Applications et Morphismes Harmoniques

Sorin Dragomir, Marc Soret

APPLICATIONS ET MORPHISMES HARMONIQUES

SORIN DRAGOMIR ET MARC SORET

Abstract. Ces leçons constituent une exposition précise, avec des calculs explicites, d' éléments introductifs à la théorie des applications harmoniques entre variétés Riemanniennes. On établit les formules de la première et de la seconde variation de l'énergie de Dirichlet et on montre certaines de leurs consequences géométriques comme le théorème de B. Solomon (cf. [34]) et la théorie de la stabilité pour les applications harmoniques. On démontre aussi un théorème classique de B. Fuglede et T. Ishihara (cf. [18], [23]) sur les morphismes harmoniques. Les morphismes des équations de la chaleur et les morphismes des noyaux de la chaleur (avec variables separées) sont décrits, dans la théorie des morphismes harmoniques, par un résultat trés beau de E. Loubeau, [28].

Contents

1. Applications harmoniques

Les notes qui suivent sont des notes de conférences données à l'Ecole Doctorale de l'Université François Rabelais (Tours, France). Il s'agit d'une exposition à des fins franchement didactiques, conçus pour fournir aux étudiants une introduction courte mais précise aux résultats fondamentales de la théorie des applications harmoniques, avec l'accent sur les aspects de géométrie différentielle, plutôt que comme un chapitre de la théorie des équations à dérivées partielles. De nombreux exercices sont proposés, dont le véritable but est d'encourager les élèves à compléter leur connaissance de la géométrie différentielle (la théorie des sous-variétés, le calcul des variations sur les variétés, etc.) par des lectures qui suivent la bibliographie indiquée dans chaque exercice. Quelques exercices conduisent aussi à des problèmes ouverts et visent à encourager les élèves à tester leur force en tant que jeunes chercheurs. La compréhension des leçons nécessitent une bonne connaissance du calcul différentiel et integral sur une variété différentiable (Riemannienne, compacte et orientable) et quelques rudiments de topologie algébrique. Une connaissance de la théorie des sous-variétés de variétés Riemanniennes peut être utile, en particulier en tant que source d'exemples, mais n'est pas indispensable.

Soit (M, g) une variété Riemannienne n-dimensionnelle, avec la métrique Riemannienne g. Si (U, x^i) est un système de coordonnées locales sur M alors on pose

$$g_{ij} = g\left(\partial_i\,,\,\partial_j\right), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad \partial_i \equiv \partial/\partial x^i\,, \quad G = \det\left[g_{ij}\right],$$

et donc la forme extérieure $\omega_U = \sqrt{G}\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ est une forme de volume sur U. Si on ajoute l'hypothèse que la variété M est orientable (une hypothèse que nous ferons toujours dans ce travail) alors le formes ω_U, obtenues pour chaque carte (U, x^i) d'un atlas orienté de M, donne lieu à une forme différentielle globalement définie sur M que nous allons noter $d\,v_g$ et appelée la *forme de volume canonique* de la variété Riemanniene orientable (M, g). Nous pourrons donc intégrer les fonctions continues à support compact, définies sur M, à valeurs réelles ou complexes, et on suppose que le lecteur est familier avec la théorie de l'intégration des formes différentielles, telle qu'elle est traitée par exemple par C. Godbillon, [19], p. 94-98. On rappelle qu'une *mesure de Borel* sur un espace de Hausdorff compact M est une mesure positive définie sur la σ-algèbre des ensembles de Borel (i.e. la plus petite σ-algèbre contenant tous les ensembles ouverts de M). Si la variété donnée M est compacte et $A \subset M$ est un ensemble de Borel alors

$$\mu(A) = \int_A d\,v_g$$

est une mesure de Borel sur M (la *mesure Riemanniene canonique* de (M, g)) et donc (M, μ) est un espace mesurable.

Soit (N, h) une autre variété Riemannienne, avec la métrique h, et soit $\phi : M \to N$ une application différentiable, de classe C^∞. Un concept fondamental, qui sera nécessaire par la suite, est celui de norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle de ϕ. Précisément, pour un point quelconque $x \in M$, on considère un repère local g-orthonormal $\{E_1, \cdots, E_n\}$ du fibré tangent $T(M)$, défini sur un voisinage ouvert de x, et on pose

$$\|d\phi\|(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} h_{\phi(x)}((d_x\phi)E_{j,x}\, , \, (d_x\phi)E_{j,x}) \right)^{1/2} .$$

La définition ne dépend pas du choix du repère orthonormal autour de point x et on obtient une function $\|d\phi\| : M \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, appelée la *norme de Hilbert-Schmidt* de $d\phi$. Par consequent

$$\|d\phi\|^2 = \operatorname{trace}_g (\phi^* h) .$$

Soit $C^\infty(M, N)$ l'ensemble de toutes les applications $\phi : M \to N$, de classe C^∞. Étant donné un domaine relativement compact $\Omega \subset M$ on pose

$$E_\Omega(\phi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|d\phi\|^2 \, d\, v_g, \quad \phi \in C^\infty(M, N).$$

Le fonctionnelle $E_\Omega : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}$ est appelée *énergie de Dirichlet*. Si M est une variété compacte alors on écrit $E = E_M$. Une application $\phi \in C^\infty(M, N)$ est un *point critique* de l'énergie de Dirichlet E_Ω si

$$\frac{d}{dt} \{E_\Omega(\phi_t)\}_{t=0} = 0 \tag{1}$$

pour chaque variation à 1-paramètre $\{\phi_t\}_{|t|<\epsilon} \subset C^\infty(M, N)$ telle que $\phi_0 = \phi$ et $\operatorname{Supp}(V) \subset \Omega$. On suppose que la variation donnée est C^∞ par rapport au paramètre t i.e. l'application

$$\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to N, \quad \Phi(x, t) = \phi_t(x), \quad x \in M, \quad |t| < \epsilon,$$

est de classe C^∞. Aussi V est la *variation infinitésimale* induite par la variation $\{\phi_t\}_{|t|<\epsilon}$ i.e.

$$V(x) = (d_{(x,0)}\Phi)\, (\partial/\partial t)_{(x,0)} \, , \quad x \in M.$$

Soit $\phi^{-1}TN \to M$ le fibré vectoriel *pullback*, ou *induit*, du fibré tangent $T(N) \to N$ par l'application $\phi : M \to N$ i.e.

$$\left(\phi^{-1}TN\right)_x = T_{\phi(x)}(N), \quad x \in M.$$

Il est facile de voir que V est une section de classe C^∞ du fibré pullback $\phi^{-1}TN \to M$ parce que

$$(d_{(x,0)}\Phi)\,(\partial/\partial t)_{(x,0)} \in T_{\Phi(x,0)}(N) = T_{\phi(x)}(N) = \left(\phi^{-1}TN\right)_x$$

pour chaque $x \in M$. Nous en arrivons maintenant au concept central de ces leçons. Une application $\phi \in C^\infty(M,N)$ s'appelle *application harmonique* si elle est un point critique de E_Ω pour chaque domaine relativement compact $\Omega \subset M$. Comme on le verra plus tard, les géodésiques d'une variété Riemannienne, les immersions isométriques minimales, et les submersions Riemanniennes avec des fibres minimales sont des exemples d'applications harmoniques. La théorie de sous-variétés dans variétés Riemanniennes (cf. e.g. B-Y. Chen, [6]) donne un grand nombre d'exemples d' immersions minimales, dont la géométrie de la seconde forme fondamentale est très intéressante (et qui est illustré dans les exercises suivants).

Exercise 1. i) *Sous-variétés invariantes des variétés Kaehleriennes* (cf. e.g. [10], p. 26). Soit M une variété differentiable, de dimension $2n$, e J une structure quasi-complexe sur M i.e. un champ $J \in C^\infty(\mathrm{End}(T(M)))$ des tenseurs tangents de type $(1,1)$ sur M tel que $J^2 = -I$ (I est la trasformation identique de $T(M)$). Une métrique Riemannienne g sur M est *Hermitienne* si $g(JX,JY) = g(X,Y)$ pour tous $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, et (M,J,g) est alors dite *variété quasi-Hermitienne*. Une variété quasi-Hermitienne est *Kaehlerienne* si sa structure complexe J est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita ∇ de (M,g) i.e. $\nabla J = 0$. Une sous-variété S d'une variété Kaehlerienne (M,J,g) est *invariante* si $JX \in T(M)$ pour chaque $X \in T(S)$. Montrer que pour chaque sous-variété invariante S d'une variété Kaehlerienne M, l'inclusion $S \to M$ est une immersion isométrique minimale.

ii) *Sous-variétés invariantes des variétés localement conformes Kaehleriennes* (cf. I. Vaisman, [37]). Une structure quasi-complexe J sur M est dite *intégrable* si $N_J(X,Y) = 0$ pour tous $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, où

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - [X,Y] - J\{[JX,Y] + [X,JY]\}$$

(le tenseur de *Nijenhuis*). Si J est intégrable alors (M,J) est une *variété complexe*. Si (M,J) est une variété complexe et g est une métrique quasi-Hermitienne sur (M,J) alors (M,J,g) est une *variété Hermitienne*. Une variété Hermitienne (M,J,g) est *localement conforme Kaehlerienne* (l.c.K.) s'il existe une forme différentielle ω fermée ($d\omega = 0$) de degré 1 telle que $d\omega = \Omega \wedge \omega$ (cf. P. Libermann, [27]). Ici $\Omega(X,Y) = g(X,JY)$ pour tous $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Soit (M,J,g,ω) une variété l.c.K. et $B = \omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ (le *champ de Lee* de M). Montrer qu'une sous-variété invariante $S \subset M$ est minimale dans (M,g) si et seulement si B est tangent a S (i.e. $B^\perp = 0$).

iii) *Sous-variétés totalement géodésiques* (cf. K. Nomizu, [30]). Soit (M,g) une variété Riemannienne et $F : M \to M$ une isométrie i.e. une transformation telle que $F^*g = g$. Soit $K = \{x \in M : F(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de

F. Montrer que chaque composante connexe de K est une sous-variété totalement géodésique de M. En particulier, soit $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ l'hypersurface algébrique donnée par l'équation

$$\left(z^1\right)^{a_1} + \cdots + \left(z^{n+1}\right)^{a_{n+1}} = 0, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \quad a_j \geq 2, \quad 1 \leq j \leq n+1.$$

V a une seule singularité à l'origine et donc $B^{2n}(a_1, \cdots, a_{n+1}) = V \setminus \{0\}$ est une variété complexe, de dimension complexe n. La *sphère de Brieskorn* déterminée par le nombres entiers a_j est la variété

$$\Sigma^{2n-1}(a_1, \cdots, a_{n+1}) = B^{2n}(a_1, \cdots, a_{n+1}) \cap S^{2n-1}.$$

cf. E. Brieskorn, [5]. Si $a_1 = 2k$ montrer que $\Sigma^{2n-3}(a_2, \cdots, a_{n+1})$ est une sous-variété totalement géodésique de $\Sigma^{2n-1}(2k, a_2, \cdots, a_{n+1})$.

iv) *Sous-variétés minimales* (cf. e.g. [10], p. 45-48). Soit $\Psi : M \to \mathbb{R}^N$ une immersion isométrique d'une variété Riemannienne n-dimensionelle M dans l'espace Euclidien. Montrer que

$$\Delta\Psi = nH$$

où $\Delta\Psi = (\Delta\Psi_1, \cdots, \Delta\Psi_N)$, $\Psi = (\Psi_1, \cdots, \Psi_N)$ et H est le vecteur de courbure moyenne de l'immersion donnée. En particulier, vérifier que pour une immersion isométrique minimale quelconque $\Psi : M \to \mathbb{R}^N$, chaque $\Psi^j : M \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique sur M. Enfin, montrer qu'il n'y a pas d' immersion isométrique minimale d'une variété Riemanninenne compacte M dans un espace Euclidien.

2. Connexions et métriques dans les fibrés vectoriels induits

Soit $\phi : M \to N$ une application de classe C^∞ entre les variétés Riemanniennes (M, g) et (N, h). Soit $\phi^{-1}TN \to M$ le fibré vectoriel pullback de $T(N) \to N$ par ϕ. Chaque champ vectoriel $Y : \Omega \to T(N)$, défini sur l'ensemble ouvert $\Omega \subset N$, détermine une section $Y^\phi \in C^\infty(U, \ \phi^{-1}TN)$ donnée par $Y^\phi = Y \circ \phi$ ou $U = \phi^{-1}(\Omega) \subset M$. On appelle Y^ϕ le *lifting naturel* de Y. Si (Ω, y^α) est un système de coordonnées locales sur N alors

$$\left\{(\partial/\partial y^\alpha)^\phi : 1 \leq \alpha \leq m\right\} \subset C^\infty(U, \ \phi^{-1}TN)$$

est un repère local du fibré pullback, défini sur $U = \phi^{-1}(\Omega)$. Ici $m = \dim(N)$. On pose $s_\alpha = (\partial/\partial y^\alpha)^\phi$ pour la simplicité de l'écriture. Soit $h^\phi = \phi^{-1}h$ le pullback de h par ϕ i.e. la métrique Riemannienne fibrée sur $\phi^{-1}TN$ donnée localement par

$$h^\phi(s_\alpha \, , \ s_\beta) = h_{\alpha\beta} \circ \phi \, , \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m,$$

ou $h_{\alpha\beta} = h(\partial/\partial y^\alpha \, , \ \partial/\partial y^\beta) \in C^\infty(\Omega)$. Par consequent

$$h^\phi(X^\phi \, , \ Y^\phi) = h(X, Y) \circ \phi, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N).$$

Il faut toutefois noter que toutes les sections dans le fibré pullback ne sont pas des lifts naturels des champs tangents à N (i.e. le morphisme $Y \in \mathfrak{X}(N) \longmapsto Y^\phi \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ n'est pas surjectif).

Soit ∇^h la connexion de Levi-Civita de la variété Riemannienne (N, h). L'étape suivante consiste à introduire une connexion $\nabla^\phi = \phi^{-1}\nabla^h$ (le *pull-back* de ∇^h par ϕ) sur le fibré $\phi^{-1}TN \to M$, de sorte que la métrique h^ϕ soit parallèle par rapport à ∇^ϕ. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ est un champ tangent au M, $s \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ est une section dans le fibré pullback, et $x \in M$ est un point quelconque, alors on choisit respectivement des systèmes de coordonnées locales (U, x^i) e (Ω, y^α) autour de point x et $\phi(x)$ tels que $\phi(U) \subset \Omega$ et on pose par définition

$$\left(\nabla^\phi_X s\right)_x = f^i(x)\left\{\frac{\partial g^\alpha}{\partial x^i}(x) + g^\gamma(x)\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^i}(x)\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\phi(x))\right\} s_\alpha(x)\,, \tag{2}$$

$$X = f^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \quad s = g^\alpha\, s_\alpha\,, \quad f^i,\, g^\alpha \in C^\infty(U),$$
$$\phi^\alpha = y^\alpha \circ \phi \in C^\infty(U), \quad 1 \le \alpha \le m,$$
$$\nabla^h_{\partial_\beta}\partial_\gamma = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\partial_\alpha\,, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\,, \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \in C^\infty(\Omega).$$

On peut montrer très facilement que la définition de $\left(\nabla^\phi_X s\right)_x$ ne dépend pas du choix des systèmes de coordonnées locales, et que l'application ∇^ϕ : $\mathfrak{X}(M)\times C^\infty(\phi^{-1}TN) \to C^\infty(\phi^{-1}TN)$ est une connexion dans le fibré vectoriel $\phi^{-1}TN \to M$. Pour une connexion quelconque $D \in C(\phi^{-1}TN)$ on peut définir une derivée covariante de h^ϕ en posant

$$(D_X h^\phi)(r, s) = X(h^\phi(r, s)) - h^\phi(D_X r, s) - h^\phi(r, D_X s),$$
$$X \in \mathfrak{X}(M), \quad r, s \in C^\infty(\phi^{-1}TN).$$

Ici on a denoté par $C(\phi^{-1}TN)$ l'espace affine de toutes les connexions dans le fibré vectoriel $\phi^{-1}TN \to M$. Pour nos besoins dans ce qui suit, nous désignerons par $C(\phi^{-1}TN,\ h^\phi)$ le sous-espace affine de $C(\phi^{-1}TN)$ consistant en les connexions $D \in C(\phi^{-1}TN)$ telles que $Dh^\phi = 0$. On peut verifier assez facilement que $\nabla^\phi \in C(\phi^{-1}TN,\ h^\phi)$ (une consequence du fait que $\nabla^h h = 0$).

On adopte aussi le notations suivantes. Si $\epsilon > 0$ et $\tilde{M} = M \times (-\epsilon, \epsilon)$ on pose

$$\alpha_t : M \to \tilde{M}, \quad \alpha_t(x) = (x, t), \quad x \in M, \quad |t| < \epsilon.$$

Aussi, étant donné un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ on considère le champ tangent $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ défini par

$$\tilde{X}_{(x,t)} = (d_x\alpha_t)X_x\,, \quad (x, t) \in \tilde{M}.$$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ alors $\phi_* X$ est la section in $\phi^{-1}TN \to M$ donnée par

$$(\phi_* X)(x) = (d_x\phi)X_x\,, \quad x \in M.$$

Par définition, la *seconde forme fondamentale* de l'application $\phi : M \to N$ est

$$\beta_\phi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(\phi^{-1}TN),$$

$$\beta_\phi(X, Y) = \nabla^\phi_X \phi_* Y - \phi_* \nabla_X Y, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

ou ∇ est la connexion de Levi-Civita de la variété Riemannienne (M, g). On montre facilement, et la verification est proposée comme exercice au lecteur, que β_ϕ est $C^\infty(M)$-bilinéare et symétrique. Aussi la trace, per respect au g, de la seconde forme fondamentale

$$\tau(\phi) = \mathrm{trace}_g\left(\beta_\phi\right) \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$$

est le *champ de tension* de l'application $\phi : M \to N$. Si $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ est un repère local g-orthonormé de $T(M)$, définie sur $U \subset M$, alors

$$\tau(\phi)_x = \sum_{i=1}^n \beta_\phi(E_i\, ,\, E_i)_x\, , \quad x \in U.$$

3. La formule de la premiere variation

Soit $\phi \in C^\infty(M, N)$ et $\{\phi_t\}_{|t|<\epsilon} \subset C^\infty(M, N)$ une variation avec 1-paramètre de ϕ (tel que $\phi_0 = \phi$). Etant donné un point $x \in M$ et un repère local g-orthonormé $\{E_i : 1 \leq i \leq n\} \subset C^\infty(U, T(M))$, défini sur un voisinage ouvert de x, on se propose d'ecrire $\|d\phi_t\|^2$ comme une fonction sur $\tilde{M}$. On a

$$\|d\phi_t\|^2_x = \mathrm{trace}_g\left(\phi_t^* h\right)_x = \sum_{i=1}^n \left(\phi_t^* h\right)(E_i\, ,\, E_i)_x =$$

$$= \sum_{i=1}^n h_{\phi_t(x)}((d_x\phi_t)E_{i,x}\, ,\, (d_x\phi_t)E_{i,x})$$

et pour chaque $X \in \mathfrak{X}(U)$

$$(d_x\phi_t)X_x = d_x(\Phi \circ \alpha_t)\; X_x = (d_{\alpha_t(x)}\Phi) \circ (d_x\alpha_t)X_x =$$

$$= (d_{(x,t)}\Phi)\tilde{X}_{(x,t)} = \left(\Phi_* \tilde{X}\right)_{(x,t)}$$

et puis

$$\|d\phi_t\|^2_x = \sum_{i=1}^n h_{\Phi(x,t)}((\Phi_*\tilde{E}_i)_{(x,t)}\, ,\, (\Phi_*\tilde{E}_i)_{(x,t)}) = \sum_{i=1}^n h^\Phi\left(\Phi_*\tilde{E}_i\, ,\, \Phi_*\tilde{E}_i\right)_{(x,t)}$$

i.e. si $\tilde{U} = U \times (-\epsilon, \epsilon)$, on considère la fonction

$$f : \tilde{U} \to \mathbb{R}, \quad f(x, t) = \frac{1}{2}\,\|d_x\phi_t\|^2_x\, , \quad (x, t) \in \tilde{U},$$

on obtient

$$f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n h^\Phi\left(\Phi_*\tilde{E}_i\, ,\, \Phi_*\tilde{E}_i\right) \in C^\infty(\tilde{U}). \tag{3}$$

En utilisant l'expression (3) on peut calculer facilement la derivée de f par rapport à t i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial}{\partial t}\left(h^\Phi(\Phi_*\tilde{E}_i\,,\,\Phi_*\tilde{E}_i)\right) = \sum_i h^\Phi\left(\nabla^\Phi_{\partial/\partial t}\Phi_*\tilde{E}_i\,,\,\Phi_*\tilde{E}_i\right)$$

parce que $\nabla^\Phi \in C(\Phi^{-1}TN, h^\Phi)$ i.e. $\nabla^\Phi h^\Phi = 0$. On a besoin maintenant du lemme suivant

Lemme 1. *Pour chaque $X \in \mathfrak{X}(U)$*

$$\nabla^\Phi_{\partial/\partial t}\Phi_*\tilde{X} = \nabla^\Phi_{\tilde{X}}\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{4}$$

La démonstration du Lemme 1 est une conséquence du fait que $[\tilde{X}\,,\,\partial/\partial t] = 0$ et que la connexion ∇^h est symétrique. Donc (pour $X = E_i$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i h^\Phi\left(\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\,\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\,\Phi_*\tilde{E}_i\right) =$$

$$= \sum_i\left\{\tilde{E}_i\left(h^\Phi(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\,\Phi_*\tilde{E}_i)\right) - h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\,\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\tilde{E}_i\right)\right\}$$

toujours en utilisant $\nabla^\Phi h^\Phi = 0$. Notez que

$$\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,0)} = (d_{(x,0)}\Phi)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,0)} = V_x\,,$$

$$\left(\Phi_*\tilde{X}\right)_{(x,0)} = (d_{(x,0)}\Phi)\tilde{X}_{(x,0)} = (d_{(x,0)}\Phi)(d_x\alpha_0)X_x = (d_x\phi_0)X_x = (\phi_*X)_x\,,$$

ou bien

$$\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\right)\circ\alpha_0 = V, \quad \left(\Phi_*\tilde{X}\right)\circ\alpha_0 = \phi_*X. \tag{5}$$

D'un autre coté, pour chaque fonction $\varphi \in C^\infty(\tilde{U})$

$$\tilde{X}(\varphi)_{(x,t)} = ((d_x\alpha_t)X_x)\,(\varphi) = X_x(\varphi\circ\alpha_t)$$

et puis (pour $t = 0$)

$$\tilde{X}(\varphi)\circ\alpha_0 = X(\varphi\circ\alpha_0). \tag{6}$$

Les formules (5)-(6) impliquent (pour $X = E_i$ et $\varphi = h^\Phi(\Phi_*(\partial/\partial t)\,,\,\Phi_*\tilde{E}_i)$)

$$\tilde{E}_{i,(x,0)}\left(h^\Phi(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\,\Phi_*\tilde{E}_i)\right) =$$

$$= E_{i,x}\left(h^\Phi(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\,\Phi_*\tilde{E}_i)\circ\alpha_0\right) = E_i\left(h^\phi(V\,,\,\phi_*E_i)\right)_x$$

pour chaque $x \in U$. Soit $X_\phi \in \mathfrak{X}(M)$ le champ de vecteurs tangents determiné par

$$h^\phi(V\,,\,\phi_* Y) = g(X_\phi\,,\,Y), \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

