

Équations structurées en dynamique des populations

Pierre Gabriel

▶ **To cite this version:**

Pierre Gabriel. Équations structurées en dynamique des populations. Licence. ENS Cachan, 2013, pp.20. cel-00918869v1

HAL Id: cel-00918869

https://cel.hal.science/cel-00918869v1

Submitted on 15 Dec 2013 (v1), last revised 23 Oct 2014 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

P. Gabriel

Équations structurées en dynamique des populations

Table des matières

1 L'équation de transport **2**
1.1 Le cas à vitesse constante . . . 2
1.1.1 Sur l'espace entier . . . 2
1.1.2 Sur le demi-espace . . . 3
1.2 La cas à vitesse variable . . . 3
1.2.1 Sur l'espace entier . . . 4
1.2.2 Sur le demi-espace . . . 6

2 L'équation de renouvellement **10**
2.1 Modèle structuré en âge . . . 10
2.2 Problème aux valeurs propres et solutions remarquables . . . 10
2.3 Entropie et convergence . . . 11

3 L'équation de croissance-fragmentation **14**
3.1 Modèle structuré en taille . . . 14
3.2 Krein-Rutman et l'existence de solutions remarquables . . . 14

4 La fragmentation auto-similaire **17**
4.1 Changement de variables auto-similaire . . . 17
4.2 Convergence exponentielle . . . 18

1 L'équation de transport

1.1 Le cas à vitesse constante

1.1.1 Sur l'espace entier

On considère tout d'abord l'équation suivante

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + v\,\partial_x n(t,x) = 0, \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ n_{|t=0} = n^0, \qquad n^0 \equiv n^0(x) \text{ donnée.} \end{cases} \tag{1}$$

L'inconnue est $n \equiv n(t,x)$, où t représente le temps et x la "position". La vitesse $v \in \mathbb{R}$ est donnée.

Il est aisé de vérifier que si la donnée initiale $n^0(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction définie par $n(t,x) = n^0(x-vt)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et est solution de (1). La donnée initiale est donc *transportée* à la vitesse v.

Par le changement de variable $x \to x+vt$ cela s'écrit aussi $n(t,x+vt) = n^0(x)$, ce qui revient à dire que la solution est constante le long de chaque courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t,x) = x+vt$ issue de $x\in\mathbb{R}$ à $t=0$. Ces courbes sont appelées *courbes caractéristiques* de l'équation (1). Elles permettent de démontrer le résultat suivant.

Théorème. *Pour toute donnée initiale $n^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ de (1). Cette solution est donnée par $n(t,x) = n^0(x-tv)$.*

Démonstration. Unicité. Supposons qu'il existe $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ solution du problème de Cauchy (1). Pour $z\in\mathbb{R}$, soit $\varphi_z(t) := n(t,\gamma(t,z))$. Alors $\varphi_z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_z(t) &= \frac{d}{dt} n(t,\gamma(t,z)) \\ &= \partial_t n(t,\gamma(t,z)) + \partial_x n(t,\gamma(t,z))\,\dot\gamma(t,z) \\ &= \partial_t n(t,\gamma(t,z)) + v\,\partial_x n(t,\gamma(t,z)) = 0. \end{aligned}$$

Donc $\varphi_z(t) = \varphi_z(0)$, c'est-à-dire $n(t,z+vt) = n(0,z) = n^0(z)$. En faisant le changement de variable $z = x-tv$ on obtient que $n(t,x) = n^0(x-vt)$.

Existence. La formule $n(t,x) = n^0(x-vt)$ définit $n\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, et on a

$$\partial_t n(t,x) = -v\,\frac{dn^0}{dx}(x-vt), \quad \text{et} \quad \partial_x n(t,x) = \frac{dn^0}{dx}(x-vt),$$

d'où pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\partial_t n(t,x) + v\partial_x n(t,x) = 0.$$

□

Exercice.

1. *Soient $n^0\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $S\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Résoudre*

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + v\,\partial_x n(t,x) = S(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ n_{|t=0} = n^0. \end{cases}$$

2. *Soient $n^0\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\beta\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Résoudre*

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + v\,\partial_x n(t,x) + \beta(t,x)n(t,x) = 0, \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ n_{|t=0} = n^0. \end{cases}$$

3. *Soient $n^0\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $S\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ et $\beta\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Résoudre*

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + v\,\partial_x n(t,x) + \beta(t,x)n(t,x) = S(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ n_{|t=0} = n^0. \end{cases}$$

1.1.2 Sur le demi-espace

Regardons maintenant le cas où l'équation de transport est posée sur le demi-espace $\mathbb{R}_+$ avec une vitesse $v > 0$. Dans ce cas il faut ajouter une *condition au bord* en $x = 0$ qui représente un flux entrant,

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + v\,\partial_x n(t,x) = 0, & t > 0,\ x > 0, \\ n_{|_{x=0}} = B, & B \equiv B(t) \text{ donnée}, \\ n_{|_{t=0}} = n^0, & n^0 \equiv n^0(x) \text{ donnée}. \end{cases} \tag{2}$$

On définit de la même manière les courbes caractéristiques, seulement certaines vont être issues du bord $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ et d'autres du bord $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$. La solution dépend de la position de (t,x) par rapport à la caractéristique issue de $(0,0)$.

Théorème. *Si la fonction défine sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$x \mapsto \begin{cases} B(-x/v) & si\ x \leqslant 0, \\ n^0(x) & si\ x > 0, \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$*, alors il existe une unique solution* $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ *de* (2)*. Cette solution est donnée par*

$$n(t,x) = \begin{cases} B(t - x/v) & si\ x \leqslant vt, \\ n^0(x - tv) & si\ x > vt. \end{cases} \tag{3}$$

Démonstration. Unicité. Supposons qu'il existe $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ solution du problème de Cauchy (1). Pour $z \in \mathbb{R}_+^*$, soit $\varphi_z(t) := n(t, \gamma(t,z))$. Alors $\varphi_z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t > 0$, $\frac{d}{dt}\varphi_z(t) = 0$. Donc $\varphi_z(t) = \varphi_z(0)$, c'est-à-dire $n(t, z + vt) = n(0,z) = n^0(z)$. Pour $x > vt$, on obtient en faisant le changement de variable $z = x - tv$ que $n(t,x) = n^0(x - vt)$.

Pour $z \in \mathbb{R}_-$, soit $\varphi_z(t) := n(t, \gamma(t,z))$. Alors $\varphi_z \in \mathcal{C}^1(-z/v, +\infty) \cap \mathcal{C}([-z/v, +\infty))$, comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t > 0$, $\frac{d}{dt}\varphi_z(t) = 0$. Donc $\varphi_z(t) = \varphi_z(-z/v)$, c'est-à-dire $n(t, z + vt) = n(-z/v, 0) = B(-z/v)$. Pour $x \leqslant vt$, on obtient en faisant le changement de variable $z = x - tv$ on obtient que $n(t,x) = B(t - x/v)$.

