HAL open science

Comportement élastique

Jean Garrigues

▶ **To cite this version:**

Jean Garrigues. Comportement élastique. École d'ingénieur. Comportement élastique, Centrale Marseille, France. 2017, pp.220. cel-00827790v3

HAL Id: cel-00827790

https://cel.hal.science/cel-00827790v3

Submitted on 26 Apr 2017 (v3), last revised 30 May 2023 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement élastique

Jean Garrigues

(version du 24 avril 2017)

CENTRALE
MARSEILLE

Avant-propos

L'objectif de ce cours est de définir le comportement des milieux continus solides élastiques. L'élasticité définie dans ce cours est générale. La température étant une variable d'état imposée par le second principe de la thermodynamique, ce cours traite donc de ce que l'on appelle communément la *thermo-élasticité*.

> **Remarque –** L'élasticité isotherme est un cas particulier idéal. Le lecteur qui souhaiterait n'envisager que des évolutions à température à la fois uniformes dans l'espace et constantes dans le temps (ces suppositions sont rarement réalistes dans la pratique industrielle) pourra toujours poser $T = T_0$, $\mathbf{grad}\, T = 0$ et $\dot{T} = 0$ dans toutes les équations ; en outre, dans la résolution des problèmes, il devra aussi ignorer l'équation locale de la conservation de l'énergie (appelée aussi aussi équation de la chaleur) qui, sous ces hypothèses, n'est qu'un corollaire de l'équation de mouvement. En faisant ces approximations, il masquera délibérément les phénomènes thermiques inhérents à toute évolution thermomécanique d'un milieu continu, même élastique.

Contrairement aux cours classiques d'élasticité élémentaire (élasticité de Hooke), les déformations envisagées dans ce cours ne sont l'objet d'aucune restriction *a priori*. L'élasticité sans restriction ni sur les déformations ni sur le mouvement est souvent appelée « (thermo-)hyperélasticité » ou encore (thermo-)élasticité en « grandes déformations ». Dans ce cours, l'élasticité classique de Hooke n'apparaîtra donc que comme une dégradation de l'élasticité générale. Par ailleurs, l'élasticité envisagée dans ce cours n'est pas nécessairement isotrope.

En première lecture, la plupart des remarques ou commentaires qui apparaissent en retrait et en petits caractères peuvent être ignorés sans nuire à la compréhension de l'ensemble.

La lecture de ce cours suppose une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielles [(1)], de la cinématique des milieux continus [(2)] et des équations générales des milieux continus [(3)], dont notamment l'expression différentielle locale pour un milieu continu des quatre principes fondamentaux de la physique classique.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple : a, μ) ;
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple : $\boldsymbol{v}$) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple : $\boldsymbol{T}$) ;
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice

---

(1) L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* : `http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923` ou bien `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html`

(2) L'auteur propose un autre cours intitulé *Cinématique des milieux continus* : `http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00681766` ou bien `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/cinematique.html`.

(3) L'auteur propose un autre cours intitulé *Équations générales des milieux continus* : `http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00696063` ou bien `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/mmc.html`.

de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \left[m_{ij}\right]$$

- la transposition est notée avec un $^\top$ en exposant (exemple : $\boldsymbol{T}^\top$) ;
- les ensembles d'entités mathématiques sont en majuscules doublées, en particulier :
  - $\mathbb{R}$ est l'espace des réels,
  - $\mathbb{V}_3$ est un espace vectoriel de dimension 3,
  - $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$ est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p construits sur $\mathbb{V}_3$ (de dimension 3^p),
  - $\mathbb{Q}_{3+}$ est le groupe des rotations ($\mathbb{Q}_{3+} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$) ;
- le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{V}_3$ est noté « $\wedge$ » ;
- Le tenseur métrique est noté $\boldsymbol{G}$;
- Le tenseur d'orientation est noté $\boldsymbol{H}$;
- La description de Lagrange d'un champ matériel est notée avec un indice $_L$;
- La description d'Euler d'un champ matériel est notée avec un indice $_E$;
- La dérivée particulaire d'une grandeur physique locale $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ est notée $\dot{\boldsymbol{\Psi}}(P,t)$.
- Les invariants fondamentaux d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{X}$ sont notés X_{I}, X_{II} et X_{III}.

Remerciements

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND [4], ce grand magicien de LaTeX, sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe `book` [5] et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Je remercie aussi vivement mon ancien collègue et néanmoins toujours ami Thierry DÉSOYER [6] pour les discussions parfois vives mais le plus souvent fructueuses qu'il a bien voulu m'accorder, ainsi que pour le temps qu'il a bien voulu passer à la relecture de ce texte.

Bonne lecture.

Information – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références des pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

[4] De l'université McGill, de Montréal.
[5] Ceux qui écrivent en LaTeX me comprendront.
[6] De l'École Centrale Marseille (ECM) et du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) à Marseille.

Table des matières

1 Milieux continus solides déformables 9

1.1 Rappels et notations 9

1.2 Solide déformable 11

1.3 Solide déformable élastique 13

1.4 En bref... 14

2 Élasticité isotrope 17

2.1 Choix des variables d'état 17

2.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique 18
Conséquences de la dissipation thermique, 18 • Conséquences de la non dissipation intrinsèque, 18 • Relation de Helmholtz, 19 • Loi de comportement élastique avec tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$, 20.

2.3 Loi de comportement avec d'autres tenseurs de déformation 22
Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$, 22 • Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$, 24 • Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{v}$, 25 • Conclusion sur les lois élastiques avec un tenseur de déformation objectif, 26 • Utilisation de tenseurs de déformation non objectifs, 26.

2.4 Quelques modèles couramment rencontrés dans les codes de calcul 29
Le modèle de Piola-Kirchhoff, 30 • Le modèle « néo-Hookien », 31 • Le modèle d'Ogden, 31 • Le modèle de Mooney-Rivlin, 32 • Conclusion, 32.

2.5 Critères de limite élastique 32
Considérations microscopiques, 33 • Point de vue macroscopique, 33 • Critères portant sur des caractéristiques de la déformation, 35 • Limitation de la distorsion angulaire maximale, 35 • Limitation de la distorsion stérique maximale, 36 • Limitation de l'énergie interne de déformation isovolume, 37 • Limitation de la dilatation linéique, 37 • Conclusion sur les critères de limite élastique, 38.

2.6 Loi incrémentale (« loi tangente ») 39

2.7 En bref... 42

3 Construction d'un modèle d'élasticité isotrope 43

3.1 Démarche générale 43

3.2 Choix des variables d'état 43
Nouvelle expression de la loi de comportement mécanique, 45.

3.3 Forme générale des fonctions d'état 46
Forme générale de l'énergie libre massique de Helmholtz, 46 • Forme générale de l'entropie massique, 47 • Forme générale de l'énergie interne massique, 47 • Loi de comportement mécanique, 47.

3.4 Analyse des évolutions élémentaires 47
Analyse de l'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$, 48 • Analyse de l'évolution $\mathscr{C}^{(2)}$, 48 • Analyse de l'évolution $\mathscr{C}^{(3)}$, 49 • Synthèse, 50.

3.5 Hypothèse simplificatrice supplémentaire facultative 52

3.6 Expériences réelles 52

Mouvement isovolume isotherme sans dilatation sphérique préalable ($\mathscr{C}^{(4)}$), 53 • Déformation sphérique isotherme ($\mathscr{C}^{(2)}$), 54 • Dilatation thermique libre ($\mathscr{C}^{(5)}$), 54 • Essai de traction simple isotherme ($\mathscr{C}^{(6)}$), 55.

3.7 Quelques idéalisations possibles 56

3.8 En bref... 58

4 Pseudo-élasticité de Hooke 59

4.1 Hypothèse des « petites perturbations » (rappel) 59

4.2 Loi de Hooke historique 61

4.3 Recherche d'une énergie libre conduisant à la loi de Hooke 62

4.4 Une nouvelle « loi de Hooke » en déformations finies 65

4.5 Élasticité isotrope en petites déformations sans restriction sur le mouvement . . 67

4.6 En bref... 69

5 Élasticité isotrope transverse 71

5.1 Choix des variables d'état 71

5.2 Loi de comportement mécanique en élasticité isotrope transverse 72

Relation de Helmholtz, 72 • Comportement élastique isotrope transverse avec le tenseur $\boldsymbol{B}$, 73 • Déviation des directions d'anisotropie, 74 • Loi élastique isotrope transverse avec le tenseur $\boldsymbol{V}$, 74 • Loi élastique isotrope transverse avec le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^{v}$, 76.

5.3 Comportement thermique en élasticité isotrope transverse 78

5.4 Critères de limite élastique 78

5.5 En bref... 79

6 Construction d'un modèle d'élasticité isotrope transverse 81

6.1 Choix des variables d'état 81

6.2 Forme générale des fonctions d'état 84

6.3 Analyse des chemins élémentaires 85

Analyse du chemin $\mathscr{C}^{(1)}$, 85 • Analyse du chemin $\mathscr{C}^{(2)}$, 85 • Analyse du chemin $\mathscr{C}^{(3)}$, 86 • Analyse du chemin $\mathscr{C}^{(4)}$, 86.

6.4 Conclusion 88

7 Élasticité générique 89

7.1 Les variables d'état d'un solide déformable 89

7.2 Forme générique des lois de comportement élastique 91

Relation de Helmholtz, 92 • Loi de comportement mécanique générique en élasticité (isotrope ou non), 92.

7.3 En bref... 93

8 Le problème élastique 95

8.1 Énoncé général 95

Solide déformable à étudier, 95 • Modèle de comportement du matériau, 95 • Relations cinématiques, 96 • Équations différentielles, 96 • Sollicitations extérieures, 98 • Synthèse, 99.

8.2 Approche numérique des solutions 101

Incertitudes sur les résultats numériques, 101 • Aperçu sur la méthode des éléments finis, 102.

8.3 Recommandations pratiques 110

9 Illustrations numériques en élasticité isotrope 113

9.1 Modèles de comportement utilisé 113

Comportement élastique isotrope, 113 • Comportement thermique, 114 • Formulation intégrale, 114.

9.2 Choix d'un logiciel de résolution 115

9.3 Traction non isotherme d'une éprouvette cylindrique 116

Caractéristiques du matériau, 116 • Conditions aux limites mécaniques, 117 • Conditions aux limites thermiques, 117 • Analyse des résultats numériques, 117.

9.4 Forte flexion isotherme d'un barreau élastique isotrope 119

Description du problème, 121 • Caractéristiques du matériau, 121 • Analyse des résultats numériques, 121.

9.5 Forte traction/compression isotherme d'un barreau élastique isotrope 123

9.6 Essai de glissement 123

9.7 En bref... 124

10 Conclusion 125

A Dérivées particulaires utiles en anisotropie 127

A.1 Dérivée particulaire d'une direction matérielle 127

A.2 Dérivée particulaire des invariants croisés 128

Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$, 128 • Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$, 129.

B Calcul d'une loi tangente isotrope 131

C Cinématique du glissement 133

C.1 Directions principales actuelles de déformation dans un glissement 133

C.2 Interprétation angulaire 134

C.3 Évolution de la variable d'anisotropie a 135

C.4 Déviation de la direction d'anisotropie dans le glissement 136

D Transformations d'intégrales 139
D.1 Intégrale d'un produit $f \operatorname{div} \boldsymbol{v}$ 139
D.2 Intégrale d'un produit $f\,\Delta g$ 140
D.3 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{w}$ 140
D.4 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{T}$ 140
D.5 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{v} \cdot \Delta\, \boldsymbol{w}$ 140
D.6 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{T} : \operatorname{div} \boldsymbol{K}$ 141
D.7 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{T} : \Delta\, \boldsymbol{U}$ 141

E Distorsions maximales en anisotropie 143
E.1 Rappels de cinématique 143
E.2 Distorsions angulaires maximales 144
E.3 Distorsion stérique maximale du triplet $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 145

F Calculs du chapitre 3 147

G Calculs du chapitre 4 171

H Calculs en isotropie transverse 181

I Calculs de distorsions maximales en anisotropie 191

J Calculs du chapitre 6 205

1

Milieux continus solides déformables

Après quelques rappels de thermodynamique fondamentale destinés à préciser les notations employées dans le cours et à limiter les références à des formules des cours précédents, on définit dans ce chapitre ce que l'on appelle solide déformable et solide déformable élastique.

1.1 Rappels et notations

Le premier et le second principe de la thermodynamique postulent l'existence de deux champs matériels scalaires : l'*énergie interne massique* $e^m(P,t)$ et l'*entropie massique* $s^m(P,t)$ qui sont par principe des *fonctions d'état* scalaires et objectives. L'objectivité des fonctions d'état ainsi que celle des variables d'état impliquent que les fonctions d'état sont des fonctions isotropes de leurs arguments. On peut donc ramener la liste de variables d'états tensorielles objectives $\{T, \boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ à une liste de variables d'état scalaires $\{T, I_2, \cdots, I_m\}$:

$$
\begin{aligned}
e^m &= f_e(T, \boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n) &&= \overline{f}_e(T, I_2, \cdots, I_m) \\
\dot{e}^m &= \partial_T f_e \dot{T} + \sum_{i=2}^{n} \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_e \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &&= \partial_T \overline{f}_e \dot{T} + \sum_{j=2}^{n} \partial_{I_j} \overline{f}_e \dot{I}_j \\
s^m &= f_s(T, \boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n) &&= \overline{f}_s(T, I_2, \cdots, I_m) \\
\dot{s}^m &= \partial_T f_s \dot{T} + \sum_{i=2}^{n} \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_s \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &&= \partial_T \overline{f}_s \dot{T} + \sum_{j=2}^{n} \partial_{I_j} \overline{f}_s \dot{I}_j
\end{aligned}
$$

où :

- $T(P,t)$ est le champ matériel (scalaire) des températures, la présence de cette variable d'état est imposée par la thermodynamique ;
- $\boldsymbol{\chi}_2(P,t), \cdots, \boldsymbol{\chi}_n(P,t)$ sont les champs matériels des variables d'état (éventuellement tensorielles) indépendantes et objectives du milieu continu considéré ;
- $I_2(P,t), \cdots, I_m(P,t)$ sont les champs matériels des variables d'état objectives *scalaires*. Cette liste ne peut être établie que lorsque l'on connaît le nombre et l'ordre de tensorialité des variables tensorielles $\{\boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$. Elle contient des invariants propres à chaque argument tensoriel ainsi que des invariants croisés [1] qui traduisent l'orientation relative entre les arguments tensoriels.

[1] C'est-à-dire calculés à partir de plusieurs arguments tensoriels.

On utilise aussi la fonction d'état *énergie libre de Helmholtz* définie par $\psi^m = e^m - T\,s^m$:

$$\begin{aligned}
\psi^m &= f_\psi(T, \boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n) &&= \overline{f}_\psi(T, I_2, \cdots, I_m) \\
\dot{\psi}^m &= \partial_T f_\psi\,\dot{T} + \sum_{i=2}^{n} \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_\psi \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &&= \partial_T \overline{f}_\psi\,\dot{T} + \sum_{j=2}^{n} \partial_{I_j} \overline{f}_\psi\,\dot{I}_j
\end{aligned}$$

Cette nouvelle fonction d'état est introduite car la combinaison $e^m - T\,s^m$ apparaît souvent dans les calculs de mécanique des solides déformables.

Le second principe de la thermodynamique impose que pour tout milieu continu :

1. la température absolue T est une variable d'état *non négative* obligatoire ;
2. dans une conduction thermique, la chaleur va du chaud vers le froid : $\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}_E\,T \leqslant 0$;
3. l'entropie est une fonction d'état scalaire extensive et objective ;
4. dans toute évolution la variation d'entropie d'un système est supérieure ou égale à l'apport d'entropie extérieur.

La forme locale de l'inégalite de l'axiome 4 est que la *dissipation* Φ est un champ scalaire non négatif en toute particule et à tout instant de toute évolution. La dissipation actuelle (W.m^{-3}) en une particule peut s'écrire sous l'une des trois formes équivalentes suivantes :

$$\Phi = \rho\,T\,\dot{s}^m - r^v_{ext} + \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q} - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}_E\,T}{T} \geqslant 0 \tag{1.1}$$

$$= \rho\,(T\,\dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}_E\,T}{T} \geqslant 0 \tag{1.2}$$

$$= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}_E\,T}{T} \geqslant 0 \qquad \text{(inégalité de Clausius-Duhem)} \tag{1.3}$$

où :

- $\rho(P,t)$ est un champ matériel scalaire objectif appelé *masse volumique* actuelle ;
- $T(P,t)$ est un champ matériel scalaire objectif appelé *température absolue* actuelle ($T > 0$) et $\dot{T}$ est sa dérivée particulaire ;
- $r^v_{ext}(P,t)$ est un champ matériel scalaire objectif appelé *puissance calorifique volumique d'origine extérieure* (W.m^{-3}) actuellement apportée à la particule par l'interaction d'un rayonnement éventuel traversant le domaine de milieu continu (dans beaucoup d'applications ce terme est nul) ;
- $\boldsymbol{q}(P,t)$ est un champ matériel vectoriel objectif appelé *courant de chaleur* actuel (W.m^{-2}), représentant la circulation de la chaleur à l'intérieur du domaine de milieu continu : la puissance calorifique surfacique actuelle traversant une facette matérielle de normale unitaire actuelle $\boldsymbol{n}_t$ est le scalaire $q^s = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}_t$;
- $\boldsymbol{\sigma}(P,t)$ est un champ matériel tensoriel objectif du second ordre symétrique appelé *tenseur des contraintes de Cauchy* actuel (Pa) ;
- $\boldsymbol{D}(P,t)$ est un champ matériel tensoriel objectif du second ordre symétrique appelé *tenseur des taux de déformation* actuel (s^{-1}) ;
- $e^m(P,t)$ est un champ matériel scalaire objectif appelé *énergie interne massique* actuelle (J.kg^{-1}) et $\dot{e}^m$ est sa dérivée particulaire (W.kg^{-1}) ;
- $s^m(P,t)$ est est un champ matériel scalaire objectif appelé *entropie massique* actuelle (J.K^{-1}.kg^{-1}) et $\dot{s}^m$ est sa dérivée particulaire (W.K^{-1}.kg^{-1}) ;
- $\psi^m(P,t) = e^m(P,t) - T(P,t)\,s^m(P,t)$ est un champ matériel scalaire objectif appelé *énergie libre massique de Helmholtz* actuelle (J.kg^{-1}) et $\dot{\psi}^m$ est sa dérivée particulaire (W.kg^{-1}).

Comme tout champ matériel, chacun de ces champs (scalaire, vectoriel ou tensoriel) peut aussi bien être décrit par la méthode de Lagrange que par celle d'Euler :

$$\boldsymbol{\Psi}(P,t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t) \qquad \text{quel que soit le champ matériel } \boldsymbol{\Psi}(P,t).$$

Lorsque la liste des variables d'état du milieu continu et l'expression des fonctions d'état du milieu continu sont connues, la dissipation Φ en une particule P est fonction de l'état actuel, de la vitesse d'évolution actuelle dans l'espace des états et du gradient actuel du champ de température [éq. (1.2)] .

Le dernier terme de la dissipation $-\frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E\, T$ dans les équations (1.1), (1.2) et (1.3) [p. 10] est appelé *dissipation thermique* actuelle et est noté Φ_{th}. Ce terme est non négatif par principe.

Le reste de la dissipation $\Phi_{int} = \Phi - \Phi_{th} \geqslant -\Phi_{th}$ est appelé *dissipation intrinsèque* actuelle. Il représente la puissance calorifique volumique actuellement produite (ou consommée si elle est négative) par d'éventuels processus internes exothermiques ou endothermiques autres que les échanges internes de chaleur par conduction.

Processus internes – Dans les milieux continus monophasiques qui sont l'objet de ce cours, le seul processus interne est le frottement, qui est exothermique, on a donc toujours $\Phi_{int} \geqslant 0$. En revanche, quand on envisage des milieux continus multiconstituants (ou multiphasiques), une partie des variables d'état décrivent les concentrations locales des divers constituants. Les changements de concentrations peuvent être endothermiques ou exothermiques (réactions chimiques, changements de phase, etc.). La dissipation intrinsèque peut donc être négative mais le second principe de la thermodynamique impose que la dissipation totale Φ reste non négative ($\Phi_{int} \geqslant -\Phi_{th}$). En l'absence d'un rayonnement d'origine extérieure r^v_{ext}, la puissance calorifique volumique nécessaire à un processus endothermique local ne peut être fournie que par conduction par les particules voisines ($\mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} < 0$). De même, la puissance calorifique volumique dégagée par un processus exothermique local ne peut être absorbée que par les particules voisines ($\mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} > 0$).

Enfin, on rappelle que si les variables d'état sont bien des grandeurs indépendantes (on peut donner à chacune d'entre-elles une valeur arbitraire [(2)] pour définir un état), il n'en est pas nécessairement de même pour leur dérivée particulaire : il se peut que la cinématique ou des principes fondamentaux imposent des relations entre les dérivées particulaires des variables d'état. Par conséquent, à partir d'un état quelconque donné, toutes les directions de vitesse d'évolution dans l'espace des états ne sont pas toujours possibles.

1.2 Solide déformable

Un domaine matériel de milieu continu est un solide déformable s'il existe une *forme propre* de référence du domaine matériel à laquelle on peut se référer pour définir un champ de tenseurs de déformation actuel par rapport à cette forme propre de référence.

Rappel – Un tenseur de déformation est un concept cinématique permettant d'évaluer (entre autres) la dilatation linéique actuelle ($K_l = \lim_{\ell_0 \to 0} \frac{\ell_t}{\ell_0}$) dans toute direction matérielle issue d'une particule, par rapport à une forme de référence du solide choisie arbitrairement. Dans sa forme de référence, le solide est donc déclaré non déformé.

(2) Dans son domaine de définition.

Remarques – La *forme propre* est aussi souvent appelée *configuration de référence*. La forme propre de référence décrit les longueurs de référence des biparticules du solide déformable.

La configuration de référence est souvent présentée comme le champ des *positions initiales* pour un certain observateur. S'il est vrai que le champ des positions initiales permet bien de déterminer les distances de référence entre les particules et donc la forme de référence, en revanche, pour un observateur donné, il existe une infinité de champs de positions initiales définissant la même forme de référence, c'est-à-dire les mêmes distances de référence. Tous ces champs de positions initiales se déduisent l'un de l'autre par superposition d'un déplacement de solide indéformable (une translation et une rotation).

Par ailleurs, la forme de référence d'un solide déformable est la même pour tous les observateurs car la distance entre particules est une grandeur objective, alors que les champs de positions initiales diffèrent d'un observateur à l'autre. Il en est de même pour la forme actuelle.

■ **Définition 1.1 – Solide déformable.** On appelle solide déformable un modèle de comportement dont une variable d'état est un tenseur de déformation objectif [3] par rapport à une forme de référence.

Un modèle de comportement de solide déformable a donc au minimum deux variables d'état : la température, imposée par la thermodynamique, et un tenseur de déformation par rapport à une forme de référence.

La responsabilité du choix de la forme de référence pour la définition des déformations est laissée au scientifique ou à l'ingénieur qui fait l'étude.

Exemple – On peut choisir comme forme de référence la forme du solide lorsqu'il n'a jamais été sollicité : aucune force extérieure à distance ($\boldsymbol{f}^m_{ext} = 0$) ni de contact ($\boldsymbol{f}^s = 0$), aucune source de chaleur à distance ($\boldsymbol{r}^v_{ext} = 0$) ni de contact ($q^s = 0$), et enfin à une température uniforme T_0 ($\mathbf{grad}\, T_0 = \mathbf{0}$). Le plus souvent, la réalisation physique de l'état de référence n'est qu'approximative [4].

On définit en cinématique différents tenseurs de déformation objectifs [5] pour représenter la déformation actuelle en une particule de milieu continu : entre autres, on peut citer : $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top$, $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{B}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{M} = \mathbf{ln}\boldsymbol{V}$. Tant que l'on n'aura pas choisi un tenseur de déformation objectif particulier, il sera noté $\boldsymbol{X}$.

La description de l'état local actuel d'un solide déformable doit parfois être complétée par des variables d'état autres que la température et la déformation. C'est le cas des solides déformables anisotropes, pour lesquels la réponse sthénique dépend non seulement du tenseur de déformation $\boldsymbol{X}$, mais aussi de l'orientation de la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ par rapport à certaines directions matérielles actuelles particulières $\boldsymbol{n}^{(i)}_t$. Les directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{n}^{(i)}_t$ complètent donc la description de l'état actuel. Avec de telles variables d'état, il est possible d'envisager une modélisation en milieu continu de matériaux fibreux, lamellaires, tissés, composites, etc.

Rappel – Une direction actuelle d'anisotropie est une direction *non orientée*. Elle est plus commodément représentée par un tenseur uniaxial unitaire $\boldsymbol{N}^{(i)}_t = \boldsymbol{n}^{(i)}_t \otimes \boldsymbol{n}^{(i)}_t$ où $\|\boldsymbol{n}^{(i)}_t\| = 1$ et $\|\boldsymbol{N}^{(i)}_t\| = 1$.

[3] On rappelle que l'objectivité des variables d'état est une condition nécessaire à l'isotropie des fonctions d'état objectives.

[4] Notamment, s'il est aisé de supposer que la température est uniforme en attendant suffisamment longtemps la stabilisation thermique, il est difficile en revanche de s'isoler de la pesanteur.

[5] Dans beaucoup de textes, les tenseurs de déformation objectifs sont dits « eulériens ». On envisagera toutefois dans les chapitres suivants l'utilisation de tenseurs de déformation non objectifs, dit aussi « lagrangiens », pour illustrer leurs inconvénients.

Enfin, la description de l'état local de certains solides déformables peut nécessiter des variables d'état supplémentaires : il se peut que la seule description de la température actuelle, de la déformation actuelle et des directions actuelles d'anisotropie soient insuffisantes pour la description de l'état local actuel de la matière, car le chemin suivi pour atteindre l'état local actuel influence la réponse sthénique du milieu continu. C'est le cas lorsque des phénomènes microscopiques provoquant un effet macroscopique notable se sont produits dans l'évolution qui a conduit à l'état actuel. Ces phénomènes physiques microscopiques peuvent être des ruptures ou des réarrangements de liaisons interatomiques, ou encore des changements chimiques lents. Pour représenter macroscopiquement l'état local actuel dans le cadre d'une vision continue de la matière, il faut donc des variables d'état supplémentaires appelées variables d'état *internes* ou *mnésiques* qui sont une mémoire partielle du chemin suivi pour atteindre l'état actuel. Suivant la nature des phénomènes microscopiques que l'on souhaite décrire macroscopiquement, et aussi suivant la finesse avec laquelle on souhaite les représenter, les variables d'état mnésiques peuvent être scalaires, vectorielles ou tensorielles. Ces phénomènes microscopiques donnent lieu à des observations macroscopiques telles que la plastification, l'endommagement, la fatigue et le vieillissement.

1.3 Solide déformable élastique

Durant une évolution de solide déformable, la température actuelle des particules n'est généralement pas uniforme ($\mathbf{grad}_E\, T \neq \mathbf{0}$). La dissipation thermique actuelle est donc généralement non nulle. En revanche, la dissipation intrinsèque peut être nulle s'il n'existe aucun processus interne produisant ou consommant localement de la chaleur lorsque les variables d'état des particules évoluent.

Par ailleurs, le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est la réponse sthénique du milieu continu à l'évolution de l'état des particules : il décrit les efforts intérieurs induits par le changement d'état des particules (variations de $T, \boldsymbol{X}$, etc.). Le tenseur des contraintes de Cauchy actuel est donc *a priori* une fonction de l'état actuel, de la vitesse d'évolution actuelle dans l'espace des états, voire du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel. Si le tenseur des contraintes actuel n'est fonction ni de la vitesse d'évolution actuelle ni du chemin suivi pour y aboutir, le tenseur des contraintes de Cauchy est une fonction d'état, c'est-à-dire seulement fonction de l'état actuel.

En élasticité, on envisage de construire un modèle de comportement simple tel que :
- il n'existe aucun processus interne produisant ou consommant de la chaleur (en pratique, il n'y a pas de frottement interne) ;
- la réponse sthénique (tenseur des contraintes actuel) à un état actuel ne dépend pas du chemin suivi pour aboutir à cet état actuel (pas de variable d'état mnésique).
- la réponse sthénique (tenseur des contraintes actuel) à un état actuel ne dépend pas de la vitesse de déformation actuelle ;

On pose donc la définition suivante :

- **Définition 1.2 – Solide élastique.** On appelle comportement solide élastique, un modèle de milieu continu solide déformable tel que :

1. Dans toute évolution la dissipation intrinsèque est nulle en toute particule et à tout instant :

$$\forall P\, \forall t,\ \ \rho\,(T\,\dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = 0 \quad \text{[éq. (1.2) et (1.3) p. 10]} \tag{1.4}$$

2. Il n'y a pas de variable d'état mnésique dans la liste des variables d'état ; les seules variables d'état sont donc :
   – la température T (sa présence est imposée par la thermodynamique),
   – un tenseur de déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ objectif (le milieu continu est un solide déformable),
   – d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t^{(i)}$ (ou $\boldsymbol{N}_t^{(i)}$) ;
3. Le tenseur des contraintes de Cauchy est une fonction d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\sigma}}(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{N}_t^{(n)}) \quad \text{(donc indépendant de la vitesse de déformation actuelle } \boldsymbol{D}\text{)} \tag{1.5}$$

Ce modèle simple est assurément une idéalisation des matériaux réels, mais il est satisfaisant pour bon nombre de matériaux, tant que l'on ne dépasse pas certaines limites (apparition de phénomènes microscopiques dont l'effet est macroscopiquement notable). Ces limites seront précisées dans la suite.

Remarques – Cette définition de l'élasticité est sensiblement différente de la définition empirique habituellement donnée dans les cours d'élasticité classique isotherme (« réversibilité » des courbes contraintes-déformation dans un essai de traction isotherme et absence de déformation résiduelle après décharge). On verra plus loin que la définition générale donnée ici implique bien les constatations expérimentales décrites dans la définition empirique traditionnelle.

Contrairement à l'élasticité isotherme classique où la température n'est pas considérée comme une variable d'état, il existe en thermoélasticité plusieurs chemins dans l'espace des états pour passer d'un état à un autre. Par exemple, pour mettre en tension une éprouvette à la température uniforme initiale T_0, au lieu de la soumettre à un effort de traction, on peut la chauffer en dilatation libre puis bloquer sa déformation et la laisser refroidir à la température initiale T_0. Cette mise en tension s'est effectuée sans fournir de travail extérieur. Quand on veut ne considérer que des évolutions isothermes, on ne peut mettre l'éprouvette en tension qu'avec du travail mécanique extérieur : dans un essai de traction *isotherme*, il n'y a qu'un seul chemin et c'est seulement dans ce cas que l'on peut parler de « réversibilité » de la courbe contrainte-déformation dans un essai de traction.

On verra dans la suite qu'une évolution rigoureusement isotherme ($\mathbf{grad}_E\, T = \mathbf{0}$ et $\dot{T} = 0$) d'un solide déformable (même élastique) est irréaliste sauf à être « infiniment lente » afin que les températures puissent être considérées comme constamment uniformes. On constate expérimentalement [(6)], au moins dans les matériaux métalliques, que la mise en tension d'une éprouvette avec une machine de traction sans précautions thermiques particulières provoque une légère baisse temporaire [(7)] de la température de l'éprouvette. Les modèles de comportement élastique qui vont être construits dans ce cours prédisent cette constatation expérimentale [section 9.3.4 p. 117].

1.4 En bref...

Les variables d'état décrivant l'état actuel d'une particule de solide déformable contiennent au moins la température et un tenseur de déformation par rapport à une forme de référence. Pour les solides déformables anisotropes, il faut y ajouter les directions actuelles d'anisotropie. Pour certains solides déformables, on constate que la réponse sthénique (le tenseur des contraintes) dépend non seulement des variables d'état précédentes, mais aussi de la vitesse actuelle de déformation ou de l'histoire de l'évolution.

Les solides déformables *élastiques* sont des milieux continus simples tels que :

(6) Par exemple au moyen d'une caméra thermique.

(7) Car la température finit toujours par s'équilibrer avec celle du milieu extérieur par conduction en attendant suffisamment.

1. Les variables d'état sont la température actuelle, la déformation actuelle et d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie, à l'exclusion de toute variable d'état mnésique ;
2. La dissipation intrinsèque est nulle en toute particule et à tout instant ;
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état (donc indépendant de la vitesse d'évolution actuelle et de l'histoire de l'évolution).

Les chapitres qui suivent développent en premier lieu l'élasticité isotrope (pas de direction d'anisotropie dans les variables d'état), puis des élasticités anisotropes.

2

Élasticité isotrope

L'élasticité isotrope est l'étude du comportement des milieux continus solides élastiques dont la matière ne comporte pas de direction matérielle privilégiée. La réponse sthénique locale à une déformation est donc indépendante de l'orientation actuelle de la déformation par rapport à la position actuelle de la matière.

2.1 Choix des variables d'état

Outre la température actuelle T qui est une variable d'état scalaire objective et non négative dont la présence est imposée par la thermodynamique, on choisit un tenseur de déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ objectif comme seconde et unique autre variable d'état. Caractériser un état local actuel par un tenseur de déformation, sans aucune référence à l'orientation de ce tenseur par rapport à la position actuelle de la matière, signifie que l'on ne veut pas distinguer deux états de particules qui auraient des tenseurs de déformation différents ayant les mêmes valeurs propres mais des directions propres différentes. C'est par ce choix que l'on décide que le modèle de milieu continu est *isotrope*. Les variables d'état indépendantes d'un solide élastique isotrope sont donc le couple $\{T,\boldsymbol{X}\}$. Le théorème des fonctions isotropes implique que les variables d'état scalaires réduites sont, par exemple, le quadruplet de réels $\{T,X_{\mathrm{I}},X_{\mathrm{II}},X_{\mathrm{III}}\}$, où X_{I}, X_{II} et X_{III} sont les invariants fondamentaux du tenseur symétrique $\boldsymbol{X}$.

Rappel – Le théorème des fonctions isotropes nous apprend que les listes de variables d'état scalaires ne sont pas uniques. Il est possible de prendre d'autres listes d'invariants scalaires du tenseur de déformation $\boldsymbol{X}$ comme par exemple le triplet $\{\mathrm{tr}\boldsymbol{X},\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^2),\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^3)\}$ [(1)]. Dans les développements théoriques, l'utilisation du triplet $\{T,X_{\mathrm{I}},X_{\mathrm{II}},X_{\mathrm{III}}\}$ est commode car les dérivées particulaires de ces variables d'état ont une expression simple. Dans la construction effective de modèles élastiques, il est préférable de choisir un autre ensemble de variables d'état scalaires dont les interprétations cinématiques sont plus claires afin de construire des fonctions d'état physiquement sensées. On fait un tel choix dans l'exemple de modèle de comportement élastique construit dans le chapitre 3 [p. 43].

On pose donc la définition suivante :

- **Définition 2.1 – Solide élastique isotrope.** Un modèle de milieu continu est dit solide élastique isotrope si :

1. Les variables d'états indépendantes sont $\{T,\boldsymbol{X}\}$ où $\boldsymbol{X}$ est un tenseur de déformation objectif.
2. Le milieu continu est élastique ($\Phi_{int}=0$ et $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état) [déf. 1.2 p. 13] ;

(1) Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

Attention – Il faut veiller à ne pas confondre les deux sens du mot « isotropie » :

Isotropie mathématique des fonctions à valeur scalaire : la valeur de la fonction est invariante dans toute rotation d'ensemble de ses arguments tensoriels [(2)] ;

Isotropie matérielle des milieux continus : la description de l'état local ignore l'orientation de la déformation actuelle par rapport à la position actuelle de la matière.

L'espace des états d'un milieu continu élastique isotrope est donc au plus [(3)] de dimension 4 : la température et trois invariants du tenseur de déformation.

2.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

2.2.1 Conséquences de la non négativité de la dissipation thermique

L'inégalité $\Phi_{th} = -\frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E\, T \geqslant 0$ conduit à la nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique encore appelée loi de conduction thermique [(4)]. Parmi elles, la plus simple est la loi de conduction thermique linéaire isotrope de Fourier :

$$\boldsymbol{q} = -\alpha\, \mathbf{grad}_E\, T$$

mais il est possible d'en envisager d'autres. Par exemple, α peut être toute fonction isotrope à valeur scalaire non négative $\alpha(T, \mathbf{grad}_E\, T, \boldsymbol{X})$, c'est-à-dire fonction de tout ou partie des invariants scalaires objectifs suivants (théorème des fonctions isotropes) :

$$(T\,,\, \|\mathbf{grad}_E\, T\|\,,\, X_{\mathrm{I}}\,,\, X_{\mathrm{II}}\,,\, X_{\mathrm{III}}\,,\, \mathbf{grad}_E\, T \cdot \boldsymbol{X} \cdot \mathbf{grad}_E\, T\,,\, \mathbf{grad}_E\, T \cdot \boldsymbol{X}^2 \cdot \mathbf{grad}_E\, T) \tag{2.1}$$

où les deux invariants croisés $\mathbf{grad}_E\, T \cdot \boldsymbol{X} \cdot \mathbf{grad}_E\, T$ et $\mathbf{grad}_E\, T \cdot \boldsymbol{X}^2 \cdot \mathbf{grad}_E\, T$ traduisent l'orientation relative du vecteur $\mathbf{grad}_E\, T$ par rapport aux directions propres de la déformation actuelle. Le choix d'une loi de conduction ne peut être suggéré que par des constatations expérimentales.

Remarques – La conductivité thermique α dépend assez naturellement de la température T. Si elle est en outre fonction de $\|\mathbf{grad}_E\, T\|$ on dit souvent que la loi de comportement thermique est « non linéaire ». Elle peut aussi dépendre de la déformation ou d'une partie de la déformation [(5)]. Si elle dépend aussi de l'orientation de $\mathbf{grad}_E\, T$ par rapport à la déformation $\boldsymbol{X}$ (les deux derniers invariants de la liste (2.1)), on dit que le comportement thermique est anisotrope (anisotropie induite par la déformation).

2.2.2 Conséquences de la nullité de la dissipation intrinsèque

La nullité de la dissipation intrinsèque est une *égalité* qui va fournir ici, non seulement la nécessité de l'existence, mais aussi la forme générale de la loi de comportement mécanique des solides élastiques isotropes.

La théorie des fonctions isotropes nous enseigne que puisque les deux fonctions d'état énergie interne massique et entropie massique sont des grandeurs scalaires objectives, et que les variables

(2) Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3]

(3) Dans la construction effective d'un modèle, on peut décider d'ignorer délibérément l'influence d'une ou plusieurs variables d'état scalaires sous réserve d'une justification cinématique.

(4) Voir le chapitre 5 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

(5) Par exemple, la conductivité thermique peut ne dépendre que de la seule partie déformation sphérique.

d'état sont des grandeurs tensorielles (éventuellement d'ordre 0) objectives, alors les deux fonctions d'état dont l'existence est postulée par les deux principes de la thermodynamique, sont des fonctions isotropes. Il existe donc deux fonctions $\overline{f}_e$ et $\overline{f}_s$ telles que :

$$e^m = f_e(T,\boldsymbol{X}) = \overline{f}_e(T,X_{\mathrm{I}},X_{\mathrm{II}},X_{\mathrm{III}}) \qquad \text{et} \qquad s^m = f_s(T,\boldsymbol{X}) = \overline{f}_s(T,X_{\mathrm{I}},X_{\mathrm{II}},X_{\mathrm{III}})$$

où X_{I}, X_{II} et X_{III} sont les invariants fondamentaux du tenseur de déformation symétrique objectif $\boldsymbol{X}$. Ces deux fonctions d'état sont particulières à chaque milieu continu solide élastique isotrope (métaux, alliages, polymères, verres, etc.). Les dérivées particulaires de ces deux fonctions d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\dot{e}^m &= \partial_T \overline{f}_e \dot{T} + \partial_{X_{\mathrm{I}}} \overline{f}_e \dot{X}_{\mathrm{I}} + \partial_{X_{\mathrm{II}}} \overline{f}_e \dot{X}_{\mathrm{II}} + \partial_{X_{\mathrm{III}}} \overline{f}_e \dot{X}_{\mathrm{III}} \\
\dot{s}^m &= \partial_T \overline{f}_s \dot{T} + \partial_{X_{\mathrm{I}}} \overline{f}_s \dot{X}_{\mathrm{I}} + \partial_{X_{\mathrm{II}}} \overline{f}_s \dot{X}_{\mathrm{II}} + \partial_{X_{\mathrm{III}}} \overline{f}_s \dot{X}_{\mathrm{III}}
\end{aligned}$$

La nullité de la dissipation intrinsèque pour un milieu continu élastique isotrope s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
0 &= \rho\,(T\,\dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{[éq. (1.2) p. 10]} \\
&= \rho\,(T\,\partial_T \overline{f}_s - \partial_T \overline{f}_e)\,\dot{T} + \\
&\qquad \rho\,(T\,\partial_{X_{\mathrm{I}}} \overline{f}_s - \partial_{X_{\mathrm{I}}} \overline{f}_e)\,\dot{X}_{\mathrm{I}} + \rho\,(T\,\partial_{X_{\mathrm{II}}} \overline{f}_s - \partial_{X_{\mathrm{II}}} \overline{f}_e)\,\dot{X}_{\mathrm{II}} + \rho\,(T\,\partial_{X_{\mathrm{III}}} \overline{f}_s - \partial_{X_{\mathrm{III}}} \overline{f}_e)\,\dot{X}_{\mathrm{III}} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= \rho\,(T\,\partial_T \overline{f}_s - \partial_T \overline{f}_e)\,\dot{T} - \rho\,\partial_{X_{\mathrm{I}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{I}} - \rho\,\partial_{X_{\mathrm{II}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{II}} - \rho\,\partial_{X_{\mathrm{III}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{III}} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
0 &= -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} - \rho\,\partial_{X_{\mathrm{I}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{I}} - \rho\,\partial_{X_{\mathrm{II}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{II}} - \rho\,\partial_{X_{\mathrm{III}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{III}} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

où, pour condenser les écritures dans les deux dernières lignes, on a introduit la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m = e^m - T\,s^m$.

Remarque – Comme on peut le constater, la dissipation intrinsèque s'écrit un peu plus brièvement en utilisant le couple de fonctions d'état (ψ^m, s^m) qu'avec le couple (e^m, s^m) qui est naturellement introduit par les deux principes de la thermodynamique. La substitution du groupement de termes $e^m - T\,s^m$ par ψ^m est sans importance fondamentale. On obtient aussi bien le résultat (2.2) à partir de l'expression de la dissipation rappelée en éq. (1.3) [p. 10] (inégalité de Clausius-Duhem).

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.2)] doit être vraie pour toute évolution, c'est-à-dire $\forall \dot{T}$, $\forall \dot{X}_{\mathrm{I}}$, $\forall \dot{X}_{\mathrm{II}}$, $\forall \dot{X}_{\mathrm{III}}$ et $\forall \boldsymbol{D}$. Or, les dérivées particulaires des invariants de déformation et le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$ ne sont pas indépendants : ils sont liés par la cinématique. Pour préciser ces relations, il faut choisir un tenseur de déformation.

2.2.3 Relation de Helmholtz

Quel que soit le tenseur de déformation choisi, les dérivées particulaires des invariants de déformation $\dot{X}_{\mathrm{I}}$, $\dot{X}_{\mathrm{II}}$ et $\dot{X}_{\mathrm{III}}$ s'expriment uniquement en fonction de $\boldsymbol{X}$ et de $\boldsymbol{D}$: ce sont des relations purement cinématiques qui ne font pas intervenir la dérivée particulaire de la température $\dot{T}$ [(6)]. La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.2)] peut donc s'écrire sous la forme condensée provisoire suivante :

$$0 = -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + g(T, X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{II}}, X_{\mathrm{III}}, \dot{X}_{\mathrm{I}}, \dot{X}_{\mathrm{II}}, \dot{X}_{\mathrm{III}}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}) \qquad (2.3)$$

[(6)] Les dérivées particulaires des invariants d'un tenseur de déformation sont des résultats de cinématique démontrés en annexe du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]. Dans la suite du cours, on les rappellera en temps utile [éq. (2.6) p. 20, éq. (2.10) p. 23 et éq. (2.13) p. 24].

- **Théorème 2.2 – Relation de Helmholtz.** Dans un milieu élastique isotrope, les deux fonctions d'état $\overline{f}_\psi$ et $\overline{f}_s$ sont liées par la relation de Helmholtz :

$$\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad T\,\partial_T \overline{f}_s - \partial_T \overline{f}_e = 0 \tag{2.4}$$

Démonstration – L'égalité (2.3) [p. 19] doit être vraie pour tout état, c'est-à dire : $\forall T$, $\forall X_{\mathrm{I}}$, $\forall X_{\mathrm{II}}$, $\forall X_{\mathrm{III}}$ et pour toute évolution, c'est-à-dire : $\forall \dot{T}$, $\forall \dot{X}_{\mathrm{I}}$, $\forall \dot{X}_{\mathrm{II}}$, $\forall \dot{X}_{\mathrm{III}}$, $\forall \boldsymbol{D}$. Le terme $\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)$ étant une fonction d'état, donc non fonction de $\dot{T}$, il est nécessairement nul.

Pour définir le comportement d'un milieu continu élastique isotrope, il suffit donc de donner l'expression d'une seule fonction d'état f_e, f_s ou f_ψ en fonction des variables d'état. Les autres fonctions d'état s'en déduisent par la relation de Helmholtz et la définition de l'énergie libre massique de Helmholtz.

Remarques – Les lecteurs qui ont lu la construction du modèle de milieu continu *fluide simple* à deux variables d'état indépendantes T et ρ, dans le chapitre 6 du cours *Équations générales des milieux continus* du même auteur [note 3 p. 3], constateront que cette relation entre les deux fonctions d'état est la même, bien que les fonctions d'état f_e et f_s d'un fluide simple et celles d'un solide élastique isotrope soient des fonctions complètement différentes de variables d'état différentes.

En élasticité isotrope, la relation de Helmholtz traduit le fait que $\dot{T}$ et les dérivées particulaires des autres variables d'état $(\dot{X}_{\mathrm{I}}, \dot{X}_{\mathrm{II}}, \dot{X}_{\mathrm{III}})$ peuvent prendre indépendamment des valeurs arbitraires. Dans un modèle de comportement élastique isotrope, toutes les directions d'évolution dans l'espace des états sont donc possibles autour d'un état. En particulier, il peut exister une évolution telle que *seule* la variable d'état T évolue (variation de température à déformation bloquée).

Compte tenu de la relation de Helmholtz (2.4) [p. 20], la nullité de la dissipation intrinsèque écrite en (2.2) [p. 19] se réduit à :

$$\forall \dot{X}_{\mathrm{I}}\ \forall \dot{X}_{\mathrm{II}}\ \forall \dot{X}_{\mathrm{III}}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 = -\rho\,\partial_{X_{\mathrm{I}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{I}} - \rho\,\partial_{X_{\mathrm{II}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{II}} - \rho\,\partial_{X_{\mathrm{III}}} \overline{f}_\psi \dot{X}_{\mathrm{III}} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \tag{2.5}$$

où $\dot{X}_{\mathrm{I}}$, $\dot{X}_{\mathrm{II}}$ et $\dot{X}_{\mathrm{III}}$ sont des fonctions de $\boldsymbol{X}$ et de $\boldsymbol{D}$. Pour expliciter ces dérivées particulaires, il faut choisir un tenseur de déformation.

2.2.4 Loi de comportement élastique avec tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$

On rappelle que le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$ est défini par $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top$, où $\boldsymbol{F}$ est le gradient lagrangien de la description de Lagrange du mouvement [7]. Les variables d'état scalaires sont donc : $\{T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}\}$ et l'énergie libre massique de Helmholtz d'une particule s'écrit :

$$\psi^m = f^B_\psi(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\psi}^m = \partial_T f^B_\psi \dot{T} + \partial_{B_{\mathrm{I}}} f^B_\psi \dot{B}_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f^B_\psi \dot{B}_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f^B_\psi \dot{B}_{\mathrm{III}}$$

On montre en cinématique [8] que les dérivées particulaires des invariants fondamentaux du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ s'écrivent :

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \quad ; \quad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \quad ; \quad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \tag{2.6}$$

[7] C'est-à-dire le gradient lagrangien des positions actuelles ; voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

[8] Voir la note 6 [p. 19].

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.5) p. 20] s'écrit alors :

$$0 = -2\rho\left(\partial_{B_\mathrm{I}} f_\psi^B \boldsymbol{B} + \partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B (B_\mathrm{I}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) + \partial_{B_\mathrm{III}} f_\psi^B B_\mathrm{III}\boldsymbol{G}\right) : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$$

$$0 = -2\rho\left(B_\mathrm{III}\,\partial_{B_\mathrm{III}} f_\psi^B\,\boldsymbol{G} + (\partial_{B_\mathrm{I}} f_\psi^B + B_\mathrm{I}\,\partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B)\boldsymbol{B} - \partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B\,\boldsymbol{B}^2 - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\rho}\right) : \boldsymbol{D}$$

Par ailleurs, le principe de conservation de la masse implique :

$$K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \qquad \text{où} \quad K_v = \sqrt{B_\mathrm{III}} \quad \text{(dilatation volumique)}$$

Finalement, la nullité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution d'un milieu élastique isotrope s'écrit :

$$0 = \underbrace{\left(B_\mathrm{III}\,\partial_{B_\mathrm{III}} f_\psi^B\,\boldsymbol{G} + (\partial_{B_\mathrm{I}} f_\psi^B + B_\mathrm{I}\,\partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B)\boldsymbol{B} - \partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B\,\boldsymbol{B}^2 - \frac{\sqrt{B_\mathrm{III}}\,\boldsymbol{\sigma}}{2\rho_0}\right)}_{\boldsymbol{T}\text{ symétrique}} : \boldsymbol{D}, \quad \forall \boldsymbol{D} \tag{2.7}$$

$$0 = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}, \quad \forall \boldsymbol{D} \tag{2.8}$$

Le tenseur symétrique $\boldsymbol{T}$ est donc soit une fonction de $\boldsymbol{D}$, soit nul. Or, en élasticité, le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état [déf. 1.2 p. 13], le tenseur $\boldsymbol{T}$ est donc une fonction d'état qui ne peut pas être fonction du tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$. Il est donc nul. On en déduit le résultat suivant :

- **Théorème 2.3 – Loi de comportement mécanique élastique isotrope.** En élasticité isotrope, quand on utilise le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ pour mesurer les déformations, la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_\mathrm{III}}}\left(B_\mathrm{III}\,\partial_{B_\mathrm{III}} f_\psi^B\,\boldsymbol{G} + (\partial_{B_\mathrm{I}} f_\psi^B + B_\mathrm{I}\,\partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B)\boldsymbol{B} - \partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B\,\boldsymbol{B}^2\right) \tag{2.9}$$

où $\psi^m = f_\psi^B(T, B_\mathrm{I}, B_\mathrm{II}, B_\mathrm{III})$ est une fonction d'état caractéristique de chaque matériau élastique isotrope.

Remarque – Le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est donc non seulement fonction du tenseur de déformation, mais aussi de la température car la fonction d'état f_ψ^B et ses dérivées partielles sont *a priori* des fonctions de la température.

- **Propriété 2.4 –** On vérifie aisément avec l'équation (2.9) qu'en élasticité isotrope, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ ont les mêmes directions propres. Il en est de même avec tous les tenseurs de déformation objectifs car ils ont tous les mêmes directions propres.

Autres expressions – En utilisant l'identité de Cayley-Hamilton :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^3 - B_\mathrm{I}\boldsymbol{B}^2 + B_\mathrm{II}\boldsymbol{B} - B_\mathrm{III}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{B}^2 - B_\mathrm{I}\boldsymbol{B} + B_\mathrm{II}\boldsymbol{G} - B_\mathrm{III}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{0} \qquad (\boldsymbol{B}\text{ est inversible}) \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{B}^2 = B_\mathrm{I}\boldsymbol{B} - B_\mathrm{II}\boldsymbol{G} + B_\mathrm{III}\boldsymbol{B}^{-1} \end{aligned}$$

on peut présenter la loi de comportement élastique isotrope (2.9) sous une autre forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_\mathrm{III}}}\left((B_\mathrm{II}\,\partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B + B_\mathrm{III}\,\partial_{B_\mathrm{III}} f_\psi^B)\,\boldsymbol{G} + \partial_{B_\mathrm{I}} f_\psi^B\boldsymbol{B} - B_\mathrm{III}\,\partial_{B_\mathrm{II}} f_\psi^B\,\boldsymbol{B}^{-1}\right)$$

Rien n'empêche de présenter cette loi de comportement avec des puissances de $\boldsymbol{B}$ supérieures ou inférieures par le même procédé.

Pour compléter la modélisation du milieu continu élastique isotrope il suffit donc de donner l'expression de l'énergie libre de Helmholtz $\overline{f}^B_\psi$ en fonction des variables d'état scalaires $\{T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}\}$. Cette fonction d'état est caractéristique du milieu solide élastique envisagé (acier, élastomère, verre, etc.). Bien que toute fonction $\overline{f}(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}})$ garantisse un comportement élastique, son expression en fonction des variables d'état devrait être physiquement motivée.

Remarque – Dans la construction précédente de la loi de comportement mécanique (ainsi que dans celles données dans la section suivante), on a fait le choix *arbitraire* de prendre comme variables d'état réduites les invariants fondamentaux des tenseurs de déformation. Dans la construction effective de modèles de comportement élastique isotrope, ce choix n'est en général pas pertinent car la signification cinématique des invariants fondamentaux des tenseurs de déformation n'est pas toujours claire. On sait de la théorie des fonctions isotropes que l'on peut construire diverses listes d'invariants d'un tenseur du second ordre. Dans la construction effective d'une expression de fonction d'état en fonction des variables d'état scalaires, il est préférable d'utiliser un autre triplet équivalent d'invariants dont les interprétations cinématiques sont claires. On donne un exemple de construction de la fonction d'état ψ^m motivée physiquement dans le chapitre 3 [p. 43].

2.3 Loi de comportement avec d'autres tenseurs de déformation

Dans une première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 2.5 [p. 32] sans nuire à la compréhension de la suite.

Puisque l'on peut utiliser différents tenseurs de déformation objectifs pour décrire les déformations dans un milieu continu, il est possible d'écrire la loi de comportement mécanique d'un milieu élastique isotrope avec d'autres tenseurs de déformation. Dans cette section, on en donne quelques exemples. Pour déduire de nouvelles expressions de la loi de comportement mécanique élastique isotrope, deux méthodes sont possibles :

1. Soit on recommence la démarche précédente avec un autre tenseur de déformation pour en déduire les conséquences de la nullité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution ;
2. Soit on déduit la loi de comportement mécanique avec un tenseur de déformation $\boldsymbol{X}$ de celle écrite avec le tenseur de déformatiobn $\boldsymbol{B}$ par des calculs algébriques.

Les deux méthodes sont équivalentes et aboutissent au même résultat. Elles ne diffèrent que par leur commodité. La première méthode est toujours praticable, la seconde peut parfois être algébriquement pénible. Suivant les cas, on utilisera l'une ou l'autre.