L'affirmation $\text{Supp}(V) \subset \Omega$ implique $\text{Supp}(X_\phi) \subset \Omega$. Puis (par $\nabla g = 0$)

$$E_i\left(h^\phi(V\,,\,\phi_* E_i)\right) = E_i(g(X_\phi\,,\,E_i)) =$$

$$= g(\nabla_{E_i} X_\phi\,,\,E_i) + g(X_\phi\,,\,\nabla_{E_i} E_i)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n \tilde{E}_i\left(h^\Phi(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t}\,,\,\Phi_* \tilde{E}_i)\right) = \operatorname{div}(X_\phi) + \sum_{i=1}^n h^\phi(V\,,\,\phi_* \nabla_{E_i} E_i). \tag{7}$$

Maintenant on a besoin de

Lemme 2. *On a*

$$\left(\nabla^\Phi_{\tilde{X}} \Phi_* \tilde{Y}\right) \circ \alpha_0 = \nabla^\phi_X \phi_* Y$$

pour touts $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

En utilisant (7) et le Lemme 2

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \operatorname{div}(X_\phi)_x - h^\phi\left(V\,,\,\sum_{i=1}^n \left\{\nabla^\phi_{E_i} \phi_* E_i - \phi_* \nabla_{E_i} E_i\right\}\right)_x$$

pour chaque $x \in U$, ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial t} \circ \alpha_0 = \operatorname{div}(X_\phi) - h^\phi(V\,,\,\tau(\phi)). \tag{8}$$

L'opérateur divergence $\operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ est défini par

$$\mathcal{L}_X\, d\mathrm{vol}(g) = \operatorname{div}(X)\, d\, v_g, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Ici $\mathcal{L}_X$ denote la derivée de Lie le long de champ X. L'opérateur divergence est donnée par

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{trace}\{Y \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \nabla_Y X\}$$

(c'est une conséquence élémentaire du fait que la forme de volume $d\, v_g$ est parallèle pour la connexion de Levi-Civita ∇ de (M, g)) ou encore, localement

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} X, E_i)$$

sur U. Puisque X_ϕ est à support compact contenu dans Ω on peut appliquer le lemme de Green i.e.

$$\int_\Omega \operatorname{div}(X_\phi)\, d\, v_g = 0.$$

Enfin (par (8) et la définition de f)

$$\frac{d}{dt}\{E_\Omega(\phi_t)\}_{t=0} = -\int_\Omega h^\phi(V\,,\ \tau(\phi))\,d\,v_g. \tag{9}$$

L'identité (9) est appelée *formule de la variation première* de E_Ω. Si $\{dE(\phi_t)/dt\}_{t=0} = 0$ pour chaque variation a 1-paramétre $\{\phi_t\}_{|t|<\epsilon} \subset C^\infty(M,N)$ avec $\mathrm{Supp}(V) \subset \Omega$, la formule de la variation première implique

$$\tau(\phi) = 0 \tag{10}$$

et (10) est appelé le *système des applications harmoniques*. Dans un moment, nous allons étudier la structure locale du système des applications harmoniques. Comme on verrá tout de suite (10) est localement un système non linéaire d'équations a derivées partielles de second ordre, où la partie principale est l'opérateur de Laplace-Beltrami de la variété Riemannienne (M,g). On rappelle que l'opérateur de Laplace-Beltrami est donné par

$$\Delta u = -\mathrm{div}(\nabla u), \quad u \in C^2(M).$$

Ici $\nabla u \in \mathfrak{X}(M)$ est le gradient de $u \in C^1(M)$ i.e. le champ de vecteurs determiné par $g(\nabla u, X) = X(u)$ pour chaque $X \in \mathfrak{X}(M)$. En utilisant l'expression locale

$$\mathrm{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}\,X^i\right)$$

on obtient aussi

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G} g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)$$

parce que $(\nabla u)^i = g^{ij}(\partial u/\partial x^j)\,\partial_i$. Une autre formule locale utile peut être obtenue de la manière suivante

$$\Delta u = -\mathrm{div}(\nabla u) = -\mathrm{trace}\,\{Y \longmapsto \nabla_Y \nabla u\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}\nabla u\,,\ E_i) = -\sum_{i=1}^n \{E_i(g(\nabla u, E_i)) - g(\nabla u, \nabla_{E_i}E_i)\}$$

ou encore

$$\Delta u = -\sum_{i=1}^n \{E_i(E_i(u)) - (\nabla_{E_i}E_i)(u)\}\,. \tag{11}$$

Nous sommes prêts à donner une représentation locale du tenseur de tension $\tau(\phi)$, et ensuite des équations (10). On a

$$\tau(\phi) = \mathrm{trace}_g\left(\beta_\phi\right) = \sum_{i=1}^n \beta_\phi(E_i\,,\ E_i) = \sum_{i=1}^n E_i^j E_i^k\,\beta_\phi(\partial_j\,,\ \partial_k),$$

$$E_i = E_i^j\partial_j\,, \quad E_i^j \in C^\infty(U), \quad \sum_{i=1}^n E_i^j E_i^k = g^{jk}\,, \quad g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k\,,$$

et puis

$$\tau(\phi) = g^{jk}\beta_\phi(\partial_j\,,\,\partial_k) = g^{jk}\left\{\nabla^\phi_{\partial_j}\phi_*\partial_k - \phi_*\nabla_{\partial_j}\partial_k\right\},$$

$$\phi_*\partial_i = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)^\phi\,,\quad \nabla_{\partial_j}\partial_k = \left|\begin{array}{c} i \\ jk \end{array}\right|\partial_i\,,$$

$$\nabla^\phi_{\partial_j}\phi_*\partial_k = \nabla^\phi_{\partial_j}\left\{\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)^\phi\right\} = \frac{\partial^2\phi^\beta}{\partial x^j\,\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)^\phi + \frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^k}\nabla^\phi_{\partial_j}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)^\phi =$$

$$= \left\{\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^j\,\partial x^k} + \left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\circ\phi\right)\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^k}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)^\phi.$$

ensuite

$$\tau(\phi) = g^{jk}\left\{\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^j\,\partial x^k} + \left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\circ\phi\right)\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^k} - \left|\begin{array}{c} i \\ jk \end{array}\right|\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)^\phi.$$

D'un autre coté (par (11))

$$\Delta u = -\sum_i\left\{E_i\left(E_i^j\frac{\partial u}{\partial x^j}\right) - E_i^j\nabla_{\partial_j}\left(E_i^k\partial_k\right)(u)\right\} =$$

$$= -\sum_i\left\{E_i(E_i^j)\frac{\partial u}{\partial x^j} + E_i^jE_i\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}\right) - E_i^j\frac{\partial E_i^k}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^k} - E_i^jE_i^k(\nabla_{\partial_j}\partial_k)(u)\right\} =$$

$$= -\sum_i E_i^jE_i^k\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\,\partial x^k} - \left|\begin{array}{c} \ell \\ jk \end{array}\right|\frac{\partial u}{\partial x^\ell}\right\}$$

Soit

$$\Delta u = -g^{jk}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\,\partial x^k} - \left|\begin{array}{c} i \\ jk \end{array}\right|\frac{\partial u}{\partial x^i}\right\}. \tag{12}$$

Enfin

$$\tau(\phi) = \left\{-\Delta\phi^\alpha + g^{jk}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\circ\phi\right)\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^k}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)^\phi. \tag{13}$$

Partout nous avons mis $\phi^\alpha = y^\alpha\circ\phi$. Par ailleurs $\left|\begin{array}{c} i \\ jk \end{array}\right|$ et $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ sont respectivement les symboles de Christoffel de seconde espèce de g_{ij} et de $h_{\alpha\beta}$. Les équations (10) peuvent être écrites localement:

$$-\Delta\phi^\alpha + g^{jk}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\circ\phi\right)\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^k} = 0,\quad 1\le\alpha\le m. \tag{14}$$

Par exemple, soit $\gamma : (a,b)\to N$ une géodésique de (N,h) i.e. localement on a

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} + \left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\circ\gamma\right)\frac{d\gamma^\mu}{dt}\frac{d\gamma^\nu}{dt} = 0. \tag{15}$$

Dans ce cas

$$M = (a, b), \quad n = 1, \quad x^1 = t, \quad \Delta = -\frac{d^2}{dt^2}, \quad g^{11} = 1,$$

et les équations (14) peuvent être écrites sous la forme (15) i.e. chaque géodésique $\gamma : (a, b) \to N$ est une application harmonique entre les variétés Riemanniennes $((a, b),\ dt \otimes dt)$ et (N, h).

Exercise 2.
i) *Plongements isométriques minimaux.* Montrer que chaque plongément isometrique $\phi : M \to N$ est minimale si et seulement si $\phi : M \to N$ est une application harmonique.

ii) *Submersions Riemanniennes* (cf. [10], p. 118). Montrer qu'une submersion Riemannienne $\pi : M \to N$ est une application harmonique si et seulement si ses fibres $\pi^{-1}(y)$, $y \in N$, sont des sous-variétés minimales de M.

iii) *Applications holomorphes* (cf. [10], p. 116). Soit (M, J, g) et (M', J', g') deux variététs Kaehleriennes. Une application differentiable $\phi : M \to M'$ est *holomorphe* si $(d_x\phi) \circ J_x = J'_{\phi(x)} \circ (d_x\phi)$ pour chaque $x \in M$. Montrer que chaque application holomorphe entre deux variétés Kaehleriennes est une application harmonique.

iv) *Applications bi-harmoniques* (cf. G-Y. Jiang, [24], C. Oniciuc, [31]). Soit $\phi : M \to N$ une application différentiable, de classe C^∞, entre deux variétés Riemanniennes M et N, avec M compacte. Soit $E_2 : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}$ donné par

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \|\tau(\phi)\|^2 \ d\,v_g.$$

On dit que $\phi : M \to N$ est une *application bi-harmonique* si $\{dE_2(\phi_t)/dt\}_{t=0} = 0$ pour chaque variation $\{\phi_t\}_{|t|<\epsilon} \subset C^\infty(M, N)$ de $\phi_0 = \phi$. Déduire la formule de la premiere variation pour E_2

$$\frac{d}{dt}\{E_2(\phi_t)\}_{t=0} = \int_M h^\phi\,(\tau_2(\phi)\,,\ V)\ d\,v_g,$$

$$\tau_2(\phi) = -\Delta^\phi \tau(\phi) - \mathrm{trace}_g \left\{ \left(R^{\nabla^h}\right)^\phi (\phi_* \cdot\,,\ \tau(\phi))\, \phi_* \cdot \right\} \in C^\infty(\phi^{-1}T(N)).$$

v) *Champs des vecteurs harmoniques* (cf. S. Dragomir & D. Perrone, [15]) Soit (M, g) une variété Riemannienne et $\pi : T(M) \to M$ le fibré tangent à M. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de (M, g). L'espace totale $T(M)$ a une structure Riemannienne naturelle, la *métrique de Sasaki*, induite par g de la manière suivante. Soit $\nabla^\pi = \pi^{-1}\nabla \in C(\pi^{-1}T(M))$ la connexion induite par ∇ dans le fibré pullback $\pi^{-1}T(M) \to T(M)$, dont chaque fibre est

$$\left(\pi^{-1}TM\right)_v = T_{\pi(v)}(M), \quad v \in T(M).$$

Le *vecteur de Liouville* est la section $\mathcal{L} \in C^\infty(\pi^{-1}T(M))$ donné par

$$\mathcal{L}(v) = v \in T_{\pi(v)}(M) = \left(\pi^{-1}TM\right)_v, \quad v \in T(M).$$

Un champ des vecteurs tangents $V \in \mathfrak{X}(T(M))$ est *horizontal* si $\nabla^\pi_V \mathcal{L} = 0$. Soit $\mathcal{H}_v \subset T_v(T(M))$ le sous-espace de tous les V_v où $V \in \mathfrak{X}(T(M))$ est un chaque champ horizontal quelconque. L'application $v \in T(M) \longmapsto \mathcal{H}_v \subset T_v(T(M))$ est la *distribution horizontale* sur $T(M)$. La *distribution verticale* est $v \in T(M) \longmapsto \mathrm{Ker}(d_v\pi) \subset T_v(T(M))$. On peut vérifier que

$$T_v(T(M)) = \mathcal{H}_v \oplus \mathrm{Ker}(d_v\pi), \quad v \in T(M).$$

Soit $Q : T(T(M)) \to \mathrm{Ker}(d\pi)$ la projection canonique que correspond à la décomposition précedente. Considérons les morphismes de fibrés vectoriels L et K_∇ donnés par

$$L : T(T(M)) \to \pi^{-1}T(M), \quad K_\nabla : T(T(M)) \to \pi^{-1}T(M),$$

$$L_v(w) = (d_v\pi)V_v\,, \quad K_v = \gamma_v^{-1} \circ Q_v\,, \quad v \in T(M), \quad w \in T_v(T(M)),$$

$$\gamma : \pi^{-1}TM \to T(T(M)),$$

$$\gamma_v(X) = \frac{dC}{dt}(0) \in T_v(T(M)), \quad v \in T(M), \quad X \in T_{\pi(v)}(M),$$

$$C : (-\epsilon, \epsilon) \to T(M), \quad C(t) = v + tX, \quad |t| < \epsilon.$$

K_∇ est l'*application de Dombrowski*. Enfin on pose

$$G_s(V, W) = g^\pi(LV, LW) + g^\pi(K_\nabla V, K_\nabla W), \quad V, W \in \mathfrak{X}(T(M)),$$

où $g^\pi = \pi^{-1}g$ est la métrique induite par g dans le fibré pullback $\pi^{-1}T(M) \to T(M)$. On peut vérifier que G_s est une métrique Riemannienne sur $T(M)$ et donc on peut regarder chaque champ de vecteurs tangents $X \in \mathfrak{X}(M)$ comme une application $X : M \to T(M)$ entre les variétés Riemanniennes (M, g) et $(T(M), G_s)$. Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte.

a) Montrer que la restriction de l'énergie de Dirichlet $E : C^\infty(M, T(M)) \to \mathbb{R}$ aux champs de vecteurs tangents à M est donné par

$$E(X) = \frac{n}{2}\,\mathrm{Vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M \|\nabla X\|^2 \, d\,v_g, \quad X \in \mathfrak{X}(M),$$

où $n = \dim(M)$.

b) Montrer que $X \in \mathfrak{X}(M)$ est une application harmonique (i.e. un point critique de l'énergie $E : C^\infty(M, T(M)) \to \mathbb{R}$ par rapport à variations $\{\phi_t\}_{|t|<\epsilon} \subset C^\infty(M, T(M))$ arbitraires de X i.e. $\phi_0 = X$) si et seulement si $\nabla X = 0$.

c) Montrer que $X \in \mathfrak{X}(M)$ est un point critique de l'énergie $E : \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ si et seulement si $\nabla X = 0$.

d) Soit $S^{n-1} \to U(M, g) \to M$ le fibré tangent sphérique, dont les fibres sont

$$U(M, g)_x = \{v \in T_x(M) : g_x(v, v) = 1\}, \quad x \in M.$$

Soit $G = \iota^* G_s$ la métrique induite par la metrique de Sasaki, où $\iota : U(M, g) \to T(M)$ est l'inclusion canonique. Soit $\mathfrak{X}^1(M) = C^\infty(U(M, g))$ l'espace des sections de classe C^∞ dans le fibré tangent sphèrique. Montrer que $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ est un point critique de $E : \mathfrak{X}^1(M) \to \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\Delta_g X - \|\nabla X\|^2 X = 0,$$

où Δ_g (le *Laplacien brut*) est l'operateur différentiel de second ordre $\Delta_g : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ donné localement par

$$\Delta_g = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} \right\},$$

où $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ est un répèr local g-orthonormé de $T(M)$.

4. Applications harmoniques a valeurs dans une sphère

Nous commençons par le calcul des symboles de Christoffel de la sphère standard $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : X_1^2 + \cdots + X_{m+1}^2 = 1\}$. Désignons par $(X_1, \cdots, X_{m+1})$ les coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^{m+1}$, l'espace euclidien avec la métrique standard

$$h_0\left(\frac{\partial}{\partial X^A}, \frac{\partial}{\partial X^B}\right) = \delta^{AB}, \quad 1 \leq A, B \leq m+1.$$

Nous adoptons la convention d'écriture $X_A = X^A$ pour $1 \leq A \leq m+1$. Le plongement canonique $j : S^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ est donné localement par

$$\underline{j}(y^1, \cdots, y^m) = \left(y^1, \cdots, y^m, \sqrt{1 - \sum_{\alpha=1} y_\alpha^2}\right),$$

$$(y^1, \cdots, y^m) \in \chi(U), \quad y_\alpha = y^\alpha,$$

$$U = \{(X_1, \cdots, X_{m+1}) \in S^m : X_{m+1} > 0\},$$

$$\chi : U \to \mathbb{R}^m, \quad \chi(X_1, \cdots, X_{m+1}) = (X_1, \cdots, X_m), \quad \underline{j} = j \circ \chi^{-1}.$$

La métrique induite par h_0 sur S^m est $h = j^* h_0$. Par consequent, localement

$$h_{\alpha\beta} = h\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) = h_0\left((dj)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, (dj)\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right),$$

$$(dj)\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial j^A}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial X^A}, \quad 1 \leq \alpha \leq m,$$

$$\frac{\partial j^A}{\partial y^\alpha} = \delta_\alpha^A, , \quad 1 \leq A \leq m, \quad \frac{\partial j^{m+1}}{\partial y^\alpha} = -\frac{y^\alpha}{\sqrt{1 - \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2}},$$

$$(dj)\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial}{\partial X^\alpha} - \frac{y^\alpha}{\sqrt{1 - \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2}} \frac{\partial}{\partial X^{m+1}},$$

et on obtient

(16) $$h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{y_\alpha y_\beta}{1 - \sum\limits_{\mu=1}^{m} y_\mu^2} .$$

On veut déterminer

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = h^{\alpha\mu}\Gamma_{\beta\gamma\mu} , \quad \Gamma_{\beta\gamma\mu} = \frac{1}{2}\left(h_{\beta\mu|\gamma} + h_{\mu\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\mu}\right),$$

$$f_{|\mu} = \frac{\partial f}{\partial y^\mu} , \quad f \in C^\infty(U), \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

Il est donc nécessaire de calculer la matrice inverse $[h^{\alpha\beta}] = [h_{\alpha\beta}]^{-1}$. On cherche $h^{\alpha\beta}$ sous la forme

$$h^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + a\, y^\alpha y^\beta$$

o ‘u $a \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer par la condition

$$h^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \Longleftrightarrow \left(\delta^{\alpha\beta} + ay^\alpha y^\beta\right)\left(\delta_{\beta\gamma} + \frac{y_\beta y_\gamma}{1 - \sum\limits_{\mu=1}^{m} y_\mu^2}\right) = \delta^\alpha_\gamma$$

$$\Longleftrightarrow \delta^\alpha_\gamma + \frac{y^\alpha y_\gamma}{1 - \sum\limits_{\mu=1}^{m} y_\mu^2} + ay^\alpha y_\gamma + a\,\frac{y^\alpha y_\gamma}{1 - \sum\limits_{\mu=1}^{m} y_\mu^2}\sum_{\beta=1}^{m} y_\beta^2 = \delta^\alpha_\gamma$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y^\alpha y_\gamma}{1 - \sum\limits_{\mu=1}^{m} y_\mu^2}\left\{1 + a\left(1 - \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2\right) + a\sum_{\beta=1}^{m} y_\beta^2\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y^\alpha y_\gamma}{1 - \sum\limits_{\mu=1}^{m} y_\mu^2}(1 + a) = 0$$

et on peut choisir $a = -1$ tel que

(17) $$h^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - y^\alpha y^\beta .$$

Puis

$$h_{\beta\mu|\gamma} = \frac{\partial}{\partial y^\gamma}\left(\delta_{\beta\mu} + \frac{y_\beta y_\mu}{1 - \sum\limits_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \left(\delta_{\beta\gamma} y_\mu + \delta_{\mu\gamma} y_\beta + \frac{2 y_\beta y_\mu y_\gamma}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \right),$$

$$\Gamma_{\beta\gamma\mu} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \left(\delta_{\beta\gamma} y_\mu + \delta_{\mu\gamma} y_\beta + \frac{2 y_\beta y_\mu y_\gamma}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} + \right.$$

$$\left. + \delta_{\gamma\beta} y_\mu + \delta_{\mu\beta} y_\gamma + \frac{2 y_\gamma y_\mu y_\beta}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} - \delta_{\beta\mu} y_\gamma - \delta_{\gamma\mu} y_\beta - \frac{2 y_\beta y_\gamma y_\mu}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \right)$$

ou encore

$$\Gamma_{\beta\gamma\mu} = \left(\delta_{\beta\gamma} + \frac{y_\beta y_\gamma}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \right) \frac{y_\mu}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \, . \tag{18}$$

Enfin (par (18))

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = (\delta^{\alpha\mu} - y^\alpha y^\mu) \left(\delta_{\beta\gamma} + \frac{y_\beta y_\gamma}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \right) \frac{y_\mu}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} =$$

$$= y^\alpha \left(1 - \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2 \right) \left(\delta_{\beta\gamma} + \frac{y_\beta y_\gamma}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \right) \frac{1}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2}$$

ou

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = y^\alpha \left(\delta_{\beta\gamma} + \frac{y_\beta y_\gamma}{1 - \sum_{\sigma=1}^{m} y_\sigma^2} \right) = y^\alpha h_{\beta\gamma} \, . \tag{19}$$

Soit $\phi : M \to S^m$ une application differentiable. Si $\Phi = j \circ \phi$ et $\Phi^A = X^A \circ \Phi$ alors $\Phi^A \Phi_A = 1$ ou

$$\Phi^\beta \Phi_\beta + \Phi^{m+1} \Phi_{m+1} = 1.$$

En différenciant par rapport à x^j on obtient

$$\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x^j} \Phi_\beta = -\Phi_{m+1} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial x^j} \tag{20}$$

puis (par (20))

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \circ \phi = \phi^\alpha \left(\delta_{\beta\gamma} + \frac{\phi_\beta \phi_\gamma}{\phi^2_{m+1}} \right), \quad X^\alpha \circ j = y^\alpha , \quad \Phi^\alpha = \phi^\alpha ,$$

$$g^{jk} \left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \circ \phi \right) \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^k} = \Phi^\alpha g^{jk} \sum_{A=1}^{m+1} \frac{\partial \Phi^A}{\partial x^j} \frac{\partial \Phi^A}{\partial x^k} = \Phi^\alpha \sum_{a=1}^{m+1} \|\nabla \Phi^A\|^2 .$$

On peut conclure qu'une application $\phi : M \to S^m$ est harmonique si

$$-\Delta \Phi^\alpha + \Phi^\alpha \sum_{a=1}^{m+1} \|\nabla \Phi^A\|^2 = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq m. \tag{21}$$

Habituellement on pose $\|\nabla \Phi\|^2 = \sum_{A=1}^{m+1} \|\nabla \Phi^A\|^2$ de sorte que les équations (21) deviennent

$$-\Delta \Phi + \|\nabla \Phi\|^2 \, \Phi = 0, \tag{22}$$

$$\Delta \Phi = (\Delta \Phi_1, \cdots , \Delta \Phi_{m+1}), \quad \Phi = (\Phi_1, \cdots , \Phi_{m+1}).$$

Exercise 3. i) *Sous-variétés minimales dans sphères* (cf. [10], p. 84-88). a) Soit $i : \overline{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ une sous-variété de l'espace Euclidien, avec la métrique Riemannienne induite. Soit aussi $\psi : M \to \overline{M}$ une immersion isométrique de la variété Riemannienne m-dimensionnelle M dans $\overline{M}$. Montrer que le vecteur de courbure moyenne de ψ est la composante tangentielle (par rapport a $T(\overline{M})$) de $\frac{1}{m} \Delta(i \circ \psi)$.

b) Soit M une variété de dimension m et $\psi : M \to S^n(r)$ une immersion isométrique de M dans la sphère n-dimensionnelle de rayon $r > 0$. On pose $\Psi = i \circ \psi$ où $i : S^n(r) \to \mathbb{R}^{n+1}$ est l'inclusion canonique. Montrer que ψ est minimale si et seulement si $\Delta \Psi = -(m/r^2) \, \Psi$.

ii) *Sous-varétés dans sphères et valeurs propres du Laplacien* (cf. T. Takahashi, [35]). a) Soit $\Psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion isométrique d'une variété Riemannienne M dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\Delta \Psi = -\mu \Psi, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq 0.$$

Montrer que 1) $\mu > 0$, 2) $\psi(M) \subset S^n(r)$ où $r^2 = m/\mu$, et 3) $\Psi : M \to S^n(r)$ est une immersion isométrique minimale.

b) Soit

$$(\phi, \psi)_{L^2} = \int_{S^m} \phi \psi \, d \operatorname{vol}(g_m), \quad \phi, \psi \in C^\infty(S^m, \mathbb{R}),$$

le produit scalaire L^2 sur la sphère S^m, doté de la métrique Riemannienne canonique g_m. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Delta)$ une valeur propre du Laplacien $\Delta : C^\infty(S^m, \mathbb{R}) \to C^\infty(S^m, \mathbb{R})$ et soit $\mathrm{Eigen}(\Delta, \lambda) \subset C^\infty(S^m, \mathbb{R})$ le sous-espace propre correspondant. Si $N = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eigen}(\Delta, \lambda)$ et $\{\phi_1, \cdots, \phi_N\} \subset \mathrm{Eigen}(\Delta, \lambda)$ est une base orthonormale (par rapport au $(\cdot\,,\,\cdot)_{L^2}$), montrer q'il y a des constantes $\alpha > 0$ et $r > 0$ telles que l'application $\Psi = (\alpha\phi_1, \cdots, \alpha\phi_N)$ est une immersion isométrique minimale de S^m dans $S^{N-1}(r) \subset \mathbb{R}^N$.