Existence. La formule (3) définit $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, et on a si $x > vt$

$$\partial_t n(t,x) = -v\,\frac{dn^0}{dx}(x - vt), \qquad \partial_x n(t,x) = \frac{dn^0}{dx}(x - vt),$$

et si $x < vt$

$$\partial_t n(t,x) = \frac{dB}{dt}(t - x/v), \qquad \partial_x n(t,x) = -\frac{1}{v}\frac{dB}{dt}(t - x/v).$$

Finalement on obtient que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$\partial_t n(t,x) + v\partial_x n(t,x) = 0.$$

□

1.2 La cas à vitesse variable

Dans cette partie on s'intéresse au cas où la vitesse dépend de la position ($v \equiv v(x)$).

1.2.1 Sur l'espace entier

On considère tout d'abord l'équation posée sur l'espace $\mathbb{R}$ tout entier

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + v(x)\,\partial_x n(t,x) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ n_{|t=0} = n^0, & n^0 \equiv n^0(x) \text{ donnée.} \end{cases} \tag{4}$$

Comme dans le cas des vitesses constantes, on définit des courbes caractéristiques.

Définition. *On appelle* courbe caractéristique *de l'opérateur $v(x)\cdot\partial_x$ toute courbe intégrale $t\mapsto\gamma(t)$ du champ v, c'est-à-dire toute solution de $\dot\gamma(t) = v(\gamma(t))$.*

Pour assurer l'existence et l'unicité d'une courbe caractéristique $s\mapsto\gamma(s)$ passant par x à un instant $s=t$ donné, on fait des hypothèses de type Cauchy-Lipschitz sur le champ v :

$$v\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \tag{5}$$

$$\exists M>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |v(x)|\leqslant M(1+|x|). \tag{6}$$

On note alors cette unique courbe $\gamma(s) = X(s,t,x)$.

Remarque. *L'hypothèse* (6) *est essentielle pour que X soit défini globalement. Contre-exemple : $v(x)=x^2$, $X(s,t,x) = \frac{x}{1-(s-t)x}$, le temps de vie $(-\infty, t+1/x)$ dépend de la condition initiale.*

Théorème. *Sous les hypothèses* (5) *et* (6)*, il existe pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ une unique courbe intégrale $s\mapsto X(s,t,x)$ du champ v passant par x à l'instant $s=t$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par*

$$\begin{cases} \partial_s X(s,t,x) = v(X(s,t,x)), & s\in\mathbb{R}, \\ X(t,t,x) = x, \end{cases}$$

et on a $X\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Démonstration. L'existence locale ainsi que l'unicité proviennent du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour l'existence globale on considère $t\in\mathbb{R}$ et $T>|t|$. Il s'agit de montrer que la solution de $\dot\gamma(s) = v(\gamma(s))$ n'explose pas sur $[-T,T]$. On a $\gamma(s) = \gamma(t) + \int_t^s v(\gamma(\tau))\,d\tau$ donc pour tous $s\in[-T,T]$

$$\begin{aligned} |\gamma(s)| &\leqslant |\gamma(t)| + \left|\int_s^t |v(\gamma(\tau))|\,d\tau\right| \\ &\leqslant |\gamma(t)| + M\left|\int_t^s (1+|\gamma(\tau)|)\,d\tau\right| \\ &\leqslant (|\gamma(t)| + 2MT) + M\left|\int_t^s |\gamma(\tau)|\,d\tau\right|. \end{aligned}$$

On en déduit grâce au lemme de Grönwall que

$$|\gamma(s)| \leqslant (|\gamma(t)| + 2MT)\,e^{2MT}.$$

La solution γ est bornée sur $[-T,T]$, donc définie sur $[-T,T]$, puis sur $\mathbb{R}$ puisque T est arbitraire.

Le théorème de dérivation par rapport à la condition initiale et par rapport à un paramètre assure, avec l'hypotèse (5), que $\partial_t X$ et $\partial_x X$ sont continus. Donc X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. □

Définition. *L'application $X\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ainsi construite est le flot caractéristique pour $v(x)\cdot\partial_x$, ou flot engendré par le champ de vecteurs v.*

Proposition. *Si v vérifie* (5) *et* (6)*, alors*

(i) X vérifie la propriété de groupe

$$\forall t_1,\, t_2,\, t_3 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x),$$

(ii) pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $X(s,t,\cdot) : x \mapsto X(s,t,x)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme sur $\mathbb{R}$, préservant l'orientation, d'inverse $X(s,t,\cdot)^{-1} = X(t,s,\cdot)$,

(iii) X vérifie l'équation

$$\partial_t X(s,t,x) + v(x)\partial_x X(s,t,x) = 0.$$

Démonstration. (i) D'après le théorème précédent, il existe une unique courbe intégrale de v passant par $X(t_2,t_1,x)$ à l'instant t_2. Les courbes $s \mapsto X(s,t_2,X(t_2,t_1,x))$ et $x \mapsto X(s,t_1,x)$ sont des courbes intégrales de v qui coïncide pour $s = t_2$. Elle sont donc égales.

(ii) D'après le théorème précédent, $X(s,t,\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. De plus le point (i) assure que $X(s,t,\cdot) \circ X(t,s,\cdot) = X(s,s,\cdot) = Id$. Donc $x \mapsto X(s,t,x)$ est une bijection de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ d'inverse $X(t,s,\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(iii) On part de la propriété de groupe vérifiée par X

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)$$

qu'on dérive par rapport à t_2 :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt_2} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) &= 0 \\ &= \partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \partial_s X(t_2, t_1, x)\, \partial_x X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \\ &= \partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + v(X(t_2, t_1, x))\, \partial_x X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)).\end{aligned}$$

En évaluant cette identité en $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = s$ on obtient

$$0 = \partial_t X(s,t,x) + v(x)\partial_x X(s,t,x)$$

□

Théorème. *Si v vérifie (5) et (6), alors pour tout donnée initiale $n^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ il existe une unique solution $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ au problème de Cauchy (4). Cette solution est donnée par la formule $n(t,x) = n^0(X(0,t,x))$.*

Démonstration. Unicité. Si $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est solution de (4), on considère $\varphi(t) = n(t, X(t,0,z))$. Cette fonction appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$) et on a

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \partial_t n(t, X(t,0,z)) + \partial_s X(t,0,z)\, \partial_x n((t, X(t,0,z)) \\ &= \partial_t n(t, X(t,0,z)) + v(X(t,0,z))\, \partial_x n((t, X(t,0,z)) = 0.\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(t) = \varphi(0)$, ce qui signifie que $n(t, X(t,0,z)) = n(0,z) = n^0(z)$. Donc pour $x = X(t,0,z)$ on obtient $n(t,x) = n^0(X(t,0,\cdot)^{-1}z) = n^0(X(0,t,x))$.