2.3.1 Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$

On choisit de refaire un raisonnement similaire à la construction de la loi avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$. On rappelle que la définition du tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{V}$ est $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{B}}$. Les variables d'état scalaires sont donc $\{T, V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}}\}$ et l'énergie libre massique de Helmholtz d'une particule s'écrit :

$$\psi^m = f^V_\psi(T, V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}^m = \partial_T f^V_\psi \dot{T} + \partial_{V_{\mathrm{I}}} f^V_\psi \dot{V}_{\mathrm{I}} + \partial_{V_{\mathrm{II}}} f^V_\psi \dot{V}_{\mathrm{II}} + \partial_{V_{\mathrm{III}}} f^V_\psi \dot{V}_{\mathrm{III}}$$

On montre en cinématique [9] que les dérivées particulaires des invariants fondamentaux du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ s'écrivent :

$$\dot{V}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{V} : \boldsymbol{D} \quad ; \quad \dot{V}_{\mathrm{II}} = (V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}^2) : \boldsymbol{D} \quad ; \quad \dot{V}_{\mathrm{III}} = V_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \tag{2.10}$$

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.5) p. 20] s'écrit alors :

$$0 = -\rho\left(\partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V \boldsymbol{V} + \partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V (V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}^2) + \partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V V_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G}\right) : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$$

$$0 = -\rho\left(V_{\mathrm{III}}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V \boldsymbol{G} + (\partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V + V_{\mathrm{I}}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V)\boldsymbol{V} - \partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V \boldsymbol{V}^2 - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho}\right) : \boldsymbol{D}$$

Par ailleurs, la conservation de la masse implique :

$$K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \quad \text{où} \quad K_v = V_{\mathrm{III}} \qquad \text{(dilatation volumique)}$$

Finalement, la nullité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution s'écrit :

$$0 = \underbrace{\left(V_{\mathrm{III}}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V \boldsymbol{G} + (\partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V + V_{\mathrm{I}}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V)\boldsymbol{V} - \partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V \boldsymbol{V}^2 - \frac{V_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{\sigma}}{\rho_0}\right)}_{\boldsymbol{T}} : \boldsymbol{D} \quad \forall \boldsymbol{D} \tag{2.11}$$

Comme précédemment, le tenseur $\boldsymbol{T}$ étant une fonction d'état, il ne peut pas être fonction de $\boldsymbol{D}$; il est donc nul.

- **Théorème 2.5 – Loi de comportement mécanique élastique isotrope.** En élasticité isotrope, quand on utilise le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ pour mesurer les déformations, la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{\mathrm{III}}}\left(V_{\mathrm{III}}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V \boldsymbol{G} + (\partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V + V_{\mathrm{I}}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V)\boldsymbol{V} - \partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V \boldsymbol{V}^2\right) \tag{2.12}$$

où $\psi^m = f_\psi^V(T, V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}})$

Autre expression – En utilisant l'identité de Cayley-Hamilton :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^3 - V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{V}^2 + V_{\mathrm{II}}\boldsymbol{V} - V_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V}^2 - V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{V} + V_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - V_{\mathrm{III}}\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{0} \qquad (\boldsymbol{V} \text{ est inversible}) \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V}^2 = V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{V} - V_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} + V_{\mathrm{III}}\boldsymbol{V}^{-1} \end{aligned}$$

on peut présenter la loi de comportement mécanique (2.12) sous une forme différente :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{\mathrm{III}}}\left((V_{\mathrm{II}}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V + V_{\mathrm{III}}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V)\,\boldsymbol{G} + \partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V \boldsymbol{V} - V_{\mathrm{III}}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V \boldsymbol{V}^{-1}\right)$$

Autre méthode – On peut aussi bien retrouver la loi de comportement mécanique avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ donnée en éq. (2.12) à partir de la loi avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ [éq. (2.9) p. 21], en effectuant le changement de tenseur $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2$ et les changements d'invariants suivants :

$$B_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{I}}^2 - 2V_{\mathrm{II}} \qquad B_{\mathrm{II}} = V_{\mathrm{II}}^2 - 2V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{III}} \qquad B_{\mathrm{III}} = V_{\mathrm{III}}^2$$

On peut alors appliquer la méthode algébrique de changement de tenseur de déformation exposée plus loin en section 2.3.3 [p. 25].

[9] Même si les résultats (2.10) sont d'apparence aussi simple que ceux donnés en éq. (2.6) [p. 20], le calcul des dérivées particulaires des invariants du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ est un peu plus compliqué que celui des dérivées particulaires des invariants du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$. Le détail de ces calculs cinématiques est dans l'annexe B du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

2.3.2 Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$

Là encore, on choisit de refaire un raisonnement similaire à la construction de la loi avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$. On rappelle que le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{M}$ est défini par $\boldsymbol{M} = \mathbf{ln}\boldsymbol{V}$. Les variables d'état scalaires sont donc $(T, M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{II}}, M_{\mathrm{III}})$ et l'énergie libre massique de Helmholtz d'une particule s'écrit :

$$\psi^m = f_\psi^M(T, M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{II}}, M_{\mathrm{III}}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}^m = \partial_T f_\psi^M \dot{T} + \partial_{M_{\mathrm{I}}} f_\psi^M \dot{M}_{\mathrm{I}} + \partial_{M_{\mathrm{II}}} f_\psi^M \dot{M}_{\mathrm{II}} + \partial_{M_{\mathrm{III}}} f_\psi^M \dot{M}_{\mathrm{III}}$$

On montre en cinématique [10] que les dérivées particulaires des invariants fondamentaux du tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$ sont :

$$\dot{M}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{M}_{\mathrm{II}} = (M_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{M}) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{M}_{\mathrm{III}} = (M_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - M_{\mathrm{I}}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2) : \boldsymbol{D} \tag{2.13}$$

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.5) p. 20] s'écrit alors :

$$0 = -\rho \left(\partial_{M_{\mathrm{I}}} f_\psi^M \boldsymbol{G} + \partial_{M_{\mathrm{II}}} f_\psi^M (M_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{M}) + \partial_{M_{\mathrm{III}}} f_\psi^M (M_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - M_{\mathrm{I}}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2) \right) : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$$

$$0 = -\rho \left((\partial_{M_{\mathrm{I}}} f_\psi^M + M_{\mathrm{I}}\, \partial_{M_{\mathrm{II}}} f_\psi^M + M_{\mathrm{II}}\, \partial_{M_{\mathrm{III}}} f_\psi^M)\, \boldsymbol{G} - (\partial_{M_{\mathrm{II}}} f_\psi^M + M_{\mathrm{I}}\, \partial_{M_{\mathrm{III}}} f_\psi^M)\, \boldsymbol{M} + \partial_{M_{\mathrm{III}}} f_\psi^M\, \boldsymbol{M}^2 - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \right) : \boldsymbol{D}$$

Par ailleurs, la conservation de la masse implique :

$$K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \quad \text{où} \quad K_v = e^{M_{\mathrm{I}}} \qquad \text{(dilatation volumique)}$$

Par un raisonnement identique au précédent, il vient :

- **Théorème 2.6 – Loi de comportement mécanique élastique isotrope.** En élasticité isotrope, si on utilise le tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$ pour mesurer les déformations, la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{e^{M_{\mathrm{I}}}} \left((\partial_{M_{\mathrm{I}}} f_\psi^M + M_{\mathrm{I}}\, \partial_{M_{\mathrm{II}}} f_\psi^M + M_{\mathrm{II}}\, \partial_{M_{\mathrm{III}}} f_\psi^M)\, \boldsymbol{G} - (\partial_{M_{\mathrm{II}}} f_\psi^M + M_{\mathrm{I}}\, \partial_{M_{\mathrm{III}}} f_\psi^M)\, \boldsymbol{M} + \partial_{M_{\mathrm{III}}} f_\psi^M\, \boldsymbol{M}^2 \right)$$

où $\psi^m = f_\psi^M(T, M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{II}}, M_{\mathrm{III}})$

Remarques – Contrairement aux tenseurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{V}$, qui sont symétriques définis positifs, donc inversibles, on ne peut pas présenter cette loi de comportement mécanique avec $\boldsymbol{M}^{-1}$ car le tenseur $\boldsymbol{M}$ n'est pas toujours inversible. En effet, si l'une des dilatations linéiques principales λ_i vaut 1, alors le tenseur $\boldsymbol{M}$ a une valeur propre nulle ($m_i = \ln \lambda_i = 0$). Son déterminant est donc nul pour certaines déformations.

Par ailleurs, le passage algébrique de la loi avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ à la loi avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$ serait très compliqué car la relation entre les invariants fondamentaux des tenseurs de déformation $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{M}$ est très compliquée.

[10] Bien que ces résultats paraissent aussi simples que les dérivées particulaires des invariants de $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{V}$, leur démonstration est nettement plus compliquée. Le détail de ces calculs cinématiques est dans l'annexe B du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

2.3.3 Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$

Pour se conformer aux habitudes prises dans les cours élémentaires d'élasticité utilisant le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ [section 4.1 p. 59], on se propose d'écrire la loi de comportement d'un milieu continu élastique isotrope en utilisant le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ (en déformations finies) défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G} = \sqrt{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top} - \boldsymbol{G}$$

Comme le tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$, le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est nul quand il n'y a pas de déformation. Ses valeurs propres $\varepsilon_i^v = \lambda_i - 1$ sont les *allongements relatifs* [11] dans les directions matérielles principales actuelles de déformation. En revanche, l'allongement relatif dans une direction matérielle actuelle $\boldsymbol{u}_t$ quelconque est : $K_l - 1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t\|} - 1 = \frac{1}{\|(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^v)^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t\|} - 1$.

Plutôt que de refaire le raisonnement à partir de la nullité de la dissipation intrinsèque, on se propose ici de chercher l'expression de la loi de comportement élastique isotrope avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ par transformation algébrique à partir de la loi de comportement avec le tenseur $\boldsymbol{V}$.

De la définition de $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, on déduit aisément les relations entre les invariants suivantes :

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{I}} &= 3 + \varepsilon_{\mathrm{I}}^v & V_{\mathrm{II}} &= 3 + 2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \varepsilon_{\mathrm{II}}^v & V_{\mathrm{III}} &= 1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \varepsilon_{\mathrm{II}}^v + \varepsilon_{\mathrm{III}}^v \\
\varepsilon_{\mathrm{I}}^v &= -3 + V_{\mathrm{I}} & \varepsilon_{\mathrm{II}}^v &= 3 - 2\,V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} & \varepsilon_{\mathrm{III}}^v &= -1 + V_{\mathrm{I}} - V_{\mathrm{II}} + V_{\mathrm{III}}
\end{aligned}$$

En posant (changement de variables d'état) :

$$f_\psi^V(T, V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}}) = f_\psi^{\varepsilon^v}(T, \varepsilon_{\mathrm{I}}^v, \varepsilon_{\mathrm{II}}^v, \varepsilon_{\mathrm{III}}^v)$$

on en déduit les relations entre les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V &= \partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{I}}}\varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{I}}}\varepsilon_{\mathrm{II}}^v + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{I}}}\varepsilon_{\mathrm{III}}^v &&= \partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - 2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \\
\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V &= \partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}}\varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}}\varepsilon_{\mathrm{II}}^v + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}}\varepsilon_{\mathrm{III}}^v &&= 0 + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \\
\partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V &= \partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}}\varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}}\varepsilon_{\mathrm{II}}^v + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}}\varepsilon_{\mathrm{III}}^v &&= 0 + 0 + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}
\end{aligned}$$

La loi de comportement d'un solide élastique isotrope en utilisant le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ a été établie en (2.12) [p. 23] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{\mathrm{III}}}\left(V_{\mathrm{III}}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V\,\boldsymbol{G} + (\partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V + V_{\mathrm{I}}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V)\boldsymbol{V} - \partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V\,\boldsymbol{V}^2\right)$$

En utilisant les relations entre dérivées partielles précédentes, il vient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} = \rho_0\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}\,\boldsymbol{G} + \rho_0\,\frac{\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - 2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + (3+\varepsilon_{\mathrm{I}}^v)(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v})}{1+\varepsilon_{\mathrm{I}}^v+\varepsilon_{\mathrm{II}}^v+\varepsilon_{\mathrm{III}}^v}\,(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^v) \\
- \rho_0\,\frac{\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}}{1+\varepsilon_{\mathrm{I}}^v+\varepsilon_{\mathrm{II}}^v+\varepsilon_{\mathrm{III}}^v}\,(\boldsymbol{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^v + (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^2)
\end{aligned}$$

En regroupant les termes, il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0\boldsymbol{G} + K_1\,\boldsymbol{\varepsilon}^v + K_2\,(\boldsymbol{\varepsilon}^v)^2 \tag{2.14}$$

[11] C'est-à-dire la limite du rapport $\frac{\ell_t-\ell_0}{\ell_0} = \frac{\ell_t}{\ell_0} - 1$ quand $\ell_0 \to 0$.

où K_0, K_1 et K_2 sont les trois fonctions d'état scalaires suivantes :

$$K_0 = \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + \varepsilon_{\mathrm{I}}^v \, \partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + (\varepsilon_{\mathrm{II}}^v + \varepsilon_{\mathrm{III}}^v) \, \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \varepsilon_{\mathrm{II}}^v + \varepsilon_{\mathrm{III}}^v} \qquad \text{(coefficient de } \boldsymbol{G}\text{)}$$

$$K_1 = \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - (1 - \varepsilon_{\mathrm{I}}^v) \, \partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \varepsilon_{\mathrm{I}}^v \, \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \varepsilon_{\mathrm{II}}^v + \varepsilon_{\mathrm{III}}^v} \qquad \text{(coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}^v\text{)}$$

$$K_2 = -\rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \varepsilon_{\mathrm{II}}^v + \varepsilon_{\mathrm{III}}^v} \qquad \text{(coefficient de } (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^2\text{)}$$

Remarque – Noter que contrairement au tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ [12], l'utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ n'est soumise à aucune restriction ni sur les déformations ni sur les mouvements. Cette loi de comportement est donc *a fortiori* valable quand les déformations sont petites, c'est-à-dire quand $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$. Ce cas particulier sera détaillé plus loin [sec. 4.4 p. 65].

2.3.4 Conclusion sur les lois élastiques avec un tenseur de déformation objectif

Bien que d'expressions différentes, les formes générales de loi de comportement mécanique de milieux continus élastiques isotropes présentées précédemment sont strictement équivalentes : elles expriment toutes que la loi de comportement mécanique d'un solide élastique isotrope est complètement déterminée par la connaissance de l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m en fonction des variables d'état, c'est-à-dire la température T et les invariants fondamentaux d'un tenseur de déformation objectif choisi parmi $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{M}$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}^v$. Leur forme générale est :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0^X \boldsymbol{G} + K_1^X \boldsymbol{X} + K_2^X \boldsymbol{X}^2$$

où les fonctions d'état K_0^X, K_1^X et K_2^X sont connues quand la fonction d'état ψ^m est connue.

Remarques – La puissance de $\boldsymbol{X}$ ne peut dépasser 2 car le théorème de Cayley-Hamilton implique que toute puissance supérieure peut se ramener à une expression en $\boldsymbol{X}$ à la puissance 0, 1 ou 2.

Comme on peut le constater, quel que soit le tenseur de déformation objectif utilisé, la loi de comportement mécanique des solides élastiques isotropes est *a priori* « non linéaire », c'est-à-dire que la relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et un tenseur de déformation objectif n'est pas affine. Une « linéarité » ne serait possible que pour des expressions très particulières de l'énergie libre massique de Helmholtz telles que K_0^X soit une fonction affine de X_{I}, que K_1^X soit une constante et que K_2^X soit nul.

En outre, si une loi de comportement mécanique se trouvait être « linéaire » pour un certain tenseur de déformation et pour une certaine expression de l'énergie libre en fonction de la température et des invariants de déformation, elle ne le serait plus en utilisant un autre tenseur de déformation. Puisqu'il n'y a aucune raison physique de choisir un tenseur de déformation plutôt qu'un autre, la « linéarité » d'une loi de comportement n'a pas de signification physique.

2.3.5 Utilisation de tenseurs de déformation non objectifs

On se propose ici de faire le lien avec des usages que l'on peut trouver dans la littérature spécialisée. Pour des raisons historiques, certains auteurs continuent à utiliser des tenseurs de déformation non objectifs (dits aussi « lagrangiens »), pour mesurer la déformation actuelle. Il s'agit

[12] Le tenseur des « petites perturbations » est défini en cinématique par $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym\,grad}_L \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G}$ où $\boldsymbol{u}$ est le champ des déplacements $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_0$. Voir le rappel en section 4.1 [p. 59]

principalement des tenseurs de déformation $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{C}}$, $\boldsymbol{L} = \mathbf{ln}\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G})$. Les relations entre les tenseurs de déformation objectifs et non objectifs sont :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{R}^\top \quad ; \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R}^\top \quad ; \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R}^\top \quad ; \quad \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{R}^\top \tag{2.15}$$

où $\boldsymbol{R}(P,t) \in \mathbb{Q}_{3+}$ est un champ de rotations actuelles, non objectif, issu de la décomposition polaire (à gauche ou à droite) du gradient de la transformation actuelle $\boldsymbol{F}$ [13] : $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R}$.

On déduit aisément des relations (2.15) [p. 27] que les invariants et les valeurs propres des tenseurs de déformation $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont identiques. Il en est de même pour $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{U}$, pour $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{L}$, pour $\frac{1}{2}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{G})$ et $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G})$ et enfin pour $\boldsymbol{\varepsilon}^u = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G}$. Les expressions de l'énergie libre de Helmholtz en fonction des invariant fondamentaux de ces tenseurs sont donc les mêmes pour ces couples de tenseurs :

$$f_\psi^C \equiv f_\psi^B \quad ; \quad f_\psi^U \equiv f_\psi^V \quad ; \quad f_\psi^L \equiv f_\psi^M \quad ; \quad f_\psi^{\varepsilon^u} \equiv f_\psi^{\varepsilon^u} \quad ; \quad \cdots$$

En revanche, les directions propres des tenseurs de déformation non objectifs sont celles des tenseurs de déformation objectifs tournées par la rotation non objective $\boldsymbol{R}^\top$.

Utilisation des tenseurs de déformation $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{L}$

On peut donc écrire des lois de comportement élastique isotrope, en utilisant des tenseurs de déformation non objectifs. Par exemple, on déduit la loi de comportement avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{C}$ à partir de la loi de comportement mécanique avec $\boldsymbol{B}$ [éq. (2.9) p. 21] :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2\rho_0}{\sqrt{C_{\mathrm{III}}}} \left(C_{\mathrm{III}}\, \partial_{C_{\mathrm{III}}} f_\psi^C\, \boldsymbol{G} + (\partial_{C_{\mathrm{I}}} f_\psi^C + C_{\mathrm{I}}\, \partial_{C_{\mathrm{II}}} f_\psi^C) \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{R}^\top - \partial_{C_{\mathrm{II}}} f_\psi^C\, \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{C}^2 \cdot \boldsymbol{R}^\top \right) \\ \underbrace{\boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R}}_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} &= \frac{2\rho_0}{\sqrt{C_{\mathrm{III}}}} \left(C_{\mathrm{III}}\, \partial_{C_{\mathrm{III}}} f_\psi^C\, \boldsymbol{G} + (\partial_{C_{\mathrm{I}}} f_\psi^C + C_{\mathrm{I}}\, \partial_{C_{\mathrm{II}}} f_\psi^C)\, \boldsymbol{C} - \partial_{C_{\mathrm{II}}} f_\psi^C\, \boldsymbol{C}^2 \right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R}$ est un tenseur du second ordre symétrique non objectif qui peut éventuellement être appelé « tenseur des contraintes tourné par $\boldsymbol{R}^\top$ ».

De même, le lecteur vérifiera aisément à partir de la loi de comportement écrite avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ [éq. (2.12) p. 23], que la loi de comportement élastique isotrope avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$ s'écrit :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R} = \frac{\rho_0}{U_{\mathrm{III}}} \left(U_{\mathrm{III}}\, \partial_{U_{\mathrm{III}}} f_\psi^U\, \boldsymbol{G} + (\partial_{U_{\mathrm{I}}} f_\psi^U + U_{\mathrm{I}}\, \partial_{U_{\mathrm{II}}} f_\psi^U) \boldsymbol{U} - \partial_{U_{\mathrm{II}}} f_\psi^U\, \boldsymbol{U}^2 \right) \tag{2.17}$$

On laisse le soin au lecteur de passer de la même manière de la loi de comportement mécanique avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$ [th. 2.6 p. 24] à celle avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{L}$.

Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G})$

L'utilisation du tenseur de déformation non objectif $\boldsymbol{E}$ est encore très populaire car il est à l'origine du traditionnel et historique tenseur des « petites perturbations » [14] $\boldsymbol{\varepsilon}$. On peut déduire

[13] On rappelle que $\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{f} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ où $\boldsymbol{f}$ est la description de Lagrange du mouvement et $\boldsymbol{u}$ est la description de Lagrange du déplacement actuel.

[14] Voir le rappel en section 4.1 [p. 59].

algébriquement la loi de comportement avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{E}$ à partir de la loi de comportement avec le tenseur $\boldsymbol{C}$ de la manière suivante :

Les relations entre les invariants fondamentaux de $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{E}$ sont :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} = \boldsymbol{G} + 2\boldsymbol{E} \quad &\Rightarrow \quad C_{\mathrm{I}} = 3 + 2E_{\mathrm{I}} \qquad C_{\mathrm{II}} = 3 + 4E_{\mathrm{I}} + 4E_{\mathrm{II}} \qquad C_{\mathrm{III}} = 1 + 2E_{\mathrm{I}} + 4E_{\mathrm{II}} + 8E_{\mathrm{III}} \\
&\Leftrightarrow \quad E_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}(-3 + C_{\mathrm{I}}) \quad E_{\mathrm{II}} = \frac{1}{4}(3 - 2C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}}) \quad E_{\mathrm{III}} = \frac{1}{8}(-1 + C_{\mathrm{I}} - C_{\mathrm{II}} + C_{\mathrm{III}})
\end{aligned}$$

Puisque $\psi^m = f_\psi^C(T, C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{III}}) = f_\psi^E(T, E_{\mathrm{I}}, E_{\mathrm{II}}, E_{\mathrm{III}})$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\partial_{C_{\mathrm{I}}} f_\psi^C &= \partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{I}}} E_{\mathrm{I}} + \partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{I}}} E_{\mathrm{II}} + \partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{I}}} E_{\mathrm{III}} &&= \frac{1}{2}\,\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E - \frac{1}{2}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + \frac{1}{8}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \\
\partial_{C_{\mathrm{II}}} f_\psi^C &= \partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{II}}} E_{\mathrm{I}} + \partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{II}}} E_{\mathrm{II}} + \partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{II}}} E_{\mathrm{III}} &&= 0 + \frac{1}{4}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E - \frac{1}{8}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \\
\partial_{C_{\mathrm{III}}} f_\psi^C &= \partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{III}}} E_{\mathrm{I}} + \partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{III}}} E_{\mathrm{II}} + \partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \, \partial_{C_{\mathrm{III}}} E_{\mathrm{III}} &&= 0 + 0 + \frac{1}{8}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E
\end{aligned}$$

En remplaçant dans la loi de comportement écrite avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{C}$ [éq. (2.16) p. 27], il vient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1 + 2E_{\mathrm{I}} + 4E_{\mathrm{II}} + 8E_{\mathrm{III}}}}{2\rho_0} \underbrace{\boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R}}_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{1 + 2E_{\mathrm{I}} + 4E_{\mathrm{II}} + 8E_{\mathrm{III}}}{8}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \, \boldsymbol{G} + \\
&\left(\frac{1}{2}\,\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E - \frac{1}{2}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + \frac{1}{8}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E + (3 + 2E_{\mathrm{I}})\left(\frac{1}{4}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E - \frac{1}{8}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\right)\right)(\boldsymbol{G} + 2\boldsymbol{E}) - \\
&\qquad\qquad \left(\frac{1}{4}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E - \frac{1}{8}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\right)(\boldsymbol{G} + 2\boldsymbol{E})^2
\end{aligned}$$

Après simplification, il reste :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1 + 2E_{\mathrm{I}} + 4E_{\mathrm{II}} + 8E_{\mathrm{III}}}}{\rho_0}\,\overline{\boldsymbol{\sigma}} = &\left(\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E + E_{\mathrm{I}}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + (E_{\mathrm{II}} + 2E_{\mathrm{III}})\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\right)\boldsymbol{G} + \\
&\left(2\,\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E + (2E_{\mathrm{I}} - 1)\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E - E_{\mathrm{I}}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\right)\boldsymbol{E} + \left(-2\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + \partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\right)\boldsymbol{E}^2
\end{aligned} \tag{2.18}$$

où $\sqrt{1 + 2E_{\mathrm{I}} + 4E_{\mathrm{II}} + 8E_{\mathrm{III}}} = K_\nu$ est la dilatation volumique actuelle et où $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R}$.

Second « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff

Plutôt que d'introduire le tenseur $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R}$, les auteurs qui utilisent les tenseurs de déformation non objectifs [15] introduisent un autre tenseur : le second « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff [16], qui est symétrique mais dont l'interprétation physique est pour le moins obscure. Il est « défini » par l'une des expressions suivantes :

$$\boldsymbol{S} = K_\nu \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} = \det \boldsymbol{F}\, \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} = \det \boldsymbol{F}\, \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \tag{2.19}$$

[15] Et plus particulièrement le tenseur $\boldsymbol{F}$, non symétrique, non objectif et qui prend pour valeur un tenseur orthogonal quelconque quand il n'y a pas de déformation.

[16] D'autres « tenseurs des contraintes » artificiels sont introduits dans d'autres contextes : $\boldsymbol{\tau} = K_\nu \boldsymbol{\sigma}$ (dans l'expression lagrangienne de la conservation de l'énergie) et $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{F}^{-\top}$ (dans l'expression lagrangienne de l'équation de mouvement) [note 3 p. 3]. Le tenseur introduit ici est $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Pi}$.

On obtient alors de nouvelles formes de la loi de comportement mécanique des milieux continus élastiques isotropes avec les tenseurs de déformation non objectifs.

Par exemple, en utilisant la « définition » (2.19), la loi de comportement avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{C}$ [éq. (2.16) p. 27] devient :

$$\boldsymbol{S} = 2\,\rho_0 \left(C_{\mathrm{III}}\,\partial_{C_{\mathrm{III}}} f_\psi^C\,\boldsymbol{C}^{-1} + (\partial_{C_{\mathrm{I}}} f_\psi^C + C_{\mathrm{I}}\,\partial_{C_{\mathrm{II}}} f_\psi^C)\boldsymbol{G} - \partial_{C_{\mathrm{II}}} f_\psi^C\,\boldsymbol{C} \right)$$

que l'on peut encore transformer avec l'identité de Cayley-Hamilton : $C_{\mathrm{III}}\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^2 - C_{\mathrm{I}}\boldsymbol{C} + C_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G}$.

De même, à partir de la loi de comportement avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{E}$ [éq. (2.18) p. 28], il vient :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} = \rho_0 \left(\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E + E_{\mathrm{I}}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + (E_{\mathrm{II}} + 2E_{\mathrm{III}})\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \right) \boldsymbol{U}^{-2} + \\ \left(2\,\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E + (2\,E_{\mathrm{I}} - 1)\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E - E_{\mathrm{I}}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \right) \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{U}^{-1} + \\ \left(-2\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + \partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E \right) \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \frac{1}{4}(\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{G})^2 \cdot \boldsymbol{U}^{-1}\end{aligned}$$

Après utilisation de l'identité de Cayley-Hamilton et simplification, il reste :

$$\boldsymbol{S} = \rho_0 \left((\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E + E_{\mathrm{I}}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + E_{\mathrm{II}}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E)\,\boldsymbol{G} - (\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + E_{\mathrm{I}}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E)\,\boldsymbol{E} + \partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\,\boldsymbol{E}^2 \right) \tag{2.20}$$

Conclusion sur l'utilisation des tenseurs de déformation non objectifs

L'utilisation de tenseurs de déformation non objectifs, dans la loi de comportement mécanique des milieux continus élastiques isotropes fait apparaître dans l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur orthogonal $\boldsymbol{R}$, non objectif, issu de la décomposisiton polaire du gradient lagrangien des positions actuelles $\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{x}_t$, lui aussi non objectif. Le tenseur orthogonal $\boldsymbol{R}$ peut prendre une valeur quelconque sans changer les déformations, c'est-à-dire sans changer les dilatations linéiques, surfaciques, volumiques, les distorsions angulaires ou stériques de directions matérielles. Dans ces expressions de la loi de comportement élastique isotrope, le tenseur $\boldsymbol{R}$ est masqué par l'introduction de nouveaux « tenseurs des contraintes », groupements de termes symétriques mais non objectifs : soit $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ qui est une rotation par $\boldsymbol{R}^\top$ [17] du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, ou bien encore le second « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S}$ dénué de signification physique.

Quel que soit le tenseur de déformation utilisé pour décrire les déformations actuelles, toutes ces expressions de la loi de comportement élastique isotrope sont équivalentes, car on peut les déduire les unes des autres par des calculs algébriques. Elles sont toutes une conséquence de la nullité de la dissipation intrinsèque et du fait que le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état, c'est-à-dire qu'elles sont toutes des lois de comportement élastique.

2.4 Quelques modèles couramment rencontrés dans les codes de calcul

En première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 2.5 [p. 32] sans nuire à la compréhension de la suite. Historiquement, les tenseurs de déformation non objectifs (dits

[17] Pour une déformation donnée, cette rotation change avec l'observateur utilisé.

aussi « lagrangiens ») ont été les premiers à être introduits pour décrire les déformations sans restrictions cinématiques (« grandes déformations »). Dans les codes de calcul spécialisés en mécanique des solides déformables, on trouve donc encore couramment des lois de comportement élastique isotrope et le plus souvent isotherme ($T = T_0$, la température n'est plus une variable d'état [18]), dites « hyperélastiques » [19], écrites avec des tenseurs de déformation non objectifs et dont le comportement dans certains mouvements est parfois physiquement étrange. Dans cette section, on en cite quelques unes.

2.4.1 Le modèle de Piola-Kirchhoff

Ce modèle utilise le tenseur de déformation non objectif $\boldsymbol{E}$ et les variables d'état retenues sont E_{I} et E_{II} [20]. La fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz proposée dans ce modèle est la suivante :

$$f_\psi^E = \frac{1}{2\rho_0}\left(\lambda E_{\mathrm{I}}^2 + 2\mu\left(E_{\mathrm{I}}^2 - 2E_{\mathrm{II}}\right)\right)$$

où μ et λ sont des constantes caractéristiques du matériau. En utilisant la loi de comportement avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{E}$ [éq. (2.20) p. 29], on trouve :

$$\boldsymbol{S} = \lambda\, E_{\mathrm{I}}\, \boldsymbol{G} + 2\mu\, \boldsymbol{E} \tag{2.21}$$

où $\boldsymbol{S}$ est le second « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff [éq. (2.19) p. 28].

Remarque – La principale motivation pour proposer cette expression de l'énergie libre massique de Helmholtz est d'obtenir une relation affine entre $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{E}$ ressemblant à celle habituellement présentée en élasticité classique (on remplace $\boldsymbol{\varepsilon}$ par $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ par $\boldsymbol{S}$, [chapitre 4 p. 59]). On peut préférer des motivations plus physiques pour donner une expression de l'énergie libre massique.

Par ailleurs, cette loi de comportement présente un grave défaut de vraisemblance physique : pour un mouvement de contraction uniaxiale dans une direction fixe $\boldsymbol{e}_1$ [21], la variation de la contrainte de Cauchy dans la direction $\boldsymbol{e}_1$ en fonction de la contraction uniaxiale n'est pas monotone et, pour des grandes contractions uniaxiales, la contrainte normale dans la direction $\boldsymbol{e}_1$ tend vers 0 alors qu'elle devrait tendre vers $-\infty$. En effet, dans un tel mouvement, la position actuelle des particules de position initiale $\boldsymbol{x}_0$ est : $\boldsymbol{x}_t = k x_{01}\boldsymbol{e}_1 + x_{02}\boldsymbol{e}_2 + x_{03}\boldsymbol{e}_3$ avec $k > 0$ (quand $k < 1$ c'est une contraction uniaxiale et quand $k > 1$ c'est une dilatation uniaxiale). On a alors :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + (k-1)\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + (k^2-1)\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G}) = \frac{k^2-1}{2}\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1$$

En appliquant la loi de comportement (2.21) [p. 30], il vient :

$$\boldsymbol{S} = \lambda\, E_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} + 2\mu\boldsymbol{E} = \frac{k^2-1}{2}\Big((\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 + \lambda\,\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2 + \lambda\,\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3\Big)$$

Enfin, en utilisant la définition de $\boldsymbol{S}$ donnée en (2.19) [p. 28], il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}^\top = \frac{k^2-1}{2}\Big(k(\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 + \frac{\lambda}{k}\,\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2 + \frac{\lambda}{k}\,\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3\Big)$$

On constate que pour de grandes contractions uniaxiales dans la direction $\boldsymbol{e}_1$, c'est-à-dire quand $k \to 0$, la contrainte σ_{11} tend vers 0. Le comportement en grande compression uniaxiale de cette loi de comportement élastique isotrope paraît bien peu physique.

[18] L'énergie libre de Helmholtz est alors appelée « énergie de déformation » et est souvent notée W.

[19] L'« hyperélasticité » serait l'élasticité isotherme en « grandes déformations ».

[20] La température T et le troisième invariant E_{III} sont ignorés ; par ailleurs la signification cinématique des deux invariants retenus est obscure.

[21] Ce mouvement est appelé essai œdométrique par les expérimentateurs en mécanique des sols.

2.4.2 Le modèle « néo-Hookien »

Ce modèle utilise le tenseur de déformation non objectif $\boldsymbol{C}$ et l'invariant C_{I} comme seule variable d'état [22]. La fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz proposée est la suivante :

$$f_{\psi}^{C} = a(C_{\mathrm{I}} - 3) \tag{2.22}$$

En utilisant la loi de comportement avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{C}$ [éq. (2.16) p. 27], la loi de comportement mécanique serait :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\,a\,\rho_0}{\sqrt{C_{\mathrm{III}}}}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{R}^{\top}$$

Remarque – S'il n'y a pas de déformation ($\boldsymbol{C} = \boldsymbol{G}$ et $C_{\mathrm{III}} = 1$), la contrainte de Cauchy vaut $2\,a\,\rho_0\,\boldsymbol{G}$.

2.4.3 Le modèle d'Ogden

Contrairement aux deux modèles précédents dont les variables d'état choisies sont des invariants fondamentaux de tenseurs de déformation, le modèle d'Ogden utilise comme variables d'état scalaires les dilatations linéiques principales λ_1, λ_2 et λ_3 (la température est ignorée) [23]. La fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz proposée est de la forme :

$$\overline{f}_{\psi} = \frac{1}{\rho_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{\alpha_k}(\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3)$$

où les coefficients μ_k et α_k sont des constantes caractéristiques du matériau. Cette expression de l'énergie libre d'un milieu élastique isotrope est assez générale. Elle ne fait pas explicitement référence aux tenseurs de déformation objectifs ou non puisque les valeurs propres des tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont les mêmes. Elle peut toutefois conduire à des comportements élastiques isotropes exotiques si l'on ne prend pas garde au choix des coefficients α_k et μ_k.

Remarques – Pour des α_k non entiers, l'expression de $\overline{f}_{\psi}$ en fonction des invariants fondamentaux d'un tenseur de déformation est très compliquée [24]. On ne peut donc pas aisément déduire la loi de comportement élastique isotrope de ce modèle en transformant algébriquement les lois écrites précédemment car elles utilisent comme variables d'état les invariants d'un tenseur de déformation et non ses valeurs propres. Pour écrire la loi de comportement quand les α_k sont non entiers, il faut reprendre le raisonnement de construction de la loi en prenant comme variables d'état les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 puis réanalyser les conséquences de la nullité de la dissipation intrinsèque exprimée avec ces variables d'état.

En revanche, pour des α_k entiers, l'écriture de $\overline{f}_{\psi}$ en fonction des invariants de $\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{V}$ est toujours possible, même si elle peut être parfois compliquée.

Par ailleurs, l'identification expérimentale des coefficients α_k et μ_k est très délicate et conduit facilement à des comportements exotiques en dehors de l'intervalle d'identification en raison du nombre d'extrema des fonctions polynomiales qui peut être élevé, certains d'entre eux pouvant être en dehors de l'intervalle d'identification.

[22] La température T et les invariants C_{II} et C_{III} sont ignorés ; la signification cinématique de C_{I} est obscure.

[23] Le choix de ce triplet de variables d'état réduites est légitime car on montre en algèbre tensorielle l'équivalence (compliquée) entre les triplets $\{V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}}\}$ et $\{\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3\}$ [voir note 24].

[24] Les expressions des valeurs propres classées en fonction des invariants d'un tenseur sont données en annexe du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

2.4.4 Le modèle de Mooney-Rivlin

L'énergie libre massique de Helmholtz proposée est [25] (la température est ignorée) :

$$f_\psi^B = a\,(B_{\mathrm{I}}\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{1}{3}} - 3) + b\,(B_{\mathrm{II}}\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{2}{3}} - 3)$$

où a et b sont caractéristiques du matériau.

Remarque – Le terme $B_{\mathrm{I}}\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{1}{3}}$ a une interprétation cinématique : $B_{\mathrm{I}}\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{1}{3}} = 3\,\delta_{max}^{s\,\frac{2}{3}}$ où δ_{max}^s est la distorsion stérique maximale actuelle en la particule. Le premier terme de f_ψ^B traduit donc une énergie de distorsion, nulle dans toute déformation sphérique. En revanche, la signification cinématique du second terme est obscure, il est aussi nul dans toute déformation sphérique. Par conséquent, dans ce modèle, les déformations sphériques ne font pas varier l'énergie libre de Helmholtz. On ajoute parfois un terme à $\overline{f}_\psi$ pour pallier cet inconvénient.

On en déduit la loi de comportement à partir de la loi de comportement avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ [éq. (2.9) p. 21] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}}\left((-\frac{a}{3}B_{\mathrm{I}}\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{1}{3}} - \frac{2b}{3}B_{\mathrm{II}}\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{2}{3}})\,\boldsymbol{G} + (a\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{1}{3}} + b\,B_{\mathrm{I}}\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{2}{3}})\,\boldsymbol{B} - b\,B_{\mathrm{III}}^{-\frac{2}{3}}\,\boldsymbol{B}^2\right) \tag{2.23}$$

2.4.5 Conclusion

La liste de modèles élastiques isotropes présentée dans cette section est loin d'être exhaustive ; le lecteur pourra en trouver quantité d'autres dans la littérature spécialisée ou dans les codes de calcul. Il est important de noter que, à l'instar des quelques modèles évoqués dans cette section, beaucoup de propositions d'expressions d'énergie libre massique de Helmholtz (appelée « énergie de déformation » quand la température est ignorée) en fonction des variables d'état sont des expressions polynomiales le plus souvent suggérées pour des raisons calculatoires qui n'ont pas toujours de motivation physique claire.

Pour construire des modèles de comportement, il est préférable de construire des expressions de fonctions d'état physiquement raisonnées (on donne un exemple de construction de modèle élastique isotrope dans le chapitre 3 [p. 43]) plutôt que de prendre des fonctions polynomiales plus ou moins arbitraires des invariants fondamentaux (ou des valeurs propres) de tenseurs de déformation, qui risquent de conduire à des comportements physiquement peu vraisemblables.

2.5 Critères de limite élastique

Le modèle élastique isotrope convient pour modéliser correctement le comportement macroscopique d'un grand nombre de matériaux métalliques (polycristallins sans orientation préférentielle des cristaux), des matériaux issus de la chimie organique (matières plastiques, polymères amorphes) et les verres, tant que les déformations imposées par les sollicitations ne dépassent pas certaines limites [26]. Dans cette section on s'intéresse à ces limites.

[25] Certains auteurs remplacent les invariants de $\boldsymbol{B}$ par les invariants (égaux) de $\boldsymbol{C}$. Dans la loi de comportement déduite [éq. (2.23)], il faut alors remplacer $\boldsymbol{B}$ par $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ par $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$

[26] Ce qui ne signifie pas forcément que les déformations doivent rester « petites ».

2.5.1 Considérations microscopiques

L'observation microscopique ainsi que des simulations numériques d'assemblages d'atomes ou de chaînes polymériques montrent que le comportement élastique cesse dès que des réorganisations ou des ruptures de liaisons interatomiques se produisent dans les matériaux soumis à des déformations suffisantes :

- dans un matériau métallique polycristallin, des réorganisations de liaisons se produisent en premier lieu dans les « joints de grains » [27] puis dans les monocristaux (« grains ») eux-mêmes (dislocations de différentes natures, dans des plans privilégiés du monocristal) ;
- dans les polymères, les réorganisations se font principalement dans les liaisons (« ponts ») entre les chaînes polymériques ;
- dans les verres (liquides figés sans structures régulières), les réorganisations sont rares et la limite d'élasticité est souvent synonyme de limite de rupture.

Quel que soit le type de matériau, les réorganisations de liaisons interatomiques sont provoquées par des changements d'angle entre les liaisons (distorsions entre directions matérielles) imposés par la déformation. Les déformations sphériques (dilatations ou contractions sphériques) ne changent pas les angles et n'induisent donc pas de réorganisation dans les liaisons. En revanche, les ruptures de liaisons sont provoquées par des allongements excessifs de liaisons.

2.5.2 Point de vue macroscopique

Une modélisation macroscopique continue de la matière ne peut pas prendre en compte la structure atomique microscopique puisqu'elle l'ignore par définition. On peut toutefois tirer des conclusions macroscopiques à partir des considérations microscopiques précédentes :

1. Une déformation sphérique ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0$) est une déformation qui n'induit aucune variation d'angle entre les directions matérielles. Elle ne peut donc pas provoquer de réorganisation de liaisons interatomiques. En revanche, une dilatation sphérique ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 1$) peut être à l'origine de ruptures de liaisons.
2. Seules les déformations induisant des distorsions (variations d'angles entre directions matérielles) peuvent provoquer des réorganisations de liaisons interatomiques menant à l'inélasticité, si ces distorsions sont suffisantes.
3. Une dilatation linéique dans la direction d'une liaison interatomique peut provoquer une rupture de liaison, si elle est suffisante.

L'orientation des structures microscopiques (directions des liaisons et des plans de dislocation) par rapport à un tenseur de déformation actuel (concept macroscopique) est par définition ignorée dans une vision macroscopique continue de la matière. Macroscopiquement, on devra donc se contenter de considérer des maximums de distorsion ou de dilatation linéique en une particule, sans savoir si les directions matérielles macroscopiques pour lesquelles ces maximums sont atteints coïncident ou non avec avec les directions critiques des microstructures.

Vocabulaire phénoménologique

Quand le nombre de ruptures de liaisons est suffisant pour obtenir des effets macroscopiquement observables, on dit que le milieu continu est *endommagé*. Quand le nombre de réorganisations

[27] Zone de liaisons interatomiques désordonnées à la jonction entre deux monocristaux (« grains ») d'orientation cristalline différente.

de liaisons est suffisant pour obtenir des effets macroscopiquement observables, on dit que le milieu continu est *plastifié*.

Dans une observation macroscopique, il est souvent difficile, voire impossible, de savoir si un seul ou les deux phénomènes se produisent : l'endommagement (ruptures de liaisons) est soupçonné lorsque l'on constate que la raideur du matériau a diminué, et la plastification (décalage de liaisons) est soupçonnée lorsque des déformations résiduelles subsistent après suppression des sollicitations.

Rappels de cinématique

Soit une particule P où les dilatations linéiques principales actuelles (c'est-à-dire les valeurs propres des tenseurs de déformation $\boldsymbol{V}$ ou $\boldsymbol{U}$) sont $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$; en cinématique des milieux continus [note 2 p. 3], on définit les grandeurs cinématiques suivantes :

1. *La distorsion angulaire maximale* de deux directions matérielles initialement orthogonales en une particule :

$$\delta^a_{max} = \mathrm{Max}\Big(\frac{1}{\sin\alpha_t}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\Big) \geqslant 1 \tag{2.24}$$

   Le Max est pris sur l'ensemble des couples de directions matérielles initialement orthogonales issues de la particule P. Dans le cas général ($\lambda_1 \neq \lambda_3$), ce maximum est atteint par un couple unique [28] de directions matérielles initialement orthogonales issues de P.
2. *La distorsion stérique maximale* de trois directions matérielles initialement orthogonales en une particule :

$$\delta^s_{max} = \mathrm{Max}\Big(\frac{1}{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{9}\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}\,(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3)^{-1} \geqslant 1 \tag{2.25}$$

   Le Max est pris sur l'ensemble des triplets de directions matérielles initialement orthogonales issues de la particule P. Ce maximum est atteint par une infinité [29] de triplets de directions matérielles initialement orthogonales issues de P.
3. *La dilatation linéique maximale* d'une direction matérielle issue d'une particule :

$$K_{l\,max} = \mathrm{Max}\big(K_l(\boldsymbol{u})\big) = \lambda_1$$

   Le Max est pris sur l'ensemble des directions matérielles issues de la particule P. Ce maximum est atteint par la direction matérielle dont la direction actuelle est confondue avec la direction propre de $\boldsymbol{V}$ associée à la plus grande valeur propre λ_1 (ou dont la direction de référence est confondue avec la direction propre de $\boldsymbol{U}$ associée à la valeur propre λ_1).

Enfin, on rappelle que toute déformation est décomposable de manière unique et commutative en une partie déformation sphérique et en une partie déformation isovolume [30]. Les distorsions maximales (2.24) et (2.25) peuvent aussi bien s'exprimer en remplaçant les λ_i par les valeurs propres λ'_i de la partie isovolume car $\lambda'_i = \lambda_i\,{K_v}^{-1/3}$ et $\lambda'_1\,\lambda'_2\,\lambda'_3 = 1$.

[28] On connaît les directions de ce couple unique de directions matérielles, mais on ne peut pas affirmer s'il coïncide ou non avec des directions critiques de la microstructure en cette particule.

[29] L'existence d'une infinité de tels triplets de directions matérielles augmente les chances que l'un d'entre eux coïncide ou presque aux directions critiques de la microstructure en cette particule.

[30] Cette décomposition s'écrit différemment selon le tenseur de déformation utilisé : elle est multiplicative pour les tenseurs $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{U}$; elle est additive pour les tenseurs $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{L}$; elle est d'expression plus compliquée pour les autres tenseurs de déformation. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, section 4.10.3 [note 2 p. 3].

2.5.3 Critères portant sur des caractéristiques de la déformation

Puisque dans un milieu continu isotrope on ignore par définition les orientations du tenseur de déformation par rapport aux structures microscopiques, on ne peut que fixer une borne supérieure à une distorsion maximale (angulaire ou stérique) de la déformation actuelle pour garantir qu'aucun réorganisation de liaison ne se produit. De même, on ne peut que fixer une borne supérieure à la dilatation linéique maximale pour garantir qu'aucune rupture de liaison ne se produit. Ces limites peuvent éventuellement être fonction de la température. Quoi qu'il en soit, on ne saura jamais si les directions matérielles pour lesquelles pour lesquelles ces limites sont atteintes, coïncident ou non avec les directions critiques des microstructures. Ce type de critère élastique est donc du type « prudent » : les ruptures ou les réarrangements de liaisons dont on veut se protéger ne se produisent qu'en cas de (presque) coïncidence.

Ces critères portant sur la déformation se présentent donc comme une frontière à ne pas dépasser dans l'espace des états $(T, X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{II}}, X_{\mathrm{III}})$.

2.5.4 Limitation de la distorsion angulaire maximale

Dans toute déformation non sphérique, il existe un couple unique de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion angulaire est maximale. On suppose qu'à partir d'une certaine distorsion angulaire, des réorganisations de liaisons interatomiques se produisent. Le critère de limite élastique s'écrit donc :

$$\delta^a_{max} \leqslant \delta^a_{lim} \qquad \text{où } \delta^a_{lim} \text{ est une caractéristique du matériau élastique isotrope.}$$

La distorsion angulaire maximale est une fonction des dilatations linéiques principales extrêmes λ_1 et λ_3 (valeurs propres extrêmes du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$, [éq. (2.24) p. 34]), elle peut donc s'exprimer en fonction des invariants V_{I}, V_{II} et V_{III}, mais avec des expressions compliquées [31].

On peut aussi exprimer la distorsion angulaire maximale en fonction des trois valeurs propres $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$ du tenseur de déformation $\boldsymbol{M} = \mathbf{Ln}\boldsymbol{V}$:

$$\delta^a_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{m_1 - m_3} + \mathrm{e}^{m_3 - m_1}\right) = \cosh(m_1 - m_3)$$

où m_1 et m_3 sont les valeurs propres extrêmes du tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$. La fonction cosh étant monotone croissante pour des arguments positifs ($m_1 \geqslant m_3$), ce critère de limite élastique revient à donner une limite à la différence entre les valeurs propres extrêmes du tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$:

$$m_1 - m_3 \leqslant m_{lim} \qquad \text{où } m_{lim} = \operatorname{Arccosh} \delta^a_{lim} \text{ est une caractéristique du matériau.}$$

Remarques pour les lecteurs initiés à la loi de Hooke – Dans les cours d'élasticité traditionnels, on présente habituellement des critères de limite élastique portant sur le tenseur des contraintes plutôt que sur le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$. Cette habitude est sans importance en élasticité classique de Hooke [32] isotherme puisque la loi de Hooke est une bijection $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$. L'un des critères

[31] L'expression des valeurs propres ordonnées d'un tenseur symétrique en fonction de ses invariants fondamentaux est donnée en annexe du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note1 p. 3].

[32] On montre plus loin [section 4.3 p. 62] que cette loi n'est pas thermodynamiquement admissible.

de limite élastique présenté classiquement est le *critère de Tresca*, qui limite l'écart entre les valeurs propres extrêmes du tenseur des contraintes $\sigma_1 - \sigma_3$, ce qui revient à limiter l'écart entre les valeurs propres extrêmes $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ de $\boldsymbol{\varepsilon}$. Le critère de limitation de la distorsion angulaire présenté dans cette section est donc un « critère de Tresca » appliqué au tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$. Ainsi présenté, le critère de limite élastique de Tresca classique apparaît clairement comme une surface limite définie dans l'espace des états isothermes $(\varepsilon_{\mathrm{I}}, \varepsilon_{\mathrm{II}}, \varepsilon_{\mathrm{III}})$ (ou bien des valeurs propres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$).

Lors du suivi numérique d'une évolution, l'utilisation de ce critère entraîne des bifurcations logiques gênantes car durant l'évolution d'une déformation, une valeur propre extrême peut devenir une valeur propre intermédiaire. On peut pallier cet inconvénient en utilisant le critère $\sqrt{1.5}\,\|\mathbf{dev}\boldsymbol{M}\| \leqslant m_{lim}$ (appelé *critère de Von Mises* quand il est appliqué au tenseur des contraintes), qui est un peu moins restrictif que le critère de Tresca, mais néanmoins assez proche avec un écart inférieur à 13.4% [(33)]. C'est en raison de cette commodité que, dans les codes de calcul, le critère de limite élastique de Von Mises est souvent préféré au critère de Tresca. Quand on utilise la (criticable) loi de Hooke, le scalaire $\sqrt{1.5}\,\|\mathbf{dev}\boldsymbol{\sigma}\| = 2\mu\,\sqrt{1.5}\,\|\mathbf{dev}\boldsymbol{\varepsilon}\|$ est appelé « contrainte équivalente » de Von Mises.

2.5.5 Limitation de la distorsion stérique maximale

Dans toute déformation en une particule, il existe une infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion stérique est maximale. On suppose qu'à partir d'une certaine distorsion stérique, des réorganisations de liaisons interatomiques se produisent. Le critère de limite élastique s'écrit donc :

$$\delta^s_{max}(P,t) \leqslant \delta^s_{lim} \qquad \text{où } \delta^s_{lim} \text{ est une caractéristique du matériau élastique isotrope.}$$

Le fait qu'il existe en une particule une infinité de triplets ayant la distorsion stérique maximale augmente les chances que l'un d'entre eux coïncide ou presque avec des directions critiques des microstructures.

Par ailleurs, il est à noter que limiter les distorsions stériques maximales revient à limiter aussi les distorsions angulaires maximales [(34)]. Ce critère englobe donc le précédent.

Contrairement à la distorsion angulaire, la distorsion stérique maximale en une particule s'exprime aisément en fonction des invariants du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ ou $\boldsymbol{B}$:

$$\delta^s_{max} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{K_v} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}^2)^{\frac{3}{2}}}{V_{\mathrm{III}}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(V_{\mathrm{I}}^2 - 2V_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}}}{V_{\mathrm{III}}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{B_{\mathrm{I}}{}^{\frac{3}{2}}}{B_{\mathrm{III}}{}^{\frac{1}{2}}}$$

En revanche, l'expression de la distorsion stérique maximale en fonction des invariants du tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{M}$ conduit à une expression très compliquée :

$$\begin{aligned}
\delta^s_{max} &= \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{K_v} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(\mathrm{e}^{2m_1}+\mathrm{e}^{2m_2}+\mathrm{e}^{2m_3})^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{M_{\mathrm{I}}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{\left(\mathrm{e}^{2g_1(M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}},M_{\mathrm{III}})}+\mathrm{e}^{2g_2(M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}},M_{\mathrm{III}})}+\mathrm{e}^{2g_3(M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}},M_{\mathrm{III}})}\right)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{M_{\mathrm{I}}}}
\end{aligned}$$

où les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont des expressions compliquées [note 31 p. 35].

(33) L'ensemble des tenseurs admissibles suivant le critère de Von Mises contient l'ensemble des tenseurs admissibles suivant le critère de Tresca. L'écart maximal entre les deux critères est l'écart de rayon entre un hexagone (critère de Tresca) et son cercle circonscrit (critère de Von Mises), qui est au plus $R\,(1-\frac{\sqrt{3}}{2}) \simeq 0.134\,R$.

(34) Certains maximums relatifs de la distorsion stérique sont des maximums de la distorsion angulaire. Voir l'annexe A.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3.]

2.5.6 Limitation de l'énergie interne de déformation isovolume

On peut choisir comme critère de limite élastique une borne supérieure pour la part d'énergie interne due à la partie isovolume de la déformation :

$e^m_{isov} \leqslant e^m_{lim}$ où e^m_{lim} est une caractéristique du matériau élastique isotrope.

Remarque pour les lecteurs initiés à la loi de Hooke – C'est cette démarche de décomposition de l'énergie interne [35] qui est utilisée en élasticité de Hooke traditionnelle pour présenter le critère de limite élastique de Von Mises (limitation de l'énergie de déformation isovolume). Ce critère ne protège donc que contre les réorganisations de liaisons car il ne limite pas les dilatations sphériques.

Ce type de critère en énergie ne peut être explicité que lorsque l'on connaît l'expression de l'énergie interne massique $e^m = f_e(T, \boldsymbol{X})$ en fonction des variables d'état, c'est-à-dire quand le modèle de comportement du matériau est complètement défini, contrairement aux deux critères précédents (section 2.5.4 [p. 35] et section 2.5.5 [p. 36]) qui sont des limitations purement cinématiques (elle ne portent que sur les déformations actuelles), indépendamment de l'expression des fonctions d'état en fonction de la température et de la déformation, et donc indépendamment de l'expression de la loi de comportement mécanique.

2.5.7 Limitation de la dilatation linéique

Les critères précédents ont essentiellement pour objectif de se protéger de la perte d'élasticité due à des réorganisations de liaisons intercorpusculaires, en limitant les distorsions maximales (angulaires ou stériques) en chaque particule. La limitation des dilatations linéiques a plutôt pour objectif de se protéger des ruptures de liaisons intercorpusculaires (perte d'élasticité par endommagement). On sait de la cinématique que la plus grande dilatation linéique dans une déformation en une particule est obtenue pour la direction matérielle principale associée à la plus grande dilatation linéique principale λ_1, c'est-à-dire la plus grande valeur propre du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ (ou $\boldsymbol{U}$). Un critère de limite élastique par endommagement est donc :

$\lambda_1(P,t) \leqslant \lambda_{lim}$ où λ_{lim} est une caractéristique du matériau élastique isotrope.

Vocabulaire – Quand il est appliqué au tenseur des contraintes (limitation de la plus grande valeur propre σ_1 du tenseur des contraintes), ce critère de limite élastique est appelé *critère de Rankine*.

