UNIVERSITE
DE NANTES

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE

MECANIQUE DES FLUIDES

fascicule n° 1 - tome 2

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS
ECOULEMENTS LAMINAIRES DES FLUIDES VISQUEUX
ELEMENTS D'HYDRAULIQUE INDUSTRIELLE

P. GUEVEL

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

CHAPITRE I

EQUATIONS GENERALES

I - DEFINITION ET CONSEQUENCES IMMEDIATES.

On appelle fluide parfait un fluide hypothétique totalement dépourvu de viscosité, c'est-à-dire pour lequel les deux coefficients de viscosité λ et η seraient nuls en tout point et à tout instant.

Dans ces conditions, les composantes du tenseur de pression sont :

$$N_1 = N_2 = N_3 = P\ (\rho, T)$$

et

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0$$

Il en résulte que le vecteur pression $\vec{p}$ en un point M, relatif à un élément de surface dont l'orientation est définie par une demi-normale $\vec{n}\ (\alpha, \beta, \gamma)$, a pour composantes :

$$\vec{p} \begin{cases} p_x = \alpha.\ P \\ p_y = \beta.\ P \\ P_z = \gamma.\ P \end{cases}$$

Dans un fluide parfait en mouvement, les pressions sont donc des pressions normales. En outre la mesure algébrique de $\vec{p}$ suivant l'axe $M\vec{n}$ s'identifie à la pression interne, ou pression d'état P.

II - EQUATION D'EULER.

L'équation de Navier établie à propos des fluides visqueux demeure valable dans le cas présent ; en y faisant $\lambda = o$ et $\eta = o$, on obtient l'équation générale du mouvement des fluides parfaits :

(1) $$\frac{1}{\rho}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ p = \vec{F} - \vec{\gamma}$$

Cette équation, jointe à l'équation de continuité :

(2) $$\text{div}\ \overrightarrow{\rho V} + \frac{\partial \rho}{\partial T} = 0$$

à l'équation d'état :

(3) $p = P(\rho, T)$

et à l'équation complémentaire, ou équation thermodynamique :

(4) $F(p, \rho, T)$

sont les équations indéfinies du mouvement reliant les quatre inconnues p V, ρ, T

III - CONDITIONS AUX LIMITES.

Il s'agit d'exprimer comment se comporte le fluide sur la frontière qui délimite l'écoulement ; celle-ci peut être une paroi fixe ou déformable ou encore la surface de séparation de deux milieux fluides différents.

1-) Cas d'une paroi fixe :

On admet que les particules glissent sans frottement le long de la paroi ; nous écrirons alors que le vecteur vitesse est tangent à la paroi, en tout point de celle-ci. Si $f(x,y,z) = 0$ est l'équation de la paroi, la condition de glissement est donc :

(5) $$u.\frac{\partial f}{\partial x} + v.\frac{\partial f}{\partial y} + w.\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

2-) Cas d'une paroi mobile ou déformable :

Soit $f(x,y,z,t)$, l'équation de cette paroi.

Rappelons tout d'abord une des conséquences de l'hypothèse de la continuité :

"Un fluide en mouvement est toujours limité par la même surface matérielle."

Cela revient à dire que si une particule est au contact de la paroi à l'instant t, elle sera encore au contact de celle-ci à tout autre instant, et en particulier à l'instant $t + dt$.

Il en résulte que si x, y, z vérifient l'équation $f(x,y,z,t)$ à l'instant t, $x + u.dt$, $y + v.dt$, $z + w.dt$ vérifient cette même équation à l'instant $t + dt$, de sorte que l'on peut écrire :

$$f(x + u.dt,\ y + v.dt,\ z + w.dt,\ t + dt) = 0$$

et par suite :

(6) $$u.\frac{\partial f}{\partial n} + v.\frac{\partial f}{\partial y} + w.\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

3-) Cas d'une surface séparant deux milieux fluides différents :

Soient $p(x, y, z, t)$ et $p'(x, y, z, t)$ les pressions à l'intérieur de chacun des fluides en présence. Sur la surface de séparation de ceux-ci, on a : $p = p'$ soit :

$$p(x, y, z, t) - p'(x, y, z, t) = 0 \tag{7}$$

En écrivant que cette équation, vérifiée à l'instant t par les coordonnées x, y, z d'un point matériel, est encore vérifiée à l'instant t + dt par les coordonnées x + u.dt, y + v.dt, z + w.dt de ce même point matériel, on obtient :

$$u.\frac{\partial(p-p')}{\partial x} + v.\frac{\partial(p-p')}{\partial y} + w.\frac{\partial(p-p')}{\partial z} + \frac{\partial(p-p')}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

Dans le cas particulier où le fluide est au contact de l'air atmosphérique, p' peut être considéré comme constant et égal à la pression atmosphérique. Dans ces conditions, on a, tout le long de la surface libre du fluide considéré :

$$u.\frac{\partial p}{\partial x} + v.\frac{\partial p}{\partial y} + w.\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

soit :

$$\vec{V}.\ \overrightarrow{\text{grad}}\ p + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{9'}$$

CHAPITRE II

CONSEQUENCES DE L'EQUATION D'EULER

I - THEOREME DE BERNOULLI.

Nous supposerons que le fluide parfait est en mouvement permanent dans le champ de la pesanteur ; nous admettrons en outre que ce fluide est isovolume. En tenant compte de ces hypothèses, et en explicitant l'accélération $\vec{\gamma}$, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\vec{\text{grad}}\,\frac{p}{\rho} = \vec{\text{grad}}(-gh) - (\text{rot}\,\vec{V}\wedge\vec{V}) - \frac{1}{2}\,.\,\vec{\text{grad}}\,V^2$$

soit :

$$\vec{\text{grad}}\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{V^2}{2}\right) = -(\text{rot}\,\vec{V}\wedge\vec{V})$$

Cette relation est valable en n'importe quel point M du fluide en mouvement ; mais, en général, on ne possède aucun renseignement sur le produit vectoriel rot $\vec{V}\wedge\vec{V}$. Dans le but d'éliminer celui-ci, nous multiplierons scalairement les deux membres de l'égalité précédente par le vecteur $\vec{MM'}$, M' étant un point infiniment voisin de M situé sur la même ligne de courant que celui-ci ; il vient ainsi :

$$(10) \qquad d\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{V^2}{2}\right) = 0$$

puisque le produit mixte (Rot $\vec{V}\wedge\vec{V}$). $\vec{MM'}$ est nul, les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{MM'}$ étant colinéaires (Fig. 1)

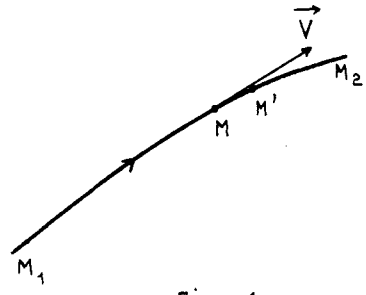


Fig : 1

En intégrant l'équation (10) le long d'une même ligne de courant entre deux points M_1 et M_2 , on obtient :

$$\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{V^2}{2}\right)_{M_2} = \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{V^2}{2}\right)_{M_1}$$

ou encore :

$$(11) \qquad \left(\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}\right)_{M_2} = \left(\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}\right)_{M_1}$$

Les différents termes qui interviennent dans cette égalité sont homogènes à des longueurs :

- la somme $\frac{p}{\varpi} + h = \frac{p^*}{\varpi}$

qu'il est possible de mesurer au moyen d'un tube piezométrique, s'appelle "la hauteur piezométrique".

- le terme $\frac{V^2}{2g}$ est appelé "la hauteur dûe à la vitesse".
- enfin, la somme $(\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g})$ s'appelle "la charge" au point considéré.

Le théorème de Bernoulli, qui traduit l'égalité (11), peut alors s'énoncer ainsi.

"Dans un fluide parfait isovolume, en mouvement permanent dans le champ de la pesanteur, la charge demeure constante tout le long d'une même ligne de courant."

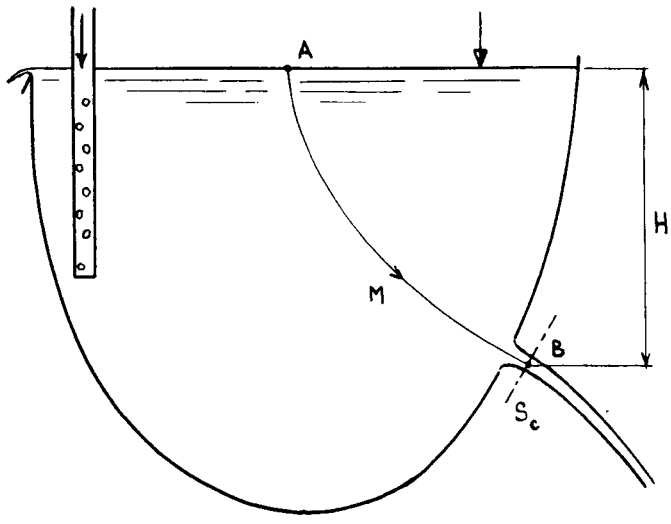
Remarque :

Dans le cas où Rot $\vec{V} = 0$ dans toute la masse fluide en mouvement, c'est-à-dire lorsqu'il existe un potentiel des vitesses, la relation (10) demeure valable même si le vecteur $\vec{MM'}$ n'est pas tangent à une ligne de courant ; d'où le théorème de Lagrange :

"La charge demeure constante en tout point d'un fluide parfait isovolume, en mouvement permanent et irrotationnel, dans le champ de la pesanteur.

III - FORMULE DE TORRICELLI.

Considérons un bassin de grandes dimensions contenant un liquide maintenu à un niveau constant.



Dans la paroi de ce bassin, on a percé un trou O de très petite section S. L'observation du filet liquide qui s'échappe par l'orifice O montre que sa section présente un minimum à une très faible distance de cet orifice ; soit S_c l'aire de cette section contractée. Etant données les faibles dimensions de S_c, on peut admettre que la pression à l'intérieur de la section contractée est uniforme, et égale à la

pression atmosphérique puisque son contour est en contact avec l'atmosphère.

D'autre part, l'expérience montre que si aucune perturbation ne vient troubler l'écoulement à l'intérieur du bassin, le liquide s'écoule à la manière d'un fluide parfait.

Ecrivons alors l'équation de Bernoulli entre deux points A et B situés sur une même ligne de courant AMB ; le point A étant pris dans la surface libre du liquide, le point B étant pris dans la section contractée ;

$$\left(\frac{P}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}\right)_A = \left(\frac{P}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}\right)_B$$

Cette égalité se réduit à :

$$h_A = h_B + \frac{V_B^2}{2g}$$

puisque d'une part P_A et P_B sont tous deux égaux à la pression atmosphérique, et que d'autre part V_A est pratiquement égal à zéro du fait des grandes dimensions du bassin.

Enfin, comme la section contractée est très près de l'orifice, on a sensiblement :

$$h_A - h_B = H$$

H désignant la hauteur de la surface libre au-dessus de l'axe de l'orifice O. On obtient alors la formule de Torricelli qui donne la vitesse en un point quelconque de la section contractée :

$$V = \sqrt{2g.H} \qquad (12)$$

Remarquons que cette vitesse est égale à celle d'un corps tombant en chute libre, sans vitesse initiale, d'une hauteur H .

En réalité la vitesse V est très légèrement inférieure à la valeur théorique donnée par la relation (12) ; on pose alors :

$$V = C_v \cdot \sqrt{2g\ H}$$

C_v étant un coefficient inférieur à l'unité appelé "coefficient de vitesse".

Le débit de l'orifice est :

$$Q = S_c.\ V = C_c.\ S.\ V$$

soit :

$$Q = C_c \cdot C_v \cdot S \cdot \sqrt{2g\,H}$$

$C_c = \frac{S_c}{S}$ étant un coefficient inférieur à l'unité appelé "coefficient de contraction, dont la valeur est très voisine de la valeur théorique $C_c = \frac{\pi}{\pi+2} = 0{,}611$.

On pose habituellement, pour les orifices et les ajustages :

$$Q = C_q \cdot S \cdot \sqrt{2g\,H}$$

C_q étant "le coefficient de débit".

Dans le cas présent on a très sensiblement :

$$C_q = C_c = 0{,}61$$

IV - EQUATION DE BERNOULLI GENERALISEE.

Nous nous proposons d'établir une équation analogue à l'équation de Bernoulli en formulant des hypothèses moins restrictives.

Nous considérerons un fluide parfait, pour lequel la masse volumique ρ ne dépend que de la pression, en mouvement non permanent dans un champ de force dérivant d'une fonction de potentiel U .

Dans ces conditions, l'équation d'Euler peut s'écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \int_{po}^{p} \frac{dp}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\, U - (\text{Rot}\, \vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{2}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, V^2 + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t})$$

soit, en posant $Q = \int_{po}^{p} \frac{dp}{\rho} - U + \frac{V^2}{2}$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\; Q = - (\text{Rot}\, \vec{V} \wedge \vec{V}) - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Multiplions scalairement les deux membres de cette égalité par le vecteur $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl}$, M et M' étant deux points infiniment voisins situés sur une même ligne de courant ; il vient :

$$(13) \qquad dQ + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$$

avec :

$$dQ = Q(M', t) - Q(M, t)$$

Q(M, t) désignant la valeur prise par la fonction Q au point M et à l'instant t ; Q(M', t) désignant la valeur prise par la fonction Q au point M' et au même instant t.

En intégrant l'équation (13) le long d'une ligne de courant dessinée dans le fluide à l'instant t, on obtient la relation cherchée :

$$(14) \qquad \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} - (U_2 - U_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + \int_{\widehat{M_1M_2}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = 0$$

Cette relation se réduit évidemment à la relation de Bernoulli classique lorsque $\rho = c^{te}$, $U = -gh$ et $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$.

Applications : Oscillations d'un fluide parfait isovolume contenu dans un tube en U à branches verticales, de section constante s, très petite - Fig 3 -

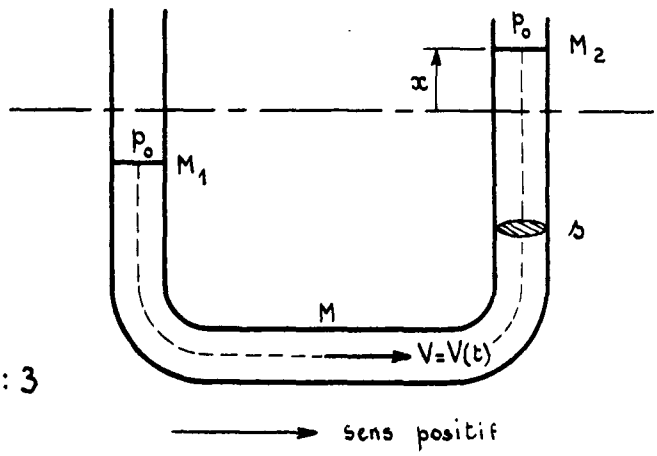


Fig : 3

Soit $H_o + x$ la cote atteinte par le liquide dans la branche de droite du tube en U à l'instant t ; à ce même instant, la cote atteinte dans la branche de gauche est $H_o - x$, puisque le fluide est supposé isovolume.

Si l'on admet encore que le champ de force se réduit au champ de la pesanteur, on a, d'après la relation (14) :

$$g \cdot \left[(H_o + x) - (H_o + x) \right] + \int_{\widehat{M_1M_2}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = 0$$

soit puisque V n'est fonction que de t , du fait que l'on a supposé s très petit :

$$2gx + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \int_{\widehat{M_1M_2}} \vec{dl} = 0$$

et :

$$2gx + L. \frac{dV}{dt} = 0$$

L désignant la longueur $\widehat{M_1M\,M_2}$ de la colonne liquide.

Enfin, comme $V = \frac{dx}{dt}$, l'équation du mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{L} \cdot x = 0$$

On reconnait là l'équation différentielle d'un mouvement sinusoïdal de période :

$$T = 2\,\Pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

V - EQUATION DE BARRE DE SAINT-VENANT.

On considère l'écoulement isentropique d'un gaz parfait ; dans ce cas, la masse volumique ρ est directement liée à la pression par la relation :

$$p \cdot \rho^{-\gamma} = c^{te} \quad ; \qquad (\gamma = \frac{C}{c})$$

de laquelle on tire :

$$\rho = K \cdot p^{\frac{1}{\gamma}} \tag{15}$$

Dans ces conditions,on a :

$$\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{K} \cdot \int_{p_o}^{p} p^{-\frac{1}{\gamma}} \cdot dp = \frac{1}{K} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot p^{(1-\frac{1}{\gamma})} + c^{te}$$

soit en remplaçant K par sa valeur tirée de (15) :

$$\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{\rho} + c^{te}$$

L'équation générale (14), appliquée à l'écoulement isentropique d'un gaz parfait, s'écrit donc :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) - (U_2 - U_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + \int_{\widehat{M_1M_2}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = 0$$

Dans le cas d'un mouvement permanent s'effectuant dans le champ de la pesanteur, on a plus simplement :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + g \cdot (h_2 - h_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = 0$$

Enfin, comme la masse volumique des gaz est très faible, le terme $g(h_2-h_1)$ est généralement négligeable devant le terme $\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right)$; d'où l'équation de Barré de Saint-Venant qui suppose négligeables les forces de pesanteur :

$$(16) \qquad \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{V_2^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}$$

VI - THEOREME DE BERNOULLI EXPRIME DANS UN SYSTEME D'AXES TOURNANT A LA VITESSE ANGULAIRE CONSTANTE ω AUTOUR D'UN AXE FIXE (Δ).

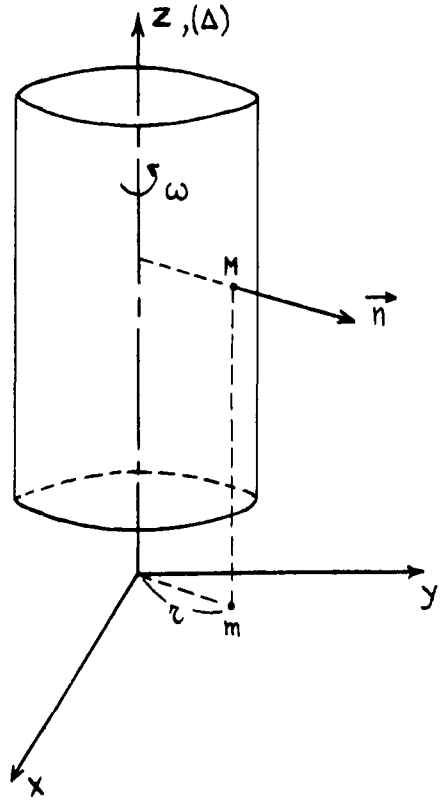
Nous pourrons appliquer les lois habituelles de la mécanique, exprimées dans un repère fixe, à condition d'ajouter aux forces réellement appliquées au fluide, les forces d'inertie d'entraînement et les forces de Coriolis.

La force d'inertie appliquée à une masse dm a pour expression :

$$\vec{f}_i = \omega^2 . r . \vec{n} . dm$$

r désignant la distance d'un point M de la masse dm à l'axe de rotation (Δ) ;

$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire porté par la demi-normale extérieure au cylindre circulaire d'axe (Δ) et de rayon r .



Par unité de masse, la force d'inertie, ou force centrifuge, peut donc s'écrire :

$$\vec{F}_i = \omega^2 . r . \vec{n} = \vec{\text{grad}}\,\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

ou encore :

$$\vec{F}_i = \vec{\text{grad}}\,\frac{U^2}{2}$$

U désignant la vitesse d'entraînement au point M .

Quant à la force de Coriolis qui sollicite la masse dm , elle a pour expression :

$$\vec{f}_c = -(2\,\vec{\omega}\wedge\vec{W}).\,dm$$

$\vec{W}$ désignant la vitesse relative au point M .

Par unité de masse, la force de Coriolis est donc :

$$\vec{F}_c = -2\,\vec{\omega} \wedge \vec{W}$$

L'équation d'Euler, écrite dans un système d'axes O X Y Z tournant à la vitesse angulaire constante ω , a alors pour expression :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, p = \vec{F} + \vec{F}_i + \vec{F}_c - \vec{\gamma}_r$$

$\vec{\gamma}_r$ désignant l'accélération relative.

En explicitant chaque terme de cette égalité, et en nous limitant au cas d'un mouvement permanent, isotherme ou isentropique, s'effectuant dans le champ de la pesanteur, il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(-gh) + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{U^2}{2} - 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{W}$$
$$-(\text{Rot}\,\vec{W} \wedge \vec{W} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{W^2}{2})$$

En multipliant scalairement les deux membres de cette égalité par un vecteur $\overrightarrow{MM'}$ parallèle au vecteur vitesse relative $\vec{W}$, on obtient :

$$d\left[\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2}\right] = 0$$

et par suite, après intégration <u>le long d'une même ligne de courant relative</u> :

$$(17) \qquad \left[\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2}\right]_{M_2} = \left[\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2}\right]_{M_1}$$

Dans le cas d'un fluide isovolume, on a simplement :

$$(18) \qquad \left(\frac{p^*}{\varpi} + \frac{W^2}{2g} - \frac{U^2}{2g}\right)_{M_2} = \left(\frac{p^*}{\varpi} + \frac{W^2}{2g} - \frac{U^2}{2g}\right)_{M_1}$$

<u>Remarque</u> :

En faisant $W = 0$ dans l'équation ci-dessus, on retrouve bien la relation :

$$(18') \qquad \left(\frac{p^*}{\varpi} - \frac{U^2}{2g}\right)_{M_2} = \left(\frac{p^*}{\varpi} - \frac{U^2}{2g}\right)_{M_1}$$

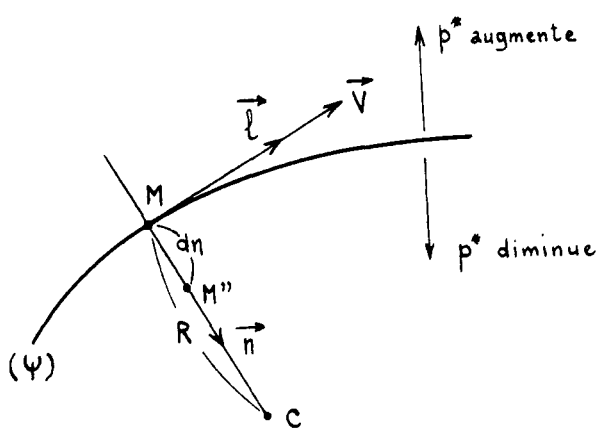
que nous avons établie à propos de l'équilibre pseudo statique d'un liquide contenu dans un récipient tournant à la vitesse constante ω . Remarquons que dans le cas présent où $W = 0$, la relation (18') demeure valable quels que soient les points considérés M_1 et M_2 .

VII - VARIATION DE LA PRESSION SUIVANT LA DIRECTION DE LA NORMALE PRINCIPALE A UNE LIGNE DE COURANT.

Ici encore, nous ferons appel à l'équation d'Euler, mais nous exprimerons l'accélération au moyen de la relation :

$$(19) \qquad \vec{\gamma} = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\ell} + \frac{V^2}{R} \cdot \vec{n}$$

$\vec{\ell}$ désignant le vecteur unitaire de la tangente en M à la ligne de courant ψ , $\vec{n}$ désignant le vecteur unitaire de la normale principale en M à cette ligne ψ . Ces deux vecteurs sont situés dans le plan ausculateur, en M , à ψ ; le premier est orienté comme $\vec{V}$, le second est orienté dans $\vec{MC}$, C désignant le centre de courbure de la ligne ψ .



Dans le cas d'un fluide parfait en mouvement isotherme, ou isentropique, dans le champ de la pesanteur, on a :

$$\vec{\text{grad}} \int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho} = - gh - \left(\frac{dV}{dt} \cdot \vec{\ell} + \frac{V^2}{R} \cdot \vec{n}\right)$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par un vecteur $\overrightarrow{MM''} = dn \cdot \vec{n}$ porté par la normale principale en M à la ligne de courant ; il vient :

$$(20) \qquad d\left[\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho} + g.h\right] = - \frac{V^2}{R} \cdot dn$$

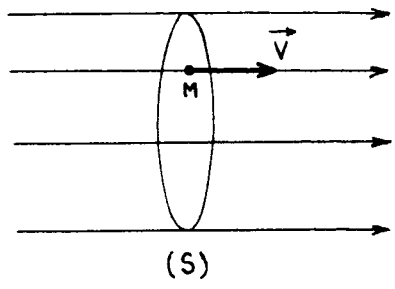
Remarquons que cette relation demeure valable que le mouvement soit permanent ou non.

Dans le cas d'un fluide isovolume, on a simplement :

$$(21) \qquad d\left(\frac{p^*}{\varpi}\right) = - \frac{2}{R} \cdot \frac{V^2}{2g} \cdot dn$$

On vérifie bien, comme cela était d'ailleurs intuitif que la pression étoilée croit lorsqu'on se déplace dans une direction opposée au centre de courbure C .

Application importante : Cas où les lignes de courant peuvent être considérées comme rectilignes et parallèles entre elles au voisinage d'une section droite (S).



Les lignes de courant étant des droites par hypothèse, $\frac{1}{R}$ est identiquement nul ; d'après la relation (21), on a donc :

$$d\left(\frac{p^*}{\varpi}\right) = 0$$

et par suite, pour tous les points situés dans la même section droite (S) :

$$p^* = c^{te}$$

"La loi de répartition des pressions dans la section droite (S) est identique à la loi de répartition des pressions hydrostatiques".

VIII - TRAVAIL ELEMENTAIRE DES FORCES DE LIAISON EXERCEES PAR LE FLUIDE AMBIANT SUR LE FLUIDE (τ) CONTENU A L'INTERIEUR D'UNE SURFACE FERMEE (S) .

Ce travail, durant le temps dt, a pour expression :

$$d\mathcal{C}_\ell = - dt. \iint_S p.\vec{v}.\vec{n}.\, dS = - dt . \iiint_\tau \operatorname{div} p\, \vec{V}.\, d\tau$$

$$= - dt. \iiint_\tau \left[p.\operatorname{div} \vec{V} + \vec{V}.\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p\right]. d\tau$$

$$= - \iiint_\tau \left[p.\, \theta\ .\ dt + \left(dp - \frac{\partial p}{\partial t}\ .\ dt\right)\right] . d\tau$$

θ désignant la vitesse de dilatation cubique ;

$dp = (\vec{V}.\ dt).\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p + \frac{\partial p}{\partial t}\ .\ dt$ étant l'accroissement, durant le temps dt, de la pression d'une particule contenue dans (τ).

On a donc encore :

$$d\mathcal{C}_\ell = - \iiint_\tau \left[\ p.\ d(d\tau) + dp.\ \ d\tau\right] + \iiint_\tau \frac{\partial p}{\partial t}\ .\ dt\ .\ d\tau$$

$d(d\tau)$ désignant l'accroissement, durant le temps dt, du volume de la particule considérée.

D'où, en définitive, l'expression du travail des forces de liaison, dans le cas d'un fluide parfait :

$$(22) \qquad d\mathcal{C}_\ell = - \iiint_\tau d(p.d\tau) + dt.\iiint_\tau \frac{\partial p}{\partial t} . d\tau$$

$$= - \iiint_\tau d(\frac{P}{\rho}). dm + dt.\iiint_\tau \frac{\partial p}{\partial t} . d\tau$$

dm désignant la masse d'une particule contenue dans (τ).

Si maintenant, la surface (S) délimite un volume infiniment petit $d\tau$, on a :

$$(23) \qquad d^4\mathcal{C}_\ell = - d(\frac{P}{\rho}). dm + dt.\frac{\partial p}{\partial t} . d\tau$$

Si en outre l'écoulement est permanent, il reste :

$$(23') \qquad d^4\mathcal{C}_\ell = - d(\frac{P}{\rho}). dm$$

Dans ce cas, le travail des forces de liaisons ne dépend que de l'état initial et de l'état final ; pour un déplacement fini, amenant la particule de l'état (1) à l'état (2),on a donc :

$$(24) \qquad d^3\mathcal{C}_\ell = - (\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}). dm$$

IX - TRAVAIL DES FORCES INTERIEURES.

D'après la formule générale (58) établie à propos des fluides visqueux (C_g. 1ère partie, chapitre IV) on a dans le cas présent :

$$d\mathcal{C}_i = dt. \iiint_\tau \left[p. \Sigma \varepsilon_i \right] .d\tau = \iiint_\tau p. \theta . dt. d\tau$$

soit :

$$d\mathcal{C}_i = \iiint_\tau p. d(d\tau)$$

Dans le cas d'un fluide isovolume, ce travail est nul que le mouvement soit permanent ou non.

CHAPITRE II

ETUDE PARTICULIERE DES FLUIDES ISOVOLUMES EN MOUVEMENTS PERMANENTS

I - INTERPRETATION PHYSIQUE DE L'EQUATION DE BERNOULLI.

Considérons un fluide parfait isovolume en mouvement permanent dans le champ de la pesanteur et soit dm la masse d'une particule entourant un point M_1 à l'instant t_1 ; à l'instant t_2 , cette particule se trouvera, sur sa trajectoire en un point M_2 . En multipliant les deux membres de l'équation de Bernoulli par g. dm , le poids de la particule considérée , puis en groupant les termes de même nature, on obtient :

$$(26) \qquad \frac{1}{2}\, dm(V_2^2 - V_1^2) = - dm.\, g(h_2 - h_1) - dm\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right).$$

Le premier membre de cette égalité représente l'accroissement d'énergie cinétique de la particule entre les instants t_1 et t_2 ; dans le second membre nous reconnaissons le travail des forces de pesanteur appliquées à cette particule et le travail des forces de liaison exercées sur celle-ci par le fluide ambiant.

Sous sa forme (26), l'équation de Bernoulli exprime donc que l'accroissement d'énergie cinétique de la particule de masse dm est égal à la somme des travaux des forces extérieures qui lui sont appliquées ; il en résulte que le travail des forces intérieures est bien nul ainsi que nous l'avons démontré directement.

Par ailleurs, d'après le premier principe de la thermodynamique, la variation d'énergie interne de la particule ne peut provenir que d'un éventuel apport de chaleur.

II - ENERGIE TECHNIQUE D'UNE PARTICULE.

Par définition, l'énergie technique d'une particule fluide isovolume, de masse dm , est la quantité :

$$(27) \qquad \left(\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g} \right).\, g.\, dm$$

C'est la somme de son énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}.\ dm.\ V^2$$

de son énergie de position dans le champ de la pesanteur :

$$dm.\ g.\ h$$

et du terme :

$$\frac{p}{\rho}\ .\ dm$$

que l'on appelle parfois, à tort, "énergie de pression".

Ramenée à l'unité de poids, l'énergie technique d'une particule est simplement égale à la charge :

$$H = (\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V}{2g})$$

au point M sur lequel est centrée cette particule.

III - DEBIT D'ENERGIE TECHNIQUE A TRAVERS UNE SURFACE ORIENTEE (S).

Nous nous proposons d'évaluer l'énergie technique qui traverse, durant le temps dt, une surface orientée S ; on a :

$$d\ E_T = dt\ .\ \varpi.\ \iint_S (\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}).\ \vec{V}.\ \vec{n}.\ dS$$

ce que l'on écrit :

(28) $$d\ E_T = W_T\ .\ dt$$

en posant :

(29) $$W_T = \varpi.\iint_S (\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}).\ \vec{V}\ .\ \vec{n}.\ dS$$

W_T est appelé "débit d'énergie technique à travers la surface (S) à l'instant t".

Enfin, on définit la charge H dans la section (S) comme le quotient de l'énergie technique qui traverse (S) par le poids du fluide auquel est attachée cette énergie technique ; son expression est donc, à l'instant t :

$$H = \frac{d\ E_T}{\varpi.Q.dt}\ ,$$

soit :

(30) $$H = \frac{1}{Q}\ .\iint_S (\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}).(\vec{V}.\ \vec{n}).\ dS$$

IV - PROPRIETE FONDAMENTALE DU DEBIT D'ENERGIE TECHNIQUE.

Supposons maintenant que la surface (S) est une surface fermée et soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire de sa normale extérieure ; d'après la formule d'Ostrogradski, on a :

$$W_T = \varpi \cdot \iiint_\tau \operatorname{div} \left[\left(\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}\right) . \vec{V} \right] . d\tau$$

$$= \varpi \cdot \iiint_\tau \left[\left(\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V}{2g}\right) . \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}\right) \right] . d\tau$$

soit :

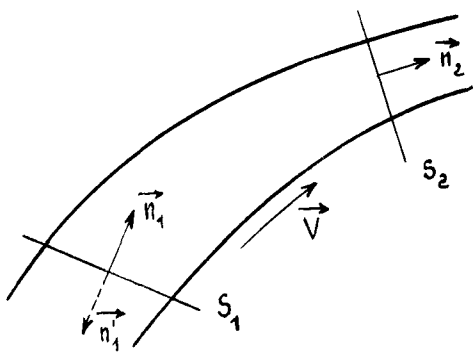
$$W_T = 0$$

puisque l'on a div $\vec{V} = 0$, le fluide étant isovolume, et $\vec{V} . \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{p}{\varpi}+h+\frac{V^2}{2g}\right) = 0$, d'après l'équation de Bernoulli.

D'où le théorème :

"Le débit d'énergie technique à travers une surface fermée quelconque est nul dans le cas d'un fluide parfait isovolume en mouvement permanent."

Nous allons appliquer ce résultat au cas où la surface fermée (S) est constituée par un tube de courant limité par deux sections (S_1) et (S_2). Soient $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les vecteurs unitaires portés par les demi-normales à (S_1) et (S_2), celles-ci étant orientées dans le sens de l'écoulement. D'après le théorème précédent, on a :



$$W_{T'_1} + W_{T_2} = 0$$

$W_{T'_1}$ étant évalué en orientant la surface S_1 par la demi normale $\vec{n}'_1 = -\vec{n}_1$

Il en résulte, puisque $W_{T'_1} = W_{T_1}$:

$$W_{T_2} = W_{T_1} \qquad (31)$$

Le débit d'énergie technique est donc conservatif le long d'un même tube de courant.

L'égalité des débits d'énergie technique dans les sections (S_1) et (S_2) entraîne l'égalité des charges H_1 et H_2 dans ces sections

puisque c'est le même débit Q qui traverse (S_1) et (S_2).

V - EXPRESSION PARTICULIERE DE LA CHARGE DANS UNE SECTION PLANE (S) NORMALE AUX LIGNES DE COURANT LORSQUE CELLES-CI SONT RECTILIGNES ET PARALLELES ENTRE ELLES.