Plus tard, nous aurons besoin de la notion de *produit tordu*, que nous nous empressons d'introduire. Soit (L, g_L) et (B, g_B) deux variétés Riemanniennes de métriques respectives g_L et g_B. Soit $w \in C^\infty(L \times B)$ une fonction différentiable tel que $w(x, y) > 0$ pour tous $(x, y) \in L \times B$. On pose $S = L \times B$ et dénote par $\Pi_1 : S \to L$ et $\Pi_2 : S \to B$ les projections canoniques. Il s'ensuit que le champ de tenseurs de type $(0, 2)$

$$h = \Pi_1^* g_L + w^2\, \Pi_2^* g_B$$

est une métrique Riemannienne sur S. La variété S dotée de la métrique h se note $L \times_w B$ et s'appelle le *produit tordu* des variétés (L, g_L) et (B, g_B) avec fonction de *torsion* w.

Soit $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ la sphère standard et

$$\Sigma = \{x \in S^m : X_1 = X_2 = 0\}.$$

On peut montrer facilement que Σ est une sous-variété totalement géodésique de S^m de codimension 2. Un résultat un peu plus élaboré montre, au moyen d'une transformation de coordonnées locales, que chaque sous-variété totalement géodesique de codimension 2 dans la sphère S^m est isométrique a Σ. Une observation tres importante dans notre contexte est que $S^m \setminus \Sigma$ est isométrique à un produit *tordu*. Précisément, si on pose

$$S_+^{m-1} = \{y = (y', y_m) \in \mathbb{R}^m : y \in S^{m-1}, \quad y_m > 0\},$$

$$f : S_+^{m-1} \times S^1 \to (0, +\infty), \quad f(y, \zeta) = y_m\,, \quad y \in S_+^{m-1}\,, \quad \zeta \in S^1 \subset \mathbb{C},$$

Il s'ensuit que l'application

$$I(y, \zeta) = (y_m u,\, y_m v,\, y'), \quad y \in S_+^{m-1}\,, \quad \zeta = u + iv \in S^1,$$

donne une isométrie $S_+^{m-1} \times_f S^1 \approx S^m \setminus \Sigma$ entre $S^{m-1} \times_f S^1$ doté de la métrique Riemannienne $\pi_1^* g_{m-1} + f^2 \pi_2^* g_1$ et $(S^m \setminus \Sigma,\, g_m)$. Ici

$$\pi_1 : S_+^{m-1} \times S^1 \to S_+^{m-1}\,, \quad \pi_2 : S_+^{m-1} \times S^1 \to S^1\,,$$

sont les projections natureles et g_N denote la métrique Riemannienne canonique sur la sphère $S^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$. La section suivante est dédiée à l'étude des applications harmoniques d'une varieté Riemannienne M dans $S^m \setminus \Sigma$, en profitant du fait que $S^m \setminus \Sigma$ est une produit tordu pour écrire l'equation des applications harmoniques d'une maniére trés simple.

5. Le théorème de Solomon

Soit (L, g_L) une variété Riemannienne et $S = L\times_w\mathbb{R}$ un produit tordu , ou $w \in C^\infty(S)$, $w > 0$ est la fonction de torsion. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la variété S se pense comme dotée de la métrique

$$h = \Pi_1^* g_L + w^2\, dt \otimes dt.$$

Une observation très pédante est que la fonction coordonnée $t : L\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $t = \tilde{t} \circ \Pi_2$ où $\Pi_2 : L\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la seconde projection canonique et $\tilde{t}$ est la coordonnée (globale) cartesienne sur $\mathbb{R}$. Sauf pour des raisons de caractère didactique, habituellement on ne fait pas de distinction (du point de vue des notations) entre t et $\tilde{t}$. Soit M une varété Riemannienne orientable compacte. On établit le lemme suivant.

Lemme 3. (B. Solomon, [34])
Soit $\phi : M \to L\times_w\mathbb{R}$ une application harmonique. Soit $u = \Pi_2\circ\phi : M \to \mathbb{R}$. Alors u est une solution de l'équation elliptique

$$\operatorname{div}\left((w\circ\phi)^2\,\nabla u\right) = (w\circ\phi)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\circ\phi\right)\|\nabla u\|^2. \tag{23}$$

En particulier si w est une fonction sur L (i.e. $\partial w/\partial t = 0$) alors $\phi(M) \subset L\times\left\{t_\phi\right\}$ pour quelque $t_\phi \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $F = \Pi_1 \circ \phi$. Si $\varphi \in C^\infty(M)$ alors on pose

$$\phi_s(x) = (F(x)\,,\, u(x) + s\,\varphi(x)), \quad x \in M, \quad |s| < \epsilon,$$

de tell manière que $\{\phi_s\}_{|s|<\epsilon}$ est une variation avec 1-paramètre de $\phi = (F, u)$. Sit g la métrique Riemannienne sur M. La norme de Hilbert-Schmidt du differentiel $d\phi_s$ est donné par

$$\|d\phi_s\|_x^2 = \left[\operatorname{trace}_g(\phi_s^* h)\right](x) = \sum_{i=1}^{n}(\phi_s^* h)(E_i\,,\,E_i)_x =$$

$$= \sum_i h_{\phi_s(x)}((d_x\phi_s)E_{i,x}\,,\,(d_x\phi_s)E_{i,x})$$

pour $x \in U$, ou $\{E_i : 1 \le i \le n\}$ est un repère local g-orthonormé défini sur l'ensemble ouvert sur $U \subset M$. Si $X \in \mathfrak{X}(U)$ alors

$$h_{\phi_s(x)}((d_x\phi_s)X_x\,,\,(d_x\phi_s)X_x) =$$

$$= (\Pi_1^* g_L)_{\phi_s(x)}((d_x\phi_s)X_x\,,\,(d_x\phi_s)X_x) + w(\phi_s(x))^2\left[(dt)_{\phi_s(x)}((d_x\phi_s)X_x)\right]^2 =$$

$$= g_{L,F(x)}\left((d_{\phi_s(x)}\Pi_1)\circ(d_x\phi_s)X_x\,,\,(d_{\phi_s(x)}\Pi_1)\circ(d_x\phi_s)X_x\right) +$$

$$+ w(\phi_s(x))^2\left[(d_{u(x)+s\varphi(x)}\tilde{t})\circ(d_{\phi_s(x)}\Pi_2)\circ(d_x\phi_s)X_x\right]^2 =$$

$$= g_{L,F(x)}((d_xF)X_x\,,\,(d_xF)X_x) + w(\phi_s(x))^2\left[(d_{u(x)+s\varphi(x)}\tilde{t})\circ(d_x(u+s\varphi))X_x\right]^2 =$$

$$= (F^* g_L)(X, X)_x + w(\phi_s(x))^2 \left\{(d_{u(x)+s\,\varphi(x)}\tilde{t})\left[(d_x u)X_x + s\,(d_x\varphi)X_x\right]\right\}^2$$

parce que $\Pi_1(\phi_s(x)) = F(x)$ et $\Pi_2(\phi_s(x)) = u(x) + s\,\varphi(x)$. D'autre part on peut faire la considération élémentaire suivante

$$(d_x u)X_x = X^i(x)(d_x u)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = X^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\right)_{u(x)},$$

$$(d_{u(x)+s\,\varphi(x)}\tilde{t})(d_x u)X_x = X_x(u),$$

parce que $(d\tilde{t})\,(\partial/\partial\tilde{t}) = 1$. Ici $X = X^i\,\partial/\partial x^i$ par rapport à un système de coordonnées locales (U, x^i) sur M. Ensuite

$$(\phi_s^* h)\,(X, X) = (F^* g_L)\,(X, X) + (w \circ \phi_s)^2\;\left[X(u) + s\,X(\varphi)\right]^2$$

et alors

$$\|d\phi_s\|^2 = \sum_i (F^* g_L)\,(E_i\,,\,E_i) + (w \circ \phi_s)^2\;\sum_i \left[E_i(u) + s\,E_i(\varphi)\right]^2 =$$

$$= \|dF\|^2 + (w \circ \phi_s)^2\;\sum_i \left\{E_i(u)^2 + 2s\,E_i(u)E_i(\varphi) + s^2\,E_i(\varphi)^2\right\}$$

sur U, ou

$$\|d\phi_s\|^2 = \|dF\|^2 + (w \circ \phi_s)^2\;\left[\|\nabla u\|^2 + 2s\,g(\nabla u, \nabla\varphi) + s^2\,\|\nabla\varphi\|^2\right]. \tag{24}$$

D'autre part (par (24))

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{w(F(x)\,,\,u(x) + s\,\varphi(x))^2\left[\|\nabla u\|_x^2 + 2s\,g(\nabla u, \nabla\varphi)_x + O(s^2)\right]\right\}_{s=0} =$$

$$= 2\,w(F(x), u(x))\,\frac{\partial w}{\partial t}(F(x), u(x))\,\varphi(x)\,\|\nabla u\|_x^2 + 2w(F(x), u(x))^2\,g(\nabla u, \nabla\varphi)_x =$$

$$= 2w(\phi(x))\,w_t(\phi(x))\,\varphi(x)\,\|\nabla u\|_x^2 + 2w(\phi(x))^2\,g(\nabla u\,\nabla\varphi)_x\,.$$

Si $\phi : M \to S$ est une application harmonique alors

$$0 = \frac{d}{ds}\left\{E(\phi_s)\right\}_{s=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{\int_M \|d\phi_s\|^2\,d\,v_g\right\}_{t=0} = \tag{25}$$

$$= \int_M \left\{(w \circ \phi)\;(w_t \circ \phi)\;\varphi\,\|\nabla u\|^2 + (w \circ \phi)^2\,g(\nabla u, \nabla\varphi)\right\}\;d\,v_g$$

et

$$(w\circ\phi)^2\,g(\nabla u, \nabla\varphi) = (w\circ\phi)^2(\nabla u)(\varphi) = (\nabla u)((w\circ\phi)^2\,\varphi) - \varphi\,(\nabla u)\left[(w \circ \phi)^2\right] =$$

$$= \operatorname{div}\left[\varphi(w \circ \phi)^2\,\nabla u\right] - \varphi\,(w \circ \phi)^2\operatorname{div}(\nabla u) - \varphi\,(\nabla u)\left[(w \circ \phi)^2\right] =$$

$$= \operatorname{div}\left[\varphi(w \circ \phi)^2\,\nabla u\right] + \varphi\,\left\{(w \circ \phi)^2\,\Delta u - (\nabla u)\left[(w \circ \phi)^2\right]\right\},$$

$$\int_M \operatorname{div}\left[\varphi(w \circ \phi)^2\,\nabla u\right]\;d\,v_g = 0,$$

donc (par (25))

$$\int_M \varphi \left\{ (w \circ \phi)\ (w_t \circ \phi)\ \|\nabla u\|^2 + (w \circ \phi)^2\, \Delta u - (\nabla u)\left[(w \circ \varphi)^2 \right] \right\} d\, v_g = 0$$

pour chaque $\varphi \in C^\infty(M)$. Mais on sait que $C_0^\infty(M)$ (ici $C^\infty(M)$ parce que M est compacte) est dense edans $L^2(M)$ et alors

$$(w \circ \phi)\, \Delta u = 2(\nabla u)(w \circ \phi) - (w_t \circ \phi)\ \|\nabla u\|^2 \tag{26}$$

où $w_t = \partial w / \partial t$. Il peut être observé facilement que les formules (26) et (23) sont équivalentes. La première partie du Lemme 3 est demontrée. Si $w_t = 0$ alors l'equation (23) devient

$$\operatorname{div}\left[(w \circ \phi)^2 \nabla u \right] = 0. \tag{27}$$

ensuite

$$\operatorname{div}\left[(w \circ \phi)^2 u\, \nabla u \right] = u \operatorname{div}\left[(w \circ \phi)^2 \nabla \phi \right] + (w \circ \phi)^2 (\nabla u)(u)$$

ou (par (27))

$$\operatorname{div}\left[(w \circ \phi)^2 u\, \nabla u \right] = (w \circ \phi)^2 \|\nabla u\|^2$$

et (par intégration le long de M, en utilisant le lemme de Green)

$$\int_M (w \circ \phi)^2 \|\nabla u\|^2\ d\, v_g = 0$$

on peut conclure que u = constante sur M i.e. $u(x) = t_\phi$ pour quelque $t_\phi \in \mathbb{R}$ et chaque $x \in M$. Q.e.d.

Nous sommes prêts à commencer la discussion sur les applications harmoniques dans une sphère dont les valeurs omettent une sous-variétés totalement géodésique de codimension deux. On dit qu' une application continue $\phi : M \to S^m$ *rencontre* Σ si $\phi(M) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Soit $\phi : M \to S^m$ une application continue que non rencontre pas Σ (i.e. $\phi(M) \cap \Sigma = \emptyset$). On dit que ϕ et Σ sont *entrelacés* si l'application $\phi : M \to S^m \setminus \Sigma$ n'est pas homotopique à l'application constante. Le but de cette section est de prouver le résultat suivant.

Théorème 1. (B. Solomon, [34])
Soit $\phi : M \to S^m$ une application harmonique non constante, d'une variété Riemannienne compacte M dans une sphère. Alors ϕ et Σ sont entrelacés ou ϕ rencontre Σ.

Démonstration. Soit $\phi : M \to S^m \setminus \Sigma$ une application harmonique non constante qui non rencontre pas Σ. La preuve se conduit par réduction à l'absurde i.e. on suppose que $\phi : M \to S^m \setminus \Sigma$ et Σ ne sont pas entrelacés i.e. $\phi : M \to S^m \backslash \Sigma$ est homotopiquement nulle. Comme $S^m \backslash \Sigma \approx S^{m-1}_+ \times_f S^1$ (une isométrie), on peut considerer l'application

$$\tilde{\psi} = I^{-1} \circ \phi : M \to S^{m-1}_+ \times_f S^1 .$$

Soit $p : \mathbb{R} \to S^1$ l'application de recouvrement naturel i.e. l'application exponentielle $p(t) = \exp(2\pi i t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Considerons le produit tordu $S^{m-1}_+ \times_w \mathbb{R}$, ie la variété produit $S^{m-1}_+ \times \mathbb{R}$ dotée de la métrique

$$\Pi_1^* g_{m-1} + (w \circ \Pi_1)^2 \, dt \otimes dt,$$

$$w \in C^\infty(S^{m-1}_+), \quad w(y) = y_m \, , \quad y = (y', y_m) \in S^{m-1}_+ \, .$$

On peut vérifier facilement que l'application

$$\pi = \left(1_{S^{m-1}_+} \, , \, p\right) : S^{m-1}_+ \times_w \mathbb{R} \to S^{m-1}_+ \times_f S^1$$

est une isométrie locale. On a besoin du lemme suivant

Lemme 4. *Soit S et $\tilde{S}$ deux variétés Riemanniennes et soit $\pi : S \to \tilde{S}$ une isométrie locale. Soit aussi $\tilde{\phi} : M \to \tilde{S}$ une application harmonique d'une variété Riemannienne compacte et orientable M dans $\tilde{S}$. Alors chaque application différentiable $\phi : M \to S$ telle que $\pi \circ \phi = \tilde{\phi}$ est harmonique.*

Par le Lemme 4 l'application $\tilde{\psi} : M \to S^{m-1}_+ \times_f S^1$ est harmonique. Posons

$$F = \pi_1 \circ \tilde{\psi}, \quad \tilde{u} = \pi_2 \circ \tilde{\psi},$$

où

$$\pi_1 : S^{m-1}_+ \times S^1 \to S^{m-1}_+ \, , \quad \pi_2 : S^{m-1}_+ \times S^1 \to S^1 \, ,$$

sont le projections canoniques. De plus soit $x_0 \in M$ et $\zeta_0 = \tilde{u}(x_0) \in S^1$. Considerons aussi un point $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(t_0) = \zeta_0$. Nous avons besoin d'un résultat standard de la théorie de l'homotopie.

Lemme 5. (Proposition 5.3, [21], p. 43)
Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs. Soit $x_0 \in X$ et $f : X \to S^1$ une application continue. Si $t_0 \in \mathbb{R}$ est un point tel que $p(t_0) = f(x_0)$ et $f_* \, \pi_1(X, x_0) = 0$ alors il existe une unique application continue $g : X \to \mathbb{R}$ telle que $g(t_0) = t_0$ et $p \circ g = f$.

On peut observer que

$$\phi \simeq 0 \Longrightarrow \tilde{\psi} \simeq 0 \Longrightarrow \tilde{u}_* \, \pi_1(M, x_0) = 0$$

et alors (par le Lemme 5) il y a une unique application continue $u : M \to \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = t_0$ et $p \circ u = \tilde{u}$. Il est utile d' indiquer les applications introduites à l'aide du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} x_0 \in & M & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & S_+^{m-1} \times_f S^1 & \\ & u \downarrow & & \downarrow \pi_2 & \\ t_0 \in & \mathbb{R} & \xrightarrow{p} & S^1 & \ni \zeta_0 \end{array}$$

On applique maintenant le Lemme 3 avec $L = S_+^{m-1}$, avec la fonction de torsion $w \in C^\infty(S_+^{m-1})$ donné par $w(y) = y_m$, et avec l'application

$$\psi = (F, u) : M \to S_+^{m-1} \times_w \mathbb{R}.$$

Ça c'est possible parce que $\pi \circ \psi = \tilde{\psi}$ et π est une isométrie locale et alors (encore par le Lemme 4) ψ est une application harmonique. Par le Lemme 3 il en résulte que

$$\psi(M) \subset S_+^{m_1} \times \{t_\psi\}$$

pour quelque $t_\psi \in \mathbb{R}$. Donc on peut penser que ψ est une application harmonique de M dans l'hemisphère S_+^{m-1}. Enfin, on utilise le lemme suivant

Lemme 6. *Soit $\psi : M \to S_+^{m-1}$ une application harmonique d'une variété compacte et orientable dans une hemisphère. Alors ψ est l'application constante.*

Démonstration. Par l'équation (22)

$$-\Delta\Psi + \|\nabla\Psi\|^2\Psi = 0,$$

$$\Psi = j \circ \psi, \quad j : S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m.$$

En particulier $-\Delta\Psi_m + \|\nabla\Psi\|^2\Psi_m = 0$ et alors (en intégrant le long de M, par le lemme de Green)

$$\int_M \|\nabla\Psi\|^2\, \Psi_m \, d\, v_g = 0,$$

$$\Psi(M) \subset S_+^{m-1} \Longrightarrow \Psi_m > 0,$$

et alors $\nabla\Psi = 0$ sur M et donc Ψ est constante. Alors $\phi : M \to S^m \setminus \Sigma$ est constante, une contradiction. Q.e.d.

Par un résultat de topologie très bien connu $S_+^{m-1} \times S^1 \simeq S^1$ (une equivalence d'homotopie). Par consequent, une application continue $\phi : M \to S_+^{m-1} \times S^1$ est homotopiquent nulle si et seulement si $\pi_2 \circ \phi : M \to S^1$ est homotopiquent nulle. Les classes d'homotopie des applications continues $M \to S^1$ forment un group abélien $\pi^1(M)$ (le *groupe de Bruschlinski* de M, cf. [21], p. 48). Aussi (par le Théorème 7.1 [21], p. 49) il y a un isomorphisme naturel $\pi^1(M) \approx H^1(M, \mathbb{Z})$ et donc on obtient le résultat suivant

Corollaire 1. *Soit M une variété Riemannienne connexe, compacte, orientable avec $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Alors chaque application harmonique non constante $\phi : M \to S^m$ rencontre Σ.*

6. La formule de la seconde variation et stabilité des applications harmoniques

Soit $\phi : M \to N$ une application harmonique entre les variétés Riemanniennes M (compacte, orientable) et N et soit $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to N$ une variation avec deux paramètres de ϕ i.e. une application differentiable telle que $\Phi(x, 0, 0) = \phi(x)$ pour chaque $x \in M$. On pose

$$\phi_{s,t} : M \to N, \quad \phi_{s,t}(x) = \Phi(x, s, t), \quad x \in M, \quad |s| < \epsilon, \quad |t| < \epsilon,$$

donc $\phi_{0,0} = \phi$. On pose aussi

$$V_x = (d_{(x,0,0)}\Phi)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,0,0)}, \quad W_x = (d_{(x,0,0)}\Phi)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(x,0,0)}, \quad x \in M,$$

donc $V, W \in C^\infty(\phi^{-1}T(N))$. On veut calculer

$$\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}\{E(\phi_{s,t})\}_{s=t=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}\left\{\int_M \|d\phi_{s,t}\|^2 \, d\, v_g\right\}_{s=t=0}.$$

Soit $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ un repère local g-orthonormé définie sur $U \subset M$. Si

$$\tilde{M} = M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon), \quad f : \tilde{M} \to \mathbb{R},$$

$$f(x, s, t) = \|d\phi_{s,t}\|_x^2, \quad x \in M, \quad |s| < \epsilon, \quad |t| < \epsilon,$$

$$\alpha_{s,t} : M \to \tilde{M}, \quad \alpha_{s,t}(x) = (x, s, t), \quad x \in M,$$

alors

$$f = \sum_{i=1}^n h^\Phi(\Phi_* \tilde{E}_i\, , \, \Phi_* \tilde{E}_i)$$

sur $\tilde{U} = U \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)$ où

$$(\Phi_* A)(x, s, t) = (d_{(x,s,t)}\Phi)A_{(x,s,t)}, \quad A \in \mathfrak{X}(\tilde{M}), \quad (x, s, t) \in \tilde{M},$$

$$\tilde{X}_{(x,s,t)} = (d_x \alpha_{s,t})X_x, \quad X \in \mathfrak{X}(M), \quad x \in M, \quad s, t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

et donc $\Phi_* A \in C^\infty(\Phi^{-1}T(N))$ et $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. Il en suit que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial t}\left\{h^\Phi(\Phi_* \tilde{E}_i\, , \, \Phi_* \tilde{E}_i)\right\} =$$

(parce que $\nabla^\Phi h^\Phi = 0$)

$$= 2 \sum_i h^\Phi\left(\nabla^\Phi_{\partial/\partial t} \Phi_* \tilde{E}_i\, , \, \Phi_* \tilde{E}_i\right) =$$