Existence. Pour $n^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, définissons $n(t,x) := n^0(X(0,t,x))$. Alors $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ car composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, et elle vérifie $n(0,x) = n^0(x)$ et

$$(\partial_t + v(x)\partial_x) n^0(X(0,t,x)) = \frac{dn^0}{dx}(X(0,t,x)).(\partial_t + v(x)\partial_x) X(0,t,x) = 0.$$

□

1.2.2 Sur le demi-espace

Regardons maintenant le cas où l'équation est posée sur le demi-espace $\mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + v(x)\,\partial_x n(t,x) = 0, & t>0,\ x>0, \\ n_{|_{x=0}} = B, & B \equiv B(t) \text{ donnée}, \\ n_{|_{t=0}} = n^0, & n^0 \equiv n^0(x) \text{ donnée}. \end{cases} \tag{7}$$

Afin d'avoir un flux rentrant en $x=0$, on considère des vitesses v positives proche du bord $x=0$. On fait donc les hypothèses suivante sur le champ de vitesse

$$v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*), \tag{8}$$
$$\exists M>0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |v(x)| \leqslant M(1+|x|), \tag{9}$$
$$\exists \epsilon>0,\ \forall x \in (0,\epsilon],\ v(x)>0. \tag{10}$$

Sous ces hypothèses le flot X, qui est toujours bien défini localement pour $t, x > 0$, mais n'est plus défini globalement en général. En effet, comme dans le cas de la vitesse constante, certaines caractéristiques peuvent croiser le bord $x=0$. Pour savoir si cela se produit ou non, il faut davantage d'information sur le champ v au voisinage de $x=0$. La condition suivante, connue sous le nom de condition d'Osgood, est une condition nécessaire et suffisante pour que les courbes caractéristiques n'atteignent jamais le bord $x=0$.

$$\text{Condition d'Osgood :} \quad \lim_{x\to 0} \int_x^\epsilon \frac{dy}{v(y)} = +\infty. \tag{11}$$

Quand cette condition n'est pas vérifiée, c'est-à-dire lorsque $\frac{1}{v} \in L^1(0,\epsilon)$

$$\int_0^\epsilon \frac{dy}{v(y)} < +\infty, \tag{12}$$

alors les caractéristiques proches du bord le touchent en temps fini.

Théorème. *Sous les hypothèses* (8)-(10) *et* (11)*, il existe pour tout* $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ *une unique courbe intégrale* $s \mapsto X(s,t,x)$ *du champ* v *passant par* x *à l'instant* $s=t$*. Elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier par*

$$\begin{cases} \partial_s X(s,t,x) = v(X(s,t,x)), & s \in \mathbb{R}, \\ X(t,t,x) = x, \end{cases}$$

et on a $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que si $x \in (0,\epsilon)$, alors pour tout $s<t,\ X(s,t,x)>0$. Ceci est assuré par la condition (11). En effet s'il existait $s_0 < t$ tel que $X(s,t,x)>0$ pour tout $s \in (s_0,t)$ et $\lim_{s\to s_0^+} X(s,t,x) = 0$ alors on aurait

$$\int_{s_0}^t \frac{\partial_s X(s,t,x)}{v(X(s,t,x))}\,ds = \int_{s_0}^t ds = t - s_0$$

puis en faisant le changement de variable $y = X(s,t,x)$

$$\int_0^x \frac{dy}{v(y)} = t - s_0 < +\infty,$$

ce qui contredirait (11). □

Proposition. *Si* v *vérifie* (8)-(10) *et* (11)*, alors*

(i) X vérifie la propriété de groupe

$$\forall t_1,\, t_2,\, t_3 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x),$$

(ii) pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $X(s,t,\cdot) : x \mapsto X(s,t,x)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^*$, préservant l'orientation, d'inverse $X(s,t,\cdot)^{-1} = X(t,s,\cdot)$,

(iii) X vérifie l'équation

$$\partial_t X(s,t,x) + v(x)\partial_x X(s,t,x) = 0.$$

Théorème. *Sous les hypothèses* (8)-(10) *et* (12)*, il existe pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ une unique courbe intégrale $s \mapsto X(s,t,x)$ maximale du champ v passant par x à l'instant $s = t$.*

Si $v(x) > 0$ pour tout $x > 0$, alors cette solution $s \mapsto X(s,t,x)$ est définie sur l'intervalle maximal $(s_0, +\infty)$ où

$$s_0(t,x) = t - \int_0^x \frac{dy}{v(y)}.$$

S'il existe $x_0 > 0$ tel que $v(x_0) = 0$ et $\forall x \in (0, x_0),\ v(x) > 0$, alors $s \mapsto X(s,t,x)$ est définie sur l'intervalle maximal $(s_0, +\infty)$ si $x \in (0, x_0)$ et sur $\mathbb{R}$ tout entier si $x \geqslant x_0$.

Dans les deux cas le flot X est défini sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, et $X \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Démonstration. Si $v(x) > 0$ pour tout $x > 0$ alors pour tout $s > s_0$, $X(s,t,x) > 0$. En effet c'est clair si $s \geqslant t$, et s'il existait $s_1 \in (s_0, t)$ tel que $X(s,t,x) > 0$ pour tout $s \in (s_1, t)$ et $\lim_{s \to s_1^+} X(s,t,x) = 0$ alors on aurait

$$\int_0^x \frac{dy}{v(y)} = \int_{s_1}^t \frac{\partial_s X(s,t,x)}{v(X(s,t,x))}\, ds = \int_{s_1}^t ds = t - s_1 < t - s_0 = \int_0^x \frac{dy}{v(y)}$$

d'où une contradiction.

S'il existe $x_0 > 0$ tel que $v(x_0) = 0$ et $\forall x \in (0, x_0),\ v(x) > 0$, alors le même argument que précedemment montre que $X(s,t,x) > 0$ pour tout $s \in (s_0, +\infty)$ si $x \in (0, x_0)$. D'autre part on a $X(s,t,x_0) \equiv x_0$ qui est définie sur tout $\mathbb{R}$, et par unicité des solutions on a aussi que si $x > x_0$ alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, $X(s,t,x) > x_0 > 0$, donc $s \mapsto X(s,t,x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

Le fait que le domaine de définition Ω de X soit un ouvert découle ensuite de la continuité de s_0 sur $\mathbb{R} \times (0, x_0)$. □

Lemme. *Si v vérifie* (8)-(10) *et* (12)*, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une unique courbe caractéristique définie sur $(t, +\infty)$, et notée $s \mapsto X(s,t,0)$, qui tend vers 0 quand $s \to t$.*

Démonstration. On se fixe un $x \in (0, \epsilon)$. Alors $s \mapsto X(s, t + \int_0^x \frac{dy}{v(y)}, x)$ est l'unique courbe caractéristique qui tend vers zéro quand $s \to t$. En effet $s_0(t + \int_0^x \frac{dy}{v(y)}, x) = t$, et $s_0(\cdot, x)$ est injective. □

Proposition. *Si v vérifie* (8)-(10) *et* (12)*, alors*

(i) s_0 vérifie la propriété

$$\forall t_2 > s_0(t_1, x), \qquad s_0(t_2, X(t_2, t_1, x)) = s_0(t_1, x),$$

(ii) l'application $x \mapsto s_0(t,x)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféormorphisme de $(0, X(t,0,0))$ sur $\mathbb{R}_+^*$, d'inverse $s \mapsto X(t,s,0)$,

(iii) s_0 vérifie l'équation

$$\partial_t s_0(t,x) + v(x)\partial_x s_0(t,x) = 0,$$

(iv) si $(t_2, t_1, x) \in \Omega$ et $(t_3, t_1, x) \in \Omega$, alors $(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \in \Omega$ et X vérifie

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x),$$

(v) pour tout $s \geqslant t$, l'application $x \mapsto X(s,t,x)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $(X(s,t,0), +\infty)$, d'inverse $x \mapsto X(t,s,x)$,

(vi) sur Ω, X vérifie l'équation

$$\partial_t X(s,t,x) + v(x)\partial_x X(s,t,x) = 0.$$

Démonstration. (i) Supposons par exemple que $t_2 < t_1$ (l'autre cas se traitant de la même manière). Alors la fonction $s \mapsto s_0(s, X(s,t_1,x))$ est bien définie sur l'intervalle $[t_2, t_1]$ et

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} s_0(s, X(s,t_1,x)) &= \partial_t s_0(s, X(s,t_1,x)) + \partial_s X(s,t_1,x)\, \partial_x s_0(s, X(s,t_1,x)) \\ &= 1 + v(X(s,t_1,x))\, \frac{-1}{v(X(s,t_1,x))} = 0.\end{aligned}$$

Donc $s_0(t_2, X(t_2,t_1,x)) = s_0(t_1, X(t_1,t_1,x)) = s_0(t_1,x)$.