A condition d'orienter la surface (S) de telle sorte que sa demi normale $\vec{n}$ ait même direction que le vecteur vitesse, on a :

$$\vec{V}.\ \vec{n} = V$$

et par suite :

$$W_T = \varpi.\ \iint_S \left(\frac{p}{\varpi} + h + \frac{V^2}{2g}\right) .\ V\ .\ dS$$

Comme la hauteur piezométrique $\left(\frac{p}{\varpi} + h\right)$ conserve la même valeur en chacun des points de la section droite (S) , on peut encore écrire :

$$W_T = \varpi.\ Q\ .\ \left(\frac{p}{\varpi} + h\right) + \frac{\varpi}{2g} \cdot \iint_S V^3\ dS$$

Q désignant le débit volumique à travers (S).
La charge dans cette section (S) est donc :

$$H = \frac{p}{\varpi} + h + \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \iint_S V^3.\ dS$$

En introduisant dans cette égalité "la vitesse moyenne" $U = \frac{Q}{S}$, appelée encore "vitesse de débit", il vient :

$$H = \frac{p}{\varpi} + h + \frac{U}{2g} \cdot \frac{\iint_S V^3.dS}{U^3.S}$$

soit :

$$(31) \qquad H = \frac{p}{\varpi} + h + \alpha.\ \frac{U^2}{2g}$$

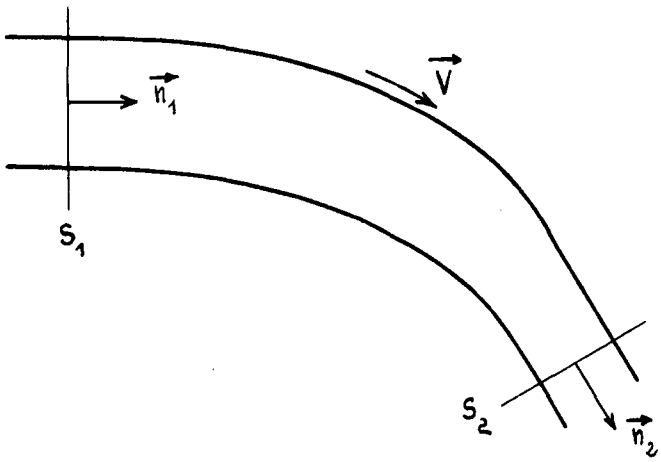
en posant :

$$(32) \qquad \alpha = \frac{\iint_S V^3.\ dS}{U^3.\ S}$$

α étant un nombre sans dimension que l'on appelle "coefficient cinétique". Dans le cas où la vitesse peut être considérée comme constante en tout point de (S), on a : $\alpha = 1$; le coefficient cinétique rend donc compte de la loi de distribution des vitesses dans (S). Pour déterminer sa valeur dans le

VI - GENERALISATION DE L'EQUATION DE BERNOULLI AU CAS D'UN TUBE DE COURANT.

Supposons qu'à l'intérieur d'un fluide parfait isovolume en mouvement permanent dans le champ de la pesanteur, il soit possible de trouver deux domaines (τ_1), (τ_2) dans lesquels les trajectoires sont rectilignes et parallèles entre elles. Soit alors un tube de courant limité par deux sections droites (S_1), (S_2) disposées respectivement dans les régions (τ_1) et (τ_2).



Le débit d'énergie technique étant conservatif le long d'un tube de courant quelconque, on a :

$$H_2 = H_1,$$

soit :

$$(33) \quad \left(\frac{p}{\varpi} + h\right) + \alpha_2 . \frac{U_2^2}{2g} = \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_1 + \alpha_1 . \frac{U_1^2}{2g}$$

CHAPITRE III

APPLICATIONS DU THEOREME DE BERNOULLI

I - PRINCIPE DE LA MESURE DU DEBIT D'UNE CONDUITE PAR UN DISPOSITIF DEPRIMOGENE.

Considérons deux tronçons de conduites uniformes, identiques et coaxiales (T_1), (T_2), raccordées par une singularité provoquant une diminution de la section de la veine fluide. Dans la section contractée, la vitesse est maximum ; il en résulte que la hauteur piezométrique est minimum. Dès lors, on conçoit qu'il est possible de relier le débit Q, qui traverse le système, à la différence des hauteurs piezométriques $\Delta h^* = (\frac{p}{\varpi} + h)_1 - (\frac{p}{\varpi} + h)_c$ mesurées respectivement dans une section (S_1), à l'amont de la singularité, et dans la section contractée (S_c).

Nous allons décrire les trois dispositifs d'étranglement qui ont été normalisés.

A - Ajutage de Venturi.

Cet appareil se compose d'un convergent (c), suivi d'un divergent très progressif (D) - Fig 7 -

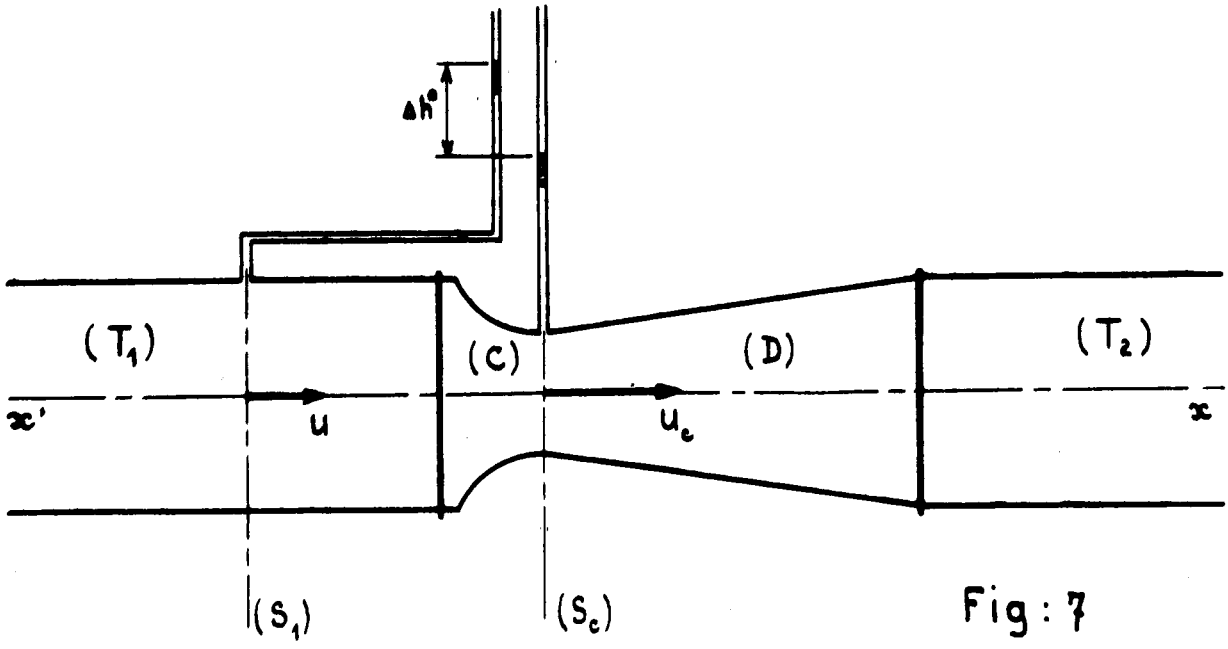


Fig : 7

Lorsque l'ajutage convergent est convenablement profilé, les filets liquides qui traversent la section contractée (S_c) - appelée "col du Venturi" - sont sensiblement parallèles à l'axe x'x du système. Soit (S_1) une section droite de la conduite (T_1), d'aire S, disposée à l'amont de l'ajutage, suffisamment loin de celui-ci, pour que l'on puisse considérer que l'écoulement est encore parallèle à x'x.

L'équation de Bernoulli, écrite entre les sections (S_1) et S_c) fournit la relation suivante :

$$\Delta h^* = \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_{S_1} - \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_{S_c} = \alpha_c . \frac{U_c^2}{2g} - \alpha_1 . \frac{U_1^2}{2g}$$

que l'on peut encore mettre sous la forme :

$$(34) \qquad \Delta h^* = \left(\frac{\alpha_c - \alpha_1 . C_c^2}{2g . S_c^2}\right) . Q^2$$

en posant :

$$C_c = \frac{S_c}{S}$$

L'expérience montre qu'un convergent à toujours pour effet d'uniformiser les vitesses ; aussi le coefficient cinétique α_c est-il très voisin de l'unité. Il n'en est pas de même du coefficient cinétique α_1 qui, dans le cas d'une conduite industrielle, est de l'ordre de 1,06 ; seulement comme dans la relation (34) α_1 est multiplié par C_c^2 toujours inférieur à 1, on ne commettra pas une grosse erreur en posant aussi $\alpha_1 = 1$; d'où la formule approchée qui permet la détermination de Q en fonction de Δh^* :

$$(35) \qquad Q = \sqrt{\frac{2g\ S_c^2}{1 - C_c^2}} . \Delta h^*$$

B - <u>Tuyère profilée</u>.

Ce dispositif est analogue au précédent, mais il ne comporte pas de divergent - Fig 8 -

La tuyère est profilée de manière à mouler le mieux possible la veine fluide jusqu'à la section contractée (S_c). A l'aval de cette section le jet est entouré d'une zone annulaire "de fluide mort" (τ), que l'on

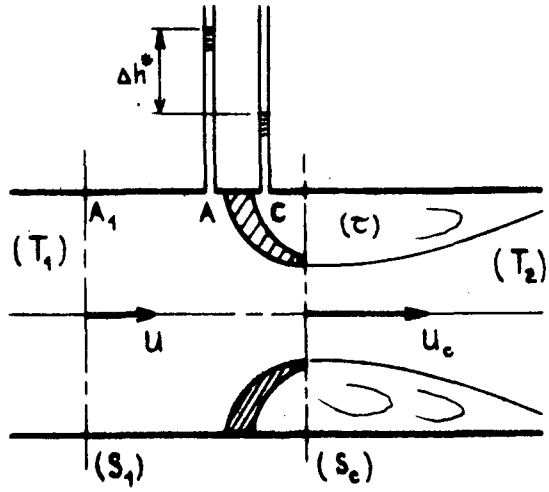


Fig : 8

assimile à un fluide au repos.

Les prises de pressions A et C, pratiquées immédiatement à l'amont et à l'aval de la tuyère, se trouvent toutes deux dans des régions où le fluide est pratiquement au repos ; les mesures seront donc particulièrement précises.

La loi de répartition des pressions étant la même qu'en hydrostatique dans la section S_c et dans la région (τ), la prise de pression C mesure bien $(\frac{P}{\varpi} + h)_c$.

Ecrivons l'équation de Bernoulli entre le point d'arrêt A et le point M de S_c, tous deux situés sur la même ligne de courant qui constitue la méridienne de la tuyère :

$$(36) \qquad (\frac{P}{\varpi} + h)_A = (\frac{P}{\varpi} + h)_{S_c} + \frac{U_M^2}{2g}$$

En admettant que la vitesse est pratiquement uniforme dans S_c, on a :

$U_M \# \frac{Q}{S_c}$ et, par suite :

$$(37) \qquad \Delta h^* = (\frac{P}{\varpi} + h)_A - (\frac{P}{\varpi} + h)_{S_c} + \frac{Q^2}{2gS_c^2}$$

D'où l'on tire :

$$Q \# \sqrt{2gS_c^2} \cdot \sqrt{\Delta h^*}$$

C - <u>Diaphragme à mince paroi</u>

Il est constitué d'une plaque plane percée en son centre d'un orifice circulaire de section s. On l'interpose dans une section droite de la conduite - Fig. 9 -

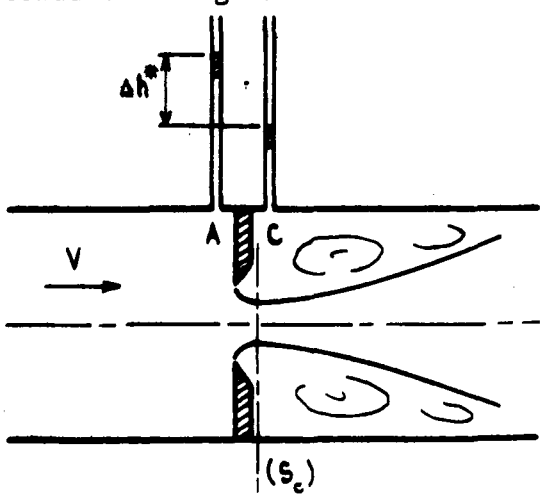


Fig : 9

Un raisonnement identique au précédent, permettrait d'établir la relation :

$$\Delta h^* = \frac{1}{2g\,S_c^2} \cdot Q^2 ,$$

analogue à la relation (38), mais dans laquelle S_c, la section du jet, est inconnu à priori.

Le coefficient de contraction : $C_c = \frac{S_c}{s}$

dépend essentiellement du rapport $\frac{s}{S}$. La théorie des jets permet d'évaluer son ordre de grandeur ; des tables, établies à la suite de nombreuses mesures, en donnent une valeur plus précise.

Remarques :

1 - Les formules que l'on vient d'établir, fondées sur de nombreuses hypothèses, ne peuvent être utilisées directement pour effectuer des mesures précises ; les corrections à apporter à ces formules sont données par des abaques établis pour chacun des trois dispositifs déprimogènes normalisés.

2 - L'ajutage de Venturi est évidemment plus encombrant que la tuyère profilée ou le diaphragme à mince paroi. Par contre, il présente sur ces derniers l'avantage de ne donner lieu qu'à une très faible déperdition d'énergie.

II - MESURE DE LA VITESSE AU MOYEN D'UN TUBE DE PITOT

A - Description : Cet appareil est essentiellement constitué de deux tubes cylindriques T_1, T_2, coudés à angle droit, que l'on immerge dans un fluide de telle sorte que l'un de leur axe commun (Δ) soit dirigé parallèlement à la direction de l'écoulement (Fig. 10-a).

Le tube intérieur T_1, ouvert à son extrémité amont A, est réuni à un tube piezométrique (π_1). Le tube extérieur T_2, fermé à son extrémité amont, est mis en communication avec le fluide par une série de petits trous, tels que B, pratiqués dans une section droite de ce tube. Le fluide compris dans l'espace annulaire qui sépare les deux tubes est relié à un deuxième tube piezométrique (π_2) (Fig. 10-b).

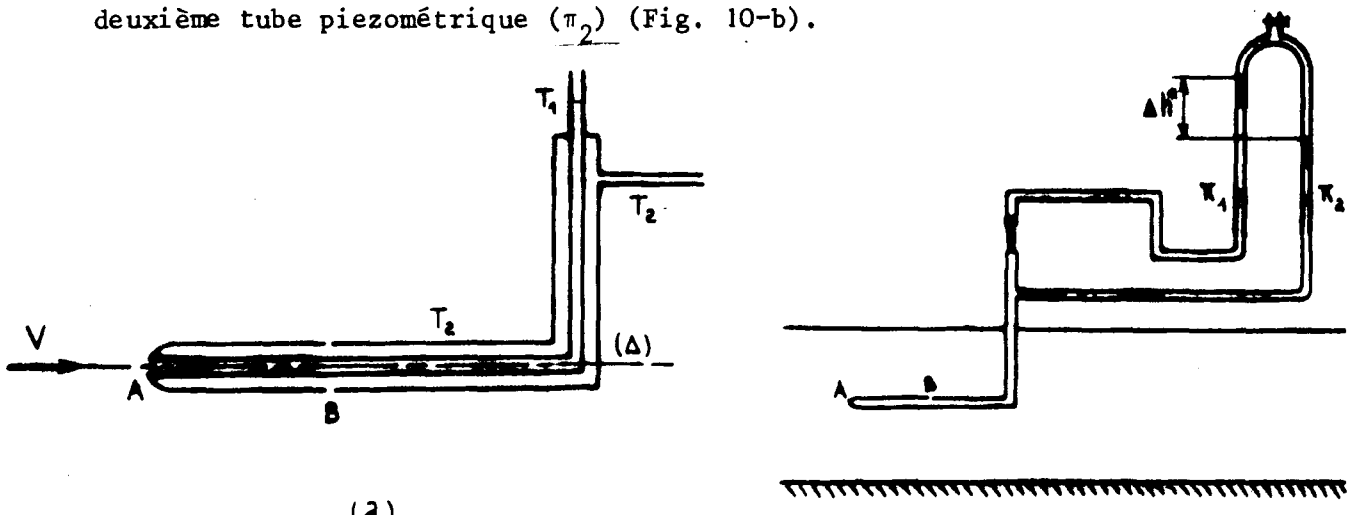


Fig : 10

B - Théorie du tube de Pitot dans le cas d'un fluide parfait :

L'équation de Bernoulli - écrite entre les points A et B, le long d'une ligne de courant dessinée sur la paroi du tube extérieur T_2 - fournit la relation suivante :

$$\left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_A + \frac{V_A^2}{2g} = \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_B + \frac{V_B^2}{2g}$$

soit :

$$\left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_A - \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_B = \frac{V_B^2}{2g}$$

puisque le point A est évidemment un point d'arrêt. Si le tube est correctement profilé à l'amont et si les dimensions de celui-ci sont faibles vis-à-vis des dimensions de la veine fluide, on peut admettre que la vitesse V_B est sensiblement égale à la vitesse d'approche V du fluide. Dans ces conditions il vient simplement :

$$\frac{V^2}{2g} = \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_A - \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_B$$

et :

$$V = \sqrt{2g.\Delta h^*} \qquad (36)$$

$\Delta h^* = \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_A - \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_B$, la différence des hauteurs piezométriques entre les points A et B, étant mesurée directement par la différence des cotes atteintes par le liquide dans les tubes piezométriques (π_1) et (π_2).

Le défaut du tube de Pitot réside dans le fait que sa graduation est parabolique, comme celle du Venturi, d'ailleurs. Ainsi, pour une vitesse $V = 1$ m/s, on obtient seulement une dénivellation $\Delta h^* = 5$ cm.
Les mesures industrielles ne pourront alors être effectuées avec une précision satisfaisante au moyen d'un tube de Pitot que si les vitesses sont au moins égales à 1 m/s. Par contre, en laboratoire, il est possible de mesurer des vitesses beaucoup plus faibles en utilisant, par exemple, un manomètre différentiel à deux liquides.

C - Théorie du tube de Pitot dans le cas d'un fluide réel :

L'expérience montre que la relation (36) fournit encore des résultats très corrects lorsqu'on utilise le tube de Pitot pour mesurer la vitesse

dans des fluides peu visqueux, l'eau par exemple. Pour justifier ce résultat, nous ne pouvons plus appliquer le théorème de Bernoulli le long de la ligne AB puisque, avec un fluide réel, on a tout le long de celle-ci $V \equiv 0$.

Nous aurons alors recours à l'artifice suivant :

Soient (S_1), (S_2) deux sections droites normales au courant liquide ; (S_1) est disposée à l'amont du tube dans une région où l'écoulement n'est pas encore perturbé par la présence de celui-ci ; (S_2) contient les petits trous latéraux B. (Fig 11).

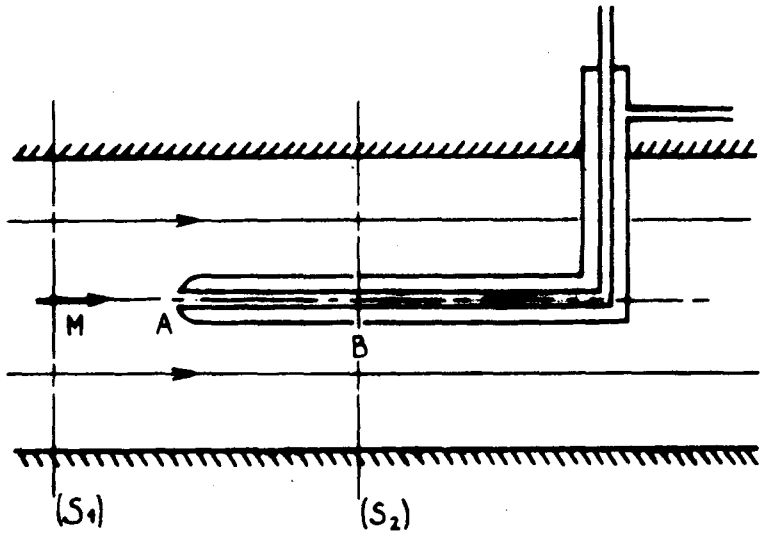


Fig : 11

En supposant que dans la section (S_2), les filets liquides sont redevenus rectilignes et parallèles entre eux, nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_{S_1} + \alpha_1 \cdot \frac{U_1^2}{2g} = \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_{S_2} + \alpha_2 \cdot \frac{U_2^2}{2g} + \Delta H_{\widehat{S_1 S_2}}$$

La section du tube de Pitot étant par hypothèse très faible vis-à-vis de la section de la conduite dans laquelle il est disposé, on a sensiblement :

$$\left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_{S_1} \# \left(\frac{p}{\varpi} + h\right)_{S_2}$$

et en particulier :

$$(40) \qquad \left(\frac{P}{\varpi} + h\right)_M \# \left(\frac{P}{\varpi} + h\right)_B$$

M étant le point de la section (S_1) qui se trouve sur la ligne de courant qui aboutit au point d'arrêt A.

Par ailleurs, on a, d'après l'équation de Bernoulli, valable le long d'une ligne de courant :

$$(41) \qquad \left(\frac{P}{\varpi} + h\right)_M + \frac{V_M^2}{2g} \# \left(\frac{P}{\varpi} + h\right)_A$$

En éliminant $\left(\frac{P}{\varpi} + h\right)_M$ entre les équations (40) et (41), on obtient alors :

$$\left(\frac{P}{\varpi} + h\right)_A - \left(\frac{P}{\varpi} + h\right)_B \# \frac{V_M^2}{2g}$$

et

$$V_M \# \sqrt{2g.\Delta h^*}$$

Comme V_M est pratiquement égal à la vitesse V, au point M, en l'absence du tube de Pitot, on retrouve bien la relation :

$$(39) \qquad V = \sqrt{2g.\Delta h^*}$$

Pour tenir compte des approximations faites au cours du calcul, on pose habituellement :

$$(42) \qquad V = k\sqrt{2g.\Delta h^*}$$

k étant un coefficient que l'on détermine par un étalonnage préalable. Pour un tube de Pitot, exécuté conformément au schèma de la figure (12), on a pratiquement k = 1 .

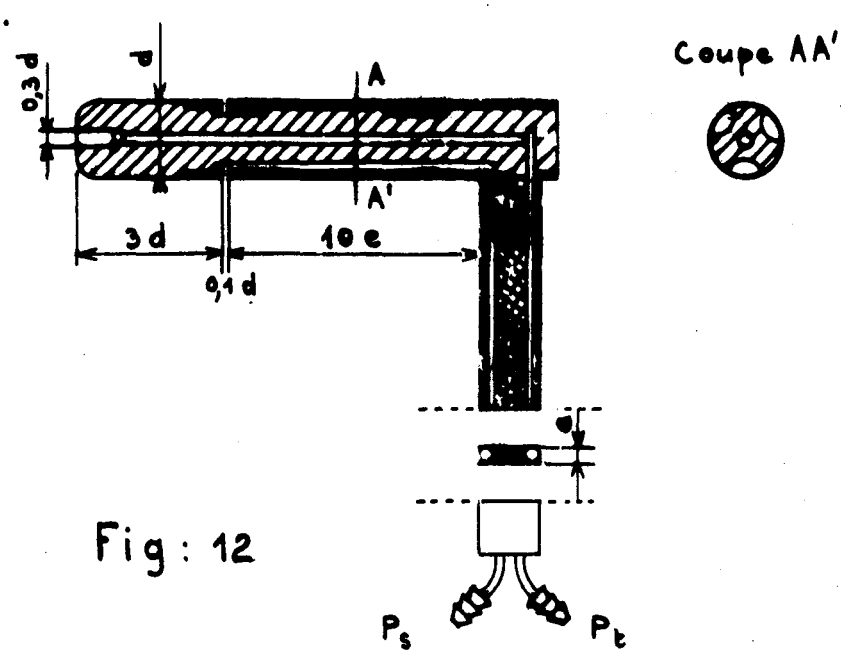


Fig : 12

ECOULEMENTS LAMINAIRES DES FLUIDES VISQUEUX

CHAPITRE I

ECOULEMENTS CYLINDRIQUES - GENERALITES -

On appelle ainsi les écoulements pour lesquels les trajectoires sont des droites parallèles ; dans ces conditions, il est bien évident que les lignes de courant coïncident avec les trajectoires, que le mouvement soit permanent ou non.

Nous allons établir tout d'abord les propriétés particulières aux écoulements de ce type, puis nous traiterons quelques problèmes simples susceptibles d'être résolus par voie analytique.

I - COMPOSANTES DE LAME.

Choisissons un système d'axes de coordonnées de telle sorte que l'axe oz soit parallèle aux trajectoires, sa direction étant celle du vecteur vitesse ; le plan xoy est alors une section droite de l'écoulement (Fig 1). En un point quelconque M, la vitesse a pour composantes :

$$u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = V = V\,(x,y,z,t)$$

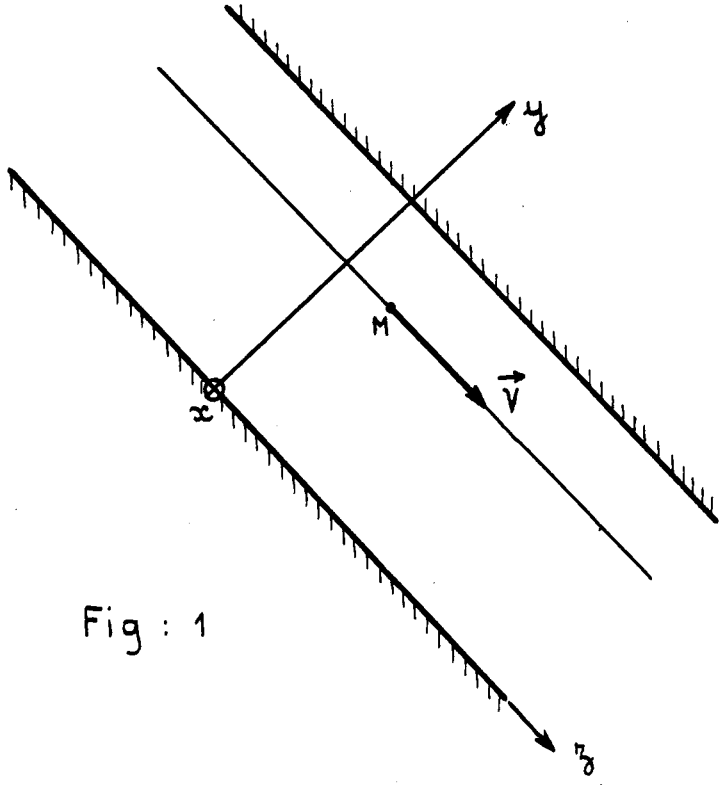


Fig : 1

On a par suite :

$$\varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = 0 \quad , \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$2g_1 = \frac{\partial V}{\partial y} \; , \quad 2g_2 = \frac{\partial V}{\partial x} \; , \quad 2g_3 = 0$$

D'où les composantes de Lamé :

$$N_1 = P - \lambda . \frac{\partial V}{\partial z} \quad ; \quad T_1 = - \eta . \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$N_2 = P - \lambda . \frac{\partial V}{\partial z} \quad ; \quad T_2 = - \eta . \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$N_3 = P - (\lambda + 2\eta) . \frac{\partial V}{\partial z} ; \quad T_3 = 0$$

Ces relations permettent la détermination de la pression $\vec{p}$ partout à l'intérieur du fluide.

Considérons, en particulier, un élément dS d'une surface de courant quelconque (S) et soient α, β, $\gamma = 0$ les cosinus directeurs d'une des demi normales à dS ; le vecteur pression relatif à cette surface orientée a pour composantes :

$$\vec{p} \begin{cases} p_x = \alpha.(P - \lambda.\frac{\partial V}{\partial z}) \\ p_y = \beta.(P - \lambda.\frac{\partial V}{\partial z}) \\ p_z = - \eta\ (\alpha.\frac{\partial V}{\partial x} + \beta.\ \frac{\partial V}{\partial y}) \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la valeur de sa composante normale, soit :

(1) $$p_n = P - \lambda.\ \frac{\partial V}{\partial z}$$

Si le fluide peut être considéré comme isovolume, on a :
$\text{div}\ \vec{V} = 0$ et, par suite $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

Dans ce cas, la vitesse est constante, à l'instant t, tout le long d'une même trajectoire ; l'écoulement est alors uniforme, même en régime non permanent.

On a, en outre :

$$N_1 = N_2 = N_3 = P$$

et, d'après la relation (1) :

(1') $$p_n = P$$

D'où le théorème :

"La composante normale du vecteur pression relatif à une surface dS, orientée parallèlement aux lignes de courant d'un courant uniforme, permanent, est égale à la pression d'état P ".

Supposons maintenant que l'on pratique en un point M_o de la paroi délimitant le fluide un orifice de très petite dimension dans lequel coulisse librement un piston (Fig. 2-a). Pour maintenir celui-ci en équilibre, on doit lui appliquer une force normale $dF = p_n.dS = P.\ dS$; de la mesure de dF, on déduit immédiatement la valeur de la pression d'état P au point M_o. En pratique, mais seulement si le mouvement est permanent ou très lentement variable, on remplace le piston par une prise de pression raccordée à un tube piezométrique - (Fig 2-b).

Dans ce cas malgré que les vitesses soient faibles au voisinage de la paroi, il se produit inévitablement une perturbation à l'entrée du tube piézométrique ; celle-ci est d'autant plus réduite que l'on donne à l'orifice des dimensions plus petites. Rappelons qu'avec un tel montage, la cote h_A^* atteinte par le liquide dans le tube piezométrique mesure, non pas la pression d'état P exprimée en hauteur de liquide, mais la hauteur piézométrique : $(\frac{P}{\varpi} + h)_{M_o} = (\frac{P^*}{\varpi})_{M_o}$

Remarquons que le principe de la mesure avec le montage de la figure (2-a) demeure valable dans le cas d'un fluide compressible puisque, à la paroi, la relation (1) se réduit encore à :

(1') $p_n = P$

En effet, la vitesse étant nulle à la paroi, on a bien :

$(\frac{\partial V}{\partial z})_{M_o} = 0$.

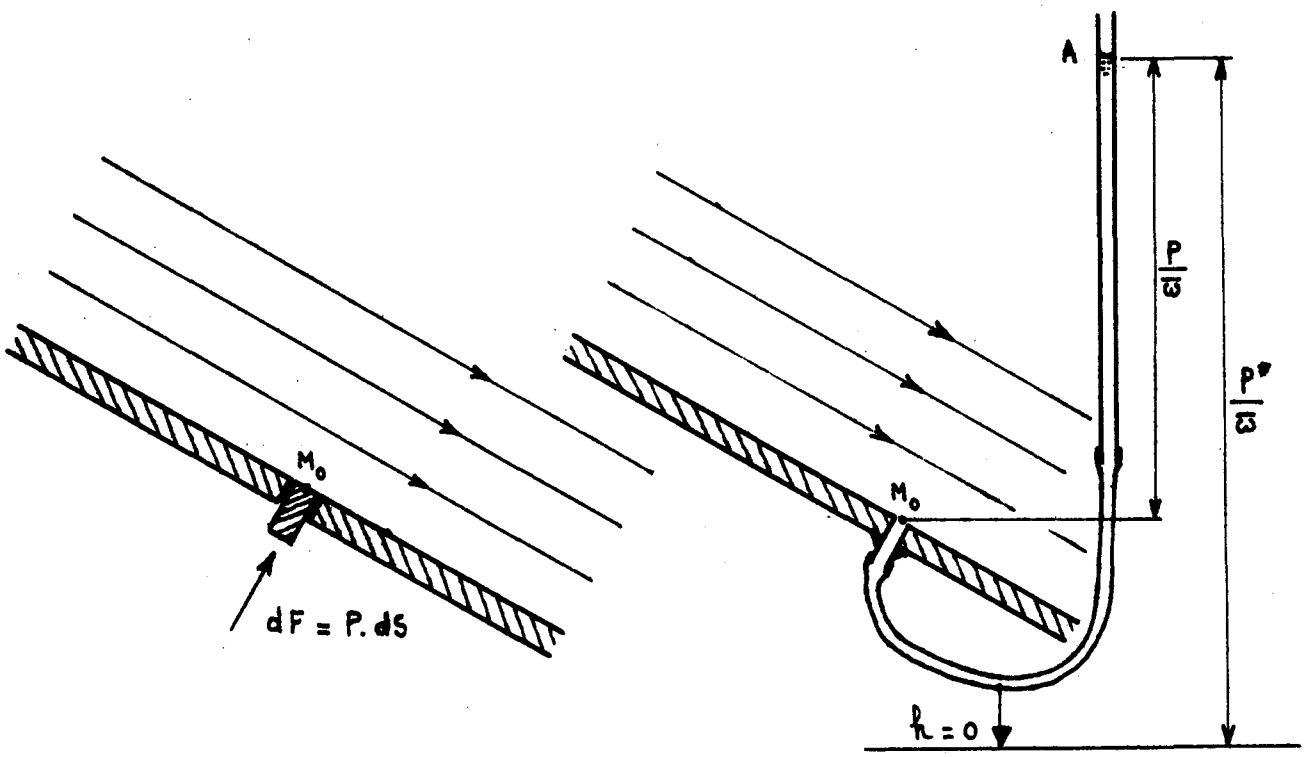


Fig (2-a) Fig (2-b)

II - LOI DE DISTRIBUTION DE LA PRESSION D'ETAT.

Limitons nous au cas d'un fluide isovolume et projetons l'équation de Navier sur les trois axes de coordonnées ; il vient :

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial z} = - \frac{\partial V}{\partial t} + \nu . (\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}) \end{cases}$$

La pression et la seconde de ces égalités montrent que la pression d'état étoilée est indépendante de x et de y ; on pourra donc écrire :

$$(3) \qquad P^* = P^* (z, t)$$

P^* demeure alors constant en tout point d'une section normale aux lignes de courant, tout comme dans le cas d'un fluide parfait.

La répartition de la pression d'état dans une section droite est donc parfaitement connue dès que l'on a effectué une mesure en n'importe quel point du contour de cette section droite.

III - LOI DE DISTRIBUTION DES VITESSES.

Considérons maintenant la dernière des équations (2). Son premier membre ne dépend que de z et t, tandis que son second membre ne dépend que de x, y, t.

L'égalité ne peut être satisfaite, en tout point et à tout instant, que si chacun de ces deux membres est une fonction de t uniquement.

On peut donc écrire, d'une part :

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial z} = F(t)$$

soit :

$$(3') \qquad \frac{p^*}{\rho} = z \, . \, F(t) + c^{te}$$

et, d'autre part :

$$(4) \qquad \nu . (\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}) = \frac{\partial V}{\partial t} + F(t)$$

La fonction $F(t)$ pourra toujours être déterminée, à partir de l'équation (3) en écrivant les conditions aux limites dans les deux sections terminales du courant liquide.

En résumé, à un instant donné, la pression étoilée, constante dans une section droite, varie linéairement en fonction de l'abscisse z. Par ailleurs, la loi de distribution des vitesses dans une section droite quelconque est régie par l'équation (4), que l'on reconnait comme étant l'équation de la chaleur.

Dans le cas d'un mouvement permanent, on a simplement :

$$\eta.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = \frac{dp^*}{dz} = c^{te} \tag{5}$$

IV - <u>REMARQUE CONCERNANT LES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE.</u>

Bien que l'air situé au dessus de la surface libre (Σ) soit partiellement entraîné par le liquide en mouvement, nous admettons qu'il règne en tout point de (Σ) une pression normale p_o, égale à la pression atmosphérique ambiante.

Considérons alors un élément $d\Sigma$ de la surface libre d'un fluide isovolume ; la composante normale de la pression qui s'exerce sur celui-ci est :

$$p_n = P$$

La pression caractéristique P est donc égale à p_o sur toute la surface libre.

Par ailleurs, tous les points de (Σ) qui appartiennent à une même section droite (S) sont tels que :

$$P^* = P + \varpi h = p_o + \varpi h = c^{te}$$

Il en résulte immédiatement que la trace de la surface libre dans un plan quelconque, normal aux lignes de courant, est un segment horizontal (Fig 3).