(parce que $\left[\partial/\partial t\, , \, \tilde{X}\right] = 0$ pour chaque $X \in \mathfrak{X}(U)$)

$$= 2 \sum_i h^\phi\left(\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i} \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}\, , \, \Phi_* \tilde{E}_i\right) =$$

$$= 2 \sum_i \left\{ \tilde{E}_i \left(h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \Phi_* \tilde{E}_i \right) \right) - h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \nabla^\Phi_{\tilde{E}_i} \Phi_* \tilde{E}_i \right) \right\}$$

(de nouveau par $\nabla^\Phi h^\Phi = 0$). Pour chaque $s, t \in (-\epsilon, \epsilon)$ soit $X_{s,t} \in \mathfrak{X}(M)$ determiné par

$$g(X_{s,t} \, , \, Y) = h^\Phi(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \Phi_* \tilde{Y}) \circ \alpha_{s,t} \, , \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Alors

$$\sum_i \tilde{E}_i \left(h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \Phi_* \tilde{E}_i \right) \right)_{(x,s,t)} = \sum_i \tilde{E}_{i,(x,s,t)} \left(h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \Phi_* \tilde{E}_i \right) \right) =$$

$$= \sum_i \left[(d_x \alpha_{s,t}) \, E_{i,x} \right] \left(h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \Phi_* \tilde{E}_i \right) \right) = \sum_i E_{i,x} \left(h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \Phi_* \tilde{E}_i \right) \circ \alpha_{s,t} \right) =$$

$$= \sum_i E_{i,x} \left(g(X_{s,t} \, , \, E_i) \right) = \sum_i \left\{ g(\nabla_{E_i} X_{s,t} \, , \, E_i) + g(X_{s,t} \, , \, \nabla_{E_i} E_i) \right\}_x =$$

$$= \operatorname{div}(X_{s,t})(x) + h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \sum_i \Phi_* \widetilde{\nabla_{E_i} E_i} \right)_{(x,s,t)}$$

et on obtient

$$\frac{1}{2} \, \frac{\partial f}{\partial t}(x, s, t) = \operatorname{div}(X_{s,t})(x) - h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \sum_i \left(\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i} \Phi_* \tilde{E}_i - \Phi_* \widetilde{\nabla_{E_i} E_i} \right) \right)_{(x,s,t)} .$$

Pour chaque $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on définit une section $\beta_\Phi(X, Y) \in C^\infty(\Phi^{-1} T(N))$ en posant

$$\beta_\Phi(X, Y) = \nabla^\Phi_{\tilde{X}} \Phi_* \tilde{Y} - \Phi_* \widetilde{\nabla_X Y}.$$

Alors la dernière identité devient

$$\frac{1}{2} \, \frac{\partial f}{\partial t}(x, s, t) = \operatorname{div}(X_{s,t})(x) - h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \operatorname{trace}_g (\beta_\Phi) \right)_{(x,s,t)} \tag{28}$$

et par consequent

$$\frac{\partial^2}{\partial s \, \partial t} \left\{ E(\phi_{s,t}) \right\}_{s=t=0} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_M \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot \, , \, s \, , \, t) \, d\, v_g \right\}_{s=t=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_M \left[\operatorname{div}(X_{s,t})(x) - h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \operatorname{trace}_g (\beta_\Phi) \right)_{(x,s,t)} \right] dx \right\}_{s=t=0}$$

où on a posé par simplicité $dx = (d\, v_g)(x)$. Ensuite (par le lemme de Green)

$$\frac{\partial^2}{\partial s \, \partial t} \left\{ E(\phi_{s,t}) \right\}_{s=t=0} = \tag{29}$$

$$= - \left\{ \int_M \frac{\partial}{\partial s} \left[h^\Phi \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \, , \, \operatorname{trace}_g (\beta_\Phi) \right) \right] \, d\, v_g \right\}_{s=t=0} .$$

Maintenant on peut calculer (par $\nabla^\Phi h^\Phi = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \mathrm{trace}_g\,(\beta_\Phi)\right)\right] = \tag{30}$$

$$= h^\Phi\left(\nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \mathrm{trace}_g\,(\beta_\Phi)\right) + h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\mathrm{trace}_g\,(\beta_\Phi)\right).$$

On peut montrer facilement que

$$\left(\nabla^\Phi_{\tilde X}\Phi_*\tilde Y\right)_{(x,0,0)} = \left(\nabla^\phi_X Y\right)_x\,, \quad \left(\Phi_*\tilde X\right)_{(x,0,0)} = (\phi_* X)_x$$

donc

$$\left[\mathrm{trace}_g\,(\beta_\Phi)\right]_{(x,0,0)} = \sum_i\left\{\nabla^\phi_{E_i}\phi_*E_i - \phi_*\nabla_{E_i}E_i\right\}_x =$$

$$= \left[\mathrm{trace}_g\left(\beta_\phi\right)\right]_x = \tau(\phi)_x = 0$$

parce que ϕ est harmonique. D'autre part

$$\nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\mathrm{trace}_g\,(\beta_\Phi) = \sum_i \nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\beta_\Phi(E_i\,,\ E_i) = \tag{31}$$

$$= \sum_i\left\{\nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\nabla^\Phi_{\tilde E_i}\Phi_*\tilde E_i - \nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\Phi_*\widetilde{\nabla_{E_i}E_i}\right\}$$

et (compte tenue du fait que $\left[\partial/\partial s\,,\ \tilde X\right] = 0$ pour chaque $X \in \mathfrak{X}(U)$)

$$\nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\nabla^\Phi_{\tilde E_i}\Phi_*\tilde E_i = \nabla^\Phi_{\tilde E_i}\nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\Phi_*\tilde E_i + R^{\nabla^\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial s}\,,\ \tilde E_i\right)\Phi_*\tilde E_i$$

où R^{∇^Φ} est le tenseur de courbure de la connexion $\nabla^\Phi \in \mathcal{C}(\Phi^{-1}T(N),\ h^\Phi)$. Alors la formule (30) conduit à

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \mathrm{trace}_g\,(\beta_\Phi)\right)\right]_{s=t=0} =$$

$$= h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \sum_i\left\{\nabla^\Phi_{\tilde E_i}\nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\Phi_*\tilde E_i - \nabla^\Phi_{\partial/\partial s}\Phi_*\widetilde{\nabla_{E_i}E_i}\right\}\right)_{s=t=0} +$$

$$+ \sum_i h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ R^{\nabla^\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial s}\,,\ \tilde E_i\right)\Phi_*\tilde E_i\right)_{s=t=0} =$$

(parce que $\left[\partial/\partial s\,,\ \tilde E_i\right] = 0$ et $\left[\partial/\partial s\,,\ \widetilde{\nabla_{E_i}E_i}\right] = 0$)

$$= h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \sum_i\left\{\nabla^\Phi_{\tilde E_i}\nabla^\Phi_{\tilde E_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s} - \nabla^\Phi_{\widetilde{\nabla_{E_i}E_i}}\right\}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)_{s=t=0} +$$

$$+ \sum_i h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ R^{\nabla^\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial s}\,,\ \tilde E_i\right)\Phi_*\tilde E_i\right)_{s=t=0}.$$

Soit R^{∇^h} la courbure de (N,h). Soit aussi $\left(R^{\nabla^h}\right)^\phi = \phi^{-1}R^{\nabla^\phi}$ le pullback de R^{∇^h} i.e. localement

$$\left(R^{\nabla^h}\right)^\phi\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)^\phi, \left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)^\phi\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\right)^\phi = \left(R^\mu_{\alpha\beta\gamma}\circ\phi\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)^\phi .$$

Ici $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ sont les composantes locales de R^{∇^h} par rapport au système des coordonnées locales (y^α) sur N. On peut montrer (avec un calcul local très simple) que

$$h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, R^{\nabla^\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial s}, \tilde{X}\right)\Phi_*\tilde{Y}\right)_{s=t=0} = h^\phi\left(V, \left(R^{\nabla^h}\right)^\phi(W,\phi_*X)\,\phi_*Y\right)$$

pour chaque $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. D'autre part on peut calculer le premier terme de la manière suivante

$$h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \sum_i\left\{\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s} - \nabla^\Phi_{\widetilde{\nabla_{E_i}E_i}}\right\}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)\circ\alpha_{s,t} =$$

(par $\nabla^\Phi h^\Phi = 0$)

$$= \sum_i\left\{\tilde{E}_i\left(h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)\right) - h^\Phi\left(\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right) -\right.$$

$$\left. -h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \nabla^\Phi_{\widetilde{\nabla_{E_i}E_i}}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)\right\}\circ\alpha_{s,t} =$$

(si, pour chaque $s,t\in(-\epsilon,\epsilon)$, on considère $Y_{s,t}\in\mathfrak{X}(M)$ défini par

$$g(Y_{s,t}, X) = h^\Phi\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \nabla^\Phi_{\tilde{X}}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)\circ\alpha_{s,t}$$

pour chaque $X\in\mathfrak{X}(M)$)

$$= \sum_i\left\{E_i\left(g(Y_{s,t}, E_i)\right) - g\left(Y_{s,t}, \nabla_{E_i}E_i\right)\right\} -$$

$$-\sum_i\left\{h^\Phi\left(\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)\right\}\circ\alpha_{s,t} =$$

(par $\nabla g = 0$)

$$= \sum_i g\left(\nabla_{E_i}Y_{s,t}, E_i\right) - \sum_i\left\{h^\Phi\left(\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)\right\}\circ\alpha_{s,t}$$

(en utilisant la définition de $Y_{s,t}$)

$$= \operatorname{div}(Y_{s,t}) - \sum_i\left\{h^\Phi\left(\nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \nabla^\Phi_{\tilde{E}_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)\right\}\circ\alpha_{s,t}$$

et alors le formules

$$\left(\nabla^{\Phi}_{\tilde{X}}\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,0,0)} = \left(\nabla^{\phi}_X V\right)_x\,, \quad \left(\nabla^{\Phi}_{\tilde{X}}\Phi_*\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(x,0,0)} = \left(\nabla^{\phi}_X W\right)_x\,, \quad x\in M,$$

conduisent à

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[h^{\Phi}\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \mathrm{trace}_g\,(\beta_\Phi)\right)\right]_{s=t=0} = \mathrm{div}\,(X_{0,0}) -$$

$$-\sum_i\left\{h^{\phi}\left(\nabla^{\phi}_{E_i}V\,,\ \nabla^{\phi}_{E_i}W\right) - h^{\phi}\left(V\,,\ \left(R^{\nabla^h}\right)^{\phi}(W,\phi_*E_i)\,\phi_*E_i\right)\right\}$$

et alors (en intégrant le long de M, par le lemme de Green)

$$\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\left\{E(\phi_{s,t})\right\}_{s=t=0} = \tag{32}$$

$$= \int_M\left\{\left\langle D^{\phi}V\,,\ D^{\phi}W\right\rangle - h^{\phi}\left(V\,,\ \mathrm{trace}_g\left(R^{\nabla^h}\right)^{\phi}(W,\phi_*\cdot)\,\phi_*\cdot\right)\right\}\,d\,v_g.$$

L'identité (32) est la *formule de la seconde variation* de E par rapport à la variation à deux paramètres $\{\phi_{s,t}\}_{-\epsilon<s,t<\epsilon}$. On doit encore expliquer la notation utilisé dans (32). Pour chaque section $V\in C^\infty(\phi^{-1}T(N))$ sa dérivée covariante $D^{\phi}V$ est une section dans le fibré vectoriel $T^*(M)\otimes\phi^{-1}T(N)\to M$ définie par

$$(D^{\phi}V)(X) = \nabla^{\phi}_X V, \quad X\in\mathfrak{X}(M).$$

Aussi le métriques g et h induisent sur $C^\infty(T^*(M)\otimes\phi^{-1}T(N))$ un produit scalaire donné localement par

$$\langle\varphi\,,\,\psi\rangle = \sum_{i=1}^n h^{\phi}\,(\varphi E_i\,,\,\psi E_i)\,, \quad \varphi,\psi\in C^\infty(T^*(M)\otimes\phi^{-1}T(N)).$$

On a besoin des produits scalaires L^2

$$(V,W)_{L^2} = \int_M h^{\phi}(V,W)\,d\,v_g, \quad V,W\in C^\infty(\phi^{-1}T(N)),$$

$$(\varphi,\psi)_{L^2} = \int_M\langle\varphi,\psi\rangle\,d\,v_g, \quad \varphi,\psi\in C^\infty(T^*(M)\otimes\phi^{-1}TN).$$

Une autre version de (32) est obtenue en introduisant l'opérateur différenciel (le Laplacien *brut*) de second ordre localement donné par

$$\Delta^{\phi} : C^\infty(\phi^{-1}TN)\to C^\infty(\phi^{-1}TN),$$

$$\Delta^{\phi}V = -\sum_{i=1}^n\left\{\nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{E_i}V - \nabla^{\phi}_{\nabla_{E_i}E_i}V\right\}, \quad V\in C^\infty(\phi^{-1}TN).$$

Soit maintenant $(D^\phi)^* : C^\infty(T^*(M) \otimes \phi^{-1}TN) \to C^\infty(\phi^{-1}TN)$ l'adjoint formel de $D^\phi : C^\infty(\phi^{-1}TN) \to C^\infty(T^*(M) \otimes \phi^{-1}TN)$ i.e.

$$\left(\left(D^\phi\right)^* \varphi \, , \, V\right)_{L^2} = \left(\varphi \, , \, D^\phi V\right)_{L^2} \, ,$$

$$\varphi \in C^\infty(T^*(M) \otimes \phi^{-1}TN), \quad V \in C^\infty(\phi^{-1}TN).$$

Lemme 7. $\Delta^\phi = (D^\phi)^* \circ D^\phi$.

Démonstration. On a (par $\nabla^\phi h^\phi = 0$ et $\nabla g = 0$)

$$\left(\left(D^\phi\right)^* \varphi \, , \, V\right)_{L^2} = \int_M \langle \varphi \, , \, D^\phi V \rangle \, d\, v_g,$$

$$\langle \varphi \, , \, D^\phi V \rangle = \sum_i h^\phi(\varphi E_i \, , \, D^\phi_{E_i} V) =$$

$$= \sum_i \left\{ E_i \left(h^\phi(\varphi E_i \, , \, V) \right) - h^\phi \left(\nabla^\phi_{E_i} \varphi E_i \, , \, V \right) \right\} =$$

(si on définit $X_{\varphi,V} \in \mathfrak{X}(M)$ par

$$g(X_{\varphi,V} \, , \, Y) = h^\phi(\varphi Y \, , \, V),$$

pour chaque $Y \in \mathfrak{X}(M)$)

$$= \sum_i \left\{ E_i \left(g(X_{\varphi,V} \, , \, E_i) \right) - h^\phi \left(\nabla^\phi_{E_i} \varphi E_i \, , \, V \right) \right\} =$$

$$= \sum_i \left\{ g\left(\nabla_{E_i} X_{\varphi,V} \, , \, E_i \right) + g\left(X_{\varphi,V} \, , \, \nabla_{E_i} E_i \right) - h^\phi \left(\nabla^\phi_{E_i} \varphi E_i \, , \, V \right) \right\} =$$

$$= \operatorname{div}\left(X_{\varphi,V} \right) + \sum_i \left\{ h^\phi \left(\varphi \nabla_{E_i} E_i \, , \, V \right) - h^\phi \left(\nabla^\phi_{E_i} \varphi E_i \, , \, V \right) \right\} =$$

$$= \operatorname{div}\left(X_{\varphi,V} \right) - \sum_i h^\phi \left((\nabla^\phi_{E_i} \varphi) E_i \, , \, V \right)$$

où la dérivée covariante de φ est donnée par

$$(\nabla^\phi_X \varphi) Y = \nabla^\phi_X (\varphi Y) - \varphi \, \nabla_X Y, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

On a obtenu l'identité

$$\langle \varphi \, , \, \nabla^\phi V \rangle = \operatorname{div}\left(X_{\varphi,V} \right) - h^\phi \left(\operatorname{trace}_g \left(\nabla^\phi \varphi \right) \, , \, V \right). \tag{33}$$

En intégrant le long de M (par le lemme de Green)

$$\left(\left(D^\phi\right)^* \varphi \, , \, V\right)_{L^2} = -\int_M h^\phi \left(\operatorname{trace}_g \left(\nabla^\phi \varphi \right) \, , \, V \right) \, d\, v_g =$$

$$= -\left(\operatorname{trace}_g \left(\nabla^\phi \varphi \right) \, , \, V \right)_{L^2}$$

d'ou

$$\left(D^\phi \right)^* \varphi = -\operatorname{trace}_g \left(\nabla^\phi \varphi \right) \tag{34}$$

parce que $C_0^\infty(\phi^{-1}TN)$ (ici $C^\infty(\phi^{-1}TN)$ parce que M est compacte) est dense dans $L^2(\phi^{-1}TN)$. En particulier pour $\varphi = D^\phi V$

$$\left(D^\phi\right)^* \varphi = -\sum_i \{\nabla_{E_i}(\varphi E_i) - \varphi\, \nabla_{E_i} E_i\} =$$

$$= -\sum_i \left\{\nabla^\phi_{E_i} \nabla^\phi_{E_i} V - \nabla^\phi_{\nabla_{E_i} E_i} V\right\} = \Delta^\phi V$$

et le Lemme 7 est démontré. Q.e.d.

Par les symétries du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel

$$h^\phi\left(V\,,\ \mathrm{trace}_g\left[\left(R^{\nabla^h}\right)^\phi (W, \phi_*\cdot)\, \phi_*\cdot\right]\right) = \sum_i h^\phi\left(V\,,\ \left(R^{\nabla^h}\right)^\phi (W, \phi_* E_i)\, \phi_* E_i\right) =$$

$$= \sum_i \left(K^{\nabla^h}\right)^\phi (V,\ \phi_* E_i\,,\ W,\ \phi_* E_i) = \sum_i \left(K^{\nabla^h}\right)^\phi (W,\ \phi_* E_i\,,\ V,\ \phi_* E_i) =$$

$$= \sum_i h^\phi\left((R^{\nabla^h})^\phi(V,\ \phi_* E_i)\phi_* E_i\,,\ W\right) = h^\phi\left(\mathrm{trace}_g\ \left[(R^{\nabla^h})^\phi(V,\ \phi_*\cdot)\phi_*\cdot\right]\,,\ W\right)$$

où K^{∇^h} (le tenseur de Riemann-Christoffel) est donné par

$$K^{\nabla^h}(X, Y, Z, U) = h(R^{\nabla^h}(Z, U)Y\,,\ X), \quad X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M),$$

et $\left(K^{\nabla^h}\right)^\phi = \phi^{-1} K^{\nabla^h}$ est le pullback de K^{∇^h} par ϕ. Alors (par (32))

$$\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}\{E(\phi_{s,t})\}_{s=t=0} = \int_M h^\phi(J_\phi V\,,\ W)\, d\, v_g \tag{35}$$

où on a posé

$$J_\phi V = \Delta^\phi V - \mathrm{trace}_g\ \left[(R^{\nabla^h})^\phi(V,\ \phi_*\cdot)\phi_*\cdot\right], \quad V \in C^\infty(\phi^{-1}TN). \tag{36}$$

L'application $J_\phi : C^\infty(\phi^{-1}TN) \to C^\infty(\phi^{-1}TN)$ est dite l'*opérateur de Jacobi*. On pose d'habitude

$$\mathcal{R}_\phi V = \mathrm{trace}_g\ \left[(R^{\nabla^h})^\phi(V,\ \phi_*\cdot)\phi_*\cdot\right]$$

et alors l'opérateur de Jacobi s'écrit

$$J_\phi = \Delta^\phi - \mathcal{R}_\phi\,. \tag{37}$$

$\mathcal{R}_\phi$ est un opérateur differentiel d'ordre zero i.e. une application $C^\infty(M)$-lineaire

$$\mathcal{R}_\phi : C^\infty(\phi^{-1}TN) \to C^\infty(\phi^{-1}TN).$$

En particulier $\mathcal{R}_\phi(fV) = f\,\mathcal{R}_\phi(V)$ et alors $\mathcal{R}_\phi$ induit un endomorphisme du fibré vectoriel $\phi^{-1}T(N) \to M$, indiqué par le même symbole

$$\mathcal{R}_{\phi,x} : T_{\phi(x)}(N) \to T_{\phi(x)}(N), \quad x \in M,$$

$$\mathcal{R}_{\phi,x}(v) = \sum_{i=1}^{n} R^{\nabla^h}_{\phi(x)}\left(v, (d_x\phi)e_i\right)(d_x\phi)e_i\,,$$

$$\forall\, v \in T_{\phi(x)}(N) = \left(\phi^{-1}TN\right)_x\,,$$

où $e_i = E_{i,x}$ et $\{E_i : 1 \le i \le n\}$ est un repère ortonormé du $(T(M), g)$, défini sur un voisinage ouvert $U \subset M$ de point x. On peut vérifier sans difficulté (encore par le propriétés de symétrie du tenseur de Riemann-Christoffel) que

$$\text{(38)} \qquad h^\phi\left(\mathcal{R}_\phi V\,,\, W\right) = h^\phi\left(V\,,\, \mathcal{R}_\phi W\right), \quad V, W \in C^\infty(\phi^{-1}TN).$$

La formule de la variation seconde (35) nous permet d'introduire des notions très importantes, comme l'indice et la nullité d'une application harmonique $\phi \in C^\infty(M,N)$. Nous allons donner quelques définitions. Le Hessien de l'application énergie $E : C^\infty(M,N) \to \mathbb{R}$ est défini par

$$H(E)_\phi(V,W) = \int_M h^\phi\left(J_\phi V\,,\, W\right)\, d\,v_g,$$

$$V, W \in C^\infty(\phi^{-1}TN).$$

Soit $\mathfrak{har}(M,N) = \{\phi \in C^\infty(M,N) : \tau(\phi) = 0\}$ l'ensemble des applications harmoniques. Pour une application harmonique quelconque $\phi \in \mathfrak{har}(M,N)$ l' indice de ϕ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Big\{\dim_{\mathbb{R}}(F) : F \subset C^\infty(\phi^{-1}TN) \;\; \text{sous} - \text{espace},$$

$$H(E)_\phi \;\; \text{est dèfini negatif sur } F\Big\}.$$

L'indice de ϕ est noté par $\operatorname{ind}(\phi)$. La *nullité* de ϕ est la dimension de l'espace

$$\left\{V \in C^\infty(\phi^{-1}TN) : H(E)_\phi(V,W) = 0, \quad \forall\, W \in C^\infty(\phi^{-1}TN)\right\}.$$

La nullité de ϕ est noté par $\operatorname{null}(\phi)$. Une application harmonique est *faiblement stable* si $\operatorname{ind}(\phi) = 0$ i.e. $H(E)_\phi(V,V) \ge 0$ pour chaque $V \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$. Autrement ϕ est *instable*.

L'opérateur de Jacobi $J_\phi : C^\infty(\phi^{-1}TN) \to C^\infty(\phi^{-1}TN)$ est un opérateur elliptique auto-adjoint agissant sur les sections de fibré vectoriel $\phi^{-1}TN \to M$ (dont la base M est compacte) et alors (par la théorie de Hodge-de Rham-Kodaira) le spectre $\operatorname{Spec}(J_\phi)$ de J_ϕ est un ensemble discret qui se compose d'un nombre infini de valeurs propres, chaque ayant une multiplicité finie. De plus $\operatorname{Spec}(J_\phi)$ n'a pas de point d'accumulation. Un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est un valeur propre de J_ϕ s'il existe $V \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$, $V \neq 0$, tel que $J_\phi V = \lambda V$. Pour chaque $\lambda \in \operatorname{Spec}(J_\phi)$ on pose aussi $\operatorname{Eigen}(J_\phi\,,\,\lambda) = \{V \in$

$C^\infty(\phi^{-1}TN) \setminus \{0\} \,:\, J_\phi V = \lambda V\}$. La *multiplicité* de $\lambda \in \mathrm{Spec}(J_\phi)$ est la dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eigen}(J_\phi\,,\,\lambda)$. On sait aussi que

$$\mathrm{ind}(\phi) = \sum_{\lambda<0} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eigen}(J_\phi\,,\,\lambda),$$

$$\mathrm{null}(\phi) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eigen}(J_\phi\,,\,0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(J_\phi).$$

On écrit le spectre de J_ϕ comme une suite

$$\lambda_1(\phi) \le \lambda_2(\phi) \le \cdots \le \lambda_\nu(\phi) \le \cdots \uparrow +\infty$$

où chaque valeur propre est écrit tant de fois combien sa multiplicité. Aussi on sait (par la théorie générale des valeurs propres d'un opérateur elliptique auto-adjoint) que $\phi \in \mathfrak{har}(M,N)$ est faiblement stable si et seulement si $\lambda_\nu(\phi) \ge 0$ pour chaque $\nu \ge 1$.