(iv) Pour vérifier que si $(t_2,t_1,x) \in \Omega$ et $(t_3,t_1,x) \in \Omega$, alors $(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)) \in \Omega$, on utilise (i) qui donne $s_0(t_2, X(t_2,t_1,x)) = s_0(t_1, X(t_1,t_1,x)) = s_0(t_1,x) < t_3$. □

Théorème. *Supposons que v vérifie* (8)-(10).

Si de plus v satisfait la condition d'Osgood (11)*, alors pour toute donnée initiale $n^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ il existe une unique solution $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*)$ à l'équation* (7)*. Cette solution est donnée donnée par $n(t,x) = n^0(X(0,t,x))$. En particulier il n'y a pas besoin de condition au bord.*

En revanche si v satisfait (12)*, alors pour tout flux $B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ et pour toute donnée initiale $n^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ vérifiant la condition de raccordement*

$$B(0) = N^0(0) \quad et \quad B'(0) = -v(0)(n^0)'(0)$$

il existe une unique solution $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ à l'équation (7)*. Cette solution est donnée par*

$$n(t,x) = \begin{cases} B(s_0(t,x)) & si\ x \leqslant X(t,0,0), \\ n^0(X(0,t,x)) & si\ x > X(t,0,0). \end{cases} \tag{13}$$

Démonstration. Le cas où la condition d'Osgood est vérifiée se traite de la même manière que l'équation (4) posée sur tout le domaine $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant que v satisfasse la condition (12).

Unicité. Si $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ est solution de (7), on considère pour $t, x > 0$ la fonction définie par $\varphi(s) = n(s, X(s,t,x))$. Elle appartient à $\mathcal{C}^1(s_0(t,x), +\infty) \cap \mathcal{C}([s_0(t,x), +\infty))$ et vérifie $\frac{d}{ds}\varphi(s) = 0$. Si $x > X(t,0,0)$ on a $s_0(t,x) < 0$ et, en prenant pour s les valeurs 0 et t, on obtient $\phi(t) = \phi(0)$ qui s'écrit aussi $n(t,x) = n(0, X(0,t,x)) = n^0(X(0,t,x))$.
Si $x < X(t,0,0)$ on obtient, en prenant pour s les valeurs t et $s_0(t,x) > 0$, que $\varphi(t) = \varphi(s_0(t,x))$ et donc $n(t,x) = n(s_0(t,x), X(s_0(t,x),t,x) = n(s_0(t,x),0) = B(s_0(t,x))$.

Existence. La formule (13) définit n de classe $\mathcal{C}^1$ de part et d'autre de la frontière $t \mapsto X(t,0,0)$. De plus on a pour $x > X(t,0,0)$

$$\partial_t n(t,x) = \partial_t X(0,t,x)\, \frac{dn^0}{dx}(X(0,t,x)), \qquad \partial_x n(t,x) = \partial_x X(0,t,x)\, \frac{dn^0}{dx}(X(0,t,x)),$$

et pour $x < X(t,0,0)$

$$\partial_t n(t,x) = \partial_t s_0(t,x)\, \frac{dB}{dt}(s_0(t,x)), \qquad \partial_x n(t,x) = \partial_x s_0(t,x)\, \frac{dB}{dt}(s_0(t,x)).$$

On en déduit que n vérifie l'équation

$$\partial_t n(t,x) + v(x)\partial_x n(t,x) = 0$$

de part et d'autre de $t \mapsto X(t,0,0)$, et que $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$ si

$$\partial_t X(0,t,X(t,0,0)\, \frac{dn^0}{dx}(0) = \partial_t s_0(t, X(t,0,0))\, \frac{dB}{dt}(0)$$

et

$$\partial_x X(0,t,X(t,0,0))\,\frac{dn^0}{dx}(0) = \partial_x s_0(t,X(t,0,0))\,\frac{dB}{dt}(0).$$

Or d'une part un calcul direct donne

$$\partial_t s_0(t,x) = 1 \quad \text{et} \quad \partial_x s_0(t,x) = -\frac{1}{v(x)},$$

et d'autre part on a

$$\int_0^t \frac{\partial_s X(s,t,x)}{v(X(s,t,x))}\,ds = t = \int_{X(0,t,x)}^x \frac{dy}{v(y)}$$

qui donne par dérivation par rapport à t et à x

$$\partial_t X(0,t,x) = -v(X(0,t,x)) \quad \text{et} \quad \partial_x X(0,t,x) = \frac{v(X(0,t,x))}{v(x)}.$$

On peut aussi démontrer ces deux dernières égalités en remarquant que pour tout h on a $X(s+h,t+h,x) = X(s,t,x)$ (par Cauchy-Lipschitz) qui donne en dérivant par rapport à h puis en évaluant en $h=0$

$$\partial_s X(s,t,x) + \partial_t X(s,t,x) = 0.$$

On en déduit alors que

$$\partial_t X(0,t,x) = -v(X(0,t,x)) \quad \text{puis} \quad \partial_x X(0,t,x) = \frac{-\partial_t X(0,t,x)}{v(x)} = \frac{v(X(0,t,x))}{v(x)}.$$

La condiditon de raccordement assure donc que $n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$. □

Exercice. *Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ le cas $v(x) = x$.*

2 L'équation de renouvellement

2.1 Modèle structuré en âge

On s'intéresse à une population structurée physiologiquement par âge pour laquelle on veut modéliser le vieillissement des individus ainsi que leur division en deux nouveaux individus d'âge zéro. Cette approche est particulièrement utilisée pour la modélisation d'un population de cellules en division.

Les premiers modèles mathématiques structutrés en âge remontent aux travaux de Sharpe & Lotka (1911), McKendrick (1926) et von Foerster (1959). L'équation que l'on veut étudier ici, généralement appelée équation de renouvellement ou équation de McKendrick-vonFoerster, s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t n(t,a) + \partial_a n(t,a) + \beta(a) n(t,a) = 0, \qquad t, a > 0, \\ n(t,0) = 2\displaystyle\int_0^\infty \beta(a) n(t,a)\, da, \qquad t > 0, \\ n(0,a) = n^0(a), \qquad a \geqslant 0. \end{cases} \tag{14}$$

La quantité $n(t,a)$ représente la densité de population d'âge a à l'instant t (c'est-à-dire le nombre d'individus d'âge compris entre a et $a + da$ au temps t). La première équation de (14) est une équation de transport en âge qui rend compte du vieillissement de la population, à la vitesse $\frac{da}{dt} = 1$, avec un terme de dégradation $\beta(a)$ qui correspond à la disparition des cellules qui se divisent. Le terme de bord non local en $a = 0$ représente les naissances de nouveaux individus d'âge zéro dues à la division de la cellule mère. Le nom d'équation de renouvellement est dû à ce terme de bord.