Dans un système d'axes, choisi de telle sorte que Ox soit horizontal, la pression $\vec{p}$ exercée par le fluide ambiant sur l'air atmosphérique

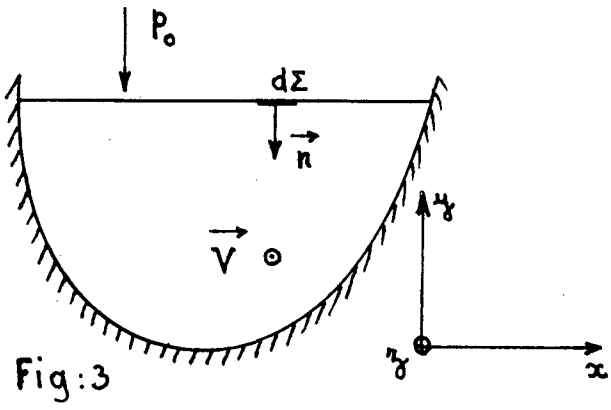


Fig:3

a pour composantes :

$$\begin{cases} p_x = T_3 = 0 \\ p_y = N_2 = P \\ p_z = T_1 = -\eta.\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

Mais comme d'après nos hypothèses, $\vec{p}$ est égal et opposé au vecteur $p_o.\vec{n}$ de composantes : 0, $-p_o$, 0, il vient : $P = p_o$, un résultat déjà établi, et :

(6) $\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)_\Sigma = 0$

"La dérivée normale de la vitesse est donc nulle en tout point de la surface libre".

Cette propriété peut être mise à profit pour ramener l'étude d'un écoulement présentant une surface libre à celle d'un écoulement en charge ; il suffit, en effet, d'associer au domaine d'écoulement (τ), le domaine (τ'), symétrique de (τ) par rapport à la surface libre (Σ). (Fig 4).

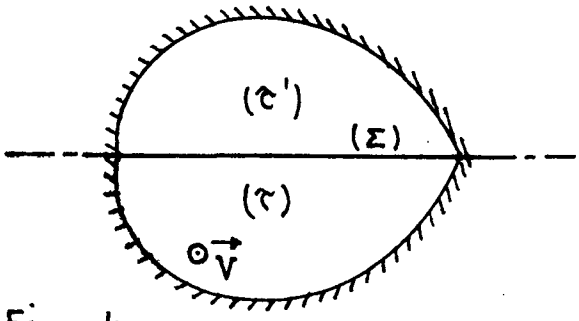


Fig : 4

V - NOTION DE PERTE DE CHARGE.

Nous nous proposons d'exprimer le travail effectué par les forces de viscosité dans tout le volume fluide (τ) de longueur $z_2 - z_1 = \ell$ contenu dans un conduit cylindrique immobile (Fig 5).

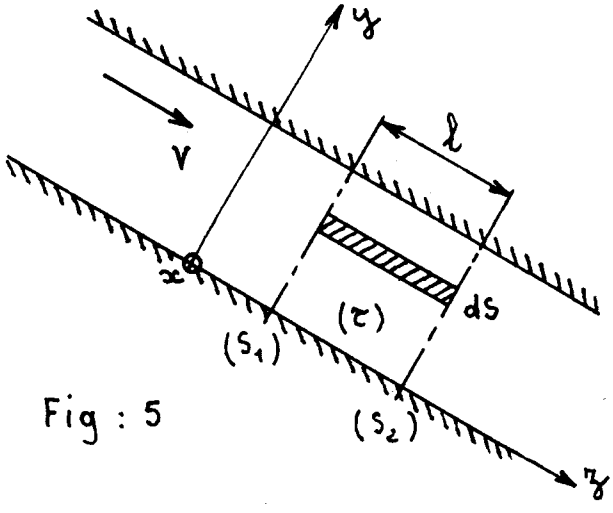


Fig : 5

Celui-ci est donné par l'intégrale

$$d\mathcal{E}_v = -\,dt.\iiint_\tau \mathcal{D}.\,d\tau$$

où $\mathcal{D}$ désigne la fonction de dissipation.

Dans le cas présent, où l'on suppose

le fluide isovolume et le mouvement permanent, on a :

$$\mathcal{D} = \eta . \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \right]$$

Mais, compte tenu de l'identité :

$$\frac{\partial^2 (V^2)}{\partial x^2} = 2V . \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2 . \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2$$

on peut donner à $\mathcal{D}$ la forme suivante :

$$\mathcal{D} = \eta . \left[\Delta\left(\frac{V^2}{2}\right) - V . \Delta V \right]$$

D'où l'expression du travail des forces de viscosité, durant le temps dt :

$$d\mathcal{E}_\nu = dt . \ell . \left[\iint_S (\eta . \Delta V) . V . dS - \eta . \iint_S \Delta\left(\frac{V^2}{2}\right) . dS \right]$$

dS désignant un élément d'une section droite (S) du tube de courant considéré.

La première intégrale du second membre est égale à :

$$\frac{dP^*}{dz} . \iint_S V . dS = Q . \frac{dP^*}{dz}$$

puisque, d'après la relation (5), on a : $\eta . \Delta V = \frac{dp^*}{dz} = c^{te}$.

La seconde intégrale du second membre qui, d'après la formule de Green, s'écrit :

$$\int_\Gamma V . \frac{\partial V}{\partial n} . d\Gamma$$

est évidemment nulle puisque l'on a $V = 0$ ou $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$

selon que le contour (Γ) de (S) se situe sur une paroi solide fixe ou sur une surface libre (Fig. 6).

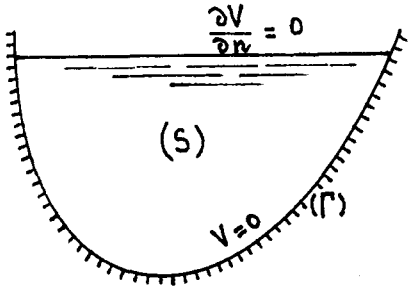


Fig : 6

Il reste donc, en définitive :

(7) $d\mathcal{E}_\nu = \ell . Q . \frac{dP^*}{dz} . dt$

Le mouvement étant permanent par hypothèse, l'énergie dissipée par frottement, durant l'unité de temps, dans le volume (τ), a alors pour expression :

(7') $\Delta W = -\Delta\mathcal{E}_{\nu} = \varpi Q.\left(-\frac{1}{\varpi}.\frac{dP^*}{dz}\right).\ell$

Or, par définition, la perte de charge entre deux sections droites (S_1), (S_2) est le quotient :

(8) $$\boxed{\Delta H = \frac{\Delta W}{\varpi Q}}$$

de l'énergie dissipée, pendant l'unité de temps, entre S_1 et S_2, par le poids du fluide qui traverse l'une de ces sections pendant le même temps.

Dans le cas présent, on a :

(9) $$\Delta H = -\frac{1}{\varpi}.\frac{dP^*}{dz}.\ell$$

soit, puisque $\frac{dP^*}{dz}$ est constant :

(9') $$\Delta H = \frac{P_1^*}{\varpi} - \frac{P_2^*}{\varpi}$$

La perte de charge entre les sections (S_1) et (S_2) est donc mesurée par la différence $h_1^* - h_2^*$ des cotes atteintes dans deux tubes piezométriques reliés respectivement à deux prises de pression pratiquées en n'importe quels points du contour de (S_1) et (S_2).

Enfin, on appelle perte de charge unitaire :

(10) $$j = \frac{\Delta H}{\ell}$$

la perte de charge entre deux sections droites distantes d'une longueur unité ; c'est un nombre sans dimension.

D'après la relation (9) on a :

(11) $$\boxed{j = -\frac{1}{\varpi}.\frac{dp^*}{dz}}$$

Si l'écoulement présente une surface libre, j s'identifie à la pente $I = \sin\theta$ de celle-ci.

Dans tous les cas où il n'existe pas de paroi mobile dans le domaine considéré, il est donc possible de remplacer $\frac{dp^*}{dz}$ par sa valeur $-\varpi.j$; en particulier, l'équation de Poisson (5), qui donne la loi de répartition des vitesses dans une section droite quelconque (S), peut s'écrire :

(12) $$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{g.j}{\nu}}$$

CHAPITRE II

ETUDE PARTICULIERE DE QUELQUES ECOULEMENTS CYLINDRIQUES

A - ECOULEMENTS PLANS

On appelle ainsi les écoulements qui possèdent les deux propriétés suivantes :

- Les lignes de courant restent contenues dans des plans (P) perpendiculaires à une direction (Δ) ;
- La loi de répartition des vitesses est indépendante du plan (P) considéré.

Dans un système d'axes, tel que ox soit parallèle à (Δ), la vitesse $\vec{V}$ a pour composantes, dansle cas le plus général :

$$u = o \quad ; \quad v = v(y, z, t) \quad ; \quad w = w(y, z, t)$$

Si en outre, on a un écoulement cylindrique de direction oz, il vient simplement :

$$u = o \quad ; \quad v = o \quad ; \quad w = V = V(y, z, t)$$

Nous nous bornerons ici à l'étude des fluides isovolumes en mouvement permanent ; pour ceux-ci, nous aurons donc :

$$u = o \quad ; \quad v = o \quad ; \quad v = V = V(y)$$

Les équations (5) et (12) qui donnent la loi de répartition des vitesses selon qu'il existe, ou qu'il n'existe pas, de parois mobiles dans le domaine considéré, se réduisent alors à :

$$(5') \qquad \eta . \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{dP^*}{dz}$$

et :

$$(12') \qquad \frac{d^2V}{dy^2} = - \frac{g.j}{\nu}$$

I - Ecoulement uniforme sur un plan incliné

Considérons un liquide s'écoulant sous l'action des forces de pesanteur sur un plan incliné indéfini (π), supposé parfaitement lisse. Lorsque le régime permanent est établi, l'épaisseur de la couche liquide prend une valeur constante que nous désignerons par e. L'écoulement admet une symétrie cylindrique d'axe ox, ox étant une horizontale du plan (π) : il suffit donc

d'étudier le mouvement dans un plan y o z , o z étant une ligne de plus grande pente du plan (π) - (Fig. 7)

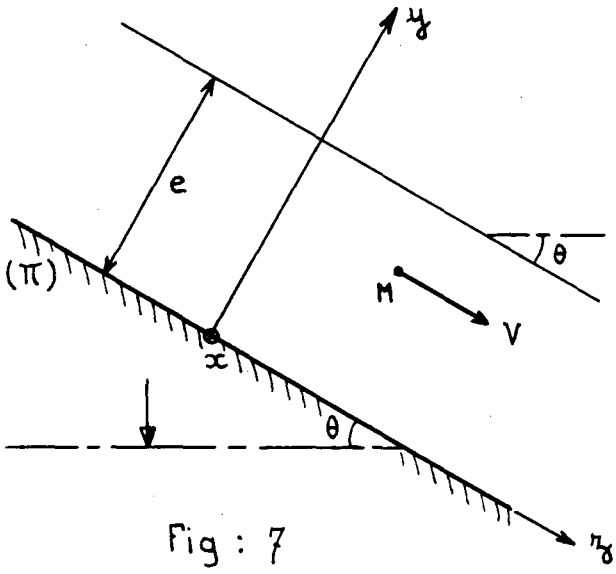


Fig : 7

Comme la perte de charge unitaire j est égale, ici, à la pente $I = \sin\theta$ du plan (π), l'équation (12') s'écrit :

$$\frac{d^2V}{dy^2} = -\frac{g.\sin\theta}{\nu}$$

L'intégration est immédiate ; on obtient ainsi :

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{g.\sin\theta}{\nu}\,.\,y + C_1$$

et :

$$V = -\frac{g.\sin\theta}{2\nu}.\,y^2 + C_1.\,y + C_2$$

Les conditions aux limites vont nous permettre de déterminer les constantes C_1, C_2. Tout d'abord sur le plan (π), soit pour $y = 0$, la vitesse V doit être nulle ; cela impose : $C_2 = 0$. Par ailleurs, sur la surface libre, soit pour $y = e$, on a : $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0$; on en déduit :

$$C_1 = \frac{g.\sin\theta}{\nu}\,.\,e$$

D'où, en définitive, la loi de répartition des vitesses :

(13) $$V = \frac{g.\sin\theta}{2\nu}.(2e - y).\,y$$

Le débit unitaire q , c'est-à-dire celui qui correspond au liquide qui s'écoule entre deux plans P_1, P_2, perpendiculaires à o x , et distants d' une longueur unité, a pour expression :

$$q = \iint_S \vec{V}.\,\vec{n}.\,dS = \int_o^e V.\,dy$$

soit :

(14) $$q = \frac{g.\sin\theta}{3\nu}.e^3$$

II - Ecoulement uniforme entre deux plans parallèles immobiles

Désignons par e la distance des plans (π_1), (π_2) supposés indéfinis, et choisissons un système d'axes de coordonnées de la manière suivante : oz, parallèle à la direction générale de l'écoulement, est disposé à égale distance des deux plans ; ox est parallèle à ceux-ci - (Fig. 8) -

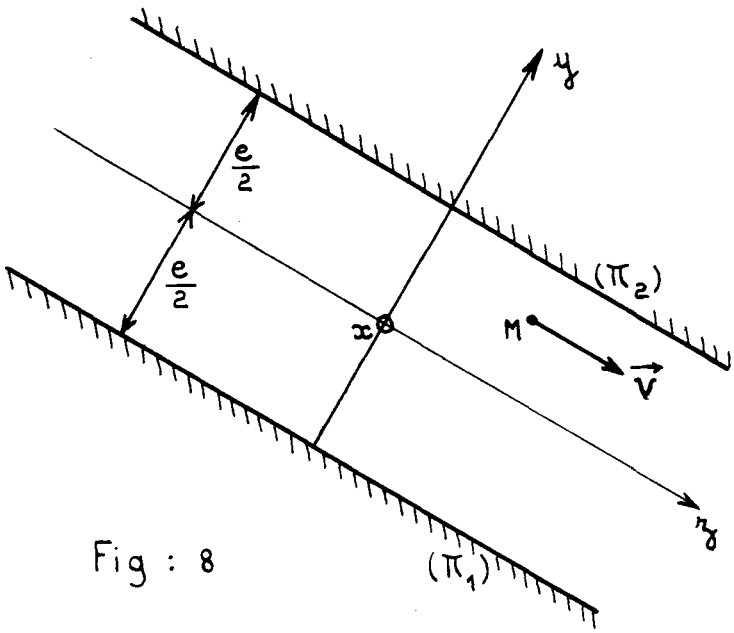


Fig : 8

La loi de répartition des vitesses est donnée par la relation :

$$V = -\frac{g.j}{2\nu}.\ y^2 + C_1.\ y + C_2$$

dans laquelle C_1, C_2 sont deux constantes que l'on détermine en exprimant que la vitesse est nulle pour $y = \pm \frac{e}{2}$; il vient ainsi :

$C_1 = 0$, $C_2 = \frac{gj}{2\nu}.\frac{e^2}{4}$

et :

(15) $$V = \frac{gj}{2\nu}.\ (\frac{e^2}{4} - y^2)$$

On en déduit immédiatement l'expression du débit unitaire q, soit :

(16) $$q = \frac{g.j}{12\nu}.\ e^3$$

Ce débit q étant généralement une donnée du problème, on préfère écrire la relation précédente sous la forme :

(16') $$j = \frac{12.\nu.q}{g.e^3}$$

III - Ecoulement uniforme entre deux plans parallèles, l'un d'eux étant fixe, l'autre glissant sur lui-même à la vitesse constante V_0

Cet écoulement est celui auquel nous avons eu recours pour définir la viscosité des fluides isovolumes - (Fig. 9) - Comme,ici, il existe une paroi mobile qui effectue un travail, la différence de charge entre deux sections droites n'est plus égale à la déperdition d'énergie par unité de poids. Aussi, pour déterminer la loi de répartition des vitesses, devrons-

nous utiliser la relation (5') et non plus la relation (12').

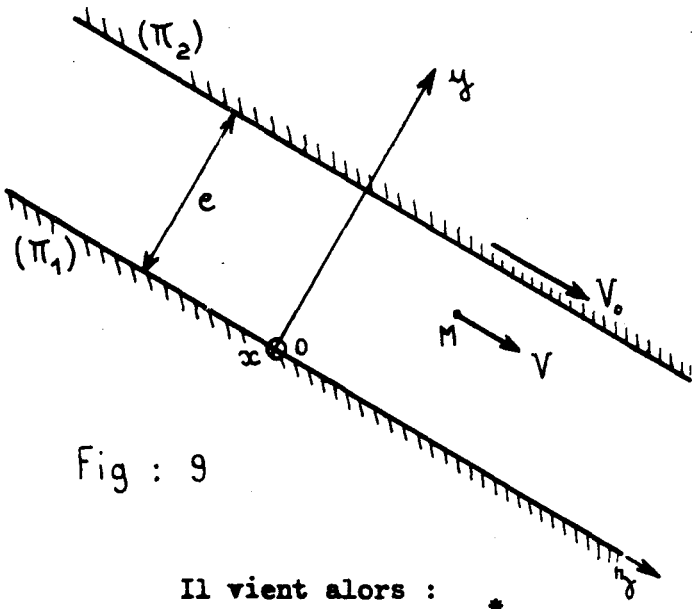


Fig : 9

Le système d'axe habituel est disposé de telle sorte que l'origine O se situe dans le plan fixe (π_1).

La vitesse V, en un point quelconque M, a pour expression :

$$V = \frac{1}{\eta} \frac{dP^*}{dz} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 . y + C_2$$

où C_1, C_2 sont deux constantes que l'on exprime par les conditions aux limites : $V = 0$, pour $y = 0$; $V = V_o$, pour $y = e$.

Il vient alors :

(17) $$V = V_o . \frac{y}{e} - \frac{1}{2\eta} . \frac{dP^*}{dz} (e - y) . y$$

et :

(18) $$q = \frac{V_o . e}{2} - \frac{1}{12\eta} . \frac{dP^*}{dz} . e^3$$

Les relations ci-dessus sont à la base de la théorie hydrodynamique du graissage (cf. chapitre VI).

Pour donner une signification physique à la constante $\frac{dp^*}{dz}$, il est nécessaire de considérer des plans (π_1), (π_2) de dimensions finies. Nous continuerons à admettre que les résultats établis précédemment demeurent valables dans ce cas, à condition toutefois que les dimensions des plans soient très grandes vis-à-vis de la distance qui les sépare.

Imaginons alors le montage expérimental suivant :

Dans un réservoir (R), de très grandes dimensions, dont le fond horizontal (π_1) est supposé parfaitement lisse, on fait coulisser une plaque (π_2), elle aussi, horizontale et parfaitement lisse.

Une cloison (C) divise ce réservoir en deux compartiments dans lesquels le fluide considéré atteint les niveaux H_1 et H_2 supposés constants - (Fig. 10) -

Le plan (π_2) glissant sur lui-même à la vitesse constante V_o, il

s'établit, au bout d'un certain temps, un régime permanent uniforme, régi par les équations (17) et (18).

Considérons les sections droites (S_1), (S_2) qui passent par les extrémités de la plaque mobile (π_2). Si, en première approximation, on admet que pour $z \leqslant e$, les lignes de courant sont encore parallèles au fond, et que pour $z > e$, le liquide est pratiquement au repos, la loi de répartition des pressions est sensiblement hydrostatique dans chacune des pressions est sensiblement hydrostatique dans chacune des sections considérées ; ce qui permet d'écrire :

$$P_1^* = \varpi . H_1 \quad ; \quad P_2^* = \varpi . H_2$$

Comme P^* varie linéairement le long de oz, on a alors :

$$P^* = A.z + B$$

avec :

$$A = \frac{dP^*}{dz} = \frac{\varpi(H_1 - H_2)}{\ell}$$

ℓ désignant la longueur de la plaque (π_2).

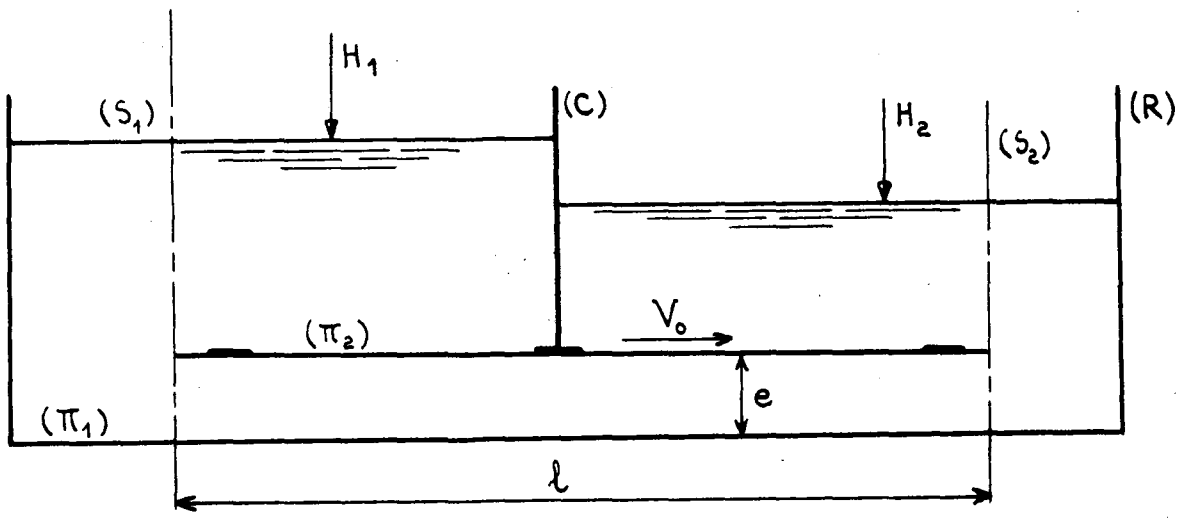


Fig : 10

Dans le cas où la cloison (c) est supprimée, on a :

$H_1 = H_2$, soit $\frac{dP^*}{dz} = 0$, et par suite :

(17') $\quad V = V_o . \frac{y}{e}$

(18') $\quad q = \frac{V_o . e}{2}$

B - ECOULEMENTS TELESCOPIQUES

Les écoulements télescopiques sont, par définition, des écoulements cylindriques pour lesquels la vitesse V en un point quelconque ne dépend que de sa distance r à un axe oz parallèle à la direction générale de l'écoulement, il existe donc, dans ce cas, une symétrie de révolution autour de l'axe oz.

Dans un système de coordonnées cylindriques, le vecteur vitesse a pour composantes :

$$V_r = 0 \quad , \quad V_\theta = 0 \quad , \quad V = V_z = V(r)$$

L'équation générale (5), qui donne la loi de répartition des vitesses pour tous les écoulements cylindriques, s'écrit ici :

$$\frac{dP^*}{dz} = \left(\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dr}\right)$$

soit :

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{dP^*}{dz} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r.\frac{dV}{dr}\right)$$

On obtient immédiatement, par intégration :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP^*}{dz} \cdot r + \frac{C_1}{r} \tag{19}$$

et :

$$V = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dP^*}{dz} \cdot r^2 + C_1 \cdot \text{Log } r + C_2 \tag{20}$$

C_1, C_2 désignant deux constantes qui dépendent des conditions aux limites.

Dans le cas où il n'existe pas de paroi solide dans le domaine considéré, on a :

$$\frac{dP^*}{dz} = - \varpi . j$$

et par suite :

$$V = - \frac{gj}{4\gamma} \cdot r^2 + C_1 \cdot \text{Log } r + C_2 \tag{21}$$

Quant aux expressions des composantes du tenseur de pression, elles se réduisent ici à :

$$(22) \qquad \begin{cases} N_r = N_\theta = N_z = P \\ T_{r,\theta} = T_{\theta,z} = 0 \qquad T_{\theta,r} = -\eta . \dfrac{dV}{dr} \end{cases}$$

Nous allons maintenant exploiter ces résultats généraux pour traiter quelques problèmes classiques.

I - Ecoulement de Poiseuille -

Cet écoulement est celui qui s'effectue à l'intérieur d'un tube cylindrique de section circulaire d'axe oz, de rayon R. Dans ce cas, la constante C_1 qui figure dans la relation (21) est nécessairement nulle, sinon la vitesse prendrait une valeur infinie sur l'axe, ce qui ne correspondrait à aucune réalité physique.

Par ailleurs, en exprimant que la vitesse est nulle à la paroi, on obtient :

$$C_2 = \frac{gj}{4\nu} . R^2$$

D'où la loi de répartition des vitesses à l'intérieur du tube :

$$(23) \qquad V = \frac{gj}{4\nu} (R^2 - r^2)$$

On en déduit immédiatement les expressions du débit Q et de la vitesse moyenne $U = \frac{Q}{S}$, soient :

$$(24) \qquad Q = \frac{gj}{8\nu} . \pi . R^4$$

et :

$$(25) \qquad U = \frac{gj}{8\nu} . R^2$$

Comme la vitesse est maximale sur l'axe oz, sa valeur étant : $V_{Max} = \frac{gj}{4\nu} .R^2$, on a donc :

$$(26) \qquad U = \frac{V_{Max}}{2}$$

La relation (23) permet encore le calcul des coefficients cinétiques et de quantité de mouvement ; ceux-ci ont respectivement pour valeurs :

$$(27) \qquad \alpha = 2 \quad ; \quad \beta = \frac{4}{3}$$

Remarquons enfin que la relation (24) permet d'exprimer la perte de charge en fonction des données habituelles ; on obtient alors la formule

de Poiseuille :

(24') $$j = \frac{8\ \nu.Q}{\pi g.R^4}$$

L'une des méthodes permettant la mesure de la viscosité consiste à réaliser l'écoulement du fluide étudié dans un tube capillaire de section circulaire, raccordé à un réservoir de grande capacité (Fig. 11).

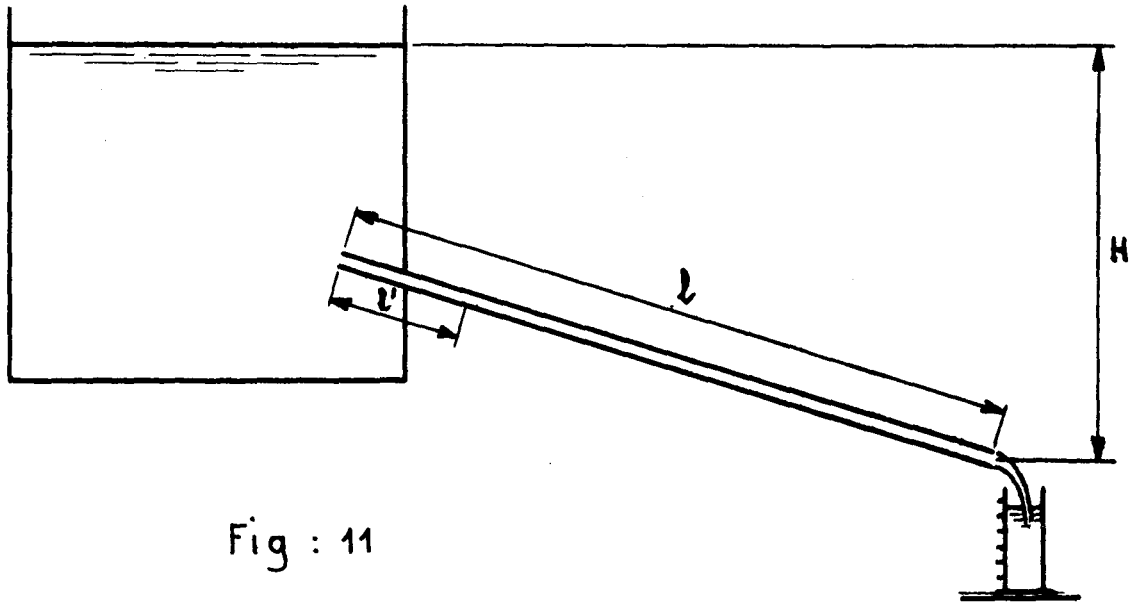


Fig : 11

A l'entrée du tube, la répartition des vitesses est mal connue ; elle ne satisfait à la relation (23) qu'à une distance ℓ' de l'entrée dont l'ordre de grandeur est donné par la formule empirique

$$\frac{\ell'}{R} = 0{,}06.\ R_e$$

Le régime n'étant pas atteint dès l'entrée du tube, il se produit alors une perte de charge supplémentaire dont on estime la valeur à :

$$\xi = 0{,}16\ .\ \frac{U^2}{2g}$$

Dans ces conditions, on a, d'après l'équation de Bernoulli généralisée, appliquée entre la surface libre du réservoir et la section de sortie du tube capillaire :

$$H = 2\ \frac{U^2}{2g} + j.\ell + 0{,}16.\ \frac{U^2}{2g}$$

soit :

$$H = \frac{1}{\pi g\ R^4}\ (8\nu.Q.\ell + \frac{2{,}16}{2\pi}.\ Q^2)$$

La mesure de la viscosité ν se ramène donc à celle du débit Q puisque R, ℓ, H sont des caractéristiques connues du dispositif expérimental.

Habituellement, on choisit un tube capillaire très long de façon à pouvoir écrire sensiblement :

$$H = \frac{8\ \nu.\ Q.\ \ell}{\pi g.\ \ R^4}$$

et :

$$\nu = \frac{\pi.g.\ R^4}{8.\ Q.\ \ell}.H$$

II - <u>Ecoulement entre deux cylindres coaxiaux immobiles - (Fig. 12)</u>

La loi de distribution des vitesses est encore donnée par l'équation (21) ; seulement les constantes C_1, C_2 doivent maintenant être telles que la vitesse soit nulle sur le cylindre intérieur de rayon R_1 , ainsi que sur le cylindre extérieur de rayon R_2 .

On en déduit :

$$(29) \qquad V = \frac{g\ j}{4\ \nu}\cdot\left[\ R_1^2 - r^2 \ + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\text{Log}\ \frac{R_2}{R_1}}.\ \text{Log}\ \frac{r}{R_1}\right]$$

et :

$$(30) \qquad Q = \frac{\pi g.j}{8\ \nu}\cdot(R_2^2 - R_1^2\ ).\left[(R_2^2 + R_1^2) - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\text{Log}\ \frac{R_2}{R_1}}\right]$$

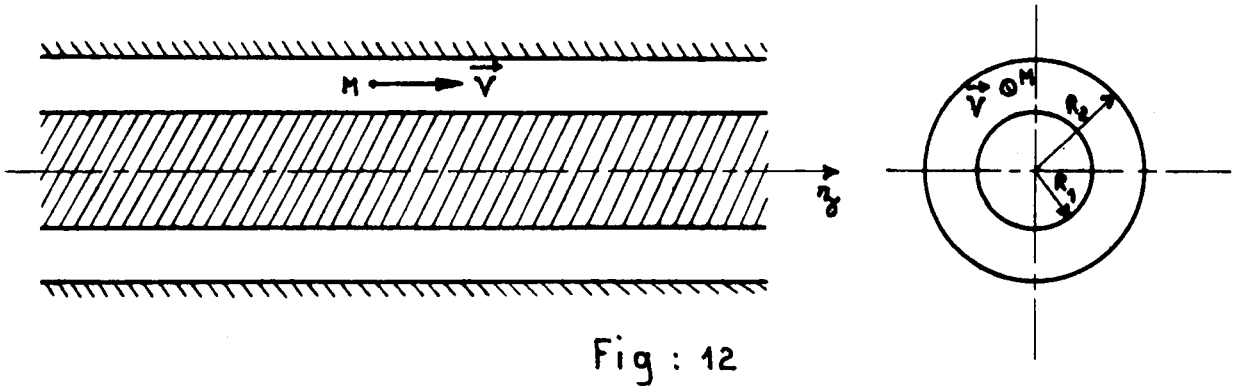


Fig : 12

III - <u>Ecoulement entre deux cylindres coaxiaux, l'un d'eux étant fixe, l'autre subissant un mouvement de translation à vitesse constante</u>

Nous supposerons que le mouvement résulte seulement du déplacement d'un des cylindres et non plus d'une différence de pression entre les

sections terminales de ceux-ci.

On a alors :

$$\frac{dP^*}{dz} = 0$$

et par suite :

$$V = C_1 . \text{Log } r + C_2$$

Compte tenu des conditions aux limites, et en admettant que c'est le cylindre intérieur, de rayon R , qui se translate à la vitesse constante V_1 , il vient :

$$(31) \qquad V = V_1 . \left(1 - \frac{\text{Log } \frac{r}{R_1}}{\text{Log } \frac{R_2}{R_1}} \right)$$

et par suite :

$$(32) \qquad Q = \pi V_1 . \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \text{ Log} \frac{R_2}{R_1}} - R_1^2 \right)$$

La force de frottement qui s'exerce, par unité de longueur, entre le cylindre mobile et le fluide a pour valeur :

$$F = 2\pi R_1 . \eta . \left| \left(\frac{dV}{dr}\right)_{r = R_1} \right|$$

soit :

$$F = \frac{2 \pi \eta . V_1}{\text{Log } \frac{R_2}{R_1}}$$

Pour entretenir le mouvement, il est donc nécessaire de fournir une puissance :

$$(33) \qquad W = \frac{2 \pi \eta . V_1^2}{\text{Log } \frac{R_2}{R_1}}$$

Il serait aisé de retrouver ce résultat en calculant le travail exercé, durant l'unité de temps, par les forces intérieures dans tout le volume fluide compris entre deux sections droites distantes d'une longueur unité.

IV - Ecoulement entre deux cylindres coaxiaux, l'un d'eux étant fixe, l'autre subissant une translation à vitesse constante, lorsqu'il existe en outre un gradient de pression

Comme l'une des frontières de l'écoulement est mobile, la loi de répartion des vitesses est donnée par la relation (20) .

Les conditions aux limites étant :

$V = V_1$, pour $r = R_1$;

$V = 0$, pour $r = R_2$;

on en déduit :

$$(34) \qquad V = V_1 - \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dp^*}{dz} \cdot (R_1^2 - r^2) - \left[\frac{\frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dp^*}{dz} (R_2^2 - R_1^2) + V_1}{\text{Log} \frac{R_2}{R_1}} \right] \cdot \text{Log} \frac{r}{R_1}$$

soit :

$$(34') \qquad V = V' + V''$$

V' désignant la vitesse donnée par la relation (29) exprimée en fonction du radient de pression $\frac{dp^*}{dz}$; V'' étant la vitesse donnée par la relation (31).

Les deux écoulements étudiés aux paragraphes (II) et (III) peuvent donc être "additionnés". Cette constatation nous permet d'écrire sans nouveau calcul l'expression du débit $Q = Q' + Q''$ correspondant au cas présent, soit :

$$(35) \quad Q = -\frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{dp^*}{dz} \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \left[(R_2^2 + R_1^2) - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\text{Log} \frac{R_2}{R_1}} \right] + \pi . V_1 . \left[\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2 \text{ Log} \frac{R_2}{R_1}} - R_1^2 \right]$$

Remarque :

La propriété d'additivité des écoulements s'effectuant dans des domaines superposables est valable pour tous les écoulements cylindriques puisque l'équation (5) à laquelle ceux-ci doivent satisfaire est une équation linéaire.

Par contre cette propriété ne peut pas être étendue à tous les écoulements laminaires car l'accélération $\vec{\gamma}$ qui figure dans l'équation de Navier n'est pas, en général, une fonction linéaire de V .

C - CAS GENERAL

Les problèmes que nous avons traités précédemment étaient relativement simples du fait que la vitesse V ne dépendait que d'une seule variable : y , pour les écoulements plans ; r , pour les écoulements télescopiques.

