

$$\delta_\xi \sqrt{-g} L = \partial_\mu(\xi^\mu \sqrt{-g} L) \tag{121}$$

A condition que soient les champs, soit le vecteur ξ, s'annulent sur les bords de l'espace, ceci revient à l'invariance de l'action $I = \int d^4x \sqrt{-g} L$ sous les transformations δ_ξ. Une telle symétrie est locale, à travers le paramètre ξ, et peut être considérée comme une symétrie de jauge.

Il suit de ces remarques que d'une part tout champ tensoriel peut être considéré comme ayant des lois de transformations locales bien déterminées sous une symétrie de jauge gouvernée par le paramètre infinitésimal ξ^μ, et que d'autre part l'obtention d'une théorie avec des équations invariantes par reparamétrisation signifie que l'action qui engendre ces équations de champs doit être invariante sous cette symétrie de jauge. Nous allons voir que ceci conduit à une définition agréable et intéressante du tenseur d'énergie-impulsion.

6.2 Invariance par reparamétrisation et tenseur d'énergie-impulsion

En espace plat, la conservation de l'énergie-impulsion se déduit du fait que l'action considérée ne dépend de la variable d'espace-temps qu'à travers les champs. Il y a invariance par translation dans le temps et l'espace. Considérons donc un Lagrangien L dépendant d'un champ et de ses dérivées. L'action est

$$I = \int dx L(\varphi, \partial_\mu \varphi) \tag{122}$$

On a par application de la dérivation en chaîne

$$\partial_\mu L = \frac{\delta L}{\delta \varphi} \partial_\mu \varphi + \frac{\delta L}{\delta \partial_\nu \varphi} \partial_\nu \partial_\mu \varphi \tag{123}$$

Combinant ceci aux équations d'Euler-Lagrange dont les solutions rendent l'action extrémale

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \partial_\nu \frac{\delta L}{\delta \partial_\nu \varphi} \tag{124}$$

on trouve

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu L \right) = 0 \tag{125}$$

Le tenseur

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu L \tag{126}$$

est donc conservé modulo les équations du mouvement. C'est la forme usuelle du tenseur d'énergie-impulsion. Sa définition sous la forme présente n'est guère satisfaisante. Une certaine ambiguité demeure. A priori $T_{\mu\nu}$ n'est pas un tenseur symétrique en $\mu\nu$. Cas par cas, par addition de termes de divergence nulle, on peut cependant modifier l'expression de $T_{\mu\nu}$ et le transformer en un tenseur conservé et symétrique. Cette modification diffère selon le Lagrangien considéré. Ainsi, pour un Lagrangien scalaire du type $L = -\frac{1}{2}\varphi \partial^\mu \partial_\mu \varphi$, l'expression de $T_{\mu\nu}$ donnée par la formule déduite plus haut est symétrique sans modification; pour le Lagrangien de l'électrodynamique, $L = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$, il faut modifier $T_{\mu\nu}$ pour le rendre symétrique et invariant de jauge.

La définition du tenseur d'énergie-impulsion donnée ci-dessus présente un grave défaut: elle repose sur une symétrie qui n'a aucun sens en espace courbe, l'invariance par translation.

En revanche, si l'on postule l'invariance par reparamétrisation du Lagrangien, ce qui nécessite de le faire dépendre de la métrique (quite à imposer à la fin que cette métrique est plate), nous allons voir qu'il est naturel d'obtenir un tenseur symétrique de rang deux, conservé de façon covariante, identifiable de façon naturelle comme tenseur d'énergie-impulsion.

La démonstration est simple. Ecrivons l'action comme

$$I = \int dx L(\varphi, \partial_\mu \varphi, g_{\mu\nu}) \tag{127}$$

Dans cette équation, la métrique $g_{\mu\nu}$ doit être considérée comme un champ extérieur. Le principe variationnel ne s'applique qu'aux champs φ. Nous sommes donc à la recherche d'un tenseur conservé de façon covariante, modulo les équations du mouvement de φ. Par hypothèse l'action est invariante par reparamétrisation. Cela signifie qu'on peut transformer tous les champs par la transformation de coordonnées décrite plus haut sans que l'action change. Mais les transformations par changement de coordonnées appliquées à φ sont un cas particulier des transformations générales pour lesquelles l'action est stationnaire lorsque les équations du mouvement sont satisfaites. Lorsque les équations d'Euler-Lagrange sont satisfaites, l'invariance de l'action sous les reparamétrisations signifie donc

$$\int dx \left((\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\delta L}{\delta \partial_\sigma g_{\mu\nu}} \right)) L_\xi g_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{128}$$

où $L_\xi g_{\mu\nu}$ est la dérivée de Lie de $g_{\mu\nu}$ le long du vecteur infinitésimal ξ. Définissons