Le taux de division β a une interprétation probabiliste. En effet la probabilité qu'une cellule ne se soit pas divisée avant l'âge a est donnée par

$$\mathbb{P}(a) = e^{-\int_0^a \beta(a')\, da'}.$$

Ainsi si l'on veut modéliser une population dans laquelle toutes les cellules se divisent à un moment où à un autre, on est amené à faire l'hypothèse suivante sur le taux de division

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \beta(a')\, da' = +\infty.$$

2.2 Problème aux valeurs propres et solutions remarquables

Pour étudier le comportement des solutions de l'équation (14), on commence par chercher des solutions particulières. On s'attend naturellement à ce qu'une population en division croisse exponentiellement vite. On va donc chercher des solutions sous la forme d'un profil stationnaire en âge multiplié par une croissance exponentielle $(t,a) \mapsto N(a)e^{\lambda t}$. La recherche de telles solutions remarquables est équivalente à la résolution du problème aux valeurs propres suivant : trouver $N \in L^1(\mathbb{R}_+)$ positif et non identiquement nul, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \lambda N(a) + \partial_a N(a) + \beta(a) N(a) = 0, \qquad a > 0, \\ N(0) = 2\displaystyle\int_0^\infty \beta(a) N(a)\, da. \end{cases} \tag{15}$$

Une fois ces solutions trouvées, le problème suivant consistera à se demander si elles sont globalement attractives, c'est-à-dire que toute solution de l'équation (14) converge en temps grand vers une solution remarquable. Pour cela on aura besoin des solutions du problème au valeur propre adjoint

$$\partial_a \phi(a) - (\lambda + \beta(a))\phi(a) = -2\phi(0)\beta(a), \qquad a > 0. \tag{16}$$

Théorème. *Supposons que β soit une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. Alors il existe une unique solution (λ, N, ϕ) au problème* (15)-(16) *tels que*

$$\int_0^\infty N(a)\,da = \int_0^\infty \phi(a)N(a)\,da = 1. \tag{17}$$

De plus la valeur propre λ et les fonctions propres N et ϕ sont strictement positives.

Démonstration. La première équation est une équation différentielle qui donne après intégration

$$N(a) = N(0)\, e^{-\int_0^a (\lambda+\beta(a'))\,da'}.$$

En multipliant cette équation par 2β puis en intégrant sur $\mathbb{R}_+$, on trouve que la condition au bord est satisfaite si et seulement si λ vérifie l'équation

$$1 = 2\int_0^\infty \beta(a)\, e^{-\int_0^a (\lambda+\beta(a'))\,da'}\,da =: F(\lambda).$$

La fonction F est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{R}_+$. Elle est clairement strictement décroissante et satisfait $F(0) = 2$. De plus par le théorème de convergence dominée on a $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$. Donc l'équation $F(\lambda) = 1$ admet une unique solution sur l'ensemble de définition de F, et cette solution est strictement positive. On a donc l'existence et l'unicité de la valeur propre λ, puis l'existence et l'unicité d'un sous-espace propre associé dont la dimension est 1 (λ est une valeur propre simple).

Pour le problème adjoint on peut intégrer l'équation (16) en

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \phi(0)e^{\int_0^a (\lambda+\beta(b))\,db}\left[1 - 2\int_0^a \beta(a')e^{-\int_0^{a'} (\lambda+\beta(a''))\,da''}\,da'\right]\\ &= 2\phi(0)\int_a^\infty \beta(a')e^{-\int_a^{a'} (\lambda+\beta(a''))\,da''}\,da'\end{aligned}$$

et on a donc aussi un sous-espace propre adjoint de dimension 1.

L'unicité et la positivité des fonctions propres N et ϕ découlent ensuite de la normalisation (17). □

2.3 Entropie et convergence

Pour obtenir la convergence des solutions vers les solutions remarquables, on utilise une fonctionnelle de Lyapunov, c'est-à-dire une quantité qui décroit le long des trajectoires de l'équation que l'on considère. Pour l'équation de renouvellement on utilise l'Entropie Relative Généralisée. Pour une fonction H définie sur $\mathbb{R}_+$ on pose pour $n \in L^1(\mathbb{R}_+)$

$$\mathcal{H}[n] := \int_0^\infty \phi(a)N(a)H\Big(\frac{n(a)}{N(a)}\Big)\,da.$$

Théorème (Entropie Relative Généralisée)**.** *Pour tout n solution positive de* (14) *on a*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}[n(t,\cdot)e^{-\lambda t}] = -\mathcal{D}[n(t,\cdot)e^{-\lambda t}],$$

avec

$$\mathcal{D}[n] = \phi(0)N(0)\left[\int_0^\infty H\Big(\frac{n(a)}{N(a)}\Big)\,d\mu(a) - H\bigg(\int_0^\infty \frac{n(a)}{N(a)}\,d\mu(a)\bigg)\right]$$

où $d\mu(a) = 2\beta(a)\frac{N(a)}{N(0)}\,da$ est une mesure de probabilité. Si de plus H est convexe, alors $\mathcal{D} \geqslant 0$.

Démonstration. Notons $m(t,a) = n(t,a)e^{-\lambda t}$. De l'identité

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{m(t,a)}{N(a)} + \frac{\partial}{\partial a}\frac{m(t,a)}{N(a)} = 0$$

on tire

$$\partial_t H\Big(\frac{m(t,a)}{N(a)}\Big) + \partial_a H\Big(\frac{m(t,a)}{N(a)}\Big) = 0.$$

Ensuite en utilisant de plus que

$$\partial_a(\phi(a)N(a)) = -2\phi(0)\beta(a)N(a)$$

on obtient

$$\partial_t\Big[\phi(a)N(a)H\Big(\frac{m(t,a)}{N(a)}\Big)\Big] + \partial_a\Big[\phi(a)N(a)H\Big(\frac{m(t,a)}{N(a)}\Big)\Big] = -2\phi(0)\beta(a)N(a)H\Big(\frac{m(t,a)}{N(a)}\Big).$$

Finalement après intégration en $a \in \mathbb{R}_+$ on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\infty \phi(a)N(a)H\Big(\frac{m(t,a)}{N(a)}\Big)\,da &= \phi(0)N(0)H\Big(\frac{m(t,0)}{N(0)}\Big) - \phi(0)N(0)\int_0^\infty H\Big(\frac{m(t,a)}{N(a)}\Big)\,d\mu(a)\\ &= \phi(0)N(0)\left[H\Big(\int_0^\infty \frac{m(t,a)}{N(a)}\,d\mu(a)\Big) - \int_0^\infty H\Big(\frac{m(t,a)}{N(a)}\Big)\,d\mu(a)\right].\end{aligned}$$

Le terme entre crochets de la dernière ligne est négatif lorsque H est convexe grâce à l'inégalité de Jensen ($d\mu$ étant une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$). □

Le fait que l'entropie $\mathcal{H}[n(t,\cdot)]$ décroisse au cours du temps traduit le fait que la fonction $n(t,a)e^{-\lambda t}$ se "rapproche" du profile $N(a)$. Pour être plus précis on fait l'hypothèse que le taux de division domine le vecteur propre adjoint

$$\exists \mu_0 > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}_+,\ 2\beta(a) \geqslant \mu_0\frac{\phi(a)}{\phi(0)}, \tag{18}$$

et on a alors le résultat suivant qui donne la convergence exponentielle de $n(t,a)e^{-\lambda t}$ vers $\big(\int n^0\big)N(a)$ en norme L^1.