Remarque – La plus grande dilatation linéique en une particule peut s'exprimer en fonction des invariants fondamentaux de $\boldsymbol{V}$ [36] :

$$\lambda_1 = \frac{V_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{2J}{3}\cos\frac{\phi}{3} \quad \text{où : } J = \sqrt{V_{\mathrm{I}}^2 - 3V_{\mathrm{II}}} > 0 \text{ et } \phi = \mathrm{Arccos}\frac{27V_{\mathrm{III}} - 9V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{II}} + 2V_{\mathrm{I}}^3}{2\left(V_{\mathrm{I}}^2 - 3V_{\mathrm{II}}\right)^{\frac{3}{2}}} \in [0;\pi]$$

On a donc $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos\frac{\phi}{3} \leqslant 1$. On est donc assuré que dans toute déformation :

$$\frac{V_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2J}{3} \leqslant \lambda_1 \leqslant \frac{V_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{2J}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \leqslant \frac{V_{\mathrm{I}}}{3} + k\frac{2J}{3} \quad \text{avec } 0,866 \leqslant k \leqslant 1$$

En prenant $k = 1$, on peut donc donner un critère basé sur les invariants d'expression plus simple (mais un peu plus restrictif) pour se protéger des dilatations linéiques excessives :

$$\frac{V_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{2\sqrt{V_{\mathrm{I}}^2 - 3V_{\mathrm{II}}}}{3} \leqslant \lambda_{lim} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{2\sqrt{B_{\mathrm{I}}^2 - 3B_{\mathrm{II}}}}{3} \leqslant {\lambda_{lim}}^2$$

[35] Dans les cours élémentaires, l'énergie interne est appelée « énergie de déformation » (évolution isotherme).

[36] Voir l'annexe A3 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

2.5.8 Conclusion sur les critères de limite élastique

Comme on peut le constater, il est possible de proposer différents critères macroscopiques de limite élastique en élasticité isotrope qui s'inspirent tous de considérations microscopiques. Faut-il limiter les distorsions angulaires, les distorsions stériques, des énergies de déformation isovolume ou des dilatations linéiques ? Ou plus prudemment, faut-il utiliser plusieurs critères à la fois ? Il semble difficile d'en décider. Cette indécision provient du fait que la mécanique des milieux continus ignore délibérément l'orientation des structures microscopiques de la matière. Un critère macroscopique ne peut donc que refléter grossièrement les réorganisations ou les ruptures de liaisons qui se produisent dans les structures microscopiques et qui sont pourtant la cause véritable de l'apparition de l'inélasticité.

Remarque – Dans les cours d'élasticité élémentaires, il est traditionnel de donner des critères de limite élastique portant sur le tenseur des contraintes de Cauchy plutôt que sur la déformation. Tant que l'on considère la loi de Hooke comme valable [37], les deux points de vue sont équivalents puisque cette loi postule une bijection entre le tenseur des contraintes et la déformation ($\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$). Toutefois, une telle bijection n'existe plus dès que les déformations et les mouvements ne sont plus restreints par les conditions de validité de $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour la mesure des petites déformations [38]. Les considérations microscopiques de la section 2.5.1 [p. 33] suggèrent qu'il est plus raisonnable de donner des critères en limites de déformation (limites en dilatation linéique et/ou en distorsion stérique ou angulaire).

Remarques sur l'essai de traction – Pour la détermination d'une limite élastique, l'expérimentation est le plus souvent limitée à un essai de traction isotherme, dans lequel la déformation est très particulière : la dilatation linéique principale dans la direction de traction λ_1 est dominante. Dans l'exploitation de cet essai, on n'évalue que rarement, voire jamais, les distorsions (angulaires ou stériques) maximales qui s'y produisent [39], alors que ce sont les causes véritables des réorganisations dans les liaisons interatomiques. En général, on suppose imprudemment que la contrainte normale limite trouvée dans un essai de traction, (avec la loi de Hooke $\sigma_1 = E\,\varepsilon_1 = E\,(\lambda_1 - 1)$ n'est fonction que de λ_1), est encore valable dans des sollicitations de nature différente où $\lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 1 - \nu\,(\lambda_1 - 1)$, et donc où les distorsions (stériques ou angulaires) sont différentes.

D'autre part, il se trouve que lors d'un essai de traction, on constate souvent (au moins dans les matériaux dits « ductiles ») une perte d'élasticité par plastification (présence d'une déformation résiduelle) avant une perte d'élasticité par endommagement (le module d'Young de la loi de Hooke reste le même après plastification). Cette constatation conduit souvent à préconiser un critère de limite élastique ne portant que sur la partie isovolume de la déformation [40] (par exemple le critère Tresca ou de Von Mises) [Remarques p. 35]. La partie sphérique de la déformation ne se trouve donc pas limitée par le critère. Cependant, dans des sollicitations plus générales qu'un essai de traction, il peut exister des zones du solide déformable où la partie sphérique de la déformation est dominante ; dans ces régions, des ruptures de liaisons peuvent se produire avant des réorganisations de liaisons (plastification) car les distorsions maximales y sont faibles. On assisterait à une rupture « fragile » pour le même matériau. La ductilité ou la fragilité, constatées empiriquement *dans un essai de traction*, ne semblent pas être des caractérisques de matériau, puisqu'elles apparaissent ou non suivant le type de déformation.

Enfin, on lit souvent que la perte d'élasticité a lieu lorsque la courbe $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ n'est plus linéaire. Cette perte de linéarité ne traduit qu'un écart au (criticable) modèle de Hooke et non nécessairement

[37] On montre en section 4.3 [p. 62] que cette loi n'est pas thermodynamiquement admissible.

[38] On rappelle que l'utilisation de $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme mesure des petites déformations est soumise à la condition cinématique $\|\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\| \ll 1$, qui implique que le mouvement vu par l'observateur utilisé est une quasi-translation. Hors de ce cas, la loi de comportement mécanique générale $\boldsymbol{\sigma} = K_0\boldsymbol{G} + K_1\boldsymbol{X} + K_2\boldsymbol{X}^2$, où les $K_\bullet$ sont des fonctions d'état, n'est ni affine ni inversible.

[39] Pour déterminer les distorsions, il faut mesurer une dilatation linéique transverse (en traction simple $\lambda_2 = \lambda_3$).

[40] Il est traduit en critère sur le déviateur des contraintes si on admet le modèle de Hooke.

une perte d'élasticité : il peut exister des courbes $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ non linéaires et néanmoins élastiques, c'est-à-dire avec une courbe de charge et de décharge confondues [section 9.5 p. 123].

Le choix d'un critère de limite élastique devrait être fait sur la base d'expérimentations qui évaluent les distorsions maximales et les dilatations linéiques maximales au moment de la perte d'élasticité [41], ou bien par une réglementation ou une norme (une protection plus juridique que scientifique !).

2.6 Loi incrémentale (« loi tangente »)

En première lecture, on peut ignorer cette section et poursuivre directement à la synthèse en section 2.7 [p. 42] sans nuire à la compréhension de la suite.

L'objectif de cette section est de comprendre le discours des praticiens de la « mécanique numérique », qui aiment donner une interprétation mécanique à certains algorithmes utilisés dans la résolution par ordinateur des systèmes d'équations non linéaires.

Dans beaucoup de codes de calcul, la recherche d'une solution *stationnaire* à un problème élastique se fait en résolvant une succession de problèmes de mécanique « linéarisés » avec de petits incréments de sollicitation progressifs qui évoluent en fonction d'un temps fictif jusqu'à la sollicitation désirée [42]. Puisque l'on cherche une solution stationnaire, on annule dans les équations toutes les dérivées particulaires des fonctions d'état et des variables d'état (et donc en particulier les accélérations). Cette évolution fictive est dite « quasi-statique ». Les solutions aux temps fictifs intermédiaires sont donc des solutions statiques (comme si l'évolution fictive était « infiniment lente » ou « en équilibre à chaque instant »).

En revanche, dans la résolution des problèmes *instationnaires* (on les appelle aussi *transitoires*), le temps est réel, aucune dérivée particulaire n'est annulée et les solutions aux temps intermédiaires ont un sens physique.

Que ce soit dans la recherche d'une solution stationnaire ou non, lorsqu'on utilise cette méthode de résolution incrémentale, on est amené à écrire une « loi de comportement tangente » en chaque instant (fictif ou réel) d'une évolution. Toutes les lois de comportement mécanique établies en utilisant un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$, choisi parmi $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{\varepsilon}^v$ ou autre, s'écrivent sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \boldsymbol{G} + K_1 \boldsymbol{X} + K_2 \boldsymbol{X}^2$$

où K_0, K_1 et K_2 sont des fonctions d'état connues des variables d'état $(T, X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{II}}, X_{\mathrm{III}})$.

La dérivée particulaire (temps fictif ou réel) du tenseur des contraintes s'écrit donc [43] :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{K}_0 \boldsymbol{G} + \dot{K}_1 \boldsymbol{X} + K_1 \dot{\boldsymbol{X}} + \dot{K}_2 \boldsymbol{X}^2 + K_2 \left(\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}\right) \tag{2.26}$$

[41] Les expérimentateurs qui se fient à la loi de Hooke confondent souvent perte d'élasticité et perte de la linéarité de la courbe $\sigma^1{}_1 = f(\varepsilon^1{}_1)$, niant ainsi la possibilité qu'une telle courbe puisse être différente d'une droite dans un comportement élastique !

[42] S'il existe plusieurs solutions, le choix arbitraire d'une évolution fictive détermine la solution qui sera trouvée.

[43] La « différentielle » (temporelle) $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}t$ est souvent appelée « accroissement de $\boldsymbol{\sigma}$ ».

où les dérivées particulaires des fonctions d'état K_i sont [44] :

$$\begin{aligned}\dot{K}_i &= \partial_T K_i\,\dot{T} + \partial_{X_\mathrm{I}} K_i\,\dot{X}_\mathrm{I} + \partial_{X_\mathrm{II}} K_i\,\dot{X}_\mathrm{II} + \partial_{X_\mathrm{III}} K_i\,\dot{X}_\mathrm{III}\\ &= \partial_T K_i\,\dot{T} + \partial_{X_\mathrm{I}} K_i\,\boldsymbol{G}:\dot{\boldsymbol{X}} + \partial_{X_\mathrm{II}} K_i\,(X_\mathrm{I}\,\boldsymbol{G}-\boldsymbol{X}):\dot{\boldsymbol{X}} + \partial_{X_\mathrm{III}} K_i\,(X_\mathrm{II}\,\boldsymbol{G}-X_\mathrm{I}\,\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2):\dot{\boldsymbol{X}}\end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées particulaires $\dot{K}_i$ dans l'équation (2.26), on peut la mettre sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T K_0\,\boldsymbol{G} + \partial_T K_1\,\boldsymbol{X} + \partial_T K_2\boldsymbol{X}^2)\,\dot{T} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X}):\dot{\boldsymbol{X}} \tag{2.27}$$

où $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ est le tenseur du quatrième ordre suivant (valeur actuelle au temps t fictif ou réel) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} = {}&(\partial_{X_\mathrm{I}} K_0 + X_\mathrm{I}\,\partial_{X_\mathrm{II}} K_0 + +X_\mathrm{II}\,\partial_{X_\mathrm{III}} K_0)\,\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{G} + (-\partial_{X_\mathrm{II}} K_0 - X_\mathrm{I}\,\partial_{X_\mathrm{III}} K_0)\,\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{X} + \partial_{X_\mathrm{III}} K_0\,\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{X}^2 +\\ &(\partial_{X_\mathrm{I}} K_1 + X_\mathrm{I}\,\partial_{X_\mathrm{II}} K_1 + X_\mathrm{II}\,\partial_{X_\mathrm{III}} K_1)\,\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{G} + (-\partial_{X_\mathrm{II}} K_1 - X_1\,\partial_{X_\mathrm{III}} K_1)\,\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X} + \partial_{X_\mathrm{III}} K_1\,\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X}^2 +\\ &(\partial_{X_\mathrm{I}} K_2 + X_\mathrm{I}\,\partial_{X_\mathrm{II}} K_2 + X_\mathrm{II}\,\partial_{X_\mathrm{III}} K_2)\,\boldsymbol{X}^2\otimes\boldsymbol{G} + (-\partial_{X_\mathrm{II}} K_2 - X_1\,\partial_{X_\mathrm{III}} K_2)\,\boldsymbol{X}^2\otimes\boldsymbol{X} + \partial_{X_\mathrm{III}} K_2\,\boldsymbol{X}^2\otimes\boldsymbol{X}^2 +\\ &K_1\,\boldsymbol{G}\boxtimes\boldsymbol{G} + K_2\,(\boldsymbol{X}\boxtimes\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}\boxtimes\boldsymbol{X})\end{aligned} \tag{2.28}$$

Pour une déformation actuelle (fictive ou réelle) $\boldsymbol{X}$ donnée, la « loi tangente » (2.26) (ou (2.27)) est une relation affine entre la dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ du tenseur des contraintes et la dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{X}}$ du tenseur de déformation . Les coefficients de cette relation affine sont fonction de la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$, ils sont donc différents à chaque instant (fictif ou réel).

Objectivité du tenseur K – En écrivant la formule de changement d'observateur du tenseur du quatrième ordre $\boldsymbol{K}$ à partir de sa définition (universelle) donnée dans l'équation (2.28), on vérifie sans trop de difficultés que l'objectivité du tenseur de déformation $\boldsymbol{X}$, qui s'écrit $\widetilde{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{Q}_t\boxtimes\boldsymbol{Q}_t):\boldsymbol{X}$ et celle des fonctions d'état K_i impliquent l'objectivité du tenseur du quatrième ordre $\boldsymbol{K}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{K}} = (\boldsymbol{Q}_t\boxtimes\boldsymbol{Q}_t\boxtimes\boldsymbol{Q}_t\boxtimes\boldsymbol{Q}_t):\boldsymbol{K}$$

Les dérivées particulaires $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\boldsymbol{X}}$ sont des grandeurs tensorielles du second ordre *non objectives* [45], mais pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, on a toujours la relation :

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}} = (\partial_T K_0\,\boldsymbol{G} + \partial_T K_1\,\widetilde{\boldsymbol{X}} + \partial_T K_2\widetilde{\boldsymbol{X}}^2)\,\dot{T} + \widetilde{\boldsymbol{K}}:\dot{\widetilde{\boldsymbol{X}}}$$

Cette relation montre que, dans un calcul, on peut sans inconvénients considérer des dérivées particulaires non objectives de tenseurs objectifs (dans la dérivation temporelle, « on suit la particule dans son mouvement »), tout en écrivant une relation *universelle* (c'est-à-dire la même relation pour tous les observateurs) entre ces dérivées particulaires non objectives.

« Hypoélasticité » – En général, une loi tangente n'est pas semblable à la loi de comportement mécanique dont elle est issue. Toutefois, on peut remarquer que si la loi de comportement est une relation affine *pour un certain choix de tenseur de déformation et de l'énergie libre de Helmholtz* [46], choix qui conduiraient à un comportement mécanique de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha(T)\,X_\mathrm{I}\,\boldsymbol{G} + K_1(T)\,\boldsymbol{X} \tag{2.29}$$

[44] On rappelle que les dérivées particulaires des invariants d'un tenseur du second ordre construit sur $\mathbb{V}_3$ sont : $\dot{X}_\mathrm{I} = \boldsymbol{G}:\dot{\boldsymbol{X}}$, $\dot{X}_\mathrm{II} = (X_\mathrm{I}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{X}):\dot{\boldsymbol{X}}$ et $\dot{X}_\mathrm{III} = (X_\mathrm{II}\boldsymbol{G}-X_\mathrm{I}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2):\dot{\boldsymbol{X}}$. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

[45] Seules les dérivées particulaires des grandeurs objectives *scalaires* sont des grandeurs scalaires objectives. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

[46] Elle ne serait plus affine si on change de tenseur de déformation. Voir les remarques p. 26

alors la loi incrémentale se réduirait à :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T \alpha X_{\mathrm{I}}\, \boldsymbol{G} + \partial_T K_1\, \boldsymbol{X})\, \dot{T} + \alpha(T)\, \dot{X}_{\mathrm{I}}\, \boldsymbol{G} + K_1(T)\, \dot{\boldsymbol{X}}$$

En évolution isotherme [47] ($\dot{T} = 0$) à la température T_0, la loi tangente se réduirait à :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha(T_0)\, \dot{X}_{\mathrm{I}}\, \boldsymbol{G} + K_1(T_0)\, \dot{\boldsymbol{X}} \tag{2.30}$$

Bien que ressemblant à la loi de comportement « linéaire » (2.29), sa dérivée particulaire (2.30) *ne peut pas être prise comme définition d'un comportement élastique isotrope isotherme d'un solide déformable*. En effet, si une loi de comportement isotherme élastique « linéaire » (pour un certain tenseur de déformation et une certaine énergie libre), implique bien une relation linéaire de la même forme entre les dérivées particulaires $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\boldsymbol{X}}$, la réciproque est fausse [48] : l'équation (2.30) ne garantit aucunement la nullité de la dissipation intrinsèque voire l'existence d'une énergie libre de Helmholtz. C'est cette erreur qui a pu conduire, dans le passé, certains auteurs à proposer des « lois de comportement » isothermes dites « hypoélastiques » de la forme (2.30) qui ne sont pas thermodynamiquement admissibles [49]. On en trouve encore la trace dans beaucoup de codes de calcul spécialisés dans la mécanique des solides déformables.

« Dérivées objectives » – Pour tenter d'écrire des lois tangentes d'expression plus simple (mais inexactes) que l'équation (2.26) [p. 39] ou l'équation (2.27) [p. 40], certains auteurs nomment « dérivée objective » certains groupements de termes apparaissant dans leurs calculs. Par exemple la dérivée particulaire (non objective) exacte du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ s'écrit [50] :

$$\dot{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) = (\underbrace{\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{J}^B}) + (\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{W})$$

où $\boldsymbol{D} = \mathbf{sym\,grad}_E\, \boldsymbol{v}$ est le tenseur des taux de déformation (objectif) et où $\boldsymbol{W} = \mathbf{asym\,grad}_E\, \boldsymbol{v}$ est un tenseur non objectif.
Il est facile de vérifier que le terme $\boldsymbol{J}^B = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D} = \dot{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{B}$ est objectif. Le groupement de termes $\boldsymbol{J}^B$ (tenseur symétrique) est baptisé « dérivée objective » de Jaumann du tenseur $\boldsymbol{B}$. Le groupement de termes $\boldsymbol{J}^B$ est bien objectif, mais il n'est pas la dérivée particulaire d'un tenseur de déformation [51].

Par « analogie », on nomme « dérivée objective » de Jaumann du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ la quantité tensorielle objective : $\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Dans la littérature spécialisée, on trouve d'autres « dérivées objectives » : les plus couramment rencontrées sont la « dérivée objective » de Naghdi : $\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^\top$ et celle de Truesdel : $\dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) + (\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\, \boldsymbol{\sigma}$. Ces quantités sont bien objectives, mais elles ne sont pas des dérivées particulaires de tenseurs sauf parfois pour des observateurs mobiles particuliers *ad hoc* dont le choix n'a pas de justification physique [52] et différents en chaque particule. Ces « définitions » ne sont employées qu'à propos du tenseur des contraintes de Cauchy et rarement à propos des tenseurs de déformation. Ces pseudo-concepts apparaissent le plus souvent chez les auteurs qui introduisent des lois « hypoélastiques » en remplaçant les dérivées

[47] C'est le cas de toute évolution « quasi-statique ».

[48] Une relation dérivée n'est pas équivalente à la relation dont elle dérive.

[49] Soit parce qu'il existe des évolutions à dissipation négative, soit parce que les fonctions d'état fondamentales énergie interne massique et entropie massique n'existent pas. Ce problème est soulevé dans l'article *On the conditions of potentiality in finite elasticity and hypoelasticity*, Arkady I. Leonov, International journal of solids and structures, vol.37 (2000), 2565-2576.

[50] Voir l'annexe B du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

[51] Ce serait la dérivée à base propre constante si la vitesse de rotation de la base propre de $\boldsymbol{B}$ était égale à $\mathbf{rot}_E\, \boldsymbol{v}$; voir la section 2.1.2 du cours *Algèbre et analyse tensorielle*, du même auteur [note 1 p. 3].

[52] On rappelle que le tenseur $\boldsymbol{R}$ n'est pas une « rotation locale de la matière », de même que le tenseur $\boldsymbol{W}$ n'est pas « une vitesse de rotation ou un taux de rotation local de la matière » car dans un mouvement de milieu continu, chaque direction matérielle a sa propre déviation et sa propre vitesse de rotation. Voir le cours *Cinématique des milieux continus* (sections 4.9 et 5.7), du même auteur [note 2 p. 3].

particulaires exactes de tenseurs des contraintes par des « dérivées objectives » ; ces manipulations sont de peu d'intérêt (et pour quelle raison choisir une « dérivée objective » plus qu'une autre ?).

Quand on souhaite effectuer un calcul incrémental pour résoudre un problème d'élasticité décrit *avec un certain observateur*, il faut utiliser la loi tangente exacte donnée en (2.26) ou (2.27) [p. 40], qui est une relation *universelle* entre des dérivées particulaires non objectives, sans qu'il soit nécessaire d'invoquer des « dérivées objectives ». Lors d'un calcul numérique, l'observateur et les lois de comportement du matériau sont choisis et fixés. Peu importe l'objectivité des termes qui interviennent dans les calculs. Ce n'est que lors de la construction des loi de comportement d'un modèle que les questions d'*objectivité des grandeurs physiques* et d'*universalité des lois de comportement* [53] sont importantes, indépendamment des méthodes numériques qui seront utilisées lors d'une résolution numérique des équations du problème écrites pour un certain observateur.

2.7 En bref...

Les variables d'état d'un milieu continu élastique isotrope sont la température absolue et un tenseur de déformation objectif, définissant la déformation par rapport à une forme de référence considérée par définition comme non déformée. Le choix de la forme de référence est sous la responsabilité du scientifique ou de l'ingénieur qui fait l'étude. En revanche, le choix d'un tenseur de déformation objectif plutôt qu'un autre pour mesurer les déformations (dilatations, distorsions, etc.) est sans importance fondamentale. Dans un exposé théorique minimal de l'élasticité, l'utilisation du seul tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ est suffisante et est la plus économique en calculs tensoriels. Une fois écrite la loi de comportement avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$, il est possible (si l'on y tient absolument) de l'écrire avec tout autre tenseur de déformation (objectif ou non).

La nullité de la dissipation intrinsèque en tout point de l'espace des états et à tout instant de toute évolution à partir de cet état, conduit à la forme générale des lois de comportement mécanique des milieux élastiques isotropes en fonction de l'énergie libre massique de Helmholtz.

Le comportement élastique isotrope d'un matériau est complètement défini lorsque l'on connaît l'expression de l'une des fonctions d'état énergie interne massique $\overline{f}_e$, entropie massique $\overline{f}_s$ ou énergie libre massique de Helmholtz $\overline{f}_\psi$ en fonction des variables d'état réduites $(T, X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{II}}, X_{\mathrm{III}})$ ou tout autre ensemble de variables d'état indépendant ayant des significations physiques plus claires ; les deux autres fonctions d'état s'en déduisent à l'aide de la définition de l'énergie libre de Helmholtz et de la relation de Helmholtz.

Le comportement élastique isotrope des solides réels est généralement limité : des distorsions ou des dilatations linéiques excessives provoquent des réorganisations ou des ruptures de liaisons dans la structure microscopique, qui conduisent à un comportement inélastique. On a proposé quelques critères macroscopiques pour donner des limites au comportement élastique afin de se protéger des phénomènes microscopiques qui conduiraient à l'inélasticité.

[53] L'universalité des lois de comportement est souvent appelée « principe d'indifférence matérielle ». Par ailleurs, on constate souvent dans les textes une confusion conceptuelle entre l'objectivité des grandeurs physiques et l'universalité des lois : il n'est pas rare de lire qu'« une loi de comportement doit être objective » !

3

Construction d'un modèle d'élasticité isotrope

3.1 Démarche générale

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la modélisation du comportement élastique isotrope d'un matériau est complète lorsque l'on connaît l'expression de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz f_ψ en fonction des variables d'état. Cette fonction est particulière à chaque matériau et doit donc se baser sur un minimum d'expérimentations [(1)].

Ayant choisi une fonction f_ψ *physiquement justifiée*, on pourra alors utiliser la forme générale de la loi de comportement mécanique donnée avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ [éq. (2.9) p. 21] ou d'autres tenseurs de déformation [section 2.3 p. 22].

Par ailleurs, on rappelle que le choix du triplet d'invariants $(X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{II}}, X_{\mathrm{III}})$ représentant le tenseur de déformation actuel n'est pas le seul choix possible [(2)]. On se réserve la possibilité de le remplacer par un autre ensemble d'invariants de significations physiques plus claires, permettant de construire des expressions des fonctions d'état physiquement motivées. En l'absence de toute hypothèse, l'espace des états d'un milieu élastique isotrope est *a priori* de dimension 4. Dans ce chapitre, on va construire un modèle de comportement élastique isotrope dont le nombre de variables d'état scalaires est seulement 3, plus facile à identifier.

3.2 Choix des variables d'état

Dans un modèle d'élasticité isotrope, les variables d'état tensorielles sont la température T et un tenseur de déformation [déf. 1.2 p. 13]. Pour mesurer les déformations, on décide d'utiliser le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top$.

Remarque – Le choix d'un tenseur de déformation particulier parmi les tenseurs de déformation objectifs n'est pas essentiel. On a vu en section 2.3 [p. 22] que l'on peut écrire la loi de comportement mécanique d'un milieu continu élastique isotrope avec tout tenseur de déformation objectif ou non. Le changement de l'expression de la loi de comportement quand on change de tenseur de déformation n'est qu'une question d'algèbre. On rappelle toutefois que les lois de comportement mécanique écrites avec des tenseurs de déformation non objectifs font intervenir dans l'expression du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (objectif) un champ tensoriel orthogonal $\boldsymbol{R}(P,t)$ non objectif qui dépend de l'observateur utilisé et qui complique l'expression de la loi de comportement.

---

(1) Des choix arbitraires de la fonction f_ψ risquent de conduire à des comportements, certes thermodynamiquement admissibles, mais de comportement exotique physiquement peu vraisemblable [section 2.4 p. 29].

(2) Voir l'annexe B du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

Les variables d'état scalaires d'un modèle élastique isotrope sont la température T et des invariants scalaires associés au tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$. Dans la section 2.2.4 [p. 20], les variables d'état scalaires utilisées étaient les trois invariants fondamentaux B_{I}, B_{II} et B_{III} du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$. L'interprétation physique du déterminant B_{III} est claire : $B_{\mathrm{III}} = {K_v}^2$ où $K_v > 0$ est la dilatation volumique. En revanche, la signification cinématique des deux autres invariants n'est pas claire. On se propose de choisir un ensemble de variables d'état cinématiquement significatif.

On a montré en cinématique que toute déformation peut être vue comme la composition commutative et unique d'une déformation sphérique et d'une déformation isovolume [(3)]. On rappelle que cette composition s'écrit :

$$\boldsymbol{V} = \underbrace{(K_v^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{G})}_{\boldsymbol{V}^{sph}} \cdot \underbrace{(K_v^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{V})}_{\boldsymbol{V}^{isov}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2 = \underbrace{(K_v^{\frac{2}{3}}\boldsymbol{G})}_{\boldsymbol{B}^{sph}} \cdot \underbrace{(K_v^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{B})}_{\boldsymbol{B}^{isov}} \tag{3.1}$$

La partie déformation sphérique $\boldsymbol{B}^{sph}$ est un tenseur sphérique dont le seul invariant est :

$$\det\boldsymbol{B} = B_{\mathrm{III}} = {K_v}^2 \qquad \text{où } K_v \text{ est la dilatation volumique}$$

La partie déformation isovolume $\boldsymbol{B}^{isov}$ est de déterminant unité. Elle est donc *a priori* représentée par deux invariants.

- **Hypothèse 3.1 –** Dans le modèle de comportement élastique construit dans ce chapitre, on suppose que la déformation isovolume est suffisamment caractérisée par un seul invariant : la distorsion stérique maximale de la déformation, dont la définition est :

$$\delta^s_{max} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{{B_{\mathrm{I}}}^{\frac{3}{2}}}{{B_{\mathrm{III}}}^{\frac{1}{2}}} \geqslant 1 \tag{3.2}$$

où les λ_i sont les dilatations linéiques principales de la déformation.

Rappels de cinématique – La distorsion stérique maximale d'une déformation est le maximum de l'inverse du produit mixte actuel de trois directions matérielles initialement orthogonales. Elle est toujours supérieure ou égale à 1. Pour une déformation donnée en une particule, il existe une infinité de triplets directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion stérique est la distorsion stérique maximale en cette particule. D'autre part, si la distorsion stérique maximale d'une déformation vaut 1, alors la déformation en cette particule est purement sphérique.

En faisant cette hypothèse, on *décide* que toutes les déformations isovolumes ayant la même distorsion stérique maximale sont représentées par la seule variable d'état δ^s_{max}. Autrement dit, dans ce modèle, *on ne veut pas* distinguer deux états qui auraient la même température, la même déformation sphérique et des déformations isovolumes différentes mais de distorsion stérique maximale identique.

- **Notation 3.2 –** Dans la suite de ce chapitre, la distorsion stérique maximale δ^s_{max} d'un tenseur de déformation sera notée plus simplement δ.

(3) Voir le chapitre 4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]

La liste des variables d'état indépendantes scalaires choisies pour ce modèle de comportement élastique isotrope est donc $\{T, K_v, \delta\}$ et les fonctions d'état sont des fonctions de ces seules trois variables d'état. Les relations entre les deux systèmes d'invariants sont :

$$K_v = {B_{\mathrm{III}}}^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \delta = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{{B_{\mathrm{I}}}^{\frac{3}{2}}}{{B_{\mathrm{III}}}^{\frac{1}{2}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad B_{\mathrm{III}} = K_v^2 \quad ; \quad B_{\mathrm{I}} = 3\,{K_v}^{\frac{2}{3}}\,\delta^{\frac{2}{3}}$$

En particulier, l'énergie libre massique de Helmholtz s'écrit :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}) = f_\psi(T, K_v, \delta)$$

3.2.1 Nouvelle expression de la loi de comportement mécanique

La forme générale de la loi de comportement mécanique d'un solide élastique isotrope en utilisant le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ avec les quatre variables d'état indépendantes $(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}})$ a été donnée en (2.9) [p. 21]. On la rappelle ici :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\,\rho_0}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}}\left(B_{\mathrm{III}}\,\partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\boldsymbol{G} + (\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B + B_{\mathrm{I}}\,\partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B)\,\boldsymbol{B} - \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\boldsymbol{B}^2\right) = K_0\,\boldsymbol{G} + K_1\,\boldsymbol{B} + K_2\,\boldsymbol{B}^2 \quad (3.3)$$

Le changement de variables d'état $(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}) \leftrightarrow (T, K_v, \delta)$ implique les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B &= \partial_T f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{I}}} T + \partial_{K_v} f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{I}}} K_v + \partial_\delta f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{I}}}\delta &&= 0 + 0 + \frac{1}{2}\,\delta^{\frac{1}{3}}\,{K_v}^{-\frac{2}{3}}\,\partial_\delta f_\psi \\
\partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B &= \partial_T f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{II}}} T + \partial_{K_v} f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{II}}} K_v + \partial_\delta f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{II}}}\delta &&= 0 + 0 + 0 \\
\partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B &= \partial_T f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{III}}} T + \partial_{K_v} f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{III}}} K_v + \partial_\delta f_\psi\,\partial_{B_{\mathrm{III}}}\delta &&= 0 + \frac{1}{2}\,{K_v}^{-1}\,\partial_{K_v} f_\psi - \frac{1}{2}\,{K_v}^{-2}\,\delta\,\partial_\delta f_\psi
\end{aligned}$$

En remplaçant dans la loi de comportement (3.3), il vient :

$$K_0 = \rho_0\,(\partial_{K_v} f_\psi - \delta\,{K_v}^{-1}\,\partial_\delta f_\psi) \quad ; \quad K_1 = \rho_0\,\delta^{\frac{1}{3}}\,{K_v}^{-\frac{5}{3}}\,\partial_\delta f_\psi \quad ; \quad K_2 = 0$$

Remarque – Le choix de caractériser la déformation par les deux seules grandeurs scalaires objectives et cinématiquement significatives K_v (dilatation volumique) et δ (distorsion stérique maximale), à la place des trois invariants $(B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}})$ conduit à $K_2 = 0$ car dans l'énergie libre massique de Helmholtz de ce modèle, on ignore l'influence de l'invariant B_{II}, ce qui implique $\partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B = 0$ dans l'équation (3.3).

La loi de comportement mécanique d'un milieu élastique isotrope *sous l'hypothèse* 3.1 [p. 44] est donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0\,(\partial_{K_v} f_\psi - \delta\,{K_v}^{-1}\,\partial_\delta f_\psi)\,\boldsymbol{G} + \rho_0\,\delta^{\frac{1}{3}}\,{K_v}^{-\frac{5}{3}}\,\partial_\delta f_\psi\,\boldsymbol{B} \qquad \text{où } \psi^m = f_\psi(T, K_v, \delta) \qquad (3.4)$$

On montre dans la section suivante que la détermination de la fonction d'état $f_\psi(T, K_v, \delta)$ peut se ramener à la mesure d'une quantité de chaleur, d'une contrainte moyenne et d'une contrainte tangentielle dans trois expériences simples.

3.3 Forme générale des fonctions d'état

3.3.1 Forme générale de l'énergie libre massique de Helmholtz

Comme toutes les fonctions d'état de ce modèle, l'énergie libre massique de Helmholtz est :

$$\psi^m = f_\psi(T, K_v, \delta)$$

On choisit un état de référence $E_0 = (T_0, 1, 1)$ dont l'énergie libre massique de Helmholtz est posée nulle [4] $f_\psi(T_0, 1, 1) = 0$, réputé non déformé ($K_v = 1$ et $\delta = 1$). Pour définir la valeur de l'énergie libre massique de Helmholtz en tout point (T, K_v, δ) de l'espace des états, on définit un chemin particulier dans l'espace des états qui passe de l'état de référence $E_0 = (T_0, 1, 1)$ à un état quelconque $E = (T, K_v, \delta)$ de la manière suivante :

$$E_0 = (T_0, 1, 1) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 1) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 1) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}} E = (T, K_v, \delta) \tag{3.5}$$

Dans chacune des évolutions élémentaires $\mathscr{C}^{(1)}$, $\mathscr{C}^{(2)}$ et $\mathscr{C}^{(3)}$, une seule variable d'état varie :

1. L'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$ est une variation de température de T_0 à T sans déformation ($K_v = 1$, $\dot{K}_v = 0$, $\delta = 1$ et $\dot{\delta} = 0$). La seule variable d'état qui évolue est la température T. La variation de l'énergie libre massique de Helmholtz le long de ce chemin n'est donc fonction que de la température :

$$\psi_1^m - 0 = g^{(1)}(T) \qquad \text{avec la condition : } g^{(1)}(T_0) = 0 \tag{3.6}$$

2. L'évolution $\mathscr{C}^{(2)}$ est une déformation sphérique à la température constante T ($\dot{T} = 0$, $\delta = 1$ et $\dot{\delta} = 0$). La seule variable d'état qui évolue est la dilatation volumique K_v. La variation de l'énergie libre massique de Helmholtz le long de ce chemin est donc *a priori* fonction de la température actuelle constante T et de la dilatation volumique actuelle K_v :

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \text{avec la condition : } g^{(2)}(T, 1) = 0, \ \forall T$$

3. Le chemin $\mathscr{C}^{(3)}$ est une déformation isovolume à la température constante T ($\dot{T} = 0$ et $\dot{K}_v = 0$). La seule variable d'état qui évolue est la distorsion stérique maximale δ. La variation de l'énergie libre massique de Helmholtz le long de ce chemin est donc *a priori* fonction de la température actuelle constante T, de la dilatation volumique actuelle constante K_v et de la distorsion stérique maximale actuelle δ :

$$\psi_t^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \delta) \qquad \text{avec la condition : } g^{(3)}(T, K_v, 1) = 0, \ \forall T \ \forall K_v$$

L'énergie libre massique de Helmholtz d'un état quelconque peut donc s'écrire sous la forme [5] :

$$\psi^m = f_\psi(T, K_v, \delta) = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) + g^{(3)}(T, K_v, \delta) \tag{3.7}$$

avec les trois conditions :

$$g^{(1)}(T_0) = 0 \quad ; \quad g^{(2)}(T, 1) = 0, \ \forall T \quad ; \quad g^{(3)}(T, K_v, 1) = 0, \ \forall T \ \forall K_v \tag{3.8}$$

[4] Les fonctions d'état énergie interne massique et entropie massique sont définies à une constante près ; on peut donc leur donner arbitrairement une valeur nulle à un état de référence. Dans cet état de référence, l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m = e^m - T\,s^m$ est donc nulle. La constante ψ_0^m est sans importance car seules les dérivées partielles de f_ψ apparaissent dans la loi de comportement.

[5] En cherchant directement une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz plutôt qu'une expression de l'énergie interne massique, les formules sont considérablement plus simples que dans les premières versions de ce cours ; les résultats finaux sont évidemment identiques.

3.3.2 Forme générale de l'entropie massique

L'entropie massique est déterminée par la relation de Helmholtz [éq. (2.4) p. 20] :

$$f_s = -\partial_T f_\psi = -\partial_T g^{(1)}(T) - \partial_T g^{(2)}(T,K_v) - \partial_T g^{(3)}(T,K_v,\delta) \tag{3.9}$$

3.3.3 Forme générale de l'énergie interne massique

De la définition de l'énergie libre massique de Helmholtz que l'énergie interne massique, il vient :

$$\begin{aligned} f_e &= f_\psi + T\, f_s \\ &= g^{(1)} + g^{(2)} + g^{(3)} - T\left(\partial_T g^{(1)}(T) + \partial_T g^{(2)}(T,K_v) + \partial_T g^{(3)}(T,K_v,\delta)\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Les trois fonctions inconnues $g^{(1)}(T)$, $g^{(2)}(T,K_v)$ et $g^{(3)}(T,K_v,\delta)$ déterminent complètement le comportement du milieu continu élastique isotrope.

3.3.4 Loi de comportement mécanique

La loi de comportement mécanique est [éq. (3.4) p. 45] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\rho_0\left(\partial_{K_v} f_\psi - \delta\, K_v{}^{-1}\, \partial_\delta f_\psi\right)}_{K_0} \boldsymbol{G} + \underbrace{\rho_0\, \delta^{\frac{1}{3}}\, K_v{}^{-\frac{5}{3}}\, \partial_\delta f_\psi}_{K_1} \boldsymbol{B} \tag{3.11}$$

que l'on peut aussi exprimer en fonction des 3 fonctions $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ [éq. (3.7) p. 46].

3.4 Analyse des évolutions élémentaires

En analysant les trois évolutions élémentaires $\mathscr{C}^{(1)}$, $\mathscr{C}^{(2)}$ et $\mathscr{C}^{(3)}$ définies précédemment, on va montrer que l'identification des trois fonctions inconnues $g^{(1)}(T)$, $g^{(2)}(T,K_v)$ et $g^{(3)}(T,K_v,\delta)$ se ramène à des mesures dans un petit nombre d'expériences sur le matériau. On suppose que les trois évolutions $\mathscr{C}^{(1)}$, $\mathscr{C}^{(2)}$ et $\mathscr{C}^{(3)}$ sont réalisées dans les conditions expérimentales idéales suivantes :

1. les effets de la pesanteur sont négligeables ;
2. les mesures sont relevées à vitesse nulle (pas de variation d'énergie cinétique dans l'expression du premier principe de la thermodynamique) ;
3. l'état (T,K_v,δ) des éprouvettes est uniforme dans l'espace :
   - on connaît des dispositifs d'essais où la déformation (K_v,δ) est sensiblement uniforme (au moins dans une certaine région quand les effets de la pesanteur sont négligeables) ;
   - les mesures ne doivent être relevées que quand le champ de températures s'est uniformisé.

Dans la suite de ce chapitre, on ne détaille pas les calculs algébriques ni la résolution des équations différentielles. On se contente de donner le raisonnement général, les points clés et les résultats importants. On trouvera en annexe F [p. 147 et suivantes], une feuille de calcul commentée exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA® dans sa version 5.2, qui détaille les calculs algébriques et la résolution des équations différentielles [6]. Les commentaires abondants devraient permettre au lecteur de refaire les calculs dans un autre logiciel de calcul formel ou dans une autre version du logiciel, voire à la main s'il est plus courageux que l'auteur.

[6] Les calculs ne sont pas très compliqués mais seulement fastidieux.

3.4.1 Analyse de l'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$

Dans l'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$, il n'y a pas de déformation : $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}$, $K_v = 1$ $\dot{K}_v = 0$, $\delta = 1$ et $\dot{\delta} = 0$. La loi de comportement (3.11) [p. 47] montre que dans ce cas le tenseur des contraintes est sphérique :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = (K_0 + K_1)\boldsymbol{G}$$

Le tenseur des contraintes est donc complètement caractérisé par sa contrainte moyenne [7].

Remarque – Dans le cas d'une contrainte sphérique uniforme, la condition aux limites en contraintes à la frontière d'une éprouvette de forme quelconque, de normale extérieure actuelle $\boldsymbol{n}_t$ s'écrit :

$$\boldsymbol{f}^s = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_t = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}_t = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{n}_t$$

On constate que la contrainte moyenne uniforme dans l'éprouvette est égale à la contrainte normale uniforme $f^s = \boldsymbol{f}^s \cdot \boldsymbol{n}$ exercée sur la frontière. La contrainte moyenne uniforme est donc aussi la contrainte uniforme exercée à la frontière par l'enceinte de confinement qui maintient la dilatation volumique à $K_v = 1$. Quand l'éprouvette a tendance à se dilater (en général pour $T > T_0$), la contrainte $\sigma^{(1)}_{exp}$ est négative (une pression) ; en revanche, l'expérience est plus difficile à réaliser quand l'éprouvette a tendance à se contracter (en général pour $T < T_0$) : pour maintenir $K_v = 1$ il faut un collage aux parois de l'enceinte de confinement pour bloquer la déformation. Par ailleurs, l'enceinte de confinement doit être indéformable et indilatable mais thermostatable. On verra plus loin que cette expérience idéale peut être remplacée par une combinaison d'autres expériences plus aisées à réaliser.

Conservation de l'énergie dans l'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$

On mesure la quantité massique de chaleur $Q^{(1)}_{exp}(T)$ (en J.kg^{-1}) reçue [8] par l'éprouvette pour passer de T_0 à T. La conservation de l'énergie entre les états E_0 et E_1 s'écrit (dans l'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$, le travail reçu est nul car la déformation est bloquée) :

$$\underbrace{(e^{cin}_1 - e^{cin}_0)}_{0} + (e^m_1 - \underbrace{e^m_0}_{0}) = \underbrace{W^{ext}}_{0} + Q^{(1)}_{exp}(T)$$

ce qui conduit à l'équation différentielle en $g^{(1)}$:

$$g^{(1)}(T) - T(\partial_T g^{(1)}(T) + \partial_T g^{(2)}(T,1) + \partial_T g^{(3)}(T,1,1)) = Q^{(1)}_{exp}(T) \quad \text{[éq. (3.10) p. 47, éq. (3.8) p. 46]}$$

dont la solution est :

$$g^{(1)}(T) = -T\int_{T_0}^{T} \frac{Q^{(1)}_{exp}(T)}{T^2}\,\mathrm{d}T - T\left(\int_{T_0}^{T} \frac{\partial_T g^{(2)}(T,1)}{T}\,\mathrm{d}T + \int_{T_0}^{T} \frac{\partial_T g^{(3)}(T,1,1)}{T}\,\mathrm{d}T\right)$$

Les fonctions $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ seront déterminées par l'analyse des chemins suivants.

3.4.2 Analyse de l'évolution $\mathscr{C}^{(2)}$

Dans l'évolution $\mathscr{C}^{(2)}$, la déformation est purement sphérique ($\boldsymbol{B} = K_v^{\frac{2}{3}}\boldsymbol{G}$, $\delta = 1$, $\dot{\delta} = 0$) et à température constante ($\dot{T} = 0$).

[7] C'est-à-dire le tiers de la trace du tenseur des contraintes de Cauchy. L'opposé de la contrainte moyenne $-\frac{\sigma_I}{3}$ est parfois appelé « pression ».

[8] Éventuellement négative si $T < T_0$.

Tenseur des contraintes dans l'évolution $\mathscr{C}^{(2)}$

Dans cette évolution, la loi de comportement [éq. (3.11) p. 47] montre que le tenseur des contraintes est sphérique :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = (K_0 + K_v^{\frac{2}{3}} K_1)\,\boldsymbol{G} = \rho_0 \left(\partial_{K_v} g^{(2)}(T,K_v) + \partial_{K_v} g^{(3)}(T,K_v,1)\right)\boldsymbol{G}$$

Dans cette expérience, on mesure la contrainte moyenne $\sigma_{exp}^{(2)}(T,K_v)$:

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T,K_v) = \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}}{3} = \rho_0 \left(\partial_{K_v} g^{(2)}(T,K_v) + \partial_{K_v} g^{(3)}(T,K_v,1)\right)$$

Remarque – Comme dans le chemin $\mathscr{C}^{(1)}$, la condition aux limites aux frontières d'une éprouvette implique que la contrainte moyenne $\sigma_{exp}^{(2)}(T,K_v)$, uniforme dans l'éprouvette, est égale à la contrainte normale uniforme exercée sur la frontière. Pour faire l'expérience il suffit donc d'exercer une contrainte normale uniforme $\sigma_{exp}^{(2)}$ sur la frontière et observer les variations de la dilatation volumique K_v à température constante. Lorsque $\sigma_{exp}^{(2)} < 0$ on peut l'assimiler à l'action sur la frontière d'un fluide non pesant sous pression. Exercer des tractions uniformes notables à la frontière d'un solide déformable est expérimentalement plus difficile [(9)].

La résolution de cette équation différentielle en $g^{(2)}$ conduit à :

$$g^{(2)}(T,K_v) = \frac{1}{\rho_0}\int_1^{K_v} \sigma_{exp}^{(2)}(T,K_v)\,\mathrm{d}K_v - \int_1^{K_v} \partial_{K_v} g^{(3)}(T,K_v,1)\,\mathrm{d}K_v$$

La fonction $g^{(3)}$ sera déterminée dans la section suivante.

3.4.3 Analyse de l'évolution $\mathscr{C}^{(3)}$

L'évolution $\mathscr{C}^{(3)}$ est une déformation isovolume isotherme. L'ensemble des déformations isovolumes est un ensemble à deux paramètres (il faut en principe deux invariants pour les caractériser). En vertu de l'hypothèse 3.1 [p. 44] posée pour ce modèle, toutes les déformations isovolumes qui ont la même distorsion stérique maximale δ sont considérées comme équivalentes. Parmi toutes les déformations isovolumes possibles, on en choisit une particulière, facile à réaliser expérimentalement.

Choix d'un mouvement isovolume

Pour réaliser une déformation isovolume avec une dilatation volumique initiale K_v, on choisit de prendre un champ de déplacement de la forme suivante :

$$\boldsymbol{u}_L^{(3)} = K_v^{\frac{1}{3}}\,(\boldsymbol{x}_0 + \gamma x_{02}\,\boldsymbol{e}_1)$$

où $\boldsymbol{x}_0 = x_{01}\,\boldsymbol{e}_1 + x_{02}\,\boldsymbol{e}_2 + x_{03}\,\boldsymbol{e}_3$ est la position de référence d'une particule et où K_v est la dilatation volumique préalable issue du chemin $\mathscr{C}^{(2)}$ et constante dans le chemin $\mathscr{C}^{(3)}$. Un tel mouvement est appelé glissement isovolume dans le plan $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$.

(9) Les thermodynamiciens, qui n'envisagent le plus souvent que des fluides, appellent cette expérience une mesure de la « compressibilité » isotherme. On devrait l'appeler déformabilité sphérique isotherme sans privilégier la compression sphérique ou l'extension sphérique.

Le lecteur en déduira aisément que les composantes du tenseur de déformation $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top$ dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ pour ce mouvement isovolume (de dilatation volumique initiale K_v) sont :

$$[B^\bullet{}_\bullet]_{\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}} = K_v{}^{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que dans ce mouvement, lorsque le paramètre expérimental γ varie, la dilatation volumique K_v ne varie pas car le déterminant de la matrice $[B^\bullet{}_\bullet]$ vaut $K_v{}^2$ quel que soit γ. Par ailleurs, dans ce mouvement, le tenseur de déformation est uniforme dans l'éprouvette car il est indépendant des positions initiales $\boldsymbol{x}_0$. Dans ce mouvement, la distorsion stérique maximale est uniforme et vaut :

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{9}(3+\gamma^2)^{\frac{3}{2}} \geqslant 1 \quad \text{[éq. (3.2) p. 44]} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \pm\sqrt{3}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1} \tag{3.12}$$

On peut toujours choisir la direction $\boldsymbol{e}_1$ telle que $\gamma \geqslant 0$. On prend donc :

$$\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1}$$

Dans ce mouvement isovolume, les composantes du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ en fonction des variables d'état sont donc :

$$[B^\bullet{}_\bullet] = K_v{}^{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 3\,\delta^{\frac{2}{3}}-2 & \sqrt{3}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1} & 0 \\ \sqrt{3}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseur des contraintes dans l'évolution $\mathscr{C}^{(3)}$

La loi de comportement [éq. (3.11) p. 47] montre que la contrainte tangentielle $\sigma^{(3)1}{}_2$ dans cette évolution est :

$$\sigma^{(3)1}{}_2 = \frac{\rho_0\sqrt{3}\,\delta^{\frac{1}{3}}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1}\,\partial_\delta g^{(3)}}{K_v}$$

Dans cette expérience, on mesure la contrainte tangentielle $\tau^{(3)}_{exp}(T, Kv, \delta) = \sigma^{(3)1}{}_2$ en fonction de γ (et donc de δ). La résolution de cette équation différentielle en $g^{(3)}$ conduit à :

$$g^{(3)}(T, Kv, \delta) = \frac{K_v}{\rho_0\sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau^{(3)}_{exp}(T, Kv, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1}}\,\mathrm{d}\delta$$

3.4.4 Synthèse

L'identification complète d'un modèle de comportement élastique isotrope *dont les variables d'état sont* (T, K_v, δ) [hyp. 3.1 p. 44] peut se ramener à trois mesures expérimentales :

1. $Q^{(1)}_{exp}(T)$: mesure de la quantité de chaleur massique (J.kg^{-1}) échangée dans l'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$ (variation de température sans déformation), avec la condition :

   $$Q^{(1)}_{exp}(T_0) = 0$$

Remarque – $C_v(T) = \partial_T Q^{(1)}_{exp}$ est la capacité thermique à déformation bloquée ($\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}$).

2. $\sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v)$: mesure de la contrainte moyenne dans l'évolution $\mathscr{C}^{(2)}$ (déformation sphérique isotherme), avec la condition :

$$\sigma^{(2)}_{exp}(T, 1) = \sigma^{(1)}_{moy}(T), \quad \forall T$$

Remarque – Cette condition détermine la contrainte moyenne $\sigma^{(1)}_{moy}(T)$ dans l'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$. Il est donc inutile de mesurer la contrainte moyenne dans le chemin $\mathscr{C}^{(1)}$.

3. $\tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta)$: mesure de la contrainte tangentielle dans l'évolution $\mathscr{C}^{(3)}$, avec la condition :

$$\tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, 1) = 0, \quad \forall T \, \forall K_v$$

Les trois fonctions $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ qui déterminent les fonctions d'état s'expriment en fonction de ces trois mesures :

$$g^{(1)}(T) = -T \int_{T_0}^{T} \frac{Q^{(1)}_{exp}(T)}{T^2} \, \mathrm{d}T \quad \left(= -T \int_{T_0}^{T} \frac{\partial_T Q^{(1)}_{exp}(T)}{T} \, \mathrm{d}T + Q^{(1)}_{exp}(T) \quad \text{(intégration par parties)} \right)$$

$$g^{(2)}(T, K_v) = \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v) \, \mathrm{d}K_v$$

$$g^{(3)}(T, K_v, \delta) = \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^{\delta} \frac{\tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \, \mathrm{d}\delta$$

On en déduit l'expression des fonctions d'état en fonction des trois mesures expérimentales $Q^{(1)}_{exp}$, $\sigma^{(2)}_{exp}$ et $\tau^{(3)}_{exp}$ avec les formules données en (3.7), (3.9) et (3.10) [p. 46]. On obtient :

$$\psi^m = -T \int_{T_0}^{T} \frac{\partial_T Q^{(1)}_{exp}}{T^2} \, \mathrm{d}T + \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma^{(2)}_{exp} \, \mathrm{d}K_v + \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^{\delta} \frac{\tau^{(3)}_{exp}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \, \mathrm{d}\delta \tag{3.13}$$

$$s^m = \int_{T_0}^{T} \frac{\partial_T Q^{(1)}_{exp}}{T} \, \mathrm{d}T - \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \partial_T \sigma^{(2)}_{exp} \, \mathrm{d}K_v - \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^{\delta} \frac{\partial_T \tau^{(3)}_{exp}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \, \mathrm{d}\delta \tag{3.14}$$

$$e^m = Q^{(1)}_{exp} + \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} (\sigma^{(2)}_{exp} - T \, \partial_T \sigma^{(2)}_{exp}) \, \mathrm{d}K_v + \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^{\delta} \frac{\tau^{(3)}_{exp} - T \, \partial_T \tau^{(3)}_{exp}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \, \mathrm{d}\delta \tag{3.15}$$

$$K_0 = \sigma^{(2)}_{exp} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^{\delta} \frac{\tau^{(3)}_{exp} + K_v \, \partial_{K_v} \tau^{(3)}_{exp}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \, \mathrm{d}\delta - \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \, \tau^{(3)}_{exp}}{\sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \tag{3.16}$$

$$K_1 = \frac{\tau^{(3)}_{exp}}{\sqrt{3} \, K_v^{\frac{2}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \tag{3.17}$$

Le modèle est donc complètement identifié par ces trois expériences.

Suggestion d'un changement de variable d'état – L'observation des formules (3.13) à (3.17) suggère un changement de variable d'état biunivoque $\gamma \leftrightarrow \delta$ défini par :

$$\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} \in [0 ; +\infty[\qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = \frac{(\gamma^2 + 3)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \in [1 ; +\infty[$$

Ce changement de variable d'état simplifie l'écriture des formules. Dans ce cas, les variables d'état du modèle élastique isotrope seraient $\{T, K_v, \gamma\}$ où la nouvelle variable d'état γ est une fonction monotone croissante de la distorsion stérique maximale δ (dans leur domaine de définition). L'interprétation cinématique de cette nouvelle variable d'état serait : « l'intensité γ d'un mouvement de glissement isovolume dont la distorsion stérique maximale est δ ». À titre d'exercice, le lecteur est invité à reprendre la construction du modèle avec les variables d'état $\{T, K_v, \gamma\}$.

3.5 Hypothèse simplificatrice supplémentaire facultative

Avec les résultats précédents, la contrainte moyenne dans un état quelconque (T, K_v, δ) est :

$$\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3} = \sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v) + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^{\delta} \frac{\tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta) + K_v\, \partial_{K_v} \tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}\, \mathrm{d}\delta$$

On constate que, dans ce modèle d'élasticité isotrope à trois variables d'état $\{T, K_v, \delta\}$, la contrainte moyenne dans un état quelconque est *a priori* une fonction de la contrainte tangentielle $\tau^{(3)}_{exp}$ mesurée durant le chemin $\mathscr{C}^{(3)}$. Autrement dit, même si on fait l'expérience $\mathscr{C}^{(3)}$ à partir de l'état initial ($\sigma^{(2)}_{exp}(T_0, 1) = 0$, pas de dilatation volumique préalable), le tenseur des contraintes engendré n'est pas en général un déviateur. Il est possible de construire un modèle qui maintient constante la contrainte moyenne le long du chemin $\mathscr{C}^{(3)}$:

- **Hypothèse 3.3 – Simplification facultative.** Dans une déformation isovolume, la contrainte moyenne ne varie pas.