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g} T_{\mu\nu} = \frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\delta L}{\delta \partial_\sigma g_{\mu\nu}} \right) \tag{129}$$

Par des intégrations par partie, on peut écrire (128) sous la forme

$$\int dx \xi^\mu \sqrt{-g} D_\rho T^\rho_\mu = 0 \tag{130}$$

D_μ est l'opération de dérivation covariante. Pour démontrer cette formule on peut utiliser $D_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ et la formule suivante, valide pour tout tenseur symétrique $A_{\mu\nu}$,

$$D_\rho A^\rho_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^\rho_\mu}{\partial x^\rho}) - \frac{1}{2} A^{\rho\nu} \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} \tag{131}$$

Dans les cas où le Lagrangien ne dépend pas des dérivées de la métrique on a la formule très simple

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{132}$$

L'identité (130) vaut pour toute valeur du vecteur ξ^μ. On doit donc avoir

$$D_\rho T^\rho_\mu = 0 \tag{133}$$

On déduit de ceci qu'une définition naturelle du tenseur d'énergie-impulsion est donnée par l'équation (129). Par définition $T_{\mu\nu}$ est symétrique et sa conservation covariante est la conséquence directe d'une symétrie fondamentale du système, l'invariance par changement de ccordonnées.

En partant du Lagrangien le plus simple invariant par reparamétrisation, le Lagrangien scalaire

$$\int dx\sqrt{-g}(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi) \tag{134}$$

on obtient par dérivation par rapport à la métrique

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L \tag{135}$$

Si nous considérons le Lagrangien de l'électrodynamique

$$\int dx\sqrt{-g}(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \tag{136}$$

(ce Lagrangien est bien invariant par changement de coordonnées car on a $D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\mu - \partial_\nu A_\mu$ dans un espace sans torsion), on trouve

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - F^{\alpha\nu}F^{\beta}_{\nu} \tag{137}$$

$T^{\alpha\beta}$ est invariant de jauge. En choisissant une métrique plate, on peut vérifier qu'on obtient bien $T_{00} = E^2 + B^2$ comme densité d'énergie électrodynamique et $T_{0i} = (E \wedge B)_i$ comme vecteur de flux d'énergie.

6.3 L'équation d'Einstein

Nous sommes parvenu au point remarquable que le tenseur d'énergie-impulsion d'un système matériel décrit par des champs locaux peut être défini comme la réponse de l'action classique de ces champs à une variation virtuelle de la métrique. Par action classique il faut comprendre l'intégrale du Lagrangien de ces champs calculée pour la valeur des champs correspondant aux solutions des équations du mouvement pour les conditions aux limites données. Dans ce raisonnement, la métrique est considérée comme un champ extérieur, sur lequel la matière n'a pas d'influence. Il est temps de se rappeler les discussions que nous avons eues, selon lesquelles, en fonction du principe d'équivalence, la présence d'un champ de pesanteur influence la géométrie de l'espace-temps. Dans le cas de champs de pesanteur statiques, nous avons déduit une relation plausible entre potentiel gravitationnel et métrique. Nous cherchons donc une équation exprimant les interactions réciproques de la matière et de la métrique. Une solution simple pour aboutir mathématiquement à une interaction entre matière et espace est d'ajouter au Lagrangien de matière $L(\varphi, g_{\mu\nu})$ un Lagrangien de pure gravité $L_{gravite}$, dépendant seulement de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées, de telle sorte que la métrique devienne un champ dynamique. Par principe de moindre action, en variant la matière et la métrique on obtiendra des équations couplées donnant les équations du mouvement du champ de matière et celles de la métrique. Ces équations expriment comment la matière déforme l'espace et crée sa géométrie, et comment l'évolution de la matière est déterminée par la structure géométrique.

On considère donc l'action

$$\int d^4x\sqrt{-g}\,(L(\varphi, g_{\mu\nu}) + L_{gravite}(g_{\mu\nu})) \tag{138}$$

La fonction scalaire la plus simple dépendant de $g_{\mu\nu}$ et du plus bas ordre dans les dérivées de $g_{\mu\nu}$ est la courbure scalaire obtenue en contractant de toutes les façons possibles les dérivées du tenseur de Riemann. On considère donc

$$L_{gravite} = \kappa^{-1}R = \kappa^{-1}g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \tag{139}$$

κ est une constante dimensionnées et calculable en fonction de la constante d'attraction universelle de Newton, par comparaison de la théorie de Newton avec la limite non relativiste de la théorie d'Einstein.