Théorème. *Sous l'hypothèse* (18)*, toute solution de l'équation* (14) *satisfait*

$$\int_0^\infty |n(t,a)e^{-\lambda t} - \rho_0 N(a)|\,\phi(a)\,da \leqslant e^{-\mu_0 t}\int_0^\infty |n^0(a) - \rho_0 N(a)|\,\phi(a)\,da, \tag{19}$$

où $\rho_0 = \int_0^\infty \phi(a)n^0(a)\,da$.

Démonstration. La propriété d'Entropie Relative Généralisée pour la fonction $H(x) = x$ s'écrit

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \phi(a)n(t,a)e^{-\lambda t}\,da = 0$$

et donc on a pour tout $t > 0$, $\int_0^\infty \phi(a)n(t,a)e^{-\lambda t}\,da = \int_0^\infty \phi(a)n^0(a)\,da = \rho_0$. Ensuite on part de la propriété d'Entropie Relative Généralisée avec la fonction convexe $H(x) = |x - \rho_0|$ pour écrire, en posant $h(t,a) = n(t,a)e^{-\lambda t} - \rho_0 N(a)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\infty \phi(a)|h(t,a)|\,da &= \phi(0)\left|\int_0^\infty 2\beta(a)h(t,a)\,da\right| - \phi(0)\int_0^\infty 2\beta(a)|h(t,a)|\,da\\ &= \left|\int_0^\infty [2\phi(0)\beta(a) - \mu_0\phi(a)]h(t,a)\,da\right| - \phi(0)\int_0^\infty 2\beta(a)|h(t,a)|\,da\\ &\leqslant \int_0^\infty [2\phi(0)\beta(a) - \mu_0\phi(a)]|h(t,a)|\,da - \phi(0)\int_0^\infty 2\beta(a)|h(t,a)|\,da\\ &= -\mu_0\int_0^\infty \phi(a)|h(t,a)|\,da.\end{aligned}$$

La convergence exponentielle (19) en découle grâce au lemme de Grönwall. □

Exemple. *Si le taux de division est minoré par une constante strictement positive, c'est-à-dire si*

$$\exists \beta_m > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad \beta(a) \geqslant \beta_m,$$

alors l'hypothèse (18) *est vérifiée avec* $\mu_0 = \beta_m$. *En effet on a*

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(a)}{\phi(0)} &= 2\int_a^\infty \beta(a')e^{-\int_a^{a'}(\lambda+\beta(a''))\,da''}da' \\
&\leqslant 2\int_0^\infty \beta(a')e^{-\int_a^{a'}\beta(a'')\,da''}da' \\
&= 2\left[-e^{-\int_a^{a'}\beta(a'')\,da''}\right]_a^\infty = 2 \leqslant 2\frac{\beta(a)}{\beta_m}.
\end{aligned}$$

3 L'équation de croissance-fragmentation

3.1 Modèle structuré en taille

Ici on s'intéresse à une autre variable structurante d'une population en division, à savoir la taille des individus. Lorsqu'un membre de la population se divise, il donne naissance à des individus de taille inférieure mais néanmoins strictement positive. C'est ce qui différencie les modèles structurés en taille de ceux structurés en âge. On va restreindre notre étude à deux équations de type croissance-fragmentation : l'équation de la mitose

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + \partial_x n(t,x) + \beta(x) n(t,x) = 4\beta(2x) n(t,2x), \qquad t,x>0, \\ n(t,0) = 0, \qquad t>0, \\ n(0,x) = n^0(x), \qquad x \geqslant 0, \end{cases} \tag{20}$$

et l'équation de croissance-fragmentation homogène

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + \partial_x n(t,x) + \beta(x) n(t,x) = 2\displaystyle\int_x^\infty \beta(y) n(t,y) \frac{dy}{y}, \qquad t,x>0, \\ n(t,0) = 0, \qquad t>0, \\ n(0,x) = n^0(x), \qquad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{21}$$

L'équation (20) modélise une population dans laquelle les individus se divisent exactement en deux parties de tailles égales. C'est le cas par exemple de la division cellulaire pour laquelle chaque cellule fille a la moitié de la taille de la cellule mère. Dans l'équation (21) en revanche, les individus de taille $y > 0$ se fragmentent en deux morceaux qui peuvent avoir n'importe quelle taille comprise entre 0 et y, avec la même probabilité. Cette équation est utilisée pour modéliser l'évolution d'une population de polymères qui croissent par polymérisation et se fragmentent (par exemple des polymères de protéines dans l'étude des maladies à prions ou d'Alzheimer). On remarque que pour chacune des deux équations de transport (20) et (21), le flux rentrant est nul. En effet aucun individu de taille nulle n'est produit.

3.2 Krein-Rutman et l'existence de solutions remarquables

Comme pour l'équation de renouvellement, on s'attend à avoir une croissance exponentielle de la population et on cherche des solutions particulières sous la forme $N(x)e^{\lambda t}$. Mais à la différence de l'équation de renouvellement, l'existence de telles solutions ne peut pas être obtenue par des calculs explicites. On utilise alors de théorème de Krein-Rutman. Avant d'énoncer ce théorème, on donne quelques définitions.

Définition. *Un cône K d'un espace de Banach réel $(E, \|\cdot\|)$ est un esemble fermé de E vérifiant :*

a) $0 \in K$,

b) $x, y \in K \implies \lambda x + \mu y \quad \forall \lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0$,

c) $x \in K$ *et* $-x \in K \implies x = 0$.

Définition. *Sur un espace de Banach réel $(E, \|\cdot\|)$ on définit un ordre par rapport à un cône K par*

$$x \geqslant y \Longleftrightarrow x - y \in K, \quad et \quad x > y \Longleftrightarrow x - y \in Int(K).$$

Définition. *Un cône K est dit reproduisant si*

$$\forall x \in E,\ \exists y, z \in K,\ x = y - z.$$

Définition. *Un cône K est dit normal si*

$$0 \leqslant x \leqslant y \implies \|x\| \leqslant \|y\|.$$

Théorème (Krein-Rutman)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel, $K \subset E$ un cône normal et reproduisant, et $A : E \to E$ une application linéaire compacte. On suppose que A est fortement positive par rapport à K, c'est-à-dire*

$$x \in K \setminus \{0\} \implies A(x) > 0.$$

Alors le rayon spectral $\rho(A)$ de A est une valeur propre simple de A, associée à un vecteur propre $X > 0$.