La condition $\partial_\delta \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = 0$ conduit à l'équation différentielle :

$$\tau^{(3)}_{exp} + K_v\, \partial_{K_v} \tau^{(3)}_{exp} = 0 \qquad \text{dont la solution est :} \qquad \tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta) = \frac{\tau^{(3)}_{exp\,1}(T, \delta)}{K_v} \tag{3.18}$$

Ainsi, *si l'on constate expérimentalement que la fonction* $\tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta)$ *est de la forme* (3.18), la contribution de la déformation isovolume $\mathscr{C}^{(3)}$ au tenseur des contraintes de Cauchy est purement déviatorique. Sous l'hypothèse faculative 3.3, les coefficients de la loi de comportement (3.16) et (3.17) [p. 51] deviennent :

$$K_0 = \sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v) - \frac{\delta^{\frac{2}{3}}\, \tau^{(3)}_{exp\,1}(T, \delta)}{\sqrt{3}\, K_v \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad ; \quad K_1 = \frac{\tau^{(3)}_{exp1}(T, \delta)}{\sqrt{3}\, K_v^{\frac{5}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \tag{3.19}$$

Loi tangente – La loi tangente de ce modèle est (le détail du calcul est en annexe B [p. 131]) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T K_0 \boldsymbol{G} + \partial_T K_2 \boldsymbol{B})\, \dot{T} + \boldsymbol{K} : \dot{\boldsymbol{B}}$$

où $\boldsymbol{K}$ est le tenseur d'ordre 4 suivant :

$$\boldsymbol{K} = \Big(\frac{K_v}{2}\, \partial_{K_v} K_0 - \frac{\delta}{2}\, \partial_\delta K_0\Big)\, \boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{B}^{-1} + \Big(\frac{K_v}{2}\, \partial_{K_v} K_1 - \frac{\delta}{2}\, \partial_\delta K_1\Big)\, \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}^{-1} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\, K_v^{\frac{2}{3}}}\, \partial_\delta K_0\, \boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{G} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\, K_v^{\frac{2}{3}}}\, \partial_\delta K_1\, \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{G} + K_1\, \boldsymbol{G} \boxtimes \boldsymbol{G}$$

Les dérivées partielles des fonctions d'état K_0 et K_1 par rapport aux variables d'état de l'équation (3.19) ne peuvent être déterminées complètement que quand les mesures $\sigma^{(2)}_{exp}$ et $\tau^{(3)}_{exp}$ (ou $\tau^{(3)}_{exp1}$) ont été effectuées ou idéalisées [section 3.7 p. 56].

3.6 Expériences réelles

Les trois mesures $Q^{(1)}_{exp}$, $\sigma^{(2)}_{exp}$ et $\tau^{(3)}_{exp}$ théoriquement faites dans les conditions idéales qui ont été précisées en début de section 3.4 [p. 47] peuvent être raisonnablement approchées par des expériences réelles ou bien elles peuvent être idéalisées par des expressions mathématiques arbitraires mais physiquement raisonnables. Cette dernière option est envisagée en section 3.7 [p. 56].

3.6.1 Mouvement isovolume isotherme sans dilatation sphérique préalable ($\mathscr{C}^{(4)}$)

Dans cette expérience, on détermine la fonction $\tau^{(3)}_{exp}(T,1,\delta)$, qui sera notée $\tau^{(4)}(T,\delta)$. Cette expérience se réalise aisément avec le montage de la figure 3.1. Avec un tel montage, la cinématique est très proche de celle posée en section 3.4.3 [p. 49] (aux effets de bord près sur les bords libres [10]). On peut donc considérer le tenseur de déformation isovolume comme pratiquement uniforme dans l'éprouvette.

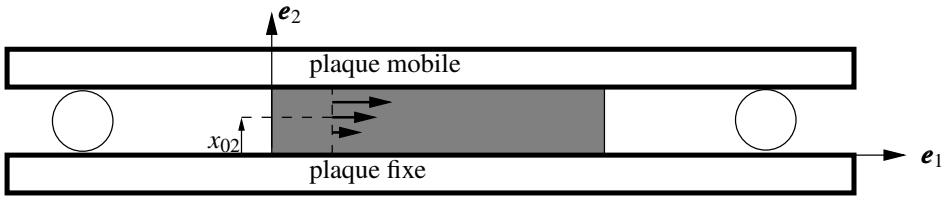


FIGURE 3.1 – Exemple de montage pour une déformation isovolume. Les rouleaux symbolisent un dispositif quelconque garantissant la distance constante entre les plaques indéformables

On mesure aisément pour différentes températures uniformes [11] la force horizontale $F^{(4)}(T,\gamma)$ exercée sur la plaque mobile et le déplacement horizontal $d^{(4)}$ de la plaque mobile. On en déduit la contrainte tangentielle :

$$\tau^{(4)} = \frac{F^{(4)}}{S} \quad \text{où } S \text{ est l'aire de contact entre l'éprouvette et les plaques.}$$

Par ailleurs, la cinématique du mouvement conduit à :

$$\gamma = \frac{d^{(4)}}{h} \quad \text{où } h \text{ est la distance constante entre les plaques.}$$

Pour être physiquement sensée, pour une température T uniforme fixée, la courbe expérimentale $\tau^{(4)}(T,\gamma) = \tau^{(4)}(T,\sqrt{3}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1})$ devrait être monotone croissante en γ.

En toute rigueur, il faut faire cet essai pour différentes dilatations volumiques initiales. Toutefois, si on admet l'hypothèse facultative 3.3 [p. 52], la fonction expérimentale $\tau^{(4)} = \tau^{(3)}_{exp}(T,1,\delta)$ n'est autre que la fonction $\tau^{(3)}_{exp\,1}(T,\delta)$ définie dans l'équation (3.18) [p. 52]. La fonction $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\delta)$ est alors complètement déterminée :

$$\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\delta) = \frac{\tau^{(3)}_{exp\,1}(T,\delta)}{K_v}$$

L'hypothèse facultative 3.3 [p. 52] simplifie donc beaucoup l'identification du modèle, *mais elle doit être expérimentalement validée*.

Remarques sur le vocabulaire – Il n'aura pas échappé au lecteur averti que l'auteur a jusqu'ici évité d'employer le mot « cisaillement ». En effet, dans la littérature spécialisée ce mot est employé avec des significations diverses :

– tantôt ce mot a un sens cinématique : il s'agit d'un mouvement dont le tenseur de déformation est de la forme donnée en section 3.4.3 [p. 49]. Dans ce sens cinématique, ce mouvement isovolume est aussi souvent appelé *glissement*.

[10] Ces effets de bord sont mis en évidence plus loin dans une illustration numérique [section 9.6 p. 123].

[11] Pour relever chaque point de mesure, il faut donc attendre l'uniformisation des températures.

– tantôt ce mot a un sens sthénique : le tenseur des contraintes est un déviateur ou bien a une partie déviatorique non nulle.

Ces deux notions ne sont pas équivalentes : en général, un mouvement de glissement isovolume n'engendre pas un tenseur des contraintes de trace nulle (déviatorique), sauf si on admet l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 52]. Cette confusion courante provient d'habitudes prises en pseudo-élasticité classique de Hooke [section 4.2 p. 61] car, dans cette théorie, un mouvement isovolume engendre toujours un tenseur des contraintes de trace nulle ($\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = 0$).

Dans la décomposition de la déformation en déformation sphérique et déformation isovolume [éq. (3.1) p. 44], le mouvement de glissement qui a été choisi pour faire varier la variable d'état δ n'est qu'un cas particulier de déformation isovolume [12] [hypothèse 3.1 p. 44] ; si l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 52] n'est pas expérimentalement justifiée, le tenseur des contraintes n'est pas de trace nulle dans un mouvement isovolume.

3.6.2 Déformation sphérique isotherme ($\mathscr{C}^{(2)}$)

Il est expérimentalement difficile d'exercer une traction sphérique uniforme sur la frontière d'une éprouvette. En revanche, il est plus facile d'exercer une compression sphérique par l'intermédiaire d'un fluide sous pression. C'est pourquoi cette mesure est souvent appelée mesure de compressibilité isotherme, que l'on peut éventuellement extrapoler pour les tractions sphériques. Cette évolution étant isotherme, les mesures ne doivent être relevées que quand la température est uniformisée. Il faut tracer les courbes de la contrainte moyenne $\sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v)$ à différentes températures T. La mesure de la dilatation volumique K_v peut se faire par des moyens optiques ou mécaniques.

3.6.3 Dilatation thermique libre ($\mathscr{C}^{(5)}$)

Une mesure directe de la quantité de chaleur massique $Q^{(1)}_{exp}$ dans l'évolution $\mathscr{C}^{(1)}$ (variation de température sans déformation) est très difficile à réaliser expérimentalement : il faut disposer d'une enceinte de confinement indéformable et indilatable mais thermostatable. On peut remplacer cette expérience par une expérience de dilatation thermique *à contrainte nulle*, que l'on appelle aussi *dilatation libre*, suivie d'une déformation sphérique isotherme qui ramène la dilatation volumique K_v à la valeur 1.

Dans une dilatation libre (chemin $\mathscr{C}^{(5)}$), le tenseur des contraintes est nul et reste nul. On mesure la quantité de chaleur massique $Q^{(5)}_{exp}(T)$ ainsi que la dilatation volumique [13] $K^{(5)}_{vexp}(T)$. La condition de contrainte nulle conduit à l'équation :

$$\sigma^{(2)}_{exp}(T, K^{(5)}_{vexp}(T)) = 0, \quad \forall T$$

qui est une condition que doivent satisfaire les deux courbes expérimentales $\sigma^{(2)}_{exp}$ et $K^{(5)}_{vexp}$. En écrivant la conservation de l'énergie pour cette évolution entre l'état initial $(T_0, 1, 1)$ et l'état librement dilaté $(T, K^{(5)}_{vexp}, 1)$, il vient :

$$Q^{(1)}_{exp}(T) = Q^{(5)}_{exp}(T) - \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K^{(5)}_{vexp}} \left(\sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v) - T\,\partial_T \sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v) \right) \mathrm{d}K_v \tag{3.20}$$

Si la fonction $\sigma^{(2)}_{exp}$ a préalablement été identifiée par une expérience de déformation sphérique isotherme, la relation (3.20) montre que l'on peut remplacer la mesure expérimentalement

[12] Avec un peu de cinématique, on peut montrer que toute déformation isovolume peut être vue comme la composition (malheureusement non unique !) de deux glissements.

[13] On peut aussi bien mesurer une dilatation linéique K_l dans une direction. Le milieu étant isotrope, on a $K_v = K_l^3$.

difficile de $Q^{(1)}_{exp}(T)$ par la mesure beaucoup plus aisée de $Q^{(5)}_{exp}(T)$ (chaleur massique de dilatation à contrainte nulle).

Relation entre C_p et C_v – En dérivant par rapport à T la relation (3.20), on établit une relation entre la capacité thermique à volume initial bloqué $C_v(T)$ et la capacité thermique à contrainte nulle $C_p(T)$, que l'on pourrait appeler « relation de Mayer » [14] pour les solides élastiques isotropes dont les variables d'état sont (T, K_v, δ).

3.6.4 Essai de traction simple isotherme ($\mathscr{C}^{(6)}$)

Cet essai est simple à effectuer mais assez compliqué à exploiter pour l'identification du matériau car dans un essai de traction simple, les deux variables d'état K_v et δ évoluent simultanément. Comme dans toute expérience isotherme, il faut attendre l'uniformisation des températures avant de relever les mesures.

Remarque – Dans les essais de traction courants, on ne prend généralement pas cette précaution (les mesures sont relevées pendant le mouvement, sans arrêt avant la mesure). Le léger refroidissement de l'éprouvette qui se produit pendant une traction n'est pas pris en compte, ce qui aboutit à une légère surestimation de la raideur isotherme du matériau. Il est cependant facile de constater expérimentalement ce phénomène en arrêtant le mouvement de traction : on verra diminuer légèrement l'effort de traction indiqué par le capteur de force de la machine pendant le petit réchauffement de l'éprouvette. Ce phénomène est aussi prédit dans les illustrations numériques de la section 9.3.4 [p. 117].

Dans un essai de traction simple dans la direction $\boldsymbol{e}_1$, le tenseur des contraintes *dans la zone utile de l'éprouvette* est considéré comme uniaxial et uniforme :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(6)} = \sigma^{(6)}_{exp}\, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1$$

Le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ est lui aussi uniforme dans cette zone, mais il n'est pas uniaxial. Ses composantes dans une base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ sont de la forme :

$$[B^{(6)\bullet}{}_{\bullet}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

où λ_1 est la dilatation linéique principale dans la direction de traction $\boldsymbol{e}_1$ et λ_2 est la dilatation linéique principale transverse. L'aire actuelle de la section droite est :

$S_t = \lambda_2^2 S_0$ où S_0 est l'aire initiale de la section droite.

Dans un essai de traction simple isotherme, on relève les deux courbes $F^{(6)}_{exp}(\lambda_1)$ et $\lambda_2(\lambda_1)$. Les dilatations linéiques longitudinale λ_1 et transversale λ_2 sont données par des extensomètres. Le tenseur des contraintes étant uniforme, on en déduit que la contrainte normale actuelle dans la direction $\boldsymbol{e}_1$ est :

$$\sigma^{(6)}_{exp} = \frac{F^{(6)}}{S_t} = \frac{F^{(6)}}{\lambda_2^2 S_0} \tag{3.22}$$

[14] Les thermodynamiciens appellent relation de Mayer pour les gaz parfaits la relation $C_p - C_v = r$.

La dilatation volumique et la distorsion stérique maximale actuelles dans cet essai sont donc :

$$K_v = \lambda_1\,\lambda_2^2 \quad ; \quad \delta = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(\lambda_1^2+2\,\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1\,\lambda_2^2} \tag{3.23}$$

On peut alors vérifier si la loi de comportement du modèle, complètement identifiée par les expériences précédentes, est bien prédictive pour un essai de traction. Ces relation sont d'expression compliquée [15], mais *sous l'hypothèse simplificatrice facultative* 3.3 [p. 52], elles s'écrivent un peu plus simplement :

$$\sigma_{exp}^{(6)} = \sigma_{exp}^{(2)}(T,\lambda_1\,\lambda_2^2) + \frac{2\,(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\,\tau_{exp}^{(3)}\big(T,\frac{\sqrt{3}\,(\lambda_1^2+2\,\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}}{9\,\lambda_1\,\lambda_2^2}\big)}{3\,(\lambda_1\,\lambda_2^2)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{\lambda_1^2+2\,\lambda_2^2}{(\lambda_1\,\lambda_2^2)^{\frac{2}{3}}}-3}} \qquad \text{(contrainte de traction)}$$

$$0 = \sigma_{exp}^{(2)}(T,\lambda_1\,\lambda_2^2) - \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\,\tau_{exp}^{(3)}\big(T,\frac{\sqrt{3}\,(\lambda_1^2+2\,\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}}{9\,\lambda_1\,\lambda_2^2}\big)}{3\,(\lambda_1\,\lambda_2^2)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{\lambda_1^2+2\,\lambda_2^2}{(\lambda_1\,\lambda_2^2)^{\frac{2}{3}}}-3}} \qquad \text{(contraintes transversales nulles)}$$

Ces deux relations sont équivalentes aux deux relations suivantes :

$$\sigma_{exp}^{(6)} = 3\,\sigma_{exp}^{(2)}(T,\lambda_1\,\lambda_2^2) = \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\,\tau_{exp}^{(3)}\big(T,\frac{\sqrt{3}\,(\lambda_1^2+2\,\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}}{9\,\lambda_1\,\lambda_2^2}\big)}{(\lambda_1\,\lambda_2^2)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{\lambda_1^2+2\,\lambda_2^2}{(\lambda_1\,\lambda_2^2)^{\frac{2}{3}}}-3}}$$

où les fonctions $\sigma_{exp}^{(2)}$ et $\tau_{exp}^{(3)}$ sont déterminées par les expériences précédentes.

La simplicité expérimentale de l'essai de traction en fait un essai courant, mais son exploitation pour l'identification du matériau est complexe car, contrairement aux autres essais, les deux variables d'état K_v (dilatation volumique) et δ (distorsion stérique maximale) varient simultanément [éq. (3.23)]. En revanche, elle constitue une bonne validation du modèle qui a été identifié par les autres expériences.

3.7 Quelques idéalisations possibles

Pour économiser des expériences, on peut choisir *a priori* des expressions mathématiques vraisemblables pour les fonctions expérimentales $Q_{exp}^{(1)}(T)$, $\sigma_{exp}^{(2)}(T,K_v)$ et $\tau_{exp}^{(3)}(T,K_v,\delta)$. La construction du modèle suivie dans ce chapitre montre qu'il est possible de les choisir arbitrairement sans compromettre le caractère élastique isotrope du modèle. Elles doivent néanmoins satisfaire les conditions évidentes suivantes :

$$Q_{exp}^{(1)}(T_0) = 0 \quad ; \quad \sigma_{exp}^{(2)}(T,K_{v\,exp}^{(5)}(T)) = 0, \quad \forall T \quad ; \quad \tau_{exp}^{(3)}(T,K_v,1) = 0, \quad \forall T\ \forall K_v$$

et ressembler à des courbes expérimentales (les idéalisations devraient être suggérées par quelques expériences).

Par exemple, on peut imposer *arbitrairement* pour la fonction $\tau_{exp}^{(3)}$ une proportionnalité en γ :

$$\tau_{exp}^{(3)}(T,K_v,\delta) = \frac{2\,\mu(T)\,\gamma}{K_v} = \frac{2\,\mu(T)\,\sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1}}{K_v} \quad \text{avec} \quad \mu(T) = \mu_0\,e^{b\,(1-\frac{T}{T_0})}$$

[15] Voir la fin de la feuille de calcul en annexe F [p. 147 et suivantes].

Remarque – Ce choix est de la forme donnée dans l'équation (3.18) [p. 52]. Il satisfait donc à l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 52] : la contribution d'un mouvement isovolume au tenseur des contraintes est de trace nulle.

Dans ce cas la fonction $g^{(3)}$ se réduit à (noter qu'elle est indépendante de K_v) :

$$g^{(3)} = \frac{4\,\mu_0\, e^{b\,(1-\frac{T}{T_0})}}{\rho_0}\left(\sqrt{2}+(\delta^{\frac{1}{3}}-2)\sqrt{\delta^{\frac{1}{3}}+1}\right)$$

On peut aussi poser *arbitrairement* pour la fonction $\sigma^{(2)}_{exp}$ (contrainte moyenne en déformation sphérique isotherme) la forme suivante :

$$\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \sigma^{(1)}_{exp}(T) + \xi(T)\,\ln K_v \quad \text{avec} \quad \xi(T) = \xi_0\, e^{a\,(1-\frac{T}{T_0})}$$

où $\sigma^{(1)}_{exp}(T)$ est la contrainte moyenne (sphérique) issue du chemin $\mathscr{C}^{(1)}$.

Remarque – Noter le comportement raisonnable de cette idéalisation de la contrainte moyenne aux deux limites $K_v \to 0$ et $K_v \to \infty$.

Dans ce cas la fonction $g^{(2)}$ se réduit à :

$$g^{(2)}[T,K_v] = \frac{\xi_0\, e^{a\,(1-\frac{T}{T_0})}}{\rho_0}\,(1-K_v+K_v\,\ln K_v)$$

Si on remplace le chemin $\mathscr{C}^{(1)}$ par une dilatation libre $\mathscr{C}^{(5)}$ (on mesure donc $Q^{(5)}_{exp}(T)$ et $K^{(5)}_{v\,exp}(T)$) suivie d'une compression sphérique isotherme pour ramener K_v à la valeur 1, il vient :

$$\sigma^{(1)}_{exp} = -\xi_0\, e^{a\,(1-\frac{T}{T_0})}\,\ln K^{(5)}_{v\,exp} \qquad \text{(compression isotherme)}$$

$$Q^{(1)}_{exp}(T) = Q^{(5)}_{exp}(T) - \frac{1}{\rho_0}\int_1^{K^{(5)}_{v\,exp}} \left(\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) - T\,\partial_T\,\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v)\right)\mathrm{d}K_v \qquad \text{[éq. (3.20) p. 54]}$$

La conservation de l'énergie dans une dilatation libre s'écrit alors :

$$Q^{(5)}_{exp}(T) = Q^{(1)}_{exp}(T) + \frac{\xi_0}{\rho_0}\,e^{a\,(1-\frac{T}{T_0})}\left((1+a\,\frac{T}{T_0})\left(1-K^{(5)}_{v\,exp}(T)+\ln K^{(5)}_{v\,exp}(T)\right)+ T\,(K^{(5)}_{v\,exp}(T)-1)\,\frac{\partial_T K^{(5)}_{v\,exp}(T)}{K^{(5)}_{v\,exp}(T)}\right) \tag{3.24}$$

On peut choisir *arbitrairement* pour $K^{(5)}_{v\,exp}(T)$:

$$K^{(5)}_{v\,exp}(T) = 1+\beta\,(T-T_0) \qquad (\beta \text{ : coef. de dilatation } \textit{volumique} \text{ à contrainte nulle})$$

Attention – Ne pas confondre un coefficient de dilatation volumique avec un coefficient de dilatation linéique. Dans certaines bases de données de constantes physiques, la mention « coefficient de dilatation thermique » est ambiguë.

Enfin, on peut choisir *arbitrairement* une fonction simple de $Q^{(5)}_{exp}(T)$ ou de $Q^{(1)}_{exp}(T)$ (l'autre se trouvant déterminée par l'équation de la conservation de l'énergie (3.24) [p. 57]).

Les expressions des fonctions d'état et de la loi de comportement mécanique avec ces idéalisations sont données dans la dernière section de la feuille de calcul en annexe F [p. 147].

Il est important de noter que les idéalisations de courbes expérimentales présentées dans cette section ne sont que des exemples arbitraires qui n'ont aucune justification théorique. Elles ne sont que physiquement vraisemblables et peuvent être remplacées par d'autres.

3.8 En bref...

Le modèle d'élasticité isotrope construit dans ce chapitre découle du choix des trois variables d'état indépendantes suivantes :

1. T : température absolue actuelle,
2. K_v : dilatation volumique actuelle,
3. δ : distorsion stérique maximale actuelle.

La dimension de l'espace des états de ce modèle élastique isotrope est donc 3 au lieu de 4 en raison de l'hypothèse 3.1 [p. 44] qui rend équivalentes toutes les déformations isovolumes de même distorsion stérique maximale.

Ce modèle peut être complètement identifié par un petit nombre d'expériences idéales :

1. un glissement isotherme dont on mesure la contrainte tangentielle $\tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta)$ (ou bien seulement $\tau^{(3)}_{exp\,1}(T, \delta)$ si on fait l'hypothèse supplémentaire 3.3 [p. 52]) ;
2. une déformation sphérique isotherme dont on mesure la contrainte moyenne $\sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v)$;
3. une variation de température à déformation nulle dont on mesure la chaleur massique (J.kg^{-1}) échangée $Q^{(1)}_{exp}(T)$ (ou bien à contrainte nulle et on mesure la chaleur massique $Q^{(5)}_{exp}(T)$ et la dilatation thermique).

La définition complète du modèle en fonction de ces trois expériences a été donnée en section 3.4.4 [p. 50].

> **Remarque –** Il est possible de le simplifier un peu en supposant en plus qu'une déformation isovolume n'engendre que des contraintes déviatoriques (elle ne fait pas varier la contrainte moyenne) [hyp. 3.3 p. 52], sous réserve que cette hypothèse soit expérimentalement validée.

Ces expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles ou des combinaisons d'expériences réelles.

Si l'on idéalise les mesures expérimentales avec des expressions mathématiques physiquement vraisemblables, on construit un modèle de comportement élastique isotrope physiquement vraisemblable, thermodynamiquement admissible et facile à identifier car il se réduit à l'identification de quelques coefficients.

4

Pseudo-élasticité de Hooke

De nos jours (2017), il n'est pas encore possible de passer sous silence dans un cours d'élasticité la traditionnelle loi de Hooke en « petites perturbations ». Cette loi de comportement mécanique est présentée dans la quasi-totalité des ouvrages traitant d'élasticité. On y consacre donc ce chapitre, bien que la loi de comportement élastique isotrope présentée (avec différents tenseurs de déformation) dans les chapitres précédents, n'étant soumise à aucune condition ni sur les déformations ni sur les mouvements, soit évidemment toujours valable lorsque les déformations sont petites.

L'élasticité classique présentée dans tous les cours élémentaires est appelée « élasticité linéaire » de Hooke. Elle utilise comme mesure de déformation le tenseur des « petites perturbations » (dit aussi improprement des « petites déformations » [(1)]) $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}$. Dans ces cours, la loi de Hooke est proposée *a priori* comme une relation linéaire entre le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Puisque cette loi de comportement mécanique ne fait aucune référence à l'orientation du tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ par rapport à la position actuelle de directions matérielles d'anisotropie, il s'agit donc d'un modèle de comportement de matériau isotrope.

Dans ce chapitre, on va d'une part rappeler les restrictions cinématiques [(2)] impliquées par l'utilisation de $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme mesure des petites déformations et d'autre part montrer que cette « élasticité » n'est pas thermodynamiquement admissible, ce qui justifie le titre de ce chapitre.

4.1 Hypothèse des « petites perturbations » (rappel)

Le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ est défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} \qquad \text{où } \boldsymbol{u} \text{ est le champ des déplacements.}$$

Ce tenseur émane d'une dégradation du tenseur de déformation non objectif $\boldsymbol{E}$, appelé *tenseur de Green-Lagrange droit*, qui a été établi sans restrictions cinématiques ni sur le mouvement ni sur les déformations, et dont une définition est [(3)] :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^T\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^T\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\right) \tag{4.1}$$

(1) Il est facile de vérifier, avec un petit calcul de cinématique, qu'un mouvement de rotation de solide (donc sans déformation) conduit à un tenseur $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. Il existe donc des petites déformations où $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$!

(2) Ces restrictions cinématiques ont été étudiées en détail dans le chapitre sur les déformations dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

(3) Voir le chapitre 4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]

où $\boldsymbol{u}(P,t) = \boldsymbol{x}_t(P) - \boldsymbol{x}_0(P)$ est le champ de déplacement des particules pour un certain observateur.

On rappelle que l'hypothèse qui a été posée pour aboutir à la définition du tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la suivante :

- **Hypothèse 4.1 – Petite perturbation.** On suppose que $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|$ est un infiniment petit du premier ordre, ce que l'on notera dans la suite $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$.

Le terme $\mathbf{grad}_L^T \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ est alors un infiniment petit du second ordre que l'on décide de négliger (pseudo-linéarisation [4] en $\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$). Dans ce cas, le tenseur $\boldsymbol{E}$ se réduit à $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la norme de ces deux tenseurs est bien un infiniment petit d'ordre 1. L'hypothèse $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$ implique donc que les déformations sont petites. Mais la réciproque est fausse car il existe des mouvements avec de petites déformations pour lesquels $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|$ n'est pas petit (voir un exemple dans la note 1 [p. 59]). On oublie trop souvent de souligner que la condition $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$ implique une restriction sévère sur le *mouvement* (et pas seulement sur les déformations) du milieu continu étudié : le mouvement des particules doit être une quasi-translation de solide car le champ des déplacements $\boldsymbol{u}(P,t)$ est quasi-uniforme.

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ n'est une mesure acceptable des petites déformations que si le mouvement du milieu continu est une quasi-translation pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement.

Cette restriction sur les mouvements envisageables a deux conséquences importantes :

1. Si le mouvement du milieu continu est proche d'une rotation de solide indéformable, les déformations sont effectivement petites, mais le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ n'est pas apte à traduire correctement ces petites déformations car dans un tel mouvement $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|$ n'est pas petit.
2. Si le mouvement est une quasi-translation de solide pour un certain observateur, il ne l'est généralement pas pour un autre observateur en mouvement par rapport au premier. L'hypothèse 4.1 $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$ qui définit le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est donc pas universelle. Autrement dit, si pour un certain mouvement un observateur a le droit d'utiliser $\boldsymbol{\varepsilon}$ car pour lui $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$, un autre observateur en rotation par rapport au premier n'a pas le droit d'utiliser $\boldsymbol{\varepsilon}$ (et donc la loi de Hooke) car pour ce dernier $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \not\ll 1$.

La locution, quelque peu vague, de « petites perturbations » signifie donc de manière précise que *le mouvement du milieu continu, **pour l'observateur utilisé**, est une quasi-translation* [5].

En dépit de cette sévère restriction cinématique sur les mouvements envisageables, l'utilisation du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ pour mesurer des petites déformations reste encore très populaire [6].

[4] Dans un processus correct de linéarisation, on néglige les termes du second ordre devant 1. Or ici on néglige un terme de l'ordre de $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|^2$ devant des termes de l'ordre de $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|$, ce qui est mathématiquement douteux !

[5] Par ailleurs, il faut rappeler que $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$ n'implique aucune restriction sur $\|\boldsymbol{u}\|$: on peut ajouter au déplacement une translation aussi grande que l'on veut sans changer $\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$; les déplacements de la quasi-translation n'ont donc pas à être « petits », contrairement à ce qui est parfois affirmé.

[6] Cette mesure des petites déformations est même parfois imprudemment utilisée lorsque le champ de déplacement s'éloigne beaucoup d'une quasi-translation, notamment en flexion et en torsion de solides élastiques minces. Pratiquement, la condition $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$ n'est sensiblement satisfaite que dans un essai de traction.

4.2 Loi de Hooke historique

Cette loi empirique, qui a été proposée par Robert Hooke en 1678 sous forme scalaire, s'exprime aujourd'hui par la relation tensorielle suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{G} \qquad \text{où } \mu \text{ et } \lambda \text{ sont les } \textit{coefficients de Lamé} \text{ (en Pa)} \tag{4.2}$$

Cette relation traduit bien un comportement isotrope [7] puisque l'évaluation du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ se fait sans référence à l'orientation du tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ par rapport à des directions matérielles particulières.

En prenant la trace de l'équation (4.2) [p. 61], on obtient la relation :

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = (2\mu + 3\lambda)\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}}{2\mu + 3\lambda}$$

Cette relation permet de trouver la relation inverse :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{G}\right)$$

La loi de Hooke est donc une bijection entre les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$.

On présente souvent la loi de Hooke sous une forme différente en effectuant les changements de coefficients $(\mu, \lambda) \leftrightarrow (E, \nu)$ suivants :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \Leftrightarrow \qquad E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \text{ et } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Le coefficient E est appelé *module d'Young* (en Pa) et le coefficient ν est appelé *coefficient de Poisson* (adimensionnel). Ces nouveaux coefficients sont souvent préférés car ils sont facilement interprétables *dans un essai de traction isotherme* :

- le module d'Young E est le coefficient de proportionnalité entre la contrainte normale dans la direction de traction $\boldsymbol{e}_1$ et l'allongement relatif dans cette même direction ($\sigma^1{}_1 = E\,\varepsilon^1{}_1$) ;
- Le coefficient de Poisson est l'opposé du rapport entre l'allongement relatif transversal et l'allongement relatif longitudinal ($\varepsilon^2{}_2 = \varepsilon^3{}_3 = -\nu\,\varepsilon^1{}_1$). On a toujours : $-1 < \nu < \frac{1}{2}$.

Avec ces nouveaux coefficients, la loi de Hooke isotherme s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{G}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\,\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{G} \tag{4.3}$$

Quand on veut tenir compte partiellement des effets thermiques (il existe une dilatation thermique isotrope, mais les coefficients E, ν, μ et λ restent constants en fonction de la température), on ajoute un terme de dilatation thermique sphérique à la déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\,\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{G} + \underbrace{\alpha\,(T - T_0)\,\boldsymbol{G}}_{\text{dilat. therm.}} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{G}\right) - \frac{E}{1-2\nu}\,\alpha\,(T - T_0)\,\boldsymbol{G}$$

[7] Mais pas élastique, voir la section suivante.

où α est un coefficient constant de dilatation thermique *linéique* (K^{-1}). On peut aussi bien écrire cette loi avec les coefficients de Lamé :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{G}\right) + \underbrace{\alpha\,(T-T_0)\,\boldsymbol{G}}_{\text{dilat. therm.}} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{G} - (3\lambda+2\mu)\,\alpha\,(T-T_0)\,\boldsymbol{G} \tag{4.4}$$

4.3 Recherche d'une énergie libre conduisant à la loi de Hooke

Dans cette section, on cherche à reconstruire la loi de Hooke à partir du comportement élastique isotrope qui a été établi dans le chapitre 2 [p. 17] sans restrictions sur ni le mouvement ni sur les déformations, c'est-à-dire sans restriction sur $\|\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\|$. Si la loi de Hooke est une loi élastique, elle doit être une conséquence de l'application de la même hypothèse $\|\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\| \ll 1$ sur la loi de comportement élastique sans restrictions écrite avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{E}$.

On rappelle que la loi de comportement élastique isotrope en utilisant le tenseur de déformation lagrangien $\boldsymbol{E}$ s'écrit [éq. (2.18) p. 28] :

$$\frac{\sqrt{1+2E_{\mathrm{I}}+4E_{\mathrm{II}}+8E_{\mathrm{III}}}}{\rho_0}\,\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E + E_{\mathrm{I}}\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + (E_{\mathrm{II}}+2E_{\mathrm{III}})\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\right)\boldsymbol{G} + \left(2\,\partial_{E_{\mathrm{I}}} f_\psi^E + (2E_{\mathrm{I}}-1)\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E - E_{\mathrm{I}}\,\partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\right)\boldsymbol{E} + \left(-2\,\partial_{E_{\mathrm{II}}} f_\psi^E + \partial_{E_{\mathrm{III}}} f_\psi^E\right)\boldsymbol{E}^2$$

où :
- $\sqrt{1+2E_{\mathrm{I}}+4E_{\mathrm{II}}+8E_{\mathrm{III}}} = K_v$ est la dilatation volumique actuelle ;
- $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{R}^\top\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{R}$ est le tenseur des contraintes tourné par $\boldsymbol{R}^\top$ où $\boldsymbol{R}$ est le champ de tenseurs orthogonaux issu de la décomposition polaire du gradient lagrangien des positions actuelles : $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$.

Rappel – La présence de $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ à la place de $\boldsymbol{\sigma}$ est inhérente à l'utilisation d'un tenseur de déformation non objectif dans la loi de comportement [section 2.3.5 p. 26].

Si l'on néglige le produit $\mathbf{grad}_L^T\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}$ dans la définition du tenseur de déformation $\boldsymbol{E}$ [éq. (4.1) p. 59], il vient : $\boldsymbol{E}\simeq\boldsymbol{\varepsilon}$. La loi de comportement élastique avec un mouvement restreint à une quasi-translation doit donc être de la forme :

$$\frac{\sqrt{1+2\varepsilon_{\mathrm{I}}+4\varepsilon_{\mathrm{II}}+8\varepsilon_{\mathrm{III}}}}{\rho_0}\,\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + (\varepsilon_{\mathrm{II}}+2\varepsilon_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\right)\boldsymbol{G} + \left(2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + (2\varepsilon_{\mathrm{I}}-1)\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \left(-2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\right)\boldsymbol{\varepsilon}^2 \tag{4.5}$$

Puisque $\|\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\| \ll 1 \Rightarrow \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$, la dilatation volumique K_v s'écrit après linéarisation :

$$K_v = \sqrt{1+2\varepsilon_{\mathrm{I}}+4\varepsilon_{\mathrm{II}}+8\varepsilon_{\mathrm{III}}} \simeq \sqrt{1+2\varepsilon_{\mathrm{I}}} \simeq 1+\varepsilon_{\mathrm{I}}$$

Par ailleurs, puisque le mouvement est restreint à une quasi-translation, le champ tensoriel orthogonal $\boldsymbol{R}$ est un champ de petites rotations que l'on peut écrire sous la forme [8] :

$$\boldsymbol{R} \simeq \boldsymbol{G} + \boldsymbol{A} \qquad \text{où } \boldsymbol{A} \text{ est un tenseur antisymétrique tel que } \|\boldsymbol{A}\| \ll 1$$

[8] Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

En linéarisant en $\|\boldsymbol{A}\|$ il vient :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} \simeq (\boldsymbol{G}-\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\sigma}+2\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})$$

Compte tenu de la condition cinématique $\|\boldsymbol{A}\| \ll 1$ imposée par l'utilisation du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme mesure des déformations, la loi de comportement élastique isotrope [éq. 4.5] se réduit à :

$$\frac{1+\varepsilon_{\mathrm{I}}}{\rho_0}\,(\boldsymbol{\sigma}+2\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})) = \Big(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + (\varepsilon_{\mathrm{II}}+2\varepsilon_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{G} + \Big(2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + (2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}-1)\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{\varepsilon} + \Big(-2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{\varepsilon}^2$$

soit encore, toujours en négligeant les termes second ordre devant 1 :

$$\frac{1+\varepsilon_{\mathrm{I}}}{\rho_0}\,\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{\rho_0}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}) = \Big(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + (\varepsilon_{\mathrm{II}}+2\varepsilon_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{G} + \Big(2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + (2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}-1)\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{\varepsilon} + \Big(-2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{\varepsilon}^2$$

Comme on peut le constater, la condition cinématique $\|\boldsymbol{A}\| \ll 1$ (petite rotation), imposée par l'utilisation de $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme mesure des petites déformations, n'est pas suffisante pour que le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ puisse être évalué sans tenir compte de la petite rotation $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{A}$.

- **Hypothèse 4.2 – Hypothèse cinématique supplémentaire.** Le mouvement du milieu continu est tel que $\|\boldsymbol{A}\|$ est un infiniment petit du *second ordre*, ce que l'on écrira :

$$\|\boldsymbol{A}\| \lll 1$$

Dans ce cas, le champ de rotation $\boldsymbol{R}$ de la décomposition polaire s'écrit :

$$\boldsymbol{R} \simeq \boldsymbol{G}+\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{G} \qquad (\|\boldsymbol{A}\| \lll 1 : \text{« très petite » rotation})$$

Sous l'hypothèse cinématique supplémentaire sur le mouvement 4.2, on peut alors confondre $\boldsymbol{\sigma}$ et $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et la loi de comportement élastique isotrope en petites déformations et en « très petites » rotations s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{1+\varepsilon_{\mathrm{I}}}\Big(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + (\varepsilon_{\mathrm{II}}+2\,\varepsilon_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{G} + \frac{\rho_0}{1+\varepsilon_{\mathrm{I}}}\Big(2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + (2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}-1)\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\rho_0}{1+\varepsilon_{\mathrm{I}}}\Big(-2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{\varepsilon}^2$$

que l'on peut encore écrire, toujours en linéarisant rigoureusement ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0\,(1-\varepsilon_{\mathrm{I}})\Big(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + (\varepsilon_{\mathrm{II}}+2\,\varepsilon_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{G} + \rho_0\,(1-\varepsilon_{\mathrm{I}})\Big(2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + (2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}-1)\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{\varepsilon} + \rho_0\,(1-\varepsilon_{\mathrm{I}})\Big(-2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\Big)\,\boldsymbol{\varepsilon}^2$$

Ainsi, pour que l'on puisse écrire une relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ (objectif) et le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ (non objectif) il faut non seulement que le mouvement soit une quasi-translation (l'utilisation de $\boldsymbol{\varepsilon}$ implique $\|\boldsymbol{A}\| \ll 1$), mais de plus que les rotations soient « très petites » (pour confondre $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$, il faut $\|\boldsymbol{A}\| \lll 1$).

Sous réserve que le mouvement du solide déformable satisfasse *pour l'observateur utilisé* les restrictions cinématiques précédentes, la fonction d'état énergie libre de Helmholtz f_ψ^ε qui conduirait à la loi de Hooke [éq. (4.4) p. 62] doit être solution du système d'équations différentielles suivant :

$$0 = -2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon \qquad \text{(coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}^2\text{)} \tag{4.6}$$

$$2\,\mu = \rho_0\,(1-\varepsilon_{\mathrm{I}})\left(2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + (2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}-1)\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\right) \qquad \text{(coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}\text{)} \tag{4.7}$$

$$\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{I}} - (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\,(T-T_0) = \rho_0\,(1-\varepsilon_{\mathrm{I}})\left(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + (\varepsilon_{\mathrm{II}} + 2\,\varepsilon_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\right) \tag{4.8}$$

(coefficient de $\boldsymbol{G}$)

Il n'existe pas de solution réelle en f_ψ^ε à ce système différentiel !

Démonstration – La solution générale du système ci-dessus est [9] :

$$f_\psi^\varepsilon = f(T) - \frac{\alpha\,(T-T_0)\,(3\,\lambda+2\,\mu)\,\ln K_v}{\rho_0\,(1-\varepsilon_{\mathrm{I}})} + \frac{\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\ln K_v}{\rho_0\,(1-\varepsilon_{\mathrm{I}})} - \frac{\mu\left(\ln K_v + (1-\varepsilon_{\mathrm{I}})\,\ln(-1+\varepsilon_{\mathrm{I}})\right)}{\rho_0\,(1-\varepsilon_{\mathrm{I}})}$$

où $K_v = \sqrt{1+2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}+4\,\varepsilon_{\mathrm{II}}+8\,\varepsilon_{\mathrm{III}}} \simeq 1+\varepsilon_{\mathrm{I}}$ et où dans le dernier terme, $\ln(-1+\varepsilon_{\mathrm{I}})$ est complexe pour de petites déformations ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$). Pour le cas isotherme, il suffit de poser $T = T_0$, ce qui ne change rien à la conclusion.

Ainsi, même au prix de sévères restrictions sur le mouvement (pour l'observateur utilisé) afin de pouvoir confondre $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$, la loi de Hooke n'est pas une loi de comportement de solide élastique isotrope thermodynamiquement admissible car il n'existe pas de fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz conduisant à la loi de Hooke.

Remarque – En fait, quelles que soient les restrictions de mouvement (valables pour un certain observateur), il était sans espoir de chercher à établir une relation affine *universelle* entre le tenseur objectif $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur non objectif $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Une approximation supplémentaire courante mais incohérente – Pour tenter de conférer malgré tout un caractère pseudo-élastique à la loi de Hooke, on propose souvent l'approximation supplémentaire suivante pour « simplifier » les équations 4.7 et 4.8 [p. 64] :

$$\rho \simeq \rho_0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\varepsilon_{\mathrm{I}}) \simeq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\varepsilon_{\mathrm{I}}) \simeq 1$$

Cette approximation est « argumentée » par le fait que les déformations sont petites. Cette approximation est mathématiquement incompatible avec les approximations faites précédemment : on ne peut pas dire à la fois que la déformation est un infiniment petit du premier ordre (petites déformations, $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$) et un infiniment petit du second ordre (ε_{I} négligé devant 1, $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \lll 1$). Autrement dit, on ne peut pas affirmer dans un même calcul que la dilatation volumique vaut 1 et néanmoins affirmer ultérieurement que sa valeur est $1+\varepsilon_{\mathrm{I}}$. L'incohérence mathématique soulignée ici a une interprétation physique : affirmer à la fois que $\rho = \rho_0$ et qu'il existe néanmoins une dilatation volumique est une violation du principe de conservation de la masse [10]. Les calculs qui suivent vont donc nécessairement refléter cette incohérence.

[9] Le détail des calculs est donné en annexe G page 172 dans une feuille calcul exécutable dans MATHEMATICA® dans sa version 5.2.

[10] On rappelle que le principe de la conservation conservation de la masse implique la relation $\frac{\rho_0}{\rho} = K_v$. Voir le cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

Si, en dépit de cette incohérence, on continue les calculs avec $\rho \simeq \rho_0$, le système différentiel (4.6) (4.7) (4.8) [p. 64] se simplifie et devient :

$$0 = -2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + \partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon \qquad \text{(coeff. de } \boldsymbol{\varepsilon}^2\text{)}$$

$$2\,\mu = \rho_0 \left(2\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + (2\,\varepsilon_{\mathrm{I}} - 1)\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\right) \qquad \text{(coeff. de } \boldsymbol{\varepsilon}\text{)}$$

$$\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{I}} - (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\,(T - T_0) = \rho_0 \left(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}} f_\psi^\varepsilon + \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{II}}} f_\psi^\varepsilon + (\varepsilon_{\mathrm{II}} + 2\varepsilon_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon_{\mathrm{III}}} f_\psi^\varepsilon\right) \qquad \text{(coeff. de } \boldsymbol{G}\text{)}$$

dont la solution générale est [11] :

$$\frac{\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{I}}\ln K_v}{\rho_0} + \frac{\mu\,\varepsilon_{\mathrm{I}}\ln K_v}{\rho_0} - \frac{(3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\,(T - T_0)\ln K_v}{\rho_0} + f(T) + \frac{\mu}{2\,\rho_0} \tag{4.9}$$

où $f(T)$ est une fonction quelconque définissant l'énergie libre massique de Helmholtz d'un solide non déformé à la température T et où $K_v = \sqrt{1 + 2\,\varepsilon_{\mathrm{I}} + 4\,\varepsilon_{\mathrm{II}} + 8\,\varepsilon_{\mathrm{III}}} \simeq 1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}$

On arrive donc, sous l'hypothèse (incohérente) $\rho \simeq \rho_0$ jointe aux sévères restrictions sur le mouvement signalées précédemment, à trouver une énergie libre massique de Helmholtz, mais celle-ci n'est valable, en toute rigueur, que quand la dilatation volumique $K_v \simeq 1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}$ vaut 1 *au troisième ordre près* ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \lll 1$), c'est-à-dire pour des milieux élastiques quasi-incompressibles.

4.4 Une nouvelle « loi de Hooke » en déformations finies

En première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 4.6 [p. 69] sans nuire à la compréhension de la suite.

Pour se conformer à certaines habitudes prises dans les cours traditionnels d'élasticité utilisant le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$, on se propose d'écrire la loi de comportement d'un milieu solide élastique isotrope linéaire en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ *sans restrictions cinématiques*. On rappelle que le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G} = \sqrt{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T} - \boldsymbol{G}$$

Comme pour le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$, le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est nul lorsqu'il n'y a pas de déformation ; mais son utilisation comme mesure des déformations (petites ou non) ne requiert aucune restriction ni sur le mouvement ni sur les déformations car $\|\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\|$ n'est soumis à aucune condition. Comme pour le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$, ses valeurs propres $\varepsilon_i^v = \lambda_i - 1$ sont les *allongements relatifs* dans les directions principales actuelles de déformation. En revanche, l'allongement relatif dans une direction matérielle actuelle $\boldsymbol{u}_t$ quelconque est :

$$K_l - 1 = \frac{1}{\|(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t\|} - 1$$

Cas particulier des petites déformations – Si les déformations sont petites, on pose $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$ (noter qu'ici, il n'y a aucune restriction sur le mouvement : $\|\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\|$ n'est pas contraint). En linéarisant [12] en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, on trouve $K_v \simeq 1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}^v$; la dilatation volumique *relative* en une particule est donc :

$$K_v - 1 \simeq \varepsilon_{\mathrm{I}}^v = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}^v$$

[11] Le détail des calculs est donné en annexe G page 175 dans une feuille calcul MATHEMATICA® version 5.2.

[12] Ces linéarisations sont faites dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

De même l'allongement *relatif* linéarisé dans une direction matérielle actuelle quelconque $\boldsymbol{u}_t$ est :

$$K_l - 1 = \frac{1}{\|(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^v)^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t\|} - 1 \simeq \boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^v\cdot\boldsymbol{u}_t$$

Ainsi, en linéarisant (correctement) en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, on retrouve des formules semblables à celles données dans les cours traditionnels d'élasticité de Hooke avec le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$, à ceci près qu'il n'y a ici aucune restriction sur le mouvement et que les directions matérielles sont identifiées par leur direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ et non par leur direction initiale $\boldsymbol{u}_0$. La seule restriction porte sur la norme du tenseur de déformation : $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$ (petite déformation).

On pourrait être tenté d'utiliser le tenseur de déformation lagrangien $\boldsymbol{\varepsilon}^u = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{G}$, les formules linéarisées pour K_v et K_l sont les mêmes, sauf que les directions matérielles sont maintenant identifiées par leur direction initiale $\boldsymbol{u}_0$ (comme pour le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$). Cependant, on serait amené à de nécessaires restrictions sur le mouvement [hypothèse 4.2 p. 63] pour pouvoir confondre $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. En pratique, ces restrictions sur le mouvement ne sont acceptables que dans un essai de traction.

On rappelle que la loi de comportement élastique isotrope avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ sans aucune hypothèse sur $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\|$ ni restriction de mouvement est :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0\boldsymbol{G} + K_1\boldsymbol{\varepsilon}^v + K_2(\boldsymbol{\varepsilon}^v)^2 \qquad \text{[éq. (2.14) p. 25]}$$

où :

$$K_0 = \rho_0\,\frac{\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{I}}} f^{\varepsilon^v}_\psi + \varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{II}}} f^{\varepsilon^v}_\psi + (\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} f^{\varepsilon^v}_\psi}{1+\varepsilon^v_{\mathrm{I}}+\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} \qquad \text{(coefficient de } \boldsymbol{G}\text{)}$$

$$K_1 = \rho_0\,\frac{\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{I}}} f^{\varepsilon^v}_\psi - (1-\varepsilon^v_{\mathrm{I}})\,\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{II}}} f^{\varepsilon^v}_\psi - \varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} f^{\varepsilon^v}_\psi}{1+\varepsilon^v_{\mathrm{I}}+\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} \qquad \text{(coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}^v\text{)}$$

$$K_2 = -\rho_0\,\frac{\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{II}}} f^{\varepsilon^v}_\psi - \partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} f^{\varepsilon^v}_\psi}{1+\varepsilon^v_{\mathrm{I}}+\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} \qquad \text{(coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}^{v\,2}\text{)}$$

On peut chercher s'il existe une loi de comportement *linéaire* $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varepsilon}^v)$ semblable à la loi de Hooke donnée en (4.4) page 62. Si une telle loi existe, la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz $f^{\varepsilon^v}_\psi$ doit satisfaire le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}
\lambda\,\varepsilon^v_{\mathrm{I}} - (3\lambda+2\mu)\,\alpha\,(T-T_0) = K_0 &= \rho_0\,\frac{\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{I}}} f^{\varepsilon^v}_\psi + \varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{II}}} f^{\varepsilon^v}_\psi + (\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}})\,\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} f^{\varepsilon^v}_\psi}{1+\varepsilon^v_{\mathrm{I}}+\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}}}\\
2\mu = K_1 &= \rho_0\,\frac{\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{I}}} f^{\varepsilon^v}_\psi - (1-\varepsilon^v_{\mathrm{I}})\,\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{II}}} f^{\varepsilon^v}_\psi - \varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} f^{\varepsilon^v}_\psi}{1+\varepsilon^v_{\mathrm{I}}+\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}}}\\
0 = K_2 &= -\rho_0\,\frac{\partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{II}}} f^{\varepsilon^v}_\psi - \partial_{\varepsilon^v_{\mathrm{III}}} f^{\varepsilon^v}_\psi}{1+\varepsilon^v_{\mathrm{I}}+\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}}}
\end{aligned}$$

La solution générale de ce système différentiel est [13] :

$$\begin{aligned}
f^{\varepsilon^v}_\psi = \frac{\lambda}{2\rho_0}\,\varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,(\varepsilon^v_{\mathrm{I}} + 2\,(\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}})) + \frac{\mu}{\rho_0}(\varepsilon^{v\,2}_{\mathrm{I}} - 2\,(\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}}))\\
- \frac{\alpha\,(T-T_0)\,(3\lambda+2\mu)\,(\varepsilon^v_{\mathrm{I}}+\varepsilon^v_{\mathrm{II}}+\varepsilon^v_{\mathrm{III}})}{\rho_0} + f(T)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

[13] Le détail des calculs est donné en annexe G page 178 dans une feuille calcul exécutable dans MATHEMATICA® dans sa version 5.2.

Avec cette expression de l'énergie libre massique, la loi de comportement *en déformations finies* est semblable à la loi de Hooke énoncée en début de chapitre, mais en remplaçant $\boldsymbol{\varepsilon}$ par $\boldsymbol{\varepsilon}^v$:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}^v + \lambda\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^v\,\boldsymbol{G} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha\,(T - T_0)\,\boldsymbol{G} \tag{4.11}$$

Avec la substitution de $\boldsymbol{\varepsilon}$ par $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, toutes les formules et interprétations de la section 4.2 [p. 61] restent valables [(14)]. Cette loi de comportement mécanique est *a fortiori* encore vraie pour des petites déformations quand $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$.

Il est important de noter que la seule motivation qui a conduit à l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz proposée dans l'équation (4.10) [p. 66] n'était que d'obtenir une loi de comportement linéaire en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ [éq. (4.11)] ressemblant à la traditionnelle loi de Hooke. On peut préférer des motivations plus physiques dans la construction des fonctions d'état d'un modèle élastique isotrope (en particulier, la signification cinématique des variables d'état $\varepsilon^v_{\mathrm{II}}$ et $\varepsilon^v_{\mathrm{III}}$ n'est pas claire).

4.5 Élasticité isotrope en petites déformations sans restriction sur le mouvement

En première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 4.6 [p. 69] sans nuire à la compréhension de la suite.

Tout modèle de comportement élastique isotrope sans restriction ni sur le mouvement ni sur les déformations peut être particularisé aux petites déformations. Dans cette section, on se propose de particulariser aux petites déformations ($\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| = \|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{G}\| \ll 1$) le modèle élastique isotrope construit dans le chapitre 3 [p. 43], où l'on a *choisi* pour les variables d'état l'ensemble de grandeurs physiques $\{T, K_v, \delta\}$ où T est la température, K_v est la dilatation volumique et δ est la distorsion stérique maximale de la déformation. On rappelle que cette loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0\boldsymbol{G} + K_1\boldsymbol{B} \qquad \text{[éq. 3.19 p. 52]}$$

avec

$$K_0 = \sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v) - \frac{\delta^{\frac{2}{3}}\,\tau^{(3)}_{exp\,1}(T,\delta)}{\sqrt{3}\,K_v\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \qquad\qquad K_1 = \frac{\tau^{(3)}_{exp1}(T,\delta)}{\sqrt{3}\,K_v^{\frac{5}{3}}\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

où :
- $\sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v)$ est la contrainte moyenne dans une expérience de déformation sphérique à température constante T ; cette fonction doit être croissante en K_v et nulle pour $K_v = 1$;
- $\tau^{(3)}_{exp\,1}(T,\delta)$ est la contrainte tangentielle dans un essai glissement à la température constante T et sans déformation sphérique préalable ; elle doit être croissante en $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}$ et nulle pour $\gamma = 0$ (ou $\delta = 1$).

Par construction, quelles que soient ces deux courbes expérimentales, le modèle construit est nécessairement un modèle de comportement élastique isotrope thermodynamiquement admissible. On rappelle que la dilatation volumique est :

$$K_v = B_{\mathrm{III}}{}^{\frac{1}{2}} = V_{\mathrm{III}} = \det(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)$$

(14) La loi de comportement (4.11) mériterait éventuellement le nom de « néo-Hooke », mais ce nom est déjà utilisé pour un autre modèle de comportement [section 2.4.2 p. 31].

et que la distorsion stérique maximale est

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})^{\frac{3}{2}}}{B_{\mathrm{III}}{}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})}$$

Puisque l'on cherche à établir une loi de comportement restreinte aux petites déformations ($\|\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}\| \ll 1$), on ramène la description des fonctions expérimentales $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v)$ et $\tau^{(3)}_{exp\,1}(T,\delta)$ à leur linéarisation au voisinage d'un mouvement rigide : K_v voisin de 1 et γ voisin de 0 [15]. On pose donc :

$$\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) \simeq \sigma^{(1)}_{exp}(T) + \xi_0(T)\,(K_v-1) = \sigma^{(1)}_{exp}(T) + \xi_0(T)\,(\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})-1) \tag{4.12}$$

$$\tau^{(3)}_{exp\,1}(T,\delta) \simeq \mu_0(T)\,\gamma = \mu_0(T)\,\sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1} \tag{4.13}$$

où $\xi_0(T)$ et $\mu_0(T)$ sont respectivement les pentes à l'origine des courbes expérimentales $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v)$ et $\tau^{(3)}_{exp\,1}(T,\gamma)$ à température constante.