Proposition 1. *Si N est une variété Riemannienne à courbure sectionelle non positive alors chaque application harmonique $\phi \in \mathfrak{har}(M,N)$ est faiblement stable.*

Démonstration. On rappelle d'abord que la courbure sectionelle de (N,h) est

$$k(\sigma) = \frac{K_y^{\nabla^h}(v,\,w,\,v,\,w)}{\|v\|\,\|w\| - h_y(v,w)}\,, \quad \sigma \subset T_y(N), \quad \dim_{\mathbb{R}} \sigma = 2, \quad y \in N,$$

où $\{v,w\} \subset \sigma$ est une base arbitraire. Soit $V \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ et $x \in M$. Alors

$$h^\phi\left(\mathcal{R}_\phi V\,,\,V\right)_x = \sum_i h_{\phi(x)}\left(R^{\nabla^h}_{\phi(x)}(V_x\,,\,(d_x\phi)E_{i,x})\,(d_x\phi)E_{i,x}\,,\,V_x\right) =$$

$$= \sum_i K^{\nabla^h}_{\phi(x)}(V_x,\,(d_x\phi)E_{i,x},\,V_x,\,(d_x\phi)E_{i,x})\,.$$

Soit $A \subset \{1,\cdots,n\}$ l'ensemble des indices $i \in \{1,\cdots,n\}$ tels que les vecteurs $\{V_x\,,\,(d_x\phi)E_i\}$ sont linéarement indépendents . Pour chaque $i \in A$ soit $\sigma_i \subset T_{\phi(x)}(N)$ le 2-plan engendré par $\{V_x,(d_x\phi)E_{i,x}\}$ (autrement, i.e. si $i \in \{1,\cdots,n\} \setminus A$, alors $h^\phi\left(\mathcal{R}_\phi V\,,\,V\right)_x = 0$) . Il suit que

$$h^\phi\left(\mathcal{R}_\phi V\,,\,V\right)_x = \sum_{i\in A}\left(\|V_x\|\,\|(d_x\phi)E_{i,x}\| - h_{\phi(x)}(V_x\,,\,(d_x\phi)E_{i,x})\right) k(\sigma_i) \le 0$$

et enfin

$$H(E)_\phi(V,V) = \int_M h^\phi(J_\phi V,V)\,d\,v_g =$$

$$= \int_M \left\{\|D^\phi V\|^2 - h^\phi(\mathcal{R}_\phi V,V)\right\}\,d\,v_g \ge 0$$

pour chaque $V \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$. Q.e.d.

Malgré le fait que $\mathfrak{har}(M,N)$ n'est pas une variété, nous introduisons une notion d'espace tangent en un point $\phi \in \mathfrak{har}(M,N)$ de la manière suivante. Pour chaque $\phi \in \mathfrak{har}(M,N)$ soit $T_\phi\,(\mathfrak{har}(M,N))$ l'ensemble des sections $V \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ telles que

$$V_x = (d_{(x,0)}\Phi)(\partial/\partial s)_{(x,0)}\,, \quad x \in M,$$

pour quelque variation à 1-paramètre

$$\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to N, \quad \Phi(x,s) = \phi_s(x), \quad x \in M, \quad |s| < \epsilon,$$

telle que $\phi_0 = \phi$ et chaque $\phi_s : M \to N$ soit une application harmonique.

Proposition 2. *Pour chaque application harmonique $\phi \in \mathfrak{har}(M,N)$ on a*

$$T_\phi\,(\mathfrak{har}(M,N)) \subset \mathrm{Ker}(J_\phi). \tag{39}$$

En particulier

$$\dim_{\mathbb{R}}\left[T_\phi(\mathfrak{har}(M,N))\right] \leq \mathrm{null}(\phi). \tag{40}$$

Démonstration. Soit $\{\phi_s\}_{|s|<\epsilon} \subset \mathfrak{har}(M,N)$ une variation à 1-paramètre telle que $\phi_0 = \phi$. Puis soi $\{\phi_{s,t}\}_{|t|<\epsilon} \subset C^\infty(M,N)$ une variation à 1-paramètre de ϕ_s i.e. $\phi_{s,0} = \phi_s$. On pose comme d'habitude

$$\Psi : M \times (-\epsilon,\epsilon) \times (-\epsilon,\epsilon) \to N, \quad \Psi(x,s,t) = \phi_{s,t}(x), \quad -\epsilon < s,t < \epsilon,$$

$$V_x = (d_{(x,0,0)}\Psi)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,0,0)}, \quad W_x = (d_{(x,0,0)}\Psi)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(x,0,0)}, \quad x \in M.$$

Chaque ϕ_s est une application harmonique et donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\{E(\phi_{s,t})\}_{t=0} = 0.$$

Il s'ensuit que

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\,\{E(\phi_{s,t})\}_{s=t=0} = \int_M h^\phi\left(J_\phi V\,,\ W\right)\,d\,v_g$$

et alors, comme $W \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ est arbitraire, il résulte que $J_\phi V = 0$. Q.e.d.

Nous discutons maintenant quelques exemples délibérément simples.

Exemple 1. (*L'application constante*) Soi $\phi : M \to N$ l'application constante $\phi(x) = y_0$ pour chaque $x \in M$. Alors

$$\left(\phi^{-1}TN\right)_x = T_{\phi(x)}(N) = T_{y_0}(N), \quad x \in M,$$

donc une section $V \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ satisfait

$$V(x) \in \left(\phi^{-1}TN\right)_x = T_{y_0}(N), \quad x \in M.$$

Soit $\{v_\alpha : 1 \leq \alpha \leq m\} \subset T_{y_0}(N)$ une base de $T_{y_0}(N)$. On définie des sections

$$V_\alpha : M \to \phi^{-1}T(N), \quad V_\alpha(x) = v_\alpha\,, \quad x \in M, \quad 1 \leq \alpha \leq m.$$

Chaque élément de $T_{y_0}(N)$ peut être écrit comme une combination linéaire des vecteurs $\{v_\alpha : 1 \leq \alpha \leq m\}$ alors pour chaque $V \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ et chaque $x \in M$

$$V(x) = f^\alpha(x)\, v_\alpha = f^\alpha(x)\, V_\alpha(x)$$

pour quelques scalaires $f^\alpha(x) \in \mathbb{R}$. Par la différentiabilité de V il résulte que $f^\alpha \in C^\infty(M)$ et donc

$$C^\infty(\phi^{-1}TN) = \{f^\alpha V_\alpha : f^\alpha \in C^\infty(M)\}\,.$$

Maintenant nous allons calculer l'opérateur de Jacobi. Pour un répere local orthonormé quelconque $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ du $(T(M), g)$

$$J_\phi V_\alpha = \Delta^\phi V_\alpha - \mathcal{R}_\phi V_\alpha\,,$$

$$\mathcal{R}_\phi V_\alpha = \mathrm{trace}_g \left\{ \left(R^{\nabla^h}\right)^\phi (V_\alpha\,, \cdot\,)\,\cdot \right\} = \sum_i \left(R^{\nabla^h}\right)^\phi (V_\alpha\,, \phi_* E_i)\, \phi_* E_i = 0$$

parce que $d_x\phi = 0$ (pour n'importe quelle application constante ϕ). Soit (Ω, y^α) un système des coordonnées locales autour de y_0 de sorte qu'on ait

$$v_\alpha = a_\alpha^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)_{y_0}\,, \quad a_\alpha^\beta \in \mathbb{R}.$$

Si $s_\alpha = (\partial/\partial y^\alpha)^\phi$ alors $s_\alpha(x) = (\partial/\partial y^\alpha)_{\phi(x)} = (\partial/\partial y^\alpha)_{y_0}$ et donc

$$V_\alpha(x) = v_\alpha = a_\alpha^\beta s_\alpha(x)$$

et puis

$$\nabla_X^\phi V_\alpha = f^i \left\{ \frac{\partial a_\alpha^\beta}{\partial x^i} + a_\alpha^\gamma \frac{\partial \phi^\sigma}{\partial x^i} \left(\Gamma_{\sigma\gamma}^\beta \circ \phi\right) \right\} s_\beta = 0$$

où $X = f^i(\partial/\partial x^i)$. On peut donc calculer le Laplacien brut

$$\Delta^\phi V_\alpha = -\sum_{i=1}^n \left\{ \nabla_{E_i}^\phi \nabla_{E_i}^\phi V_\alpha - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\phi V_\alpha \right\} = 0,$$

$$\Delta^\phi(fV)) = -\sum_{i=1}^n \left\{ \nabla_{E_i}^\phi \nabla_{E_i}^\phi (fV) - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\phi (fV) \right\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \left\{ \nabla_{E_i}^\phi \left[E_i(f)V + f\nabla_{E_i}^\phi V \right] - (\nabla_{E_i} E_i)(f)V - f\nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\phi V \right\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \left\{ E_i^2(f)\, V + 2\, E_i(f) \nabla_{E_i}^\phi V + f \nabla_{E_i}^\phi \nabla_{E_i}^\phi V - (\nabla_{E_i} E_i)(f) V - f \nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\phi V \right\}$$

ou

$$\Delta^{\phi}(fV) = f\,\Delta^{\phi}V + (\Delta f)\,V - 2\,\nabla^{\phi}_{\nabla f}V \tag{41}$$

où on a utilisé les identités

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \{E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i}E_i)(f)\}, \quad \nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)\,E_i\,.$$

Donc (par (41))

$$\Delta^{\phi}V = \Delta^{\phi}(f^{\alpha}V_{\alpha}) = f^{\alpha}\,\Delta^{\phi}V_{\alpha} + (\Delta f^{\alpha})\,V_{\alpha} - 2\,\nabla^{\phi}_{\nabla f^{\alpha}}V_{\alpha} = (\Delta f^{\alpha})\,V_{\alpha}$$

et enfin

$$J_{\phi}V = (\Delta f^{\alpha})\,V_{\alpha}\,, \quad V = f^{\alpha}V_{\alpha} \in C^{\infty}(\phi^{-1}TN). \tag{42}$$

Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(J_{\phi})$ est un valeur propre du J_{ϕ} i.e. $J_{\phi}V = \lambda V$ pour quelque $V = f^{\alpha}V_{\alpha} \in C^{\infty}(\phi^{-1}TN) \setminus \{0\}$ alors (par (42))

$$\lambda f^{\alpha}V_{\alpha} = J_{\phi}(f^{\alpha}V_{\alpha}) = (\Delta f^{\alpha})\,V_{\alpha}$$

et donc $\Delta f^{\alpha} = \lambda f^{\alpha}$ i.e. $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Delta)$. On a démontré la proposition suivante

Proposition 3. *Soit $\phi : M \to N$ une application constante i.e. $\phi(x) = y_0$ pour quelque $y_0 \in N$. Alors le valeurs propre de l'opérateur de Jacobi J_{ϕ} sont les valeurs propre du Laplacien Δ de (M, g), chaque compté $m =$* $\dim(N)$ *fois. De plus, le spectre du J_{ϕ} ne dépend pas du y_0.*

On sait que le spectre du Laplacien est

$$\mathrm{Spec}(\Delta) : \lambda_0(g) = 0 < \lambda_1(g) \le \lambda_2(g) \le \cdots \le \lambda_{\nu}(g) \le \cdots \uparrow +\infty$$

où le valeur propre $\lambda_0(g) = 0$ est obtenue pour les fonctions constantes (non nulles) sur M, comme fonctions propres. Alors (par la Proposition 3 et les calcules que la précéde) on a

$$\mathrm{ind}(\phi) = 0, \quad \mathrm{null}(\phi) = \dim(N),$$

pour chaque application constante $\phi : M \to N$. □

Exemple 2. (*L'application identique*) Soit (M, g) une variété Riemannienne et soit $\phi = 1_M : M \to M$ l'application identique i.e. $\phi(x) = x$ pour chaque $x \in M$. La théorie de la seconde variation est, dans ce cas, très compliqué. En effet $N = M$ et $C^{\infty}(\phi^{-1}TN) = \mathfrak{X}(M)$ et alors l'opérateur de Jacobi J_{1_M} : $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ est donné par

$$J_{1_M} = \overline{\Delta} - \rho \tag{43}$$

où $\overline{\Delta}$ est le *Laplacien brut* agissant sur les champs de vecteurs tangents à M i.e. localement

$$\overline{\Delta}X = -\sum_{i=1}^{n} \left\{\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}X - \nabla_{\nabla_{E_i}E_i}X\right\}, \quad X \in \mathfrak{X}(M),$$

et ρ est l'opérateur de Ricci i.e. localement

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{n} R^{\nabla}(X, E_i)E_i\,, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

L'opérateur de Jacobi J_{1_M} est en relation avec le Laplacien $\Delta_1 : \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$ agissant sue les formes différentielles de degree 1. D'autre part il y a un isomorphisme canonique $\mathfrak{X}(M) \approx \Omega^1(M)$ des $C^\infty(M)$-modules donné par

$$X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto X^\flat = \omega \in \Omega^1(M), \quad \omega(Y) = g(X, Y), \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

On peut donc introduire l'opérateur différentiel

$$\Delta_H : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad \Delta_H X = \Delta_1 X^\flat\,, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Lemme 8. (*La formule de Weitzenböck*)

$$\Delta_H = \overline{\Delta} + \rho. \tag{44}$$

On obtient

$$J_{1_M} = \Delta_H - 2\rho. \tag{45}$$

Une conséquence importante de la formule (45) est

Théorème 2. (R.T. Smith, [33]) *Sit* (M, g) *une variété de Einstein* (*i.e.* $\mathrm{Ric}_\nabla = c\,g$ *pour quelque* $c \in \mathbb{R}$) *de dimension* $n \geq 3$*, compacte. Alors* i) *l'application identique* $1_M : M \to M$ *est faiblement stable si et seulement si la première valeur propre non nulle* $\lambda_1(g)$ *du Laplacien* $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ *satisfait l'inégalité* $\lambda_1(g) \geq 2c$*, et* ii) *la nullité de l'application identique est*

$$\mathrm{null}(1_M) = \dim \mathrm{Iso}(M, g) + \dim_{\mathbb{R}}\{f \in C^\infty(M) : \Delta f = 2cf\}$$

où $\mathrm{Iso}(M, g)$ *est le groupe d'isométries de* (M, g).

Le Théorème 2 rappelle un résultat classique de A. Lichnerowicz (cf. Théorème D.I dans [2], p. 179):

Théorème 3. *Soit M une variété Riemannienne compacte n-dimensionelle. S'il existe un nombre k strictement positif tel que* $\mathrm{Ric}_\nabla(X, X) \geq k\,g(X, X)$ *pour chaque* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *alors on a aussi* $\lambda_1(g) \geq kn/(n-1)$.

L'hypotése du Théorème 3 n'est pas satisfaite, en general, par une variété d'Einstein ($\mathrm{Ric}_\nabla = c\,g$) parce que la courbure scalaire $R = cn$ peut être non positive. D'autre part, si $R > 0$ alors (dans les hypothéses du Théorème 2) on peut appliquer le Théorème 3 pour en déduir que $\lambda_1(g) \geq cn/(n-1)$ mais l'inégatité obtenue est trop faible. En effet on a toujours $2c > cn/(n-1)$ parce que $n \geq 3$ (et on peut pas dire aucune chose sur la stabilité de 1_M).

Pour démontrer le Théorème 2 on a besoin d'abord du

Lemme 9. *Le Hessian de E pour l'application identique $\phi = 1_M$ est donné par les formules*

$$H(E)_{1_M}(X,X) = \int_M \left\{ \|\nabla X\|^2 - \mathrm{Ric}_\nabla(X,X) \right\} d\,v_g, \tag{46}$$

$$H(E)_{1_M}(X,X) = \int_M \{ g\,(\Delta_H X, X) - 2\,\mathrm{Ric}_\nabla(X,X) \}\, d\,v_g, \tag{47}$$

$$H(E)_{1_M}(X,X) = \int_M \left\{ \frac{1}{2}\|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\mathrm{div}\, X)^2 \right\} d\,v_g, \tag{48}$$

pour chaque $X \in \mathfrak{X}(M) = C^\infty(1_M^{-1} TM)$. En particulier, comme conséquence de (46)*, si* Ric_∇ *est semi-défini négatif alors* 1_M *est faiblement stable.*

Démonstration. On part de

$$H(E)_\phi(V,W) = \int_M h^\phi(J_\phi V, W)\, d\,v_g, \quad V, W \in C^\infty(\phi^{-1}TN),$$

$$N = M, \quad \phi = 1_M\,, \quad h = g, \quad h^{1_M} = g, \quad C^\infty(\phi^{-1}TN) = \mathfrak{X}(M).$$

On a $J_{1_M} = \overline{\Delta} - \rho$ et on peut accepter l'identité

$$\overline{\Delta} = \nabla^* \nabla \tag{49}$$

où $\nabla^* : C^\infty(T^*(M) \otimes T(M)) \to \mathfrak{X}(M)$ est l'adjoint formel de $\nabla : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(T^*(M) \otimes T(M))$

$$(\nabla^* \varphi\,,\, X)_{L^2} = (\varphi\,,\, \nabla X)_{L^2}\;,$$

$$\varphi \in C^\infty(T^*(M) \otimes T(M)), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Naturellement, on peut démontrer (49) d'une manière directe où on peut le déduire de $\Delta^\phi = (\nabla^\phi)^* \nabla^\phi$ pour $\phi = 1_M$. De plus $\mathrm{Ric}_\nabla(X,Y) = g(\rho X, Y)$ et donc

$$\begin{aligned} H(E)_{1_M}(X,X) &= \int_M g(\overline{\Delta} X - \rho X\,,\, X)\, d\,v_g = \\ &= \left(\overline{\Delta} X, X\right)_{L^2} - \int_M \mathrm{Ric}_\nabla(X,X)\, d\,v_g = \\ &= (\nabla X\,,\, \nabla X)_{L^2} - \int_M \mathrm{Ric}_\nabla(X,X)\, d\,v_g \end{aligned}$$

et la formule (46) est démontré. Puis $J_{1_M} = \Delta_H - 2\rho$ implique, de la même manière, la formule (47). La démonstration de la formule (48) est un peu plus compliquée. On part de $J_{1_M} = 2\,\overline{\Delta} - \Delta_H$ et alors

$$H(E)_{1_M}(X,X) = \int_M \left\{ 2\, g(\overline{\Delta} X, X) - g(\Delta_H X, X) \right\} d\,v_g =$$

$$= 2\int_M \|\nabla X\|^2 \, d\,v_g - \int_M g(\Delta_H X, X)\, d\,v_g$$

et

$$\|\nabla X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X\,,\, \nabla_{E_i} X).$$

On pose $\omega = X^\flat$ (et donc $\omega^\sharp = X$). Alors

$$g(\nabla_{E_i} X\,,\, E_j) = (\nabla_{E_i}\omega)E_j\,,$$

$$\nabla_{E_i} X = \sum_{j=1}^{n} \left[(\nabla_{E_i}\omega)E_j\right] E_j\,,$$

$$\|\nabla X\|^2 = \sum_i g\left(\sum_j \left[(\nabla_{E_i}\omega)E_j\right] E_j\,,\, \sum_k [(\nabla_{E_i}\omega)E_k]\ E_k\right) =$$

$$= \sum_{i,j} \left[(\nabla_{E_i}\omega)E_j\right]^2 = \|\nabla\omega\|^2$$

parce que, pour chaque forme bilinéaire B sa norme est donnée localement par

$$\|B\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} B(E_i\,,\, E_j)^2\,.$$

Maintenant on veut utiliser les identités (où comme d'abord $\omega = X^\flat$)

$$\|\nabla X\| = \|\nabla\omega\|, \tag{50}$$

$$\|\nabla\omega\|^2 = \frac{1}{2}\,\|d\omega\|^2 + \frac{1}{4}\ \|\mathcal{L}_X g\|^2\ , \tag{51}$$

$$\|d^*\omega\|^2 = (\mathrm{div}\ X)^2\,. \tag{52}$$

Ici $\mathcal{L}_X g$ est la derivée de Lie de g. On a

$$g(\Delta_H X, X) = g\left((\Delta_1\omega)^\sharp\,,\, X\right) = (\Delta_1\omega)\,(X) = \sum_i g(X, E_i)\ (\Delta_1\omega)\,E_i =$$

$$= \sum_i \omega(E_i)\ (\Delta_1\omega)\,E_i = g(\Delta_1\omega\,,\,\omega) = \int_M g(d^*d\omega + dd^*\omega\,,\,\omega),$$

$$\int_M g(\Delta_H X, X)\, d\,v_g = \int_M \left\{\|d\omega\|^2 + \|d^*\omega\|^2\right\}\, d\,v_g$$

ou

$$\int_M g(\Delta_H X, X)\, d\,v_g = \int_M \left\{\|d\omega\|^2 + (\mathrm{div}\,X)^2\right\}\, d\,v_g \tag{53}$$

et (en appliquant (50)-(52)) on obtient la formule (48). Q.e.d.