On applique ce théorème dans l'espace de Banach $E = \mathcal{C}([0, R])$, avec $R > 0$ fixé, pour montrer l'existence d'une solution remarquable approchée pour les équations (21) et (20). Le théorème ci-dessous donne le résultat pour l'équation (21), le cas très similaire de l'équation (20) étant laissé en exercice.

Théorème. *Soient $R > 0$ et $\epsilon > 0$. Soit $\beta \in E$ positive, non identiquement nulle et telle que $\beta(x)/x \in L^1([0, R])$. Alors pour ϵ suffisamment petit, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathcal{C}^1([0, R])$ solution de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} N(x) + \big(\lambda + \beta(x)\big) N(x) = \displaystyle\int_x^R \beta(y) N(y) \, \frac{dy}{y}, \quad 0 < x < R, \\ N(x = 0) = \epsilon \displaystyle\int_0^R N(y) \, dy, \qquad N(x) > 0, \qquad \displaystyle\int_0^R N(x) \, dx = 1. \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème repose sur l'application du théorème de Krein-Rutman pour un opérateur bien choisi. On commence par montrer que pour tout $f \in E$ il existe une unique fonction $n \in E$ solution de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} n(x) + \big(\lambda + \beta(x)\big) n(x) - \displaystyle\int_x^R \beta(y) n(y) \, \frac{dy}{y} = f(x), \quad 0 < x < R, \\ n(x = 0) = \epsilon \displaystyle\int_0^R n(y) \, dy. \end{cases} \tag{22}$$

On définit alors sur E l'opérateur $A : f \mapsto n$ et on vérifie que A est bien compact et fortement positif.

Première étape : construction de A. Pour $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in E$ et $m \in E$ fixés, on définit $n = T(m) \in E$ comme l'unique solution (explicite) de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} n(x) + \big(\mu + \beta(x)\big) n(x) = \int_x^R \beta(y) m(y) \, \frac{dy}{y} + f(x), \quad 0 < x < R, \\ n(x = 0) = \epsilon \int_0^R m(y) \, dy. \end{cases}$$

On montre que, pour μ suffisamment grands et ϵ suffisamment petit, T est une contraction stricte sur E qui admet donc un unique point fixe d'après le théorème de Banach-Picard. Ce point fixe est solution de (22).

Pour montrer que T est une contraction stricte, on considère m_1 et m_2 deux fonctions de E et on calcule pour $m = m_1 - m_2$ et $n = T(m)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} n(x) + \big(\mu + \beta(x)\big) n(x) = \int_x^R \beta(y) m(y) \, \frac{dy}{y}, \quad 0 < x < R, \\ n(x = 0) = \epsilon \int_0^R m(y) \, dy \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} |n(x)| + \big(\mu + \beta(x)\big) |n(x)| \leqslant \int_x^R \beta(y) |m(y)| \, \frac{dy}{y}, \quad 0 < x < R, \\ |n(x = 0)| \leqslant \epsilon \int_0^R |m(y)| \, dy. \end{cases}$$

Après intégration on obtient

$$|n(x)| e^{\int_0^x (\mu + \beta)} \leqslant \epsilon \int_0^R |m(y)| \, dy + \int_0^x e^{\int_0^{x'} (\mu + \beta)} \int_{x'}^R \beta(y) |m(y)| \tfrac{dy}{y} \, dx'$$

et ainsi

$$\begin{aligned}|n(x)| &\leqslant \epsilon \int_0^R |m(y)|\,dy + \int_0^x e^{-\int_{x'}^x (\mu+\beta)} \int_{x'}^R \beta(y)|m(y)|\tfrac{dy}{y}\,dx' \\ &\leqslant \|m\|_E \big[\epsilon R + \int_0^x e^{-\int_{x'}^x (\mu+\beta)} \int_{x'}^R \beta(y)\tfrac{dy}{y}\,dx'\big] \\ &\leqslant \|m\|_E \big[\epsilon R + \|\beta(y)/y\|_{L^1} \int_0^x e^{-\mu(x-x')}\,dx'\big] \\ &\leqslant \|m\|_E \big[\underbrace{\epsilon R + \mu^{-1}\|\beta(y)/y\|_{L^1}}_{=:k}\big]\end{aligned}$$

On peut choisir, comme annoncé, ϵ suffisamment petit et μ suffisamment grand pour avoir $k < 1$ et on obtient

$$\|n\|_E \leqslant k\|m\|_E.$$

Ainsi T est une contraction stricte et on a prouvé l'existence d'une solution pour (22).

Deuxième étape : A est continu. En effet en raisonnant comme dans la première étape on obtient que

$$|n(x)|e^{\int_0^x (\mu+\beta)} \leqslant \epsilon \int_0^R |n(y)|\,dy + \int_0^x e^{\int_0^{x'} (\mu+\beta)} \int_{x'}^R \beta(y)|n(y)|\tfrac{dy}{y}\,dx' + \int_0^x e^{\int_0^{x'} (\mu+\beta)}|f(x')|\,dx'$$

et donc

$$|n(x)| \leqslant k\|n\|_E + \int_0^x |f(x')|\,dx' \leqslant k\|n\|_E + R\|f\|_E.$$

Cela prouve que

$$\|n\|_E \leqslant \frac{R}{1-k}\|f\|_E.$$

Troisième étape : A est fortement positif. Pour $f \geqslant 0$, l'opérateur T de la première étape envoie $m \geqslant 0$ sur $n \geqslant 0$. Donc le point fixe n est positif, *i.e.* $n = A(f) \geqslant 0$. De plus si f n'est pas identiquement nulle, alors n n'est pas identiquement nulle non plus. Donc $n(0) = \epsilon \int_0^R n(y)\,dy > 0$ puis

$$n(x) \geqslant n(0) + e^{-\int_0^x (\mu+\beta)} \int_0^x e^{\int_0^{x'} (\mu+\beta)} f(x')\,dx' > 0.$$

Quatrième étape : A est compact. Pour $\|f\|_E \leqslant 1$, la troisième étape montre que n est bornée dans E et donc

$$\partial_x n(x) = -(\mu + \beta(x))n(x) + \int_x^R \beta(y)n(y)\tfrac{dy}{y} + f$$

est aussi bornée. On conclut alors grâce au théorème d'Ascoli-Arzela que la famille n est relativement compacte dans E.

□

On voit dans la preuve que la troncature à l'intervalle $[0, R]$ est nécessaire pour définir un opérateur compact, et que le paramètre ϵ permet d'assurer la forte positivité de cet opérateur. Pour obtenir une solution remarquable de l'équation (21), il faut maintenant faire tendre R vers $+\infty$ et ϵ vers 0. Mais les outils mathématiques nécessaires pour ce passage à la limite sortent du cadre de ce cours.

Ensuite il faut aussi démontrer que toute solution de l'équation (21) converge vers une solution particulière. Mais là encore de tels résultats dépassent l'objectif de ce cours.