Les coefficients de la loi de comportement deviennent :

$$\begin{aligned}
K_0 &= \xi_0(T)\,(\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})-1) - \frac{\mu_0(T)\,\delta^{\frac{2}{3}}}{\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})}\\
&= \xi_0(T)\,(\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})-1) - \frac{\mu_0(T)}{3}\,\frac{\mathrm{tr}((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})^2)}{\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})^{\frac{5}{3}}}\\
K_1 &= \frac{\mu_0(T)}{\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})^{\frac{5}{3}}}
\end{aligned}$$

En linéarisant correctement (on néglige les termes du second ordre devant 1), il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0\,\boldsymbol{G} + K_1\,(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})^2 \simeq (K_0+K_1)\,\boldsymbol{G} + 2\,K_1\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}$$

où :

$$\begin{aligned}
K_0+K_1 &= \xi_0(T)\,(\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})-1) + \frac{\mu_0(T)\left(3-\mathrm{tr}((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})^2)\right)}{3\,\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})^{\frac{5}{3}}}\\
&\simeq \xi_0(T)\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}} - \frac{2\,\mu_0(T)\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}}}{3\,(1+\frac{5}{3}\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}})} \simeq \xi_0(T)\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}} - \frac{2\,\mu_0(T)\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}}}{3}\,(1-\frac{5}{3}\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}})\\
2\,K_1 &= \frac{2\,\mu_0(T)}{\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu})^{\frac{5}{3}}} \simeq \frac{2\,\mu_0(T)}{1+\frac{5}{3}\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}}} \simeq 2\,\mu_0(T)\,(1-\frac{5}{3}\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}})
\end{aligned}$$

Finalement, la loi de comportement élastique isotrope en petites déformations avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}$ est la loi isotrope (non linaire en $\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}$) suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\xi_0(T) - \frac{2\,\mu_0(T)}{3}\,(1-\frac{5}{3}\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}})\right)\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}}\,\boldsymbol{G} + 2\,\mu_0(T)\,(1-\frac{5}{3}\,\varepsilon^{\nu}_{\mathrm{I}})\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}$$

[15] La linéarisation en γ est assez arbitraire. On pourrait linéariser en δ, ce qui donnerait une loi de comportement mécanique finale légèrement différente mais toujours « non linéaire ».

Remarques – Contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer [16], une loi de comportement élastique isotrope particularisée au voisinage d'un mouvement rigide ($\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$) n'est pas nécessairement une fonction linéaire des déformations (observer le coefficient de $\boldsymbol{G}$). Le calcul précédent montre qu'une linéarisation des mesures expérimentales $\sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v)$ et $\tau^{(3)}_{exp\,1}(T, \gamma)$ autour de $K_v = 1$ et $\gamma = 0$ conduit à une loi de comportement mécanique non linéaire en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$. On n'obtiendrait une loi semblable à la loi de Hooke qu'en acceptant de négliger $\frac{5}{3}\,\varepsilon^v_{\mathrm{I}}$ devant 1 (« très petite » dilatation volumique, c'est-à-dire une quasi-incompressibilité).

En fait, qualifier de « linéaire » une loi de comportement n'a pas de sens physique puisque cette pseudo-propriété dépend du choix arbitraire (donc sans motivation physique) d'un tenseur de déformation. Une loi linéaire pour un certain tenseur de déformation ne l'est plus pour un autre tenseur de déformation.

4.6 En bref...

L'utilisation du traditionnel tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}$ pour mesurer les petites déformations implique de sévères restrictions sur les mouvements envisageables : le mouvement doit être une quasi-translation ($\|\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\| \ll 1$) avec de très petites rotations (pour confondre $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$) pour l'observateur utilisé. De plus, si ces restrictions sur le mouvement sont acceptables pour un certain observateur, elles ne le sont généralement pas pour un autre. Enfin, la loi de Hooke classiquement présentée en élasticité traditionnelle élémentaire avec le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est pas une loi élastique thermodynamiquement admissible.

Remarque – Bien que la loi de Hooke ne soit pas thermodynamiquement admissible, il se peut que certains résultats de calcul soient numériquement acceptables lorsque les nécessaires restrictions cinématiques sont valides pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement et lorsque les dilatations volumiques sont très faibles ($\rho \simeq \rho_0$).

Il a été possible de construire un modèle de comportement élastique isotrope linéaire en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, thermodynamiquement admissible, ressemblant à la loi de Hooke historique et sans restriction ni sur les déformations ni sur le mouvement. Cette loi est évidemment valable pour les petites déformations. Cependant la construction de l'énergie libre massique de Helmholtz de ce modèle est physiquement peu justifiée : pour la trouver, on y a imposé, sans motivation physique, la linéarité de la relation entre le tenseur des contraintes objectif $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^v$.

On est en droit d'espérer que les logiciels à venir [17] résoudront correctement les problèmes d'élasticité (isotrope ou non) sans restriction sur les déformations ni sur les mouvements, avec des modèles de comportement thermodynamiquement admissibles construits avec des fonctions d'état physiquement motivées. Ils feront *a fortiori* des calculs corrects dans les régions où les déformations sont petites sans qu'il soit nécessaire de changer de théorie.

[16] L'auteur reconnaît humblement avoir supprimé trop vite des termes en $(\varepsilon^v_I)^2$ dans les calculs de linéarisation du coefficient de $\boldsymbol{G}$ dans la première version de ce cours.
[17] La dernière version de texte date de 2017.

5

Élasticité isotrope transverse

Dans ce chapitre on établit la forme générale de la loi de comportement des solides élastiques *isotropes transverses*, c'est-à-dire anisotropes à une seule direction d'anisotropie en chaque particule. Ce modèle convient bien pour modéliser macroscopiquement des milieux fibreux (la direction d'anisotropie est celle de la fibre) ou bien des milieux lamellaires (la direction d'anisotropie est la normale aux lamelles, les lamelles étant isotropes).

5.1 Choix des variables d'état

L'état local actuel d'un solide élastique isotrope transverse est défini par :

1. la température actuelle T (imposée par le second principe) ;
2. un tenseur de déformation actuelle objectif $\boldsymbol{X}$ (la forme du solide non sollicité à une température uniforme T_0 sert de référence pour les déformations) ;
3. la direction actuelle de l'unique direction matérielle d'anisotropie, représentée par le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}_t$ ou mieux par le tenseur uniaxial unitaire $\boldsymbol{N}_t = \boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t$ qui représente une direction non orientée par son unique direction propre.

Le deux premières variables d'état T et $\boldsymbol{X}$ précisent que le milieu continu est un solide déformable [déf. 1.1 p. 12] , et la dernière ($\boldsymbol{n}_t$ ou $\boldsymbol{N}_t$) précise la direction actuelle de la direction d'anisotropie. La définition de l'élasticité a été donnée dans la définition 1.2 [p. 13].

Afin de limiter le nombre de formules, on fait le choix arbitraire [1] d'utiliser le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$. La liste des variables d'état tensorielles est donc $(T,\boldsymbol{B},\boldsymbol{n}_t)$ ou $(T,\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}_t)$. Ces variables d'état étant objectives [2], les fonctions d'état scalaires (objectives par principe) énergie interne massique e^m, entropie massique s^m et énergie libre massique de Helmholtz ψ^m sont donc des fonctions isotropes de leurs arguments. Une liste possible des variables d'état scalaires objectives et indépendantes est donc [3] :

$$\{T\,,\,B_{\mathrm{I}}\,,\,B_{\mathrm{II}}\,,\,B_{\mathrm{III}}\,,\,\underbrace{\boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}_t}_{I_1^B=\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}\,,\,\underbrace{\boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{n}_t}_{I_2^B=\boldsymbol{B}^2:\boldsymbol{N}_t}\} \tag{5.1}$$

On rappelle que les invariants croisés $I_1^B = \boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t$ et $I_2^B = \boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{B}^2:\boldsymbol{N}_t$ traduisent d'une certaine manière l'orientation actuelle de la direction d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t$ par

[1] Ce choix est sans importance fondamentale : la conversion des formules avec d'autres tenseurs de déformation n'est qu'une question d'algèbre.

[2] La formule de changement d'observateur des directions matérielles actuelles $\boldsymbol{n}_t$ est celle des vecteurs objectifs, il en est de même pour le tenseur $\boldsymbol{N}_t$. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

[3] C'est une conséquence du théorème des fonctions isotropes. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour les milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3]. On rappelle que les invariants du tenseur uniaxial unitaire $\boldsymbol{N}_t$ sont des constantes qui ne sont donc pas des variables d'état.

rapport aux directions propres actuelles du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$. La dimension de l'espace des états d'un milieu continu solide isotrope transverse est donc au plus 6.

Les dérivées particulaires des invariants fondamentaux B_{I}, B_{II} et B_{III} sont [éq. (2.6) p. 20] :

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B}:\boldsymbol{D} \quad ; \quad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\left(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^2\right):\boldsymbol{D} \quad ; \quad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2B_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G}:\boldsymbol{D} \tag{5.2}$$

On montre en annexe [éq. (A.5) et (A.6) p. 129] que les dérivées particulaires des invariants croisés I_1^B et I_2^B s'écrivent :

$$\dot{I}_1^B = 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} - 2I_1^B\,(\boldsymbol{N}_t:\boldsymbol{D}) \tag{5.3}$$

$$\dot{I}_2^B = 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}^2):\boldsymbol{D} - 2I_2^B\,\boldsymbol{N}_t:\boldsymbol{D} + 2\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}\right):\boldsymbol{D} \tag{5.4}$$

Comme toute dérivée particulaire d'une grandeur scalaire objective, ces dérivées particulaires sont des grandeurs scalaires objectives [(4)].

5.2 Loi de comportement mécanique en élasticité isotrope transverse

Comme en élasticité isotrope, on déduit la loi de comportement mécanique isotrope transverse de la nullité de la dissipation intrinsèque pour toute évolution de toute particule :

$$\Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} = 0 \qquad \text{[éq. (1.4) p. 13]} \tag{5.5}$$

où la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz s'écrit :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}, I_1^B, I_2^B)$$

Sa dérivée particulaire est donc :

$$\dot{\psi}^m = \partial_T f_\psi^B\,\dot{T} + \partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B\,\dot{B}_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\dot{B}_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\dot{B}_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B\,\dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B\,\dot{I}_2^B$$

La dissipation intrinsèque [éq. (5.5)] s'écrit alors :

$$\Phi_{int} = -\rho\left(\partial_T f_\psi^B + s^m\right)\dot{T} - \underbrace{\rho\left(\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B\,\dot{B}_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\dot{B}_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\dot{B}_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B\,\dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B\,\dot{I}_2^B\right)}_{g(T,\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}_t,\boldsymbol{D}) \text{ (indépendant de } \dot{T})} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} = 0$$

5.2.1 Relation de Helmholtz

La dissipation intrinsèque doit être nulle en tout état, c'est-à-dire $\forall\,(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}, I_1^B, I_2^B)$ et pour toute évolution à partir de cet état, c'est-à-dire $\forall\,\dot{T}$ et $\forall\boldsymbol{D}$. La fonction d'état $\rho\left(\partial_T f_\psi + s^m\right)$ ne pouvant être fonction de $\dot{T}$, elle ne peut être que nulle. On en déduit la relation de Helmholtz pour les milieux élastiques isotropes transverses [(5)] :

$$s^m = f_s^B = -\partial_T f_\psi^B \qquad \Leftrightarrow \qquad T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \tag{5.6}$$

(4) S'il lui semble nécessaire, le lecteur pourra vérifier aisément cette objectivité en utilisant les formules de changement d'observateur des tenseurs objectifs du second ordre $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{N}_t$.

(5) Voir la remarque p. 20.

5.2.2 Comportement élastique isotrope transverse avec le tenseur $\boldsymbol{B}$

Compte-tenu de la relation de Helmholtz, la dissipation intrinsèque se réduit à :

$$-\rho\left(\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B \dot{B}_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B \dot{B}_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B \dot{B}_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \dot{I}_2^B\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = 0$$

soit encore, en utilisant les expressions des dérivées particulaires (5.2), (5.3) et (5.4) [p. 72] :

$$\begin{aligned} 0 = &-2\rho\left(\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B \boldsymbol{B} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B (B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B B_{\mathrm{III}} \boldsymbol{G}\right) : \boldsymbol{D} - \\ &2\rho\left(\partial_{I_1^B} f_\psi^B \left(2\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - I_1^B \boldsymbol{N}_t\right) + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \left(2\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - I_2^B \boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}\right)\right) : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \end{aligned}$$

où la conservation de la masse implique : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v} = \frac{\rho_0}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}}$. Comme en élasticité isotrope, on peut factoriser la dissipation intrinsèque sous la forme :

$$0 = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}, \ \ \forall \boldsymbol{D}$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ étant une fonction d'état [déf. 1.2 p. 13], le tenseur du second ordre symétrique $\boldsymbol{T}$ est aussi une fonction d'état. Il n'est donc pas fonction de $\boldsymbol{D}$. On en déduit que $\boldsymbol{T} = \mathbf{0}$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

- **Théorème 5.1 – Comportement mécanique élastique isotrope transverse.** En élasticité isotrope transverse, si on utilise le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ pour mesurer les déformations, la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = &\frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}}\left(B_{\mathrm{III}}\,\partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B \boldsymbol{G} + (\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B + B_{\mathrm{I}}\,\partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B)\,\boldsymbol{B} - \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B \boldsymbol{B}^2\right) + \\ &\frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}}\left(\partial_{I_1^B} f_\psi^B \big(\underbrace{\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t}_{2\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B})} - I_1^B \boldsymbol{N}_t\big) + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \big(\underbrace{\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{N}_t}_{2\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}^2)} - I_2^B \boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}\big)\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Le premier terme est formellement identique à la loi de comportement élastique isotrope [(6)] donnée dans l'équation (2.9) [p. 21] et le second terme, qui fait intervenir les dérivées partielles $\partial_{I_1^B} f_\psi^B$ et $\partial_{I_2^B} f_\psi^B$ et les quatre tenseurs symétriques $\mathbf{sym}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t)$, $\mathbf{sym}(\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{N}_t)$, $\boldsymbol{N}_t$ et $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}$, est un complément dû à l'anisotropie.

Remarques – Si l'énergie libre de Helmholtz n'est pas fonction des invariants croisés I_1^B et I_2^B, on retrouve la loi de comportement élastique isotrope [éq. (2.9) p. 21].

Par ailleurs, contrairement à l'élasticité isotrope, le tenseur des contraintes et le tenseur de déformation objectif n'ont pas les mêmes directions propres.

Le comportement d'un solide élastique isotrope transverse est donc complètement déterminé lorsque l'on connaît l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}, I_1^B, I_2^B) \qquad \text{où} \quad I_1^B = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t \quad \text{et} \quad I_2^B = \boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t$$

(6) Cette ressemblance n'est que formelle car la fonction d'état f_ψ^B et ses dérivées partielles sont *a priori* fonction des variables d'état d'anisotropie I_1^B et I_2^B.

Remarque – Toute expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état $T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}, I_1^B, I_2^B$ est *a priori* une expression valide conduisant à une loi de comportement élastique isotrope transverse thermodynamiquement admissible. Toutefois, afin d'éviter de construire des comportements exotiques comme ceux cités dans la section 2.4 [p. 29], il est judicieux de changer la liste des variables d'états en une autre liste (éventuellement plus réduite) dont l'interprétation cinématique des termes est plus claire, afin de construire une expression des fonctions d'état (énergie libre de Helmholtz, énergie interne ou entropie) physiquement raisonnée. Pour établir ces expressions en fonction de résultats expérimentaux, on peut suivre une méthode similaire à celle exposée dans l'exemple de construction d'un modèle élastique isotrope au chapitre 3 [p. 43]. Cette méthode sera utilisée au chapitre 6 [p. 81] pour construire un modèle de comportement élastique isotrope transverse.

5.2.3 Déviation des directions d'anisotropie

L'état actuel est décrit par la déformation *actuelle* $\boldsymbol{B}$ et la direction *actuelle* d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t$. Si le champ de déformation actuelle, le champ de déplacement actuel et son gradient $\boldsymbol{F}$ sont en général aisés à mesurer ou à estimer dans les essais simples, la direction actuelle d'anisotropie sous cette déformation peut être plus délicate à mesurer. On rappelle ici à toutes fins utiles les relations entre la direction initiale d'anisotropie avant déformation et la direction actuelle d'anisotropie sous déformation [7] :

$$\boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\|} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_t}{\|\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_t\|} \qquad \text{(déviation des directions matérielles)}$$

Ces relations devraient être utiles aux expérimentateurs. Elles leur permettent de déterminer la direction actuelle d'anisotropie en fonction de la direction initiale d'anisotropie lorsque la cinématique du mouvement est connue.

Remarques – Dans beaucoup d'ouvrages traitant d'anisotropie, les directions d'anisotropie sont considérées comme fixes quand on soumet des éprouvettes à une déformation. Cette approximation peut parfois être acceptable dans certaines conditions d'essais, mais ces conditions sont rarement précisées : il faut que la déviation des directions matérielles d'anisotropie dans le mouvement imposé dans l'essai puisse être considérée comme négligeable.

Notamment, certains milieux continus sont dits « orthotropes » quand ils possèdent deux directions d'anisotropie initialement orthogonales. Sauf peut-être dans certaines déformations particulières à préciser, les directions d'anisotropie ne restent pas orthogonales en général.

5.2.4 Loi élastique isotrope transverse avec le tenseur $\boldsymbol{V}$

En première lecture, on peut ignorer cette sous-section et continuer en section 5.3 [p. 78] sans nuire à la compréhension de la suite.

Cette sous-section n'a pour objectif que d'illuster la méthode algébrique de changement de tenseur de déformation dans une loi de comportement. Ici, on passe du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ au tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ pour la loi élastique isotrope transverse. Le détail des calculs est donné en annexe H [p. 181]. On peut exprimer la loi (5.7) [p. 73] avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$, en posant :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2 \quad ; \quad \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{V}^4 = (V_{\mathrm{I}}^2 - V_{\mathrm{II}})\boldsymbol{V}^2 + (V_{\mathrm{III}} - V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{II}})\boldsymbol{V} + V_{\mathrm{I}}V_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G} \quad \text{(Cayley-Hamilton)}$$

[7] Ces relations sont démontrées dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

Les changements d'invariants s'écrivent :

$$B_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{I}}^2 - 2\,V_{\mathrm{II}} \quad ; \quad B_{\mathrm{II}} = V_{\mathrm{II}}^2 - 2\,V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{III}} \quad ; \quad B_{\mathrm{III}} = V_{\mathrm{III}}^2$$
$$I_1^B = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t = \boldsymbol{V}^2 : \boldsymbol{N}_t = I_2^V \quad ; \quad I_2^B = \boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t = (V_{\mathrm{I}}^2 - V_{\mathrm{II}})\,I_2^V + (V_{\mathrm{III}} - V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{II}})\,I_1^V + V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{III}}$$

où on a posé : $I_1^V = \boldsymbol{V} : \boldsymbol{N}_t$ et $I_2^V = \boldsymbol{V}^2 : \boldsymbol{N}_t$. L'énergie libre massique avec les nouvelles variables d'état réduites s'écrit :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}, I_1^B, I_2^B) = f_\psi^V(T, V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}}, I_1^V, I_2^V)$$

On en déduit les relations linéaires entre les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial_T f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B\,\partial_T T + \partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B\,\partial_T B_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\partial_T B_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\partial_T B_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B\,\partial_T I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B\,\partial_T I_2^B \\
&= \partial_T f_\psi^B + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
\partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{I}}} T + \partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{I}}} B_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{I}}} B_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{I}}} B_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{I}}} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{I}}} I_2^B \\
&= 0 + 2\,V_{\mathrm{I}}\,\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B - 2\,V_{\mathrm{III}}\,\partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B + 0 + 0 + (2\,V_{\mathrm{I}}\,I_2^V - V_{\mathrm{II}}\,I_1^V + V_{\mathrm{III}})\,\partial_{I_2^B} f_\psi^B \\
\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} T + \partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} B_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} B_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} B_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} I_2^B \\
&= 0 - 2\,\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B + 2\,V_{\mathrm{II}}\,\partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B + 0 + 0 + (-I_2^V - V_{\mathrm{I}}\,I_1^V)\,\partial_{I_2^B} f_\psi^B \\
\partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} T + \partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} B_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} B_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} B_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} I_2^B \\
&= 0 + 0 - 2\,V_{\mathrm{I}}\,\partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B + 2\,V_{\mathrm{III}}\,\partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B + 0 + (I_1^V + V_{\mathrm{I}})\,\partial_{I_2^B} f_\psi^B \\
\partial_{I_1^V} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B\,\partial_{I_1^V} T + \partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B\,\partial_{I_1^V} B_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\partial_{I_1^V} B_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\partial_{I_1^V} B_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B\,\partial_{I_1^V} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B\,\partial_{I_1^V} I_2^B \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + (V_{\mathrm{III}} - V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{II}})\,\partial_{I_2^B} f_\psi^B \\
\partial_{I_2^V} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B\,\partial_{I_2^V} T + \partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B\,\partial_{I_2^V} B_{\mathrm{I}} + \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B\,\partial_{I_2^V} B_{\mathrm{II}} + \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B\,\partial_{I_2^V} B_{\mathrm{III}} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B\,\partial_{I_2^V} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B\,\partial_{I_2^V} I_2^B \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + \partial_{I_1^B} f_\psi^B + (V_{\mathrm{I}}^2 - V_{\mathrm{II}})\,\partial_{I_2^B} f_\psi^B
\end{aligned}$$

La résolution de ce système linéaire conduit aux expressions des $\partial_\bullet f_\psi^B$ en fonction des $\partial_\bullet f_\psi^V$. En les remplaçant dans la loi (5.7) [p. 73], il vient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} = {} & \frac{\rho_0}{V_{\mathrm{III}}}\Big(V_{\mathrm{III}}\,\partial_{V_{\mathrm{III}}} f_\psi^V\,\boldsymbol{G} + (\partial_{V_{\mathrm{I}}} f_\psi^V + V_{\mathrm{I}}\,\partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V)\,\boldsymbol{V} - \partial_{V_{\mathrm{II}}} f_\psi^V\,\boldsymbol{V}^2\Big) \\
& + \frac{\rho_0\,\partial_{I_1^V} f_\psi^V}{V_{\mathrm{III}}\,(V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{II}} - V_{\mathrm{III}})}\Big(V_{\mathrm{III}}\,(I_1^V + V_{\mathrm{I}})\,G + (V_{\mathrm{III}} - I_1^V\,(V_{\mathrm{I}}^2 + V_{\mathrm{II}}) + I_2^V\,V_1)\,\boldsymbol{V} + (I_1^V\,V_{\mathrm{I}} + I_2^V)\,\boldsymbol{V}^2\Big) \\
& + \frac{4\,\rho_0}{V_{\mathrm{III}}}\Big(\partial_{I_1^V} f_\psi^V\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}_t) + \partial_{I_2^V} f_\psi^V\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{V}^2\cdot\boldsymbol{N}_t)\Big) \\
& - \frac{2\,\rho_0}{V_{\mathrm{III}}}\Big(\big(I_1^V + \frac{V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{III}}}{V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{II}} - V_{\mathrm{III}}}\big)\,\partial_{I_1^V} f_\psi^V + I_2^V\,\partial_{I_2^V} f_\psi^V\Big)\boldsymbol{N}_t - \frac{2\,\rho_0\,\partial_{I_1^V} f'\psi}{V_{\mathrm{III}}\,(V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{II}} - V_{\mathrm{III}})}\,\boldsymbol{V}^2\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{V}^2
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que si l'énergie libre de Helmholtz n'est pas fonction des invariants croisés I_1^V et I_2^V ($\partial_{I_1^V} f_\psi^V = 0$ et $\partial_{I_2^V} f_\psi^V = 0$), alors on retrouve bien la loi de comportement élastique isotrope écrite avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ donnée en éq. (2.12) [p. 23].

Remarque – Le terme $V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{II}} - V_{\mathrm{III}}$ dans les dénominateurs est toujours strictement positif. En effet, son expression en fonction des valeurs propres de $\boldsymbol{V}$ est :

$$V_{\mathrm{I}}\,V_{\mathrm{II}} - V_{\mathrm{III}} = (\lambda_1 + \lambda_2)\,(\lambda_2 + \lambda_3)\,(\lambda_3 + \lambda_1) > 0 \quad \text{car } \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$$

La loi de comportement élastique isotrope transverse écrite avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ apparaît moins maniable que celle avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$.

5.2.5 Loi élastique isotrope transverse avec le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^v$

En première lecture, on peut ignorer cette sous-section et continuer en section 5.3 page 78 sans nuire à la compréhension de la suite.

Pour se conformer à des habitudes prises dans les cours élémentaires d'élasticité, on va changer une nouvelle fois de tenseur de déformation en utilisant le tenseur de déformation objectif défini par $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G}$ (on rappelle qu'il est nul pour un mouvement rigide et que son l'utilisation n'est soumise à aucune restriction ni sur les déformations ni sur le mouvement). Les variables d'état sont maintenant : $(T\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{II}}\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{III}}\,,\,\boldsymbol{\varepsilon}^v : \boldsymbol{N}_t\,,\,\boldsymbol{\varepsilon}^{v2} : \boldsymbol{N}_t)$ qu'on notera $(T\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{II}}\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{III}}\,,\,I_1^{\varepsilon^v}\,,\,I_2^{\varepsilon^v})$ et on pose :

$$\psi^m = f^B_\psi(T\,,\,B_{\mathrm{I}}\,,\,B_{\mathrm{II}}\,,\,B_{\mathrm{III}}\,,\,I_1^B\,,\,I_2^B) = f^{\varepsilon^v}_\psi(T\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{II}}\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{III}}\,,\,I_1^{\varepsilon^v}\,,\,I_2^{\varepsilon^v})$$

Le changement de tenseur de déformation s'effectue suivant la même méthode que dans la section 5.2.4 [p. 74]. Sans détailler les calculs [8], on aboutit à une loi de la forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = K_0\boldsymbol{G} + K_1\boldsymbol{N}t + K_2\boldsymbol{\varepsilon}^v + K_3\,(\boldsymbol{\varepsilon}^v\cdot\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^v) + \\ K_4\boldsymbol{\varepsilon}^{v2} + K_5\boldsymbol{\varepsilon}^v\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^v + K_6\,(\boldsymbol{\varepsilon}^{v2}\cdot\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{v2}) + \\ \frac{1}{2}K_5\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{v2}\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^v + \boldsymbol{\varepsilon}^v\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{v2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{v2}\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{v2}\right)\end{aligned}$$

où les K_i sont des fonctions compliquées des $\partial_\bullet f^{\varepsilon^v}_\psi$ et des variables d'état $(T\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{I}}\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{II}}\,,\,\varepsilon^v_{\mathrm{III}}\,,\,I_1^{\varepsilon^v}\,,\,I_2^{\varepsilon^v})$ qu'il est inutile de reporter ici (voir la feuille de calcul H [p. 181]). Comme précédemment, on constate bien que si $\partial_{I_1^{\varepsilon^v}} f^{\varepsilon^v}_\psi = 0$ et $\partial_{I_2^{\varepsilon^v}} f^{\varepsilon^v}_\psi = 0$, on retrouve la loi de comportement élastique isotrope avec $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ donnée en éq. (4.11) [p. 67]. Cette loi de comportement (sans restrictions ni sur les déformations ni sur le mouvement) apparaît encore moins commode d'utilisation que celle avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$.

Remarque – On peut être tenté de chercher s'il existe une loi de comportement élastique isotrope transverse linéaire en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, similaire à celle que l'on a trouvé en élasticité isotrope [éq. (4.11) p. 67]. On cherche donc s'il existe une fonction $f^{\varepsilon^v}_\psi(T,\varepsilon^v_{\mathrm{I}},\varepsilon^v_{\mathrm{II}},\varepsilon^v_{\mathrm{III}},I_1^{\varepsilon^v},I_2^{\varepsilon^v})$ telle que $K_4 = K_5 = K_6 = 0$.
La réponse est négative car ces conditions conduisent à $\partial_{I_1^{\varepsilon^v}} f^{\varepsilon^v}_\psi = 0$ et $\partial_{I_2^{\varepsilon^v}} f^{\varepsilon^v}_\psi = 0$, ce qui donnerait une loi de comportement isotrope [feuille de calcul H p. 181]. Il n'existe donc pas de loi de comportement mécanique élastique isotrope transverse linéaire en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ thermodynamiquement admissible en déformations finies.

Petites déformations – Les lois de comportement élastique isotrope transverse précédentes (en $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{V}$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}^v$) sont évidemment valables en petites déformations. Certains auteurs présentent *a priori* [9] une loi de comportement élastique isotrope transverse « linéarisée » de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} \simeq K'_0\boldsymbol{G} + K'_1\boldsymbol{N}t + K'_2\boldsymbol{\varepsilon}^v + K'_3\,(\boldsymbol{\varepsilon}^v\cdot\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^v)$$

où K'_0 et K'_1 sont les linéarisations au second ordre près au voisinage d'un mouvement rigide des coefficients K_0, K_1, et où K'_2 et K'_3 sont des constantes (valeurs de K_2 et K_3 pour un mouvement

[8] Le détail des calculs est donné dans la feuille de calcul H [p. 181].
[9] Le plus souvent sans vérifier s'il existe une fonction d'état énergie libre de Helmholtz qui conduise à une loi de cette forme, c'est-à-dire sans vérifier si cette loi est thermodynamiquement possible.

rigide) :

$$K_0' = \underbrace{(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} K_0)(T,0,0,0,0,0)}_{\alpha_0(T)}\, \varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \underbrace{(\partial_{I_1 \varepsilon^v} K_0)(T,0,0,0,0,0)}_{\beta_0(T)}\, I_1^{\varepsilon^v}$$
$$K_1' = \underbrace{(\partial_{\varepsilon_{\mathrm{I}}^v} K_1)(T,0,0,0,0,0)}_{\alpha_1(T)}\, \varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \underbrace{(\partial_{I_1 \varepsilon^v} K_1)(T,0,0,0,0,0)}_{\beta_1(T)}\, I_1^{\varepsilon^v}$$
$$K_2' = K_2(T,0,0,0,0,0) = \alpha_2(T) \qquad ; \qquad K_3' = K_3(T,0,0,0,0,0) = \alpha_3(T)$$

La loi de comportement élastique isotrope transverse « linéarisée » en petites déformations serait donc de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\alpha_0\, \varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \beta_0\, I_1^{\varepsilon^v})\, \boldsymbol{G} + (\alpha_1\, \varepsilon_{\mathrm{I}}^v + \beta_1\, I_1^{\varepsilon^v})\, \boldsymbol{N}_t + \alpha_2\, \boldsymbol{\varepsilon}^v + \alpha_3\, (\boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v) \tag{5.8}$$

où les coefficients α_i sont des fonctions de la température (ou bien souvent des constantes).

Dans une base orthonormée dont la direction $\boldsymbol{e}_1$ est $\boldsymbol{n}_t$, les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sont [10] :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\,\alpha_3 + \beta_0 + \beta_1)\, \varepsilon_{11}^v + (\alpha_0 + \alpha_1)\, \varepsilon_{22}^v + (\alpha_0 + \alpha_1)\, \varepsilon_{33}^v \\
\sigma_{22} &= (\alpha_0 + \beta_0)\, \varepsilon_{11}^v + (\alpha_0 + \alpha_2)\, \varepsilon_{22}^v + \alpha_0\, \varepsilon_{33}^v \\
\sigma_{33} &= (\alpha_0 + \beta_0)\, \varepsilon_{11}^v + \alpha_0\, \varepsilon_{22}^v + (\alpha_0 + \alpha_2)\, \varepsilon_{33}^v \\
\sigma_{23} &= \alpha_2\, \varepsilon_{23}^v \\
\sigma_{31} &= (\alpha_2 + \alpha_3)\, \varepsilon_{31}^v \\
\sigma_{12} &= (\alpha_2 + \alpha_3)\, \varepsilon_{12}^v
\end{aligned}$$

Dans certains ouvrages, la loi (5.8) est présentée par les 6 relations précédentes mises sous une forme matricielle dite *de Voigt* [11] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\,\alpha_3 + \beta_0 + \beta_1 & \alpha_0 + \alpha_1 & \alpha_0 + \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_0 + \beta_0 & \alpha_0 + \alpha_2 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_0 + \beta_0 & \alpha_0 & \alpha_0 + \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 + \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^v \\ \varepsilon_{22}^v \\ \varepsilon_{33}^v \\ \varepsilon_{23}^v \\ \varepsilon_{31}^v \\ \varepsilon_{12}^v \end{bmatrix}$$

La présence de zéros dans cette « matrice de rigidité » n'est due qu'au fait que les composantes des tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont données *dans une base orthonormée dont l'axe $\boldsymbol{e}_1$ est la direction actuelle d'anisotropie*, alors que la relation tensorielle (5.8) [p. 77] est valable dans toute base.

Si, de plus, on restreint les mouvements envisageables à des quasi-translations pour un certain observateur (« petites perturbations », $\|\mathbf{grad}_L\, \boldsymbol{u}\| \ll 1$ et $\|\boldsymbol{A}\| \lll 1$ [hypothèse 4.2 p. 63]), alors on vérifie aisément que les déviations des directions matérielles sont du second ordre. *Sous ces restrictions*, on a $\boldsymbol{n}_0 \simeq \boldsymbol{n}_t$ et on peut remplacer $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ par $\boldsymbol{\varepsilon}$. Les termes de la « matrice de rigidité » sont alors interprétables comme des modules d'Young et des coefficients de Poisson pour des tractions simples dans la direction d'anisotropie et dans les directions transverses [éq. (4.3) p. 61].

[10] Dans cette base, les composantes de $\boldsymbol{N}_t$ sont $N_{t11} = 1$ et toutes les autres sont nulles.

[11] Dans un exposé théorique, la notation de Voigt qui représente les tenseurs symétriques par un vecteur de $\mathbb{R}^6$ est peu recommandable car il faut multiplier artificiellement par $\sqrt{2}$ les composantes non diagonales (dans une base *orthonormée*) pour que le produit scalaire de deux tenseurs du second ordre symétriques soit représenté par le produit scalaire de deux colonnes de $\mathbb{R}^6$. On ne peut éventuellement lui trouver un intérêt que quand on écrit une implémentation informatique (économie de mémoire pour stocker une matrice symétrique, « mécanique numérique »).

5.3 Comportement thermique en élasticité isotrope transverse

La nécessité de l'existence d'une loi de conduction thermique est due à la non négativité de la dissipation thermique [12] :

$$\forall\, \mathbf{grad}_E\, T, \quad \Phi_{th} = -\frac{\boldsymbol{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{grad}_E\, T \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, \mathbf{grad}_E\, T, \quad \boldsymbol{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E\, T \leqslant 0$$

Il est thermodynamiquement admissible d'utiliser la classique loi de Fourier, mais cette loi de conduction thermique, ne faisant pas référence à l'orientation de $\mathbf{grad}_E\, T$ par rapport à la direction d'anisotropie, est une loi de comportement thermique isotrope. Il est physiquement plus vraisemblable d'envisager une loi de conduction thermique isotrope transverse prévoyant des conductions thermiques différentes dans la direction actuelle d'anisotropie et dans les directions transverses qui lui sont orthogonales. On peut utiliser une loi de la forme suivante :

$$\boldsymbol{q}_E = -\alpha_1(\dots)\, \underbrace{(\mathbf{grad}_E\, T \cdot \boldsymbol{n}_t)\boldsymbol{n}_t}_{\boldsymbol{g}_{n_t}} - \alpha_2(\dots)\, \big(\underbrace{\mathbf{grad}_E\, T - (\mathbf{grad}_E\, T \cdot \boldsymbol{n}_t)\boldsymbol{n}_t}_{\boldsymbol{g}_{tr}}\big)$$

où :

- $\boldsymbol{g}_{n_t} = (\mathbf{grad}_E\, T \cdot \boldsymbol{n}_t)\boldsymbol{n}_t$ est la partie du vecteur $\mathbf{grad}_E\, T$ dans la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$;
- $\boldsymbol{g}_{tr} = \mathbf{grad}_E\, T - (\mathbf{grad}_E\, T \cdot \boldsymbol{n}_t)\boldsymbol{n}_t$ est la partie du vecteur $\mathbf{grad}_E\, T$ orthogonale à la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$;
- $\alpha_1(\dots)$ est la conductivité thermique dans la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$; cette fonction peut être constante ou une fonction isotrope [13] positive de $(T, \boldsymbol{g}_{n_t}, \boldsymbol{B})$, c'est-à-dire de tout ou partie des 7 invariants scalaires suivants :

$$(T\,, B_{\mathrm{I}}\,, B_{\mathrm{II}}\,, B_{\mathrm{III}}\,, \|\boldsymbol{g}_{n_t}\|\,, \boldsymbol{g}_{n_t} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{g}_{n_t}\,, \boldsymbol{g}_{n_t} \cdot \boldsymbol{B}^2 \cdot \boldsymbol{g}_{n_t})$$

- $\alpha_2(\dots)$ est la conductivité thermique transverse ; cette fonction peut être constante ou une fonction isotrope positive de $(T, \boldsymbol{g}_{tr}, \boldsymbol{B})$, c'est-à-dire de tout ou partie des 7 invariants scalaires suivants :

$$(T\,, B_{\mathrm{I}}\,, B_{\mathrm{II}}\,, B_{\mathrm{III}}\,, \|\boldsymbol{g}_{tr}\|\,, \boldsymbol{g}_{tr} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{g}_{tr}\,, \boldsymbol{g}_{tr} \cdot \boldsymbol{B}^2 \cdot \boldsymbol{g}_{tr})$$

5.4 Critères de limite élastique

Comme en élasticité isotrope, des considérations microscopiques peuvent suggérer des critères macroscopiques portant sur la déformation macroscopique :

1. Limitation de la dilatation surfacique des facettes matérielles de normale $\boldsymbol{n}_t$ (décollements de fibre dans les milieux fibreux ou cavitation dans les lamelles) :

$$K_s(\boldsymbol{n}_t) = \sqrt{\frac{B_{\mathrm{III}}}{\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t}} \leqslant K_{s\,lim}$$

2. Limitation de la dilatation linéique dans la direction d'anisotropie (rupture des fibres ou décollement des lamelles) :

$$K_l(\boldsymbol{n}_t) = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{B}^{-1} : \boldsymbol{N}_t}} \leqslant K_{l\,lim}$$

[12] Voir le chapitre 5 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

[13] L'isotropie des fonctions α_1 et α_2 est nécessaire pour garantir l'universalité de la loi de conduction thermique.

3. Limitation de la distorsion angulaire maximale de deux directions matérielles initialement orthogonales dont l'une est la direction d'anisotropie (délaminage de fibre ou de lamelle par cisaillement). On démontre en annexe E.2 [p. 144] que ce critère conduit à :

$$\delta^{(1)}_{a\,max} = \frac{K_l(\boldsymbol{n}_t)\,K_s(\boldsymbol{n}_t)}{K_v} = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t)\,(\boldsymbol{B}^{-1}:\boldsymbol{N}_t)}} \leqslant \delta_{a\,lim}$$

4. Limitation de la distorsion angulaire maximale de deux directions matérielles initialement orthogonales à la direction d'anisotropie (distorsion angulaire dans les lamelles). On démontre en annexe E.3 [p. 145] que ce critère conduit à :

$$\delta^{(2)}_{a\,max} = \frac{B_{\mathrm{I}} - K_l(\boldsymbol{n}_t)^2}{2\,K_s(\boldsymbol{n}_t)} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}}{2\sqrt{B_{\mathrm{III}}}}\left(B_{\mathrm{I}} - \frac{1}{\boldsymbol{B}^{-1}:\boldsymbol{N}t}\right) \leqslant \delta_{a\,lim}$$

On montre aussi dans cette annexe que $\delta^{(2)}_{a\,max} \geqslant \delta^{(1)}_{a\,max}$.

5. Limitation de la distorsion angulaire de tout couple de directions matérielles initialement orthogonales quelle que soit sa position par rapport à la direction d'anisotropie :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) \leqslant \delta_{a\,lim} \qquad \text{(critère isotrope)}$$

Ce critère limite évidemment les maximums de distorsion angulaire particuliers précédents.

6. Limitation de la distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales dont l'une est la direction d'anisotropie. On démontre en annexe E.4 [p. 145] que ce critère conduit à :

$$\delta_{s\,max} = \delta^{(2)}_{a\,max} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}}{2\sqrt{B_{\mathrm{III}}}}\left(B_{\mathrm{I}} - \frac{1}{\boldsymbol{B}^{-1}:\boldsymbol{N}t}\right) = \frac{B_{\mathrm{I}} - K_l(\boldsymbol{n}_t)^2)}{2\,K_s(\boldsymbol{n}_t)} \leqslant \delta_{s\,lim}$$

7. Limitation de la distorsion stérique maximale de trois directions initialement orthogonales quelle que soit leur orientation par rapport à la direction d'anisotropie :

$$\delta^{s}_{max} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{B_{\mathrm{I}}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}} \leqslant \delta_{s\,lim} \qquad \text{(critère isotrope)}$$

Ce critère limite évidemment le maximum de distorsion stérique particulier précédent. Il limite aussi les maximums de distorsion angulaire. Ce dernier critère de limite élastique par distorsion est donc le plus restrictif et donc le plus « prudent » du point de vue des distorsions. Il est aussi le plus facile à exploiter.

Ces critères de limite élastique ne sont pas équivalents. Ils peuvent être utilisés seuls ou en combinaison avec d'autres (limitations en distorsion et en dilatation linéique). On peut aussi en proposer d'autres (limitation d'énergies particulières ou réglementation).

5.5 En bref...

L'élasticité isotrope transverse est le comportement élastique des milieux continus solides déformables à une seule direction d'anisotropie. Les variables d'état sont la température actuelle, un tenseur de déformation actuelle objectif et une direction actuelle d'anisotropie. Elles se ramènent donc au plus à 6 variables d'état scalaires indépendantes et objectives.

On peut écrire la loi de comportement mécanique avec différents tenseurs de déformation. La loi de comportement mécanique la plus maniable est celle écrite avec le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$. Le comportement est complètement déterminé par la connaissance de l'expression d'une fonction d'état parmi l'énergie libre massique de Helmholtz, l'énergie interne massique ou l'entropie massique en fonction des variables d'état réduites. Les deux autres fonctions d'état s'en déduisent par la relation de Helmholtz et la définition de l'énergie libre massique de Helmholtz.

La loi de conduction thermique devrait en principe être aussi isotrope transverse. On en a proposé une forme assez générale, qu'il faut identifier expérimentalement.

De même qu'en élasticité isotrope, on peut proposer plusieurs critères de limite élastique limitant des distorsions angulaires ou stériques particulières ou non et/ou limitant des dilatations linéiques particulières ou non.

Il n'est pas interdit d'envisager des anisotropies plus complexes avec deux ou plus directions d'anisotropie (tissages enrobés). La complexité des modèles augmente rapidement avec le nombre de directions d'anisotropie car le nombre de variables d'état scalaires objectives devient de plus en plus grand [(14)], ce qui rend leur identification expérimentale plus laborieuse. Après avoir choisi un ensemble de variables d'état scalaires indépendantes et pertinentes, la construction des fonctions d'état et de la loi de comportement se fait suivant une démarche semblable à celle utilisée en élasticité isotrope. Cette démarche est synthétisée dans le chapitre 7 [p. 89].

[(14)] Voir l'annexe B du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

6

Construction d'un modèle d'élasticité isotrope transverse

La méthode de construction d'un modèle de comportement élastique isotrope transverse utilisée dans ce chapitre est très proche de celle utilisée au chapitre 3 [p. 43] pour la construction d'un modèle élastique isotrope. Afin de construire un modèle simple et facile à identifier, on cherche d'une part à choisir des variables d'état en nombre limité et ayant une signification physique claire, et d'autre part on construit une expression physiquement motivée [(1)] de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction de ces variables d'état.

6.1 Choix des variables d'état

Dans un modèle élastique isotrope transverse, les variables d'état sont *a priori* la température (imposée par le second principe), un tenseur de déformation objectif (on choisit ici le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$) et la direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t = \boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t$. Puisque les fonctions d'état scalaires et objectives sont isotropes [(2)] pour leurs arguments tensoriels objectifs, la théorie des fonctions isotropes implique que la liste des variables d'état scalaires indépendantes contient au plus 6 scalaires :

- la température actuelle (un scalaire),
- les invariants du tenseur de la déformation actuelle (trois scalaires),
- l'orientation relative entre la déformation actuelle et la direction d'anisotropie actuelle (deux scalaires).

Dans l'exemple de modèle élastique isotrope qui a été construit au chapitre 3 [p. 43], on avait réduit à 2 le nombre de variables d'état de déformation :

$$K_v = \sqrt{B_{\mathrm{III}}} \text{ (dilatation volumique)} \qquad \text{et} \qquad \delta = \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{B_{\mathrm{I}}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}} \text{ (distorsion stérique maximale)}$$

ce qui revient à ignorer l'influence de l'invariant B_{II} dans le système des trois invariants fondamentaux $\{B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}\}$. Ce choix était motivé par le fait que toutes les déformations isovolumes ayant la même distorsion stérique maximale δ étaient considérées comme équivalentes.

En isotropie transverse, il faut ajouter un ou plusieurs invariants pour prendre en compte l'orientation relative de la direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t$ par rapport au tenseur de déformation actuel, c'est-à-dire par rapport aux directions propres actuelles de la déformation. Les invariants mathématiquement naturels sont $I_1^B = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t$ et $I_2^B = \boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t$ [éq. (5.1) p. 71]. On peut en donner

(1) C'est-à-dire basée sur des expériences, éventuellement idéalisées.

(2) Au sens mathématique de l'isotropie des fonctions scalaires à arguments tensoriels.

une interprétation cinématique : la dilatation surfacique et la dilatation linéique dans la direction actuelle d'anisotropie s'expriment en fonction de ces deux invariants [3] :

$$K_s(\boldsymbol{n}_t) = \frac{K_v}{\sqrt{\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t}} \quad \text{et} \quad K_l(\boldsymbol{n}_t) = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{B}^{-1} : \boldsymbol{N}_t}} = \frac{K_v}{\sqrt{\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t - B_{\mathrm{I}} \boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t + B_{\mathrm{II}}}} \quad \text{(Cayley-Hamilton)}$$

Dans la construction de ce modèle isotrope transverse, on convient, comme en élasticité isotrope, de ne représenter la déformation que par les deux variables d'état K_v et δ (et donc d'ignorer l'influence de l'invariant B_{II}). Il est donc judicieux de ne tenir compte que d'une information partielle pour l'orientation de la direction d'anisotropie par rapport à l'infinité de tenseurs de déformation de même distorsion stérique maximale δ. On choisit de ne prendre comme variable d'état supplémentaire que l'invariant suivant :

$$I_1^B = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t \qquad \left(= \frac{{K_v}^2}{K_s(\boldsymbol{n}_t)^2} \right)$$

Remarque – Puisque qu'il existe une infinité de tenseurs de déformation ayant la même distorsion stérique maximale, il aurait été incohérent de chercher à représenter complètement l'orientation de la direction d'anisotropie par rapport à cette infinité de tenseurs de déformation équivalents.

Par ailleurs, *dans une déformation sphérique* de dilatation volumique K_v (c'est-à-dire $\boldsymbol{B} = K_v^{\frac{2}{3}} \boldsymbol{G}$), les variables K_v et I_1^B sont liées :

$$I_1^B = K_v^{\frac{2}{3}} \boldsymbol{G} : \boldsymbol{N}_t = K_v^{\frac{2}{3}} \qquad \text{(dans une déformation sphérique)}$$

Finalement, on prendra donc comme variable d'anisotropie la variable a définie par :

$$a = \frac{I_1^B}{K_v^{\frac{2}{3}}} = \frac{\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t}{{B_{\mathrm{III}}}^{\frac{1}{3}}} \qquad \left(= \frac{{K_v}^{\frac{4}{3}}}{K_s(\boldsymbol{n}_t)^2} \right) \tag{6.1}$$

qui reste égale à 1 dans toute déformation sphérique. Cette propriété s'avèrera utile dans la construction d'une forme générale de l'énergie libre massique de Helmholtz [section 6.2 p. 84]. On peut donc résumer les premières hypothèses de ce modèle :

- **Hypothèse 6.1 – Variables d'état du modèle.** Dans le modèle élastique isotrope transverse construit ici, on *choisit* les seules variables d'état indépendantes scalaires suivantes :
  1. la température T (imposée par le second principe thermodynamique),
  2. le tenseur de déformation représenté par les deux seules variables K_v (dilatation volumique) et δ (distorsion stérique maximale),
  3. une variable d'anisotropie a [éq. (6.1)] qui reflète *partiellement* l'orientation de la direction d'anisotropie par rapport au tenseur de déformation.

Par ces hypothèses, on *décide* que toutes les déformations isovolumes de même distorsion stérique maximale δ sont considérées comme équivalentes et que la seule information utile pour prendre en compte l'orientation de la direction d'anisotropie par rapport aux directions propres de déformation est la variable a, invariante dans toute déformation sphérique. De ce fait, les influences des invariants mathématiques initiaux B_{II} et I_2^B sont ignorées et la dimension de l'espace des états de ce modèle élastique isotrope transverse est réduite à 4 (au lieu de 6 sans les hypothèses 6.1), ce qui rend le modèle plus facile à identifier.

[3] Voir le chapitre 4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

Changement de variables d'état

Pour transformer la loi de comportement élastique isotrope transverse générale (5.7) [p. 73] avec les six variables d'état $(B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}, I_1^B, I_2^B)$, on établit les relations de changement de variables d'état scalaires :

$$K_v = {B_{\mathrm{III}}}^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \delta = \delta^s_{max} = \frac{\sqrt{3}}{9} {B_{\mathrm{I}}}^{\frac{3}{2}} {B_{\mathrm{III}}}^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad a = I_1^B {B_{\mathrm{III}}}^{-\frac{1}{3}} \qquad \text{[éq. (6.1)]}$$

Les relations inverses sont :

$$B_{\mathrm{III}} = {K_v}^2 \quad ; \quad B_{\mathrm{I}} = 3 {K_v}^{\frac{2}{3}} \delta^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad I_1^B = a {K_v}^{\frac{2}{3}}$$

Remarque – Le fait de pouvoir écrire les relations directes et inverses entre les systèmes d'invarints valide *a posteriori* le choix fait pour les variables d'états : la relation $\{T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{III}}, I_1^B\} \leftrightarrow \{T, K_v, \delta, a\}$ est bien biunivoque.

Pour ce modèle, on pose donc le changement de variables d'état suivant :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}, I_1^B, I_2^B) = f_\psi(T, K_v, \delta, a)$$

Les hypothèses 6.1 [p. 82] reviennent à ignorer l'influence des invariants initiaux B_{II} et I_2^B. On en déduit les relations entre dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial_T f_\psi^B &= \partial_T f_\psi \, \partial_T T + \partial_{K_v} f_\psi \, \partial_T K_v + \partial_\delta f_\psi \, \partial_T \delta + \partial_a f_\psi \, \partial_T a \\
&= \partial_T f_\psi + 0 + 0 + 0 && (6.2)\\
\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B &= \partial_T f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{I}}} T + \partial_{K_v} f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{I}}} K_v + \partial_\delta f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{I}}} \delta + \partial_a f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{I}}} a \\
&= 0 + 0 + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2 K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta f_\psi + 0 && (6.3)\\
\partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B &= \partial_T f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{II}}} T + \partial_{K_v} f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{II}}} K_v + \partial_\delta f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{II}}} \delta + \partial_a f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{II}}} a \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 && (6.4)\\
\partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B &= \partial_T f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{III}}} T + \partial_{K_v} f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{III}}} K_v + \partial_\delta f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{III}}} \delta + \partial_a f_\psi \, \partial_{B_{\mathrm{III}}} a \\
&= 0 + \frac{1}{2 K_v} \partial_{K_v} f_\psi - \frac{\delta}{2 K_v^2} \partial_\delta f_\psi - \frac{a}{3 K_v^2} \partial_a f_\psi && (6.5)\\
\partial_{I_1^B} f_\psi^B &= \partial_T f_\psi \, \partial_{I_1^B} T + \partial_{K_v} f_\psi \, \partial_{I_1^B} K_v + \partial_\delta f_\psi \, \partial_{I_1^B} \delta + \partial_a f_\psi \, \partial_{I_1^B} a \\
&= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_a f_\psi && (6.6)\\
\partial_{I_2^B} f_\psi^B &= \partial_T f_\psi \, \partial_{I_2^B} T + \partial_{K_v} f_\psi \, \partial_{I_2^B} K_v + \partial_\delta f_\psi \, \partial_{I_2^B} \delta + \partial_a f_\psi \, \partial_{I_2^B} a \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 && (6.7)
\end{aligned}$$

On rappelle la loi de comportement mécanique générale en isotropie transverse avec le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$ [éq. (5.7) p. 73] s'écrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} = {} & \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}} \left(B_{\mathrm{III}} \, \partial_{B_{\mathrm{III}}} f_\psi^B \, \boldsymbol{G} + (\partial_{B_{\mathrm{I}}} f_\psi^B + B_{\mathrm{I}} \, \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B) \, \boldsymbol{B} - \partial_{B_{\mathrm{II}}} f_\psi^B \boldsymbol{B}^2 \right) + \\
& \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{\mathrm{III}}}} \left(\partial_{I_1^B} f_\psi^B \, (\underbrace{\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t}_{2\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})} - I_1^B \boldsymbol{N}_t) + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \, (\underbrace{\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{B}^2 \cdot \boldsymbol{N}_t}_{2\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2)} - I_2^B \boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) \right)
\end{aligned}$$

Compte-tenu des dérivées partielles (6.2) à (6.7), elle se réduit à :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} =& \rho_0 \left(\partial_{K_v} f_\psi - \frac{\delta}{K_v}\,\partial_\delta f_\psi - \frac{2\,a}{3\,K_v}\partial_a f_\psi\right)\boldsymbol{G} + \rho_0\,\frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{K_v{}^{\frac{5}{3}}}\,\partial_\delta f_\psi \boldsymbol{B} \\ &+ \rho_0 \left(\frac{4}{K_v{}^{\frac{5}{3}}}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}) - \frac{2\,a}{K_v}\boldsymbol{N}_t\right)\partial_a f_\psi\end{aligned} \tag{6.8}$$

Sous les hypothèses 6.1 [p. 82], on constate que les coefficients des tenseurs $\boldsymbol{B}^2$, $\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}^2)$ et $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t\cdot\boldsymbol{B}$ sont nuls.

6.2 Forme générale des fonctions d'état

Pour construire une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz d'un état quelconque, on définit le chemin suivant :

$$E_0 = (T_0,1,1,1) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T,1,1,1) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T,K_v,1,1) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$
$$E_3 = (T,K_v,\delta,1) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_t = (T,K_v,\delta,a)$$

L'énergie libre massique de Helmholtz d'un état quelconque peut donc s'écrire sous la forme :

$$\psi^m = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\delta) + g^{(4)}(T,K_v,\delta,a)$$

– $g^{(1)}(T)$ est la variation d'énergie libre massique de Helmholtz dans le chemin $\mathscr{C}^{(1)}$ où :

$$\dot{T}\neq 0 \quad ; \quad K_v = 1 \quad ; \quad \dot{K}_v = 0 \quad ; \quad \delta = 1 \quad ; \quad \dot{\delta} = 0 \quad ; \quad a = 1 \quad ; \quad \dot{a} = 0$$

– $g^{(2)}(T,K_v)$ est la variation d'énergie libre massique de Helmholtz dans le chemin $\mathscr{C}^{(2)}$ où :

$$\dot{T} = 0 \quad ; \quad \dot{K}_v \neq 0 \quad ; \quad \delta = 1 \quad ; \quad \dot{\delta} = 0 \quad ; \quad a = 1 \quad ; \quad \dot{a} = 0$$

– $g^{(3)}(T,K_v,\delta)$ est la variation d'énergie libre massique de Helmholtz dans le chemin $\mathscr{C}^{(3)}$ où :

$$\dot{T} = 0 \quad ; \quad \dot{K}_v = 0 \quad ; \quad \dot{\delta} \neq 0 \quad ; \quad a = 1 \quad ; \quad \dot{a} = 0$$

– $g^{(4)}(T,K_v,\delta,a)$ est la variation d'énergie libre massique de Helmholtz dans le chemin $\mathscr{C}^{(4)}$ où :

$$\dot{T} = 0 \quad ; \quad \dot{K}_v = 0 \quad ; \quad \dot{\delta} = 0 \quad ; \quad \dot{a} \neq 0$$

avec les conditions :

$$\begin{aligned}&g^{(1)}(T_0) = 0 \quad ; \quad g^{(2)}(T,1) = 0, \quad \forall T \quad ; \\ &g^{(3)}(T,K_v,1) = 0, \quad \forall (T,K_v) \quad ; \quad g^{(4)}(T,K_v,\delta,1) = 0, \quad \forall (T,K_v,\delta)\end{aligned} \tag{6.9}$$

La forme générale de l'entropie massique est donnée par la relation de Helmholtz :

$$\begin{aligned}f_s &= -\partial_T f_\psi \qquad \text{[éq. (5.6) p. 72]} \\ &= -\partial_T g^{(1)} - \partial_T g^{(2)} - \partial_T g^{(3)} - \partial_T g^{(4)}\end{aligned} \tag{6.10}$$

L'énergie interne massique se déduit de la définition de l'énergie libre de Helmholtz :

$$\begin{aligned}f_e &= f_\psi + T\,f_s \\ &= g^{(1)} + g^{(2)} + g^{(3)} + g^{(4)} - T\left(\partial_T g^{(1)} + \partial_T g^{(2)} + \partial_T g^{(3)}\partial_T g^{(4)}\right)\end{aligned} \tag{6.11}$$

6.3 Analyse des chemins élémentaires

Dans cette section, on se contente de donner les points clés et les principaux résultats. Le détail des calculs est donné dans la feuille de calcul en annexe J [p. 205].