Maintenant nous allons démontrer le Théorème 2. L'instrument crucial est la décomposition de Hodge-de Rham

$$\Omega^1(M) = \{\omega \in \Omega^1(M) : d^*\omega = 0\} \oplus \{df : f \in C^\infty(M)\} \tag{54}$$

orthogonale par rapport au produit scalaire L^2 sur les formes de degré 1. La formule (54) implique immédiatement

$$\mathfrak{X}(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : \mathrm{div}(X) = 0\} \oplus \{\nabla f : f \in C^\infty(M)\}. \tag{55}$$

La décomposition (55) est invariante par Δ_H. En effet si $X \in \mathfrak{X}(M)$ est un champ de vecteurs tangents à M avec $\mathrm{div}(X) = 0$ et $\omega = X^\flat$ alors $d^*\omega = -\mathrm{div}(X) = 0$. D'autre part

$$g\,(\Delta_H X\,,\,\cdot\,) = g\left((\Delta_1\omega)^\sharp\;,\,\cdot\,\right) = \Delta_1\omega$$

(i.e. $(\Delta_H X)^\flat = \Delta_1\omega$) implique

$$\mathrm{div}\,(\Delta_H X) = -d^*\,\Delta_1\omega = -d^*\;(d\,d^* + d^*d)\,\omega = 0$$

parce que $d^* \circ d^* = 0$ et $d^*\omega = 0$. Donc Δ_H préserve le premier terme de la décomposition (55). Si maintenant $X = \nabla f$ alors $\omega = df$ et

$$g(\Delta_H(\nabla f)\,,\,\cdot\,) = g((\Delta_1(df))^\sharp\,,\,\cdot\,) = \Delta_1(df) = d\,d^*\,df = d(\Delta f)$$

i.e. $(\Delta_H\nabla f)^\flat = d\Delta f$ où $\Delta_H\nabla f = \nabla(\Delta f)$, ce qui veut dire que Δ_H préserve aussi le second terme de la décomposition (55). Par hypothése la variété est d'Einstein et alors

$$J_{1_M} = \Delta_H - 2\rho = \Delta_H - 2cI$$

où I est la trasformation identique de $T(M)$. Donc la décomposition (55) est aussi invariante par l'operatéur de Jacobi. En particulier

$$J_{1_M}\nabla f = \Delta_H\nabla f - 2c\nabla f = \nabla\,(\Delta f - 2cf) \tag{56}$$

Soit $Y \in \mathfrak{X}(M)$ décomposé (par rapport à (55)) en $Y = X + \nabla f$ où $\mathrm{div}(X) = 0$. Alors

$$H(E)_{1_M}(Y, Y) = \int_M g(J_{1_M}Y, Y)\;d\,v_g =$$

$$= \int_M \{g(J_{1_M}X, X) + g(J_{1_M}X, \nabla f) + g(J_{1_M}\nabla f, X) + g(J_{1_M}\nabla f, \nabla f)\}\;d\,v_g.$$

On a $J_{1_M}X \in \mathrm{Ker}(\mathrm{div})$ et $J_{1_M}\nabla f \in \nabla C^\infty(M)$ et donc

$$(J_{1_M}X, , \nabla f)_{L^2} = 0, \quad (J_{1_M}\nabla f, X)_{L^2} = 0.$$

Il résulte que (par la formule (48))

$$H(E)_{1_M}(Y, Y) = H(E)_{1_M}(X, X) + H(E)_{1_M}(\nabla f, \nabla f) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_M \|\mathcal{L}_X g\|^2\;d\,v_g + H(E)_{1_M}(\nabla f, \nabla f).$$

Le premier terme est non negatif. Pour étudier le second terme on écrit

$$f \in C^\infty(M) = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathrm{Eigen}(\Delta, \lambda_\nu(g))$$

en terme de fonctions propres du Laplacien

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu\,, \quad \Delta f_0 = 0, \quad \Delta f_\nu = \lambda_\nu(g)\, f_\nu\,, \quad \nu \geq 1,$$

et alors (par (56))

$$J_{1_M} \nabla f = \nabla(\Delta f - 2cf) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nabla\left(\Delta f_\nu - 2c f_\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda_\nu - 2c)\ \nabla f_\nu$$

et donc les valeurs propres de J_{1_M} sur l'espace $\nabla C^\infty(M)$ sont $\{\lambda_\nu - 2c : \nu \geq 1\}$. En conséquence $H(E)_{1_M}(Y, Y) \geq 0$ pour chaque $Y \in \mathfrak{X}(M)$ si et seulement si $\lambda_1(g) \geq 2c$. □

Exercise 4. i) (*Existence de coordonnées locales isothermes*, cf. S-S. Chern, [7], S-S. Chern & P. Hartman & A. Winter, [8]) Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension 2. Montrer que pour chaque point $p \in M$ il y a un système de coordonnées locales (U, x, y) tel que $p \in U$ et la métrique s'ecrit localement

$$g = 2F(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

pour quelque $F \in C^\infty(U)$ avec $F(q) > 0$ pour chaque $q \in U$.

ii) (*Le Laplacien en coordonnées isothermes*, cf. [10], p. 54) Soit (M, g) une variété Riemanniene de dimension 2 et $z = x + iy$ la coordonnée locale complexe associée au système des coordonnées isothermes (U, x, y) sur M. Montrer que l'operateur de Laplace-Beltrami (sur les fonctions) est donné par

$$\Delta = \frac{2}{F} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,.$$

iii) (*Immersions isométriques minimales dans l'espace Euclidien*, cf. [10], p. 55) Soit $\Psi : M \to \mathbb{R}^n$ une immersion isométrique d'une variété Riemannienne 2-dimensionelle dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que Ψ est minimale si et seulement si

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z\, \partial \overline{z}} = 0.$$

En particulier, observer que la minimalité de M ne dépand pas de la métrique de M mais seulement de sa structure comme variété complexe.

iv) (*Immersions conformes*, cf. [10], p. 57) Soit M une surface de Riemann (i.e. une variété complexe de dimension complexe 1) et $\Psi : M \to \mathbb{R}^n$ une application differentiable. On dit que Ψ est *conforme* si pour chaque coordonnée locale complexe $z = x + iy$ sur M on a

$$\left\|(d\Psi)\frac{\partial}{\partial x}\right\| = \left\|(d\Psi)\frac{\partial}{\partial y}\right\|, \quad g_0\left((d\Psi)\frac{\partial}{\partial x}\,,\,(d\Psi)\frac{\partial}{\partial y}\right) = 0.$$

Ici g_0 est la métrique Riemannienne canonique sur $\mathbb{R}^n$ (la métrique Euclidienne). Inspiré par les exercices précedents, on peut donner la définition suivante. Une immersion $\Psi : M \to \mathbb{R}^n$ est une *surface minimale* dans $\mathbb{R}^n$ si Ψ est conforme et $\partial^2\Psi/\partial z\,\partial\bar{z} = 0$.

Soit $\Psi : M \to \mathbb{R}^n$ une immersion conforme et soit $g = \Psi^* g_0$ la métrique induite sur M. Montrer que Ψ est une immersion isométrique de (M, g) dans $(\mathbb{R}^n, g_0)$ et la métrique induite s'écrit localement comme $g = 2F\{dx \otimes dx + dy \otimes dy\}$ avec $F > 0$.

v) (*La représentation de Weierstrass des surfaces minimales dans* $\mathbb{R}^3$, cf. [10], p. 57-71)

a) Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ensemble ouvert dans le plan complexe et soit $z = x + iy$ la coordonnée complexe naturelle sur $\mathbb{C}$. Il est clair que D est une surface de Riemann. Soit $\Psi : D \to \mathbb{R}^n$ une surface minimale. On définit l'application $\phi : D \to \mathbb{C}^n$ en posant

$$\phi(z) = \frac{\partial\Psi}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}(z) - i\,\frac{\partial\Psi}{\partial y}(z)\right), \quad z \in D.$$

1) Montrer que l'application $\phi : D \to \mathbb{C}^n$ est holomorphe.

2) Si $\phi = (\phi^1, \cdots, \phi^n)$ alors montrer que $\sum_{j=1}^n \left(\phi^j\right)^2 = 0$.

3) Montrer que $\sum_{j=1}^n \left|\phi^j\right|^2 = F \neq 0$.

b) Viceversa, si $D \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe et simplement connexe et $\phi : D \to \mathbb{C}^n$ est une application holomorphe telle que $\sum_{j=1}^n \left(\phi^j\right)^2 = 0$ et $\sum_{j=1}^n \left|\phi^j\right|^2 \neq 0$ alors montrer que l'application $\Psi : D \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Psi^j(z) = \mathrm{Re}\left\{\int_o^z \phi^j(\zeta)\,d\zeta\right\} + c^j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

est une surface minimale. Ici $o \in D$ est un point quelconque fixé et $c^j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, sont des constantes. L'exercise montre que pour trouver des exemples des surfaces minimales dans $\mathbb{R}^n$ on doit déterminer des applications $\phi : D \to \mathbb{C}^n$ sujets aux conditions (1)-(3) de l'exercise précédent.

c) Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et soit $f, g : D \to \mathbb{C}$ deux fonctions telles que f est holomorphe sur D tandis que g est méromorphe sur D. On suppose aussi que pour chaque pole $z \in D$ de g d'ordre m, le point z est un zero de f d'ordre au moins $2m$.

1) Montrer que si on pose

$$\phi^1 = \frac{1}{2}\,f(1 - g^2), \quad \phi^2 = \frac{i}{2}\,f(1 + g^2), \quad \phi^3 = fg, \tag{57}$$

alors l'application $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3) : D \to \mathbb{C}^3$ est holomorphe et $\sum_{j=1}^3 (\phi^j)^2 = 0$. De plus, montrer que toutes les applications holomorphes $\phi : D \to \mathbb{C}^3$ avec la proprieté $\sum_{j=1}^3 (\phi^j)^2 = 0$ peuvent etre représentées sous la forme (57), avec la seule exception du cas $\phi^3 = 0$.

2) Montrer que l'application $\phi : D \to \mathbb{C}^3$ satisfait $\sum_{j=1}^3 |\phi^j|^2 \neq 0$ quand les zéros de f coincident avec les poles de g et l'ordre de chaque zéro $z \in D$ de f est précisement deux fois l'ordre de z comme pole de g.

3) Montrer que toutes les applications holomorphes $\phi : D \to \mathbb{C}^3$ avec $\phi^3 = 0$ et $\sum_{j=1}^2 (\phi^j)^2 = 0$ sont données par

$$\phi^2 = i\,\phi^1 , \quad \phi^3 = 0, \quad \phi^1 \in \mathcal{O}(D),$$

i.e. $\phi^1 : D \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe arbitraire. De plus, montrer que $\sum_{j=1}^2 |\phi^j|^2 \neq 0$ if and only if $\phi^1(z) \neq 0$ for any $z \in D$.

d) (*Le théorème de représentation de Weierstass*, cf. [10], p. 65) Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine tel que $\pi_1(D) = 0$ e soit $o \in D$ un point fixé. Montrer que chaque surface minimale $\Psi : D \to \mathbb{R}^3$ peut être représentée sous la forme

$$\Psi^j(z) = \mathrm{Re}\left\{ \int_o^z \phi^j(\zeta)\, d\zeta \right\} + c^j , \quad 1 \leq j \leq 3,$$

où $c^j \in \mathbb{R}$ sont des constantes. De plus, montrer que le fonctions ϕ^j sont données par

$$\phi = \left(\frac{1}{2}\, f(1 - g^2),\ \frac{i}{2}\, f(1 + g^2),\ fg \right),$$

avec f holomorphe sur D et g méromorphe sur D telles que les zeros de f et les poles de g coincident, et l'ordre du chaque zero $z \in D$ de f est deux fois l'ordre de z comme pole de g, ou si $\phi^3 = 0$ alors $\phi^2 = i\,\phi^1$ où $\phi^1 : D \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe arbitraire.

e) (*L'application de Gauss d'une surface minimale*, cf. [10], 71-83) Les exercises suivants donnent la nature des fonctions f et g dans la représentation de Weierstrass d'une surface minimale. Soit $\Psi : M \to \mathbb{R}^n$ une immersion minimale conforme d'une surface de Riemann M dans $\mathbb{R}^n$ et soit z une coordonnée locale complexe sur M. La métrique induite $g = \Psi^* g_0$ s'ecrit localement $g = 2F\, dz \otimes d\overline{z}$ avec $F > 0$. Posons nous $\phi = \partial\Psi/\partial z$. Si M est un domaine $D \subset \mathbb{C}$ alors $\phi : D \to \mathbb{C}^n$ est bien défini et conduit à la représentation de Weierstrass. Quand M est une surface de Riemann arbitraire alors ϕ est défini seulement sur le domaine U de la carte locale utilisé. Si (V, w) est un'autre coordonée locale complexe sur M telle que $U \cap V \neq \emptyset$ et on pose $\phi' = \partial\Psi/\partial w$, alors $\phi' = (\partial z/\partial w)\,\phi$ où $z = z(w)$ est holomorphe. Ça veut dire que ϕ est bien défini au moins d'un facteur multiplicatif complexe et donc il détermine une application

$$\Phi : M \to \mathbb{C}P^{n-1} , \quad \Phi(z) = [\phi(z)] ,$$

si $z \in U \subset M$. On appelle Φ l'*application de Gauss*. Ici $[\zeta]$ est le point de l'espace projectif complexe de coodonnée homogéne $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

1) Soit M une surface de Riemann et $\Psi : M \to \mathbb{R}^n$ une immersion conforme. Soit $\Phi : M \to \mathbb{C}P^{n-1}$ l'application de Gauss associée a Ψ i.e. pour chaque point $p \in M$ on considère une carte locale complexe (U, z) sur M telle que $p \in U$ et on

pose

$$\Phi(p) = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial z}(p)\right].$$

Montrer que Ψ est minimale si et seulement si Φ est holomorphe.

2) Avec les conventions de l'exercise précédent, montrer que

$$\Phi(M) \subset Q_{n-2} = \{[w_1, \cdots, w_n] \in \mathbb{C}P^{n-1} : \sum_{j=1}^{n} w_j^2 = 0\}$$

i.e. l'image de l'application de Gauss d'une immersion conforme est contenue dans la quadrique complexe $Q_{n-2} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$.

7. Morphismes harmoniques

7.1. **Régularité des morphismes harmoniques.** Soit (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes, des dimensions n et m. Une application continue $\phi : M \to N$ est un *morphisme harmonique* si pour chaque fonction harmonique locale $v : \Omega \subset N \to \mathbb{R}$ sur (N, h) on a $\Delta(v \circ \phi) = 0$ sur $U = \phi^{-1}(\Omega) \subset M$ en sens faible i.e.

$$\int_U (v \circ \phi)\ (\Delta\varphi)\ d\,v_g = 0, \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Proposition 4. *Chaque morphisme harmonique est C^∞ différentiable.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que pour chaque point $x_0 \in M$ il y a une carte locale (Ω, y^α) de N, de manière que $y_0 = \phi(x_0) \in \Omega$ et $\phi^\alpha = y^\alpha \circ \phi \in C^\infty(U)$. Sur la variété Riemannienne (N, h), autour de point y_0, on peu sans doute considérer une carte locale (Ω, y^α) harmonique i.e. telle que les fonctions coordonnées sont des harmoniques locales du Laplacien Δ^h de (N, h) ($\Delta^h y^\alpha = 0$ sur Ω pour chaque $1 \le \alpha \le m$). Alors $\Delta\phi^\alpha = 0$ au sens faible. Mais le Laplacien d'une variété Riemanniene est un operateur hypoelliptique[1] et alors $\phi^\alpha \in C^\infty$ pour chaque $1 \le \alpha \le m$. Q.e.d.

7.2. **Fonctions harmoniques locales avec gradient et hessien prescrits en un point.** Pour l'étude des morphismes harmoniques résultat suivant (connu comme le *lemme de Ishihara*) est nécessaire.

Lemme 10. *Soit (N, h) une variété Riemannienne de dimension m et $y_0 \in N$. Soit*

$$C,\ \ C_\alpha\,,\ \ C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}, \quad C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{m} C_{\alpha\alpha} = 0,$$

[1]Ça veut dire que $\Delta u = 0$ en sens faible implique que $u \in C^\infty$ (i.e. la distribution u est du type fonction $u(\varphi) = \int_M f\,\varphi\ d\mathrm{vol}(g)$, $\varphi \in C_0^\infty$, pour quelque fonction $f \in C^\infty$).

des constantes reels donné. Pour chaque système des coordonnées locales normales (Ω, y^α) *autour de* y_0 *il existe une fonction harmonique* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$v(y_0) = C, \quad v_\alpha(y_0) = C_\alpha\,, \quad (\nabla_\alpha v_\beta)(y_0) = 0,$$

où

$$v_\alpha = v_{|\alpha} = \frac{\partial v}{\partial y^\alpha}\,, \quad \nabla_\alpha v_\beta = v_{\beta|\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v_\mu\,.$$

Soi $\phi(x)$ une fonction de classe C^2 definié pour $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Pour $0 < \alpha < 1$ on pose aussi

$$H^R_\alpha(\phi) = \sup_{|x|<R,\, |y|>R} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x-y|^\alpha}\,,$$

$$\|\phi\|^R_0 = \|D^0\phi\|^R_0 = \sup_{|x|<R} |\phi(x)|,$$

$$\|D\phi\|^R_0 = \|D^1\phi\|^R_0 = \max_{i=1}^{n} \sup_{|x|<R} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \right|,$$

$$\|D^2\phi\|^R_0 = \max_{i,j=1}^{n} \sup_{|x|<R} \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) \right|,$$

$$\|\phi\|^R_\alpha = \|\phi\|^R_0 + \frac{R^\alpha}{\alpha}\, H^R_\alpha(\phi),$$

$$\|\phi\|^R_{\alpha+2} = \sum_{\nu=0}^{2} \frac{R^\nu}{\nu!}\, \|D^\nu \phi\|^R_0 + \frac{R^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)}\, \max_{i,j=1}^{n} H^R_\alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i\, \partial x_j} \right).$$

Soit $B^{(R)}_\alpha$ (respectivement $B^{(R)}_{\alpha+2}$) l'épace du Banach des fonctions ϕ avec $\|\phi\|^R_\alpha < \infty$ (respectivement avec $\|\phi\|^R_{\alpha+2} < \infty$). Le Lemme 10 résulte du

Théorème 4. (T. Ishihara, [23])
Soit L l'opérateur différentiel doné par

$$L\phi(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + a_0(x)\phi$$

avec a_{ij}, a_i, $a_0 \in B^{(R_0)}_\alpha$ *pour quelques* $0 < \alpha < 1$ *et* $R_0 > 0$. *Soit les constantes* C_{ij}, C_i, $C_0 \in \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le n$, *telles que* $C_{ij} = C_{ji}$ *et*

$$\sum_{i,j} a_{ij}(0) C_{ij} + \sum_i a_i(0) C_i + a_0(0) C_0 = 0.$$

Il y a une solution ϕ *de* $L\phi = 0$ *dans un voisinage de l'origine telle que*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i\, \partial x_j}(0) = C_{ij}\,, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(0) = C_i\,, \quad \phi(0) = C_0\,,$$

pour chaque $1 \le i, j \le n$.

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ une fonction test telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ et $\varphi(x) = 1$ sur $|x| \leq 1/4$ et $\phi(x) = 0$ sur $|x| \geq 1/2$. Pour chaque $0 < R \leq R_0$ on pose

$$T : B^{(R)}_{\alpha+2} \to B^{(R)}_{\alpha+2},$$

$$T\phi(x) = -\int_{|\xi|<R} J(x-\xi)\, \varphi\left(\frac{\xi}{R}\right)\, |L_0\phi(\xi) - L\phi(\xi)|\; d\xi,$$

ou $J(x)$ est la solution fondamentale du

$$L_0\phi(x) \equiv \sum_{i,j} a_{ij}(0) \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0.$$

Soit V l'éspace vectoriel engendré par 1, x_i, $x_i\, x_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ sur $\mathbb{R}$. On pose aussi

$$V_1 = \{C_0 + \sum_i C_i x_i + \sum_{i,j} C_{ij} x_i\, x_j \in V : \sum_{i,j} a_{ij}(0) C_{ij} = 0\},$$

$$V_2 = \{C_0 + \sum_i C_i x_i + \sum_{i,j} C_{ij} x_i x_j \in V :$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(0) C_{ij} + \sum_i a_i(0) C_i + a_0(0) C_0 = 0\}.$$

Soi

$$h = C_0 + \sum_i C_i x_i + \sum_{i,j} C_{ij} x_i x_j \in V_1 . \tag{58}$$

Alors

$$L_0 h(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(0) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i\, \partial x_j} = \sum_{i,j} a_{ij}(0) C_{ij} = 0.$$

Pour chaque $h \in B^{(R)}_{\alpha+2}$ fixé on defini l'application linéare

$$\Lambda = \Lambda_h : B^{(R)}_{\alpha+2} \to B^{(R)}_{\alpha+2}, \quad \Lambda(\phi) = h - T\phi, \quad \phi \in B^{(R)}_{\alpha+2},$$

et donc

$$\|\Lambda\phi\|^R_{\alpha+2} \leq \|T\|\, \|\phi\|^R_{\alpha+2}$$

ou

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|T\phi\|^R_{\alpha+2}}{\|\phi\|^R_{\alpha+2}} : \phi \in B^{(R)}_{\alpha+2}, \;\; \phi \neq 0 \right\}.$$

On accepte sans démonstration le résultat suivant

Lemme 11. *Si* $a_{ij}, a_i, a_0 \in B^{(R)}_\alpha$ *pour quelques* $R_0 > 0$ *et* $0 < \alpha < 1$ *alors il y a une constante* $C > 0$ *telle que* $\|T\| < CR^\alpha$.

Maintenant on peut choisir $R > 0$ tel que $CR^\alpha < 1$ et alors (par le Lemme 11) $\|T\| < 1$ i.e. Λ est une contraction. Par le théorème des contractions il y a une unique solution $\phi_h \in B^{(R)}_{\alpha+2}$ de l'equation

$$\phi = h - T\phi. \tag{59}$$

Lemme 12. *On a*

$$\|\phi_h - h\|^R_{\alpha+2} \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \|h\|^R_{\alpha+2} \tag{60}$$

pour chaque $h \in B^{(R)}_{\alpha+2}$.

Démonstration du Lemme 12. Soit $h \in B^{(R)}_{\alpha+2}$. La succession $\{\Lambda^\nu\}_{\nu\geq 0}$ tend vers le point fix ϕ_h dans $B^{(R)}_{\alpha+2}$ pour $\nu \to \infty$. On pose

$$\psi_\nu = \Lambda^\nu h = \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j T^j h, \quad \nu \geq 0,$$

et alors $\|\psi_\nu - \phi_h\|^R_{\alpha+2} \to 0$ pour $\nu \to \infty$. Les inegalitées

$$\|\psi_\nu - h\|^R_{\alpha+2} = \left\| \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j T^j h \right\|^R_{\alpha+2} \leq \sum_{j=1}^{\nu} \|T^j h\|^R_{\alpha+2} \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\nu} \|T\|^j \|h\|^R_{\alpha+2} = \|T\| \frac{1 - \|T\|^\nu}{1 - \|T\|} \|h\|^R_{\alpha+2}$$

implique

$$\|\phi_h - h\|^R_{\alpha+2} \leq \|\phi_h - \psi_\nu\|^R_{\alpha+2} + \|\psi_\nu - h\|^R_{\alpha+2} \leq$$
$$\leq \|\phi_h - \psi_\nu\|^R_{\alpha+2} + \frac{\|T\|(1 - \|T\|^\nu)}{1 - \|T\|} \|h\|^R_{\alpha+2}$$

et donc (pour $\nu \to \infty$) on obtient l'inégalité (60). Q.e.d.

On revient maintenant au choix (58) du h. Si on applique L_0 au $\phi_h = h - T\phi_h$ alors (par $L_0 h = 0$)

$$L_0\phi_h = -L_0 T\phi_h = -L_0 \int_{|\xi|<R} J(x-\xi)\, \varphi\left(\frac{\xi}{R}\right) [L_0\phi_h(\xi) - L\phi_h(\xi)]\, d\xi.$$

Mais $L_0 J = \delta$ i.e. $\int (L_0 J)(x)\psi(x) dx = \psi(0)$ pour chaque $\psi \in C^\infty_0$, et donc (apré un changement de variable)

$$L_0 T\phi_h(x) = -\varphi\left(\frac{x}{R}\right) [L_0\phi_h(x) - L\phi_h(x)]$$

et en fin

$$L\phi_h(x) = 0, \quad |x| < \frac{R}{4}. \tag{61}$$

Nous aurons besoin du

Lemme 13. *L'application linéare $F : V_1 \to V_2$ définie par*

$$F(h) = \phi_h(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_h}{\partial x_i \, \partial x_j}(0)x_i x_j \,, \quad h \in V_1 \,,$$

est un isomorphisme.

On utilise maintenant le Lemme 13 pour terminer la démonstration du Théorème 4. Soit $C_0, C_i, C_{ij} \in \mathbb{R}$ telles que $C_{ij} = C_{ji}$ et $\sum_{i,j} a_{ij}(0)C_{ij} + \sum_i a_i(0)C_i + a_0(0)C_0 = 0$. Alors $g = C_0 + \sum_i C_i x_i + \sum_{i,j} C_{ij}x_i x_j$ appartient au V_2. Mais $F : V_1 \to V_2$ est surjectif et donc il y a $h \in V_1$ tel que $F(h) = g$. La dérniére egalité s'ecrit

$$\frac{\partial^2 \phi_h}{\partial x_i \, \partial x_j}(0) = C_{ij} \,, \quad \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i}(0) = C_i \,, \quad \phi_h(0) = C_0 \,.$$

De plus (par (61)) ϕ_h est une solution de $L\phi = 0$ dans un voisinage de l'origine, et le Théorème 4 est démontré.