4 La fragmentation auto-similaire

4.1 Changement de variables auto-similaire

On part de l'équation de fragmentation

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + \beta(x) n(t,x) = 2 \displaystyle\int_x^\infty \beta(y) n(t,y) \, \frac{dy}{y}, \qquad t,x>0, \\ n(0,x) = n^0(x), \qquad x \geqslant 0, \end{cases} \tag{23}$$

qui est l'équation (21) dans laquelle on a enlevé le terme de croissance. Cette équation modélise une population dans laquelle les individus se fragmentent (avec une répartition homogène des fragments) mais ne grandissent pas. On s'attend donc à ce que les solutions se concentrent en $x = 0$ avec un nombre d'individus qui tend vers $+\infty$. En revanche la taille totale de la population $\int_0^\infty x n(t,x)\, dx$ est préservée au cours du temps. En effet on obtient en intégrant (formellement) l'équation (23) multipliée par x et en utilisant le théorème de Fubini que

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty x n(t,x)\, dx = 0.$$

On a donc pour tout temps

$$\int_0^\infty x n(t,x)\, dx = \int_0^\infty x n^0(x)\, dx =: \rho_0.$$

Si on regarde alors la fonction $(t,x) \mapsto x n(t,x)$, on s'attend à avoir une convergence vers une masse de Dirac en $x = 0$ quand $t \to +\infty$. Pour montrer ce résultat et pour "capturer la forme du Dirac", on suppose que

$$\exists \gamma > 0, \ \forall x \geqslant 0, \qquad \beta(x) = x^\gamma$$

et on effectue le changement de variables auto-similaire

$$n(t,x) = (1+t)^{2/\gamma} \, \tilde{n}\Big(\frac{1}{\gamma} \ln(1+t), (1+t)^{1/\gamma} x \Big) \tag{24}$$

qui revient à poser

$$\tilde{n}(t,x) := e^{-2t} n(e^{\gamma t} - 1, e^{-t} x).$$

La nouvelle inconnue $\tilde{n}$ vérifie

$$\forall t > 0, \qquad \int_0^\infty x \tilde{n}(t,x)\, dx = \int_0^\infty x n(e^{\gamma t} - 1, x)\, dx = \rho_0 \tag{25}$$

et satisfait l'équation dite de fragmentation auto-similaire

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{n}(t,x) + x\, \partial_x \tilde{n}(t,x) + 2\tilde{n}(t,x) + \gamma x^\gamma \tilde{n}(t,x) = 2\gamma \displaystyle\int_x^\infty y^{\gamma-1} \tilde{n}(t,y)\, dy, \qquad t,x>0, \\ \tilde{n}(0,x) = n^0(x), \qquad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{26}$$

Dans cette nouvelle équation il y a un terme de croissance à vitesse $v(x) = x$, et ce terme de croissance permet l'existence de solutions remarquables stationnaires. En particulier il existe une unique solution stationnaire de l'équation (26) positive et de taille totale unitaire, c'est-à-dire une unique fonction N telle que

$$x\, \partial_x N(x) + 2x^\gamma N(x) = 2\gamma \int_x^\infty y^{\gamma-1} N(y)\, dy, \quad N(x) > 0, \quad \int_0^\infty x N(x)\, dx = 1. \tag{27}$$

Cette solution est donnée par

$$N(x) = \frac{\gamma^{1-2/\gamma}}{\Gamma(2/\gamma)} \, e^{-\frac{x^\gamma}{\gamma}}$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler. C'est cette fonction N qui donne le "profil" de la masse de Dirac en $x = 0$. En effet si l'on parvient à montrer que toute solution $\tilde{n}$ de (26) converge vers $\rho_0 N$, alors on aura par (24) que $n(t,x)$ converge vers la solution auto-similaire $(t,x) \mapsto \rho_0(1+t)^{2/\gamma} N((1+t)^{1/\gamma}x)$ et donc que $xn(t,x)$ converge vers une masse de Dirac en $x = 0$. Montrer cette convergence de $\tilde{n}$ vers $\rho_0 N$ est l'objet du prochain paragraphe.

Remarque. *Les relations* (25) *et* (27) *assurent que* 0 *est valeur propre de l'équation* (26) *associée aux vecteurs propres direct* N *et adjoint* $\phi(x) = x$.

4.2 Convergence exponentielle

On montre la convergence exponentielle de $\tilde{n}$ vers N dans l'espace $L^2(x\,dx)$ des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec le poids $x \mapsto x$, qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v) = \int_0^\infty u(x)v(x)\,x\,dx.$$

Théorème. *Si* $\beta(x) = x^\gamma$ *avec* $\gamma \geqslant 2$, *alors toute solution de l'équation* (26) *satisfait*

$$\|\tilde{n}(t,\cdot) - \rho_0 N\|_{L^2(x\,dx)} \leqslant e^{-t}\,\|n^0 - \rho_0 N\|_{L^2(x\,dx)}. \tag{28}$$

Démonstration. On note

$$u(t,x) = \tilde{n}(t,x) - \rho_0 N(x) \quad \text{et} \quad M(t,x) = \int_0^x yu(t,y)\,dy.$$

De la propriété de conservation de la taille totale (25) et de la normalisation $\int_0^\infty xN(x)\,dx = 1$, on tire que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \lim_{x\to+\infty} M(t,x) = 0.$$

D'autre part u satisfait l'équation

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x\big(xu(t,x)\big) + u(t,x) + \gamma x^\gamma u(t,x) = \mathcal{L}u(t,x)$$

où

$$\mathcal{L}u(t,x) = 2\gamma \int_x^\infty y^{\gamma-1}u(t,y)\,dy,$$

et on a donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t,\cdot)\|^2 = (u(t,\cdot),\partial_t u(t,\cdot)) = -(u,\partial_x(xu)) - \|u\|^2 - \gamma(u,x^\gamma u) + (u,\mathcal{L}u).$$

Or on a

$$(u,\partial_x(xu))) = \int_0^\infty xu(t,x)\partial_x\big(xu(t,x)\big)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \partial_x\big((xu(t,x))^2\big)\,dx = 0,$$

$$(u,x^\gamma u) = \int_0^\infty x^{\gamma+1}u^2(t,x)\,dx \geqslant 0,$$

et en utilisant Fubini puis une intégration par partie

$$\begin{aligned}
(u,\mathcal{L}u) &= 2\gamma\int_0^\infty xu(t,x)\int_x^\infty y^{\gamma-1}u(t,y)\,dy\,dx \\
&= 2\gamma\int_0^\infty x^{\gamma-1}u(t,x)\int_0^x yu(t,y)\,dy\,dx \\
&= 2\gamma\int_0^\infty x^{\gamma-2}\partial_x M(t,x)M(t,x)\,dx \\
&= \gamma\int_0^\infty x^{\gamma-2}\partial_x\big(M^2(t,x)\big)\,dx \\
&= \gamma(\gamma-2)\int_0^\infty x^{\gamma-3}M^2(t,x)\,dx \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Finalement on obtient que

$$\frac{d}{dt}\|u(t,\cdot)\|^2 \leqslant -2\|u(t,\cdot)\|^2$$

puis grâce au lemme de Grönwall

$$\|u(t,\cdot)\|^2 \leqslant e^{-2t}\,\|u(0,\cdot)\|^2.$$

On en déduit (28) en prenant la racine carrée. □

Références

[1] François Golse. *Modèles cinétiques*. Cours de M2.

[2] Benoît Perthame. *Transport equations in biology*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[3] Pierre Gabriel and Francesco Salvarani. Exponential relaxation to self-similarity for the superquadratic fragmentation equation. *Appl. Math. Lett.*, 27 :74–78, 2014.