6.3.1 Analyse du chemin $\mathscr{C}^{(1)}$

Dans ce chemin, la variation de température se fait sans déformation ($\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}$). Le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \left(\partial_{K_v} f_\psi + \frac{1}{3} \partial_a f_\psi \right) \boldsymbol{G} - \rho_0 \, \partial_a f_\psi \, \boldsymbol{N}_t$$

Remarque – Contrairement au cas isotrope, ici le tenseur des contraintes dans le chemin $\mathscr{C}^{(1)}$ (variation de température à déformation bloquée) n'est pas sphérique.

On mesure la quantité de chaleur massique $Q^{(1)}_{exp}(T)$ (J.kg^{-1}) nécessaire à la variation de température dans ces conditions (déformation bloquée). L'écriture de la conservation de l'énergie dans cette évolution conduit à une équation différentielle qui détermine la fonction $g^{(1)}$:

$$g^{(1)}(T) - T \left(\partial_T g^{(1)} + \partial_T g^{(2)}(T,1) + \partial_T g^{(3)}(T,1,1) + \partial_T g^{(3)}(T,1,1,1) \right) = Q^{(1)}_{exp}(T)$$

dont la solution est :

$$g^{(1)}(T) = -T \left(\int_{T_0}^{T} \frac{Q^{(1)}_{exp}(T)}{T^2} \, \mathrm{d}T + \int_{T_0}^{T} \frac{\partial_T g^{(2)}(T,1) + \partial_T g^{(3)}(T,1,1) + \partial_T g^{(4)}(T,1,1,1)}{T} \, \mathrm{d}T \right)$$

Les fonctions $g^{(2)}$, $g^{(3)}$ et $g^{(4)}$ seront déterminées par l'analyse des chemins suivants.

6.3.2 Analyse du chemin $\mathscr{C}^{(2)}$

Dans ce chemin, on impose une déformation sphérique : $\boldsymbol{B} = K_v^{\frac{2}{3}} \boldsymbol{G}$ et la seule variable d'état qui évolue est la dilatation volumique K_v (la variable d'anisotropie a reste égale à 1). Le tenseur des contraintes est donc une fonction de T et K_v, mais contrairement au cas isotrope, il n'est pas sphérique [éq. (6.8) p. 84].

On mesure la *contrainte moyenne* [4] $\sigma^{(2)}_{m\,exp}(T,K_v) = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$:

$$\sigma^{(2)}_{m\,exp} = \rho_0 \left(\partial_{K_v} g^{(2)}(T,K_v) + \partial_{K_v} g^{(3)}(T,K_v,1) + \partial_{K_v} g^{(4)}(T,K_v,1,1) \right)$$

La solution de cette équation différentielle en $g^{(2)}$ est :

$$g^{(2)}(T,K_v) = \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma^{(2)}_{m\,exp}(T,K_v) \, \mathrm{d}K_v - \int_1^{K_v} \left(\partial_{K_v} g^{(3)}(T,K_v,1) + \partial_{K_v} g^{(4)}(T,K_v,1,1) \right) \mathrm{d}K_v$$

Les fonctions $g^{(3)}$ et $g^{(4)}$ seront déterminées par l'analyse des chemins suivants.

[4] Le tenseur des contraintes n'étant pas sphérique, il faut mesurer la contrainte normale dans la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_t$, y ajouter deux fois la contrainte normale transverse $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u}$ et diviser le tout par 3.

6.3.3 Analyse du chemin $\mathscr{C}^{(3)}$

Cette évolution est une déformation isovolume de distorsion stérique maximale δ laissant invariante la variable d'état d'anisotropie $a = 1$. Le lecteur vérifiera aisément qu'un glissement cinématique [fig. 3.1 p. 53] de direction $\boldsymbol{e}_1$ dans un plan orthogonal à la direction d'anisotropie ($\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{e}_3$) laisse bien invariante la direction d'anisotropie et que la variable d'anisotropie a reste bien à la valeur 1.

Comme en élasticité isotrope la variable d'état δ est controlée par le paramètre de glisssement : $\gamma = \sqrt{3}\,(\delta^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}$. Le tenseur des contraintes sous cette déformation est une fonction de (T, K_v, δ). Dans cette expérience on mesure la contrainte tangentielle dans le plan de glissement : $\tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta) = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_2$ où $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}_t\}$ est une base orthonormée ; ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\tau^{(3)}_{exp} = \frac{\rho_0\, \delta^{\frac{1}{3}}\, \sqrt{3}\, \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}{K_v} \left(\partial_\delta g^{(3)}(T, K_v, \delta) + \partial_\delta g^{(4)}(T, K_v, \delta, 1) \right)$$

dont la solution est :

$$g^{(3)}(T, K_v, \delta) = \frac{K_v}{\rho_0\, \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau^{(3)}_{exp}(T, K_v, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}}\, \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}\, \mathrm{d}\delta - \int_1^\delta \partial_\delta g^{(4)}(T, K_v, \delta, 1)\, \mathrm{d}\delta$$

La fonction $g^{(4)}$ est déterminée dans le chemin suivant.

6.3.4 Analyse du chemin $\mathscr{C}^{(4)}$

L'objectif de cette série de mesures est de faire varier le paramètre d'anisotropie $a = I_1^B\, K_v^{-\frac{2}{3}}$ à T, K_v et δ constants. Le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ est donc identique à celui du chemin $\mathscr{C}^{(3)}$, mais la direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ est maintenant dans le plan de glissement $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ [fig. 3.1 p. 53]. Le lecteur vérifiera aisément que quelle que soit la valeur du paramètre de glissement γ, la direction d'anisotropie reste bien dans le plan de glissement.

On montre dans l'annexe C [p. 133] que pour décrire toutes les valeurs de la variable d'état a, il suffit de faire varier la direction *actuelle* d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ dans le plan de glissement $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Les valeurs extrémales de la variable d'anisotropie a sont obtenues lorsque la direction *actuelle* d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t$ est confondue avec les directions propres *actuelles* de déformation :

$$a_{max} = \lambda^2 \quad ; \quad a_{min} = \lambda^{-2} \tag{6.12}$$

où λ^2 est la plus grande valeur propre du tenseur de déformation $K_v^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{B}$ (de déterminant 1) :

$$\lambda = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{(\frac{\gamma}{2})^2 + 1} = \frac{1 + \sin\phi}{\cos\phi} \geqslant 1 \quad \text{où } \phi = \mathrm{Arctan}\frac{\gamma}{2} \qquad \text{[fig. C.1 p. 135]} \tag{6.13}$$

L'angle polaire dans le plan $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de la direction propre associée à λ est :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad \text{où } \phi = \mathrm{Arctan}\frac{\gamma}{2} \qquad \text{[fig. C.1 p. 135]} \tag{6.14}$$

Dans une expérience de glissement avec la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ dans le plan $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, il est donc possible d'atteindre un état (T, K_v, δ, a) arbitraire où $a \in [\lambda^2 ; \lambda^{-2}]$.

Remarque – Dans la feuille de calcul en annexe J [p. 205], pour des raisons de simplicité des formules, la direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ est repérée par son angle polaire α_t avec les directions propres de la déformation actuelle $(\widetilde{\boldsymbol{v}}_1, \widetilde{\boldsymbol{v}}_3)$ et non avec la direction de glisssement $\boldsymbol{e}_1$ [fig. C.1 p. 135]. Les angles des directions propres $(\widetilde{\boldsymbol{v}}_1, \widetilde{\boldsymbol{v}}_3)$ avec la direction de glissement $\boldsymbol{e}_1$ sont précisées dans l'annexe C.2 [p. 134].

Dans l'exploitation des mesures, il faut prendre garde à tenir compte de la déviation de la direction d'anisotropie pendant le mouvement de glissement. La direction actuelle d'anisotropie est une fonction de la direction initiale d'anisotropie et de la déformation γ (ou δ). Les relations entre direction actuelle et direction initiale d'anisotropie dans un mouvement de glissement sont données dans l'annexe C.4 [p. 136].

- **Hypothèse 6.2 – Hypothèse simplificatrice.** Pour simplifier les calculs, on suppose que la fonction $g^{(4)}$ a une forme particulière :

$$\partial_\delta \partial_a g^{(4)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g^{(4)}(T, K_v, \delta, a) = g^{(41)}(T, K_v, \delta) + g^{(42)}(T, K_v, a)$$

Sous cette hypothèse simplificatrice, la contrainte tangentielle dans le chemin $\mathscr{C}^{(4)}$ conduit à l'équation différentielle :

$$\tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a) = \tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) + \frac{\rho_0\, \partial_a g^{(42)}\, f(a)}{K_v\, \lambda\, (\lambda^2 - 1)\, (\lambda^2 + 1)}$$

où :

$$f(a) = 2\sqrt{(\lambda^2 - a)\,(a\,\lambda^2 - 1)}\,(1 - a\,\lambda^2 + \lambda^4)\cos(2\,\theta_1) \\ + \lambda\,(3\,a - 4\,\lambda^2 - 2\,a^2\,\lambda^2 + 3\,a\,\lambda^4)\sin(2\,\theta_1)$$

Rappels – On rappelle que la plus grande dilatation linéique $\lambda > 1$ [éq. (6.13) p. 86] et l'angle polaire de la première direction propre $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ [éq. (6.14) p. 86] ne sont fonction que de l'intensité γ du glissement et donc de la distorsion stérique maximale δ. Les grandeurs λ et θ_1 sont donc constantes dans le chemin $\mathscr{C}^{(4)}$.

Par ailleurs, la variable d'anisotropie a est toujours telle que $\lambda^{-2} \leqslant a \leqslant \lambda^2$ [éq. (6.12) p. 86]. Le radical apparaissant dans la fonction $f(a)$ est donc toujours réel.

Compte-tenu de la condition $g^{(4)}(T, K_v, \delta, 1) = 0$, la solution de la fonction $g^{(4)}$ est :

$$g^{(4)} = \frac{K_v\, \lambda\, (\lambda^2 - 1)\, (\lambda^2 + 1)}{\rho_0} \int_1^a \frac{\tau_{exp}^{(3)} - \tau_{exp}^{(4)}}{f(a)}\, \mathrm{d}a$$

Remarques – Il est remarquable de constater que la fonction $g^{(4)}$ est déterminée par la différence de contraintes $\tau_{exp}^{(4)} - \tau_{exp}^{(3)}$. C'est la variation de cette différence en fonction de a à (T, K_v, δ) constants qui doit être mesurée ou idéalisée.

Par ailleurs, pour mettre en évidence le fait que la fonction $f(a)$ est une fonction périodique (de période π) de l'orientation α_t de la direction d'anisotropie dans le plan de cisaillement, on montre à la fin de l'annexe J [p. 205] qu'on peut la mettre sous la forme :

$$f(a) = -\frac{\lambda^4 - 1}{4\,\lambda}\Big(3\,(\lambda^4 - 1)\sin(2\,\theta_1) + 2\,(\lambda^4 + 1)\sin(2\,\alpha_t + 2\,\theta_1) - (\lambda^4 - 1)\sin(4\,\alpha_t + 2\,\theta_1)\Big)$$

6.4 Conclusion

Sous les hypothèses 6.1 [p. 82] et 6.2 [p. 87], la connaissance (ou l'idéalisation) des quatre fonctions expérimentales :

$$Q^{(1)}_{exp}(T) \quad ; \quad \sigma^{(2)}_{m\,exp}(T,K_v) \quad ; \quad \tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\delta) \quad ; \quad \tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,\delta,a) \quad \left(\text{ou } \tau^{(4)}_{exp} - \tau^{(3)}_{exp}\right)$$

permet donc de construire l'expression des fonctions $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$, $g^{(4)}$, et donc celle de l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m et par suite l'expression des autres fonctions d'état et enfin celle de la loi de comportement mécanique physiquement justifiée. Les résultats sont :

$$\begin{aligned}
g^{(1)} &= -T \int_{T_0}^{T} \frac{Q^{(1)}_{exp}(T)}{T^2}\,\mathrm{d}T \\
g^{(2)} &= \frac{1}{\rho_0} \int_{1}^{K_v} \sigma^{(2)}_{m\,exp}(T,K_v)\,\mathrm{d}K_v \\
g^{(3)} &= \frac{K_v}{\rho_0\sqrt{3}} \int_{1}^{\delta} \frac{\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\delta)}{\delta^{\frac{1}{3}}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1}}\,\mathrm{d}\delta \\
g^{(4)} &= \frac{K_v\,\lambda\,(\lambda^2-1)\,(\lambda^2+1)}{\rho_0} \int_{1}^{a} \frac{\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\delta) - \tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,\delta,a)}{f(a)}\,\mathrm{d}a
\end{aligned}$$

Remarques – Les expressions des trois premières fonctions sont formellement identiques à celles données pour un milieu isotrope en section 3.4.4 [p. 50].

La connaissance des quatre fonctions $g^{(1)}$ à $g^{(4)}$ en fonctions des mesures permet de construire l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état, et par suite celle de l'entropie massique et de l'énergie interme massique avec les formules (6.9), (6.10) et (6.11) [p. 84].

En dépit des simplifications apportées dans la construction de ce modèle élastique isotrope transverse (4 variables d'état scalaires au lieu de 6 et hypothèse simplificatrice 6.2 [p. 87]), l'identification expérimentale d'un tel modèle est plus compliquée qu'en isotropie. Les expériences idéales des chemins $\mathscr{C}^{(1)}$, $\mathscr{C}^{(2)}$, $\mathscr{C}^{(3)}$ et $\mathscr{C}^{(4)}$ décrits dans la section 6.2 [p. 84] peuvent être remplacées par des expériences réelles ou des suites d'expériences réelles plus aisées à réaliser ou bien encore remplacées par des expressions mathématiques physiquement sensées, ce qui réduit l'identification du modèle à la détermination de quelques constantes.

7

Élasticité générique

Dans ce chapitre, on synthétise la méthode de construction systématique de tous les modèles de comportement élastique, isotropes ou non.

7.1 Les variables d'état d'un solide déformable

Le choix des variables d'état est la première étape dans la construction d'un modèle de comportement. Cette étape est essentielle car elle détermine l'ensemble de tous les états envisageables par le modèle. Les variables d'état choisies doivent être *indépendantes*, c'est-à-dire que l'on peut donner à chacune d'elles une valeur arbitraire [1] pour définir un état.

Pour tout modèle de comportement, le second principe de la thermodynamique impose la variable d'état *température absolue* $T > 0$ pour caractériser l'état d'une particule de milieu continu.

Par ailleurs, un modèle de *solide déformable* (un milieu continu qui a une forme propre), comporte nécessairement un tenseur de déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ dans sa liste de variables d'état. Ce tenseur de déformation mesure la déformation actuelle par rapport à la forme propre.

Enfin, si le milieu est *anisotrope*, la description de l'état actuel d'une particule doit préciser la direction actuelle des directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{(i)}$. La liste des variables d'état tensorielles d'un solide élastique isotrope ou non est donc : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^{(1)}, \cdots\}\}$.

- **Définition 7.1 – Variables d'état cinématiques tensorielles.** On appelle variables d'état cinématiques tensorielles la liste $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^{(1)}, \cdots\}\}$ où $\boldsymbol{X}$ est un tenseur de déformation objectif et où les $\boldsymbol{N}_t^{(i)}$ sont les directions actuelles d'anisotropie.

Les deux principes de la thermodynamique postulent l'existence de deux *fonctions d'état* scalaires, extensives et objectives : l'*énergie interne massique* e^m et l'*entropie massique* s^m. Le choix de variables d'état tensorielles *objectives* et l'objectivité des fonctions d'état impliquent que les fonctions d'état sont nécessairement des fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels. Le théorème des fonctions isotropes implique que les fonctions d'état peuvent être ramenées à des fonctions scalaires d'arguments scalaires de la forme :

$$e^m = \overline{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m) \quad ; \quad s^m = \overline{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m) \quad ; \quad \psi^m = e^m - T\, s^s = \overline{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$$

où les arguments scalaires $(I_1, \cdots, I_m)$ sont une liste d'invariants calculés à partir des variables d'état tensorielles $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^{(1)}, \cdots\}\}$. Ces variables d'état scalaires sont soit des invariants des

[1] Dans son domaine de définition.

arguments tensoriels, soit des invariants dits « croisés » qui traduisent d'une certaine manière l'orientation relative des valeurs actuelles des variables d'état tensorielles [(2)].

On a vu dans la construction effective de modèles élastiques isotropes [ch. 3 p. 43] ou isotrope transverse [ch. 6 p. 81] deux exemples de construction de modèles de comportement élastique dont la listes de variables d'état scalaires $\{T, I'_1, \cdots, I'_p\}$ est plus courte ($p \leqslant m$), où la température T est conservée (elle est imposée par le second principe de la thermodynamique), et où les $I'_\bullet$ sont des combinaisons des $I_\bullet$. La liste $\{T, I'_1, \cdots, I'_p\}$ retenue pour la construction du modèle doit être impérativement constituée de variables d'état scalaires *indépendantes*. Cette sélection est essentielle dans la construction du modèle.

■ **Définition 7.2 – Variables d'état cinématiques scalaires.** On appelle variables d'état cinématiques scalaires la liste d'invariants *indépendants* $\{I_1, \cdots, I_p\}$ retenue comme variables d'état pour le modèle de comportement.

Pour construire un modèle de comportement physiquement sensé, il est important de choisir les p variables d'état $\{I_1, \cdots, I_p\}$ indépendantes (on peut donner à chacune d'elles une valeur arbitraire, dans son domaine de définition, pour définir un état de particule), et ayant une interprétation cinématique claire afin de construire des fonctions d'état physiquement motivées et d'éviter ainsi de construire des lois de comportement, certes thermodynamiquement admissibles, mais au comportement exotique [(3)].

Les variables d'état cinématiques tensorielles $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{N}_t^{(i)}$ étant objectives, les invariants cinématiques $\{I_1, \cdots, I_p\}$ calculés à partir de ces variables d'état sont aussi objectifs. Puisque la dérivée particulaire d'une grandeur scalaire objective est aussi une grandeur scalaire objective [(4)], les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires sont des grandeurs scalaires objectives. Elles s'écrivent toutes sous la forme :

$$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} \tag{7.1}$$

où les tenseurs symétriques et objectifs $\boldsymbol{S}_j$ sont spécifiques à chaque variable d'état cinématique I_j.

Exemples de dérivées particulaires de variables d'état cinématiques scalaires – On montre en cinématique les dérivées particulaires suivantes :

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}_{B_{\mathrm{I}}} = 2\boldsymbol{B} \tag{7.2}$$

$$\dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\left(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2\right) : \boldsymbol{D} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}_{B_{\mathrm{II}}} = 2\left(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2\right) \tag{7.3}$$

$$\dot{B}_{\mathrm{III}} = 2B_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}_{B_{\mathrm{III}}} = 2B_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G} \tag{7.4}$$

Par ailleurs, on démontre dans l'annexe A [p. 127] les dérivées particulaires des invariants cinématiques croisés :

$$\left(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t\right)^{\cdot} = \left(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\left(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t\right)\boldsymbol{N}_t\right) : \boldsymbol{D} \qquad \text{[éq. (A.5) p. 129]}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t} = 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\left(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t\right)\boldsymbol{N}_t \tag{7.5}$$

$$\left(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t\right)^{\cdot} = \left(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\left(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t\right)\boldsymbol{N}_t + 2\left(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t^{(i)} \cdot \boldsymbol{B}\right)\right) : \boldsymbol{D} \qquad \text{[éq. (A.6) p. 129]}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B}^2:\boldsymbol{N}_t} = 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\left(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t\right)\boldsymbol{N}_t + 2\left(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}\right) \tag{7.6}$$

(2) Voir l'annexe B du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

(3) Comme on a pu en proposer dans la passé.

(4) On rappelle que l'objectivité des dérivées particulaires n'est vraie que pour les grandeurs objectives *scalaires* . Voir le chapitre 3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

On en déduit aisément que si les variables d'état cinématiques scalaires objectives retenues pour un modèle élastique sont la dilatation volumique K_v, la distorsion stérique maximale δ ou une variable d'anisotropie $a = K_v{}^{-1}\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t$, leurs dérivées particulaires sont :

$$\dot{K}_v = K_v\boldsymbol{G}:\boldsymbol{D} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{S}_{K_v} = K_v\boldsymbol{G} \tag{7.7}$$

$$\dot{\delta} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{9}\frac{B_{\mathrm{I}}{}^{\frac{3}{2}}}{K_v}\Big)^{\cdot} = \Big(\frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{K_v{}^{\frac{2}{3}}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big):\boldsymbol{D} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{S}_\delta = \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{K_v{}^{\frac{2}{3}}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G} \tag{7.8}$$

$$\dot{a} = \Big(\frac{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}{K_v}\Big)^{\cdot} = \Big(-\frac{2a}{3K_v}\boldsymbol{G} + \frac{4}{K_v{}^{\frac{2}{3}}}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t) - \frac{2a}{K_v}\boldsymbol{N}_t\Big):\boldsymbol{D}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{S}_a = -\frac{2a}{3K_v}\boldsymbol{G} + \frac{4}{K_v{}^{\frac{2}{3}}}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}_t) - \frac{2a}{K_v}\boldsymbol{N}_t \tag{7.9}$$

S'il le désire, le lecteur établira sans difficulté des formules similaires avec des tenseurs de déformation objectifs autres que $\boldsymbol{B}$. S'il convient au lecteur d'utiliser une certaine variable d'état cinématique scalaire objective z définie à partir d'un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$ et d'une éventuelle direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t$, il pourra calculer de la même manière le tenseur $\boldsymbol{S}_z$ qui lui est associé en calculant la dérivée particulaire de la définition de z. La dérivée particulaire de z s'écrira toujours sous la forme $\dot{z} = \boldsymbol{S}_z:\boldsymbol{D}$ [5].

7.2 Forme générique des lois de comportement élastique

Les variables d'état cinématiques $\{I_1,\cdots,I_p\}$ étant bien choisies [6], la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz [7] s'écrit :

$$\psi^m = e^m - T\,s^m = \overline{f}_\psi(T, I_1,\cdots,I_p)$$

Les variables d'état étant indépendantes, sa dérivée particulaire s'écrit :

$$\dot{\psi}^m = \partial_T\overline{f}_\psi\,\dot{T} + \sum_{j=1}^{p}\partial_{I_j}\overline{f}_\psi\,\dot{I}_j$$

En élasticité [déf. 1.2 p. 13], la dissipation intrinsèque est nulle dans toute évolution :

$$0 = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} \quad \text{dans toute évolution}$$

$$0 = -\rho\,(\partial_T\overline{f}_\psi\,\dot{T} + \sum_{j=1}^{p}\partial_{I_j}\overline{f}_\psi\,\dot{I}_j + \overline{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}, \quad \forall\dot{T} \text{ dans tout mouvement}$$

$$0 = -\rho\,(\partial_T\overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} - \rho\sum_{j=1}^{p}\partial_{I_j}\overline{f}_\psi\boldsymbol{S}_j:\boldsymbol{D} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}, \quad \forall\dot{T}\;\forall\boldsymbol{D} \qquad \text{[éq. (7.1) p. 90]}$$

$$0 = -\rho\,(\partial_T\overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \Big(\boldsymbol{\sigma} - \rho\sum_{j=1}^{p}\partial_{I_j}\overline{f}_\psi\boldsymbol{S}_j\Big):\boldsymbol{D}, \quad \forall\dot{T}\;\forall\boldsymbol{D} \tag{7.10}$$

[5] Quelques exemples avec les tenseurs de déformation objectifs $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{M}$ sont donnés en annexe du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

[6] C'est-à-dire indépendantes et avec une signification cinématique claire.

[7] C'est la plus commode à utiliser en élasticité.

7.2.1 Relation de Helmholtz

L'équation (7.10) étant vraie $\forall \dot{T}$ et la fonction d'état $-\rho\left(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s\right)$ n'étant pas fonction de $\dot{T}$, elle est nécessairement nulle. On en déduit la relation de Helmholtz :

$$\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s = 0 \tag{7.11}$$

En élasticité, il suffit donc de définir la seule fonction d'état ψ^m. L'entropie massique s'en déduit de la relation de Helmholtz et l'énergie interne massique est $e^m = \psi^m + T\,s^m$.

7.2.2 Loi de comportement mécanique générique en élasticité (isotrope ou non)

Compte tenu de la relation de Helmholtz, la nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (7.10) p. 91] se réduit à :

$$0 = \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_j\right) : \boldsymbol{D}, \quad \forall \boldsymbol{D} \tag{7.12}$$

Par définition [déf. 1.2 p. 13], en élasticité, le tenseur des contraintes est une fonction d'état. Le terme $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ est donc une fonction d'état qui n'est donc pas fonction de $\boldsymbol{D}$. L'égalité (7.12) étant vraie $\forall \boldsymbol{D}$, on en déduit que ce terme est nul. La forme générique [8] d'une loi de comportement élastique (isotrope ou non) s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_j \tag{7.13}$$

où les tenseurs symétriques $\boldsymbol{S}_j$ se déduisent de la dérivée particulaire des variables d'état cinématiques scalaires I_j [éq. (7.1) p. 90] retenues pour ce modèle. Cette forme très condensée de la loi de comportement mécanique masque quelque peu le fait que le tensenseur des contraintes est toujours fonction de la température, de la déformation et des directions d'anisotropie, car les tenseurs $\boldsymbol{S}_j$ sont des fonctions du tenseur de déformation choisi $\boldsymbol{X}$ et des éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{(i)}$.

Exercices – Vérifier que la loi de comportement élastique générique (7.13) conduit bien aux lois de comportement élastiques particulières qui ont été établies dans les chapitres précédents avec différents choix de variables d'état cinématiques scalaires :
- avec les variables d'état cinématiques $\{B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}\}$, on retrouve la loi 2.3 [p. 21] ;
- avec les variables d'état cinématiques $\{V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}}\}$, on retrouve la loi 2.5 [p. 23] ;
- avec les variables d'état cinématiques $\{M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{II}}, M_{\mathrm{III}}\}$, on retrouve la loi 2.6 [p. 24] ;
- avec les variables d'état cinématiques $\{K_v, \delta\}$, on retrouve la loi (3.11) [p. 47] ;
- avec les variables d'état cinématiques $\{B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}, \boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t, \boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t\}$, on retrouve la loi (5.7) [p. 73] ;
- avec les variables d'état cinématiques $\{K_v, \delta, a\}$, on retrouve la loi (6.8) [p. 84].

Les deux derniers cas sont des lois anisotropes à une direction d'anisotropie (isotropie transverse) car une seule direction d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t$ intervient dans la liste des variables d'état cinématiques scalaires retenues pour ces modèles.

[8] C'est-à-dire sans préciser explicitement la liste et la signification cinématique des variables d'état cinématiques scalaires retenues pour le modèle.

7.3 En bref...

Les deux étapes essentielles pour la construction d'un modèle élastique sont :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires indépendantes détermine la forme générale de la loi de comportement mécanique d'un solide élastique en fonction de l'énergie libre massique de Helmholtz. L'isotropie ou l'anisotropie du modèle est déterminée par la présence ou non de variables d'état cinématiques scalaires prenant en compte les éventuelles directions actuelles d'anisotropie.
2. Proposer une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état $\{T, I_1, \cdots, I_p\}$ qui doit être physiquement motivée par des expériences élémentaires (éventuellement idéalisées) suivant une méthode semblable à celle qui a été utilisée dans les chapitres 3 [p. 43] et 6 [p. 81].

Dans le passé, un certain nombre de lois de comportement ont été proposées sans avoir vérifié qu'il existe bien une énergie libre massique de Helmholtz qui conduise à cette loi de comportement [9]. Si les fonctions d'état e^m, s^m ou $\psi^m = e^m - T\,s^m$ n'existent pas, une telle loi de comportement est thermodynamiquement absurde car les deux principes de la thermodynamique qui affirment leur existence sont violés.

Par ailleurs, d'autres lois de comportement élastique, souvent appelées « hyperélastiques » quand les déformations ne sont pas restreintes (et bien souvent limitées aux évolutions isothermes), ont été proposées avec des expressions plus ou moins justifiées de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des invariants fondamentaux de tenseurs de déformation. Bien que thermodynamiquement admissibles, elle conduisent parfois à des lois de comportements physiquement peu vraisemblables. Seuls un choix raisonné de variables d'état scalaires indépendantes et physiquement significatives ainsi que des expériences (ou leur idéalisation mathématique avec des coefficients à identifier) doivent guider la construction de l'expression des fonctions d'état en fonction des variables d'état retenues pour le modèle.

[9] C'est notamment le cas de la pseudo-élasticité de Hooke en « petites perturbations » et de l'« hypoélasticité ».

8

Le problème élastique

8.1 Énoncé général

La résolution d'un problème d'élasticité suppose la donnée d'un certain nombre d'informations précisées dans les sous-sections qui suivent.

8.1.1 Solide déformable à étudier

Le solide déformable à étudier est un domaine matériel dont la forme *initiale* $\mathscr{D}_0^m$ est donnée à une température uniforme T_0 donnée. En cas d'anisotropies, les champs des directions initiales d'anisotropie $\boldsymbol{N}_0^{(i)}(P)$ sont connus. Le choix de la forme de référence $\mathscr{D}_0^m$ utilisée pour mesurer les déformations est sous la responsabilité de l'ingénieur qui fait l'étude. Dans la suite, pour limiter le nombre de formules, on choisit d'écrire les équations en utilisant le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$ [1].

8.1.2 Modèle de comportement du matériau

On suppose que le comportement de la matière constituant le solide déformable à étudier est correctement modélisé par un certain modèle de comportement élastique (isotrope ou non) connu. On connaît donc :

1. La liste des variables d'état scalaires $\{T, I_1, \cdots, I_p\}$ retenues pour ce modèle de comportement élastique où les variables scalaires I_k sont des invariants cinématiques objectifs calculés à partir de la variable d'état tensorielle objective déformation actuelle $\boldsymbol{B}$ et des éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{(i)}$:

   $$I_k = f_k(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}_t^{(i)}) \qquad \text{(exemple : } I_1 = K_v = \sqrt{\det \boldsymbol{B}} \qquad I_2 = \delta_{max}^s = B_{\mathrm{I}}^{\frac{3}{2}} B_{\mathrm{III}}^{-\frac{1}{2}} \qquad I_3 = a = I_1^B K_v^{-\frac{2}{3}}\text{)}$$

   On connaît aussi l'expression de leur dérivée particulaire :

   $$\dot{I}_k = \boldsymbol{S}_k : \boldsymbol{D} \qquad \text{(calculs purement cinématiques, exemples p. 90)}$$

2. L'expression de l'énergie interne massique en fonction des variables d'état :

   $$e^m = f_e(T, I_1, \cdots, I_p) \qquad \text{(exemple isotrope transverse : } e^m = f_e(T, K_v, \delta_{max}^s, a)\text{)}$$

[1] Le choix d'un tenseur de déformation objectif plutôt qu'un autre est sans importance fondamentale. On laisse le soin au lecteur de faire les transformations algébriques nécessaires s'il tient absolument à utiliser un autre tenseur de déformation (objectif ou non). Les calculs des chapitres précédents montrent que les expressions obtenues sont généralement plus compliquées

On connaît donc l'expression de sa dérivée particulaire (elle intervient dans l'équation de la chaleur [éq. (8.9) p. 97]) en fonction des variables d'état et de leur dérivée particulaire :

$$\dot{e}^m = \partial_T e^m(T, I_1, \cdots, I_p)\, \dot{T} + \sum_{k=1}^{p} \partial_{I_k} e^m(T, I_1, \cdots, I_p)\, \dot{I}_k \quad \text{(pour l'équation de la chaleur)}$$

3. L'expression de la loi de comportement mécanique (tenseur des contraintes de Cauchy en fonction des variables d'état, qui intervient dans l'équation de mouvement [éq. (8.8) p. 97]) :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0(T, I_1, \cdots, I_p)\, \boldsymbol{G} + K_1(T, I_1, \cdots, I_p)\, \boldsymbol{B} + K_2(T, I_1, \cdots, I_p)\, \boldsymbol{B}^2 + \cdots \tag{8.1}$$

où en cas d'anisotropies, les termes tensoriels symétriques supplémentaires sont de la forme :

$$K_{\boldsymbol{N}_t^{(i)}}(T, I_1, \cdots, I_p)\, \boldsymbol{N}_t^{(i)} \quad ; \quad K_{\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}_t^{(i)}\boldsymbol{B}}(T, I_1, \cdots, I_p)\, \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t^{(i)} \cdot \boldsymbol{B} \quad ;$$
$$K_{\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}_t^{(i)}}(T, I_1, \cdots, I_p)\, \mathbf{sym}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t^{(i)}) \quad ; \quad K_{\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{N}_t^{(i)}}(T, I_1, \cdots, I_p)\, \mathbf{sym}(\boldsymbol{B}^2 \cdot \boldsymbol{N}_t^{(i)})$$

4. L'expression de la loi de comportement thermique :

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{grad}_E\, T, \cdots) \qquad \text{(par exemple la loi de Fourier : } \boldsymbol{q} = -\alpha\, \mathbf{grad}_E\, T\text{)}$$

8.1.3 Relations cinématiques

On rappelle les relations cinématiques suivantes [(2)], utiles dans la suite :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top \quad ; \quad \boldsymbol{D} = \mathbf{sym}(\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \quad ; \tag{8.2}$$

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}_L\, \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L\, \boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{u}(P,t) \text{ est le champ des déplacements}) \quad ; \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{n}_t^{(i)} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_0^{(i)}}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_0^{(i)}\|} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{N}_t^{(i)} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_0^{(i)}}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_0^{(i)}\|} \otimes \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_0^{(i)}}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_0^{(i)}\|} = \frac{(\boldsymbol{F}^\top \otimes \boldsymbol{F}) : \boldsymbol{N}_0^{(i)}}{(\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F}) : \boldsymbol{N}_0^{(i)}} \tag{8.4}$$

où $\boldsymbol{N}_0^{(i)}(P)$ est le champ connu des directions initiales de la i ème direction d'anisotropie.

On rappelle les relations entre les gradients eulérien et lagrangien d'un champ matériel :

$$\forall \boldsymbol{\Psi}(P,t), \;\; \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L\, \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{grad}_E\, T = \mathbf{grad}_L\, T \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-\top} \cdot \mathbf{grad}_L\, T \tag{8.5}$$

$$\forall \boldsymbol{\Psi}(P,t), \;\; (\mathbf{grad}_L\, \boldsymbol{\Psi})^{\cdot} = \mathbf{grad}_L\, \dot{\boldsymbol{\Psi}} \;\; \Rightarrow \;\; \dot{\boldsymbol{F}} = \mathbf{grad}_L\, \dot{\boldsymbol{x}}_t = \mathbf{grad}_L\, \dot{\boldsymbol{u}} \tag{8.6}$$

L'enchaînement de ces relations cinématiques montre que les valeurs actuelles des champs inconnus des variables d'état scalaires actuelles $I_1(P,T), \cdots, I_p(P,T)$, de l'énergie interne massique $e^m(P,T)$, de sa dérivée particulaire $\dot{e}^m(P,T)$, du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(P,T)$, du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ et du vecteur courant de chaleur $\boldsymbol{q}(P,T)$ sont exprimables en fonction de la description de Lagrange des trois champs inconnus $T(P,t)$, $\rho(P,t)$ et $\boldsymbol{u}(P,t)$, de la description de Lagrange de leur dérivée particulaire et de leur gradient lagrangien.

8.1.4 Équations différentielles

Comme tout milieu continu, toute particule du domaine matériel défini en section 8.1.1 [p. 95] doit satisfaire aux équations différentielles issues des quatre principes fondamentaux de la physique classique [(3)] :

[(2)] Ces relations sont démontrées dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].
[(3)] Voir le cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3]

1. *Le principe de la conservation de la masse*. Localement, il s'exprime par l'équation différentielle dite *équation de continuité* :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\operatorname{tr}\boldsymbol{D}\,, \quad \text{intégrée entre } t_0 \text{ et } t\text{, elle conduit à :} \quad K_v(P,t) = \frac{\rho_0(P)}{\rho(P,t)} \tag{8.7}$$

   où $\rho_0(P) = \rho(P,t_0)$ est le champ des masses volumiques initiales.

   L'équation intégrée (8.7) permet d'éliminer le champ inconnu $\rho(P,t)$ (masse volumique actuelle) dans les autres équations en le remplaçant par le champ des dilatations volumiques $K_v(P,t)$ qui est une grandeur cinématique déduite du champ des déformations actuelles ($K_v = \sqrt{B_{\mathrm{III}}} = \det\boldsymbol{F}$). Une fois toutes les substitutions $\rho \to \rho_0 K_v^{-1}$ faites, le principe de la conservation de la masse est automatiquement satisfait et le champ inconnu ρ disparaît des équations.
2. *Le principe fondamental de la mécanique*. Localement, il s'exprime par l'équation différentielle vectorielle dite *équation de mouvement* :

$$\rho\,\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho\,\boldsymbol{f}_0^m \qquad \text{(3 équations différentielles)} \tag{8.8}$$

$$\text{où :} \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 K_v^{-1} & \text{[éq. (8.7)] p. 97]} \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}_t^{(i)},I_1,\cdots,I_p) = \overline{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}(T,\boldsymbol{u}) & \text{[éq. (8.2) à (8.6) p. 96]} \\ \boldsymbol{\gamma} = \ddot{\boldsymbol{x}}_t = \ddot{\boldsymbol{u}} & \text{(définition de l'accélération)} \end{cases}$$

3. *Le principe de la conservation de l'énergie*. Localement, il s'exprime par l'équation différentielle scalaire dite *équation de la chaleur* :

$$\rho\,\dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \operatorname{div}_E \boldsymbol{q} \qquad \text{(1 équation différentielle scalaire))} \tag{8.9}$$

$$\text{où :} \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 K_v^{-1} & \text{[éq. (8.7)] p. 97]} \\ \dot{e}^m = g(T,I_1,\cdots,I_p) = \overline{g}(T,\boldsymbol{u}) & \text{[éq. (8.2) à (8.6) p. 96]} \\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{q}}(T,I_1,\cdots,I_p) = \overline{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{q}}(T,\boldsymbol{u}) & \text{[éq. (8.2) à (8.6) p. 96]} \end{cases}$$

4. *Le second principe de la thermodynamique*. Puisque les lois de comportement mécanique et thermique sont normalement thermodynamiquement admissibles (la dissipation est non négative dans toute évolution), ce principe est automatiquement respecté et n'apparaît donc pas dans les équations à résoudre.

En élasticité, les quatre principes fondamentaux se réduisent donc à deux équations différentielles : une équation différentielle vectorielle : l'équation de mouvement (8.8), et une équation différentielle scalaire : l'équation de la chaleur (8.9). Après les substitutions dues aux lois de comportement mécanique et thermique, celle due à la conservation de la masse [éq. (8.7) p. 97] et celles dues aux définitions cinématiques [éq. (8.2) à (8.6) p. 96], ces deux équations différentielles s'expriment en fonction de deux champs matériels inconnus : les positions actuelles des particules $\boldsymbol{x}_t(P,t)$ (ou bien les déplacements actuels $\boldsymbol{u}(P,t)$) et les températures actuelles des particules $T(P,t)$. Le système différentiel à résoudre est donc un système de quatre équations différentielles (une vectorielle et une scalaire), et les champs inconnus se ramènent à quatre champs inconnus : trois pour la position actuelle (ou le déplacement) et un pour la température. Ces équations différentielles sont en général couplées.

Remarques – Pour une résolution analytique manuelle, il serait nécessaire d'écrire toutes les substitutions de la section 8.1.3 [p. 96] pour ramener le système différentiel à des équations dont les

fonctions inconnues sont T_L et $\boldsymbol{u}_L$. Le système d'équations différentielles obtenu est très compliqué. Pratiquement, on ne fait jamais les substitutions manuellement, sauf pour des exemples académiques dans lesquels on fait des hypothèses sur les champs solutions (isothermie, stationnarité, uniformités, axisymétries, linéarisation des lois, petites déformations, forme initiale simple, etc.). Sans ces hypothèses simplificatrices, une solution analytique est généralement inaccessible.

Dans les résolutions numériques à l'aide d'un calculateur, il n'est heureusement pas nécessaire d'écrire manuellement toutes ces substitutions : il suffit de préciser au logiciel le type de problème à résoudre (stationnaire, transitoire, recherche de modes propres, analyse de stabilité) et de dire quel modèle élastique on désire utiliser (énergie interne massique, loi de comportement mécanique et loi de comportement thermique).
Dans les logiciels spécialisés en mécanique des solides déformables, les équations à résoudre, les définitions cinématiques [éq. (8.2) à (8.6) p. 96] et les lois de comportement élastique et thermique sont normalement implantées dans le code. La conservation de la masse intégrée (8.7) [p. 97] devrait aussi y être implantée [(4)]. Bien souvent ces choix se font dans des menus qui ne comportent pas toujours les toutes options souhaitables.
En revanche, dans les logiciels généraux de résolution numérique de système d'équations différentielles aux dérivées partielles non spécialisés dans une certaine physique [(5)], il est nécessaire de traduire toutes les relations cinématiques [éq. (8.2) à (8.6) p. 96], les lois de comportement et les équations différentielles (ou leur formulation intégrale) dans le langage du logiciel.

8.1.5 Sollicitations extérieures

Un solide déformable peut être soumis à des sollicitations extérieures de différentes natures :

1. *Des sollicitations extérieures à distance* qui s'exercent sur toutes les particules du solide. Elles peuvent être :
   - *mécaniques* : gravitation et d'éventuelles forces d'inertie si l'observateur utilisé pour décrire le mouvement n'est pas galiléen.
     Les sollicitations mécaniques extérieures à distance sont représentées par un champ de forces volumiques $\boldsymbol{f}_0^v$ (N.m^{-3}) ou massiques $\boldsymbol{f}_0^m$ (N.kg^{-1}=m.s^{-2}), qui apparaît dans l'équation de mouvement.
   - *thermiques* : rayonnement d'origine extérieure traversant le solide et interférant avec la matière en produisant de la chaleur.
     Les sollicitations thermiques extérieures à distance sont représentées par un champ de puissance calorifique volumique [(6)] r_{ext}^v (W.m^{-3}), qui apparaît dans l'équation de la chaleur. Dans beaucoup d'applications ce terme est nul.
2. *Des sollicitations extérieures de contact* qui s'exercent sur les particules de la frontière. Elles peuvent être :
   - *mécaniques* : des contraintes imposées $\boldsymbol{f}^s$ (Pa), ou des déplacements imposés $\boldsymbol{u}^s$ (m) sur tout ou partie de la frontière.

     Vocabulaire – Une région de frontière à contrainte imposée nulle est appelée *bord libre*. Une région de frontière à déplacement imposé nul est appelée *bord fixé* ou *encastrement*.

   - *thermiques* : des températures imposées T^s (K), ou des densités de flux thermiques imposées q^s (W.m^{-2}), sur tout ou partie de la frontière.

     Vocabulaire – Une région de frontière à température imposée est souvent dite *thermostatée*. Une région de frontière à densité de flux thermique imposée nulle est appelée *adiabatique*.

(4) Autrement que sous la forme $\rho = \rho_0$!
(5) Comme celui utilisé dans les illustrations numériques du chapitre 9 [p. 113].
(6) Cette représentation simplifiée suppose que la distribution du champ r_{ext}^v est connue à l'avance.

Les sollicitations à la frontière n'apparaissent ni dans l'équation de mouvement ni dans l'équation de la chaleur. Elles sont des *conditions aux limites* auxquelles doit satisfaire la solution générale du système d'équations différentielles. Si on appelle N un point courant de la frontière actuelle et $\boldsymbol{n}_t$ sa normale sortante actuelle, elles peuvent être :

(a) un déplacement imposé : $\boldsymbol{u}(N,t) = \boldsymbol{u}^s(N,t)$;
(b) une température imposée : $T(N,t) = T^s(N,t)$;
(c) une contrainte imposée : $\boldsymbol{\sigma}(N,t) \cdot \boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{f}^s(N,t)$;
(d) une densité de flux thermique imposée : $\boldsymbol{q}(N,t) \cdot \boldsymbol{n}_t = q^s(N,t)$.

- **Définition 8.1 – Condition aux limites de Dirichlet.** Les conditions aux limites imposant des valeurs aux frontières aux champs inconnus $\boldsymbol{u}(P,t)$ et $T(P,t)$ (types (a) et (b) ci-dessus) sont appelées conditions aux limites de Dirichlet.

- **Définition 8.2 – Condition aux limites de Neumann.** Les conditions aux limites imposant des valeurs aux dérivées normales aux frontières de fonctions des champs inconnus (types (c) et (d) ci-dessus) sont appelées conditions aux limites de Neumann.

Il est interdit d'imposer en un même point N de la frontière à la fois un déplacement et une contrainte dans la même direction. De même, il est interdit d'imposer en un même point N de la frontière à la fois une température et un flux thermique. Autrement dit, on ne peut pas imposer en un point de la frontière à la fois une condition de Dirichlet et une condition de Neumann.

Remarques – Bien que ces interdictions soient d'origine mathématique, on peut les interpréter physiquement : si on exerce une contrainte $\boldsymbol{f}^s(N,t)$ à la frontière d'un solide, il en résulte un déplacement qui sera déterminé par la valeur solution $\boldsymbol{u}(M,t)$ à la frontière. Inversement, si on impose un déplacement à la frontière $\boldsymbol{u}^s(N,t)$, la contrainte à la frontière nécessaire pour obtenir ce déplacement sera déterminée par la valeur de la solution $\boldsymbol{\sigma}(M,t)$ à la frontière : $\boldsymbol{f}^s(t) = \boldsymbol{\sigma}(N,t) \cdot \boldsymbol{n}_t$. On peut faire les mêmes interprétations pour les conditions aux limites thermiques : la densité de flux thermique nécessaire pour maintenir une température imposée est déterminée par la valeur de la solution $\boldsymbol{q}(M,t)$ à la frontière $q^s = \boldsymbol{q}(N,t) \cdot \boldsymbol{n}_t$, et la température de surface obtenue sous l'effet d'une densité de flux thermique imposée est déterminée par la valeur de la solution $T(M,t)$ à la frontière.

Il peut aussi exister des conditions aux limites qui ne sont ni de type Dirichlet ni de type Neumann, mais qui s'expriment sous la forme de *relations* :

– entre le déplacement à la frontière et la contrainte à la frontière (appui élastique, contact avec ou sans frottement, etc.)
– entre la température à la frontière et le flux thermique à la frontière (pour modéliser des « fuites thermiques » aux frontières).

- **Définition 8.3 – Conditions aux limites mixtes.** On appelle condition aux limites mixte une relation imposée à la frontière entre la valeur d'un champ inconnu et sa dérivée normale à la frontière.

8.1.6 Synthèse

Toutes les données précédentes (forme initiale, température initiale, modèle de comportement, sollicitations extérieures à distance et à la frontière) définissent complètement le problème élastique.

Un problème d'élasticité s'énonce donc ainsi : trouver les positions actuelles $\boldsymbol{x}_t(P,t)$ (ou le champ des déplacements actuels $\boldsymbol{u}(P,t)$) et le champ de températures actuelles $T(P,t)$ des particules P

d'un solide déformable élastique défini par sa forme propre quand on le soumet à des sollicitations extérieures mécaniques et thermiques *a priori* fonction du temps.

Le problème élastique est donc à la fois un problème de dynamique (on cherche l'évolution temporelle des positions, c'est-à dire un mouvement) et un problème de thermique (on cherche l'évolution temporelle du champ des températures). C'est donc un problème de *thermodynamique des solides élastiques* où les sollicitations extérieures sont *a priori* fonction du temps.

Couplage des équations – L'équation de mouvement [éq. (8.8) p. 97] et l'équation de la chaleur [éq. (8.9) p. 97] montrent que les aspects dynamique et thermique sont couplés. La séparation artificielle que l'on fait parfois entre ces deux disciplines provient de ce que l'on fait des hypothèses simplificatrices (parfois abusives) pour découpler les équations : la « dynamique » suppose les températures uniformes et/ou constantes dans le temps, et la « thermique » suppose l'absence de mouvement.

Dans certains cas, on ne cherche pas toute l'évolution temporelle depuis l'état initial, mais seulement un « état final » statique [7] sans vouloir connaître toute l'évolution temporelle qui y conduit depuis l'état initial. Dans ce cas, les équations se simplifient : on cherche une solution dans laquelle toutes les dérivées particulaires (en particulier les vitesses, les accélérations et $\dot{T}$) sont nulles. C'est alors un problème de *thermostatique des solides élastiques*. La solution trouvée est dite *stationnaire*. Dans un tel problème, le temps ne joue aucun rôle : il n'y a pas de conditions initiales et la description des sollicitations extérieures se réduit aux sollicitations extérieures finales. Dans ce cas, les équations différentielles se réduisent à :

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} = \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\,\boldsymbol{f}_0^m \quad \text{et} \quad 0 = r_{ext}^v - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q} \\ &\text{où :} \quad \rho = \rho_0\,K_v^{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \overline{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}(T,\boldsymbol{u}) \quad ; \quad \boldsymbol{q} = \overline{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{q}}(T,\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{8.10}$$

Remarque – L'évolution temporelle d'un problème d'élasticité ne conduit jamais à une solution statique finale, car en élasticité, la dissipation intrinsèque est nulle et le mouvement ne s'amortit donc jamais. Pour qu'une solution temporelle converge vers une solution statique finale, il faudrait utiliser un modèle de comportement dissipatif (donc non élastique). Pour trouver une solution statique finale, il est toujours plus économique de la chercher directement en annulant les dérivées particulaires dans les équations de l'élasticité plutôt que d'introduire une dissipation artificielle.

La résolution d'un problème d'élasticité est donc la recherche des deux champs matériels $\boldsymbol{u}(P,t)$ et $T(P,t)$. À l'aide des définitions cinématiques [éq. (8.2) à (8.6) p. 96], de la loi de comportement mécanique et de la loi de comportement thermique, on pourra en déduire tous les autres champs utiles à l'ingénieur (déformations, contraintes, courants de chaleur, fonctions d'état, etc.).

Le système d'équations différentielles de champs inconnus $\boldsymbol{x}(P,t)$ (ou bien $\boldsymbol{u}(P,t)$) et $T(P,t)$ obtenu après les substitutions, est très compliqué. Sa solution générale est rarement accessible analytiquement, sauf pour quelques problèmes académiques dans lesquels on fait des hypothèses simplificatrices fortes sur la solution, avec des solides de forme simple et des conditions aux limites simplistes, ce qui ôte la plupart du temps tout intérêt pratique à la solution trouvée. En revanche, ces problèmes académiques sont d'un grand intérêt pédagogique, car ils illustrent la manipulation de tous les concepts cinématiques, sthéniques et thermiques utilisés en mécanique des milieux continus et peuvent néanmoins donner un aperçu grossier de la solution d'un problème compliqué.

[7] Pour l'observateur utilisé dans la description du mouvement.

Que la solution générale du système différentiel soit analytiquement accessible ou non, on sait de l'analyse que la solution générale d'un système d'équations différentielles n'est pas complètement déterminée. La détermination complète de la solution du problème se fait à l'aide des conditions initiales et des conditions aux limites.

Remarques – Si une solution finale ne se trouve pas complètement déterminée, c'est généralement parce que les conditions initiales ou les conditions aux limites sont insuffisantes. S'il n'existe aucune solution satisfaisant toutes les conditions aux limites, c'est souvent parce que les conditions aux limites ou initiales sont en surnombre ou incompatibles. L'intuition physique permet souvent de trouver les conditions manquantes ou redondantes.

Les conditions aux limites influencent fortement la solution, elles doivent donc modéliser aussi fidèlement que possible les actions du milieu extérieur sur le solide déformable afin que la solution reflète correctement le comportement réel.

Enfin, à l'exception de certains systèmes d'équations différentielles, aucun théorème ne garantit l'unicité de la solution. Seule l'intuition physique (parfois trompeuse) peut faire espérer une unicité.

Remarque – Les solutions d'un système différentiel assorti de ses conditions aux limites peuvent ne pas exister [(8)], être en nombre fini ou infini. De plus, elles peuvent aussi être infiniment sensibles aux conditions initiales ou aux limites, ce qui, dans ce cas pathologique, ôte tout intérêt à une solution particulière puisque les conditions initiales ou aux limites sont nécessairement entachées d'incertitudes ; on peut toutefois prouver dans quelques cas l'existence d'un ou plusieurs attracteurs qui sont approchés asymptotiquement par les solutions quand $t \to \infty$.

Dans la quasi-totalité des problèmes industriels, une solution analytique est hors de portée. On ne peut donc qu'espérer approcher une solution par des méthodes numériques.

8.2 Approche numérique des solutions

Il sort du cadre de ce cours d'exposer toutes les méthodes numériques susceptibles de fournir une solution approchée au problème élastique exposé dans la section précédente. Toutefois, on donne en 8.2.2 [p. 102] les grandes lignes de la méthode numérique qui semble actuellement (en 2017) la plus populaire en mécanique des solides déformables : la méthode des éléments finis.

Quelle que soit la méthode numérique employée pour la résolution du système d'équations différentielles et de ses conditions initiales et aux limites, il est indispensable de prendre conscience des possibilités et des limitations inhérentes à toute méthode numérique, afin de comprendre de ce que l'on peut en attendre, et aussi (voire surtout) de ce que l'on ne peut pas en attendre.

8.2.1 Incertitudes sur les résultats numériques

Quelle que soit la méthode numérique employée, tout résultat numérique est entaché d'erreur pour les raisons suivantes :

[(8)] Dans ce cas il faut remettre en question la définition du problème : conditions initiales, conditions aux limites ou lois de comportement mécanique ou thermique.

1. *Incertitudes de troncature* : tout calcul numérique sur ordinateur est nécessairement arrondi, car la représentation des nombres y est finie donc tronquée. Les méthodes de résolution enchaînant un très grand nombre de calculs dans lesquels les erreurs d'arrondi se propagent et s'amplifient, l'incertitude sur les résultats finaux est non maîtrisée [9].
2. *Incertitudes de méthode* : toutes les méthodes numériques qui sont issues de l'analyse numérique n'ont pour objectif que de trouver une *solution approchée* choisie dans une famille de champs prédéterminée. De plus, aucune méthode numérique ne sait garantir mathématiquement une précision (l'écart à la solution exacte) donnée à l'avance.
   Par ailleurs, les méthodes qui utilisent des maillages approximent la géométrie des frontières. Cette approximation peut avoir une forte influence locale sur la solution [10].
3. *Incertitudes d'implémentation* : Les mathématiciens de l'analyse numérique supposent implicitement dans leurs démonstrations que les algorithmes qu'il proposent sont calculés exactement. Même si l'algorithme converge mathématiquement vers une solution, il n'est pas certain que son implémentation sur une machine qui tronque les nombres se comporte de la manière espérée [11].
4. *Incertitudes inhérentes au problème posé* :
   – Si le problème est tel que la solution n'est pas unique [12], un algorithme aboutira probablement à l'une d'entre-elles sans que l'on puisse savoir si la solution trouvée par l'algorithme est unique ou non.
   – Si le problème est tel que la solution est infiniment sensible aux conditions aux limites ou initiales, un algorithme aboutira probablement à une solution, bien que celle-ci n'ait aucune valeur prédictive.