Dans le cas général, on a à résoudre l'équation différentielle à deux variables :

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dP^*}{dz}$$

Le second membre de cette équation étant une constante, on a intérêt à introduire la variable auxiliaire :

$$(36) \qquad \varphi(x, y) = V(x, y) - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dP^*}{dz} \cdot \frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma}{2(\alpha + \beta)}$$

α, β, γ étant des paramètres arbitraires que l'on choisit au mieux, compte tenu des particularités géométriques du contour (Γ) de la section droite (S) du conduit cylindrique dans lequel s'écoule le fluide.

En substituant la fonction à la fonction V dans l'équation de Poisson, il vient :

$$(37) \qquad \Delta\varphi = 0$$

de sorte que nous sommes amenés à résoudre un problème de Dirichlet.

Pour illustrer cette méthode sur un exemple particulièrement simple nous allons tout d'abord reprendre l'étude de l'écoulement de Poiseuille ; puis nous traiterons deux autres problèmes classiques qui n'auraient pu être résolus par une méthode élémentaire.

I - Ecoulement dans une conduite circulaire de rayon R. -(Fig. 13)

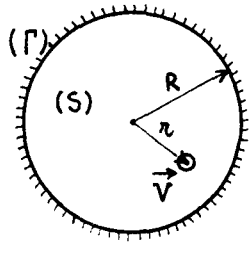


Fig : 13

Etant donné la symétrie de l'écoulement, nous poserons ici :

$$\varphi = V + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dP^*}{dz} \cdot \left(\frac{R^2 - r^2}{4}\right)$$

soit :

$$\varphi = V - \frac{g\,j}{4\,\nu} \cdot (R^2 - r^2)$$

puisque les parois de la conduite sont immobiles.

Pour $r = R$, on a $V = 0$, et par suite : $\varphi = 0$

La fonction harmonique φ , nulle sur la frontière (Γ) de (S), est identiquement nulle. On retrouve ainsi la loi de répartition des vitesses.

(23) $$V = \frac{g\,j}{4\,\nu} \cdot (R^2 - r^2)$$

déjà établie précédemment.

II - <u>Ecoulement dans une conduite cylindrique de section elliptique</u> (Fig. 14) -

Soient a, b les demi-axes de l'ellipse (Γ) , nous poserons :

$$\varphi = V + \frac{g\,j}{2\,\nu} \cdot \frac{a^2 . b^2}{(a^2 + b^2)} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

Un raisonnement analogue au précédent conduit immédiatement à la relation :

(38) $$V = \frac{g\,j}{4\,\nu} \cdot \frac{2a^2 . b^2}{(a^2+b^2)} \cdot \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right]$$

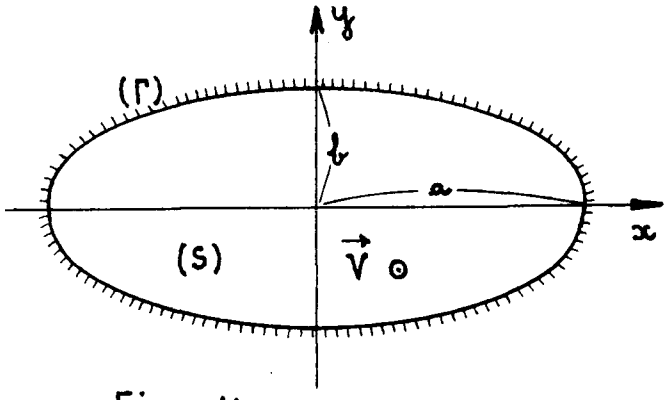


Fig : 14

Dans le plan x o y , les courbes isovitesses sont des ellipses homothetiques ; cette remarque rend particulièrement aisé le calcul du débit Q . On trouve ainsi :

$$Q = \frac{g\,j}{8\,\nu} \cdot \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} . \pi \,.\, a\,b$$

D'où l'expression de la perte de charge unitaire :

(39) $$f = 8\pi \cdot \frac{a^2+b^2}{2\,a\,b} \cdot \frac{\nu . Q}{gS^2}$$

Pour $a = b = R$, on retrouve évidemment la formule de Poiseuille :

(24') $$j = 8\pi \cdot \frac{\nu . Q}{gS^2}$$

Le coefficient addimensionnel $\frac{a^2+b^2}{2\,a\,b} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ étant toujours supérieur à 1 , on constate que, toutes conditions étant égales par ailleurs, une conduite elliptique induit davantage de pertes de charge qu'une conduite circulaire de même section, résultat qu'il était facile de prévoir.

III - Ecoulement dans une conduite cylindrique de section rectangulaire de côtés 2a et 2b - (Fig. 15) -

Le changement de variables qui conduit aux développements mathématiques les plus simples est ici :

$$\varphi = V + \frac{g\,j}{2\nu}\cdot(x^2 - a^2)$$

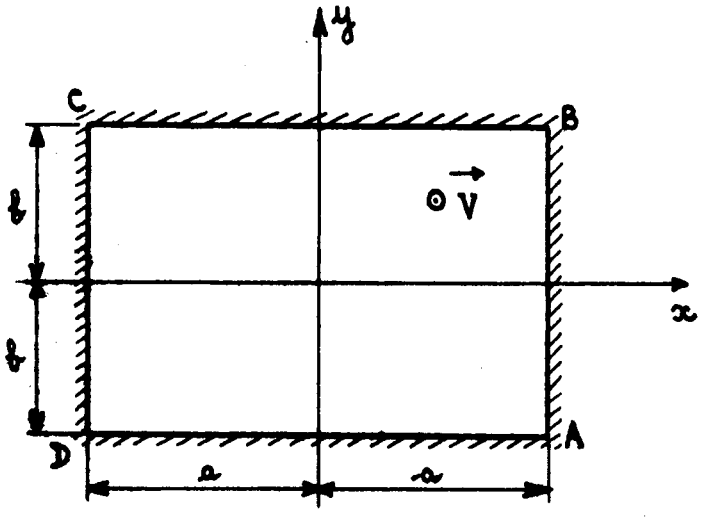


Fig : 15

Dans ces conditions, la fonction φ, nulle sur les côtés AB et CD, prend sur les côtés opposés BC et DA des valeurs données par la relation :

$$\varphi = \frac{g\,j}{2\nu}\cdot(x^2 - a^2)$$

Nous sommes ainsi ramenés au problème classique consistant à déterminer la distribution d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un rectangle connaissant les valeurs prises par celle-ci sur les frontières.*

La solution correspondant au cas présent est :

$$\varphi = -\frac{16\,g\,j\,a^2}{\pi^3\,.\,\nu}\,.\,\sum_{0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,.\,\mathrm{Cos}\left[(2n+1)\,\frac{x}{a}\,.\,\frac{\pi}{2}\right]\,.\,\frac{\mathrm{ch}\left[(2n+1).\,\frac{y}{a}.\,\frac{\pi}{2}\right]}{\mathrm{ch}\left[(2n+1)m.\,\frac{\pi}{2}\right]}\right\}$$

avec : $m = \frac{b}{a}$

On en déduit immédiatement la loi de distribution de la vitesse V , soit :

$$V = \frac{g.\,j.\,S}{8\;\;\nu.\,m}\,.\left\{\frac{x^2}{a^2} - 1 + \frac{32}{\pi^3}\,.\,\sum_{0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,.\,\mathrm{Cos}\left[(2n+1).\frac{\pi x}{2a}\right].\,\frac{\mathrm{ch}\left[(2n+1).\frac{\pi y}{2a}\right]}{\mathrm{ch}\left[(2n+1).\frac{\pi m}{2}\right]}\right]\right\}$$

---

* Voir par exemple : "Technique de résolution des équations aux dérivées partielles", par J. LEGRAS.

D'où le débit de l'écoulement :

$$Q = \frac{1}{m^2} \cdot \left\{ \frac{m}{12} - \frac{16}{\pi^5} \cdot \sum_{o}^{\infty} \frac{th\left[(2n+1).\frac{m\pi}{2}\right]}{(2n+1)^5} \right\} \cdot \frac{g.\ j.\ S^2}{\nu}$$

et, par suite, l'expression de la perte de charge unitaire :

$$(40) \qquad j = \frac{12\ m}{1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{o}^{\infty} \frac{th\left[(2n+1).\frac{m\pi}{2}\right]}{(2n+1)^5}} \cdot \frac{\nu.Q}{g.S^2}$$

Si on convient d'appeler 2b le plus grand des côtés du rectangle considéré, on a $m \geqslant 1$; dans ces conditions on peut écrire très sensiblement.

$$(40') \qquad j = \frac{12\ m}{1 - \frac{0,6275}{m}.\left[th\left(\frac{m\pi}{2}\right) + 0,004\right]}$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du coefficient addimensionnel :

$$c_j = \frac{j}{\frac{\nu.Q}{g.S^2}}$$

en fonction de $m = \frac{b}{a}$, pour des conduites de section elliptique et pour des conduites de section rectangulaire.

$m = \frac{b}{a}$ ou $\frac{1}{m}$	$C_j = \frac{j}{\frac{\nu \cdot Q}{g \cdot S^2}}$ section elliptique	section rectangulaire
1	25,13	28,46
1,2	25,55	28,89
1,4	26,57	29,96
1,6	27,96	31,42
1,8	29,60	33,08
2	31,42	34,98
2,5	36,44	40,10
3	41,89	45,57
3,5	47,57	51,22
4	53,41	56,98
5	65,35	68,65
6	77,49	80,45
7	89,76	92,31
8	102,10	104,21
9	114,49	116,13
10	126,92	128,07

CHAPITRE III

ECOULEMENTS GIRATOIRES

On appelle ainsi les écoulements pour lesquels les trajectoires sont des cercles situés dans des plans perpendiculaires à un axe fixe o z et centrés sur celui-ci.

I - EQUATIONS GENERALES DES ECOULEMENTS GIRATOIRES A SYMETRIE CYLINDRIQUE -

Les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques sont :

$V_r = V_z = 0 \quad ; \quad V_\theta = V = V\,(r,\ \theta\ ,\ z)$

Mais d'après l'équation de continuité des fluides isovolumes :

$$\text{(I-87)} \quad \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot V_r + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

on a ici :

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

ce qui montre que la vitesse est constante le long d'une trajectoire donnée.

L'écoulement présente donc une symétrie de révolution autour de l'axe oz .

En admettant encore que la vitesse est indépendante de z, le mouvement présentant alors également une symétrie cylindrique d'axe oz, il reste simplement :

$$\vec{V} \begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = V = V(r) \\ V_z = 0 \end{cases}$$

Dans ces conditions, les équations générales (I-86) se réduisent à :

$$\text{(41)} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial P^*}{\partial r} = \dfrac{V^2}{r} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial P^*}{\partial \theta} = \nu \cdot \left(\dfrac{d^2V}{dr^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r^2}\right) \\[2ex] \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial P^*}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

En intégrant, par rapport à θ , la seconde de ces équations, il vient :

$$P^* = \eta . r . \left(\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} . \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2}\right) . \theta + f(r)$$

Ce résultat n'est compatible avec la première des équations (41) que si l'on a :

$$r.\left(\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} . \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2}\right) = cte$$

On peut alors écrire :

$$P^* = K . \theta + f(r)$$

K étant une constante.

Mais dans tous les cas où les trajectoires ne sont pas interrompues par des parois, la pression étoilée est une fonction uniforme ; cela implique nécessairement :

$$K = 0$$

et par suite :

$$(42) \qquad P^* = P^*(r)$$

D'après les équations (41), on peut donc écrire, en définitive :

$$(43) \qquad \frac{1}{\rho} . \frac{dP^*}{dr} = \frac{V^2}{r}$$

et :

$$(44) \qquad \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} . \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} = 0$$

L'équation différentielle (44) s'intègre immédiatement en y faisant le changement de variable : $V = r . U$; on obtient ainsi :

$$(44') \qquad V = C_1 . r + \frac{C_2}{r}$$

C_1, C_2 étant deux constantes que l'on déterminera, dans chaque cas particulier, d'après les conditions aux limites.

Les équations (43) et (44') constituent les équations générales des écoulements giratoires à symétrie cylindrique : la seconde fournit la loi de répartition des vitesses ; la première, compte tenu de cette loi, permet de déterminer la fonction $P^* = P^*(r)$

Les composantes du tenseur de pression ont pour expressions :

$$(45)\qquad \begin{cases} N_r = N_\theta = N_z = P \\ T_{r,} = -\eta.\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right) \\ T_{\theta,z} = T_{r,z} = 0 \end{cases}$$

Il apparait alors que la composante tangentielle de la pression qui s'exerce entre les portions de fluide (I) et (II) situées de part et d'autre d'un cylindre d'axe oz a pour valeur :

$$(46)\qquad \tau = -\eta\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right)$$

et non pas :

$$\tau = -\eta.\frac{dV}{dr}$$

comme une analogie superficielle avec les résultats établis pour les écoulements cylindriques aurait pu le laisser supposer - (Fig. 16) -

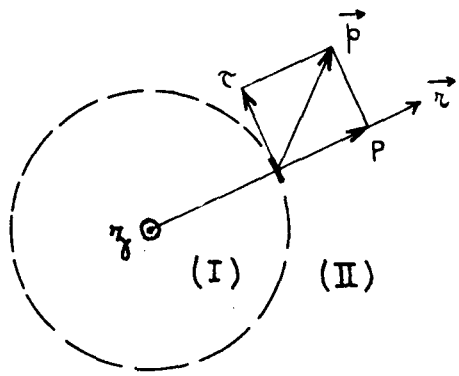


Fig : 16

II - ECOULEMENT D'UN FLUIDE INDEFINI A L'EXTERIEUR D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE ANIME D'UN MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME -

La vitesse ne pouvant être infinie en aucun point du fluide, la constante C_1 qui figure dans l'équation (44') est nécessairement nulle. Quant à la constante C_2, elle doit être telle que sur le cylindre de rayon R, tournant à la vitesse angulaire ω_o , la vitesse soit égale à $V_o = R.\omega_o$; cela impose :

$$C_2 = R.V_o$$

On a par suite :

$$(47)^*\qquad V = V_o.\frac{R}{r}$$

---

* Cette loi de répartition des vitesses est analogue à celle qui correspond au mouvement d'un fluide parfait créé par un tourbillon rectiligne indéfini d'intensité : $I = \pi.\frac{V_o}{R}$. Ce résultat n'est dû qu'à une coïncidence, les deux phénomènes étant d'essences entièrement différentes.

En portant dans l'équation (43) l'expression de la vitesse ainsi trouvée, il vient :

$$\frac{dP^*}{dr} = \rho . V_o^2 . \frac{R}{r^3}$$

et :

$$P^* = P_o^* - \frac{\rho V_o^2}{2} . \frac{R^2}{r^2}$$

$P_o^* = p_o^*$ désignant la valeur de la pression étoilée à l'infini. La rotation du cylindre a donc pour effet d'engendrer une dépression à l'intérieur du fluide ; celle-ci, maximale sur le cylindre lui-même, a pour valeur :

$$\Delta P^* = \frac{\rho V_o^2}{2}$$

La force tangentielle que le fluide exercerce sur la portion de cylindre comprise entre deux plans perpendiculaires à oz, et distants d'une longueur unité, a pour expression :

$$F = 2\pi . R. \eta. (\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r})_{r = R}$$

soit :

$$F = - 4\pi \eta. V_o$$

Son moment, par rapport à l'axe oz, est :

(48) $\Gamma = - 4\pi.\eta.R. V_o$

et, par conséquent, lui fournir une puissance :

(49) $W = 4 \pi. \eta. V_o^2$

Cette puissance est entièrement dissipée par les frottements visqueux existant à l'intérieur de la masse fluide comprise entre deux plans perpendiculaires à oz, et distants d'une longueur unité.

III - ECOULEMENT A L'INTERIEUR D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE INDEFINI ANIME D'UN MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME -

La vitesse en un point quelconque situé à la distance r de l'axe est donnée par la formule générale (44') dans laquelle la constante C_2 est nécessairement nulle, sinon la vitesse serait infinie.

Comme par ailleurs, la vitesse sur le cylindre tournant doit être égale à $\omega_o R$, on a donc :

(50) $V = \omega_o . R$

ce qui montre que le liquide tourne en bloc, à la manière d'un solide, à la vitesse angulaire ω_o . Dans ces conditions, les efforts tangentiels sont évidemment nuls.

IV - ECOULEMENT DE COUETTE

On appelle ainsi l'écoulement giratoire qui s'effectue entre deux cylindres coaxiaux indéfinis, de rayons R_1, R_2, animés d'un mouvement de rotation uniforme avec des vitesses angulaires respectivement égales à ω_1 et ω_2 - (Fig. 17) -

D'après l'équation (44'), et compte tenu des conditions aux limites : $V = V_1 = R_1 . \omega_1$, pour $r = R_1$ et $V = V_2 = R_2 \omega_2$, pour $r = R_2$, la vitesse en un point M situé à la distance r de l'axe oz a pour expression :

$$(51) \qquad V = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} . \left[(\omega_2 . R_2^2 - \omega_1 . R_1^2) . r - \frac{R_1^2 R_2^2}{r} . (\omega_2 - \omega_1) \right]$$

Les forces tangentielles, exercées par le fluide situé à l'intérieur d'un cylindre de rayon r et de hauteur unité, sur le fluide situé à l'extérieur de ce cylindre, créent un couple :

$$(52) \qquad \Gamma = - 4 \pi . \eta . \frac{R_1^2 . R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} . (\omega_2 - \omega_1)$$

dont la valeur est indépendante de r. *

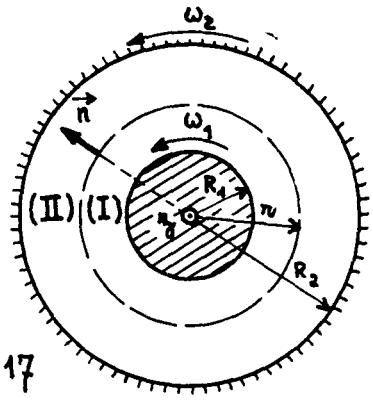


Fig: 17

Pour maintenir constantes les vitesses des cylindres tournants il faut exercer sur ceux-ci les couples :

$$C_1 = - 4\pi . \eta . (\omega_2 - \omega_1) . \frac{R_1^2 . R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$C_2 = + 4\pi . \eta . (\omega_2 - \omega_1) . \frac{R_1^2 . R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

* Ce résultat n'est pas dû à un concours de circonstances propres au problème de Couette ; il demeure valable pour tous les écoulements giratoires. En effet, l'équation fondamentale de la dynamique : $\sum I . \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum C$, appliquée à tout le fluide situé entre deux cylindres de rayons r_1 et r_2 se réduit ici à $\sum C = 0$, de sorte que l'on a bien : $|\Gamma_1| = |\Gamma_2|$.

et par conséquent, leur communiquer les puissances :

$$W_1 = -4\pi.\eta.(\omega_2 - \omega_1).\omega_1.\frac{R_1^2 . R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$W_2 = +4\pi.\eta.(\omega_2 - \omega_1).\omega_2.\frac{R_1^2 . R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

La puissance totale fournie au système :

$$(53) \qquad W = W_1 + W_2 = 4\pi\eta.(\omega_2 - \omega_1)^2.\frac{R_1^2.R_2^2}{R_2^2-R_1^2}$$

est entièrement dissipée par les frottements à l'intérieur de la masse fluide comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe des cylindres, et distants d'une longueur unité.

Comme application de cette théorie, signalons la méthode utilisée par Couette pour la mesure de la viscosité des liquides.

Le liquide étudié est disposé entre deux cylindres coaxiaux ; l'un de ceux-ci, généralement le cylindre intérieur, est suspendu par un fil de torsion ; l'autre est animé d'un mouvement de rotation uniforme.

Lorsque le régime permanent est établi, le cylindre intérieur, de hauteur ℓ , s'immobilise. A ce moment là, il est soumis, de la part du fluide, à un couple :

$$(54) \qquad \Gamma_1 = 4\pi\eta.\omega_2.\frac{R_1^2 . R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.\ell$$

égal au couple antagoniste créé par la torsion du fil de suspension. Or, celui-ci peut être déterminé avec précision en mesurant, par la méthode optique de Poggendorf, l'angle dont a tourné ce cylindre du fait de la mise en mouvement du fluide par le cylindre extérieur.

Connaissant les caractéristiques de l'appareil et la vitesse de rotation ω_2 du cylindre extérieur, la relation (54) permet de tirer la valeur de la viscosité η .

Pour réduire au maximum les causes d'erreurs dues à l'influence du fond et de la surface libre, on dispose, de part et d'autre du cylindre intérieur, deux cylindres de garde (G) et (G') d'axe oz et de rayons R_1 . L'espace $e = R_2 - R_1$ compris entre les cylindres étant habituellement très petit vis-à-vis de la hauteur l, on peut alors admettre que le cylindre intérieur est situé tout entier dans une zone où l'écoulement est bien conforme à la théorie faite dans le cas où les cylindres sont indéfinis - (Fig. 18) -

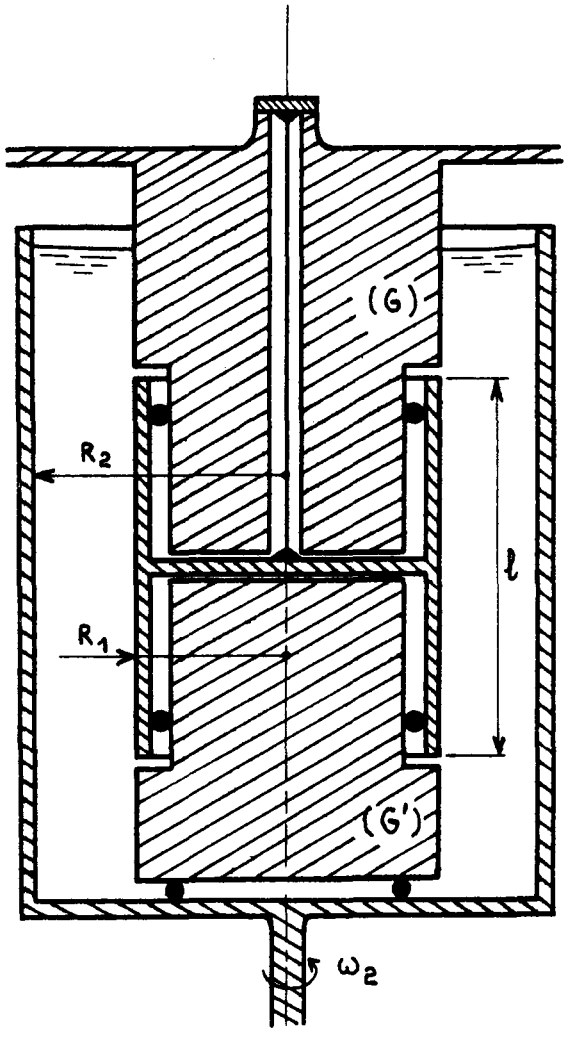


Fig : 18

Remarque :

Lorsque les rayons R_1 et R_2 sont très peu différents l'un de l'autre, le couple auquel est soumis le cylindre intérieur a sensiblement pour valeur, d'après la relation (54) :

$$\Gamma_1 = \eta . \frac{V_2}{e} . S_1 . R_1 \quad ,$$

S_1 désignant la surface latérale de ce cylindre.

Ce résultat approché aurait pu être établi directement en admettant que la force de frottement par unité de surface est encore égale à : $\eta . \frac{V_2}{e}$, tout comme dans le cas de l'écoulement entre deux plans parallèles, l'un étant fixé, l'autre glissant sur lui-même à la vitesse V_2 .

CHAPITRE IV

GENERALISATION DE LA NOTION DE PERTE DE CHARGE

Considérons un tube de courant, limité par des parois immobiles (Γ) et admettons qu'à ses deux extrémités on puisse trouver deux domaines à l'intérieur desquels les filets liquides sont rectilignes et parallèles entre eux. Soient (S_1), (S_2) deux sections droites disposées dans chacun de ces domaines ; $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ les normales à ces sections, orientées dans le sens du courant - (Fig. 19)

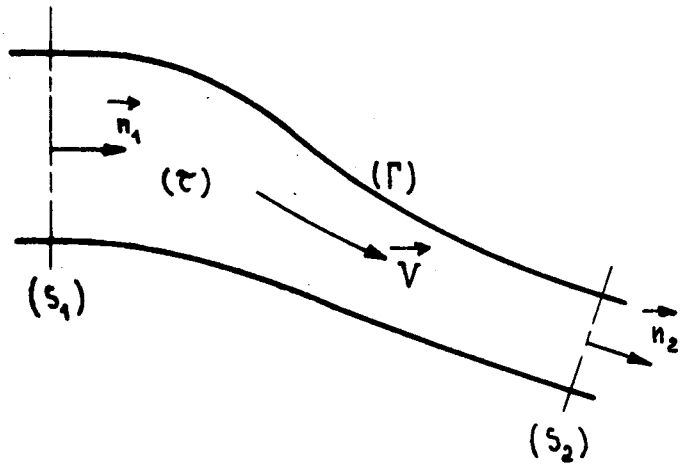


Fig : 19

Nous appliquerons le théorème de l'énergie cinétique à tout le fluide (τ) compris entre les sections (S_1) et (S_2) ; en désignant par $d\,E_c$ l'accroissement de l'énergie cinétique du système durant le temps dt et par $d\mathcal{E}_a$, $d\mathcal{E}_\ell$, $d\mathcal{E}_\nu$ les travaux effectués pendant ce même temps par les forces appliquées, les forces de liaison et les forces de viscosité, on a :

$$dE_c = d\mathcal{E}_a + d\mathcal{E}_\ell + d\mathcal{E}_\nu$$

et par suite :

$$d\mathcal{E}_\nu = dE_c - d\mathcal{E}_a - d\mathcal{E}_\ell \tag{55}$$

Explicitons chacun des termes du second membre de cette égalité :

A - Calcul de dE_c

Pour une particule élémentaire de masse dm, on a :

$$d^4E_c = \frac{1}{2}\, d(V^2).\ dm = \frac{1}{2}.\left[\vec{V}.\ dt.\ \vec{\text{grad}}(V^2) + \frac{\partial V^2}{\partial t}.\ dt\right].\ dm$$

soit, puisque nous considérons un fluide isovolume en mouvement permanent :

$$d^4E_c = \frac{1}{2}\ \rho.\ dt.\ \mathrm{div}\ (V^2.\ \vec{V})\ .\ d\tau$$

L'accroissement d'énergie cinétique du système considéré est donc :

$$dE_c = dt.\ \iiint_\tau \mathrm{div}(\frac{\rho V^2}{2}\ .\ \vec{V}).\ d\ \tau$$

$$= dt.\ \iint_S \frac{\rho V^2}{2}\ .\ \vec{V}\ .\ \vec{n}\ .\ dS$$

Mais comme l'intégrale correspondant à la surface latérale (Γ) du tube de courant est évidemment nulle, on peut écrire :

$$(56) \qquad dE_c = dt.\ \left[\iint_{S_2} \frac{\rho V^2}{2}\ .\ V.\ dS - \iint_{S_1} \frac{\rho V^2}{2}\ .\ V.\ dS \right]$$

B - Calcul de $d\mathcal{E}_a$:

Le travail des forces de pesanteur appliquées à la masse dm est :

$$d^4\mathcal{E}_a = \vec{V}\ \ dt.\ \vec{\mathrm{grad}}(-g.h).dm = -\ dt.\ \mathrm{div}(\varpi h.\vec{V}).d\tau$$

D'où l'expression du travail total des forces de pesanteur :

$$d\mathcal{E}_a = -\ dt.\ \iint_S \varpi h.\ \vec{V}.\ \vec{n}.\ dS$$

qui se réduit d'ailleurs ici, à :

$$(57) \qquad d\mathcal{E}_a = dt.\ \left[\iint_{S_1} \varpi.\ h.\ V.\ dS - \iint_{S_2} \varpi h.\ V.\ dS \right]$$

C - Calcul de $d\mathcal{E}_\ell$:

Le travail correspondant aux forces de pression qui s'exercent sur la surface latérale (Γ) du tube de courant est nul puisqu'on a $V = 0$ ou $\vec{p}.\ \vec{V} = 0$ selon que l'élément considéré est une paroi fixe ou une surface libre ; on a donc :

$$d\mathcal{E}_\ell = dt.\ \left[\iint_{S_1} \vec{p}\ (M,\ \vec{n}_1,\ t).\ \vec{V}.\ dS - \iint_{S_2} \vec{p}\ (M,\ \vec{n}_2,\ t).\ \vec{V}.\ dS \right]$$

soit :

$$d\mathcal{C}_\ell = dt. \left[\iint_{S_1} p_{n_1} . V. dS - \iint_{S_2} p_{n_2} . V. dS \right]$$

Mais, comme (S_1) et (S_2) sont des surface planes disposées normalement à un courant liquide dont les trajectoires sont rectilignes et parallèles, on a, sur chacune de celles-ci :

$$p_n = N_3 = P$$

D'où, en définitive, le travail des forces de liaison :

(58) $$d\mathcal{C}_\ell = dt . \left[\iint_{S_1} P. V. dS - \iint_{S_2} P. V. dS \right]$$

En portant dans l'équation (55) les expressions de dE_c , $d\mathcal{C}_a$, $d\mathcal{C}_\ell$ que nous venons d'obtenir, il vient :

$$d\mathcal{C}_\nu = dt. \left[\iint_{S_2} (P^* + \frac{\rho V^2}{2}). V. dS - \iint_{S_1} (P^* + \frac{\rho V^2}{2}). V. dS \right.$$

La déperdition d'énergie, durant l'unité de temps, dans le volume (τ) a alors pour valeur :

$$\Delta W = E_{T_1} - E_{T_2}$$

E_{T_1} , E_{T_2} , désignant respectivement les débits d'énergie technique qui traversent les sections (S_1) et (S_2)

On en déduit l'expression de la perte de charge :

$$\Delta H = \frac{\Delta W}{\varpi Q}$$

entre les sections (S_1) et (S_2), soit :

(59) $$\Delta H = \left[(\frac{P}{\varpi} + h) + \alpha. \frac{U^2}{2g.} \right]_{S_1} - \left[(\frac{P}{\varpi} + h) + \alpha. \frac{U^2}{2g} \right]_{S_2}$$

Notons que ce résultat aurait pu être établi directement en exprimant le travail des forces intérieures par l'intégrale :*

$$\mathcal{E}_\nu = \iiint_\tau \mathcal{D}.\, d\tau$$

Considérons maintenant le cas où il existe des parois mobiles entre les sections (S_1) et (S_2) ; durant l'unité de temps, celles-ci échangent avec le fluide une énergie $\mathcal{P}$, que nous compterons positivement si le fluide reçoit de l'énergie ; négativement dans le cas contraire.

Les calculs précédents demeurent valables à condition d'ajouter à l'expression (58) du travail des forces de liaison, le travail $\mathcal{P}$. dt effectué par les parois mobiles ; on écrira donc ici :

$$d\mathcal{E}_\ell = dt.\left[\iint_{S_1} P.\, V.\, dS - \iint_{S_2} P.\, V.\, dS + \mathcal{P}\right]$$

et, par suite :

$$\Delta H = \left[\left(\frac{P}{\varpi} + h\right) + \alpha.\frac{U^2}{2g}\right]_{S_1} - \left[\left(\frac{P}{\varpi} + h\right) + \alpha.\frac{U^2}{2g}\right]_{S_2} + \frac{\mathcal{P}}{\varpi.Q}$$

soit encore :

(60) $$\boxed{\varpi.Q.\,(H_2 - H_1) = \mathcal{P} - \varpi.\, Q.\, \Delta H}$$

H_2, H_1 désignant respectivement les charges dans les sections (S_2), (S_1).

Il apparait ainsi que l'énergie acquise par le fluide entre les sections (S_1) et (S_2), durant l'unité de temps, est :

$$\varpi.\, Q.\, (H_2 - H_1)$$

L'équation (60) peut être considérée comme une généralisation de l'équation de Bernoulli.

---

* Le lecteur désireux d'effectuer ce calcul devra démontrer au préalable les identités suivantes, valables seulement pour un fluide isovolume :

$$\mathcal{D} = \eta.\left[\Delta(V^2) - (\mathrm{Rot}\,\vec{V})^2 - 2\vec{V}.\ \Delta\vec{V}\right]$$

$$= \eta.\ \mathrm{div}\left(\vec{\mathrm{grad}}\ V^2 + \mathrm{Rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}\right) - \mathrm{div}\left[\left(P^* + \frac{\rho V^2}{2}\right).\vec{V}\right] - \frac{\rho}{2}.\frac{\partial V^2}{\partial t}$$

CHAPITRE V

METHODE DE HELE-SHAW POUR LA RESOLUTION EXPERIMENTALE DE L'EQUATION DE LAPLACE

Un liquide visqueux s'écoule lentement, en régime permanent, entre deux plans parallèles très voisins (π_1) et (π_2), distants d'une longueur 2a ; les autres frontières sont constituées par des cylindres quelconques dont les génératrices sont perpendiculaires à ces plans.

Nous choisirons un système d'axes de coordonnées de telle sorte que le plan x o y , parallèle aux plans (π_1), (π_2), soit situé à égale distance de ceux-ci -(Fig. 20) -

Sauf dans le voisinage immédiat des frontières transversalles de l'écoulement, les trajectoires sont dessinées dans des plans $z = c^{te}$. Avec notre système d'axes, nous aurons donc :

$$w = 0$$

et, par suite :

$$\gamma_z = 0 \quad ; \quad \Delta w = 0$$

Comme par hypothèse le mouvement est très lent, on est en droit de négliger les forces d'inertie devant les autres forces qui sollicitent une particule : forces de pression, de viscosité, de pesanteur. Cela revient à négliger l'accélération dans l'équation de Navier (I - 71).