Démonstration du Lemme 13. Les espaces V_1 e V_2 ont dimension finie [on a $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_2 = d - 1$ avec $d = \dim_{\mathbb{R}} V = 1 + n + n(n+1)/2$] et donc il suffit de démontrer que $F_1 : V_1 \to V_2$ soit injectif. Soit $h \in \ker(F)$ i.e.

$$\frac{\partial^2 \phi_h}{\partial x_i \, \partial x_j}(0) = 0, \quad \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i}(0) = 0, \quad \phi_h(0) = 0. \tag{62}$$

On a $h = C_0 + \sum_i C_i x_i + \sum_{i,j} C_{ij} x_i x_j$ (avec $C_{ij} = C_{ji}$ et $\sum_{i,j} a_{ij}(0)C_{ij} = 0$) et alors

$$h(0) = C_0 \,, \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(0) = C_i \,, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \, \partial x_j}(0) = 2C_{ij} \,. \tag{63}$$

On a besoin du

Lemme 14. *L'inégalité*

$$\|T\phi_h\|_{\alpha+2}^{R} \leq \frac{4\|T\|}{1 - \|T\|} \left(|C_0| + R \sum_{i=1}^{n} |C_i| + R^2 \sum_{i,j=1}^{n} |C_{ij}| \right) \tag{64}$$

est vrais pour chaque $h = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} x_i x_j \in V$.

On peut utiliser le Lemme 14 pour finir la démonstration du Lemme 13. En applicant les equations

$$\phi_h = h - T\phi_h \,, \quad \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i} - \frac{\partial T\phi_h}{\partial x_i} \,,$$

$$\frac{\partial^2 \phi_h}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \, \partial x_j} - \frac{\partial^2 T\phi_h}{\partial x_i \, \partial x_j} \,,$$

au $x = 0$ on obtient (par (62)-(63))

$$0 = C_0 - (T\phi_h)(0), \quad 0 = C_i - \frac{\partial T\phi_h}{\partial x_i}(0), \quad 0 = 2C_{ij} - \frac{\partial^2 T\phi_h}{\partial x_i \partial x_j}(0).$$

Donc

$$|C_0| = |(T\phi_h)(0)| \leq \sup_{|x|<R} |(T\phi_h)(x)| = \|T\phi_h\|_0^R ,$$

$$|C_i| = \left|\frac{\partial T\phi_h}{\partial x_i}(0)\right| \leq \sup_{|x|<R} \left|\frac{\partial T\phi_h}{\partial x_i}(x)\right| \leq \|DT\phi_h\|_0^R ,$$

$$2\,|C_{ij}| = \left|\frac{\partial^2 T\phi_h}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right| \leq \sup_{|x|<R} \left|\frac{\partial^2 T\phi_h}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq \|D^2 T\phi_h\|_0^R .$$

Par consequence

$$|C_0| + R\sum_{i=1}^{n} |C_i| + R^2 \sum_{i,j=1}^{n} |C_{ij}| \leq \sum_{\nu=0}^{2} \frac{R^\nu}{\nu!} \|D^\nu T\phi_h\|_0^R \leq$$

$$\leq \|T\phi_h\|_{\alpha+2}^R \leq \frac{4\|T\|}{1 - \|T\|}\left(|C_0| + R\sum_{i=1}^{n} |C_i| + R^2 \sum_{i,j=1}^{n} |C_{ij}|\right)$$

en applicant le Lemme 14. En fin on peut choisir $R > 0$ tel que $CR^\alpha < 1/5$. Il suit[2] que $C_0 = 0$, $C_i = 0$ et $C_{ij} = 0$. Le Lemme 13 est démontré.

Démonstration du Lemme 14. On pose

$$f(R) = |C_0| + R\sum_i |C_i| + R^2 \sum_{i,j} |C_{ij}|.$$

Alors

$$\|h\|_0^R = \sup_{|x|<R} |h(x)| \leq \sup_{|x|<R}\left(|C_0| + \sum_i |C_i|\,|x_i| + \sum_{i,j} |C_{ij}|\,|x_i|\,|x_j|\right) \leq$$

$$\leq \sup_{|x|<R}\left(|C_0| + \sum_i |C_i|\,|x| + \sum_{i,j} |C_{ij}|\,|x|^2\right)$$

i.e.

$$\|h\|_0^R \leq f(R). \tag{65}$$

De meme manière

$$\|Dh\|_0^R = \max_i \sup_{|x|<R} \left|\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\right|,$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = C_i + 2\sum_j C_{ij} x_j ,$$

[2]On a $\|T\| < 1/5$ (par le Lemme 11). Si $f(R) > 0$ alors $f(R) \leq 4\|T\|(1 - \|T\|)-1 f(R)$ est equivalent au $\|T\| \geq 1/5$, une contradiction.

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\right| \leq |C_i| + 2R\sum_j |C_{ij}|,$$

et donc

$$R\left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\right| \leq R|C_i| + 2R^2\sum_j |C_{ij}| \leq 2f(r).$$

On arrive a la conclusion

$$R\|Dh\|_0^R \leq 2f(R). \tag{66}$$

En fin

$$\|D^2h\|_0^R = \max_{i,j}\sup_{|x|<R}\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| = \max_{i,j}\left(2|C_{ij}|\right)$$

et donc

$$\frac{R^2}{2}\|D^2h\|_0^R \leq f(R). \tag{67}$$

Par les (65)-(67)

$$\sum_{\nu=0}^{2}\frac{R^\nu}{\nu!}\|D^\nu h\|_0^R \leq 4f(R).$$

D'autre part

$$H_\alpha^R\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) = H_\alpha^R(2C_{ij}) = 0$$

et donc

$$\|h\|_{\alpha+2}^R \leq 4\left(|C_0| + R\sum_i |C_i| + R^2\sum_{i,j}|C_{ij}|\right). \tag{68}$$

A ce point le Lemma 14 suit de (60) et (68). Q.e.d.

7.3. **Le théorème de Fuglede-Ishihara.** Dans cette section on démontre le résultat (connu comme le *théorème de Fuglede-Ishihara*) suivant

Théorème 5. *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne connexe, de dimension n, et* (N, h) *une variété Riemannienne de dimension m. Alors*

i) *Chaque morphisme harmonique* $\phi : M \to N$ *est une application harmonique et il y a une fonction continue* $\lambda : M \to [0, +\infty)$ *telle que* λ^2 *est* C^∞ *et*

$$g(\nabla\phi^\alpha\,,\,\nabla\phi^\beta)_x = \lambda(x)^2\delta^{\alpha\beta}\,,\quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m, \tag{69}$$

pour chaque point $x \in M$ *et chaque système local de coordonnées normales* (Ω, y^α) *sur N centré au point* $\phi(x)$ *(ici* $\phi^\alpha = y^\alpha \circ \phi$*).*

ii) *Chaque application harmonique que satisfait* (69) *est un morphisme harmonique.*

iii) *Si $m > n$ alors il n'y a pas de morphisme harmonique $\phi : M \to N$ non constant.*

iv) *Si $m \geq n$ et $\phi : M \to N$ est un morphisme harmonique, alors pour chaque point $x \in M$ avec $\lambda(x) \neq 0$ il existe un voisanage ouvert $U \subset M$ de x tel que $\phi : U \to N$ soit une submersion.*

v) *Pour chaque morphisme harmonique $\phi : M \to N$ et chaque $f \in C^2(N)$*

$$\Delta(f \circ \phi) = \lambda^2 \left(\Delta^h f\right) \circ \phi. \tag{70}$$

Lemme 15. *Soit $\phi : M \to N$ une application différentiable et (Ω, y^i) un système de coordonnées locales sur N tel que $U = \phi^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Alors*

$$\Delta(v \circ \phi) = (v_\alpha \circ \phi) \left\{ \Delta\phi^\alpha + \left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \circ \phi\right) \frac{\partial\phi^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial\phi^\nu}{\partial x^j} g^{ij} \right\} + \tag{71}$$

$$+ g^{ij} \frac{\partial\phi^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial\phi^\nu}{\partial x^j} \left(\nabla_\mu v_\nu\right) \circ \phi$$

pour chaque fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et chaque système de coordonnées locales (x^i) sur U.

Maintenant on peut commencer la démonstration du Théorème 5. Soit $\alpha_0 \in \{1, \cdots, m\}$ un index fixé. Soit aussi $x_0 \in M$ un point fixé et choisissons un système des coordonnées locales normales (Ω, Y^α) sur N, avec centre $y_0 = \phi(x_0)$. Choisissons aussi les constantes

$$C_\alpha = \delta_{\alpha\alpha_0}, \quad C_{\alpha\beta} = 0, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m.$$

Pour le Lemme de Ishihara il y a une fonction harmonique $v : \Omega \subset N \to \mathbb{R}$ tel que $v_\alpha(y_0) = \delta_{\alpha\alpha_0}$ et $(\nabla_\alpha v_\beta)(y_0) = 0$. On sait que, par rapport à un système de coordonnées normales, on a $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y_0) = 0$ et alors (par (71) avec $\Delta(v \circ \phi)_{x_0} = 0$)

$$\left\{ \Delta\phi^{\alpha_0} + \left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \circ \phi\right) \frac{\partial\phi^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial\phi^\nu}{\partial x^j} g^{ij} \right\} (x_0) = 0$$

et donc ϕ est une application harmonique. Pour démontrer (69) on a besoin du

Lemme 16. *Soit $\phi : M \to N$ un morphisme harmonique, $x_0 \in M$, (U, x^i) et (Ω, y^α) des systèmes des coordonnées locales sur M et N telles que $x_0 \in U$, $\phi(U) \subset \Omega$, et (Ω, y^α) est normale. Posons*

$$X^{\alpha\beta} = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j} g^{ij}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m.$$

Alors

$$X^{\alpha\beta}(x_0) = X^{11}(x_0)\delta^{\alpha\beta}. \tag{72}$$

De plus il y a une fonction continue $\lambda : M \to [0, +\infty)$ *telle que* $\lambda^2\big|_\Omega = X^{11}$.

La fonction λ donné par le Lemme 16 est la *dilatation* du morphisme harmonique ϕ.

Démonstration du Lemme 16. Soit $C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ avec $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ et $\sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha\alpha} = 0$. Par le Lemme de Ishihara il existe une fonction harmonique $v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$v_\alpha(y_0) = 0, \quad \left(\nabla_\alpha v_\beta\right)(y_0) = C_{\alpha\beta}\,.$$

Alors (par (71))

$$C_{\alpha\beta}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}(x_0)\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}(x_0)g^{ij}(x_0) = 0$$

ou

$$\sum_{\alpha\neq\beta} C_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}(x_0) + \sum_\alpha C_{\alpha\alpha}\left[X^{\alpha\beta}(x_0) - X^{11}(x_0)\right] = 0. \tag{73}$$

Soit $\alpha_0 \in \{2, \cdots, m\}$ un indice fixé et considérons les constantes $C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ données par

$$\alpha \neq \beta \Longrightarrow C_{\alpha\beta} = 0, \quad C_{\alpha\alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha = \alpha_0\,, \\ -1, & \alpha = 1, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Alors (par (73))

$$X^{\alpha_0\alpha_0}(x_0) - X^{11}(x_0) = 0$$

i.e. $X^{11}(x_0) = \cdots = X^{mm}(x_0)$ et (73) devient

$$\sum_{\alpha\neq\beta} C_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}(x_0) = 0. \tag{74}$$

En ce point on fixe deux indices $\alpha_0, \beta_0 \in \{1, \cdots, m\}$ avec $\alpha_0 \neq \beta_0$ et on choisit les constantes

$$C_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \alpha_0 \text{ et } \beta = \beta_0\,, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Alors (74) implique $X^{\alpha_0\beta_0}(x_0) = 0$. En résumé, one a démontré que

$$X^{\alpha\beta}(x_0) = X^{11}(x_0)\delta^{\alpha\beta}\,, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m.$$

On pose

$$\lambda_\Omega^2 = X^{11} = \frac{\partial\phi^1}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^1}{\partial x^j}g^{ij}$$

de manière que $\lambda_\Omega \in C(\Omega)$ et $\lambda_\Omega^2 \in C^\infty(\Omega)$. La contraction des indices α et β dans (72) donne

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j} = m\lambda_\Omega^2\,.$$

Si (Ω', y'^{α}) est un autre système de coordonnées locales normales avec centre $y_0 = \phi(x_0)$ alors on sait que la transformation des coordonnées locales $y'^{\alpha} = y'^{\alpha}(y^1, \cdots, y^m)$ est une transformation orthogonale

$$y'^{\alpha} = a^{\alpha}_{\beta} y^{\beta}, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad [a^{\alpha}_{\beta}] \in \mathrm{O}(m),$$

et donc

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \phi'^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \phi'^{\alpha}}{\partial x^j} g^{ij} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x^j} g^{ij}$$

sur $\Omega \cap \Omega'$ i.e. les fonctions λ_{Ω} se rattachent et donnent une fonction continue globalement définie $\lambda : M \to [0, +\infty)$ (telle que $\lambda|_{\Omega} = \lambda_{\Omega}$). Le Lemme 16 est démontré.

Maintenant on peut finir la démonstration du Théorème 5. Il est clair que (72) peut être écrit dans la forme (69). Pour chaque point $x_0 \in M$ et chaque système des cordonnées locales normales (Ω, y^{α}) sur N avec centre en $y_0 = \phi(x_0)$ on pose

$$\xi^{\alpha} = \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x^i}(x_0) \left(dx^i \right)_{x_0} \in T^*_{x_0}(M), \quad 1 \leq \alpha \leq m.$$

Alors (par le Lemme 16)

$$\left\langle \xi^{\alpha}, \xi^{\beta} \right\rangle_g = \lambda(x_0)^2 \delta^{\alpha\beta} \tag{75}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ est le produit scalaire sur $T^*_{x_0}(M)$ défini par

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = g^{ij}(x_0) \, \xi_i \eta_j \,,$$

$$\xi = \xi_i (dx^i)_{x_0}, \quad \eta = \eta_j (dx^j)_{x_0}, \quad \xi, \eta \in T^*_{x_0}(M).$$

En particulier les covecteurs tangents $\{\xi^{\alpha} : 1 \leq \alpha \leq m\}$ sont orthogonaux. Pour compléter la démonstration du Théorème 5 on suppose que $m > n$. Alors $\lambda(x_0) = 0$ (autrement les covecteurs $\{\xi^{\alpha} : 1 \leq \alpha \leq m\}$ sont indépendents, donc $m \leq \dim_{\mathbb{R}} T^*_{x_0}(M) = n$, une contradiction). Il s'ensuit que (par (69)) $(\nabla \phi^{\alpha_0})(x_0) = 0$ et alors ϕ^{α} = constante.

Soit maintenant $m \leq n$ et soit $x_0 \in M$ tel que $\lambda(x_0) \neq 0$. Par l'indépendence des covecteurs $\{\xi^{\alpha} : 1 \leq \alpha \leq m\}$ on a

$$\operatorname{rang} \left[\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x^j}(x_0) \right] = m$$

de manière que ϕ est une submersion sur un voisinage de x_0.

Soit $\phi : M \to N$ une application harmonique que vérifie (69). Alors (par (71))

$$\Delta(v \circ \phi)_{x_0} = g^{ij}(x_0) \left(\nabla_{\alpha} v_{\beta} \right)(y_0) \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x^j}(x_0) = \lambda(x_0)^2 \sum_{\alpha=1}^{M} \left(\nabla_{\alpha} v_{\alpha} \right)(y_0)$$

pour chaque $v \in C^2(N)$. On sait que $\Delta^h v = h^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta$ et donc $(\Delta^h v)(y_0) = \sum_{\alpha=1}^m (\nabla_\alpha v_\alpha)(y_0)$ (parce que $h^{\alpha\beta}(y_0) = \delta^{\alpha\beta}$. On obtient donc la formule (70). Enfin si $v : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique alors (par (70)) $\Delta(v \circ \phi)(x_0) = 0$ i.e. ϕ est un morphisme harmonique. Q.e.d.

7.4. **Morphismes de l'équation de la chaleur.** Le *noyau de la chaleur* d'une variété Riemannienne connexe (M, g) est une function continue p^M

$$(x, y, t) \in M \times M \times (0, +\infty) \longmapsto p^M(x, y, t) \in \mathbb{R}$$

telle que p^M est C^2 par rapport à y et C^1 par rapport à t et

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y\right) p^M = 0, \tag{76}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \int_M p^M(x, y, t)\varphi(y)\, d\, v_g(y) = \varphi(x), \quad x \in M, \tag{77}$$

pour chaque fonction bornée et continue $\varphi : M \to \mathbb{R}$. La convergence dans (77) est entendue comme localement uniforme, i.e. pour chaque $x \in M$ il existe un voisinage $U \subset M$ tel que le limite (77) est uniforme sur U. Si M est compacte une telle fonction $p^M(x, y, t)$ existe et est unique (cf. e.g. [2]). Pour les considérations à suivre on a besoin de rappeler le résultat suivant (cf. I. Chavel, [9])

Théorème 6. *Soit M une variété Riemannienne compacte. Pour chaque solution $u \in C^2(M \times \mathbb{R})$ du problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

on a

$$u(y, t) = \int_M p^M(x, y, t)\, f(x)\, d\, v_g$$

où $p_M(x, y, t)$ est le noyau de la chaleur sur M.

On adopte le définitions suivantes. Une application $\Psi : M \times (0, +\infty) \to N \times (0, +\infty)$ s'appelle un *morphisme des equations de la chaleur* si $u = \Psi^* v = v \circ \Psi$ est une solution de $u_t - \Delta u = 0$ pour chaque solution locale $v(x, t)$ de $v_t - \Delta^h v = 0$. Puis une application $\Phi : M \times M \times (0, +\infty) \to N \times N \times (0, +\infty)$ est un *morphisme des noyaux de la chaleur* si le pullback par Φ du noyau p^N de la chaleur sur N est le noyau p^M de la chaleur sur M i.e. $\Phi^* p^N = p^M$. E. Loubeau, [28], a étudié les morphismes dee equations de la chaleurs et des noyaux de la chaleur *avec variables separées* i.e.

$$\Psi(x, t) = (\phi(x), h(t)), \quad \Phi(x, y, t) = (\phi(x), \phi(y), h(t)),$$

pour quelque $\phi : M \to N$ et quelque $h : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, et a obtenu

Théorème 7. (E. Loubeau, [28]) 1) *L'application* $\Psi : M \times (0, +\infty) \to N \times (0, +\infty)$, $\Psi(x, t) = (\phi(x), h(t))$, *est un morphisme des équations de la chaleur si et seulement si* $\phi : M \to N$ *est un morphisme harmonique de dilatation constante* λ (*et alors une submersion homothétique ou une application constante*) *et h est donné par* $h(t) = \lambda^2 t + C$ *pour quelque* $C \in [0, +\infty)$ *et tous* $t \in (0, +\infty)$.

2) *Si* $\Phi : M \times M \times (0, +\infty) \to N \times N \times (0, +\infty)$, $\Phi(x, y, t) = (\phi(x), \phi(y), h(t))$ *est un morphisme des noyaux de la chaleur avec* $\phi : M \to N$ *surjectif alors* $\Psi : M \times (0, +\infty) \to N \times (0, +\infty)$, $\Psi(x, t) = (\phi(x), h(t))$, *est un morphisme des équations de la chaleur. De plus* $h(t) = \lambda^2 t$ *et* $\dim(M) = \dim(N)$.

Démonstration. 1) On peut penser à une fonction harmonique comme une solution de l'équation de la chaleur qui ne dépend pas de t, et donc ϕ est un morphisme harmonique. Soit $U \subset N$ un ensemble ouvert et $f : U \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $(\partial/\partial t - \Delta^h) f = 0$. Alors $(\partial/\partial t - \Delta)(f \circ \Psi) = 0$. D'autre part

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(f \circ \Psi) = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Psi) - \Delta(f \circ \Psi) =$$

$$= h'(t)\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \circ \Psi\right) - \Delta(f \circ \Psi) =$$

(parce que ϕ est un morphisme harmonique, en applicant la dernière affirmation du Théorème de Fuglede-Ishihara)

$$= h'(t)\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \circ \Psi\right) - \lambda^2 (\Delta^h f) \circ \Psi =$$

$$= \left\{\left(h'(t)\frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda^2 \Delta^h\right) f\right\} \circ \Psi$$

et donc Ψ est un morphisme des équations de la chaleur si et seulement si

$$h'(t) = \lambda(x)^2\,, \quad (x, t) \in U \times (0, +\infty),$$

i.e. $h' = \lambda^2$ = constante. Q.e.d.

2) Soit $u \in C^2(N \times \mathbb{R})$ une solution de $(\partial/\partial t - \Delta^h) u = 0$. Alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(u \circ \Psi)_{(y,t)} = h'(t)\, u(\Psi(y, t)) - \Delta(u \circ \Psi)_{(y,t)}.$$

D'autre part

$$u(\eta, \tau) = \int_N p^N(\xi, \eta, \tau)\, u(\xi, 0)\; d\,\mathrm{vol}(h)(\xi)$$

d'où le premier terme est

$$h'(t) \int_N p^N(\xi, \phi(y), h(t))\, u(\xi, 0)\; d\,\mathrm{vol}(h)(\xi) =$$

$$= \int_N \frac{\partial}{\partial t} \left\{ p^N(\xi, \phi(y), h(t)) \right\} u(\xi, 0)\; d\,\mathrm{vol}(h)(\xi).$$

Puis

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) (u \circ \Psi)_{(y,t)} =$$

$$= \int_N \frac{\partial}{\partial t} \left\{ p^N(\xi, \phi(y), h(t)) \right\} u(\xi, 0)\; d\,\mathrm{vol}(h)(\xi) -$$

$$- \left[\Delta_x \int_N p^N(\xi, \phi(x), h(t))\, u(\xi, 0)\; d\,\mathrm{vol}(h)(\xi) \right]_{(y,t)} =$$

$$= \int_N \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) p^N(\xi, \phi(x), h(t)) \right]_{(y,t)} u(\xi, 0)\; d\,\mathrm{vol}(h)(\xi) =$$

(ϕ étant surjective, elle a (par le Théorème de Federer-Morse, cf. [32]) une inverse a droite ψ (i.e. $\xi = \phi(\psi(\xi))$) telle que ψ est une application measurable au sens de Borel)

$$= \int_N \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) (p^N \circ \Phi) \right]_{(\psi(\xi), y, t)} u(\xi, 0)\; d\,\mathrm{vol}(h)(\xi) =$$

(Φ étant un morphisme des noyaux de la chaleur)

$$= \int_N \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y \right) p^M \right] (\psi(\xi), y, t)\, u(\xi, 0)\; d\,\mathrm{vol}(h)(\xi) = 0$$

et donc Ψ est un morphisme des équations de la chaleur. Alors, par la premiere partie du Théorème de Loubeau

$$\Psi(x, t) = \left(\phi(x),\ \lambda^2 t + C \right)$$

où ϕ est un morphisme harmonique de dilatation constante λ. On peut observer imédiatement que il y a deja des limitations sur la constante C parce que $\lambda^2 t + C \in (0, +\infty)$ pour tous $t > 0$ et donc on obtient $C \geq 0$ pour $t \to 0^+$. Nous allons montrer que $C = 0$. On sait que (cf. [2])

$$p^M(x, x, t) \sim (4\pi t)^{-m/2} \left(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots \right), \quad t \to 0^+\,,$$

où $m = \dim(M)$. La dernière affirmation signifie (par définition) que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^k} \left[(4\pi t)^m\, p^M(x, x, t) - \sum_{j=0}^{k} u_j t^j \right] = 0, \quad \forall\, k = 0, 1, 2, \cdots \tag{78}$$

De la même manière, sur la variété N

$$\lim_{\tau\to 0^+}\frac{1}{\tau^k}\left[(4\pi\tau)^{n/2}\,p^N(\phi(x),\phi(x),\tau)-\sum_{j=0}^{k}v_j\tau^j\right]=0,\quad \forall\, k=0,1,2,\cdots$$

avec $n=\dim(N)$. En particulier, si on pose

$$a(x,t)=(4\pi t)^{m/2}\,p^M(x,x,t)-u_0\,,\quad b(\xi,\tau)=(4\pi\tau)^{n/2}\,p^N(\xi,\xi,\tau)-v_0\,,$$

alors a est continue par rapport a $t>0$, respectivement b est continue par rapport a $\tau>0$, et

$$\lim_{t\to 0^+}a(x,t)=0,\quad \lim_{\tau\to 0^+}b(\xi,\tau)=0.$$

Il suit que

$$b(\phi(x),\ \lambda^2 t+C)=(4\pi)^{n/2}(\lambda^2 t+C)^{n/2}p^N(\phi(x),\phi(x),\lambda^2 t+C)-v_0=$$

$$=(4\pi)^{n/2}(\lambda^2 t+C)^{n/2}p^M(x,x,t)-v_0=$$

$$=(4\pi)^{n/2}\left(\lambda^2 t+C\right)^{n/2}(4\pi t)^{-m/2}\left[a(x,t)+u_0\right]-v_0$$

et donc

$$t^{m/2}\left[b(\phi(x),\lambda^2 t+C)+v_0\right]=(4\pi)^{(n-m)/2}(\lambda^2 t+C)^{n/2}\left[a(x,t)+u_0\right]. \tag{79}$$

La formule (79) pour $t\to 0^+$ donne

$$0=C^{n/2}u_0(x,x).$$

Si, par l' absurde, on avait $C>0$ alors $u_0\equiv 0$ et donc (cf. [2] pour la dernière egalité)

$$0=\int_M u_0(x,x)\,d\,v_g(x)=a_0=\mathrm{Vol}(M),$$

une contradiction. Il suit que $C=0$ et enfin

$$\Phi(x,y,t)=(\phi(x),\ \phi(y),\ \lambda^2 t).$$

Si ϕ n'est pas l'application constante alors (par le Théorème de Fuglede-Ishihara) on doit avoir $m\geq n$ i.e. $m=n+p$ par quelque $p\geq 0$. La formule (79) avec $C=0$ s'écrit

$$(4\pi t)^{p/2}\left[b(\phi(x),\ \lambda^2 t)+v_0\right]=|\lambda|^n\left[a(x,t)+u_0\right]. \tag{80}$$

Si $p\geq 1$ alors (pour $t\to 0^+$ dans (80))

$$0=|\lambda|^n\,u_0(x,x),$$

une contradiction. Donc il faut avoir $p=0$ i.e. $m=n$. Q.e.d.