La combinaison de ces sources d'incertitudes peut parfois conduire à des erreurs importantes voire a des résultats non significatifs ou aberrants, sans que l'on puisse en juger par la seule observation du résultat ou du déroulement du calcul.

En conclusion, tout résultat numérique de résolution de systèmes d'équations différentielles [13] doit toujours être considéré avec circonspection. Pour les problèmes non pathologiques (mais on sait rarement à l'avance s'ils le sont ou non !), ces résultats entachés d'incertitudes inconnues sont néanmoins précieux car on n'en dispose pas d'autres ! Cependant, la confiance que l'on peut leur accorder est rarement prouvée.

8.2.2 Aperçu sur la méthode des éléments finis

Le principe de la méthode est de proposer comme solution approchée, des champs matériels $\boldsymbol{u}(P,t)$ et $T(P,t)$ choisis dans une famille de champs (généralement polynomiaux) définis par morceaux sur le domaine étudié, s'approchant « au mieux » de la solution exacte qui, quant à

[9] Elle est pourtant maîtrisable : on sait calculer l'incertitude du résultat de chaque opération élémentaire en fonction de l'incertitude des opérandes. Chaque donnée ou résultat intermédiaire devrait être stocké sous la forme de deux nombres : sa valeur centrale et son incertitude (ou bien ses valeurs maximale et minimale). Ce calcul d'incertitudes n'est malheureusement jamais fait dans les logiciels en raison du coût en calcul et en mémoire et peut-être aussi par crainte d'avoir à afficher à l'issue de certains calculs volumineux des incertitudes importantes et peu présentables.

[10] Par exemple, en élasticité, de fausses concentrations de contraintes peuvent apparaître dans les angles rentrants dûs au maillage et qu'il convient de considérer avec circonspection.

[11] Un même algorithme peut se comporter différemment d'un type de calculateur à l'autre si la représentation interne des nombres y est différente.

[12] Les bifurcations ne sont pas rares en élasticité (flambage).

[13] On dit aujourd'hui « simulation numérique », tendant à masquer le fait que le système différentiel est lui-même un modèle simplifié de la physique (milieu continu), et non une simulation de la réalité toujours trop complexe.

elle, n'appartient généralement pas à cette famille. La solution proposée par la méthode est donc une *approximation* de la solution exacte, mais on sait démontrer que tout champ « suffisamment régulier » peut être approché d'aussi près que l'on veut par des champs « réguliers » définis par morceaux en diminuant la taille des morceaux [(14)]. On expose ici le principe de la méthode, sans détailler ni les algorithmes utilisés ni leur implémentation informatique.

Formulation intégrale des équations

Dans un problème d'élasticité, les équations différentielles à résoudre sont l'équation de mouvement et l'équation de la chaleur [éq. (8.8) et (8.9) p. 97] :

$$\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\,\boldsymbol{f}_0^m - \rho\,\boldsymbol{\gamma} = 0 \text{ (éq. vectorielle)} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q} - \rho\,\dot{e}^m = 0 \text{ (éq. scalaire)} \tag{8.11}$$

Rappel – Après les substitutions, ces quatre équations différentielles scalaires ont pour fonctions inconnues les quatre champs scalaires $u_1(P,t)$, $u_2(P,t)$, $u_3(P,t)$ et $T(P,t)$.

■ **Théorème 8.4 – Théorème d'analyse fonctionnelle.** Si $\boldsymbol{\xi}(M)$ et $\boldsymbol{\chi}(M)$ sont des champs (scalaires, vectoriels ou tensoriels réels de même ordre de tensorialité) définis sur un domaine volumique $\mathscr{D}$, et de carré intégrable sur ce domaine [(15)], alors on a l'équivalence suivante :

$$\forall \boldsymbol{\chi}(M),\;\; \int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{\xi}(M) \bullet \boldsymbol{\chi}(M)\,\mathrm{d}v = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\xi}(M) = 0 \tag{8.12}$$

où « $\bullet$ » est le produit scalaire approprié [(16)].

Démonstration – On admettra ce théorème, sa démonstration sort du cadre de ce cours. On renvoie le lecteur intéressé à tout bon traité d'analyse fonctionnelle [(17)].

On définit le champ vectoriel $\boldsymbol{\xi}(M) \in \mathbb{R}^4$, défini dans la position *actuelle* $\mathscr{D}_t^m$ du solide, par les composantes suivantes :

$$\boldsymbol{\xi}(M) = \{\underbrace{\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\,\boldsymbol{f}_0^m - \rho\,\boldsymbol{\gamma}}_{\in\mathbb{R}^3}\,,\; \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q} - \rho\,\dot{e}^m}_{\in\mathbb{R}}\} \in \mathbb{R}^4$$

Le système d'équations différentielles (8.11) [p. 103] à résoudre s'écrit donc : $\boldsymbol{\xi}(M) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$.

On considère des champs vectoriels *arbitraires* $\boldsymbol{\chi}(M) \in \mathbb{R}^4$, définis dans la position actuelle $\mathscr{D}_t^m$ du solide, par les composantes :

$$\boldsymbol{\chi}(M) = \{\boldsymbol{g}(M), h(M)\} \in \mathbb{R}^4$$

où $\boldsymbol{g}(M) \in \mathbb{R}^3$ est un champ vectoriel arbitraire et $h(M) \in \mathbb{R}$ est un champ scalaire arbitraire, ces deux champs arbitraires étant définis dans la position actuelle $\mathscr{D}_t^m$ du solide.

---

(14) En langage mathématique, on dit que l'ensemble des fonctions définies par morceaux dans un domaine est *dense* dans l'ensemble de toutes les fonctions régulières définies sur ce domaine et que la solution approchée *converge* vers la solution exacte quand on diminue la taille des morceaux. Toutes ces affirmations sont démontrables.

(15) C'est-à-dire que les intégrales $\int_{\mathscr{D}} \|\boldsymbol{\chi}(M)\|^2 \mathrm{d}v$ et $\int_{\mathscr{D}} \|\boldsymbol{\xi}(M)\|^2 \mathrm{d}v$ sont finies ; cette condition est l'essentiel de la « régularité » requise pour la démonstration du théorème.

(16) Si les champs $\boldsymbol{\xi}(M)$ et $\boldsymbol{\chi}(M)$ sont scalaires, l'opération « $\bullet$ » est le produit ordinaire des réels.

(17) Dans ces traités, l'espace vectoriel de Hilbert des fonctions définies et intégrables sur le domaine $\mathscr{D}$ est généralement construit sur le corps des complexes. Le théorème énoncé ici en est la réduction aux réels.
Par ailleurs, dans ces cours l'intégrale $\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{\xi}(M) \bullet \boldsymbol{\chi}(M) \mathrm{d}v$ est un produit scalaire de cet espace parfois noté $\langle \boldsymbol{\xi} \,|\, \boldsymbol{\chi} \rangle$.

Dans un problème d'élasticité, le produit scalaire $\boldsymbol{\xi}(M) \bullet \boldsymbol{\chi}(M)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\xi}(M) \bullet \boldsymbol{\chi}(M) = (\mathbf{div}_E\, \boldsymbol{\sigma} + \rho\, \boldsymbol{f}_0^m - \rho\, \gamma) \cdot \boldsymbol{g} + (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} - \rho\, \dot{e}^m)\, h$$

En utilisant le théorème 8.4, le système des quatre équations différentielles scalaires $\boldsymbol{\xi}(M) = \mathbf{0}$ est équivalent à l'unique équation scalaire suivante :

$$\begin{aligned} \forall (\boldsymbol{g}, h), \quad & \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big(\mathrm{div}_E\, \boldsymbol{\sigma}_E + \rho_E\, \boldsymbol{f}_{0\,E}^m - \rho_E\, \boldsymbol{\gamma}_E \Big) \cdot \boldsymbol{g}_E \, \mathrm{d}v_t \\ & + \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big(\boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E + r_{ext\,E}^v - \mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} - \rho_E\, \dot{e}_E^m \Big)\, h_E \, \mathrm{d}v_t = 0 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Dans l'équation (8.13), les intégrales portent sur le domaine matériel actuel $\mathscr{D}_t^m$, les champs actuels sont donc décrits par la méthode d'Euler, ce qu'indique l'indice $_E$.

Remarque – On reconnaît dans le premier terme de l'équation (8.13) [p. 104] l'expression du théorème (ou principe) des travaux virtuels (ou puissances virtuelles) [18] ; on peut donc établir ce premier terme avec des raisonnements mécaniques. Le second terme de cette somme provient de l'équation de la chaleur. Il pourrait aussi bien s'interpréter en théorème (ou principe) des chaleurs virtuelles (ou des puissances calorifiques virtuelles), mais ce n'est pas l'usage. Quoi qu'il en soit, une interprétation mécanique ou thermique des champs arbitraires $\boldsymbol{g}(M)$ et $h(M)$ n'est pas nécessaire aux développements qui suivent.

On utilise les deux identités suivantes [19] (démonstrations en annexe D [p. 139]) :

$$\int_{\mathscr{D}_t} \mathrm{div}_E\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{g}_E \, \mathrm{d}v_t = - \int_{\mathscr{D}_t} \sigma_E : \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (D.5) p. 140]}$$

$$\int_{\mathscr{D}_t} \mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} \cdot h_E \, \mathrm{d}v_t = - \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E\, h \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t} h_E\, \boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (D.2) p. 140]}$$

où $\boldsymbol{n}_t$ est la normale unitaire sortante de la frontière actuelle $\partial \mathscr{D}_t$.

L'équation (8.13) devient :

$$\begin{aligned} \forall (\boldsymbol{g}, h), \; & - \int_{\mathscr{D}_t} \sigma_E : \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t + \int_{\mathscr{D}_t} \rho_E \Big(\boldsymbol{f}_{0\,E}^m - \boldsymbol{\gamma}_E \Big) \cdot \boldsymbol{g}_E \, \mathrm{d}v_t + \\ & \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E\, h \, \mathrm{d}v_t - \int_{\partial \mathscr{D}_t} h_E\, \boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t + \int_{\mathscr{D}_t} \Big(\boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E + r_{ext\,E}^v - \rho_E\, \dot{e}_E^m \Big)\, h_E \, \mathrm{d}v_t = 0 \end{aligned} \tag{8.14}$$

où, dans les intégrales de frontières, apparaissent les éventuelles conditions aux limites de Neumann [déf. 8.2 p. 99] portant sur les valeurs de $\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t$ et de $\boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t$ aux frontières.

On note :
- $\partial \mathscr{D}_t^f$ la partie de frontière où des contraintes sont imposées $\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{f}^s$ (condition de Neumann sthénique) ;
- $\overline{\partial \mathscr{D}_t^f}$ son complément $\partial \mathscr{D}_t - \partial \mathscr{D}_t^f$;
- $\partial \mathscr{D}_t^q$ la partie de frontière où un flux thermique est imposé $\boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t = q^s$ (condition de Neumann thermique) ;
- $\overline{\partial \mathscr{D}_t^q}$ son complément $\partial \mathscr{D}_t - \partial \mathscr{D}_t^q$.

[18] Voir le cours *Équation générales de la mécanique des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].
[19] On peut les considérer comme des généralisations de l'intégration par parties pour des intégrales de volume.

Compte tenu des conditions aux limites de Neumann sthéniques et thermiques, les intégrales de frontière de l'équation (8.14) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathscr{D}_t} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t &= \int_{\partial\mathscr{D}_t^f} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t + \int_{\overline{\partial\mathscr{D}_t^f}} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t \\
&= \int_{\partial\mathscr{D}_t^f} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{f}_E^s \,\mathrm{d}s_t + \int_{\overline{\partial\mathscr{D}_t^f}} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t \\
\int_{\partial\mathscr{D}_t} h_E \boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t &= \int_{\partial\mathscr{D}_t^q} h_E \boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t + \int_{\overline{\partial\mathscr{D}_t^q}} h_E \boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t \\
&= \int_{\partial\mathscr{D}_t^q} h_E q_E^s \,\mathrm{d}s_t + \int_{\overline{\partial\mathscr{D}_t^q}} h_E \boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t
\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{f}^s$ et q^s sont des champs surfaciques connus imposés aux frontières.

Finalement, compte tenu des conditions aux limites de Neumann, le système d'équations différentielles du problème est équivalent à l'équation scalaire suivante :

$$\begin{aligned}
\forall (\boldsymbol{g}, h), \quad & -\int_{\mathscr{D}_t} \sigma_E : \mathbf{grad}_E \boldsymbol{g} \,\mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}_t} \rho_E \left(\boldsymbol{f}_{0\,E}^m - \boldsymbol{\gamma}_E \right) \cdot \boldsymbol{g}_E \,\mathrm{d}v_t \\
& + \int_{\partial\mathscr{D}_t^f} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{f}_E^s \,\mathrm{d}s_t + \int_{\overline{\partial\mathscr{D}_t^f}} \boldsymbol{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t \\
& + \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E h \,\mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}_t} \left(\boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E + r_{ext\,E}^v - \rho_E \dot{e}_E^m \right) h_E \,\mathrm{d}v_t \\
& - \int_{\partial\mathscr{D}_t^q} h_E q_E^s \,\mathrm{d}s_t - \int_{\overline{\partial\mathscr{D}_t^q}} h_E \boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t = 0
\end{aligned} \tag{8.15}$$

soumise aux conditions aux limites restantes (c'est-à-dire de type Dirichlet et de type mixte).

Construction d'une famille de champs définis par morceaux (maillage)

On divise en morceaux (mailles) le domaine occupé par le solide déformable *dans sa position initiale* (opération de maillage). En pratique, pour les domaines volumiques, les algorithmes d'assistance au maillage ne fournissent que des tétraèdres, des pentaèdres ou des hexaèdres [20].

Pour construire une famille de champs définis par morceaux *sur le domaine initial* $\mathscr{D}_0^m$, on définit sur chaque maille des polynômes [21] de faible degré (en pratique : 1, 2 ou 3) déterminés par leurs valeurs en un certain nombre de points de la maille appelés *nœuds* [22]. Ces fonctions polynomiales sont appelées *fonctions d'interpolation* ou encore *fonctions de forme*. Une maille munie de nœuds et de fonctions d'interpolations est appelée *élément*. Dans chaque maille, il faut autant de fonctions d'interpolation que de champs inconnus (en élasticité, quatre champs scalaires : u_1, u_2, u_3 et T). Bien souvent, les fonctions d'interpolation et les nœuds sont les mêmes pour chaque champ inconnu, seules les valeurs aux nœuds sont particulières à chaque champ inconnu.

Éléments conformes – On choisit souvent des fonctions d'interpolation telles que les valeurs des interpolations dans chaque maille se raccordent à la frontière commune entre deux éléments. De tels éléments sont dits *conformes*. En fait, la conformité des éléments n'est pas obligatoire, on peut très

[20] La forme de la frontière subit donc une approximation géométrique.

[21] En fait, il est possible d'utiliser des fonctions non polynomiales, mais la majorité des implémentations de la méthode des éléments finis utilisent des polynômes.

[22] Le nombre de nœuds dans la maille dépend du degré choisi pour les polynômes.

bien approximer d'aussi près que l'on veut un champ solution avec des fonctions discontinues aux frontières des éléments : il suffit d'avoir beaucoup de petits éléments. Si les éléments sont conformes, la solution approchée $\widetilde{\boldsymbol{u}}(M), \widetilde{T}(M)$ proposée par la méthode sera plus lisse (continuité C_0). Toutefois, les éléments conformes n'assurent pas la continuité aux frontières des dérivées ; les gradients des champs (et donc les déformations et les contraintes) sont donc discontinus aux frontières des éléments. La plupart des logiciels présentent néanmoins des champs de déformations et de contraintes rendus artificiellement continus par divers procédés de moyennation ou de lissage.

On a ainsi défini par morceaux une famille de champs sur le domaine initial $\mathscr{D}_0^m$, chaque champ de la famille étant déterminé par ses valeurs aux noeuds. La solution approchée sera, pour chaque champ inconnu, un champ choisi dans cette famille, c'est-à-dire un ensemble de valeurs à chaque nœud. Le maillage étant effectué sur la position initiale du solide (la seule connue avant la résolution), la description de la solution approchée sera nécessairement faite par la méthode de Lagrange.

Changement de variables Euler → Lagrange

Il faut donc effectuer un changement de variables [23] sur les intégrales de l'équation (8.15) [p. 105] (intégrales sur le domaine matériel actuel $\mathscr{D}_t^m$ et sa frontière actuelle $\partial\mathscr{D}_t^m$) pour les ramener à des intégrales sur le domaine matériel initial $\mathscr{D}_0^m$ et sa frontière initiale $\partial\mathscr{D}_0^m$.

D'une manière générale, pour tout champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ défini sur un domaine matériel $\mathscr{D}^m$, un tel changement de variable pour les intégrales de volume s'écrit :

$$\forall \boldsymbol{\Psi}, \quad \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\psi}_E \, \mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\Psi}_L K_{vL} \, \mathrm{d}v_0$$

où $\boldsymbol{\Psi}(P,t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t)$ [24] et où $K_v = \det\boldsymbol{F}$ est la dilatation volumique. Après les substitutions cinématiques [éq. (8.2) à (8.6) p. 96], la dilatation volumique K_v est fonction des champs matériels inconnus $\boldsymbol{u}(P,t)$ et $T(P,t)$.

De même, pour les intégrales de frontière, le changement de variables s'écrit :

$$\forall \boldsymbol{\Psi}, \quad \int_{\partial\mathscr{D}_t} \boldsymbol{\Psi}_E \, \mathrm{d}s_t = \int_{\partial\mathscr{D}_0} \boldsymbol{\Psi}_L K_{sL} \, \mathrm{d}s_0$$

où K_s est la dilatation surfacique des facettes matérielles de la frontière actuelle, identifiées par leur normale sortante actuelle $\boldsymbol{n}_t$.

Rappels de Cinématique – On rappelle que [25] :
La relation entre les gradients lagrangiens et eulériens d'un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}$ est :

$$\mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$$

La dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle identifiée par sa normale de référence est :

$$K_s = \det\boldsymbol{F} \, \|\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\|$$

La relation entre la normale actuelle et la normale de référence d'une facette matérielle est :

$$\boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\|}$$

[23] Dans certains textes de mécanique des solides déformables, les changements de variables dans les intégrales qui suivent sont appelés « équations de transport ».
[24] Comme précédemment, on omettra d'écrire les arguments $(\boldsymbol{x}_0,t)$ des descriptions de Lagrange.
[25] Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

Finalement, après les changements de variables pour ramener les intégrales sur le domaine matériel actuel $\mathscr{D}_t^m$ à des intégrales sur le domaine matériel de référence $\mathscr{D}_0^m$, l'équation (8.15) [p. 105] devient :

$$
\begin{aligned}
&\forall (\boldsymbol{g}_L, h_L),\\
&-\int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : (\mathbf{grad}_L \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \det\boldsymbol{F} \,\mathrm{d}v_0 + \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L \left(\boldsymbol{f}_{0\,L}^m - \boldsymbol{\gamma}_L\right) \cdot \boldsymbol{g}_L \det\boldsymbol{F} \,\mathrm{d}v_0\\
&+\int_{\partial\mathscr{D}_0^f} \boldsymbol{g}_L \cdot \boldsymbol{f}_L^s \det\boldsymbol{F} \,\|\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\| \,\mathrm{d}s_0 + \int_{\overline{\partial\mathscr{D}_0^f}} \boldsymbol{g}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot (\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0) \det\boldsymbol{F} \,\mathrm{d}s_0\\
&+\int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{q}_L \cdot (\mathbf{grad}_L h \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \det\boldsymbol{F} \,\mathrm{d}v_0 + \int_{\mathscr{D}_0^m} \left(\boldsymbol{\sigma}_L : \boldsymbol{D}_L + r_{ext\,L}^v - \rho_L \dot{e}_L^m\right) h_L \det\boldsymbol{F} \,\mathrm{d}v_0\\
&-\int_{\partial\mathscr{D}_0^q} h_L q_L^s \det\boldsymbol{F} \,\|\boldsymbol{F}^{-T} . \boldsymbol{n}_0\| \,\mathrm{d}s_0 - \int_{\overline{\partial\mathscr{D}_0^q}} h_L \boldsymbol{q}_L \cdot (\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0) \det\boldsymbol{F} \,\mathrm{d}s_0 = 0
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

où les champs $\boldsymbol{g}_L$ (vectoriel) et h_L (scalaire) sont les descriptions de Lagrange des champs arbitraires $\boldsymbol{g}(P,t)$ et $h(P,t)$.

Remarques – Le lecteur averti reconnaîtra dans cette équation les « expressions lagrangiennes » des équations locales des principes fondamentaux qui ont été signalées en remarques dans le cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3]. De fait, il était tout à fait inutile de les écrire si prématurément : elles apparaissent naturellement lorsque, pour faire une résolution numérique, on fait les changements de variables nécessaires pour ramener les intégrales sur le domaine actuel inconnu $\mathscr{D}_t^m$ à des intégrales sur le domaine de référence connu $\mathscr{D}_0^m$.

Par ailleurs, certains auteurs récrivent l'intégrande de la première intégrale de l'équation (8.16) de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_L : (\mathbf{grad}_L \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \det\boldsymbol{F} = \det\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) : \mathbf{grad}_L \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\Pi} : \mathbf{grad}_L \boldsymbol{g}$$

Ainsi, quand on écrit la formulation intégrale des équations de mouvement, après le changement de variable, on peut faire apparaître le groupement de termes $\boldsymbol{\Pi} = \det\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T})$ dénommé premier « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff (non symétrique) [(26)]. Cette réécriture n'est pas nécessaire, elle ne donne lieu qu'à des interprétations pseudo-mécaniques [(27)].

Enfin, il n'est pas usuel de tenter d'interpréter les termes de (8.16) issus de l'équation de la chaleur. Certains auteurs notent $\boldsymbol{q}_0$ le vecteur $\boldsymbol{q}_L \cdot (\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0) \det\boldsymbol{F}$ et le nomment « transporté » de $\boldsymbol{q}$.

L'équation (8.16), complétée par les conditions aux limites autres que celles de type Neumann, est rigoureusement équivalente au problème initial.

Éléments finis en mécanique des fluides – La méthode des éléments finis est applicable pour la résolution des équations différentielles de la mécanique des fluides. La seule différence est qu'en mécanique des fluides, les domaines considérés sont des *domaines géométriques* dont on connaît la forme *a priori*. Le maillage se fait donc sur ce domaine, le plus souvent fixe pour l'observateur utilisé dans le calcul. La description des champs inconnus (vitesse et température) se fait donc par la méthode d'Euler ($\boldsymbol{v}_E$ et T_E). Il n'est donc pas nécessaire de ramener la formulation intégrale à une intégrale sur une forme de référence.

(26) Voir le cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

(27) Notamment chez les auteurs qui interprètent le champ vectoriel arbitraire $\boldsymbol{g}$ comme un champ de vitesses vituelles, et qui font un « parallèle » avec l'égalité $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \det\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\Pi} : \mathbf{grad}_L \boldsymbol{v}$ qui n'est vraie que pour les vitesses réelles.

Traitement des conditions aux limites restantes

Il existe deux techniques pour prendre en compte les conditions aux limites de type Dirichlet :

1. On peut imposer aux champs polynomiaux définis dans le maillage, de respecter les conditions de type Dirichlet (températures et déplacements imposés à la frontière), ce qui revient à imposer des valeurs aux nœuds qui sont sur la partie de frontière où des conditions de Dirichlet sont posées ;
2. On peut traiter les conditions aux limites restantes (de Dirichlet et/ou mixtes) en les considérant comme des équations supplémentaires du problème dont on écrit une formulation intégrale sur la portion de frontière concernée.
   Par exemple, si une condition de Dirichlet sur la portion de frontière $\partial\mathscr{D}_t^D$ s'écrit :
   $$\forall N \in \partial\mathscr{D}_t^D, \quad \boldsymbol{u}(N,t) - \boldsymbol{u}^s(N,t) = 0$$
   elle est équivalente à la formulation intégrale :
   $$\forall \boldsymbol{k},\ 0 = \int_{\partial\mathscr{D}_t^D} (\boldsymbol{u}_E - \boldsymbol{u}_E^s)\cdot\boldsymbol{k}_E \,\mathrm{d}s_t = \int_{\partial\mathscr{D}_0^D} (\boldsymbol{u}_L - \boldsymbol{u}_L^s)\cdot\boldsymbol{k}_L \det\boldsymbol{F}\, \|\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{n}_0\| \,\mathrm{d}s_0$$
   où $\boldsymbol{k}_L$ est la description de Lagrange d'un champ vectoriel arbitraire défini sur la portion de frontière $\partial\mathscr{D}_0^D$.
   Pour prendre en compte cette condition, il suffit donc d'ajouter cette intégrale de frontière à l'équation (8.16) qui devra être vraie $\forall(\boldsymbol{g}_L, h_L, \boldsymbol{k}_L)$.
   On procède de même avec les éventuelles conditions aux limites de type mixte.

Finalement, le problème initial (équations différentielles et conditions aux limites) se ramène à l'unique équation scalaire (8.16) complétée par des termes dus aux conditions aux limites de Dirichlet (si elles ne sont pas automatiquement respectées par la famille de champs polynomiaux) et les termes dus aux conditions aux limites de type mixte. Cette équation scalaire doit être vraie quels que soient les champs arbitraires (dans le domaine ou sur des parties de frontière) introduits, ce que l'on notera plus brièvement : $\forall\boldsymbol{\chi}_L$ (notation du théorème 8.4 [p. 103]).

Solution d'un problème stationnaire

Un problème stationnaire est un problème où le temps n'apparaît pas dans les équations. En élasticité, il s'agit de la recherche d'une solution statique (toutes les dérivées temporelles sont donc nulles). On a donc en particulier $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$, $\dot{T} = 0$ et $\dot{e}^m = 0$. Les conditions initiales ne jouent aucun rôle et les conditions aux limites sont les conditions aux limites finales.

L'approximation de la méthode des éléments finis provient de ce que l'on cherche la description de Lagrange des champs inconnus $\boldsymbol{u}_L$ et T_L dans l'espace de champs polynomiaux $\mathbb{F}_{pol}$ définis par morceaux construits dans l'opération de maillage, au lieu de la chercher dans l'espace de tous les champs définis sur $\mathscr{D}_0^m$. On montre [28] que la meilleure solution est obtenue en remplaçant la condition $\forall\boldsymbol{\chi}_L$ dans l'équation (8.16) par la condition $\forall\overline{\boldsymbol{\chi}}_L \in \mathbb{F}_{pol}$ dans la formulation intégrale du problème sur $\mathscr{D}_0^m$ [29].

[28] Car $\mathbb{F}_{pol}$ est dense dans l'ensemble des fonctions définies sur $\mathscr{D}_0^m$.

[29] Note pour les spécialistes : les fonctions d'interpolation définies dans les éléments sont utilisées comme fonctions test $\boldsymbol{\chi}_L$. C'est la méthode la plus couramment employée car, pour les systèmes d'équations linéaires, elle conduit à une matrice symétrique. La résolution des systèmes d'équations non linéaires peut se ramener à une suite de résolutions de systèmes linéaires dont la matrice est aussi symétrique (méthode de Newton-Raphson et ses variantes). Les systèmes symétriques sont préférés car on connaît des méthodes de résolution plus efficaces que pour les systèmes quelconques.

Or l'espace $\mathbb{F}_{pol}$ peut être considéré comme un espace vectoriel de champs, de dimension finie, avec un nombre fini de champs de base : les champs de base [30] $\psi_i \in \mathbb{F}_{pol}$ choisis sont ceux qui sont nuls partout sauf en un nœud où ils valent 1. On peut ainsi construire tous les champs de l'espace vectoriel $\mathbb{F}_{pol}$ par combinaison linéaire des ψ_i, les coefficients de la combinaison linéaire étants les valeurs aux nœuds. Tous les champs scalaires arbitraires $\overline{\chi}_L$ de $\mathbb{F}_{pol}$ s'écrivent donc :

$$\overline{\chi}_L = \sum_{j=1}^{n} v_j \, \psi_j \quad \text{où } v_j \text{ est la valeur du champ } \overline{\chi}_L \text{ au nœud } j$$

et la condition $\forall \overline{\chi}_L \in \mathbb{F}_{pol}$ se réduit à la condition $\forall \psi_j$ où j est un entier compris entre 1 et le nombre de nœuds du maillage.

En écrivant la formulation intégrale du problème pour chacun des ψ_j, on obtient un système d'équations algébriques (généralement non linéaire) dont les inconnues sont les valeurs aux nœuds v_j de chaque champ inconnu. La résolution de ce système algébrique donne la solution approchée recherchée.

Remarque – Il sort du cadre de cet aperçu de détailler les méthodes informatiques et numériques utilisées pour la construction, le stockage en mémoire et la résolution de ce système d'équations algébriques (en général non linéaire). Il suffit de savoir que la plupart des algorithmes [31] utilisés sont des algorithmes qui *convergent* vers la solution du système algébrique et que l'on doit arrêter dès que la précision semble suffisante. Certaines de ces méthodes [32] peuvent s'interpréter comme la résolution d'un problème transitoire (voir ci-dessous) dit « quasi-statique » [33] dans lequel les conditions aux limites évoluent progressivement [34] vers les conditions aux limites finales en fonction d'un temps fictif [35] et où à chaque instant fictif on utilise une « loi de comportement tangente » [section 2.6 p. 39]. Ces interprétations ne sont pas strictement nécessaires car les numériciens savent construire des matrices tangentes pour résoudre un système algébrique non linéaire sans avoir besoin d'interprétations mécaniques ou thermiques.

Solution temporelle d'un problème transitoire

On cherche maintenant les descriptions de Lagrange des champs solutions en fonction du temps $\boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0, t)$ (ou bien $\boldsymbol{x}_L(\boldsymbol{x}_0, t)$) et $T_L(\boldsymbol{x}_0, t)$. Il s'agit donc de thermo*dynamique* : on n'annule plus les dérivées temporelles dans la formulation intégrale, les conditions aux limites sont fonction du temps et les conditions initiales sont prises en compte.

Actuellement (2017), dans les logiciels, le temps est traité en différences finies avec de petits incréments de temps, c'est-à-dire que l'on cherche la distribution spatiale des champs inconnus en un certain nombre d'instants rapprochés. À chaque incrément de temps, on doit donc résoudre un problème similaire au problème statique précédent, à la différence près que dans la formulation intégrale, les dérivées particulaires actuelles ne sont pas nulles. La solution d'un problème transitoire est donc la description spatiale des champs inconnus à différents instants.

[30] On les appelle aussi *fonctions test* ou encore *fonctions de pondération*.
[31] Sauf les algorithmes de résolution directe de systèmes linéaires (utilisables pour des systèmes de taille modérée).
[32] Notamment la méthode dite de *Newton-Raphson* et ses différentes variantes.
[33] La formulation intégrale est celle du problème stationnaire, c'est-à-dire que les dérivées temporelles sont nulles.
[34] Le choix de cette progresssion fictive est arbitraire.
[35] Pour les problèmes non linéaires dont l'unicité de la solution n'est pas garantie, le champ solution final peut dépendre de la progression fictive choisie.

Remarques – Dans un tel calcul, le choix des incréments de temps est toujours délicat : s'ils sont choisis trop grands, le résultat numérique peut masquer des phénomènes dynamiques rapides, s'ils sont trop petits, le coût du calcul est prohibitif. Par ailleurs, l'estimation des dérivées temporelles actuelles (vitesses, accélérations, $\dot{T}$, $\dot{e}^m$, etc) donne lieu à diverses méthodes numériques [36].

Afin d'éviter de traiter le temps en différences finies, certains numériciens envisagent le problème transitoire d'une manière « déphysicisée » : on cherche les champs solutions $\{\boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0,t), T_L(\boldsymbol{x}_0,t)\}$ dans un domaine $\mathscr{D}_0^{(4)} = \mathscr{D}_0^m \times [t_0\,;t_1]$ de l'espace-temps à quatre dimensions dont les points sont $(\boldsymbol{x}_0,t) \in \mathscr{D}_0^{(4)}$. Cette façon de traiter numériquement le temps de la même manière que les variables d'espace reste aujourd'hui (2017) confidentielle et n'est pas implantée dans les logiciels courants actuels.

Autres problèmes de mécanique

La méthode des éléments finis permet aussi de rechercher des fréquences propres et des modes propres de vibration de systèmes *linéaires*, afin de construire par superposition pondérée de ces modes propres un mouvement vibratoire « stationnaire » sous sollicitation forcée périodique (méthode dite de décomposition modale). Elle permet aussi de rechercher les limites de stabilité des solutions statiques (sollicitations critiques de flambement).

L'écriture des équations thermomécaniques dont la solution décrit les modes propres de vibration ou les limites de stabilité sort du cadre de ce cours. Dans cet aperçu sur la méthode des éléments finis, il suffit de retenir que ces deux problèmes se résolvent en analysant le spectre (valeurs propres et vecteurs propres) d'un système d'équations algébriques *linéaire* construit à partir de la formulation intégrale de certaines équations différentielles (non données dans ce cours), de la même manière que précédemment.

Remarque finale

Le lecteur vigilant aura remarqué que les substitutions en fonction des champs matériels inconnus $\boldsymbol{u}(P,t)$ et $T(P,t)$ n'ont pas été écrites explicitement. Par conséquent, *les raisonnements qui précèdent sont valables quelle que soit la loi de comportement*, même non élastique, même avec des listes de variables d'état différentes [37]. Les substitutions, particulières à chaque modèle de comportement, ne sont effectivement faites par le logiciel qu'au moment de la construction du système d'équations algébriques. Les substitutions pour un problème d'élasticité isotrope avec une certaine loi de comportement sont détaillées dans les illustrations numériques exposées dans le chapitre 9 [p. 113].

8.3 Recommandations pratiques

Le modèle de comportement élastique (isotrope ou non) est satisfaisant pour la résolution des problèmes industriels dans lesquels les pièces doivent revenir à leur forme initiale après cessation des sollicitations. Le modèle élastique est donc inadapté pour les problèmes de formage, dans lesquels on souhaite que le solide ait une forme différente lorque les sollicitations cessent. La modélisation de comportements inélastiques fait l'objet d'un autre cours.

[36] Solveurs en temps dits implicites ou explicites.

[37] Il faut préciser que les modèles de comportement inélastiques ont, pour la plupart, des variables d'état supplémentaires régies par une équation d'évolution. Il y a donc des équations différentielles supplémentaires (les équations d'évolution) et des champs inconnus supplémentaires (les variables d'état mnésiques).

Par ailleurs, un critère de limite élastique doit toujours être utilisé pour vérifier *a posteriori* que la limite élastique n'a jamais été atteinte en aucun point du solide élastique et en aucun instant depuis l'instant initial. En outre, sauf pour certains problèmes d'élasticité où l'instabilité est recherchée, on doit aussi s'assurer que la limite de stabilité n'est jamais atteinte. Dans la vérification d'une structure élastique qui doit rester stable, les deux critères doivent être satisfaits. Dans le calcul de pièces ou de structures élancées, le seuil de stabilité est souvent atteint avant le seuil de limite élastique, il est donc prudent de ne pas se limiter à la seule vérification du seuil de limite élastique.

Enfin, dans la plupart des cas industriels, le recours à une méthode de résolution numérique est incontournable. Hormis les incertitudes inhérentes à toute solution numérique qui ont été exposées en section 8.2.1 [p. 101], une solution numérique est plus pauvre qu'une solution analytique car l'influence des paramètres donnés (dimensions, matériau, sollicitations extérieures) n'apparaît pas clairement dans une solution numérique. Pour tester l'influence d'un paramètre, on doit recommencer le calcul avec de nouvelles valeurs pour le paramètre, et supposer qu'entre les valeurs du paramètre, les solutions trouvées sont interpolables.

9

Illustrations numériques en élasticité isotrope

Dans ce chapitre, on propose quelques illustrations numériques portant sur des problèmes d'élasticité isotrope. Le premier exemple met en évidence les effets thermiques dans la traction simple d'un barreau d'acier ; le second modélise la flexion forte d'un bloc de caoutchouc ; le troisième met en évidence la non linéarité de la relation entre contrainte et allongement lors d'un essai de forte traction ou compression élastique isotherme ; le dernier illustre les effets de bord dans un essai de glissement isotherme.

9.1 Modèles de comportement utilisé

9.1.1 Comportement élastique isotrope

On considère que le matériau est correctement modélisé par le modèle de milieu continu élastique isotrope construit dans le chapitre 3 [p. 43] : les variables d'état sont $\{T, K_v, \delta\}$ et on postule l'hypothèse supplémentaire 3.3 [p. 52] (une déformation isovolume ne modifie pas la contrainte moyenne). On rappelle ici les expressions utiles pour la formulation du problème :

$$e^m = Q^{(1)}_{exp} + \frac{1}{\rho_0}\int_1^{K_v}\left(\sigma^{(2)}_{exp} - T\,\partial_T\sigma^{(2)}_{exp}\right)dK_v + \frac{1}{\sqrt{3}\,\rho_0}\int_1^{\delta}\frac{\tau^{(3)}_{exp\,1} - T\,\partial_T\tau^{(3)}_{exp\,1}}{\delta^{\frac{1}{3}}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1}}\,d\delta$$

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0\boldsymbol{G} + K_2\boldsymbol{B} \qquad \text{où} \quad K_0 = \sigma^{(2)}_{exp} - \frac{\delta^{\frac{2}{3}}\,\tau^{(3)}_{exp\,1}}{\sqrt{3}\,K_v\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1}} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{\tau^{(3)}_{exp1}}{\sqrt{3}\,K_v^{\frac{5}{3}}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}}-1}}$$

Dans ce modèle, les trois fonctions expérimentales $Q^{(1)}_{exp}(T)$, $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v)$ et $\tau^{(3)}_{exp\,1}(T,\delta)$ peuvent être choisies arbitrairement sans compromettre le caractère élastique isotrope du modèle. Elle devraient être issues d'expériences. On choisit ici des idéalisations des courbes expérimentales, simples mais physiquement raisonnables, qui ont été établies dans la dernière section de la feuille de calcul en annexe F [p. 147] et que l'on rappelle ici :

$\tau^{(3)}_{exp\,1} = \mu_0\gamma$ (contrainte de glissement sans déformation sphérique initiale)

$\sigma^{(2)}_{exp} = \sigma^{(1)}_{exp} + \xi_0 \ln K_v$ (contrainte moyenne dans une déformation sphérique)

$Q^{(5)}_{exp} = C_p\,(T - T_0)$ (chaleur massique en dilatation libre)

$K_{v\,exp}^{(5)} = 1 + \beta\,(T - T_0)$ (dilatation volumique libre)

où les coefficients μ_0, ξ_0, C_p et β sont supposés indépendants de la température.

Ces choix sont justifiés par le fait que les coefficients ξ_0 (compressibilité), μ_0 (module de cisaillement), C_p (capacité calorifique en dilatation libre) et β (coefficient de dilatation thermique volumique [(1)].) sont les plus couramment donnés (ou déductibles) des caractéristiques matériaux couramment publiées. Avec ces idéalisations, la dérivée particulaire de l'énergie interne massique s'écrit [(2)] :

$$\begin{aligned} \dot{e}^m = &\Big(C_p - \frac{\xi_0 \beta^2 T}{\rho_0}\Big(\frac{3K_v}{(1+\beta(T-T_0))^2} + 6(1+\beta(T-T_0))\Big)\Big)\dot{T} + \frac{\mu_0}{\rho_0 \delta^{\frac{1}{3}}}\dot{\delta} \\ &+ \frac{\xi_0}{\rho_0}\Big(\frac{3\beta T}{1+\beta(T-T_0)} + \ln\frac{K_v}{1+\beta(T-T_0)}\Big)\dot{K}_v \end{aligned} \tag{9.1}$$

La loi de comportement mécanique est $\boldsymbol{\sigma} = K_0 \boldsymbol{G} + K_1 \boldsymbol{B}$ où les fonctions d'état K_0 et K_1 sont :

$$K_0 = \xi_0 \ln\frac{K_v}{1+\beta(T-T_0)} - \frac{\mu_0 \delta^{\frac{2}{3}}}{K_v} \quad ; \quad K_1 = \frac{\mu_0}{{K_v}^{\frac{5}{3}}}$$

9.1.2 Comportement thermique

La loi de comportement thermique idéalisée choisie est celle de Fourier : $\boldsymbol{q} = -\alpha\, \mathbf{grad}_E\, T$ où α est un coefficient supposé indépendant de la température, de son gradient eulérien et de la déformation.

9.1.3 Formulation intégrale

La formulation intégrale du problème, *sans tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet ou mixtes*, est donc [éq. (8.16) p. 107] :

$$\begin{aligned} &\forall (\boldsymbol{g}_L, h_L), \\ &-\int_{\mathscr{D}_0} \boldsymbol{\sigma}_L : (\mathbf{grad}_L \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{F}_L^{-1}) \det\boldsymbol{F}_L \, dv_0 + \int_{\partial\mathscr{D}_0^f} \boldsymbol{g}_L \cdot \boldsymbol{f}_L^s \det\boldsymbol{F}_L \, \|\boldsymbol{F}_L^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\| \, ds_0 \\ &+ \int_{\partial\mathscr{D}_0^f} \boldsymbol{g}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot (\boldsymbol{F}_L^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0) \det\boldsymbol{F}_L \, ds_0 + \int_{\mathscr{D}_0} \rho_L \Big(\boldsymbol{f}_L^m - \boldsymbol{\gamma}_L\Big) \cdot \boldsymbol{g}_L \det\boldsymbol{F}_L \, dv_0 \\ &+ \int_{\mathscr{D}_0} \boldsymbol{q}_L \cdot (\mathbf{grad}_L h \cdot \boldsymbol{F}_L^{-1}) \det\boldsymbol{F}_L \, dv_0 - \int_{\partial\mathscr{D}_0^q} h_L q_L^s \det\boldsymbol{F}_L \, \|\boldsymbol{F}_L^{-T} . \boldsymbol{n}_0\| \, ds_0 \\ &- \int_{\partial\mathscr{D}_0^q} h_L \boldsymbol{q}_L \cdot (\boldsymbol{F}_L^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0) \det\boldsymbol{F}_L \, ds_0 + \int_{\mathscr{D}_0} \Big(\boldsymbol{\sigma}_L : \boldsymbol{D}_L + r_L^v - \rho_L \dot{e}_L^m\Big) h_L \det\boldsymbol{F}_L \, dv_0 = 0 \end{aligned} \tag{9.2}$$

dans laquelle le logiciel effectue informatiquement la chaîne de substitutions de cinématique générale suivantes :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_L = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} \quad ; \quad \boldsymbol{B}_L = \boldsymbol{F}_L \cdot \boldsymbol{F}_L^T \quad ; \quad K_{vL} = \det\boldsymbol{F}_L \quad ; \quad \delta_L = \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{(\mathrm{tr}\boldsymbol{B}_L)^{\frac{3}{2}}}{K_{vL}} \quad ; \\ &\dot{F}_L = \mathbf{grad}_L \dot{\boldsymbol{u}}_t \quad ; \quad \boldsymbol{D}_L = \mathbf{sym}(\dot{\boldsymbol{F}}_L \cdot \boldsymbol{F}_L^{-1}) \quad ; \quad \dot{K}_{vL} = K_{vL}\, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}_L \quad ; \\ &\dot{\delta}_L = \frac{\sqrt{\mathrm{tr}\boldsymbol{B}_L}}{\sqrt{3}K_{vL}} \boldsymbol{B}_L : \boldsymbol{D}_L - \frac{(\mathrm{tr}\boldsymbol{B}_L)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}{K_{vL}}^2}\dot{K}_{vL} \quad ; \quad \boldsymbol{\gamma}_L = \ddot{\boldsymbol{u}}_L \quad ; \quad \rho_L = \frac{\rho_{0L}}{K_{vL}} \quad ; \end{aligned}$$

(1) Attention : le coefficient de dilatation donné dans les catalogues est souvent un coefficient de dilatation thermique *linéique* ($\mathrm{m.m^{-1}.K^{-1}}$), sans que ce soit clairement précisé. Le coefficient β utilisé ici est en $\mathrm{m^3.m^{-3}.K^{-1}}$

(2) Les calculs sont détaillés dans la dernière section de la feuille de calcul en annexe F [p. 147].

et les substitutions particulières au modèle de comportement suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}_L = \left(\xi_0\left(K_{vL} - \beta\left(T - T_0\right) - 1\right) - 2\,\mu_0\,\frac{\delta_L{}^{\frac{2}{3}}}{K_{vL}{}^2}\right)\boldsymbol{G} + \frac{2\,\mu_0}{K_{vL}{}^{\frac{5}{3}}}\,\boldsymbol{B}_L \qquad \text{(comportement mécanique)}$$

$$\boldsymbol{q}_L = -\alpha\ \mathbf{grad}_L\,T \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \qquad \text{(comportement thermique)}$$

$$\dot{e}_L^m = \cdots \qquad \text{(dérivée particulaire de l'énergie interne massique [éq. (9.1) p. 114])}$$

Comme on peut le constater, après la chaîne de substitutions précédente, la formulation intégrale se ramène bien à une équation en $\boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0,t)$ (description de Lagrange des déplacements actuels) et en $\boldsymbol{T}_L(\boldsymbol{x}_0,t)$ (description de Lagrange des températures actuelles).

9.2 Choix d'un logiciel de résolution

Pour résoudre numériquement les problèmes qui suivent, l'auteur a choisi d'utiliser le logiciel de résolution par éléments finis COMSOL® dans lequel il est posssible de donner la formulation intégrale d'un problème d'équations aux dérivées partielles et de ses conditions aux limites (c'est-à-dire l'équation (9.2) [p. 114] et les substitutions qui suivent), *sans préciser de quelle physique il s'agit* [3].

Remarques – L'avantage d'un tel logiciel, par rapport aux logiciels d'éléments finis spécialisés dans la mécanique des solides déformables, est que l'utilisateur maîtrise parfaitement le système d'équations différentielles (ou sa formulation intégrale) qu'il veut résoudre ainsi que les lois de comportement qu'il veut utiliser, sans avoir à se soucier des méthodes numériques employées pour résoudre numériquement le problème. Il est donc notamment possible d'implémenter un modèle de comportement élastique inédit utilisant le tenseur de déformation objectif que l'on veut.

La contrepartie de cette liberté est le travail de préparation préalable : il faut transcrire dans le langage du logiciel la formulation intégrale du problème et celle des conditions aux limites. La description des lois de comportement mécanique et thermique se fait en transcrivant les équations de comportement et les substitutions cinématiques [4], et non par un simple choix dans une liste de lois de comportement prédéterminées et souvent non satisfaisantes. Dans le cas qui nous concerne ici, le modèle de comportement élastique isotrope (T, K_v, δ) utilisant le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ ne figure dans aucun menu de logiciel spécialisé.

Pour la résolution numérique, on laisse le logiciel faire le travail programmé par les numériciens pour construire et résoudre le système d'équations algébriques non linéaire engendré par le maillage et ses fonctions d'interpolation. Il est toutefois possible de « guider » la convergence d'un problème stationnaire non linéaire dont la solution n'est pas toujours unique, en résolvant un problème pseudo-transitoire (les dérivées particulaires sont nulles et le temps est fictif, problème dit « quasi-statique ») avec des conditions aux limites évoluant vers les conditions aux limites finales [5] ou bien en proposant au logiciel une estimation initiale (*guess*) des champs solutions assez proche de la solution espérée.

[3] Il convient toutefois de préciser qu'il existe aussi dans ce logiciel des « boîtes à outils » qui simplifient la définition d'un problème de thermomécanique (la formulation intégrale des équations mécaniques et de la chaleur est préécrite). Malheureusement, le tenseur de déformation utilisé est le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ (incorrect quand le mouvement est loin d'une quasi-translation [section 4.1 p. 59]). De plus, le choix des lois de comportement est limité à une liste prédéterminée qui ne contient pas celle utilisée ici.

[4] On peut heureusement définir des variables intermédiaires (malheureusement non matricielles ce qui simplifierait beaucoup la transcription).

[5] Le logiciel ignorant la physique traitée, il n'est pas nécessaire d'introduire une « loi de comportement tangente » [section 2.6 p. 39], ni une quelconque « dérivée objective » [p. 41] : les numériciens savent très bien construire numériquement une matrice tangente dans la méthode de Newton-Raphson.

9.3 Traction non isotherme d'une éprouvette cylindrique

On se propose de calculer le comportement temporel d'une éprouvette cylindrique d'acier de diamètre 10 mm et de longueur utile $L_0 = 50$ mm, soumise à une traction dans la direction de son axe, avec différentes conditions aux limites thermiques et avec différentes vitesses de traction, afin d'illustrer les effets thermiques d'une sollicitation mécanique.

Dans ce calcul, la pesanteur est négligée ($\boldsymbol{f}_0^m = \mathbf{0}$) et les accélérations sont négligées ($\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, calcul dit « mécaniquement quasi-statique »), mais les évolutions en température ne sont pas négligées ($\dot{T} \neq 0$). Les champs inconnus du problème sont donc fonction du temps.

Le problème étant axisymétrique, les deux variables d'espace sont r et z d'un système de coordonnées cylindriques. On cherche donc des champs $\boldsymbol{u}_L(r,z,t)$ et $\boldsymbol{T}_L(r,z,t)$.

Rappel – Si $\boldsymbol{v}$ est un champ de vecteurs axisymétrique $\boldsymbol{v} = v_r(r,z,t)\,\boldsymbol{e}_r + v_z(r,z,t)\,\boldsymbol{e}_z$, et si $f(r,z,t)$ est un champ scalaire axisymétrique, les composantes de leur gradient lagrangien dans la base physique locale (orthonormée) $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z\}$ sont [(6)] :

$$[(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{v})^\bullet{}_\bullet] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & 0 & \partial_z v_r \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \partial_r v_z & 0 & \partial_z v_z \end{bmatrix}_{(\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z)} \quad ; \quad \mathbf{grad}_L\, f = \partial_r f\;\boldsymbol{e}_r + \partial_z f\;\boldsymbol{e}_z$$

Ces formules sont applicables aux champs vectoriels $\boldsymbol{u}_L$ et $\boldsymbol{g}_L$, ainsi qu'aux champs scalaires T_L et h_L.

Afin d'obtenir des résultats pédagogiques et lisibles, on choisit de n'étudier que la zone centrale de l'éprouvette en ignorant délibérément tous les systèmes d'accrochage de l'éprouvette sur la machine de traction.

9.3.1 Caractéristiques du matériau

Les données numériques sont les suivantes [(7)] :

Coefficient de dilatation volumique à 20 C	β	12.3 10^{-6} K^{-1}
Capacité calorifique en dilatation libre à 20 C	C_p	475 J.kg^{-1}.K^{-1}
Masse volumique à 20 C	ρ_0	7850 kg.m^{-3}
Coefficient de conductivité thermique à 20 C	α	44.5 W.m^{-1}.K^{-1}
Module d'Young à 20 C	E	205 10^9 Pa
Coefficient de Poisson à 20 C	ν	0.28

La loi de comportement utilisée dans ce calcul n'étant pas celle de Hooke, on considère que les valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson données dans ce tableau sont des valeurs initiales, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de déformation. On en déduit les modules de compressibilité et de cisaillement *initiaux* à 20 C :

$$\xi_0 = \frac{E_0}{3\,(1-2\,\nu_0)} \quad ; \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2\,(1+\nu_0)}$$

Rappel – Dans le modèle de comportement idéalisé utilisé ici, les modules ξ_0 et μ_0 sont supposés invariants avec la température.

(6) Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

(7) Ces données sont extraites de la bibliothèque de matériaux incluse dans le logiciel COMSOL®. Ce sont celles de l'acier référencé Steel AISI 4340.

9.3.2 Conditions aux limites mécaniques

On impose à la face supérieure du cylindre un déplacement $\boldsymbol{u}_s$ uniforme dans la direction axiale z, à une vitesse $v_2 = 4$ mm.mn^{-1}, jusqu'à un déplacement final $\boldsymbol{u}_s^f = 0.003\,L_0 = 150\ \mu$m, puis le déplacement final est maintenu constant pendant 5 secondes. Sur la face inférieure, le déplacement vertical $\boldsymbol{u}_z$ est imposé nul [(8)].

9.3.3 Conditions aux limites thermiques

La température initiale est $T_0 = 293.15$ K = 20 C. On envisage trois cas de conditions aux limites thermiques :

1. Toutes les frontières sont adiabatiques ; il n'y a aucun échange de chaleur avec l'extérieur ($q^s = 0$ sur les frontières, cas idéal extrême).
2. Toutes les frontières sont à la température imposée T_0 (cas idéal extrême).
3. Les frontières aux extrémités sont à la température T_0 et la surface latérale du cylindre est adiabatique (cas approchant les conditions d'essai réelles : la masse des mors de la machine de traction est considérée comme un thermostat et les échanges thermiques avec l'air ambiant sur la surface latérale sont négligés).

9.3.4 Analyse des résultats numériques

Le maillage utilisé est celui de la figure 9.1. Les éléments sont à interpolation quadratique.

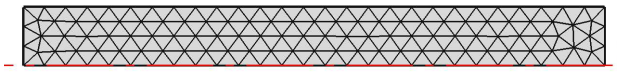


FIGURE 9.1 – Maillage du plan méridien de l'éprouvette (calcul axisymétrique)

Si les frontières sont adiabatiques

On constate que les champs de température, de déformation et de contrainte de Cauchy sont uniformes dans toute l'éprouvette mais variables avec le temps.

On constate [fig 9.2 p. 118] une chûte de température de 0.59 C et une courbe $\sigma_{zz}(\varepsilon_{zz}^v)$ quasi-linéaire ; le module d'Young apparent ($\frac{F}{S_0}\frac{L_0}{u}$) est :

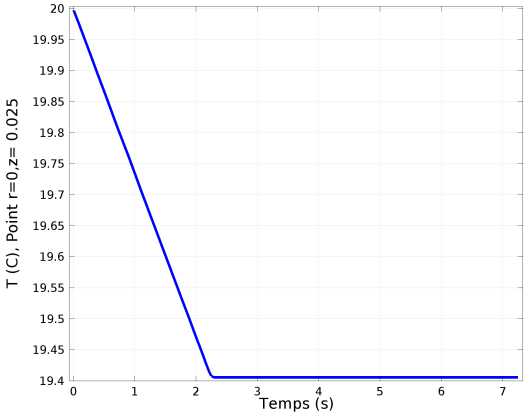
$E_{app} = 205.19$ GPa au temps $t = 2.25$ s (fin du mouvement)

L'adiabaticité des frontières implique que la température ne varie plus pour $t > 2.25$ s.

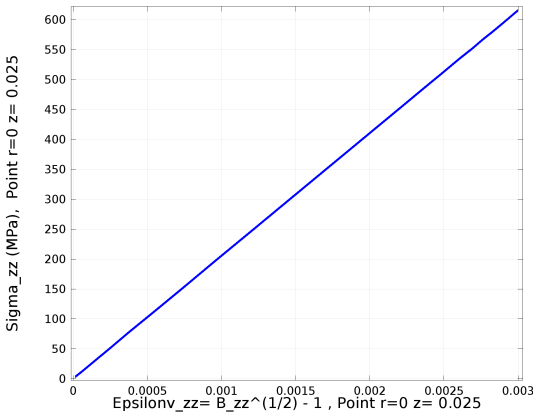
Si les frontières sont isothermes à la température T_0

On constate [fig. 9.3 p. 118] que les champs de température, de déformation et de contrainte de Cauchy ne sont plus uniformes. La température au centre de l'éprouvette au temps $t = 2.25$ s (fin du mouvement) n'a chûté que de 0.24 C. La température au cœur de l'éprouvette revient pratiquement à 20 C après 5 s de maintien du déplacement final .

[(8)] Le problème étant axisymétrique, les déplacements radiaux sur l'axe $r = 0$ sont implicitement annulés. Sur la face inférieure $z = 0$, les déplacements radiaux pour $r > 0$ sont libres.