Enfin, les plans (π_1), (π_2) étant très rapprochés, on peut encore admettre, tout au moins pour les points suffisamment éloignés des cylindres transversaux, que les variations de vitesse sont beaucoup plus rapides dans une direction parallèle à o z que dans une direction parallèle à o x ou oy Dans ces conditions, on a sensiblement :

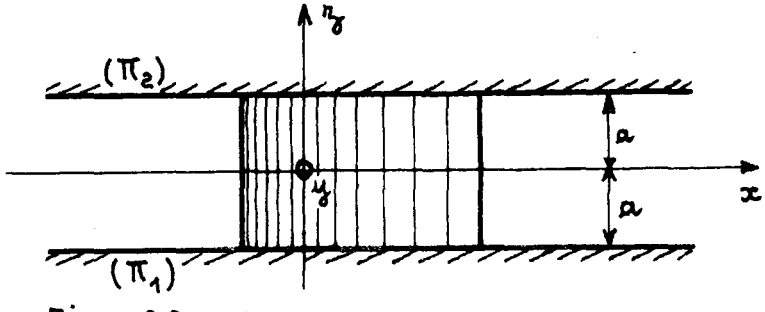


Fig : 20 (Vue de dessus au verso)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Compte tenu des diverses approximations que nous avons été amenés à formuler, les équations générales du mouvement se réduisent à :

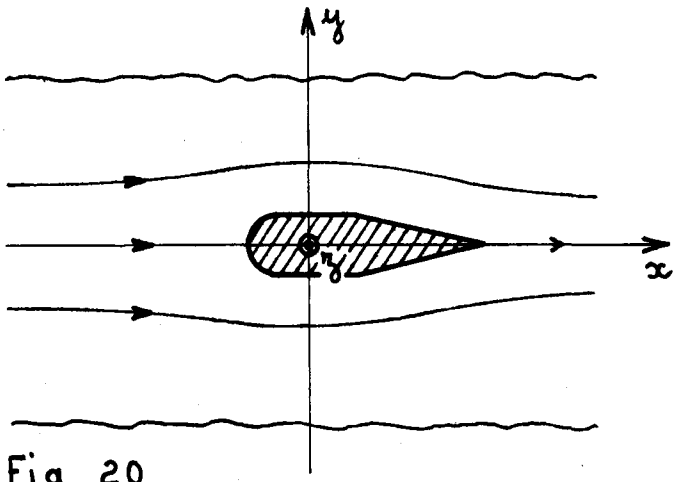


Fig 20

$$(61) \quad \frac{\partial P^*}{\partial x} = \eta . \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$(62) \quad \frac{\partial P^*}{\partial y} = \eta . \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$(63) \quad \frac{\partial P^*}{\partial z} = 0$$

avec :

$$(64) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Comme P^* , et par suite $\frac{\partial P^*}{\partial x}$, ne dépendent pas de z , l'équation (61) peut être aisément intégrée par rapport à cette variable z ; on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\eta} . \frac{\partial P^*}{\partial x} . z + f(x, y)$$

et :

$$u = \frac{1}{2\eta} . \frac{\partial P^*}{\partial x} . z^2 + z. f(x, y) + h(x, y)$$

Pour déterminer les fonctions f(x, y) et h(x, y), nous écrirons que la vitesse est nulle sur les plans (π_1) et (π_2), c'est-à-dire pour $z = - a$ et $z = + a$; cela impose :

$$f(x, y) \equiv 0$$

et :

$$h(x, y) \equiv - \frac{1}{2\eta} . \frac{\partial P^*}{\partial x} . a^2$$

D'où la première des relations suivantes :

$$(65) \quad \begin{aligned} u &= - \frac{1}{2\eta} . \frac{\partial P^*}{\partial x} . (a^2 - z^2) \\ v &= - \frac{1}{2\eta} . \frac{\partial P^*}{\partial y} . (a^2 - z^2) \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que W et $\frac{\partial P^*}{\partial z}$ sont nuls, on peut alors écrire :

$$(65') \quad \vec{V} = - \frac{1}{2\eta} . (a^2 - z^2). \text{grad } P^*$$

Cette équation, jointe à l'équation de continuité :

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

montre que la pression d'état étoilée satisfait à l'équation de Laplace :

(66)* $\Delta P^* = 0$

D'après l'équation (65'), il apparait que la topographie des lignes de courant reste inchangée, quelle que soit la cote z du plan dans lequel on observe l'écoulement ; lorsqu'on passe d'un plan de cote z_1 à un plan de cote z_2, toutes les vitesses sont seulement multipliées par un même facteur.

Dans un plan $z = cte$, la loi de distribution des vitesses est identique à celle qui correspond à l'écoulement plan irrotationnel d'un fluide parfait s'effectuant entre les mêmes limites. Dans ce plan, le champ de vitesse dérive donc d'un potentiel scalaire harmonique :

(67) $\varphi = -\frac{1}{2\eta}(a^2 - z^2).\ P^*$

Cette analogie est utilisée pour visualiser les lignes de courant des écoulements à potentiel des vitesses**. Les plans (π_1) et (π_2) sont constituées habituellement de deux glaces parfaitement planes, séparées par une distance de l'ordre du millimètre ; une série de petits orifices disposés à l'amont permettent d'introduire un colorant de façon à matérialiser les lignes de courant.

---

* Notons que ce résultat est général pour tous les écoulements, appelés "écoulements rampants", pour lesquels l'accélération peut être considérée comme négligeable. En effet, d'après l'équation de Navier :

$$\vec{grad}\ P^* = \eta.\ \Delta\vec{V},$$

on a immédiatement :

$$div.\ \vec{grad}\ P^* = -\ \eta.\ div\left[\vec{Rot}.\ Rot\vec{V}\right]$$

soit :

$$\Delta P^* = 0$$

**Parmi les problèmes qu'il est intéressant de traiter par la méthode de la cuve à huile, citons entre autres :

- Celui de la recherche de la loi de distribution des vitesses le long des profils aérodynamiques.
- Celui de la détermination de la surface libre à l'intérieur des digues en terre.

Par ailleurs, la composante normale de la pression qui s'exerce sur les plans (π_1) et (π_2) se réduit à :

$$p_n = N_3 = P$$

aussi, de la mesure de la hauteur piézométrique en un point quelconque de l'un de ces plans, la relation (67) permet de déterminer la valeur, en ce point, du potentiel correspondant à l'écoulement, entre les mêmes frontières, d'un fluide parfait.

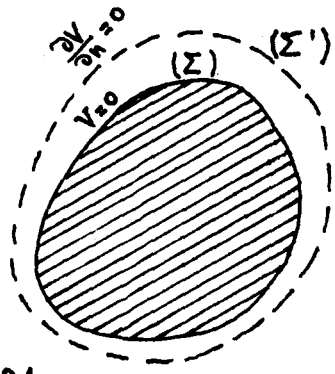
Une difficulté apparait cependant du fait qu'au contact des parois, on a $V = 0$ dans le cas d'un fluide réel, alors que l'on a seulement $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ dans le cas d'un fluide parfait.

Il en résulte que si le mouvement du fluide visqueux était à potentiel des vitesses dans tout le domaine étudié (τ), on aurait, sur une paroi quelconque, non seulement $\psi = c^{te}$, mais aussi $\varphi = c^{te}$, de sorte que cette paroi serait une ligne le long de laquelle la fonction de potentiel complexe $\xi = \varphi + i\psi$ aurait une valeur constante, constante que l'on peut d'ailleurs poser égale à zéro. Or, une fonction holomorphe ne peut présenter une accumulation de zéro que si elle est identiquement nulle, ce qui reviendrait à dire que tout le fluide est au repos. Devant cette contradiction, nous sommes amenés à admettre que l'écoulement n'est pas à potentiel des vitesses au voisinage immédiat des obstacles transversaux, comme cela était d'ailleurs prévisible vues les approximations que nous avons dû faire pour établir les relations (65).

Le domaine (τ'), à l'intérieur duquel le mouvement est à potentiel des vitesses est donc isolé des parois par une couche fluide à l'intérieur de laquelle la loi de répartition des vitesses n'est pas connue, les frontières (Σ') de l'écoulement potentiel enveloppant alors les véritables frontières (Σ) - (Fig. 21).

Autrement dit, on ne traite pas le problème de l'écoulement d'un fluide parfait autour des obstacles disposés entre les glaces de la cuve, mais celui de l'écoulement autour d'obstacles déformés.

Cependant, l'expérience montre que l'épaisseur de la couche fluide comprise entre (Σ) et (Σ') est habituellement de l'ordre de grandeur de



(τ')

Fig : 21

l'épaisseur 2a comprise entre les glaces *. En donnant à celle-ci une valeur très faible, on rend donc négligeable l'erreur due au fait que les conditions aux limites sont différentes pour les fluides visqueux et les fluides parfaits.

---

* Au voisinage des singularités, l'épaisseur de cette couche fluide parasite peut être beaucoup plus importante.

ELEMENTS D'HYDRAULIQUE INDUSTRIELLE

CHAPITRE I

THEOREME D' EULER

La plupart des développements relatifs à la dynamique du solide ont pour base deux théorèmes fondamentaux : le théorème de l'énergie cinétique et le théorème des quantités de mouvement. De même en hydraulique appliquée, nous aurons très souvent recours au théorème de Bernoulli et au théorème d'Euler. Le premier, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, n'est autre que l'adaptation du théorème de l'énergie cinétique au domaine de la mécanique des fluides ; le second, que nous démontrerons ici, ne constitue également qu'une extension du théorème des quantités de mouvement.

I - THEOREME D'EULER DANS LE CAS D'UN FLUIDE QUELCONQUE EN MOUVEMENT NON PERMANENT.

Considérons une surface fermée immobile (S), dessinée à l'intérieur d'un fluide en mouvement. D'après l'équation fondamentale de la dynamique, appliquée au système matériel constitué par tout le fluide contenu à l'intérieur de la surface (S), on a, à tout instant :

(1) $$\Sigma\vec{F}_e = \Sigma \ dm.\ \vec{\gamma} = \iiint_\tau \rho \ .\ \vec{\gamma}.\ d\tau$$

$\Sigma\vec{F}_e$ désignant la somme des forces extérieures appliquées au système,
(τ) étant le volume délimité par la surface (S).

Compte tenu de l'équation de continuité :

(2) $$\text{div}\ \rho\vec{V} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = o$$

nous allons modifier l'expression de l'intégrale du second membre de (1).

En explicitant $\vec{\gamma}$ par la relation :

$$\vec{\gamma} = \vec{i}.(\vec{V}.\vec{\text{grad}}\ u) + \vec{j}.\ (\vec{V}.\vec{\text{grad}}\ v) + \vec{k}.(\vec{V}.\vec{\text{grad}}\ w) + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

on obtient tout d'abord :

$$\Sigma\vec{F}_e = \iiint_\tau \left[\vec{i}.\ (\rho\vec{V}.\ \vec{\text{grad}}\ u) + \vec{j}.(\rho\vec{V}.\ \vec{\text{grad}}\ v) + \vec{k}.(\rho\vec{V}.\vec{\text{grad}}\ W) + \rho.\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right] d\tau$$

soit encore, puisque d'après l'équation (2), on a :

$$\rho.\ \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) - \vec{V}.\ \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{V}.\ \text{div}\ \rho\vec{V}$$

$$\overrightarrow{\Sigma F_e} = \iiint_\tau \Big[\vec{i}.(\rho\vec{V}.\overrightarrow{grad}\, u + u.\, div\ \rho\vec{V}) + \vec{j}.(\rho\vec{V}.\ \overrightarrow{grad}\, v + v.div\ \rho\vec{V}) + \vec{k}(\rho\vec{V}.\overrightarrow{grad}\, w + w.\ div\ \rho\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial t}\ (\rho\vec{V}) \Big].\ d\tau$$

$$= \iiint_\tau \Big[\vec{i}.\ div\ (u.\rho\vec{V}) + \vec{j}.\ div(\ v.\ \rho\vec{V}) + \vec{k}.\ div(\ w.\rho\vec{V}) \Big]\ .\ d\tau\ + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_\tau \rho\vec{V}.d\tau$$

En appliquant la formule d'Ostrogradski à la première intégrale du second membre, il vient en définitive :

$$(3) \qquad \overrightarrow{\Sigma F_e} = \iint_S \vec{V}.\ (\rho\vec{V}.\ \vec{n}).\ dS + \frac{\partial}{\partial t}\ .\iiint_\tau \vec{V}.\ dm$$

La première intégrale de cette relation représente la somme des quantités de mouvement qui sortiraient de la surface (S) si les conditions d'écoulement à l'instant t demeuraient inchangées pendant l'unité de temps ; on l'appelle "débit de quantité de mouvement à travers S".

Quant à la deuxième intégrale, elle représente la somme des quantités de mouvement qui sont attachées, à l'instant t, aux points matériels situés à l'intérieur de (S).

Le théorème d'Euler, qui traduit l'équation (3), s'énonce donc ainsi : "La somme de toutes les forces extérieures qui agissent sur les particules fluides contenues à l'intérieur d'une surface fermée quelconque (S),est équivalente à la somme du débit de quantité de mouvement sortant de (S) et de la dérivée partielle, par rapport au temps, de la somme des quantités de mouvement des particules qui se trouvent à l'intérieur de (S)".

Remarques :
---

1 - Bien que les théorèmes de Bernoulli et d'Euler découlent du même axiome fondamental de la mécanique, ils ne sont pas équivalents. En effet,le premier suppose que l'énergie se conserve, alors que le second n'exige aucune clause restrictive. L'avantage du théorème d'Euler réside, ainsi que nous le verrons, dans le fait qu'il permet la détermination des forces globales qui agissent sur une masse fluide donnée (τ) dès que l'on connaît l'évolution de la vitesse et de la masse spécifique en chaque point de (τ), même,si à l'intérieur de celle-ci, il y a une forte déperdition d'énergie par frottements internes. Par contre, le théorème d'Euler ne pourra nous fournir aucun renseignement sur le détail de l'écoulement à l'intérieur de cette masse fluide.

2 - Rappelons que la relation (3) a été établie en considérant une surface fixe (S) et que, par conséquent, celle-ci ne renferme pas les mêmes points matériels à l'instant t et à l'instant $t + dt$. Il est bien évident que si l'on appliquait la relation :

$$\Sigma \vec{F_e} = \Sigma\, dm.\, \vec{\gamma}$$

au système de points matériels (Ω) contenus à l'intérieur d'une surface fluide (Σ), on retrouverait l'équation classique de la mécanique :

$$\Sigma \vec{F_e} = \frac{d}{dt} \iiint_{(\Omega)} \vec{V}.\, dm$$

dans laquelle l'opérateur $\frac{d}{dt}$ est la dérivée totale.

II - THEOREME D'EULER DANS LE CAS DES MOUVEMENTS PERMANENTS.

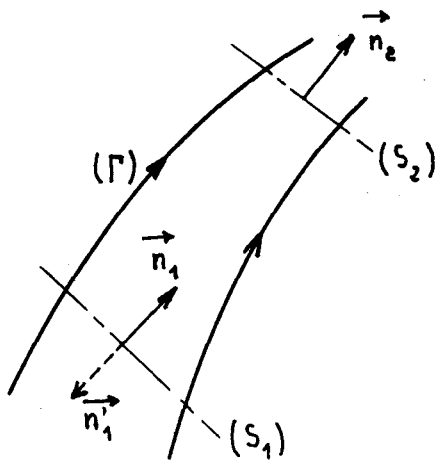
Les dérivés partielles par rapport au temps étant maintenant nulles, l'équation (3) se réduit à :

$$(4) \qquad \Sigma \vec{F_e} = \iint_S \vec{V}.\, (\rho \vec{V}.\, \vec{n}).\, dS$$

En mouvement permanent, la détermination des forces globales qui agissent sur une masse fluide donnée n'exige donc que la connaissance des vitesses tout le long de la surface qui délimite cette masse fluide.

Le théorème d'Euler sera alors particulièrement utile dans tous les cas où l'on a affaire à un écoulement tumultueux pour lequel il est impossible de connaître la répartition des vitesses au sein de celui-ci.

Considérons maintenant le système constitué par le fluide qui se trouve contenu, à l'instant t, à l'intérieur d'un tube de courant (Γ) limité par deux sections quelconques S_1 et S_2, S_2 étant disposée à l'aval de S_1 ; ces deux surfaces sont orientées de telle manière que leurs demi-normales positives n_1 et n_2 soient toutes deux dirigées dans le sens de l'écoulement. Le débit de quantité de mouvement qui traverse la paroi latérale du tube de courant (Γ) étant évidemment nul, l'équation (4) s'écrit ici :



$$\Sigma \vec{F_e} = \iint_{S_2} \vec{V}.\, (\rho \vec{V}.\, \vec{n_2})\; dS + \iint_{S_1} \vec{V}.(\rho \vec{V}.\vec{n'_1})\; dS$$

$\vec{n'_1}$ étant la demi-normale à S_1, opposée à $\vec{n_1}$. On a par suite :

(4') $$\Sigma \vec{F_e} = \iint_{S_2} \vec{V}.\ (\rho\vec{V}.\ \vec{n_2}).\ dS - \iint_{S_1} \vec{V}\ (\rho\vec{V}.\ \vec{n_1}),\ dS$$

Ce qui permet d'énoncer :

"La somme des forces extérieures qui sollicitent le fluide qui se trouve contenu à l'intérieur d'un tube de courant limité par deux sections (S_1) et (S_2), est équivalente à la différence $\vec{W_2} - \vec{W_1}$ des débits de quantités de mouvement qui traversent les sections (S_2) et (S_1)".

Dans le cas d'un filet de courant, l'équation (4') s'écrit simplement :

(4") $$\Sigma \vec{F_e} = (\rho.\ dQ.\ \vec{V})_2 - (\rho.\ dQ.\ \vec{V})_1$$

$\rho.dQ$ étant le débit massique de ce filet de courant.

III - EXPRESSION DU DEBIT DE QUANTITE DE MOUVEMENT TRAVERSANT UNE SURFACE PLANE NORMALE AUX LIGNES DE COURANT, LORSQUE CELLES-CI SONT RECTILIGNES ET PARALLELES ENTRE ELLES.

Le débit de quantité de mouvement, dont l'expression générale est :

$$\vec{W} = \iint_S \vec{V}.\ (\rho\vec{V}.\ \vec{n}).\ dS$$

s'écrit ici :

$$\vec{W} = \iint_S \rho.V_n^2\ \vec{n}.dS$$

ou bien :

$$\vec{W} = \rho.\ \vec{n}.\iint_S V_n^2\ dS$$

si le fluide est isovolume.

Soient Q, le débit volumique à travers la section (S) ; $U = \frac{Q}{S}$, la vitesse moyenne dans cette section. En introduisant ces grandeurs dans la dernière expression de W, on obtient :

$$\vec{W} = \rho.\ Q.\vec{U}.\frac{\iint_S V_n^2\ dS}{U^2.S}$$

$\vec{U}$ étant le vecteur, d'intensité U, de même direction et de même sens que la demi-normale $\vec{n}$ à la surface plane (S).

Enfin, en posant :

(5) $$\beta = \frac{\iint_S V^2 \, dS}{U^2 . S}$$

il vient :

(6) $$\vec{W} = \beta . \rho . Q . \vec{U}$$

Le coëfficient sans dimension β - appelé "coëfficient de quantité de mouvement" - serait égal à l'unité si le vecteur vitesse conservait la même valeur en tout point de (S).

Lorsque les vitesses sont inégales dans (S), β est supérieur à l'unité. En effet, en posant :

$$V = U.(1 + \varepsilon),$$

ainsi que nous l'avons déjà fait pour démontrer que le coëfficient cinétique est un nombre plus grand que 1, on obtient :

$$\beta = 1 + \frac{1}{S} . \left[2 \iint_S \varepsilon . \, d\, S + \iint_S \varepsilon^2 . dS \right]$$

La première intégrale du second membre étant nulle, il reste :

(5') $$\beta = 1 + \frac{1}{S} . \iint_S \varepsilon^2 . \, dS$$

ce qui démontre bien la proposition annoncée.

IV - ESTIMATION DU COEFFICIENT DE QUANTITE DE MOUVEMENT LORSQUE L'ON CONNAIT LE COEFFICIENT CINETIQUE.

L'expression du coëfficient cinétique α , dans le cas d'une surface pla plane, normale aux trajectoires supposées rectilignes et parallèles d'un courant liquide, est :

$$\alpha = 1 + \frac{1}{S} . \left[\iint_S 3\varepsilon^2 . \, dS + \iint_S \varepsilon^3 . \, dS \right]$$

Dans le cas où les écarts entre la vitesse locale V et la vitesse moyen moyenne sont faibles, ε est petit ; la seconde intégrale qui figure dans l'expression de α peut alors être négligée devant la première puisque d'une part, elle ne comporte que des termes plus petits et que, d'autre part, ces termes sont tantôt positifs, tantôt négatifs. D'où la valeur approchée de α :

$$\alpha = 1 + \frac{1}{S} . \iint_S 3\varepsilon^2 . \, dS$$

En comparant cette expression du coëfficient cinétique à celle du coëfficient de quantité de mouvement, on voit que l'on peut poser :

$$(7) \qquad \begin{aligned} \alpha &= 1 + 3\eta \\ \beta &= 1 + \eta \end{aligned} \qquad \left(\eta = \iint_S \varepsilon^2 . \, dS\right)$$

dans la mesure où, rappelons-le, les vitesses ne sont pas très différentes d'un point à l'autre de la section (S). Comme en pratique, cette condition est habituellement satisfaite, les relations (7) pourront alors être utilisées pour obtenir rapidement une valeur approchée de β lorsque α est connu ; la réciproque donne lieu évidemment à une estimation moins précise.

Exemple de calcul des coëfficients α , β :

Considérons un fluide visqueux isovolume en régime permanent, laminaire, dans une conduite circulaire très longue, de rayon R, d'axe (Δ). La loi de distribution des vitesses dans la conduite est :

$$V = V_M . \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

r étant la distance à l'axe (Δ) du point où la vitesse est V ; V_M désignant la vitesse sur cet axe. On en déduit immédiatement :

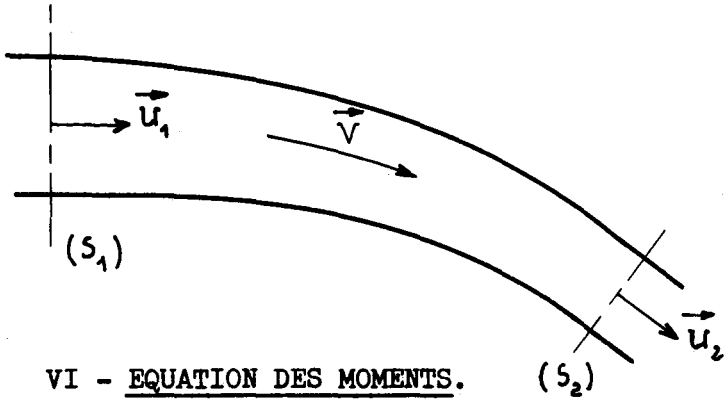
$$\begin{cases} U = \dfrac{V_M}{2} \\ \beta = \dfrac{4}{3} \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

On constate que, dans ce cas particulier, les relations (7) sont rigoureusement exactes.

V - THEOREME D'EULER DANS LE CAS D'UN TUBE DE COURANT LIMITE PAR DEUX SECTIONS (S_1), (S_2) DISPOSEES NORMALEMENT AUX TRAJECTOIRES DANS LES REGIONS OU CELLES-CI SONT RECTILIGNES ET PARALLELES.

Le fluide étant supposé isovolume et le mouvement permanent, l'équation (4'), valable pour un tube de courant quelconque se réduit ici à :

$$(8) \qquad F_e = \beta_2 . \rho . Q . \vec{U_2} - \beta_1 . \rho . Q . \vec{U_1}$$



Cette relation généralise la relation (4") établie dans le cas d'un filet de courant.

VI - EQUATION DES MOMENTS.

L'équation générale (3)-ou celles qui en sont dérivées - doit être considérée comme une identité entre deux torseurs. On admettra alors, sans démonstration, que l'on est en droit d'écrire aussi :

$$(9) \qquad \mathcal{M}^{t}_{(o)}(\Sigma \vec{F_e}) = \mathcal{M}^{t}_{(o)} \iint_S \vec{V}(\rho \vec{V}.\ \vec{n})dS + \mathcal{M}^{t}_{(o)} \frac{\partial}{\partial t} . \iiint_\tau \vec{V}.\ dm$$

CHAPITRE II

APPLICATIONS DU THEOREME D'EULER

Sans présenter de difficultés particulières, l'application du théorème d'Euler nécessite un minimum d'attention. Nous rappelerons tout d'abord quelques principes évidents que les débutants ont néanmoins tendance à ignorer.

1) Le système fluide (τ) auquel on applique le théorème, doit être défini sansambiguïté.

2) Dans le bilan des forces extérieures, on doit distinguer :

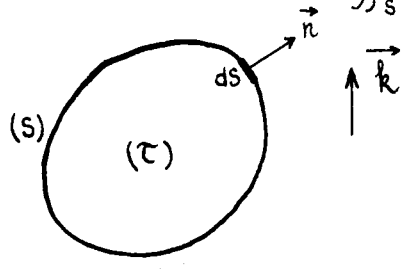
   a) Les forces massiques appliquées au fluide (τ)

   b) Les forces de pression exercées sur ce fluide par le milieu extérieur, fluide ou solide, à travers les divers éléments de la surface (S) qui délimite le domaine (τ).

I - REMARQUES CONCERNANT LES DIFFERENTES MANIERES D'EXPLICITER LES FORCES EXTERIEURES

D'après ce qui précède, la somme des forces extérieures a pour expression :

$$\sum \vec{F}_e = \iint_S -\vec{p}(M, \vec{n}, t) + \iiint_\tau \rho . \vec{F} . d\tau \qquad (10)$$



$\vec{p}$ désignant la pression absolue, s'exercant sur l'élément dS orienté par la demi normale $\vec{n}$ extérieure à (S) ; $\vec{F}$ désignant le champ de force massique ($\vec{F} = - g.\vec{k}$ dans le cas du champ de la pesanteur).

1-) Introduction des pressions relatives

Si p_o désigne une pression de référence, habituellement la pression atmosphérique, on définit la pression relative $\vec{p}_r(M, \vec{n}, t)$ par la relation :

$$\vec{p}(M, \vec{n}, t) = p_o.\vec{n} + \vec{p}_r(M, \vec{n}, t)$$

En substituant dans (10), il vient :

$$(11) \qquad \Sigma \vec{F_e} = -\iint_S \vec{p_n}(M,\vec{n},t).dS + \iiint_\tau \rho.\vec{F}.d\tau$$

puisque l'intégrale $\iint_S p_o.\vec{n}.dS$, où p_o est une constante, est identiquement nulle. D'où la proposition suivante : "Tous les calculs relatifs aux forces de surface peuvent être effectués en prenant seulement en compte la pression relative".

2-) Introduction despressions étoilées

Dans le cas d'un fluide isovolume, soumis à un champ de force massique dérivant d'un potentiel U, $\vec{F} = \vec{grad}\ U$, on a parfois intérêt à introduire la pression étoilée :

$$\vec{p}^*(M, \vec{n}, t) = \vec{p}(M, \vec{n}, t) - \rho.\ U\ .\ \vec{n}$$

En particulier, si $\vec{F}$ se réduit au champ de la pesanteur, on a :

$$\vec{p}^*(M, \vec{n}, t) = \vec{p}(M, \vec{n}, t) + \varpi\ h.\vec{n} \quad (\varpi = \rho g)$$

En substituant dans (10), il vient :

$$\Sigma \vec{F_e} = -\iint_S \vec{p^*}(M,\vec{n},t).dS - \rho.\iint_S U.\vec{n}.dS + \rho.\iiint_\tau \vec{grad}\ U\ .\ d\tau$$

soit :

$$(12) \qquad \Sigma \vec{F_e} = -\iint_S \vec{p^*}(M,\vec{n},t).dS$$

puisque, d'après la formule du gradient, on a :

$$\iint_S U.\vec{n}.dS = \iiint_\tau \vec{grad}\ U\ .\ d\tau$$

"Le bilan des forces extérieures peut donc être effectué en faisant abstraction des forces massiques, mais à condition de ne prendre en compte dans les forces de surface, que celles qui sont liées à la pression étoilée".

Cette remarque ne présente un intérêt que dans le cas des systèmes en charge.

3-) Calcul d'une force hydrodynamique

Le théorème d'Euler est souvent utilisé pour déterminer la force $\vec{R}$ que le fluide exerce sur une portion (Σ) de la surface (S).

Dans ce cas, la somme des forces extérieures s'explicite ainsi :

$$(13) \qquad \sum \vec{F_e} = -\vec{R} + \iint_{(S-\Sigma)} -\vec{p}\,.\,dS + \iiint_{\tau} \rho.\vec{F}\,.\,d\tau$$

le signe "moins" devant $\vec{R}$ provenant du fait que dans le bilan des forces extérieures, on doit prendre en compte l'action de la paroi sur le fluide, égale et opposée à l'action $\vec{R}$ du fluide sur cette paroi.

Dans le cas d'un fluide isovolume, soumis à un champ de force dérivant d'un potentiel U, on peut écrire :

$$\sum \vec{F_e} = -\vec{R} + \iint_{(S-\Sigma)} -\vec{p}\,.\,dS + \iint_{S} \rho.U.\vec{n}\,.\,dS$$

$$= -\vec{R} + \iint_{(S-\Sigma)} -\vec{p}\,.\,dS + \iint_{(S-\Sigma)} \rho.U.\vec{n}\,.\,dS + \iint_{\Sigma} \rho.U.\vec{n}.dS$$

$$= -\vec{R} + \iint_{(S-\Sigma)} -\vec{p}^{*}.\,dS + \iint_{\Sigma} \rho.U.\vec{n}\,.\,dS$$

soit :

$$(14) \qquad \sum \vec{F_e} = -\vec{R^*} + \iint_{(S-\Sigma)} -\vec{p}^{*}.\,dS$$

en posant :

$$(14') \qquad \vec{R} = \vec{R^*} + \iint_{\Sigma} \rho.U.\vec{n}\,.\,dS \quad ,$$

$\vec{R_s} = \iint_{\Sigma} \rho.U.\vec{n}\,.\,dS$ étant la résultante des pressions statiques s'exerçant sur l'élément de paroi (Σ).

Pour exprimer la somme des forces extérieures, on a donc la possibilité de recourir à l'artifice suivant :

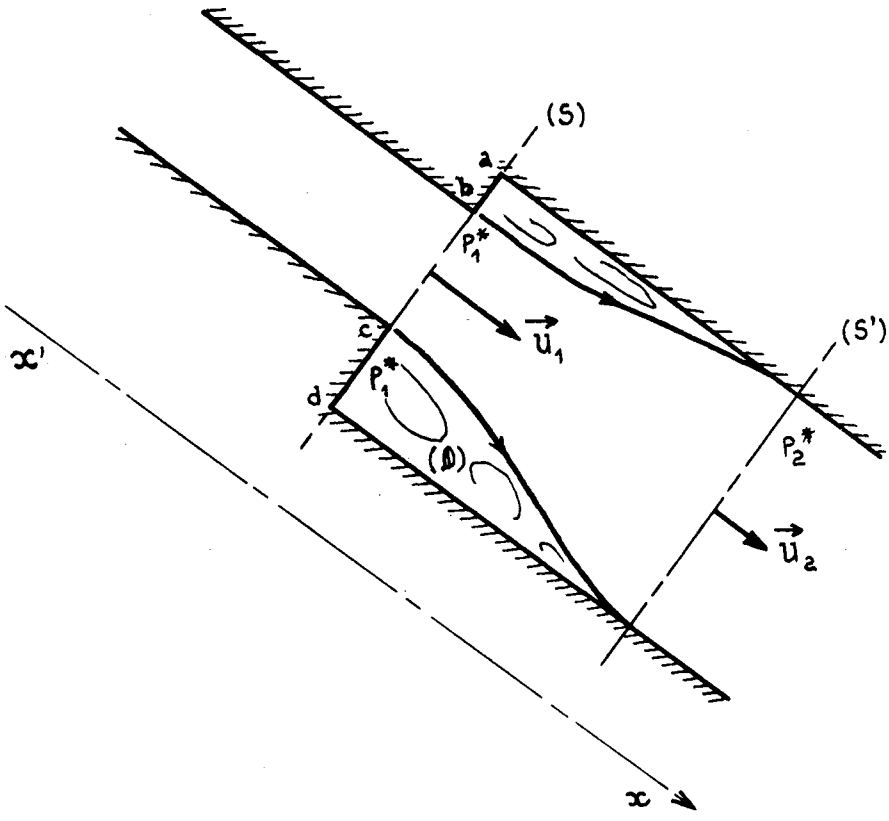
- On fait abstraction des forces massiques.
- On évalue les forces de surface sur ($S-\Sigma$) en ne prenant en compte que les pressions étoilées.
- L'application du théorème fournit, dans ces conditions, l'expression de la résultante dynamique $\vec{R}^*$.

- On obtient la résultante $\vec{R}$ en ajoutant à $\vec{R}^*$ la poussée statique $\vec{R}_S = \iint_\Sigma \rho\, U.\vec{n}.dS$ qui, dans le cas où le champ de force est celui de la pesanteur, a pour expression $\vec{R}_S = \iint_\Sigma -\vec{\omega}h.\vec{n}.dS$

Nous allons donner maintenant quelques exemples d'application de ce théorème.

II - PERTE DE CHARGE DUE A UN ELARGISSEMENT BRUSQUE : FORMULE DE BORDA

Considérons deux conduites cylindriques parallèles, de sections différentes S_1 et S_2, disposées l'une à la suite de l'autre sans raccordement progressif. Un liquide s'écoule en mouvement permanent dans le sens où il se produit un élargissement.



Après la section de raccordement (S), la veine fluide s'épanouit dans la conduite de grande section. L'écoulement correspondant, très perturbé, ne redevient régulier qu'à une certaine distance ℓ après le changement de section. On constate également que la veine liquide, avant d'occuper la pleine section (S_2) ; est bordée latéralement par une zone tourbillonnaire (D) dans laquelle les particules fluides ne sont pratiquement pas entraînées vers l'aval.

Nous nous proposons de calculer la perte de charge ΔH entre la section (S) et la section (S') au-delà de laquelle l'écoulement est régulier dans la conduite de section S_2.

Comme dans ces deux sections, les filets liquides sont rectilignes et parallèles entre eux, on a, par définition :

$$\Delta H = \frac{P_1^* - P_2^*}{\varpi} + \frac{\alpha_1 U_1^2 - \alpha_2 U_2^2}{2g}$$

Nous cherchons à exprimer $P_1^* - P_2^*$ en fonction des données cinématiques $U_1 = \frac{Q}{S_1}$ et $U_2 = \frac{Q}{S_2}$; pour cela, nous aurons recours au théorème d'Euler appliqué au système constitué par tout le fluide contenu entre les sections (S) et (S'). D'après l'équation (8), on a ici :

$$\beta_2.\rho.Q.\vec{U}_2 - \beta_1.\rho.Q.\vec{U}_1 = \Sigma \vec{F}_e \tag{8}$$

soit, en projection sur un axe x'x parallèle aux conduites :

$$\beta_2.\rho.Q.U_2 - \beta_1.\rho.Q.U_1 = (\Sigma \vec{F}_e)_x \tag{8'}$$

Nous expliciterons le second membre en faisant abstraction des forces de pesanteur et en introduisant les pressions étoilées dans l'avaluation des forces de surface.(remarque (2) du chapitre I). Nous distinguerons :

- L'action du fluide situé dans la conduite amont : $P_1^* .S_1.\vec{n}_1$
- La réaction de la cloison annulaire abcd, d'aire S_2-S_1. Pour exprimer celle-ci, nous remarquerons que dans la zone tourbillonnaire ($\mathcal{D}$), le mouvement est extrêmement lent, surtout au voisinage de la cloison abcd. On admet que le fluide est au repos et, par suite, que la pression étoilée est constante le long de cette cloison. Par raison de continuité la valeur de cette constante est égale à P_1^*. D'où la réaction de la cloison annulaire abcd : $P_1^*.(S_2-S_1).\vec{n}_1$.

  Pour l'ensemble de la section (S), on a donc simplement : $P_1^*.S_2.\vec{n}_1$
- L'action du fluide situé à l'aval dela section (S') : $P_2^*.S_2.\vec{n}_2$
- La réaction de la paroi latérale du tronçon de conduite compris entre (S) et (S'). Comme nous écrivons l'équation d'Euler en projection sur l'axe ox, nous n'avons à prendre en compte que la composante tangentielle des forces de pression. Or celle-ci est certainement très faible puisque les vitesses sont elles même très faibles dans la quasi totalité du domaine tourbillonnaire ($\mathcal{D}$) ; nous la négligerons.