Un calcul simple montre que pour une variation quelconque de la métrique $\delta g_{\mu\nu}$, la variation de l'action $\int d^4x\sqrt{-g}L_{gravite}$ est

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) \tag{140}$$

La variation de l'action de matière est, par définition même du tenseur d'énergie-impulsion

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{141}$$

Le principe de stationnarité de l'action donne la relation suivante entre la courbure de l'espace et le tenseur d'énergie-impulsion

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{142}$$

Cette équation extraordinairement simple est la solution au problème de la détermination de l'interaction entre espace et matière. C'est l'équation d'Einstein.

La dynamique de la matière est donnée par la condition de stationnarité de l'action de matière, c'est à dire

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} \tag{143}$$

Ces deux dernières équations constituent un des plus beaux achèvement de la physique. Il n'en reste pas moins qu'elles forment un système d'équations non linéaires, en général impossible à résoudre.

Le contact avec la physique se fait en particulier dans l'approximation où l'on observe des quantités de matière sufisamment faibles par rapport à celles des corps créant le champ de gravité pour que son mouvement ne perturbe pas la géométrie de l'espace. On parle alors de particules test. Dans l'approximation où le champ de gravité n'est pas trop intense, si bien que la métrique diffère peu de la métrique plate, on retrouve la théorie de Newton et les résultats que nous avions obtenus par le principe d'équivalence. Les effets de relativité générale se calculent souvent par un développement perturbatif en $1/c^2$, en s'aidant des symmétries éventuelles du problème.

On peut démontrer quà l'ordre le plus bas en $1/c^2$, la solution de l'équation d'Einstein dans la limite de champ faible correspond à

$$g_{00} = 1 + \frac{2V}{c^2} \tag{144}$$

où V est s'interprète comme un potentiel Newtonien solution de léquation de Poisson. Ceci constitue le premier test de la relativité générale. Notons que le principe d'équivalence mènerait directement à cette équation qui ne reflète donc pas le caractère non linéaire de la théorie. La relation entre la constante κ et la constante de Newton s'obtient en considérant les solutions statiques à symétrie sphérique.

Venons en à l'assertion selon laquelle le mouvement d'une particule dans un champ de gravitation est une géodésique de la variété dont la métrique est déterminée par l'équation d'Einstein. On définit l'action d'une particule scalaire par

$$I[X^\mu] = \frac{1}{2} \int d\tau g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} \tag{145}$$

$X^\mu(\tau)$ dénote les coordonnées de la ligne d'univers de la particule paramétrée par son temps propre τ. La trajectoire qui minimise cette action s'obtient facilement par principe variationnel. On trouve comme équation du mouvement l'équation suivante

$$\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dX^\rho}{d\tau}\frac{dX^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{146}$$

c'est-à-dire l'équation d'une géodésique. La justesse de ce choix de l'action d'une particule, qui est le seul naturel, devient évident dans l'approximation Newtonienne où τ s'identifie avec le temps asolu, $\tau = t$, si bien que l'on obtient

$$I[X^\mu] = I[\vec{x}, t] \sim \int d\tau(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2) \tag{147}$$

Dans la limite non relativiste et en espace plat, cette action correspond, comme il se doit, à la fonction de Lagrange d'une particule libre. Nous avons déjà indiqué dans la section consacrée aux propriétés des géodésiques de quelle manière, toujours dans la limite non relativiste, un potentiel dérive de la non uniformité de la métrique. L'effet d'une métrique correspondant à une courbure non nulle est bien de déformer les trajectoires rectilignes en trajectoires courbes, jadis interprétées comme induites par une force à distance.

7 Conclusion

Nous devrions maintenant détailler les applications des équations d'Einstein. Indiquons seulement que la théorie a passé avec succès tous les tests imaginés depuis des décennies. Elle prédit un certain nombre de phénomènes nouveaux qui font actuellement l'objet d'intenses recherches expérimentales, telles l'existence des trous noirs et d'ondes gravitationnelles. Nous arrêtons ces notes ici, en espérant que leur but est atteint, qui est de faire comprendre sans artifice pourquoi le cadre de la physique en espace de Lorentz doit être remplacé par celui de la physique en espace courbe, et de donner les bases du formalisme. Actuellement, beaucoup d'efforts sont consacrés à la construction d'une théorie de la gravitation qui prenne en compte les phénomènes quantiques. Il est probable qu'un nouveau saut conceptuel soit nécessaire pour réaliser ce programme. Ce saut pourrait être encore plus radical que celui d'Einstein lorsqu'il a décidé d'introduire une géométrie courbe pour l'espace-temps.