8. Applications a la physique mathématique: gravité associée a un modèle sigma non linéaire

Les théories de Kaluza-Klein ont récemment pris de l'importance dans la recherche d'une théorie qui prévoit l'unification de la gravité avec les autres forces de la nature. Dans les théories modernes de Kaluza-Klein on commence avec le hypothèse que l'espace-temps a $(4+K)$ dimensions. Les K dimensions spatiales supplémentaires sont statiques et recroquevillées dans une variété compacte de dimension non observable, typiquement de l'ordre de la longueur de Planck.

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentiable D-dimensionnelle avec $D = 4 + K$ et soit

$$\left\{Z^M : M \in \{1, 2, \cdots, 4 + K\}\right\} \equiv$$

$$\equiv \{x^\mu, y^m : \mu \in \{0, 1, 2, 3\},\ \ m \in \{5, 6, \cdots, 4 + K\}\}$$

un système de coordonnées locales sur $\mathcal{M}$. Supposons que M est un espace-temps avec la métrique Lorentzienne g et on pose

$$\mathfrak{g} = \det[g_{MN}], \quad g_{MN} = g\left(\frac{\partial}{\partial Z^M}, \frac{\partial}{\partial Z^N}\right), \quad 1 \leq M, N \leq 4 + K.$$

Ici $[g_{MN}]$ a la signature $(-+\cdots+)$. Les composantes locales des applications $\Phi : \mathcal{M} \to B$ de $\mathcal{M}$ dans une variété différentiable compacte n-dimensionelle B sont des *champs scalaires* de la théorie. Supposons aussi que B est une variété Riemannienne avec la métrique h. Soit

$$\{u^a : a \in \{5, 6, \cdots, 4 + n\}\}$$

un système de coordonnées locales sur B et posons

$$\Phi^a = u^a \circ \Phi, \quad h_{ab} = h\left(\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b}\right), \quad 5 \leq a, b \leq 4 + n.$$

Le modèle que nous verrons se compose de gravité d'Einstein dans $(4 + K)$ dimensions couplées à un sigma-modèle non-linéaire. Ça veut dire que on considère l'action

$$(81) \quad S_\Omega(g, \Phi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[-\frac{R(g)}{2} + \frac{1}{\lambda^2} g^{MN} \frac{\partial \Phi^a}{\partial Z^M}\frac{\partial \Phi^b}{\partial Z^N}(h_{ab} \circ \Phi)\right] \sqrt{-\mathfrak{g}}\, d^{4+K}Z.$$

Ici $\Omega \subset \mathcal{M}$ est un domainee relativement compact. Aussi $R(g) = g^{MN} R_{MN}$ est la courbure de Ricci de $(\mathcal{M}, g)$ tandis que λ^2 est une constante donnant la force de l'auto-couplage (self-coupling) des champs scalaires. Il convient de noter que l'action (81) se compose de deux parties. Le premier terme est l'action gravitationelle habituelle (l'action de Hilbert-Einstein) sans terme cosmologique. Le deuxième est liée à l'énergie de l'application Φ entre les variétés semi-Riemanniennes $(\mathcal{M}, g)$ et (B, h)

$$E_\Omega(\Phi) = \int_\Omega e_g(\Phi)\ \sqrt{-\mathfrak{g}}\, d^{4+K} Z$$

où la densité d'énergie est

$$e_g(\Phi) = \frac{1}{2}\, g^{MN} \frac{\partial \Phi^a}{\partial Z^M} \frac{\partial \Phi^b}{\partial Z^N} (h_{ab} \circ \Phi).$$

Ici, nous avons préféré écrire dans la langue traditionnelle de la physique, c'est à dire en coordonnées locales, en se souvenant que les objets considérés sont en fait définis globalement e.g.

$$S_\Omega : \mathrm{Lor}(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}, B) \to \mathbb{R},$$

$$S_\Omega(g, \Phi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[-\frac{R(g)}{2} + \frac{2}{\lambda^2}\, e_g(\Phi) \right] d\, v_g,$$

$$g \in \mathrm{Lor}(\mathcal{M}), \quad \Phi \in C^\infty(\mathcal{M}, B).$$

Soit $\{g_t\}_{|t|<\epsilon} \subset \mathrm{Lor}(\mathcal{M})$ une variation avec 1-paramètre du $g_0 = g \in \mathrm{Lor}(\mathcal{M})$ telle que $\mathrm{Supp}(h) \subset \Omega$ où $h = (\partial g_t / \partial t)_{t=0}$. On adopte les notations

$$\dot{\Gamma}^M_{NP} = \left(\frac{\partial \Gamma^M_{NP}}{\partial t} \right)_{t=0}, \quad \dot{R}^M_{NPQ} = \left(\frac{\partial R^M_{NPQ}}{\partial t} \right)_{t=0}$$

où $\Gamma^M_{NP}(t)$ et $R^M_{NPQ}(t)$ sont respectivement les symboles de Christoffel de $g_{MN}(t)$ et les composantes locales de R^{∇^t}. Ici ∇^t est la connexion de Levi-Civita de $(\mathcal{M}, g)$ et R^{∇^t} denote la courbure de ∇^t. Si $f \in C^1(\mathcal{M})$ on pose $f_{|M} = \partial f / \partial Z^M$ pour la simplicité de l'écriture. La derivée de

$$R^A_{BMN} = \Gamma^A_{MN|B} - \Gamma^A_{BN|M} + \Gamma^S_{MN} \Gamma^A_{BS} - \Gamma^S_{BN} \Gamma^A_{MS}$$

est

$$\dot{R}^A_{BMN} = \dot{\Gamma}^A_{MN|B} - \dot{\Gamma}^A_{BN|M} + \dot{\Gamma}^S_{MN} \Gamma^A_{BS} + \Gamma^S_{MN} \dot{\Gamma}^A_{BS} - \dot{\Gamma}^S_{BN} \Gamma^A_{MS} - \Gamma^S_{BN} \dot{\Gamma}^A_{MS}\,. \tag{82}$$

Soit $[g^{MN}]$ l'inverse de $[g_{MN}]$. La formule de Taylor $g_{MN}(t) = g_{MN} + t\, h_{MN} + O(t^2)$ ensemble avec $g_{MN}(t) g^{NP}(t) = \delta^P_M$ donne

$$g^{MN}(t) = g^{MN} - t\, h^{MN} + O(t^2), \quad h^{MN} = g^{MA} g^{NB} h_{AB}\,.$$

Parce que

$$\Gamma_{BGS}(t) = \frac{1}{2} (g_{BS|G} + g_{GS|B} - g_{BG|S}) =$$

$$= \Gamma_{BSG} + \frac{t}{2}\ (h_{BS|G} + h_{GS|B} - h_{BG|S}) + O(t^2),$$

$$\nabla_G h_{BS} = h_{BS|G} - \Gamma^A_{GB} h_{AS} - \Gamma^A_{GS} h_{BA}\,,$$

il s'ensuit que

$$\Gamma^A_{BG}(t) = g^{AS}(t) \Gamma_{BGS}(t) =$$

$$= \Gamma^A_{BG} + \frac{t}{2}\, g^{AS}\, (h_{BS|G} + h_{GS|B} - h_{BG|S}) - t\, h^A_N \Gamma^N_{BG} + O(t^2)$$

et on obtient

$$\dot{\Gamma}^A_{BG} = \frac{1}{2}\, g^{AS}\, (\nabla_G h_{BS} + \nabla_B h_{GS} - \nabla_S h_{BG})\,. \tag{83}$$

Par conséquent $\dot{\Gamma}^M_{NP}$ est un champ de tenseurs de type $(1, 2)$ sur $\mathcal{M}$. Sa dérivée covariante est

$$\nabla_B \dot{\Gamma}^A_{MN} = \dot{\Gamma}^A_{MN|B} + \dot{\Gamma}^S_{MN} \Gamma^A_{BS} - \Gamma^S_{BM} \dot{\Gamma}^A_{SN} - \Gamma^S_{BN} \dot{\Gamma}^A_{MS}\,. \tag{84}$$

Echangons les indices B et M et soustrayons l'équation résultant de l'équation (84). On obtient (par (82))

$$\nabla_B \dot{\Gamma}^A_{MN} - \nabla_M \dot{\Gamma}^A_{BN} = \dot{R}^A_{BMN}\,. \tag{85}$$

La contraction de A et B dans (85) conduit à

$$\dot{R}_{MN} = \nabla_A \dot{\Gamma}^A_{MN} - \nabla_M \dot{\Gamma}^A_{AN}\,. \tag{86}$$

Si $\dot{R}(g) = \{\partial R(g_t)/\partial t\}_{t=0}$ il suit que (par (86) en utilisant le fait que la contraction avec g^{MN} commute avec la derivée covariante)

$$\dot{R}(g) = g^{MN} \dot{R}_{MN} - h^{MN} R_{MN} =$$
$$= \nabla_A \left(g^{MN} \dot{\Gamma}^A_{MN} - g^{AN} \dot{\Gamma}^M_{MN} \right) - h^{MN} R_{MN} = \nabla_A X^A - h^{MN} R_{MN}$$

où

$$\dot{R}(g) = \mathrm{div}(X) - \langle \mathrm{Ric}_{\nabla}(g)\,,\, h \rangle, \tag{87}$$

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial Z^A}\,, \quad X^A = g^{MN} \dot{\Gamma}^A_{MN} - g^{AN} \dot{\Gamma}^M_{MN}\,.$$

Aussi le produit scalaire entre de champs de tenseurs U et V de type $(0, 2)$ est donné par

$$\langle U, V \rangle = g^{MP} g^{NQ} U_{MN} V_{PQ}\,.$$

Posons

$$\mathcal{L}(g) = -\frac{2}{\lambda^2}\, e_g(\Phi)$$

de sorte que

$$S_\Omega(g_t, \Phi) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \left[\frac{R(g_t)}{2} + \mathcal{L}(g_t) \right] \sqrt{-\mathfrak{g}_t}\, d^{4+K} Z.$$

Pour calculer $\{dS_\Omega(g_t, \Phi)/dt\}_{t=0}$ il faut faire quelques considerations elementaires de géometrie semi-Riemannienne locale. On pose

$$\dot{\mathcal{L}}(g) = (\partial \mathcal{L}(g_t)/\partial t)_{t=0}\,.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sqrt{-\mathfrak{g}_t} \right\}_{t=0} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial g_{MN}} \left\{ \frac{\partial g_{MN}}{\partial t} \right\}_{t=0} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial g_{MN}} h_{MN}\,,$$

$$\mathfrak{g} = \sum_{N=1}^{2+K} g_{MN}\mathfrak{g}_{MN}\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial g_{MN}} = \mathfrak{g}_{MN}\,, \quad g^{MN} = \frac{\mathfrak{g}_{MN}}{\mathfrak{g}}\,,$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sqrt{-\mathfrak{g}_t}\right\}_{t=0} = \frac{1}{2}\sqrt{-\mathfrak{g}}\, g^{MN} h_{MN}\,. \tag{88}$$

Puis encore (par (88))

$$\dot{\mathcal{L}}(g) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{MN}} h_{MN}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{L}(g_t)\sqrt{-\mathfrak{g}_t}\right\}_{t=0} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{MN}} + \frac{1}{2}\mathcal{L}(g) g^{MN}\right) h_{MN}\sqrt{-\mathfrak{g}}\,, \tag{89}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{R(g_t)\sqrt{-\mathfrak{g}_t}\right\}_{t=0} = \dot{R}(g)\sqrt{-\mathfrak{g}} + R(g)\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sqrt{-\mathfrak{g}_t}\right\}_{t=0} =$$

$$= \left\{\dot{R}(g) + \frac{R(g)}{2}\langle g, h\rangle\right\}\sqrt{-\mathfrak{g}}$$

où

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{R(g_t)\sqrt{-\mathfrak{g}_t}\right\}_{t=0} = \left\{\mathrm{div}(X) - \langle \mathrm{Ric}_\nabla(g)\,,\, h\rangle + \frac{R(g)}{2}\langle g, h\rangle\right\}\sqrt{-\mathfrak{g}}\,. \tag{90}$$

Enfin (par (88)-(89) et le lemme de Green)

$$2\frac{d}{dt}\left\{S_\Omega(g_t, \Phi)\right\}_{t=0} =$$

$$= \int_\Omega \left\{\langle \mathrm{Ric}_\nabla(g) - \frac{R(g)}{2}\, g\,,\, h\rangle - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{MN}} + \frac{1}{2}\mathcal{L}(g) g^{MN}\right) h_{MN}\right\} d\,v_g.$$

Soit

$$T_{MN} = -2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{MN}} + g_{MN}\mathcal{L}$$

le tenseur énergie-impulsion. Comme

$$g^{MN} g_{NP} = \delta^M_P\,,$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial g_{QR}}\left(g^{MN} g_{NP}\right) = \frac{\partial g^{MN}}{\partial g_{QR}} g_{NP} + g^{MN}\delta^Q_N \delta^R_P\,,$$

on a

$$\frac{\partial g^{MN}}{\partial g_{QR}} = -g^{MQ} g^{NR}\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{MN}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{PQ}}\frac{\partial g^{PQ}}{\partial g_{MN}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{PQ}} g^{MP} g^{NQ} = \frac{1}{2}\left(T_{PQ} - \mathcal{L}\, g_{PQ}\right) g^{MP} g^{NQ} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(T_{PQ} g^{MP} g^{NQ} - \mathcal{L}\, g^{MN}\right),$$

et puis

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{MN}} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,g^{MN} = \frac{1}{2}\,T_{PQ}\,g^{MP}g^{NQ}\,,$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{MN}} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,g^{MN}\right)h_{MN} = \frac{1}{2}\,\langle T, h\rangle. \tag{91}$$

Donc la formule de la première variation (pour une variation à un 1-paramètre $\{g_t\}_{|t|<\epsilon}$) est

$$2\,\frac{d}{dt}\,\{S_\Omega(g_t,\Phi)\}_{t=0} = \int_\Omega \langle \mathrm{Ric}_\nabla(g) - \frac{R(g)}{2}\,g - \frac{1}{2}\,T\;,\;h\rangle\;d\,v_g. \tag{92}$$

Soit $(g,\Phi) \in \mathrm{Lor}(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}, B)$ un point critique de l'action S_Ω i.e. $\{dS_\Omega(g_t\,,\Phi_t)/dt\}_{t=0} = 0$ pour chaque variation a 1-paramètre de $(g,\Phi) = (g_0,\Phi_0)$ supporté dans Ω. En particulier $\{dS_\Omega(g_t\,,\Phi)/dt\}_{t=0} = 0$ donc (par (92))

$$\mathrm{Ric}_\nabla(g) - \frac{R(g)}{2}\,g = \frac{1}{2}\,T. \tag{93}$$

Enfin on peut calculer aussi T_{MN} i.e.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\lambda^2}g^{MN}\Phi^a_{|M}\Phi^b_{|N}(h_{ab}\circ\Phi),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{MN}} = -\frac{1}{\lambda^2}\Phi^a_{|M}\Phi^b_{|N}(h_{ab}\circ\Phi),$$

$$T_{MN} = \frac{2}{\lambda^2}\left\{\Phi^a_{|M}\Phi^b_{|N} - \frac{1}{2}\,g_{MN}\,\Phi^a_{|P}\,\Phi^b_{|Q}\,g^{PQ}\right\}(h_{ab}\circ\Phi). \tag{94}$$

Les équations (93) en coordonnées locales deviennent

$$R_{MN} - \frac{R(g)}{2}\,g_{MN} = \frac{1}{2}\,T_{MN}$$

et alors (par contraction avec g^{MN}, en utilisant aussi l'expression (94))

$$R(g) = \frac{1}{\lambda^2}\,g^{MN}\,\Phi^a_{|M}\Phi^b_{|N}(h_{ab}\circ\Phi). \tag{95}$$

Si maintenant on remplace de (95) dans (93) on obtient

$$R_{MN} = \frac{1}{\lambda^2}\Phi^a_{|M}\Phi^b_{|N}\,(h_{ab}\circ\Phi). \tag{96}$$

Les équations (96) sont les *equations d' Einstein* du champ gravitationel. Soit $\{\Phi_t\}_{|t|<\epsilon}$ une variation avec 1-paramètre de $\Phi_0 = \Phi$. Le point (g,Φ) est critique pour S_Ω donc $\{dS_\Omega(g,\Phi_t)/dt\}_{t=0} = 0$ et (conte tenue des considera-tion dans la section § 3 des leçons presentes)

$$0 = \frac{d}{dt}\,\{S_\Omega(g_t)\}_{t=0} = -\int_\Omega h^\Phi\,(V\;,\;\tau(\Phi))\;\;d\,v_g$$

où $V = \{\partial \Phi_t / \partial t\}_{t=0} \in C^\infty(\Phi^{-1} TB)$. Donc (g, Φ) est une solution de $\tau(\Phi) = 0$ i.e.

$$-\Delta \Phi^a + g^{MN} \Phi^b_{|M} \Phi^c_{|N} \; (\Gamma^a_{bc} \circ \Phi) = 0. \tag{97}$$

Les équations (96)-(97) sont les équations de Euler-Lagrange du principe variationel associé au action S_Ω.

References

[1] P. Baird & J.C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathem. Society Monographs, Vol. 29, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[2] M. Berger & P. Gauduchon & E. Mazet, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lecture Notes in Mathem., Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[3] L-M. Bers,

[4]

[5] E. Brieskorn, *Beispiele zur Differential-geometrie von Singularitäten*, Inventiones Math., 2(1966), 1-14.

[6] B-Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Pure and Applied Math., Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[7] S-S. Chern, *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface*, Proc. A.M.S., 6(1956), 771-782.

[8] S-S. Chern & P. Hartman & A. Winter, *On isothermic coordinates*, Comment. Math. Helv., 28(1954), 301-309.

[9] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 115, Academic Press, Orlando, Florida, 1984.

[10] S. Dragomir & J.C. Wood, *Sottovarietà minimali ed applicazioni armoniche*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, Vol. 35, Pitagora Editrice, Bologna, 1989.

[11] S. Dragomir & L. Ornea, *Locally conformal Kähler geometry*, Progress in Mathematics, Vol. 155, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1998.

[12] S. Dragomir & E. Lanconelli, *Subelliptic harmonic morphisms*, Osaka J. Math., (2)46(2009), 411-440.

[13] S. Dragomir & G. Tomassini,

[14] S. Dragomir & A. Tommasoli, *on p-harmonic maps into spheres*, Tsukuba J. Math., (2)35(2011), 161-167.

[15] S. Dragomir & D. Perrone, *Harmonic vector fields*,

[16] J. Eells & J. Ferreira, *On representing homotopy classes by harmonic maps*, Bull. London Math. Soc., 23(1991), 160-162.

[17] J. Eells & J.H. Sampson, *Harmonic maps of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., 86(1964), 109-160.

[18] B. Fuglede, *Harmonic morphisms between semi-Riemannian manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, 21(1996), 31-50.

[19] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1968.

[20] F. Helein, *Sur la régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne*, Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n. 10, p. 1-6.

[21] Sze-Tsen Hu, *Homotopy theory*, Academic Press, Inc., New York-San Francisco-London, 1959.

[22] S. Ianuş & M. Vişinescu, *Spontaneous compactification induced by non-linear scalar dynamics, gauge fields and submersions*, Class. Quantum Grav., 3(1986), 889-896.

[23] T. Ishihara, *A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions*, J. Math. Kyoto Univ., 19(1979), 215-229.

[24] G-Y. Jiang, 2-*Harmonic maps and their first and second variation formulas*, Chinese Ann. Math., Ser. A, 7(1986), 389-402.

[25] L. Lemaire, *Applications harmoniques de surfaces riemanniennes*, J. Diff. Geometry, 13(1978), 51-78.

[26] L. Lemaire, *Existence des applications harmoniques et courbure des variétés*, Séminaire N. Bourbaki, 1979-1980, exp. n. 553, p. 174-195.

[27] P. Libermann, *Sue les structures presque complexes et autres structures infinitésimales réguliers*, Bull. Soc. Math. France, 83(1955), 195-224.

[28] E. Loubeau, *Morphisms of the heat equation*, Ann. Global Analysis Geom., (6)15(1997), 487-496.

[29] E. Mazet, *La formule de la variation seconde de l'énergie au voisinage d'une application harmonique*, J. Diff. Geometry, (2)8(1973), 279-296.

[30] K. Nomizu, *Introduzione alla geometria differenziale*, Appunti della Scuola Matematica Interuniversitaria, 1975.

[31] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, An. Ştiinţ. Univ. *Al.I. Cuza*, Iaşi, Mat. (N.S.), 48(202), 237-248.

[32] H. Rosenthal, *Martingale proofs of a general integral representation theorem*, Edited by E.R. Berkson & N.T. Peck & J. Uhl, *Analysis at Urbana II: Analysis in Abstract Spaces*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., Vol. 138, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, pp. 294-356.

[33] R.T. Smith, *The second variation formula for harmonic mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975), 229-236.

[34] B. Solomon, *Harmonic maps to spheres*, J. Diff. Geometry, (2)21(1985), 151-162.

[35] T. Takahashi, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 18(1966), 380-385.

[36] H. Urakawa, *Calculus of variations and harmonic maps*, Translations of Mathem. Monographs, Vol. 132, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1993.

[37] I. Vaisman, *Generalized Hopf manifolds*, Geometriae Dedicata, 13(1982), 231-255.

[38] M. Vişinescu, *Massless Kaluza-Klein gauge fields and space-time compactification induced by scalars*, Europhysics Letters, (7)4(1987), 767-770.