En définitive, nous aurons sensiblement :

$$(\Sigma \vec{F}_e)_x = (P_1^* - P_2^*)\ S_2$$

et, d'après (8') :

$$\rho.(\beta_2.U_2^2 - \beta_1.U_1.U_2) = P_1^* - P_2^*$$

D'où l'expression de la perte de charge :

(15) $$\Delta H = \frac{1}{2g}\left[\alpha_1 . U_1^2 - 2\beta_1 U_1 U_2 + (2\beta_2 - \alpha_2) . U_2^2\right]$$

En admettant que les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 sont tous égaux à l'unité, on obtient la formule approchée due à Belanger :

(16) $$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)}{2g}$$

que l'on peut encore écrire, en posant $k = \frac{S_2}{S_1} = \frac{U_1}{U_2} > 1$:

(16') $$\Delta H = (1 - \frac{1}{k}) \cdot \frac{U_1^2}{2g} = (k-1)^2 . \frac{U_2^2}{2g}$$

L'expérience montre que la formule (16) fournit des valeurs de ΔH trop faibles. Certains auteurs lui ajoutent un terme correctif. En particulier Borda propose la formule :

(17) $$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} + \frac{1}{9} . \frac{U_2^2}{2g}$$

que l'on peut critiquer pour les raisons suivantes :

1) ΔH ne se réduit pas à zéro pour $U_1 = U_2$.

2) Pour $U_1 >>> U_2$, le terme empirique $\frac{1}{9} . \frac{U_2^2}{2g}$ n'apporte pratiquement aucune correction à la formule de Belanger.

On peut donner une autre expression au terme correctif à apporter à la formule de Belanger en tirant profit de la formule (15) qui donne une valeur plus exacte de ΔH.

Posons : $\alpha_1 = 1 + 3\,\eta_1$; $\alpha_2 = 1 + 3\,\eta_2$

Dans ces conditions, on sait que l'on a, avec une bonne approximation :
$\beta_1 = 1 + \eta_1$; $\beta_2 = 1 + \eta_2$.

En portant ces expression de α_1, β_1, α_2, β_2 dans (15), on obtient :

(15') $$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} + (3\,\eta_1 - \frac{2\eta_1}{k} - \frac{\eta_2}{k^2}) . \frac{U_1^2}{2g}$$

Dans le cas où l'élargissement brusque est précédé d'un tronçon de conduite suffisamment long, la répartition des vitesses dans la section de raccordement (S) est encore pratiquement identique à celle que l 'on observe en régime uniforme

dans ce tronçon. La valeur de α_1 et, par suite, celle de η_1 peuvent donc être considérées comme connues. Par contre, il n'est pas possible de prévoir la valeur du coefficient η_2 par des considérations théoriques. L'expérience a prouvé qu'il est très largement supérieur à η_1.

Mais l'examen de la formule (15') montre que le coefficient η_2 n'intervient pas d'une façon déterminante dans l'expression du terme correctif :

$$(3\eta_1 - \frac{2\eta_1}{k} - \frac{\eta_2}{k^2}) \cdot \frac{U_1^2}{2g}$$

Nous pourrons alors, sans commettre une erreur importante, admettre d'une façon tout à fait arbitraire que η_2 est lié à η_1 par la relation :*

$$\eta_2 = k.\eta_1$$

Dans ces conditions, l'équation (15') se simplifie et s'écrit :

$$\Delta H = \frac{(U_1-U_2)^2}{2g} + (\alpha_1-1).(1 - \frac{1}{k}).\frac{U_1^2}{2g}$$

Si on ne dispose pas des données nécessaires au calcul précis du coefficient cinétique α_1, on peut donner à celui-ci la valeur moyenne généralement admise dans le cas des conduites industrielles à section circulaire, soit $\alpha_1 = 1,05$; à cette valeur de α_1, il correspond la formule :

$$\Delta H = \frac{(U_1-U_2)^2}{2g} + 0,05\ (1 - \frac{1}{k}).\frac{U_1^2}{2g}$$

<u>Remarque</u> :

Dans le cas où une conduite de section S débouche directement dans un bassin de grandes dimensions, les développements précédents restent valables ; on remplacera alors U_2 par zéro dans chacune des relations déjà trouvées.

A ce moment là, la formule (18) fournit une valeur de la perte de charge rigoureusement égale à la perte de charge exacte donnée par la formule (15), soit :

$$(19) \qquad \Delta H = \alpha_1.\frac{U_1^2}{2g}$$

---

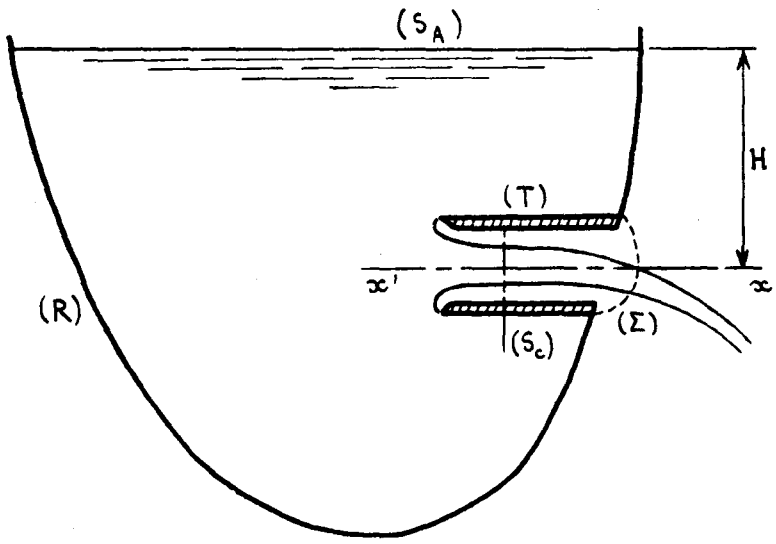
* Pour les valeurs de k légèrement supérieures à l'unité, on trouve ainsi que η_2 et η_1 sont du même ordre de grandeur, η_2 étant néanmoins supérieur à η_1 ; ce qui est conforme à la réalité. Par contre, pour les grande valeurs de k, l'hypothèse selon laquelle $\eta_2 = k\eta_1$ n'a évidemment aucun sens. Mais en ce qui nous concerne, ici, cela ne porte pratiquement pas à conséquence puisqu'à ce moment là, $\frac{\eta_2}{k^2} = \frac{\eta_1}{k}$ est négligeable devant η_1.

L'énergie cinétique du fluide qui arrive dans le bassin se trouve entièrement dissipée à l'intérieur de celui-ci.

Nous montrerons dans le cours de "Machines hydrauliques" que l'on peut récupérer partiellement cette énergie en disposant à l'extrémité de la conduite un divergent très progressif, appelé "diffuseur".

III -AJUTAGE CYLINDRIQUE RENTRANT OU AJUTAGE DE BORDA

Considérons un réservoir (R) de grandes dimensions contenant un liquide maintenu à un niveau constant, et à l'intérieur duquel débouche un tube cylindrique horizontal (T) dont la section n'est pas nécessairement un cercle.



Afin que la veine liquide qui s'échappe du bassin n'ait qu'une ligne de contact avec le tube, l'extrémité amont de celui-ci est biseautée.

Nous supposerons que la charge H, mesurée au-dessus de l'axe de l'ajutage, est assez grande pour que le jet soit suffisamment tendu et, qu'ainsi, il puisse sortir librement de l'ajutage sans en toucher les parois. Dans ces conditions, l'expérience montre qu'il existe, très près de l'extrémité amont de l'ajutage, une section verticale, d'aire S_c.

On pose :

$$S_c = C_c . S$$

S étant l'aire de la section <u>extérieure</u> du tube cylindrique,
C_c étant le coefficient de contraction.

Pour calculer C_c, nous appliquerons le théorème d'Euler au système (τ) constitué par tout le fluide compris entre la surface libre(S_A) et la section contractée (S_c).

On a :

$$(\beta.\rho.Q.\vec{U})_{S_c} - (\beta.\rho.Q.\vec{U})_{S_A} = \Sigma \vec{F}_e$$

et, en projection suivant l'axe x'x du cylindre :

$$\beta_c.\rho.Q.U_c = (\Sigma \vec{F}_e)_x$$

puisque la vitesse $\vec{U}_{S_A}$, très petite du fait des grandes dimensions du réservoir, est en outre sensiblement dirigée selon une normale à l'axe de projection.
En remplaçant dans cette dernière équation Q par sa valeur en fonction de la vitesse moyenne U_c dans la section contractée, soit $Q = C_c.S.U_c$, il vient :

$$\beta_c.C_c.\rho.S.U_c^{\ 2} = (\Sigma \vec{F}_e)_x$$

Appliquons maintenant le théorème de Bernoulli entre les sections (S_A) et (S_C) en négligeant les pertes de charge, celles-ci étant effectivement très faibles puisque la veine liquide va en se rétrécissant règulièrement de l'amont vers l'aval.
La relation ainsi obtenue :

$$H = \alpha_c.\frac{U_c^{\ 2}}{2g} \qquad (20)$$

nous permet alors de mettre l'équation d'Euler sous la forme :

$$2.\frac{\beta_c}{\alpha_c}.C_c.\bar{\omega}.S.H = (\Sigma \vec{F}_e)_x$$

Faisons maintenant le bilan des forces extérieures appliquées au système (τ).
Comme ce système n'est pas entièrement en charge, on n'a pas intérêt à introduire les pression étoilées.

Tout d'abord, les forces volumiques qui se réduisent ici aux forces de pesanteur , ont une projection nulle suivant l'axe horizontal x'x .

Parmi les forces de surface, nous distinguerons :

- Les efforts exercés sur les surfaces terminales (S_A) et (S_C) ;
- La réaction de la paroi externe du tube cylindrique ;
- La réaction des parois du bassin .

Comme par hypothèse, la section du cylindre et, par suite, la section contractée ont des dimensions relativement faibles vis-à-vis de H, on peut admettre qu'en tout point de (S_C) la pression est constante et égale à la pression

atmosphérique puisque son contour est en contact avec l'atmosphère. Etant donné que nous prendons conventionnellement la pression atmosphérique comme origine pour mesurer les pressions, nous n'aurons donc pas à faire intervenir les forces qui s'exercent sur la surface (S_C). Pour la même raison, nous n'avons pas, non plus, à faire intervenir les forces qui s'exercent sur la surface libre (S_A).

Le long de la paroi extérieure du cylindre, les vitesses sont très faibles. Il en est de même, par suite, des actions tangentielles entre le fluide contenu dans le réservoir et le cylindre. Les poussées exercées par celui-ci sont alors pratiquement des poussées normales dont les projections sont nulles sur l'axe x'x.

Il nous reste encore à évaluer la réaction $\vec{F}_R$ des parois du réservoir. Pour cela, nous admettrons que le long de ces parois, les vitesses dues à l'appel créé par l'ajutage, sont assez faibles pour que l'on puisse considérer que la répartition des pressions est hydrostatique. (L'expérience montre que cette hypothèse est bien justifiée dès que le tube cylindrique pénètre dans le réservoir d'une longueur au moins égale à une fois et demi son diamètre).

Pour calculer cette réaction $\vec{F}_R$, nous lui ajouterons la réaction fictive $\vec{F}_\Sigma$ d'une surface quelconque (Σ), ayant même contour que l'orifice dans lequel on a introduit l'ajutage et sur laquelle s'exercerait une poussée hydrostatique sous la charge H.

Le système de forces $\vec{F}_R + \vec{F}_\Sigma$ ainsi constitué est équivalent à la réaction d'un réservoir contenant un fluide au repos, laquelle est égale et opposée au poids $\vec{\pi}$ de ce fluide. En projection sur l'axe horizontal x'x, on a alors :

$$(\vec{F}_R)_x + (\vec{F}_\Sigma)_x = 0$$

Or la projection horizontale des actions hydrostatiques sollicitant une surface quelconque est égale à la poussée qui s'exercerait sur la section droite d'un cylindre ayant le même contour que la surface considérée. En projection sur l'axe x'x, on a donc :

$$(\vec{F}_\Sigma)_x = - \bar{\omega}.S.H$$

et, par suite :

$$(\Sigma\vec{F}_e)_x = (\vec{F}_R)_x = \bar{\omega}.S.H$$

L'équation d'Euler s'écrit donc, en définitive

$$2.\frac{\beta_c}{\alpha_c}.C_c.\bar{\omega}.S.H = \bar{\omega}.S.H$$

D'où l'on tire* :

(21) $$C_c = \frac{\alpha_c}{2\beta_c}$$

Le débit de l'ajutage a pour valeur :

$$Q = C_c . S . U_c$$

soit, d'après (20) et (21) :

$$Q = \frac{\sqrt{\alpha_c}}{2\beta_c} . S . \sqrt{2gH}$$

Le coefficient de débit a donc pour expression :

(22) $$C_q = \frac{\sqrt{\alpha_c}}{2\beta_c}$$

Sa valeur est très légèrement supérieure à 0,5. En effet, le rapport $\frac{\sqrt{\alpha_c}}{\beta_c} = 1 + \frac{\alpha_c - 1}{6}$ est très voisin de l'unité du fait que le coefficient cinétique α_c est lui même sensiblement égal à 1.

L'expérience montre que C_q est de l'ordre de 0,503.

En pratique, on retient :

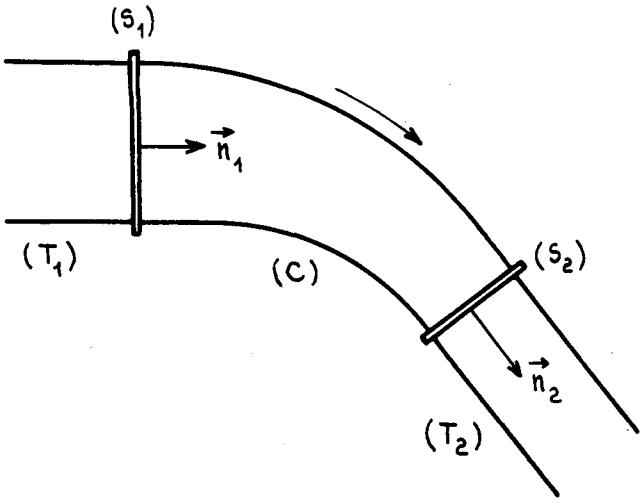
(23) $$C_c = C_q = 0,5$$

IV - ACTION D'UN FLUIDE EN MOUVEMENT SUR UN COUDE DE CONDUITE.

Considérons deux tronçons de conduites rectilignes (T_1),(T_2) raccordées par un coude (C).

---

* Pour tout autre ajutage, le coefficient de contraction serait supérieur à cette valeur. En effet, pour tout autre type d'ajutage, les vitesses ne sont pas négligeables le long de la paroi entourant l'orifice, de sorte que les pressions au voisinage de celui-ci seraient inférieures à celles qui correspondent à la répartition hydrostatique. La réaction du bassin, en projection sur l'axe x'x, ayant alors une valeur supérieure à $\bar{\omega}.S.H$, on aurait bien $C_c > \frac{\alpha}{2\beta}$.



Nous nous proposons d'exprimer la résultante $\vec{R}$ des forces exercées par le fluide en mouvement sur le coude (C) dans l'hypothèse où on admet que dans les sections d'entrée (S_1) et de sortie (S_2) de celui-ci, les filets liquides sont rectilignes et parallèles.

Le système auquel nous appliquerons le théorème d'Euler est le tube de courant délimité par les parois intérieures du coude et terminé par les deux sections droites (S_1) et (S_2).

Les forces extérieures appliquées sont :

- La résultante des forces de pesanteur : $-\rho.\mathcal{W}.\vec{k}$, $\mathcal{W}$ étant le volume intérieur du coude, $\vec{k}$ le vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut.
- L'action du fluide sur le coude : $-\vec{R}$;
- Les poussées exercées sur les sections (S_1) et (S_2) par le fluide extérieur au système : $p_1.S_1.\vec{n}_1$ et $-p_2.S_2.\vec{n}_2$, p_1 et p_2 désignant les pressions qui règnent aux centres de gravité des sections (S_1) et (S_2).

D'où l'équation d'Euler :

$$\beta_2.\rho.Q.U_2.\vec{n}_2 - \beta_1.\rho.Q.U_1.\vec{n}_1 = -\rho.\mathcal{W}.\vec{k} - \vec{R} + p_1.S_1.\vec{n}_1 - p_2.S_2.\vec{n}_2$$

et, par suite, l'expression de $\vec{R}$:

$$\vec{R} = -\rho.\mathcal{W}.\vec{k} + \left(\beta_1.\rho.Q.U_1 + p_1.S_1\right).\vec{n}_1 - \left(\beta_2.\rho.Q.U_2 + p_2.S_2\right).\vec{n}_2 \tag{24}$$

Cette égalité exprime l'équivalence de deux systèmes de vecteurs. Elle peut donc être utilisée pour calculer le moment des forces qui sollicitent le coude. Mais il convient de remarquer que les vecteurs tels que $\beta.\rho.Q.U.\vec{n}$ et $p.S.\vec{n}$, bien que colinéaires,n'est pas rigoureusement le même point d'application.

V - ACTION D'UN JET SUR UN OBSTACLE.

Considérons un jet cylindrique, horizontal*, de section S, issu, par

---

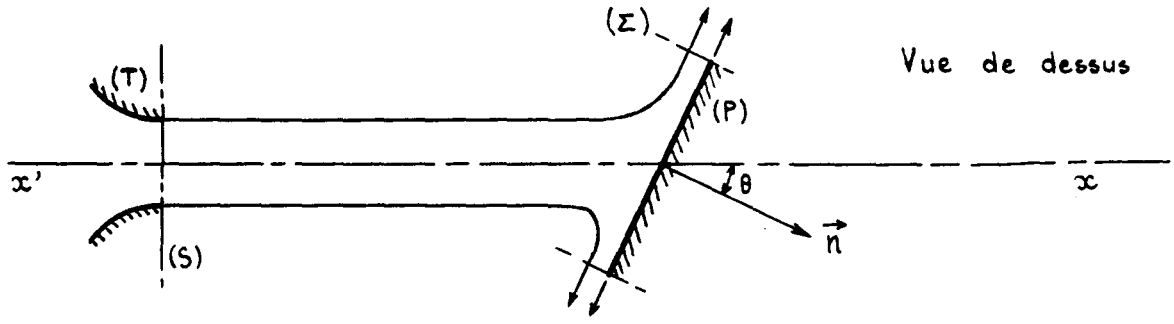
* Cela suppose, évidemment, que la tuyère est alimentée sous une très grande charge H.

exemple, d'une tuyère convenablement profilée.
Soit Q le débit du jet, U la vitesse moyenne de celui-ci dans la section de sortie (S) de la tuyère.

On se propose de calculer la résultante $\vec{R}$ des forces de pression que le fluide exerce sur un obstacle disposé sur le trajet du jet ; les obstacles que nous considérons ici sont des cylindres dont les génératrices sont verticales.

a) Cas d'une plaque plane

Le fluide qui sort de la tuyère s'étale sur la plaque dont les dimensions



sont supposées grandes vis-à-vis du diamètre du jet ; on peut alors admettre que les lignes de courant au voisinage du contour de la plaque sont parallèles à celle-ci.

Soit θ , l'angle formé par la normale $\vec{n}$ à la plaque et l'axe x'x du jet.
Ecrivons l'équation d'Euler, appliquée à toute la masse fluide (τ) comprise entre la section (S) et la surface cylindrique (Σ) dont les génératrices, normales à la plaque, s'appuient sur le contour de celle-ci.

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{V}_2 \cdot (\rho \cdot \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) \cdot d\Sigma - \beta \cdot \rho \cdot Q \cdot U \cdot \vec{n}_1 = \Sigma \vec{F}_e$$

En projetant cette égalité sur la normale $\vec{n}$ à la plaque, il reste simplement :

$$- \beta.\rho.Q.U.\cos\theta = (\vec{F}_e)_n$$

puisque le champ de vitesse $\vec{V}_2$ est pratiquement parallèle à la plaque.

Par ailleurs, la somme des forces extérieures, en projection sur la direction $\vec{n}$, se réduit à la composante $- R_n$ de la réaction $- \vec{R}$ de la plaque sur le fluide.

D'où la composante normale des forces de pressions exercées par le fluide sur la plaque :

(25) $$R_n = \beta.\rho.Q.U.\cos\theta$$

Remarquons que dans l'hypothèse d'un fluide parfait, la résultante $\vec{R}$ coïnciderait avec la composante R_n calculée ci-dessus puisque dans ce cas, il ne

saurait y avoir d'action tangentielle entre le fluide et la plaque.

Lorsque la plaque est disposée normalement au jet, on a :

$$R_n = \beta.\rho.Q.U$$
$$= 2\beta.\bar{\omega}.S.\frac{U^2}{2g}$$

ou encore :

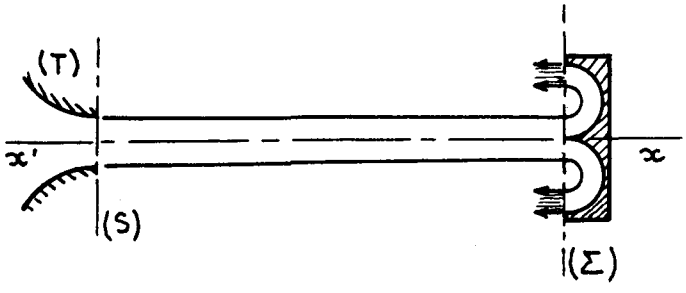
$$R_n = \frac{2\beta}{\alpha}.\bar{\omega}.S.H$$

H, désignant la charge au-dessus de la tuyère dont nous avons supposé le rendement égal à l'unité.

Comme $\bar{\omega}.S.H$ représente la poussée statique qui s'exercerait sur la plaque si celle-ci était fixée contre la tuyère, on constate que l'effort à exercer pour approcher un tel obturateur d'un orifice qui débite est sensiblement* le double de celui qu'il faudrait exercer pour maintenir l'obturateur plaqué contre l'orifice.

b) Cas d'une plaque courbe, ou auget

La plaque cylindrique présente maintenant une double courbure, de sorte que l'eau est renvoyée, suivant une direction sensiblement parallèle et opposée à celle du jet.



Nous admettrons ici que les pertes de charge sont négligeables et que les lignes de courant restent planes et horizontales. Dans ces conditions, pour chaque filet de courant, le module du vecteur vitesse à la sortie de la plaque a la même valeur qu'à la sortie de la tuyère.

Après la déviation, le jet a donc la même section, la même vitesse moyenne et le même coefficient de quantité de mouvement qu'à la sortie de la tuyère.

Un raisonnement identique à celui du paragraphe précédent permet le calcul de la composante suivant x'x de l'action $\vec{R}$ du jet sur la plaque, soit :

(26) $$R_{x'x} = 2\beta.\rho.Q.U$$

* Si la tuyère est convenablement profilée, les coefficients α et β sont sensiblement égaux à l'unité ; il en est de même, par suite, du rapport α/β.

c) Cas d'un obstacle mobile

On suppose maintenant que l'obstacle est animé d'un mouvement de translation uniforme, de vitesse v, parallèlement à l'axe du jet x'x. Le mouvement n'estdonc plus permanent. Cependant, on peut appliquer les résultats précédents, établis dans le cas d'un mouvement permanent, à condition de choisir un système d'axes de référence attaché à l'obstacle mobile. Les relations (25) et (26) restent donc valables à condition d'y faire figurer les grandeurs relatives ; il vient donc :

(25') $$R_n = \beta_r.\rho.S.(U-v)^2.\cos\theta$$, pour une plaque plane

et :

(26') $$R_{x'x} = 2\beta_r.\rho.S.(U-v)^2$$, pour un auget

β_r désignant le coefficient relatif de quantité de mouvement, dont l'expression est :

$$\beta_r = \frac{\iint_S (V-v)^2.dS}{(U-v)^2.S}$$

soit :

$$\beta_r = 1 + (\beta-1).\left(\frac{U}{U-v}\right)^2$$

On peut alors calculer la puissance transmise à l'obstacle par le jet.
Dans le cas d'un auget, celle-ci a pour expression :

$$\mathcal{P} = R_{x'x}.\ v = 2\beta_r.\rho.S.(U-v)^2.v$$

A la sortie de la tuyère, la puissance du jet est :

$$\mathcal{P} = \alpha.\rho.S.\ \frac{U^3}{2}$$

le rendement de la transformation de l 'énergie hydraulique en énergie mécanique est, dans ce cas :

$$\eta = \frac{4\beta_r}{\alpha}\ .\ \frac{(U-v)^2.v}{U^3}$$

Il est maxima pour : $v = \frac{1+\alpha}{2}\ .\ \frac{U}{3}$

soit sensiblement pour :

$$v = \frac{U}{3}$$

Sa valeur correspondante est : $\eta_{max} = (1 - \frac{\alpha-1}{4}) \cdot \frac{16}{27}$

soit sensiblement :

$$\eta_{max} = \frac{16}{27}$$

Ce résultat n'est pas en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle la déviation ne s'accompagne d'aucune perte d'énergie ; en effet, si l'on veut retrouver l'énergie du jet à la sortie de la tuyère, il est bien évident qu'à l'énergie transmise à la plaque, il convient encore d'ajouter l'énergie cinétique résiduelle dufluide à la sortie de l'auget ainsi que l'énergie cinétique du fluide qui, bien que sortant de la tuyère, n'atteint pas cet auget.
Dans le cas où on prend $\alpha = \beta = 1$, ces énergies, par unité de temps, ont pour valeurs :

$$\mathcal{P}_{sortie} = \frac{1}{2}\rho.S.(U-v)(U-2v)^2$$

$$\mathcal{P}_{route} = \frac{1}{2}\rho.S.U^2.v$$

de sorte que l'on a bien* :

$$\mathcal{P}_{plaque} + \mathcal{P}_{sortie} + \mathcal{P}_{route} = \mathcal{P}_{jet}$$

Si α n'est pas égal à l'unité, l'évaluation de $\mathcal{P}_{sortie}$ et de $\mathcal{P}_{route}$ nécessite des précautions identiques à celles qu'on a dû prendre pour calculer β_r .

d) Cas d'une route Pelton

La transformation de l'énergie d'un jet en énergie mécanique est utilisée dans les turbines hydrauliques du type "Pelton". Cette machine est essentiellement constituée d'une roue sur la périphérie de laquelle est disposé un grand nombre d'augets. Le jet issu d'un injecteur , et dirigé tangentiellement à la roue,

---

*

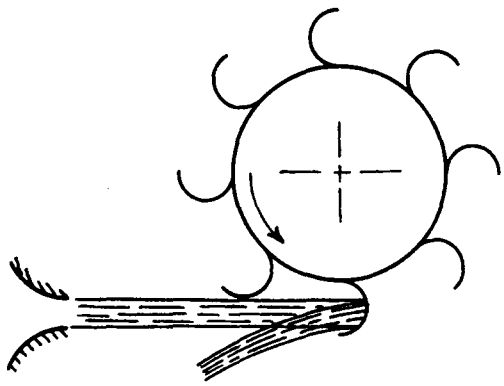
Pour $v = \frac{U}{3}$, on a :

$$\mathcal{P}_{plaque} = \frac{16}{27} \cdot \mathcal{P}_{jet}$$

$$\mathcal{P}_{sortie} = \frac{2}{27} \cdot \mathcal{P}_{jet}$$

$$\mathcal{P}_{route} = \frac{9}{27} \cdot \mathcal{P}_{jet}$$

communique à celle-ci un mouvement de rotation au cours duquel un auget se substitue à un autre.



Chaque auget ne travaillant qu'un court instant avant d'être remplacé par un autre, le mouvement n'est pas permanent, aussi bien par rapport à des axes fixes qu'à des axes mobiles.

Il est seulement permanent en moyenne, par rapport à des axes fixes, lorsque la roue tourne à vitesse constante. Ce mouvement discontinu devient périodique et se rapproche d'autant plus d'un mouvement permanent que la roue comporte un plus grand nombre d'augets.

Dans le cas d'un nombre infini d'augets, ce mouvement serait effectivement permanent.

C'est dans cette hypothèse que nous nous placerons pour calculer, en première approximation, l'effort transmis à la roue.

La topographie de l'écoulement étant alors invariable, c'est donc la totalité du débit Q qui atteint les augets et qui se trouve ainsi déviée.

Dans ces conditions, on peut encore avoir recours aux formules (25) et (26), mais à condition toutefois de n'y faire figurer comme grandeur relative, que la vitesse du jet par rapport à la vitesse périphérique de la roue ; le débit à faire intervenir ici étant le débit absolu et non plus le débit relatif comme cela était le cas lorsque nous avions imaginé un auget isolé fuyant devant le jet.

Si l'on admet encore que la déviation imprimée au jet est rigoureusement égale à 180°, l'effort tangentiel transmis à la roue a alors pour expression :

$$R_t = 2.\beta.\rho.Q.(U-v)$$

On en déduit la puissance développée par la turbine, soit :

$$\mathcal{P} = 2.\beta.\rho.Q(u-v).v$$

Elle est maximum pour $v = \frac{U}{2}$ et a pour valeur :

$$\mathcal{P}_{max} = \beta.\rho.Q.\frac{U^2}{2}$$

Cette puissance serait exactement égale à celle du jet à la sortie de l'injecteur si l'on avait $\alpha = \beta = 1$. Elle lui est inférieure malgré toutes les hypothèses simplificatrices que nous avons formulées (fluide parfait, nombre infini d'augets, déviation de 180°) lorsque la répartition des vitesses dans le jet ne peut être

considérée comme uniforme : cela provient du fait que dans ces conditions, il est impossible d'annuler complètement l'énergie cinétique du fluide à la sortie des augets.

En réalité, le rendement maximum d'une turbine Pelton est de l'ordre de 0,92. Il est d'ailleurs obtenu pour une vitesse périphérique de la roue légèrement inférieure à la moitié de celle du jet.

CHAPITRE III

PERTES DE CHARGES DANS LE CAS DES FLUIDES ISOVOLUMES

A - GENERALITES

I - EXPRESSION GENERALE DE LA PERTE DE CHARGE.

Nous nous proposons, en ne faisant appel qu'à des considérations d'analyse dimensionnelle, de déterminer la forme de l'expression qui donne la perte de charge ΔH à la traversée d'un ouvrage quelconque. Pour cela, il convient de recenser tous les facteurs dont dépend cette perte de charge. Or, il est bien évident que ΔH dépend :

- de l'ouvrage considéré ;
- de la nature du fluide ;
- des forces appliquées à celui-ci ;
- du débit qui traverse l'ouvrage.

L'ouvrage est défini, d'une part, par sa forme géométrique et d'autre part, par la longueur caractéristique D d'un quelconque de ses éléments.
La rugosité des parois est prise en compte dans la définition de la forme géométrique. Nous dirons que deux ouvrages sont de même type s'ils sont géométriquement semblables, c'est-à-dire si toutes les dimensions homologues de ceux-ci, y compris celles des aspérités des parois, sont dans le même rapport de similitude.

Le fluide isovolume est caractérisé par sa masse volumique ρ et par l'un ou l'autre de ses coefficients de viscosité η et $\nu = \frac{\eta}{\rho}$; on convient de choisir le coefficient de viscosité cinématique ν.

Dans le cas habituel où les forces massiques se réduisent aux forces de pesanteur, celles-ci sont caractérisées par la valeur g de l'accélération de la pesanteur qui règne au lieu de l'expérience.

Enfin le débit qui traverse l'ouvrage peut être aussi bien défini par la vitesse moyenne U dans une section caractéristique de celui-ci.

La perte de charge, à la traversée d'un ouvrage quelconque peut donc être exprimée par la relation :

(27) $$\Delta H = F(D,\rho,\nu,g,U)$$

la forme de la fonction F ne dépendant que du type de l'ouvrage.
En admettant que cette fonction F est développable en série de monomes, nous écrirons :

(27') $$\Delta H = \Sigma\ A.D^{\lambda}.\rho^{r}.\nu^{n}.g^{\sigma}.U^{\phi}$$

Les équations de dimensions des différentes grandeurs qui figurent dans cette égalité sont :

$$|\Delta H| = L \quad ; \quad |D| = L \quad ; \quad |\rho| = M.L^{-3}$$

$$|\nu| = L^{2}.T^{-1} \quad ; \quad |g| = L.T^{-2} \quad ; \quad |U| = L.T^{-1}$$

Les monomes qui figurent dans le second membre de l'égalité (27') ont alors pour équations de dimensions :

$$M^{x}\ .\ L^{y}\ .\ T^{z}$$

avec :

$$\begin{cases} x = r \\ y = \lambda - 3\,r + 2\,n + \sigma + \phi \\ z = -\,n - 2\,\sigma - \phi \end{cases}$$

Ces monomes devant avoir la même équation de dimensions que ΔH, il en résulte les 3 conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 = r \\ 1 = \lambda - 3\,r + 2\,n + \sigma + \phi \\ 0 = -\,n - 2\,\sigma - \phi \end{cases}$$

On constate tout d'abord que la masse volumique ne figure pas directement dans l'expression de la perte de charge. (En fait, elle intervient néanmoins par l'intermédiaire de $\nu = \frac{\eta}{\rho}$)

Quant aux quatres exposants λ, n, σ, ϕ, ils sont liés par les deux relations :

$$\begin{cases} \lambda + 2\,n + \sigma + \phi = 1 \\ n + 2\,\sigma + \phi = 0 \end{cases}$$

Deux d'entre eux peuvent donc s'exprimer en fonction des deux autres.

Nous chercherons, si cela est possible, à introduire les nombres de Reynolds et de Froude ; aussi nous choisirons d'exprimer λ et ϕ en fonction de n et σ, les exposants respectifs de ν et g, puisque ν n'intervient que dans R_e et que g n'intervient que dans F_r.
Nous trouvons immédiatement :

$$\phi = - n - 2\,\sigma$$
$$\lambda = 1 - n + \sigma$$

et par suite :

$$\Delta H = \Sigma\ A.\ D^{1-n+\sigma}\ .\ \nu^{r}\ .\ g^{\sigma}\ .\ U^{-n-2\sigma}$$

soit :

$$\Delta H = D.\Sigma\ A.\ \left(\frac{U.D}{\nu}\right)^{-n}\ .\ \left(\frac{U^2}{g.D}\right)^{-\sigma}$$

On préfère habituellement donner à l'expression dela perte de charge la forme équivalente suivante :

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g}\ .\Sigma\ 2A\ .\ \left(\frac{U.D}{\nu}\right)^{-n}\ .\ \left(\frac{U^2}{g.D}\right)^{-\sigma-1}$$

Commechacun des monomes qui figurent dans la somme ci-dessus ne fait intervenir que les nombres de Reynolds et de Froude, nous poserons finalement :

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g}\ .\phi\ (R_e\ ,\ F_r) \tag{28}$$

Pour un ouvrage de forme géomètrique donnée, la fonction ϕ ne dépend donc que des deux groupements sans dimensions : $R_e = \frac{U.D}{\nu}$ et $F_r = \frac{U^2}{g.D}$.

Notons que ce résultat aurait pu être dégagé dès l'instant où nous avons établi les conditions de similitude dans le cas d'un fluide isovolume. En effet, nous avons montré que pour des écoulements semblables, la quantité :

$$\frac{\Delta H}{\frac{U^2}{2g}}$$

conserve une valeur constante C lorsqu'on considère des écoulements semblables, c'est-à-dire lorsque les ouvrages sont géométriquement semblables et lorsque les nombres de Reynolds et de Froude conservent respectivement leur valeur.

Pour un type d'ouvrage, C n'est donc fonction que de R_e et F_r ; ce qu'on écrit :

$$\frac{\Delta H}{\frac{U^2}{2g}} = \phi\ (R_e, F_r)$$

II - CAS PARTICULIER DES SYSTEMES EN CHARGE

Dans le cas des systèmes en charge, il est possible de réaliser une similitude partielle en faisant apparaître, non plus la pression vraie p, mais la pression étoilée p^*. Or cette similitude exige seulement que, pour des ouvrages géométriquement semblables, on assure la condition de Reynolds. Comme la similitude partielle conserve la relation :

$$\frac{\Delta H}{\frac{U^2}{2g}} = C$$

il apparaît ainsi que pour un type d'ouvrage, C ne dépend que du nombre de Reynolds ; ce que l'on écrit :

(29) $$\boxed{\Delta H = \frac{U^2}{2g} \cdot \varphi(R_e)}$$

Les considérations d'analyse dimensionnelles ne fournissent évidemment pas la solution du problème ; par contre, elles permettent de simplifier considérablement l'investigation expérimentale. Ainsi, pour un type d'ouvrage donné, en charge, dans lequel circule un fluide isovolume, la perte de charge pourra être déterminée dans tous les cas dès que l'on aura relevé la courbe $\phi = \phi\ (R_e)$ dans des conditions expérimentales particulières*.

Parmi les pertes observées dans un système de conduits, en charge ou à surface libre, il convient de distinguer :

---

* De nombreuses expériences effectuées sur différents ouvrages ont montré, qu'effectivement, les points expérimentaux se situent bien sur une courbe unique, caractéristique du type d'ouvrage, et cela quelles que soient la nature du fluide et les dimensions de l'ouvrage. Si, dans le diagramme (ϕ, R_e) on avait obtenu un "nuage de points", cela aurait prouvé que la liste des facteurs intervenant dans l'expression de ΔH n'était pas complète.

- Les pertes de charge régulières qui se produisent à l'intérieur des troncons de conduits uniformes, loin de toute singularité.
- Les pertes de charge singulières dues aux divers dispositifs interposés sur ces conduits (ouvrages de raccordement entre ces troncons, organes de mesure ou de réglage du débit, etc...)

B - PERTES DE CHARGES REGULIERES

I - MESURE D'UNE PERTE DE CHARGE REGULIERE DANS UNE CONDUITE.

Considérons un élément de conduite cylindrique dans lequel le régime est uniforme.

La perte de charge entre deux sections droites (S_1) et (S_2) de ce tronçon a pour expression :

$$\Delta H = \left(\frac{p_1^*}{\bar{\omega}} + \alpha_1 \cdot \frac{U_1^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_2^*}{\bar{\omega}} + \alpha_2 \cdot \frac{U_2^2}{2g}\right)$$

Comme par hypothèse le régime est uniforme, on a $U_1 = U_2 = \frac{Q}{S}$ et $\alpha_1 = \alpha_2$; il reste simplement :

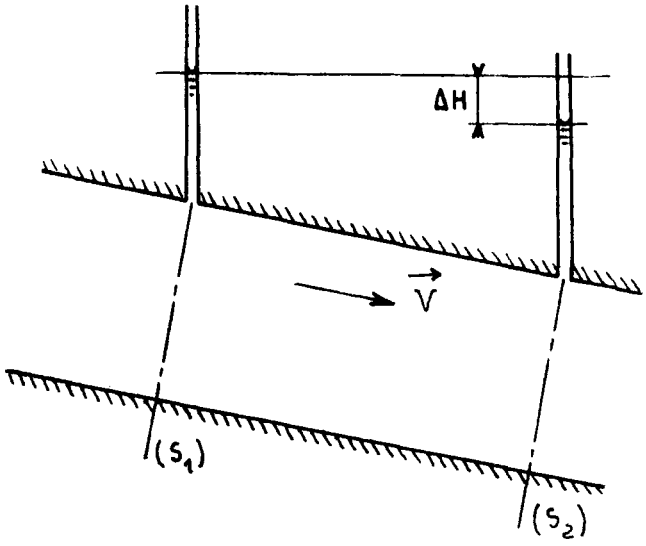
$$\Delta H = \frac{p_1^* - p_2^*}{\bar{\omega}} \qquad (30)$$

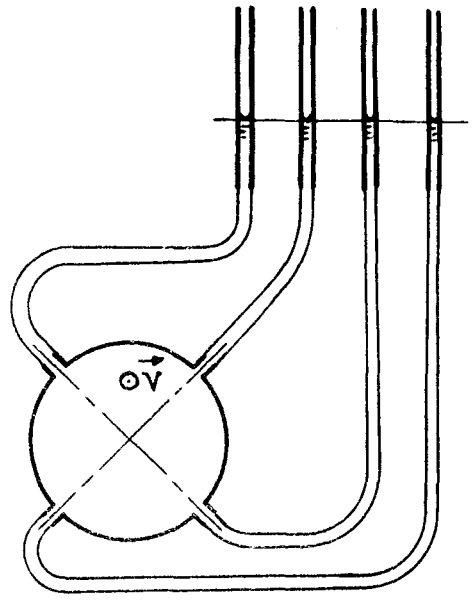
Cette égalité montre que la perte de charge régulière entre deux sections (S_1) et (S_2) s'obtient directement en mesurant la différence des niveaux atteints dans deux tubes piézométriques reliés à des prises de pression pratiquées, sur la conduite, au droit de ces sections.

La prise de pression peut être pratiquée en n'importe quel point de la périphérie de la section considérée. Pour effectuer une mesure correcte de la hauteur piézométrique $\frac{p^*}{\bar{\omega}}$, il est d'ailleurs recommandé d'utiliser quatre tubes piézométriques reliés à quatre prises de pression régulièrement disposées sur le contour de la section (S) ; habituellement, on dispose ces prises selon deux diamètres rectangulaires inclinés à 45° sur l'horizontale*

---

* On évite en effet de disposer les prises de pression à la partie supérieure ainsi qu'à la partie inférieure de la conduite, celles-ci risquant d'être rapidement obstruées ; les premières par des bulles d'air, les secondes par les particules solides entraînées par le fluide en mouvement.

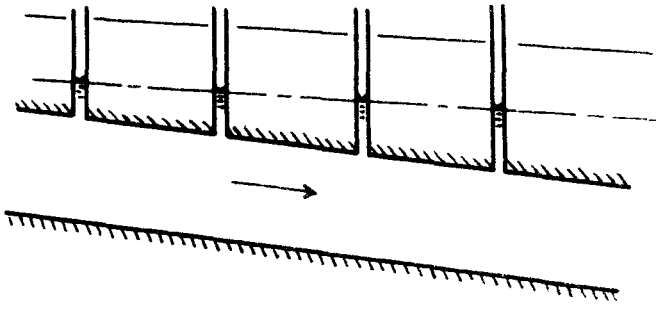




II - PERTE DE CHARGE PAR UNITE DE LONGUEUR.

Le régime étant uniforme dans la conduite, les pertes de charge sont régulièrement réparties le long de celle-ci. La ligne piézométrique est donc une droite dont la pente est évidemment dans le sens de l'écoulement ; elle est parallèle à la ligne de charge.

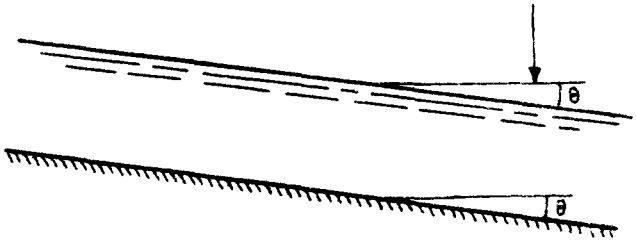
La pente j de ces lignes est appelée "la perte de charge par unité de longueur" ;



la perte de charge entre deux sections droites, distantes d'une longueur ℓ, a donc pour expression :

$$\Delta H = j.\ell$$

Dans le cas d'un canal à surface libre, en régime uniforme, la perte de charge j est évidemment égale à la pente superficielle, laquelle est aussi égale à la pente du fond $I = \sin \theta$.



III - COEFFICIENT UNIVERSEL DE PERTE DE CHARGE.

La fonction $\phi = \phi(R_e)$, introduite dans la relation (29) ne dépend que de la forme géométrique de l'ouvrage ; si celui-ci est un conduit uniforme, cette fonction ϕ dépendra, en particulier, du rapport $\frac{\ell}{D}$, ℓ étant la distance séparant les sections (S_1) et (S_2) entre lesquelles la perte de charge est ΔH, D étant la longueur d'un élément linéaire caractéristique d'une section droite.

On peut donc poser :

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g} \cdot \phi(R_e , \frac{\ell}{D})$$

la fonction ϕ ne dépendant plus que de la forme de la section droite du conduit etde la rugosité relative des parois.
Or ΔH doit être une fonction linéaire de la longueur ℓ ; mais comme dans l'expression de ϕ , ℓ n'intervient que par l'intermédiaire du rapport $\frac{\ell}{D}$, la fonction $\phi(R_e,\frac{\ell}{D})$ est nécessairement de la forme :

$$\phi (R_e , \frac{\ell}{D}) = \frac{\ell}{D} .\lambda (R_e)$$

On a ainsi :

$$\Delta H = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \cdot \ell$$

et par suite :

(31) $$j = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

Le coefficient adimensionnel $\lambda = \lambda(R_e)$, qui ne dépend que de la forme géométrique de la section droite et de la rugosité relative des parois, est appelé "coefficient universel de perte de charge".

Dans le cas d'une conduite circulaire, D désigne naturellement le diamètre de celle-ci.

Les nombres de Reynolds usités varient généralement dans de très larges limites ; aussi, on a l'habitude de représenter, non pas les variations de λ en fonction de R_e, mais plutôt les variations de log λ en fonction de log R_e.
Cette façon d'opérer présente en outre l'avantage de faire apparaître plus facilement les particularités de la fonction $\lambda = \lambda(R_e)$.

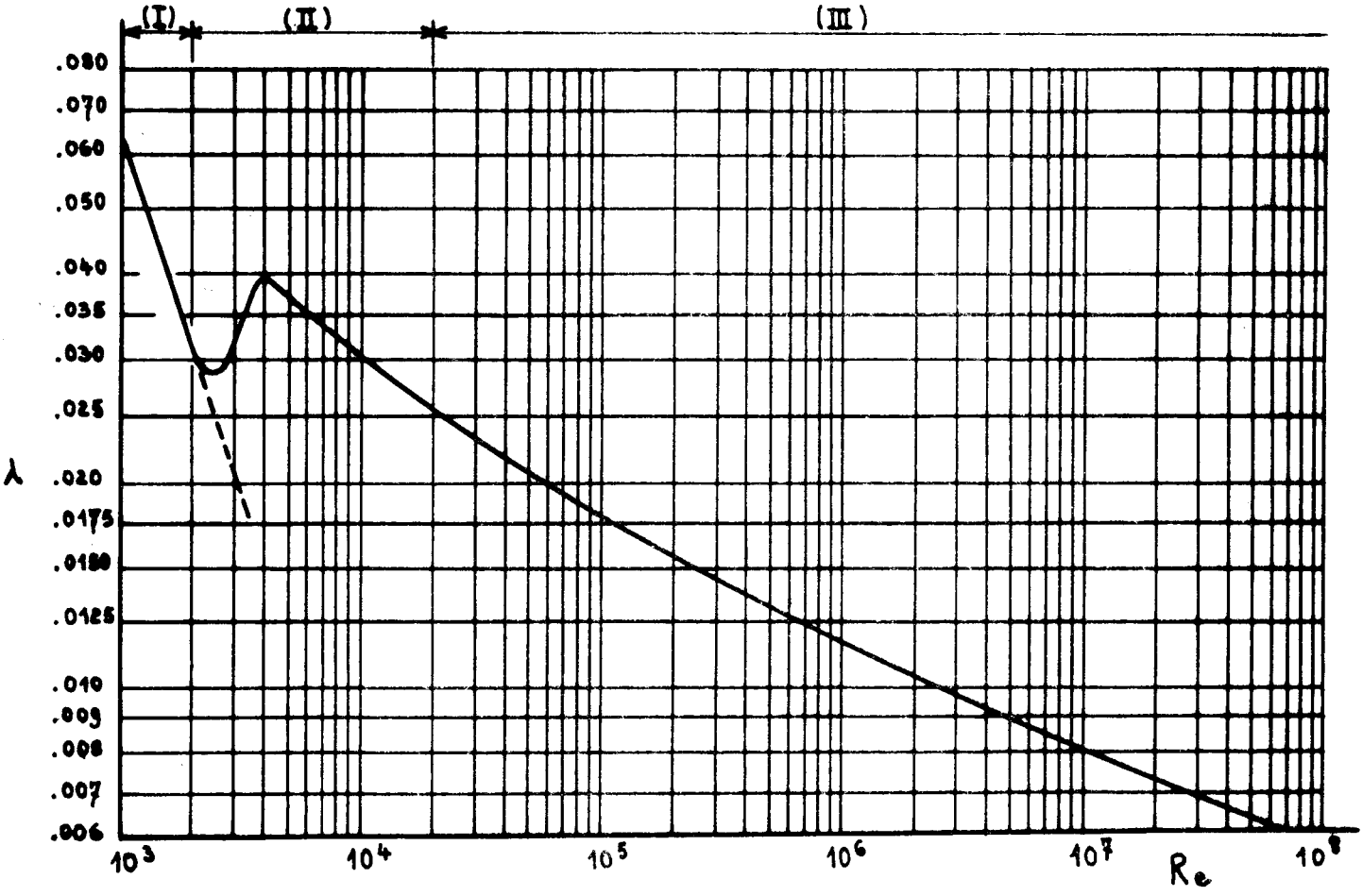
IV - ETUDE PARTICULIERE DES CONDUITES CIRCULAIRES - ABAQUES DE NIKURADZE ET ABAQUES DE MOODY.

a) Cas des conduites lisses

De nombreuses mesures effectuées sur des conduites dont les parois sont apparemment lisses (métal poli, verre...) ont permis de dresser la courbe donnant les variations du coefficient universel de perte de charge λ en fonction du nom-

bre de Reynolds R_e. Le fait que, pour ces conduites, tous les points expérimentaux se situent pratiquement sur une courbe unique constitue la preuve que, du point de vue hydrodynamique, la notion de "tuyau lisse" a un sens concret. La courbe donnant les variations de log λ en fonction de log R_e est représentée sur la figure ci-dessous ; on y distingue trois zones selon l'intervalle de variation du nombre de Reynolds :

- la zone (I) , pour $R_e < 2.10^3$; le régime est laminaire.
- la zone (II) , pour $2.10^3 < R_e < 2.10^4$, appelée "zone critique" ; le régime turbulent n'est pasencore établi.
- la zone (III), pour $R_e > 2.10^4$; le régime, turbulent, est dit "hydraulique lisse".



Dans la zone (I), la courbe représentant les variations de log λ en fonction de log R_e s'identifie à une droite de pente -1, appelée "droite de Poiseuille". Ce résultat est en accord avec la formule de Poiseuille qui donne la perte de charge par unité de longueur en régime laminaire :

$$j = \frac{8\nu.Q}{\pi g R^4} = \frac{32.\nu.U}{g.D^2}$$

En effet, de cette relation, on tire :

$$\lambda = j.D.\frac{2g}{U^2} = 64.\frac{\nu}{U.D}$$

soit :

(32) $$\lambda = \frac{64}{R_e}$$

et :

$$\log \lambda = \log 64 - \log R_e$$

ce qui donne bien dans le diagramme ($\log \lambda$; $\log R_e$) une droite de pente -1.

Dans la zone (II), où l'écoulement est instable, les valeurs de λ ne sont pas rigoureusement indépendantes des conditions expérimentales (Cf. expérience de Reynolds). Aussi les points expérimentaux sont ils dispersés autour de la courbe moyenne représentée sur la figure.

Dans le zone (III), les valeurs de λ sont liées à R_e par la formule semi empirique :

(33) $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log (R_e.\sqrt{\lambda}) - 0,08 \qquad (R_e > 2.10^4)$$

Pour des nombres de Reynolds pas tros élevés, on préfère utiliser la formule suivante donnant λ sous forme explicite :

(33') $$\lambda = 0,0032 + 0,221 \,.\, R_e^{-0,237} \qquad (2.10^4 < R_e < 3.10^6)$$

Enfin, pour des valeurs encore plus faibles du nombre de Reynolds, signalons la formule de Blasius :

(33') $$\lambda = 0,3164.R_e^{-1/4} \qquad (2.10^4 < R_e < 8.10^4)$$

b) Cas des conduites rugueuses

Les conduites industrielles, surtout si elles sont déjà en service, ont une rugosité très irrégulière ; celle-ci se manifeste par des aspérités et des boursouflures provoquées par des attaques chimiques, des dépots calcaires, etc...

Dansces conditions, on concoit difficilement comment on pourrait caractériser une telle rugosité par un ou plusieurs paramètres liés à la géométrie de l'état de surface des parois.

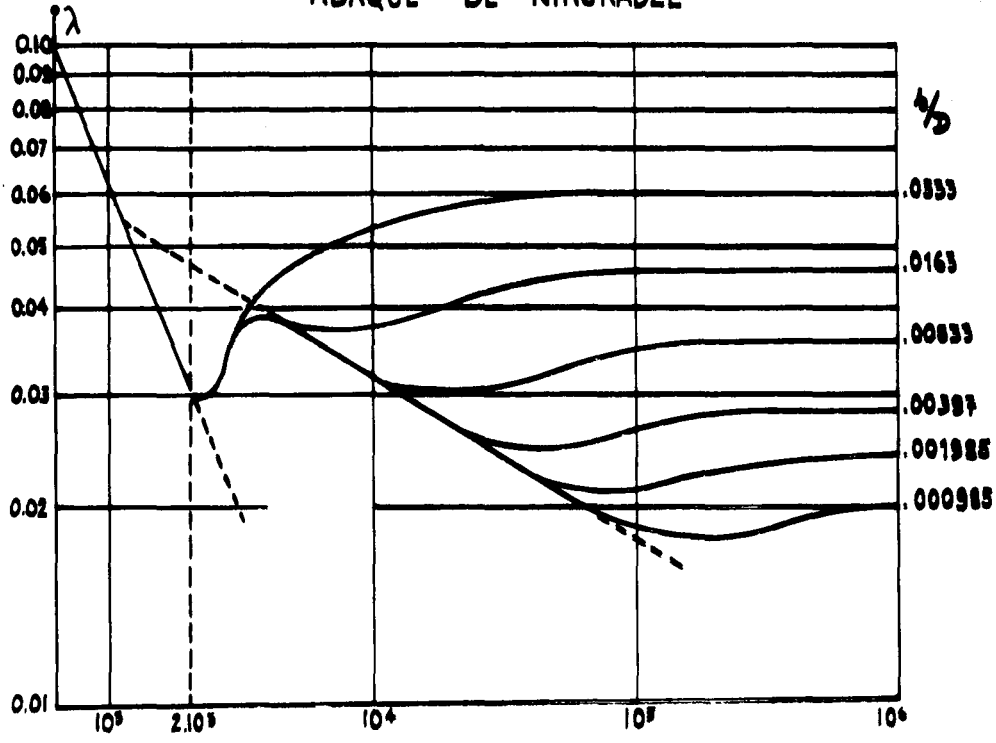
Il est bien évident que l'étude de l'influence de la rugosité sur les pertes de charge serait grandement simplifiée si on pouvait disposer de conduites ayant des rugosités, facilement reproductibles, caractérisées par un seul paramètre géométrique.

Dans cet ordre d'idées, Nikuradze a effectué des mesures systématiques de perte de charge en utilisant des conduites, initialement lisses, mais rendues artificiellement rugueuses en collant sur les parois de celles-ci des grains de sable soigneusement calibrés. Une telle rugosité est définie par le diamètre s des grains de sable ; le seul paramètre caractérisant la forme géométrique des conduites de Nikuradze est donc le rapport $k = \frac{s}{D}$.

D'où l'expression du coefficient universel de perte de charge : $\lambda = \lambda(\frac{s}{D}, R_e)$

A la suite de très nombreuses expériences, Nikuradze a dressé un abaque donnant les variations de $\log \lambda$ en fonction de $\log R_e$, pour différentes valeurs de s/D .

ABAQUE DE NIKURADZE



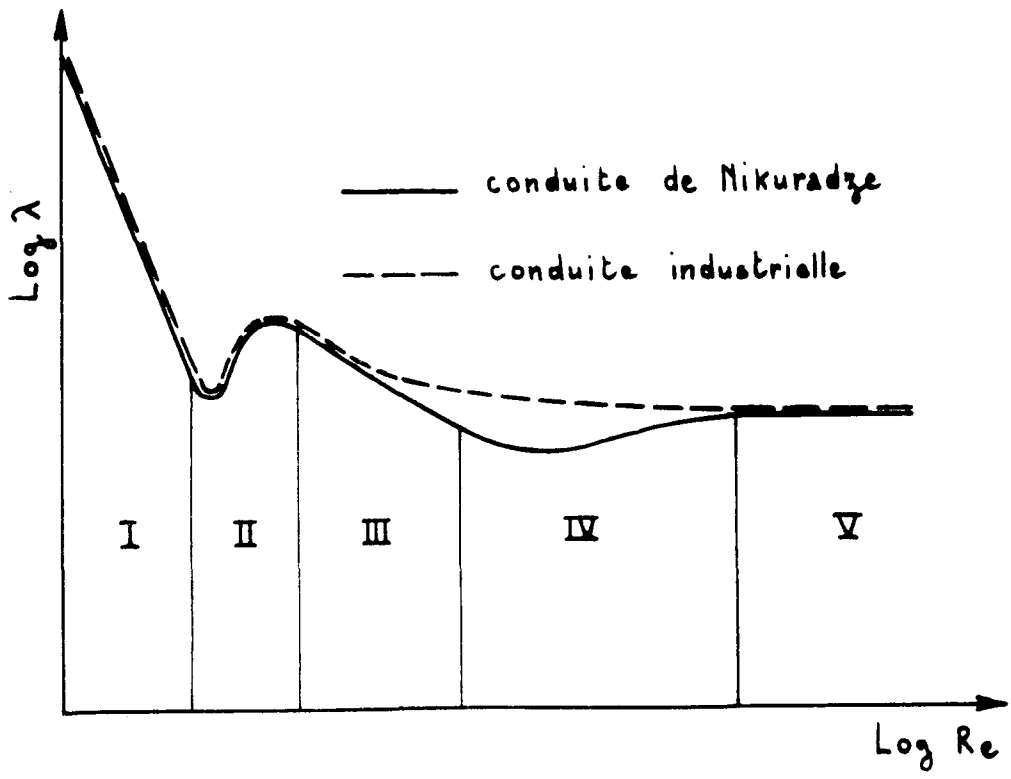
Pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds, ces courbes s'identifient à la courbe qui correspond aux conduites lisses ; elles commencent à s'en écarter pour des nombres de Reynolds d'autant plus faibles que la rugosité relative $k = \frac{s}{D}$ est plus grande ; dans l'intervalle où λ est indépendant de cette rugosité, on dit que le régime est " hydrauliquement lisse " .
Pour les grandes valeurs de R_e , λ tend vers une constante d'autant plus élevée que $\frac{s}{D}$ est plus grand. Lorsque λ est pratiquement indépendant de R_e , on dit que le régime est " hydrauliquement rugueux " ou encore " régime de pleine turbulence " ; celui-ci est atteint pour des nombres de Reynolds d'autant plus faibles que $\frac{s}{D}$ est plus grand.

Les valeurs de λ , dans la zone de pleine turbulence, sont données par la formule semi-empirique :

$$\lambda = \frac{1}{2\left[\log 3{,}71 . \frac{D}{s}\right]^2} \tag{34}$$

Les expériences de Nikuradze présentent un très grand intérêt du point de vue pratique.

On constate en effet que pour les conduites naturellement rugueuses, les courbes $\lambda = \lambda(R_e)$ ont la même allure que celles qui correspondent aux conduites uniformément rugueuses. Cependant, pour les conduites industrielles,



λ est une fonction uniformément décroissante de R_e lorsque le régime est turbulent ; on n'observe pas la région (IV) de Nikuradze.*

En faisant abstraction de cet écart, assez localisé, on peut alors trouver dans la " harpe " de Nikuradze, une courbe pratiquement confondue avec la courbe $\lambda = \lambda(R_e)$ qui correspond à une conduite constituée d'un matériau donné. La valeur de s , déduite de cette confrontation, caractérise donc, du point de vue hydrodynamique, la rugosité du matériau considéré ; on l'appelle " la rugosité fictive équivalente " . Nous donnons ci-dessous les valeurs de s couramment admises pour divers matériaux.

Nature de la paroi	s en mm
Verre, laiton poli	0,001
Laiton industriel	0,025
Acier laminé, neuf	0,045
Acier rouillé	0,25
Acier incrusté	2
Fonte moulée, à l'état neuf	0,25
Fonte rouillée	1,2
Ciment lissé	0,3

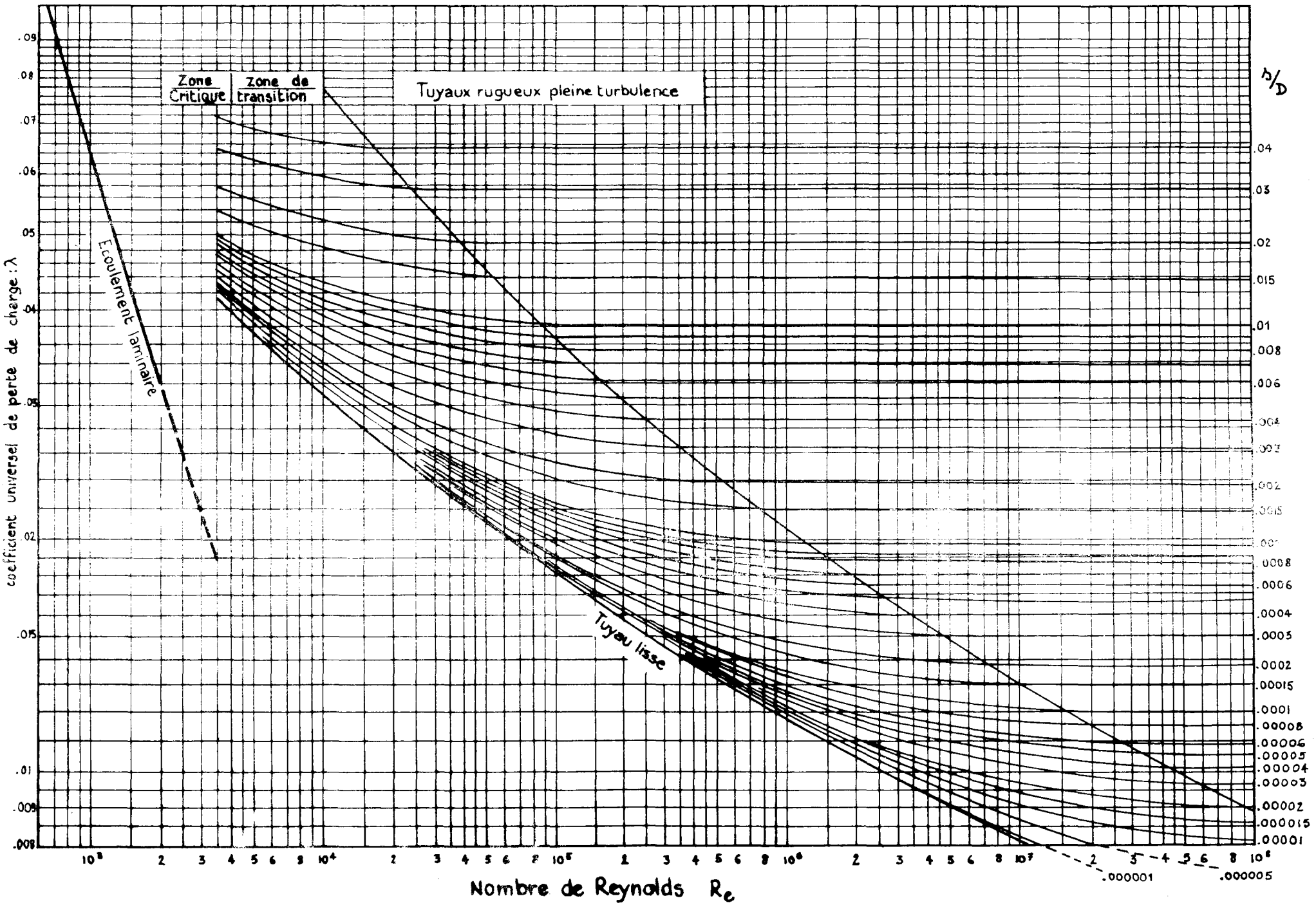
Les résultats d'essais en conduites industrielles, dont la rugosité est du type grenu, sont très bien représentés quel que soit le régime hydraulique, mais en écoulement turbulent, par la formule de Colbrook :

(35) $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{\frac{s}{D}}{3,71} + \frac{2,51}{R_e \cdot \sqrt{\lambda}}\right)$$ qui donne λ sous forme implicite.

---

* Dans une conduite naturelle, les aspérités ont des hauteurs inégales ; on conçoit alors que le passage du régime hydrauliquement lisse au régime hydrauliquement rugueux, est plus progressif que dans le cas d'une conduite uniformément rugueuse (C.F. " Couche limite " - Tome (III)).

ABAQUE DE MOODY



En pratique, on utilise le diagramme de Moody, établi à partir de la formule de Colbrook, et qui donne directement λ en fonction du nombre de Reynolds, pour diverses valeurs du rapport $\frac{s}{D}$.

Ce diagramme est identique à celui de Nikuradze, sauf dans les régions de transition.

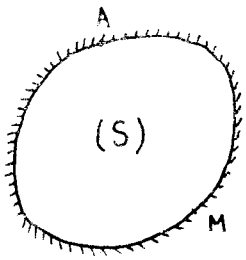
V - PERTE DE CHARGE DANS LES CONDUITS DE SECTION QUELCONQUE :

A) Rayon hydraulique moyen ; diamètre hydraulique moyen

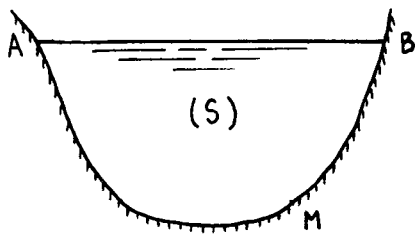
Soit S l'aire de la section droite du conduit et χ son périmètre ; par définition, le rayon hydraulique moyen est le rapport:

(36) $$R_H = \frac{S}{\chi}$$

Dans le cas d'un canal à surface libre, S désigne évidemment l'aire de la section mouillée, mais χ désigne seulement le périmètre mouillé, c'est-à-dire la longueur de la ligne de contact entre le fluide et la paroi. *



$\chi = \widehat{AMA}$



$\chi = \widehat{AMB}$

Dans le cas d'une conduite circulaire, on a :

$$R_H = \frac{D^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi D}$$

soit :

$$R_H = \frac{D}{4}$$

de sorte que le rayon hydraulique R_H est seulement égal à la moitié du rayon R d'une conduite circulaire. Aussi, on a été amené à poser :

(37) $$D_H = \frac{4\,S}{\chi}$$

---

* La longueur de la surface libre $L = \overline{AB}$ n'est pas prise en compte dans le périmètre car les forces de frottement exercées par l'air le long de $\overline{AB}$ sont négligeables vis-à-vis des forces de frottement exercées par la paroi solide $\widehat{AMB}$.

$D_H = 4\ R_H$ désignant le " diamètre hydraulique moyen " . Le diamètre hydraulique D_H d'une conduite circulaire est alors égal à son diamètre D.

B) Formule universelle de perte de charge -

Quelle que soit la forme géométrique de la section droite d'un conduit cylindrique, on a :

(31) $$j = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

D désignant la longueur d'un élément linéaire arbitraire de la section droite (S); en choisissant D_H comme longueur de référence pour caractériser les dimensions d'un ouvrage de type donné, il vient :

(31') $$j = \frac{\lambda}{D_H} \cdot \frac{U^2}{2\ g}$$

avec :

$$\lambda = \lambda(R_e = \frac{U.D_H}{\nu}\ ;\ \text{rugosité relative})$$

Quelques essais ont été effectués pour déterminer la fonction λ dans quelques cas particuliers (conduits de section elliptique, rectangulaire, etc .....) ; qualitativement, on retrouve les mêmes résultats que pour les conduites circulaires.

Dans les applications industrielles, on utilise des formules empiriques, assez peu précises, mais valables quelle que soit la forme de l'ouvrage.

C) Formules empiriques -

En appliquant le théorème des quantités de mouvement au fluide contenu dans un tronçon de conduit uniforme limité par deux sections droites distantes d'une longueur unité, Chezy avait établi la relation :

(38) $$U = C \cdot \sqrt{R_H} \cdot \sqrt{j}$$

et,cela, bien avant que soient connues les ressources de l'analyse dimensionnelle.

Le coefficient de Chezy C est lié au coefficient universel de perte de charge λ, défini par la formule (31') , par la relation :

$$C^2 = \frac{8\ g}{\lambda}$$

De nombreux expérimentateurs ont proposé des formules empiriques pour expliciter le coefficient de Chezy ; comme celui-ci n'est pas un nombre adimensionnel, sa valeur numérique dépend du système d'unités choisi.

Parmi ces formules empiriques , appelées encore " formules anciennes de perte de charge " , nous citerons seulement :

- La formule de Bazin

(39) $$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_H}}} \quad , \qquad \left(\begin{array}{l} U \text{ en m/s} \\ R_H \text{ en mètre} \end{array} \right.$$

dans laquelle γ désigne un paramètre qui dépend de la nature des parois et dont les valeurs sont données ci-dessous :

Nature des parois	γ
Parois très unies (bois raboté, ciment lissé ....)	0,06
Parois unies (planches, briques, béton .....)	0,16
Parois en maçonnerie de moellons	0,46
Parois en terre très régulière	0,85
Parois en terre ordinaire	1,30
Parois en terre avec galets ou herbes	1,75

- La formule de Manning

(40) $$C = \frac{1}{n} \cdot R_H^{1/6}$$

dans laquelle n désigne un paramètre qui dépend de la nature des parois; le tableau ci-dessous donne les valeurs de n habituellement admises, U étant encore exprimé en mètre/seconde et R_H en mètre .

Valeurs du coefficient n de la formule de Manning

Nature des parois	Etat des parois			
	parfait	bon	moyen	mauvais
Laiton lisse	0,007	0,008	0,008	0,009
Bois raboté	0,010	0,012	0,013	0,014
Ciment lissé	0,010	0,011	0,012	0,013
Bois non raboté	0,011	0,013	0,014	0,015
Béton brut	0,013	0,014	0,015	0,017
Moellons cimentés	0,017	0,020	0,025	0,030
Acier rivé	0,017	0,018	0,019	0,020
Terre régulière	0,017	0,020	0,022	0,025
Gravier fin	0,025	0,025	0,025	0,025

L'inverse du coefficient de Manning est le coefficient de Strickler ; il est donné par la relation :

$$k = \frac{1}{n} = \frac{21,1}{\sqrt[6]{s}}$$

s étant la rugosité fictive équivalente de la paroi, exprimée en mètre .

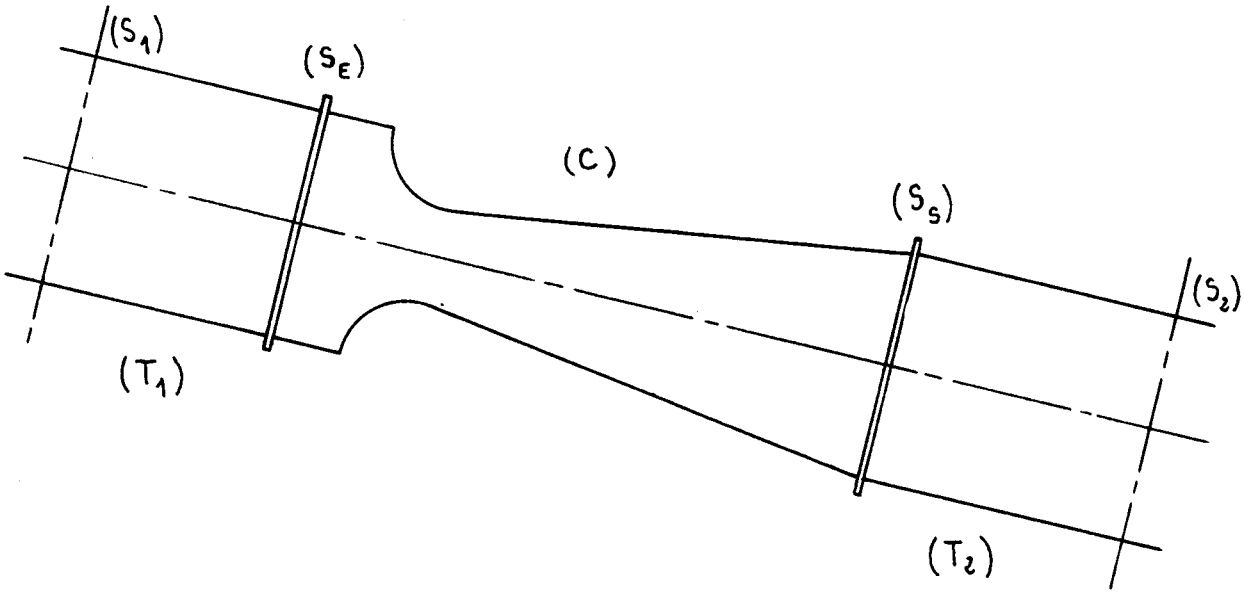
La formule de Manning est surtout utilisée dans le cas des canaux découverts ; elle donne directement le débit correspondant au régime uniforme lorsque le tirant d'eau est connu :

$$Q = \frac{1}{n} \cdot R_H^{2/3} \cdot S \cdot \sqrt{I} \qquad (40')$$

$I = j = \sin\theta$ étant la pente du fond.

C - PERTES DE CHARGE SINGULIERES

Considérons deux tronçons (T_1), (T_2) d'une conduite uniforme, raccordés par une singularité quelconque (C), un venturi par exemple. On suppose qu'à l'amont et à l'aval de (C), les tronçons de conduite sont suffisamment longs pour qu'il existe deux sections (S_1), (S_2), situées de part et d'autre de la singularité, au-delà desquelles le régime d'écoulement puisse être considéré comme uniforme.



Lorsque le dispositif est traversé par un débit Q, le fluide contenu à l'intérieur de la singularité est le siège d'une déperdition d'énergie qui, par unité de temps, a pour expression :

$$\Delta W = \varpi . Q.(H_E - H_S)$$

H_E et H_S désignant respectivement les charges dans les sections d'entrée (S_E) et de sortie (S_S) de la singularité. On pourrait donc dire - et cela serait parfaitement correct du point de vue physique - que $H_E - H_S$ est la perte de charge localisée à l'intérieur de la singularité.

Mais du point de vue pratique, cette définition n'est pas retenue pour les deux raisons suivantes :

1) H_E et H_S sont très difficiles à mesurer :

En effet, dans la section d'entrée (S_E) et dans la section de sortie (S_S), les filets liquides ne sont pas, en général, parallèles entre eux. Et même si la singularité est suffisamment progressive pour qu'il en soit pratiquement ainsi, les répartitions des vitesses dans (S_E) et (S_S) sont toujours très différentes de la répartition des vitesses dans la conduite, en régime uniforme. Par exemple, à la sortie d'un divergent très progressif, le coefficient cinétique α_S atteint des valeurs très grandes, de l'ordre de 2 ou 3. Pour mesurer H_S avec précision, il serait donc nécessaire de déterminer α_S en effectuant une exploration très fine du champ des vitesses dans (S_S).

Dans le cas où les vitesses ne sont pas parallèles entre elles, par exemple, si la singularité est un coude, la détermination de H_S est pratiquement impossible.

2) La connaissance de $H_E - H_S$ ne présente aucun intérêt pratique :

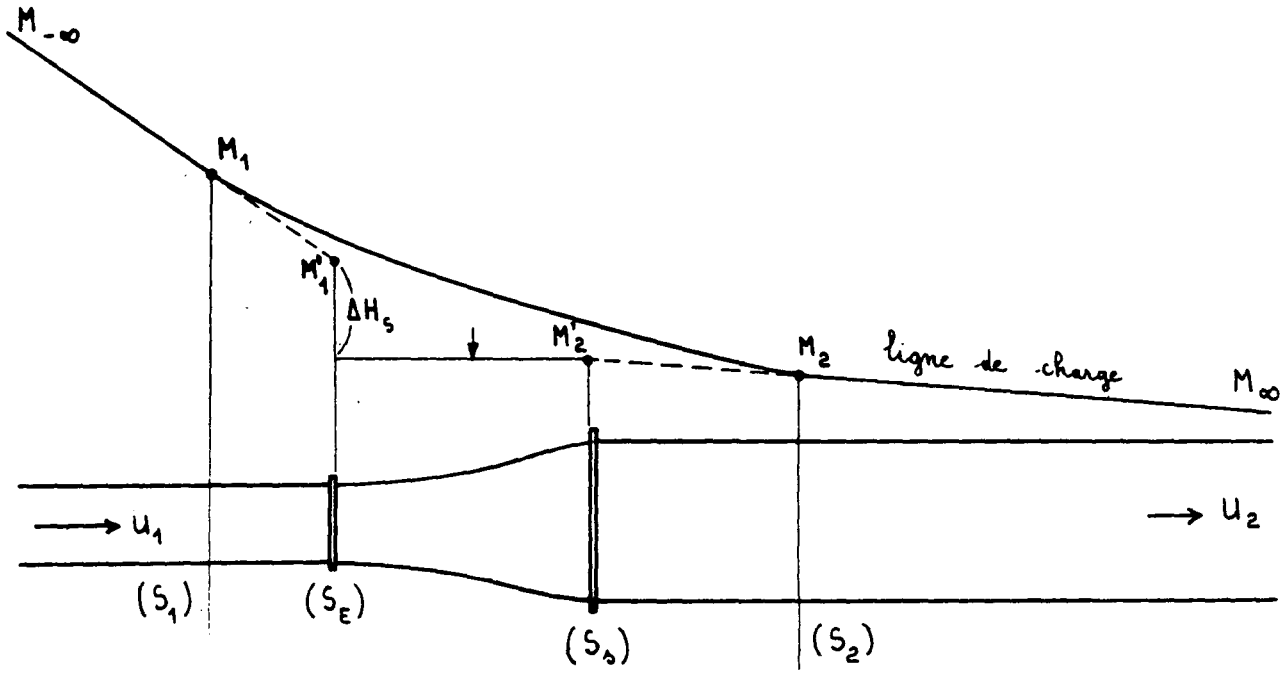
En effet, la singularité modifie très profondément les conditions d'écoulement dans la conduite, en particulier, à l'aval ; le régime uniforme n'est rétabli, après la singularité, que dans des sections distantes d'une longueur égale à plusieurs dizaines de fois le diamètre de la conduite.

De ce fait, les conduites sont, sur une certaine longueur, le siège d'une déperdition d'énergie différente de celle qui correspond au régime uniforme . On ne rendrait pas compte de ce phénomène, pourtant lié à la présence de la singularité, si on adoptait la définition proposée ci-dessus.

Une définition correcte sera celle qui permet de rendre compte de l'effet global de la singularité sur l'écoulement.

I - DEFINITION CONVENTIONNELLE DE LA PERTE DE CHARGE

Comme par hypothèse, les conduites sont très longues à l'amont et à l'aval de la singularité, la ligne de charge présentera nécessairement deux parties rectilignes : l'une, $\overline{M_{-\infty}\ M_1}$, en amont de (S_1) ; l'autre, $\overline{M_2\ M_\infty}$, à l'aval de (S_2).



Prolongeons la demi-droite $\overline{M_{-\infty}\ M_1}$, de pente j_1 jusqu'à l'abscisse qui correspond à la section d'entrée (S_E) de la singularité; on obtient ainsi le point M'_1 . De même, nous prolongerons la demi-droite $\overline{M_2\ M_\infty}$, de pente j_2 , jusqu'à l'abscisse de la section de sortie (S_S),de façon à obtenir le point M'_2 .

La perte de charge singulière ΔH_S est, par définition, égale à la différence de cote des points M'_1 et M'_2 .

Il résulte de cette définition que la perte de charge totale entre deux sections droites situées de part et d'autre de la singularité, loin de celle-ci, a pour expression :

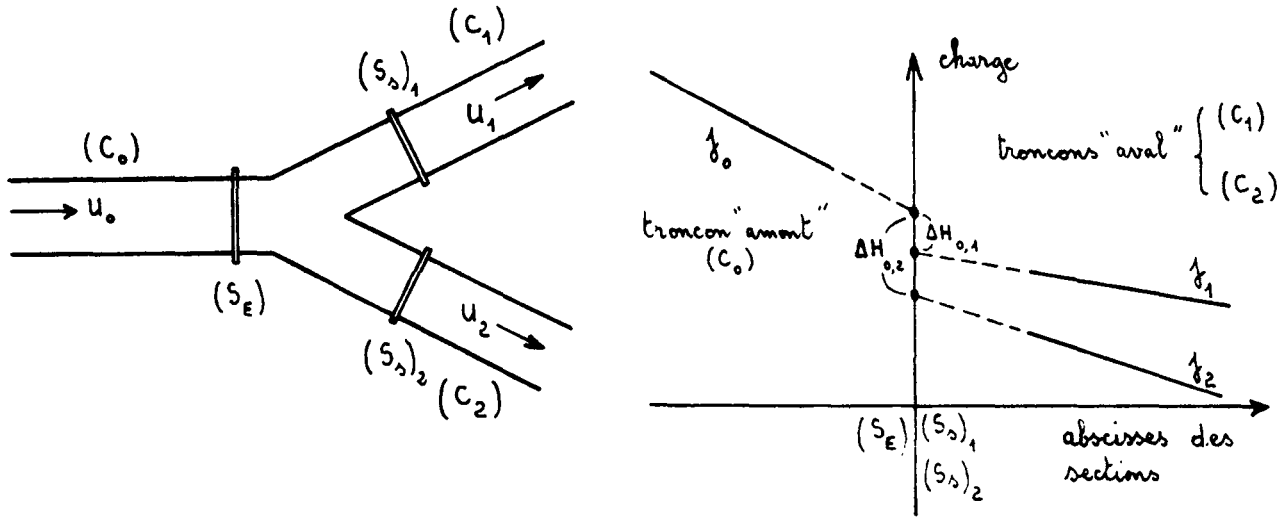
$$\Delta H = j_1.L_1 + j_2.L_2 + \Delta H_S \tag{41}$$

L_1 et L_2 désignant respectivement les longueurs des tronçons de conduites amont et aval.

REMARQUES

1) Dans le cas où la singularité est insérée entre deux tronçons de conduites identiques, la construction précédente s'effectue indifféremment à partir de la ligne de charge ou à partir de la ligne piezométrique. En effet, loin de la singularité, à l'amont et à l'aval, ces deux lignes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale d'amplitude $\alpha \cdot \frac{U^2}{2g}$.

2) Dans le cas d'une bifurcation, on définit deux pertes de charges $\Delta H_{0,1}$ et $\Delta H_{0,2}$ par des constructions semblables à celle qui a été exposée précédemment.



Seulement, il convient de remarquer que c'est un abus de langage de continuer à appeler " perte de charge " les grandeurs $\Delta H_{0,1}$ et $\Delta H_{0,2}$ ainsi définies; les tubes de courant se dirigeant vers les conduits (C_1) et (C_2) exercent l'un sur l'autre des travaux mutuels. Ainsi, si U_1 est très grand vis-à-vis de U_2, on peut obtenir $\Delta H_{0,2} < 0$.

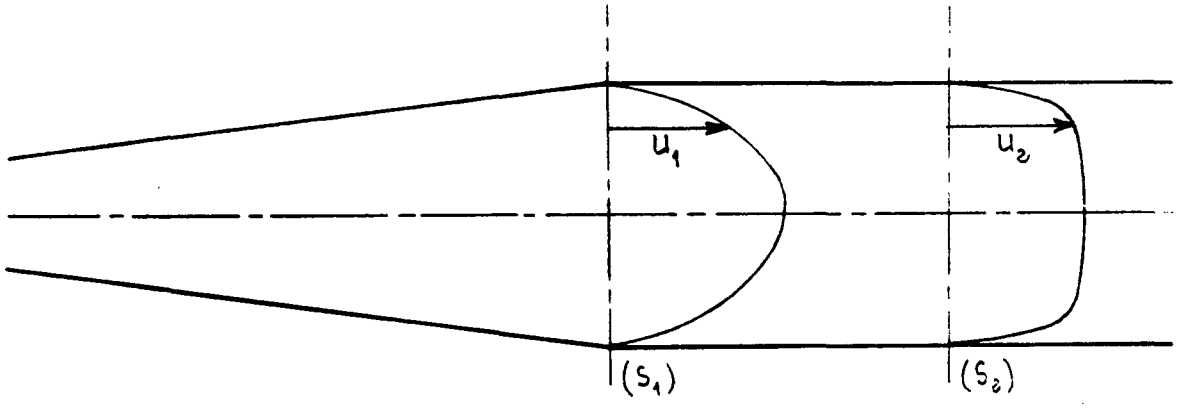
L'intérêt de la définition réside dans le fait que les différences de charge entre une section de (C_0) et une section de (C_1) ou de (C_2) s'expriment très simplement :

$$H_0 - H_1 = j_0 \cdot L_0 + j_1 . L_1 + \Delta H_{0,1}$$

$$H_0 - H_2 = j_0 \cdot L_0 + j_2 . L_2 + \Delta H_{0,2}$$

II - CONSIDERATIONS SUR LES PERTES DE CHARGE CREEES PAR UN DIVERGENT TRES PROGRESSIF

Considérons un divergent, très long, de faible conicité, relié à une conduite uniforme. Soient : (S_1) la section de raccordement du divergent et de la conduite ; (S_2) la section dans laquelle on peut considérer que le régime uniforme est établi.



Admettons que, dans la section (S_1), les vitesses soient sensiblement parallèles à l'axe ; on peut alors exprimer la perte de charge entre (S_1) et (S_2), soit :

$$\Delta H = \left(\frac{p_1^*}{\varpi} - \frac{p_2^*}{\varpi}\right) + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \frac{U^2}{2g} \qquad \left(U = \frac{Q}{S}\right)$$

Pour exprimer $\dfrac{p_1^* - p_2^*}{\varpi}$, nous appliquerons le théorème des quantités de mouvement à tout le fluide compris entre les sections (S_1) et (S_2) ; on obtient ainsi :

$$\beta_2 \cdot \rho \cdot Q \cdot U - \beta_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot U = p_1^* \cdot S - p_2^* \cdot S - R$$

soit :

$$\frac{p_1^* - p_2^*}{\varpi} = \frac{U^2}{g} \cdot (\beta_2 - \beta_1) + \frac{R}{\varpi . S}$$

R désignant la résultante des actions tangentielles exercées par le fluide sur la conduite ; R est évidemment positif. En substituant dans l'expression de ΔH, il vient alors :

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g} \cdot \left[(\alpha_1 - 2\ \beta_1) - (\alpha_2 - 2\ \beta_2)\right] + \frac{R}{\varpi \cdot S}$$

soit sensiblement, puisque $\alpha_i = 1 + 3\,\eta_i$, $\beta_i \# 1 + \eta_i$:

$$\Delta H = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}\right) \cdot \frac{U^2}{2g} + \frac{R}{\varpi \cdot S}$$

Par unité de temps, la déperdition d'énergie entre (S_1) et (S_2) est donc :

$$\Delta W = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}\right) \cdot \frac{U^2}{2g} \cdot \varpi \cdot Q + R \cdot U$$

Le fluide qui sort du divergent a, par rapport au fluide situé dans la conduite, là où le régime est uniforme, un excédent d'énergie cinétique égal à $(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \frac{U^2}{2g} \cdot \varpi \cdot Q$; le tiers de cet excédent est donc inexorablement dissipé par le travail des forces de frottement et cela, quelle que soit la nature du fluide et quelle que soit la rugosité des parois.

On constate ainsi que la conversion d'énergie cinétique en énergie de pression s'effectue avec un mauvais rendement. Par ailleurs, à la sortie d'un divergent très long, le coefficient cinétique peut être très grand, de l'ordre de 2.

Aussi le terme $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3} \cdot \frac{U^2}{2g}$ constitue-t-il le plus souvent une part non négligeable de la perte de charge totale ΔH_S .

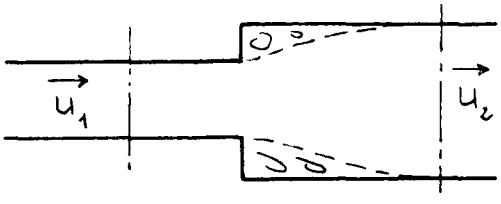
La déperdition d'énergie créée par un divergent n'est donc pas localisée uniquement entre les sections qui définissent géométriquement la singularité ; la conduite qui lui fait suite est, elle aussi, le siège d'une importante perte d'énergie singulière.

III - CATALOGUE SUCCINCT DES PERTES DE CHARGES SINGULIERES

La plupart des pertes de charges dues à des singularités ne peuvent pas être calculées théoriquement; on se réfèrera alors à des catalogues établis à la suite de nombreuses expériences*.

Cependant, dans quelques cas particuliers, il est possible d'établir des formules approchées déduites de théories simplifiées.

A) Elargissement brusque : Rappelons seulement la formule de Borda déjà établie dans un chapitre précédent :



$$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

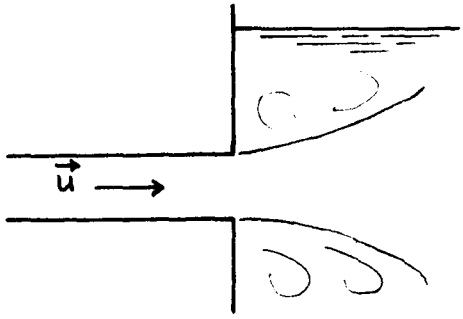
et la formule faisant intervenir un terme correctif semi empirique :

* LEVIN : "Formulaire des pertes de charge dans les conduites forcées" B.V.S - Grenoble 1966.

IDEL'CIK : "Memento des pertes de charge" - Eyrolles - 1968.

$$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} + (\alpha_1 - 1).(1 - \frac{S_1}{S_2}). \frac{U_1^2}{2g}$$

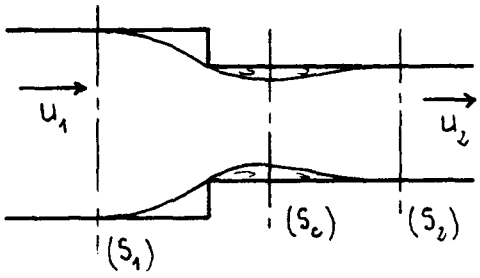
B) Conduite raccordée, à l'aval, à un bassin de grandes dimensions :



Rappelons que l'énergie cinétique attachée au fluide qui entre dans le réservoir est entièrement dissipée à l'intérieur de celui-ci; la perte de charge est :

$$\Delta H = \alpha . \frac{U^2}{2g}$$

C) Rétrécissement brusque :



L'écoulement présente l'aspect indiqué sur la figure; la veine fluide subit une contraction suivie d'un épanouissement. L'aire de la section contractée (S_c) est :

$$s_c = C_c . S_2$$

C_c étant un coefficient de contraction qui dépend du rapport $\frac{S_2}{S_1}$ et du nombre de Reynolds.

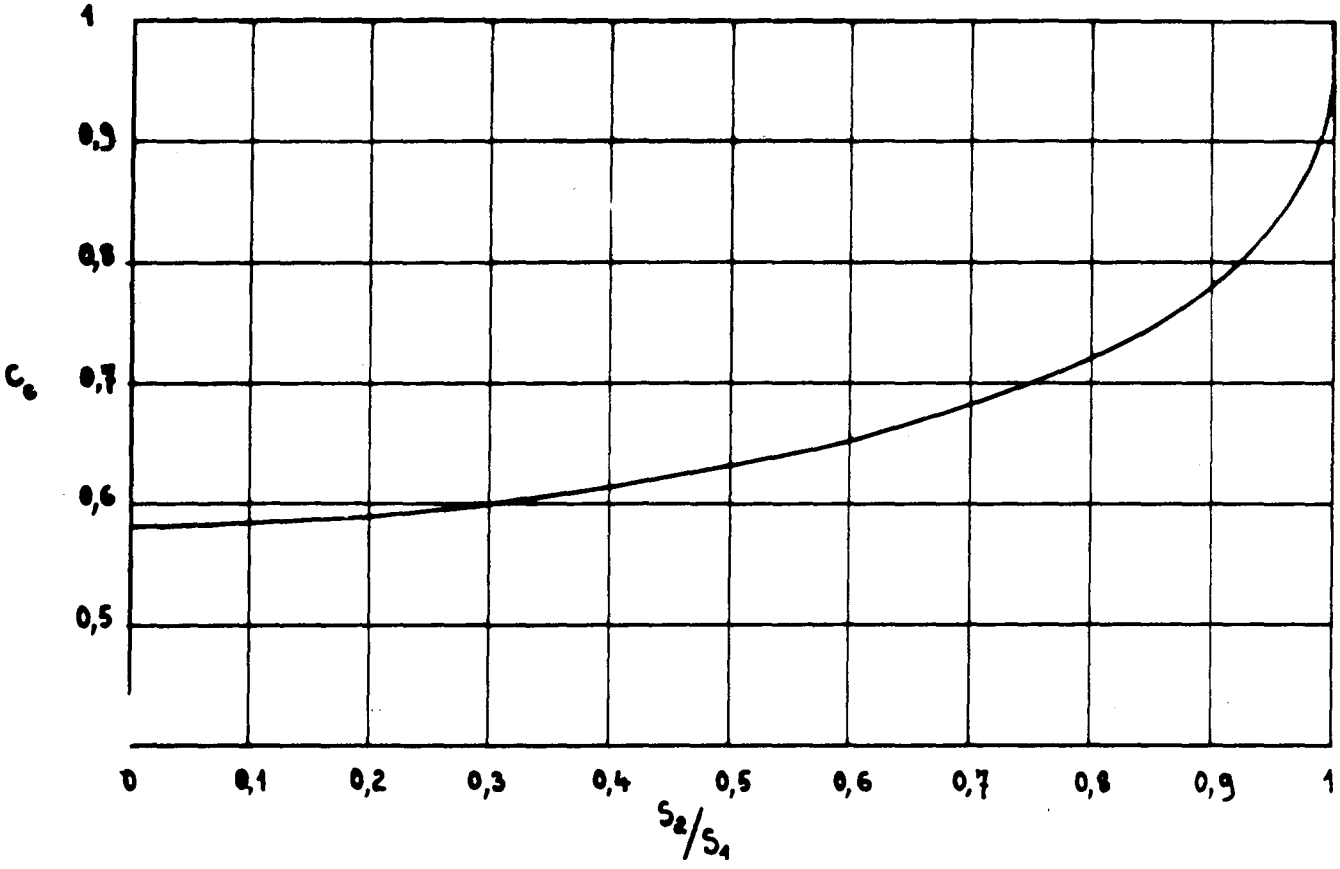
La perte de charge entre les sections (S_1) , (S_2) est évidemment la somme des pertes de charges entre (S_1) , (S_c) et (S_c), (S_2) . Mais l'expérience montre que la première, celle qui correspond au mouvement accéléré, est négligeable devant la seconde. On a donc sensiblement, d'après la formule de Borda :

$$\Delta H = \frac{(U_c - U_2)^2}{2g}$$

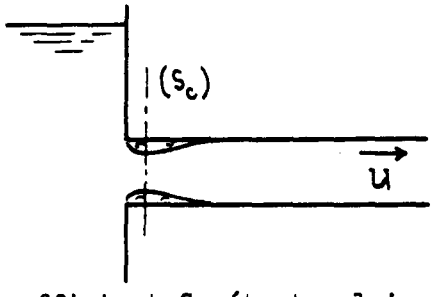
Soit :

(42) $$\Delta H = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 . \frac{U_2^2}{2g}$$

Pour des nombres de Reynolds suffisamment grands, il est possible d'établir théoriquement la loi de variation du coefficient de contraction en fonction du rapport $\frac{S_2}{S_1}$; les résultats du calcul sont donnés par la courbe ci-après .



D) Conduite raccordée à l'amont, à un réservoir de grandes dimensions -



Cet écoulement est un cas particulier du précédent; la perte de charge est encore donnée par la relation :

$$\Delta H = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \cdot \frac{U^2}{2g}$$

le coefficient C_c étant celui qui correspond à $\frac{S_2}{S_1} = 0$.

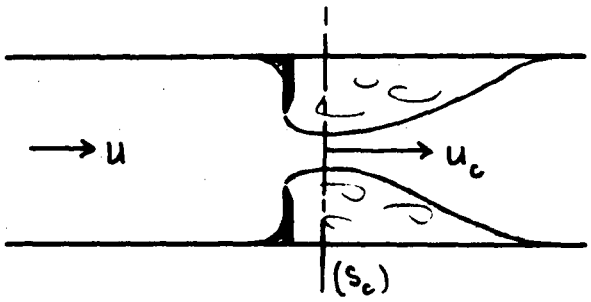
D'après la courbe ci-dessus, on a $C_c \# 0,585$

et, par suite :

(43) $$\Delta H \# 0,5 \cdot \frac{U^2}{2g}$$

E) Diaphragme circulaire -

Là encore, la perte de charge est essentiellement due à l'épanouissement de la veine fluide après la section contractée (S_c).



Soient S, l'aire de la conduite ;
s, l'aire de l'orifice circulaire ;
$s_c = C_c \cdot s$, l'aire de la section contractée.

Toujours d'après la formule de Borda, on a :

$$\Delta H = \frac{(U_c - U)^2}{2g}$$

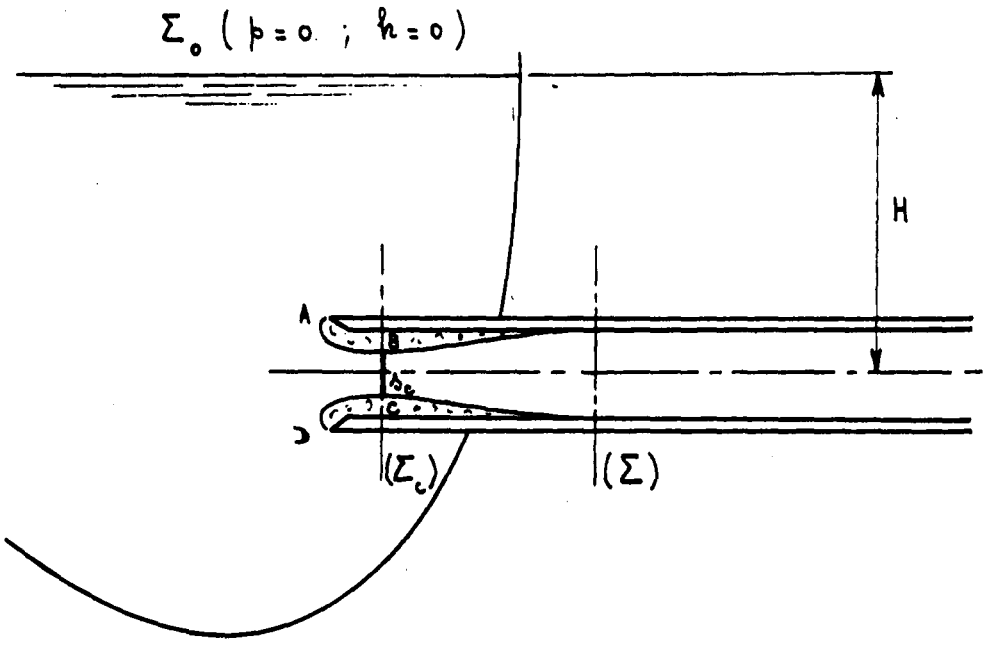
soit :

$$\Delta H = \left(\frac{S}{C_c \cdot s} - 1\right)^2 \cdot \frac{U^2}{2g} \qquad (44)$$

Pour des nombres de Reynolds suffisamment grands, les valeurs de C_c ne dépendent que du rapport $\frac{s}{S}$. Elles sont données approximativement par la courbe qui correspond à un rétrécissement brusque ; dans le cas présent, on doit lire sur l'axe des abscisses les valeurs du rapport $\frac{s}{S}$.

F) Conduite cylindrique rentrante -

Une conduite cylindrique horizontale (C) pénètre à l'intérieur du réservoir (R) qui l'alimente. Soient s, S, les sections intérieures et extérieures de la conduite ; L, la longueur du tronçon de conduite qui pénètre dans le réservoir (R), supposé de trois grandes dimensions ; H, la charge.



On admet que L est suffisamment grand vis-à-vis du diamètre extérieur D de la conduite pour qu'on puisse considérer que sur les parois du réservoir (R), la pression étoilée demeure constante. (cf. Ajutage de Borda p. 83).

Par convention, nous prendrons la pression atmosphérique comme origine des pressions et nous compterons les altitudes en choisissant comme référence le plan horizontal défini par la surface libre dans le réservoir.

Soit $s_c = C_c \cdot s$ l'aire de la section contractée; nous appellerons p_c^* la pression étoilée qui règne dans cette section (s_c) ainsi que dans la zone d'eau morte qui entoure celle-ci.

Nous appliquerons le théorème d'Euler au système fluide (τ) situé en amont de la section (Σ_c), d'aire s, qui passe par la section contractée.

Compte tenu du fait que la surface (ABCD), sur laquelle s'exerce la pression étoilée p_c^* , a pour projection horizontale l'aire S, il vient ainsi :

$$\beta_c \cdot \rho \cdot Q \cdot U_c = - p_c^* \cdot S ,$$

soit, en remplaçant Q par $U_c \cdot s_c = U_c \cdot C_c \cdot s$:

$$\beta_c \cdot \rho \cdot C_c \cdot \frac{s}{S} \cdot U_c^2 = - p_c^*$$

Par ailleurs, en négligeant les pertes de charge entre les sections (Σ_o) et (Σ_c), on obtient, d'après l'équation de Bernoulli :

$$0 = p_c^* + \alpha_c \cdot \frac{\rho}{2} \cdot U_c^2$$

En éliminant p_c^* entre les deux équations précédentes, on en déduit :

(45)* $$C_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_c}{\beta_c} \cdot \frac{S}{s}$$

La perte de charge ΔH entre (Σ_o) et la section (Σ) dans laquelle le régime uniforme est établi, s'identifie pratiquement à celle qui correspond à l'élargissement brusque se produisant après la section contractée. D'après la formule (15), elle a pour expression :

---

* On obtient un résultat identique à celui que nous avons déjà établi à propos de l'ajutage de Borda ; la formulation est différente car, ici, le coefficient de contraction est défini par $C_c = \frac{s_c}{s}$, alors que dans la formule (21), on avait posé $C_c = \frac{s_c}{S}$.

$$\Delta H = \frac{1}{2g} \cdot \left[\alpha_c \cdot U_c^2 - 2\beta_c \cdot U \cdot U_c + (2\beta - \alpha) \cdot U^2 \right]$$

$U = \frac{Q}{s}$ désignant la vitesse moyenne dans la conduite ;

α et β désignant respectivement les coefficients cinétiques et de quantités de mouvement, en régime uniforme, dans la conduite.

En remplaçant U_c par $\frac{U}{C_c}$, C_c étant donné par la relation (45), il vient finalement :

$$\Delta H = k \cdot \frac{U^2}{2g}$$

avec :

$$k = 2\beta - \alpha - \frac{4\beta_c^2}{\alpha_c} \cdot \left[\frac{s}{S} - \left(\frac{s}{S} \right)^2 \right] \tag{46}$$

Mais, étant donné que l'on a sensiblement : $\alpha_c = 1 + 3\eta_c$, $\beta_c = 1 + \eta_c$

et, par conséquent, $\frac{\beta_c^2}{\alpha_c} = 1 - \eta_c$; on peut, sans erreur appréciable, considérer que $\frac{\beta_c^2}{\alpha_c}$ est égal à l'unité.(Cette approximation se justifie d'autant plus que la très faible erreur que l'on commet ainsi n'intervient que sur le terme $\frac{s}{S}\left(\frac{s}{S} - 1\right)$ qui, habituellement, est très petit devant l'unité).

On écrira alors simplement :

$$k = 2\beta - \alpha - 4\left[\frac{s}{S} - \left(\frac{s}{S} \right)^2 \right] \tag{46'}$$

<u>Cas particulier</u> : <u>ajutage rentrant débitant à gueule bée</u>

Si la conduite est tronquée au voisinage de la section (Σ), on obtient un ajutage rentrant débitant à gueule bée.

La vitesse moyenne à la sortie de l'ajutage est donnée par l'équation de Bernoulli :

$$H = (\alpha + k) \cdot \frac{U^2}{2g} = \left[2\beta - 1 + \left(\frac{2s}{S} - 1 \right)^2 \right] \cdot \frac{U^2}{2g}$$

On en déduit les expressions du débit et du coefficient de débit d'un tel ajutage, soient :

$$Q = \frac{s}{\left[(2\beta - 1) + \left(\frac{2s}{S} - 1\right)^2\right]^{1/2}} \cdot \sqrt{2gH}$$

(47) $$C_q = \frac{1}{\left[(2\beta - 1) + \left(\frac{2s}{S} - 1\right)^2\right]^{1/2}} \qquad (\beta \simeq 1)$$

La pression au centre de la section contractée,

(48) $$p_c = \varpi H \cdot \left\{ 1 - \frac{4s^2}{S^2 \cdot \left[(2\beta - 1) + \left(\frac{2s}{S} - 1\right)^2\right]} \right\}$$

est généralement négative. Pour que les développements précédents aient une réalité physique, il convient donc de s'assurer que la pression absolue est partout supérieure à la tension de vapeur saturante T_v du fluide à la température ambiante. Comme la pression est minimum au sommet A du biseau, la condition de non cavitation est donc :

$$p_0 + \varpi.(H - R) - \varpi H \cdot \frac{4s^2}{S^2 \cdot \left[(2\beta - 1) + \left(\frac{2s}{S} - 1\right)^2\right]} > T_f$$

soit :

(49) $$H \left\{ \frac{4s^2}{S^2 \cdot \left[(2\beta - 1) + \left(\frac{2s}{S} - 1\right)^2\right]} - 1 \right\} < \frac{p_0 - T_f}{\varpi} - R$$

Si l'épaisseur du tube cylindrique est négligeable devant son diamètre, et si, en outre, on admet que β est égal à l'unité, on a sensiblement :

$$C_q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si

$$H < \frac{p_0 - T_f}{\varpi} - R$$

-:-:-:

Imprimerie de l'E.N.S.M. Nantes