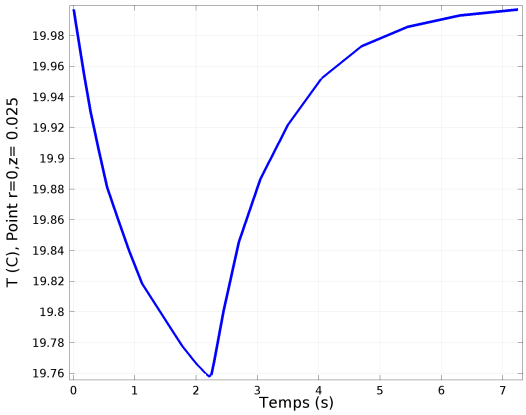


Courbe $T(t)$ au centre de l'éprouvette

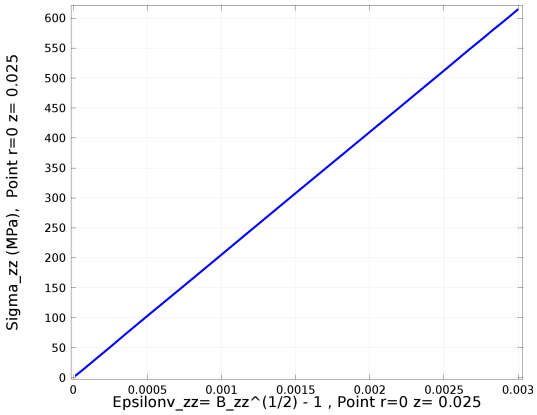


Courbe $\sigma_{zz}(\varepsilon^{v}_{zz})$ au centre de l'éprouvette

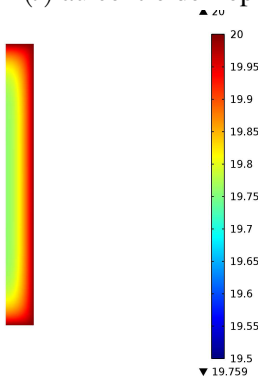
FIGURE 9.2 – Frontières adiabatiques



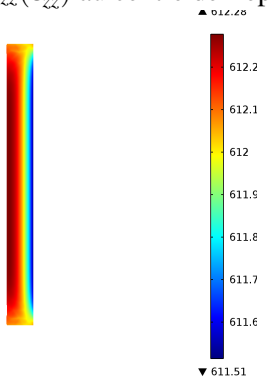
Courbe $T(t)$ au centre de l'éprouvette



Courbe $\sigma_{zz}(\varepsilon^{v}_{zz})$ au centre de l'éprouvette



Champ de températures (C) à $t = 2.25$ s



Champ σ_{zz} (Mpa) à $t = 2.25$ s

FIGURE 9.3 – Frontières isothermes à T_0.

Le module d'Young apparent ($\frac{F}{S_0}\frac{L_0}{u}$) varie légèrement pendant le temps de maintien de 5 s :

$$E_{app} = 204.76 \text{ GPa au temps } t = 2.25 \text{ s} \quad ; \quad E_{app} = 204.66 \text{ GPa au temps } t = 7.25 \text{ s.}$$

Remarque – Avec des frontières isothermes, la chûte de température varie avec la vitesse de traction imposée : pour une vitesse de traction de 10 mm.mn^{-1}, la chûte de température au centre de l'éprouvette en fin de mouvement ($t = 0.9$ s) est de 0.42 C (inférieure au cas adiabatique, 0.59 C). Cette constatation s'explique par le fait qu'à une plus grande vitesse de traction, les températures ont moins de temps pour s'uniformiser.

Conditions aux limites thermiques mixtes

Dans cette simulation, la température est imposée à T_0 aux extrémités de l'éprouvette (les mors jouent le rôle de thermostat) et la paroi latérale est supposée adiabatique (on néglige les fuites thermiques dans l'air ambiant). L'éprouvette met donc plus de temps (> 50 s) pour revenir à sa température initiale. La chûte de température au centre de l'éprouvette à $t = 2.25$ s (fin du mouvement) est de 0.59 C [fig. 9.4 p. 120] (pratiquement comme dans le cas adiabatique, les échanges de chaleur n'ont pas eu le temps de se faire au cœur de l'éprouvette).

Le module d'Young apparent ($\frac{F}{S_0}\frac{L_0}{u}$) varie légèrement pendant le temps de maintien :

$$E_{app} = 205.12 \text{ GPa} \quad \text{à } t = 2.25 \text{ s} \quad ; \quad E_{app} = 204.72 \text{ GPa} \quad \text{à } t = 52.25 \text{ s}$$

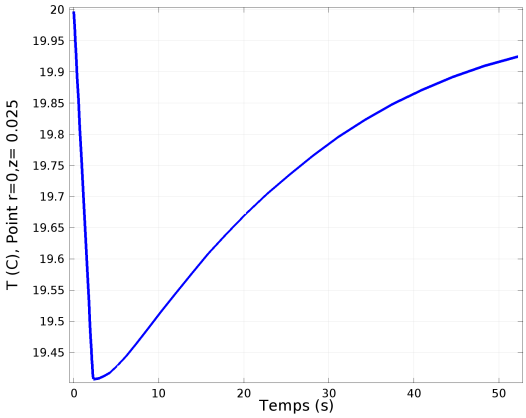
Conclusions

1. Le modèle de comportement thermoélastique isotrope (T, K_v, δ) n'a été employé ici que dans le domaine des petites déformations ($L(t)/L_0 \leqslant 1.003$). Ce calcul illustre néanmoins le refroidissement qui apparaît lors d'un essai de traction sur une éprouvette d'acier. Les variations de température apparaissent comme faibles et difficilement détectables expérimentalement sauf pour des vitesses de traction suffisamment importantes. Les expériences de traction d'une éprouvette d'acier faites dans les conditions expérimentales habituelles, à vitesse lente et sans attendre l'uniformisation des températures, sont acceptables car la raideur apparente varie peu pendant l'uniformisation des températures.
2. Le modèle de comportement utilisé est « non linéaire », mais cette non linéarité n'apparaît pas numériquement dans les calculs qui précèdent car toute courbe de traction $\sigma_{zz} = f(\varepsilon^v_{zz})$ a une apparence linéaire au voisinage de petites déformations.

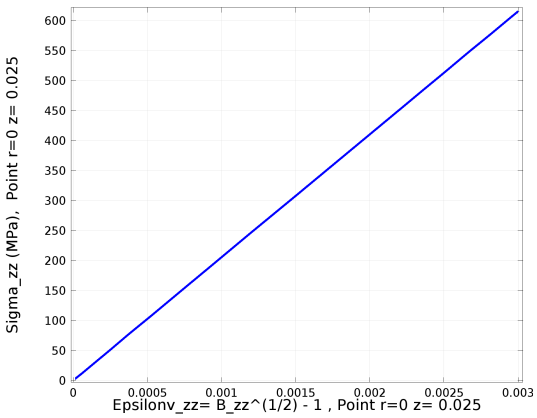
Remarque – *Dans un essai de traction*, le mouvement est proche d'une translation. Une interprétation des mesures utilisant la pseudo-élasticité de Hooke (tenseur des « petites perturbations », module d'Young et coefficient de Poisson) donnerait donc des résultats acceptables [hypothèse 4.2 p. 63].

9.4 Forte flexion isotherme d'un barreau élastique isotrope

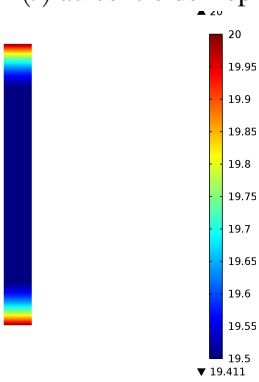
Dans l'illustation précédente, le modèle de comportement utilisé n'agissait que dans le domaine des petites déformations. Dans le problème traité dans cette section, non seulement les déformations sont importantes mais en outre le mouvement des particules est très loin d'une quasi-translation. L'utilisation du tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym\,grad}_L \boldsymbol{u}$ pour mesurer les déformations serait donc inadéquate [hypothèse 4.2 p. 63].



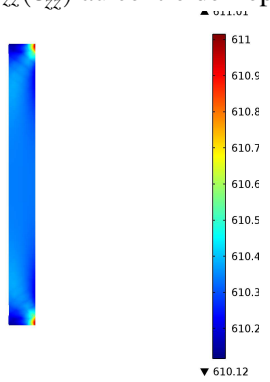
Courbe $T(t)$ au centre de l'éprouvette



Courbe $\sigma_{zz}(\varepsilon^v_{zz})$ au centre de l'éprouvette



Champ de températures (C) à $t = 2.25$ s



Champ σ_{zz} (Mpa) à $t = 2.25$ s

Il est intéressant d'observer ci-contre un zoom sur l'extrémité de la courbe $F(u)$ où F est la force de traction et u le déplacement de la face supérieure : on perçoit clairement la petite diminution de la force de traction F pendant le réchauffement de l'éprouvette quand $t > 2.25$ s. Cette petite diminution explique la petite diminution du module d'Young apparent.

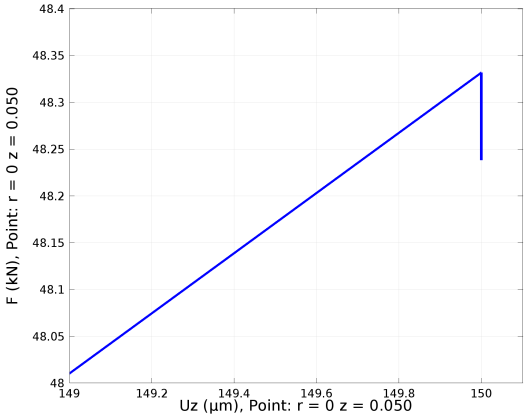


FIGURE 9.4 – Conditions thermiques mixtes

9.4.1 Description du problème

On se propose de fléchir fortement un barreau parallélépidique vertical en coutchouc vulcanisé pure gomme (20mm $\times$ 20mm $\times$ 60mm) en imposant que l'orientation des normales actuelles de la face supérieure, dont la direction initiale est $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{e}_3$ (verticale), soit dans la direction finale horizontale $\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{e}_1$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{e}_3}{\|\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{e}_3\|} = \boldsymbol{e}_1 \quad \text{sur la face supérieure } x_{03} = 60 \text{ mm} \tag{9.3}$$

Remarque – Cette condition aux limites serait difficile à poser dans un logiciel classique de mécanique des solides. Dans le logiciel utilisé ici, on a accès aux normales actuelles à une surface.

Sur la face inférieure ($x_3 = 0$), on impose $u_3 = 0$, et les translations horizontales u_1 et u_2 sont bloquées seulement sur les lignes médianes de la face.

Remarque – Le problème ainsi posé n'a pas de solution unique : il existe une infinité de solutions avec la face supérieure rendue verticale. On constate que l'algorithme, en lui proposant une certaine approximation initiale de la solution, aboutit néanmoins à une solution, sans que l'on puisse savoir si celle-ci est unique. Il se trouve que la solution proposée par l'algorithme est assez proche du cas de la flexion pure (la déformée est quasi-circulaire), parce que la solution initiale introduite pour accélérer les calculs en est assez proche (le champ de déplacement initial proposé transforme le parallélépipède initial en un hexaèdre d'arêtes rectilignes avec la face supérieure initiale $x_{03} = L_0$ déplacée vers la droite et verticale).

Contrairement au problème précédent, on ne cherche pas ici une évolution temporelle, mais seulement une solution *stationnaire* de l'équation mécanique. De plus, l'équation de la chaleur n'est pas prise en compte car on suppose que les températures sont à tout instant uniformes. Les équations différentielles à résoudre se réduisent à (on néglige la pesanteur) :

$$\mathbf{div}_E\, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \qquad \text{avec les conditions aux limites précisées précédemment.}$$

9.4.2 Caractéristiques du matériau

La loi de comportement est la même que précédemment. Les données numériques utiles pour ce problème sont les suivantes (caoutchouc pure gomme vulcanisé) :

Module de compressibilité initial à 20 C	ξ_0	1805 MPa
Module de cisaillement initial à 20 C	μ_0	43.68 MPa

Remarque – Le module de compressibilité est grand devant le module de cisaillement. Ce matériau est presque incompressible. Avec ces valeurs, en utilisant les concepts introduits dans la loi de Hooke, le module d'Young initial à 20 C serait 0.13 GPa et le coefficient de Poisson initial à 20 C serait 0.488 (proche de 0.5).

9.4.3 Analyse des résultats numériques

La figure 9.5 [p. 122] montre le maillage utilisé pour le calcul ainsi que la déformée finale (quasi-circulaire). La figure 9.6 [p. 122] présente les valeurs des allongements relatifs longitudinaux, des contraintes normales longitudinales ($\boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_t$ où $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{e}_3$), de la distorsion stérique maximale et de la dilatation volumique dans quelques coupes (définies par x_{03} =constante) du volume déformé.

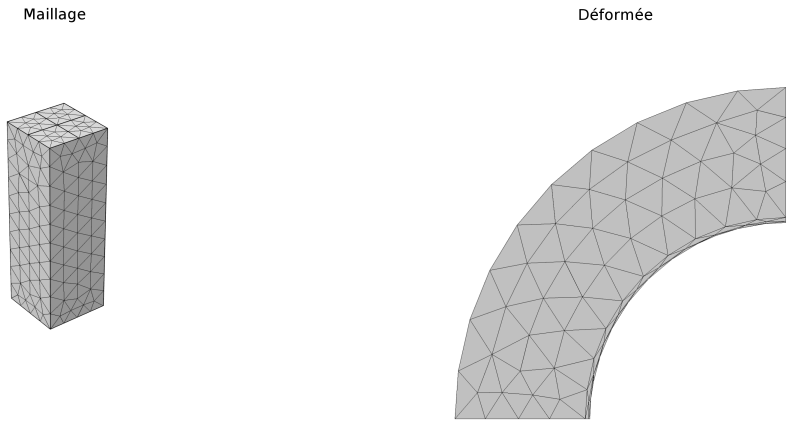


FIGURE 9.5 – Forte flexion d'un bloc de coutchouc

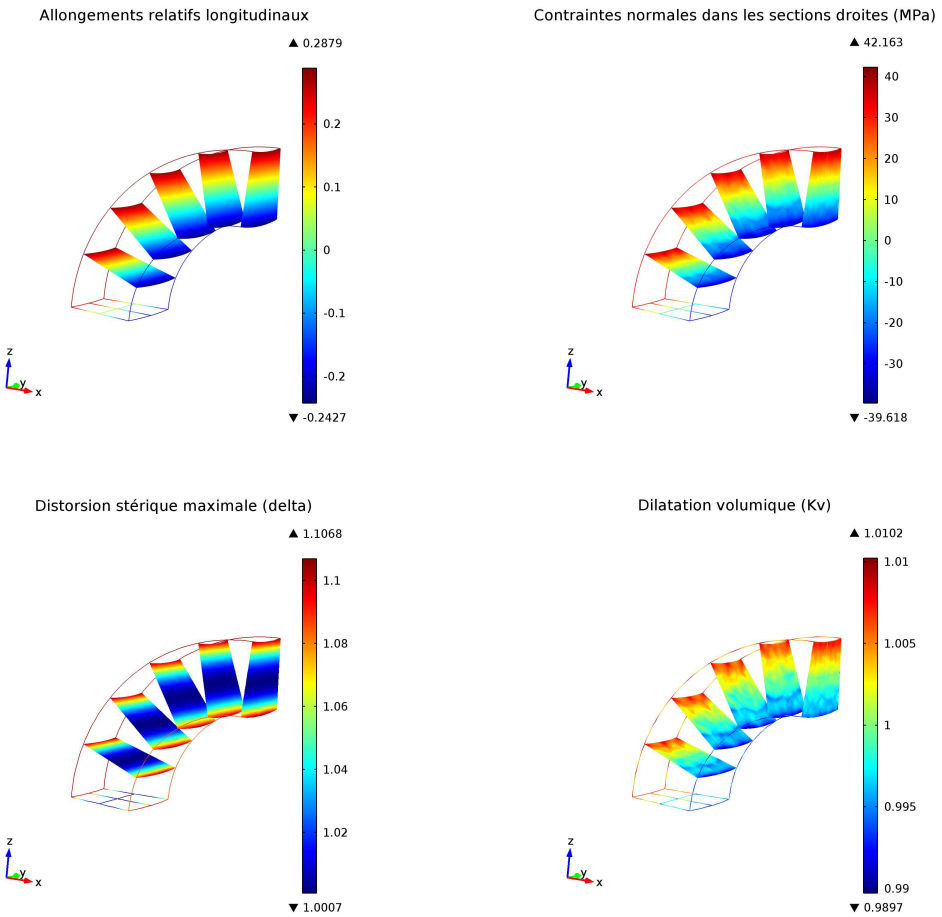


FIGURE 9.6 – Coupes dans la forte flexion d'un bloc de coutchouc

Remarque – Les allongements relatifs longitudinaux sont calculés par la formule [9] :

$$K_l - 1 = \|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\| - 1 \quad \text{où } \boldsymbol{u}_0 \text{ est la direction matérielle initiale } \boldsymbol{e}_3$$

Comme on peut le constater, les allongements relatifs longitudinaux sont importants : ils varient de -24% à $+28\%$. La distribution des grandeurs est quasi-identique dans toutes les sections droites, la solution (choisie par l'algorithme et la solution initiale fournie) est proche d'une flexion pure et, comme attendu, la dilatation volumique K_v varie très peu ($\pm 1\%$) en raison de la quasi-incompressibilité.

9.5 Forte traction/compression isotherme d'un barreau élastique isotrope

Dans ce problème, on fait une traction/compression forte sur le même barreau de caoutchouc que dans la section précédente. Pour obtenir des courbes de traction et de compression, le calcul est fait en temporel (temps fictif), quasi-statique (accélérations négligées) et isotherme (équation de la chaleur ignorée). Les conditions aux limites à la base sont les mêmes que dans la section précédente et la face supérieure subit des déplacements imposés verticaux uniformes proportionnels au temps fictif. Les déplacements horizontaux de la face supérieure sont laissés libres.

Comme espéré, on constate que les champs de déformation et de contrainte sont bien uniformes dans l'éprouvette. Les courbes $\boldsymbol{\sigma}_{33} = f(\varepsilon^v_{33})$ de traction (jusqu'à 200%) et de compression (jusqu'à -50%) sont données dans la figure 9.7 [p. 123], où la non linéarité des courbes apparaît plus clairement que dans la traction limitée aux petites déformations de la section 9.3 [p. 116].

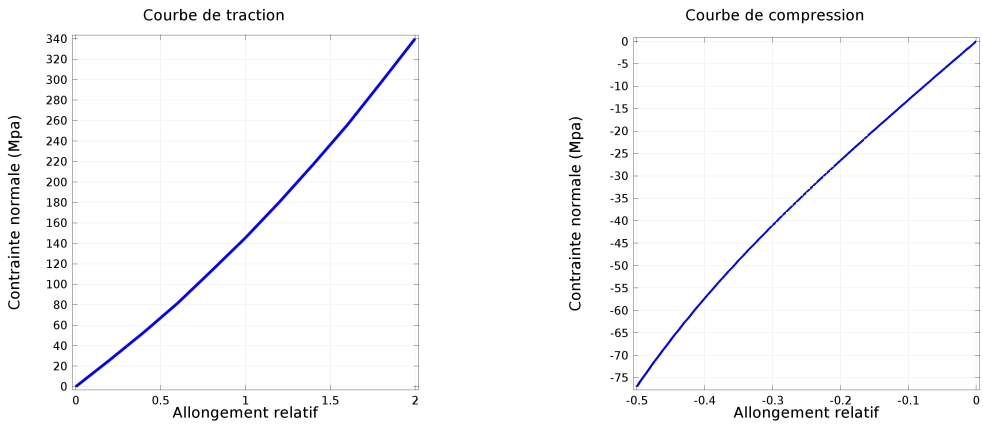


FIGURE 9.7 – Courbes de traction et de compression simples d'un bloc de caoutchouc

9.6 Essai de glissement

Cette illustration a pour but de mettre en évidence les non uniformités au voisinage des extrémités libres des éprouvettes (« effets de bord ») lors d'un essai de glissement. L'éprouvette est constituée

[9] Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, [note 2 p. 3].

du même caoutchouc vulcanisé que précédemment, ses dimensions sont 100 mm $\times$ 25 mm $\times$ 5 mm. On impose à sa face supérieure un déplacement horizontal de 5 mm et sa face inférieure a tous ses déplacements bloqués. L'équation de mouvement se réduit à $\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ (quasi-statique et pesanteur négligée) et l'équation de la chaleur est ignorée (mouvement infiniment lent quasi-isotherme).

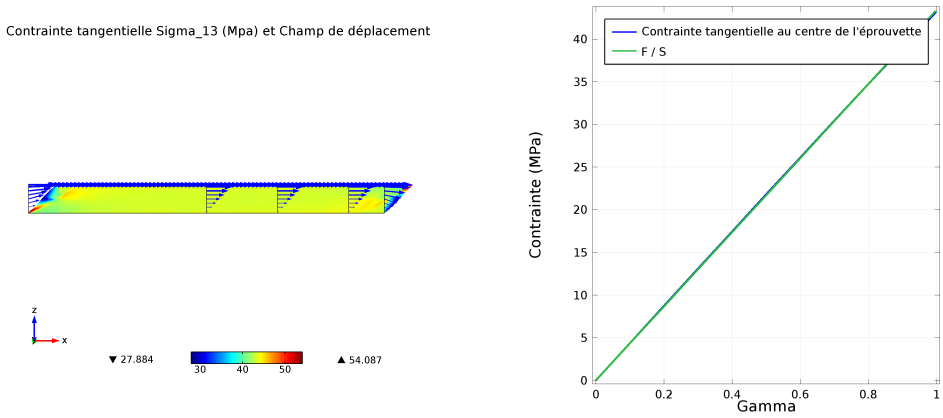


FIGURE 9.8 – Cisaillement cinématique d'une éprouvette en caoutchouc

La figure 9.8 [p. 124] montre que le champ des contraintes tangentielles σ_{13} (coupe dans le plan médian $y = 0$) est uniforme dans l'éprouvette sauf au voisinage des extrémités. Le champ des déplacements est représenté le long de quelques lignes x_{01} = constante et on voit clairement les perturbations aux extrémités. La cinématique réelle lors d'un essai de glissement n'est donc pas tout à fait celle qui a été supposée dans la section 3.4.3 [p. 49].

Toutefois, ces perturbations aux bords n'ont que peu d'influence sur l'estimation de la contrainte tangentielle au cœur de l'éprouvette : on constate sur la courbe de droite que les évolutions de σ_{13} au centre de l'éprouvette et celle du rapport $\frac{F}{S}$ en fonction du paramètre de cisaillement γ sont pratiquement confondues.

9.7 En bref...

Toutes les illustrations numériques de ce chapitre ont été faites en utilisant le modèle élastique isotrope à trois variables d'état $\{T, K_v, \delta\}$ qui a été construit au chapitre 3 [p. 43]. Elles ont été choisies pour illustrer à la fois les effets thermiques et les effets mécaniques du comportement élastique dans de larges domaines de déformation. L'isothermie supposée dans les derniers exemples n'avait pour but que de simplifier la présentation des résultats.

10

Conclusion

Le modèle de comportement élastique est un modèle de comportement pour les solides déformables satisfaisant aux trois hypothèses suivantes :

1. La dissipation intrinsèque est nulle : on suppose que dans les évolutions il n'existe aucun processus interne générant de la chaleur (pas de frottement interne). La seule dissipation pouvant s'y produire est la dissipation thermique qui résulte des échanges de chaleur entre particules lorsque le champ de températures n'est pas uniforme.
2. Le tenseur des contraintes de Cauchy est une fonction d'état.
3. Les variables d'état ne contiennent pas de variables d'état mnésiques.

Les deux dernières conditions impliquent que cette définition générale de l'élasticité contient la définition empirique généralement donnée dans les cours classiques d'élasticité : « *dans un essai de traction élastique* ***isotherme***, à chaque déformation correspond une et une seule contrainte ».

Les variables d'état d'un milieu élastique sont la température, un tenseur de déformation objectif complétées par d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie. La nullité de la dissipation intrinsèque conduit à une forme générale de la loi de comportement mécanique $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\sigma}}(T, \boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n)$ complètement déterminée lorsque l'on connaît l'une des fonction d'état caractéristique du milieu élastique suivante : l'énergie interne massique, l'énergie libre massique de Helmholtz ou l'entropie massique ; les deux autres fonctions d'état s'en déduisent par la relation de Helmholtz et la définition $\psi^m = e^m - T\,s^m$. En revanche, l'existence de la loi de comportement thermique $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{q}}(T, \boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n)$ est due à la non négativité de la dissipation thermique ; un large choix est possible.

La forme générale des lois de comportement élastique peut s'exprimer avec différents tenseurs de déformation (objectifs ou non), sous une forme plus ou moins compliquée suivant le tenseur de déformation utilisé. La validité de ces lois de comportement n'est soumise à aucune restriction sur la grandeur des déformations ni sur le mouvement du milieu continu, à l'exception notable de la traditionnelle loi de Hooke (voir la remarque ci-dessous). On a donné un exemple de construction d'une famille de modèles de comportement élastique en construisant leurs fonctions d'état de manière physiquement raisonnée afin de conduire à des comportements réalistes. N'étant soumises à aucune restriction cinématique, ces lois de comportement sont *a fortiori* encore valables quand les déformations sont petites.

Pseudo-élasticité de Hooke – L'« élasticité » classiquement présentée dans les cours élémentaires (loi de Hooke avec le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$) n'est applicable que sous une restriction sur les déformations (petites déformations) et sur les mouvements envisageables (quasi-translation et très petites rotations). De plus, si ces restrictions sur le mouvement envisageable sont valables pour un observateur, elle ne le sont généralement pas pour un autre. Enfin, la loi de Hooke n'est

pas thermodynamiquement admissible car les fonctions d'état (e^m, s^m ou ψ^m) conduisant à cette loi n'existent pas.

Un problème de (thermo-)élasticité complètement défini se ramène à la résolution d'un système de quatre équations différentielles aux dérivées partielles, l'équation de mouvement (vectorielle) et l'équation de la chaleur (scalaire) [1], assorties de conditions aux limites et d'éventuelles conditions initiales pour les problèmes non stationnaires. Les champs inconnus sont les positions actuelles des particules (ou leur champ de déplacement) et le champ des températures. La résolution analytique de ce problème est rarement possible ; pour les problèmes industriels, la résolution numérique est incontournable. La méthode numérique de résolution actuellement (2017) la plus pratiquée est la méthode des éléments finis, dont le principe a été exposé et dont l'application a été illustrée sur quelques problèmes types.

La modélisation du comportement d'un solide déformable réel par un modèle de comportement élastique a souvent une portée limitée : l'expérience montre que les solides réels ne sont élastiques que dans certaines limites, voire ne le sont jamais. Quelques critères de limite élastique ont été proposés. La modélisation de comportements inélastiques fait l'objet d'un autre cours.

[1] La conservation de la masse est automatiquement satisfaite par la substitution $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$.

A

Dérivées particulaires utiles en anisotropie

A.1 Dérivée particulaire d'une direction matérielle

Dans le mouvement d'un milieu continu, les directions d'anisotropie sont des directions matérielles entrainées par le mouvement. On montre en cinématique que les directions matérielles peuvent être identifiées par leur direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ ou par leur direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$. La relation entre ces directions est [1] :

$$\boldsymbol{u}_t = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t}{\|\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t\|} \quad \text{où } \|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\| = \sqrt{\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0}$$

La dérivée particulaire du vecteur unitaire $\boldsymbol{u}_t$ est :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{u}}_t &= \frac{\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|} - \frac{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|^{\cdot}}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|^2} \quad (\boldsymbol{u}_0 \text{ indépendant de } t)\\
&= \frac{\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|} - \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|^2}\frac{\boldsymbol{u}_0(\dot{\boldsymbol{F}}^\top\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^\top\cdot\dot{\boldsymbol{F}})\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|} \quad (\boldsymbol{u}_0 \text{ indépendant de } t)\\
&= \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t - \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|}\boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot(\dot{\boldsymbol{F}}^\top\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^\top\cdot\dot{\boldsymbol{F}})\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t\\
&= \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_t\left(\boldsymbol{u}_t\cdot(\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}^\top\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}+\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{F}^\top\cdot\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1})\cdot\boldsymbol{u}_t\right)\\
&= (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{u}_t - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_t\left(\boldsymbol{u}_t\cdot\big((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\big)\cdot\boldsymbol{u}_t\right)\\
\dot{\boldsymbol{u}}_t &= (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{u}_t - (\boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u}_t)\,\boldsymbol{u}_t
\end{aligned} \tag{A.1}$$

où :
- $\boldsymbol{D} = \mathbf{sym}(\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1})$ est le tenseur des taux de déformation (objectif),
- $\boldsymbol{W} = \mathbf{asym}(\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1})$ est le tenseur tourbillon (non objectif).

La dérivée particulaire d'une direction matérielle unitaire n'est pas un vecteur objectif.

En anisotropie, on préfère représenter une direction matérielle d'anisotropie (non orientée) $\boldsymbol{u}_t$ par le tenseur uniaxial $\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{u}_t\otimes\boldsymbol{u}_t$. On en calcule la dérivée particulaire :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{U}}_t &= \boldsymbol{u}_t\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_t + \dot{\boldsymbol{u}}_t\otimes\boldsymbol{u}_t\\
&= \boldsymbol{u}_t\otimes\big((\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{u}_t - (\boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u}_t)\boldsymbol{u}_t\big) + \big((\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{u}_t - (\boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u}_t)\boldsymbol{u}_t\big)\otimes\boldsymbol{u}_t\\
&= (\boldsymbol{u}_t\otimes\boldsymbol{u}_t)\cdot(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})^T - (\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D})\,(\boldsymbol{u}_t\otimes\boldsymbol{u}_t) + (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot(\boldsymbol{u}_t\otimes\boldsymbol{u}_t) - (\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D})\,(\boldsymbol{u}_t\otimes\boldsymbol{u}_t)\\
\dot{\boldsymbol{U}}_t &= \boldsymbol{U}_t\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W}) + (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{U}_t - 2\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D})\boldsymbol{U}_t
\end{aligned} \tag{A.2}$$

[1] Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

La dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{U}}_t$ n'est pas un tenseur uniaxial et n'est pas un tenseur objectif.

Quelle que soit la manière dont on représente une direction matérielle actuelle ($\boldsymbol{u}_t$ ou $\boldsymbol{U}_t$), on constate que sa dérivée particulaire (non objective) actuelle est déterminée par le mouvement actuel : le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$ et le tenseur antisymétrique $\boldsymbol{W}$.

A.2 Dérivée particulaire des invariants croisés

En anisotropie, on a besoin de calculer les dérivées particulaires des deux invariants croisés $I_1 = \boldsymbol{X} : \boldsymbol{U}_t$ et $I_2 = \boldsymbol{X}^2 : \boldsymbol{U}_t$, où $\boldsymbol{X}$ est un tenseur de déformation symétrique et objectif. Les deux invariants I_1 et I_2 sont donc des scalaires objectifs. Leur dérivée particulaire est donc un scalaire objectif.

Remarque – Dans les calculs qui suivent, on utilise les propriétés de permutation dans le produit combiné $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) : \boldsymbol{C}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ des tenseurs du second ordre [(2)].

La dérivée particulaire de $I_1 = \boldsymbol{X} : \boldsymbol{U}_t$ est :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{U}}_t + \boldsymbol{U}_t : \dot{\boldsymbol{X}} \\
&= X : \Big(\boldsymbol{U}_t \cdot (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{U}_t - 2\,(\boldsymbol{U}_t : \boldsymbol{D})\,\boldsymbol{U}_t\Big) + \boldsymbol{U}_t : \dot{\boldsymbol{X}} \\
&= 2\boldsymbol{X} : (\boldsymbol{U}_t \cdot \boldsymbol{D}) - 2\boldsymbol{X} : (\boldsymbol{U}_t \cdot \boldsymbol{W}) - 2\,(\boldsymbol{U}_t : \boldsymbol{D})\, I_1 + \boldsymbol{U}_t : \dot{\boldsymbol{X}} \\
\dot{I}_1 &= 2\,(\boldsymbol{U}_t \cdot \boldsymbol{X}) : \boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{U}_t \cdot \boldsymbol{X}) : \boldsymbol{W} - 2 I_1\, \boldsymbol{U}_t : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U}_t : \dot{\boldsymbol{X}}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

La dérivée particulaire de $I_2 = \boldsymbol{X}^2 : \boldsymbol{U}t$ est :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_2 &= \boldsymbol{X}^2 : \dot{\boldsymbol{U}}_t + \boldsymbol{U}_t : (\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}) \\
&= \boldsymbol{X}^2 : \Big(\boldsymbol{U}_t \cdot (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{U}_t - 2\,(\boldsymbol{U}_t : \boldsymbol{D})\boldsymbol{U}_t\Big) + (\boldsymbol{U}_t \cdot \boldsymbol{X}) : \dot{\boldsymbol{X}} + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{U}_t) : \dot{\boldsymbol{X}} \\
\dot{I}_2 &= 2\,\left(\boldsymbol{U}_t \cdot \boldsymbol{X}^2\right) : \boldsymbol{D} - 2\,\left(\boldsymbol{U}_t \cdot \boldsymbol{X}^2\right) : \boldsymbol{W} - 2 I_2\, \boldsymbol{U}_t : \boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{U}_t) : \dot{\boldsymbol{X}}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Remarque – L'objectivité des dérivées particulaires $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$ n'apparaît pas clairement dans les formules (A.3) et (A.4), car elles font intervenir deux tenseurs non objectifs : $\boldsymbol{W}$ et $\dot{\boldsymbol{X}}$.

On rappelle que la formule de changement d'observateur de $\boldsymbol{W}$ est [(3)] :

$$\widetilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}_t^T + \frac{d\boldsymbol{Q}_t}{dt} \cdot \boldsymbol{Q}_t^T \qquad \text{où } \frac{d\boldsymbol{Q}_t}{dt} \cdot \boldsymbol{Q}_t^T \text{ est antisymétrique.}$$

L'expression de la dérivée particulaire (non objective) d'un tenseur de déformation objectif $\dot{\boldsymbol{X}}$ est différente suivant le tenseur de déformation choisi.

A.2.1 Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$

La dérivée particulaire du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ est [(4)] :

$$\dot{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})$$

(2) Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].
(3) Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].
(4) Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur[note 2 p. 3].

les deux dérivées particulaires (A.3) et (A.4) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1^B &= 2\,(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{W} - 2\,(\boldsymbol{B}:\boldsymbol{U}_t)\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{U}_t:\dot{\boldsymbol{B}}\\
&= 2\,(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{W} - 2\,(\boldsymbol{B}:\boldsymbol{U}_t)\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D})\\
&\qquad + \boldsymbol{U}_t:(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{U}_t:(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{U}_t:(\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{U}_t:(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{W})\\
&= 2\,(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{W} - 2\,(\boldsymbol{B}:\boldsymbol{U}_t)\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D})\\
&\qquad + (\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t):\boldsymbol{D} + (\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{W} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t):\boldsymbol{W}\\
&= 4\,(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} - 2\,I_1^B\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D})\\
\dot{I}_1^B &= 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} - 2\,I_1^B\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D})
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{I}_2^B &= 2\,\left(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}^2\right):\boldsymbol{D} - 2\,\left(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}^2\right):\boldsymbol{W} - 2\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{B}^2)\,\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D}\\
&\qquad + 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t):(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}) + 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t):(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) + 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t):(\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t):(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{W})\\
&= 2\,\left(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}^2\right):\boldsymbol{D} - 2\,\left(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}^2\right):\boldsymbol{W} - 2\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{B}^2)\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D})\\
&\qquad + 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{U}_t):\boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{W} - 2\,(\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{U}_t):\boldsymbol{W}\\
&= 4\,\left(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}^2\right):\boldsymbol{D} - 2\,I_2^B\,\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D}\\
\dot{I}_2^B &= 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}^2):\boldsymbol{D} - 2\,I_2^B\,\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Remarque – Comme on peut le constater, quand on utilise le tenseur objectif $\boldsymbol{B}$ comme tenseur de déformation, le tenseur non objectif $\boldsymbol{W}$ disparaît des expressions de $\dot{I}_1^B$ et $\dot{I}_2^B$, ce qui rend évidente l'objectivité de ces dérivées particulaires de scalaires objectifs.

A.2.2 Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$

Plutôt que de chercher l'expression de la dérivée particulaire du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ [(5)], on va calculer les invariants croisés $I_1^V = \boldsymbol{V}:\boldsymbol{N}t$ et $I_2^V = \boldsymbol{V}^2:\boldsymbol{N}_t$ en fonction des invariants croisés I_1^B et I_2^B.

Calcul de $\dot{I}_2^V$

$$I_1^B = \boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t = \boldsymbol{V}^2:\boldsymbol{N}_t = I_2^V \quad\Rightarrow\quad \dot{I}_2^V = \dot{I}_1^B = 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{V}^2):\boldsymbol{D} - 2\,I_2^V\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D}) \tag{A.7}$$

Calcul de $\dot{I}_1^V$

On rappelle l'identité de Cayley-Hamilton : $\boldsymbol{V}^3 = V_I\boldsymbol{V}^2 - V_{II}\boldsymbol{V} + V_{III}\boldsymbol{G}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
I_2^B &= \boldsymbol{B}^2:\boldsymbol{N}_t = \boldsymbol{V}^4:\boldsymbol{N}_t = (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}^3):\boldsymbol{N}_t\\
&= \Big(\boldsymbol{V}\cdot(V_I\boldsymbol{V}^2 - V_{II}\boldsymbol{V} + V_{III}\boldsymbol{G})\Big):\boldsymbol{N}_t \quad \text{(Cayley-Hamilton)}\\
&= (V_I\boldsymbol{V}^3 - V_{II}\boldsymbol{V}^2 + V_{III}\boldsymbol{V}):\boldsymbol{N}_t\\
&= \Big(V_I\,(V_I\boldsymbol{V}^2 - V_{II}\boldsymbol{V} + V_{III}\boldsymbol{G}) - V_{II}\boldsymbol{V}^2 + V_{III}\boldsymbol{V}\Big):\boldsymbol{N}_t \quad \text{(Cayley-Hamilton)}\\
&= \Big((V_I^2 - V_{II})\boldsymbol{V}^2 + (V_{III} - V_I V_{II})\boldsymbol{V} + V_1 V_{III}\boldsymbol{G}\Big):\boldsymbol{N}_t\\
I_2^B &= (V_I^2 - V_{II})\,I_2^V + (V_{III} - V_I V_{II})\,I_1^V + V_1 V_{III}
\end{aligned}$$

(5) C'est la solution de l'équation tensorielle $\boldsymbol{V}\cdot\dot{\boldsymbol{V}} + \dot{\boldsymbol{V}}\cdot\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{V}^2 + \boldsymbol{V}^2\cdot(\boldsymbol{D}-W)$. On en connaît la solution, mais son expression est très compliquée.

En dérivant cette égalité, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{I}_2^B = {} & (2V_I\dot{V}_I - \dot{V}_{II})I_2^V + (V_I^2 - V_{II})\dot{I}_2^V + (\dot{V}_{III} - \dot{V}_I V_{II} - V_I\dot{V}_{II})I_1^V + (V_{III} - V_I V_{II})\dot{I}_1^V \\ & + V_I\dot{V}_{III} + \dot{V}_I V_{III}\end{aligned} \tag{A.8}$$

où :

$$\begin{aligned}\dot{I}_2^B &= 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}^2):\boldsymbol{D} - 2I_2^B\,\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{B}):\boldsymbol{D} \\ &= 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{V}^4):\boldsymbol{D} - 2\left((V_I^2 - V_{II})I_2^V + (V_{III} - V_I V_{II})I_1^V + V_I V_{III}\right)\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D} \\ &\quad + 2\,(\boldsymbol{V}^2\cdot\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{V}^2):\boldsymbol{D} \\ \dot{I}_2^V &= 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{V}^2):\boldsymbol{D} - 2I_2^V\,(\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D}) \qquad \text{[éq. (A.7) p. 129]}\end{aligned}$$

L'équation (A.8) est donc une équation algébrique linéaire en $\dot{I}_1^V$ qui peut être résolue. On trouve :

$$\begin{aligned}\dot{I}_1^V = {} & \frac{(V_I + I_1^V)V_{III}}{V_I V_{II} - V_{III}}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D} - 2\,\frac{V_I V_{III} + I_1^V(V_I V_{II} - V_{III})}{V_I V_{II} - V_{III}}\boldsymbol{U}_t:\boldsymbol{D} + \frac{V_{III} - I_1^V(V_I^2 + V_{II}) + V_I I_2^V}{V_I V_{II} - V_{III}}\boldsymbol{V}:\boldsymbol{D} \\ & + \frac{V_I I_1^V + I_2^V}{V_I V_{II} - V_{III}}\boldsymbol{V}^2:\boldsymbol{D} + 4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U}_t):\boldsymbol{D} - \frac{2\,(\boldsymbol{V}^2\cdot\boldsymbol{U}_t\cdot\boldsymbol{V}^2):\boldsymbol{D}}{V_I V_{II} - V_{III}}\end{aligned}$$

Il apparaît qu'en anisotropie, l'utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$ donne des expressions moins maniables que celles obtenues avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$.

Remarque – Le terme $V_I V_{II} - V_{III}$ dans les dénominateurs est toujours positif. En effet, son expression en fonction des valeurs propres de $\boldsymbol{V}$ est :

$$V_I V_{II} - V_{III} = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1) > 0 \quad \text{car } \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$$

B

Calcul d'une loi tangente isotrope

Cette annexe n'est utile qu'aux praticiens de la « mécanique numérique », qui utilisent une « loi tangente » pour la résolution des problèmes non linéaires [section 2.6 p. 39].

On se propose de calculer la loi tangente du modèle de comportement élastique isotrope proposé au chapitre 3 [p. 43]. Sous l'hypothèse 3.1 [p. 44] (les variables d'état sont $\{T, K_v, \delta\}$) et l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 52] (un glissement laisse la contrainte moyenne invariante), la loi de comportement mécanique de ce modèle élastique isotrope est :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \boldsymbol{G} + K_1 \boldsymbol{B} \quad \text{avec} \quad K_0 = \sigma^{(2)}_{exp}(T, K_v) - \frac{\delta^{\frac{2}{3}}\, \tau^{(3)}_{exp1}(T,\delta)}{\sqrt{3}\, K_v \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad K_1 = \frac{\tau^{(3)}_{exp1}(T,\delta)}{\sqrt{3}\, K_v{}^{\frac{5}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (\partial_T K_0\, \dot{T} + \partial_{K_v} K_0\, \dot{K}_v + \partial_\delta K_0\, \dot{\delta})\, \boldsymbol{G} + (\partial_T K_1\, \dot{T} + \partial_{K_v} K_1\, \dot{K}_v + \partial_\delta K_1\, \dot{\delta})\, \boldsymbol{B} + K_1 \dot{\boldsymbol{B}} \\ &= (\partial_T K_0 \boldsymbol{G} + \partial_T K_1 \boldsymbol{B})\, \dot{T} + (\partial_{K_v} K_0 \boldsymbol{G} + \partial_{K_v} K_1 \boldsymbol{B})\, \dot{K}_v + (\partial_\delta K_0 \boldsymbol{G} + \partial_\delta K_1 \boldsymbol{B})\, \dot{\delta} + K_1 \dot{\boldsymbol{B}}\end{aligned}$$

où [1] :

$$\begin{aligned}\dot{K}_v &= (\sqrt{B_{III}})^{\cdot} = \frac{1}{2\sqrt{B_{III}}}\, \dot{B}_{III} = \frac{1}{2\sqrt{B_{III}}}\, B_{III} \boldsymbol{B}^{-1} : \dot{\boldsymbol{B}} = \frac{K_v}{2} \boldsymbol{B}^{-1} : \dot{\boldsymbol{B}} \\ \dot{\delta} &= \frac{\sqrt{3}}{9} \left(\frac{B_I{}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{B_{III}}} \right)^{\cdot} = \frac{\sqrt{B_I}}{2\sqrt{3}\sqrt{B_{III}}}\, \dot{B}_I - \frac{B_I{}^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3}\, B_{III}{}^{\frac{3}{2}}}\, \dot{B}_{III} = \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\, K_v{}^{\frac{2}{3}}} \boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{B}} - \frac{\delta}{2} \boldsymbol{B}^{-1} : \dot{\boldsymbol{B}}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {} & (\partial_T K_0 \boldsymbol{G} + \partial_T K_1 \boldsymbol{B})\, \dot{T} + (\partial_{K_v} K_0 \boldsymbol{G} + \partial_{K_v} K_1 \boldsymbol{B})\, \frac{K_v}{2} \boldsymbol{B}^{-1} : \dot{\boldsymbol{B}} \\ & + (\partial_\delta K_0 \boldsymbol{G} + \partial_\delta K_1 \boldsymbol{B}) \left(\frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\, K_v^{\frac{2}{3}}} \boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{B}} - \frac{\delta}{2} \boldsymbol{B}^{-1} : \dot{\boldsymbol{B}} \right) + K_1 \dot{\boldsymbol{B}}\end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {} & (\partial_T K_0 \boldsymbol{G} + \partial_T K_1 \boldsymbol{B})\, \dot{T} + \Big(\frac{K_v}{2}\, \partial_{K_v} K_0 \boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{B}^{-1} + \frac{K_v}{2}\, \partial_{K_v} K_1 \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}^{-1} + \\ & \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\, K_v{}^{\frac{2}{3}}}\, \partial_\delta K_0 \boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{G} - \frac{\delta}{2}\, \partial_\delta K_0 \boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{B}^{-1} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\, K_v{}^{\frac{2}{3}}}\, \partial_\delta K_1 \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{G} - \frac{\delta}{2}\, \partial_\delta K_1 \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}^{-1} + K_1 \boldsymbol{G} \boxtimes \boldsymbol{G} \Big) : \dot{\boldsymbol{B}}\end{aligned}$$

[1] Les dérivées temporelles des invariants d'un tenseur du second ordre sont données dans le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

En regroupant les tenseurs d'ordre 4, il vient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T K_0 \boldsymbol{G} + \partial_T K_1 \boldsymbol{B})\,\dot{T} + \Big(\big(\frac{K_v}{2}\,\partial_{K_v} K_0 - \frac{\delta}{2}\,\partial_\delta K_0\big)\,\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{B}^{-1} + \big(\frac{K_v}{2}\,\partial_{K_v} K_1 - \frac{\delta}{2}\,\partial_\delta K_1\big)\,\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B}^{-1} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\,K_v^{\frac{2}{3}}}\,\partial_\delta K_0\,\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{G} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\,K_v^{\frac{2}{3}}}\,\partial_\delta K_1\,\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{G} + K_1\,\boldsymbol{G}\boxtimes\boldsymbol{G}\Big) : \dot{\boldsymbol{B}}$$

Finalement,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T K_0 \boldsymbol{G} + \partial_T K_1 \boldsymbol{B})\,\dot{T} + \boldsymbol{K} : \dot{\boldsymbol{B}}$$

où $\boldsymbol{K}$ est le tenseur d'ordre 4 suivant :

$$\boldsymbol{K} = \big(\frac{K_v}{2}\,\partial_{K_v} K_0 - \frac{\delta}{2}\,\partial_\delta K_0\big)\,\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{B}^{-1} + \big(\frac{K_v}{2}\,\partial_{K_v} K_1 - \frac{\delta}{2}\,\partial_\delta K_1\big)\,\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B}^{-1} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\,K_v^{\frac{2}{3}}}\,\partial_\delta K_0\,\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{G} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2\,K_v^{\frac{2}{3}}}\,\partial_\delta K_1\,\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{G} + K_1\,\boldsymbol{G}\boxtimes\boldsymbol{G}$$

Les dérivées partielles des fonctions d'état K_0 et K_1 sont :

$$\partial_T K_0 = \partial_T \sigma_{exp}^{(2)} - \frac{\delta^{\frac{2}{3}}\,\partial_T \tau_{exp\,1}^{(3)}}{\sqrt{3}\,K_v\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \qquad \partial_T K_1 = \frac{\partial_T \tau_{exp1}^{(3)}}{\sqrt{3}\,K_v^{\frac{5}{3}}\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

$$\partial_{K_v} K_0 = \partial_{K_v} \sigma_{exp}^{(2)} + \frac{\delta^{\frac{2}{3}}\,\tau_{exp\,1}^{(3)}}{\sqrt{3}\,K_v{}^2\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \qquad \partial_{K_v} K_1 = -\frac{5}{3}\,\frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T,\delta)}{\sqrt{3}\,K_v^{\frac{8}{3}}\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

$$\partial_\delta K_0 = \frac{(2-\delta^{\frac{2}{3}})\,\tau_{exp\,1}^{(3)}}{3\,\sqrt{3}K_v\,\delta^{\frac{1}{3}}\,(\delta^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta^{\frac{2}{3}}\,\partial_\delta \tau_{exp\,1}^{(3)}}{\sqrt{3}K_v\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \qquad \partial_\delta K_1 = -\frac{\tau_{exp\,1}^{(3)}}{3\,\sqrt{3}K_v^{\frac{5}{3}}\,\delta^{\frac{1}{3}}\,(\delta^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial_\delta \tau_{exp\,1}^{(3)}}{\sqrt{3}K_v^{\frac{5}{3}}\,\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

Ces dérivées partielles ne peuvent être déterminées complètement que lorsque les mesures $\sigma_{exp}^{(2)}(T,K_v)$ et $\tau_{exp1}^{(3)}(T,\delta)$ ont été effectuées ou idéalisées.

C

Cinématique du glissement

L'objectif de cette annexe est d'analyser les déformations dans un mouvement isovolume particulier très utilisé dans les essais de caractérisation de matériaux : le glissement.

- **Définition C.1 – Glissement.** Soient trois directions orthonormées $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ définies fixes pour un certain observateur. On appelle glissement dans la direction $\boldsymbol{e}_1$ dans le plan $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ un *mouvement* dont la description de Lagrange du champ de déplacement pour cet observateur est de la forme :

$$\boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0, t) = \gamma(t)\,(\boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_1$$

On vérifie aisément que ce mouvement est isovolume ($K_v = \det \boldsymbol{F} = 1$). Un mouvement réel très proche de ce mouvement idéal peut être obtenu par le dispositif décrit dans la figure 3.1 [p. 53].

C.1 Directions principales actuelles de déformation dans un glissement

Dans un glissement, le gradient de la transformation $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ est uniforme :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} = \boldsymbol{G} + \gamma(t)\,\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{G} - \gamma(t)\,\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2$$

Le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$ est, lui aussi, uniforme :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top = \boldsymbol{G} + \gamma^2 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \gamma(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1)$$

Ses composantes dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ sont :

$$[B^\bullet{}_\bullet]_{\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}} = \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{C.1}$$

Les valeurs propres actuelles *classées* (pour $\gamma \geqslant 0$) du tenseur $\boldsymbol{B}$ sont :

$$\begin{aligned} {\lambda_1}^2 &= 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \gamma\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} = \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \\ {\lambda_2}^2 &= 1 \\ {\lambda_3}^2 &= 1 + \frac{\gamma^2}{2} - \gamma\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} = \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} - \frac{\gamma}{2}\right)^2 = {\lambda_1}^{-2} \end{aligned} \tag{C.2}$$

où les λ_i sont les dilatations linéiques principales [(1)]. On a l'égalité $\lambda_3 = {\lambda_1}^{-1}$ car la dilatation volumique est $K_v = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = \lambda_1\,\lambda_3 = 1$.

[(1)] On rappelle que ce sont aussi les valeurs propres du tenseur de déformation $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{B}}$.

En notant $\lambda = \lambda_1 \geqslant 1$ la plus grande dilatation linéique principale, les dilatations linéiques principales actuelles classées peuvent donc s'écrire :

$$\{\lambda, 1, \lambda^{-1}\} \quad \text{où} \quad \lambda = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} + \frac{|\gamma|}{2} \geqslant 1 \tag{C.3}$$

On vérifie aisément qu'un ensemble de vecteurs propres (orthogonaux mais non normés) associés aux valeurs propres est par exemple :

$$\lambda_1 = \lambda \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \lambda\, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \quad ; \quad \lambda_2 = 1 \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_3 \quad ; \quad \lambda_3 = \lambda^{-1} \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = -\lambda^{-1}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$$

Les vecteurs propres $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont orthogonaux et dans le plan $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Leurs angles polaires respectifs dans le plan $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ sont :

$$\theta_1 = \text{Arctan}(\lambda^{-1}) \in [0; \frac{\pi}{4}] \qquad (\text{car } \lambda > 1) \tag{C.4}$$

$$\theta_3 = -\text{Arctan}(\lambda) = \theta_1 + \frac{\pi}{2} \tag{C.5}$$

Une base propre orthonormée $\{\widetilde{\boldsymbol{v}}_1, \widetilde{\boldsymbol{v}}_2, \widetilde{\boldsymbol{v}}_3\}$ du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{V}$ est donc :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 = \cos\theta_1\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta_1\, \boldsymbol{e}_2 \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{e}_3 \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_3 = -\sin\theta_1\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta_1\, \boldsymbol{e}_2$$

où l'angle θ_1 est défini dans l'équation (C.4).

C.2 Interprétation angulaire

Le paramètre de glissement γ est le plus couramment employé pour caractériser un glissement, cependant l'expression compliquée des valeurs propres en fonction de γ [éq. (C.2) p. 133] masque des relations angulaires sur les directions propres plus simples à manier.

γ étant un réel positif, on peut toujours poser :

$$\gamma = 2\tan\phi \qquad \text{où} \quad \phi \in [0; \pi/2]$$

et utiliser le paramètre ϕ pour caractériser le glissement. La signification géométrique de l'angle ϕ est illustrée par la figure de gauche de la figure C.1 [p. 135]. On laisse le soin au lecteur de vérifier avec un peu de trigonométrie qu'avec le nouveau paramètre de glissement ϕ, les valeurs propres s'écrivent :

$$\lambda^2 = \left(\frac{1+\sin\phi}{\cos\phi}\right)^2 = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1+\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\lambda^{-2} = \left(\frac{1-\sin\phi}{\cos\phi}\right)^2 = \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{-1} = \frac{1-\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

On déduit de l'équation (C.4) que les angles polaires des directions propres associées à la plus grande valeur propre et à la plus petite valeur propre s'écrivent maintenant :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad ; \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

La représentation de ces angles est donnée dans la figure de droite de la figure C.1 [p. 135].

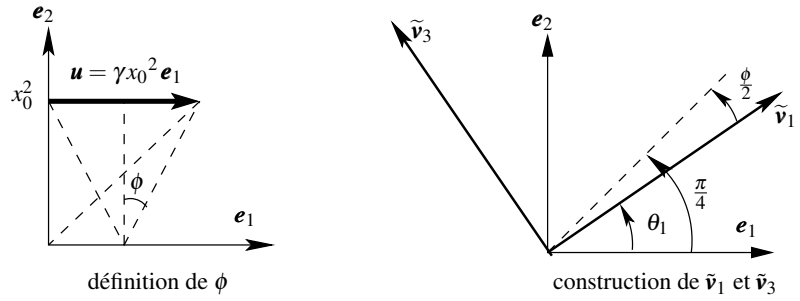


FIGURE C.1 – Première et troisième directions propres d'un mouvement de glissement

C.3 Évolution de la variable d'anisotropie a

Dans la construction d'un modèle de comportement isotrope transverse du chapitre 6 [p. 81], on utilise une variable d'anisotropie a définie par :

$$a = \frac{I_1^B}{K_v^{\frac{2}{3}}} = \frac{\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t}{B_{\mathrm{III}}{}^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{[éq. 6.1 p. 82]}$$

Puisque dans cette annexe, le mouvement de glissement est sans dilatation volumique initiale, on a l'égalité :

$$a = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t$$

- **Proposition C.2 –** Les valeurs extrémales de la variable a sont obtenues quand la direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ est dans le plan de glissement $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\widetilde{\boldsymbol{v}}_1, \widetilde{\boldsymbol{v}}_3)$. De plus :
  - le maximum $a_{max} = \lambda^2 > 1$ est obtenu quand $\boldsymbol{n}_t = \widetilde{\boldsymbol{v}}_1$;
  - le minimum $a_{min} = \lambda^{-2} < 1$ est obtenu quand $\boldsymbol{n}_t = \widetilde{\boldsymbol{v}}_3$;
  - la valeur intermédiaire $a_{int} = 1$ est obtenue quand $\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{e}_2$.

Démonstration – Soient $\widetilde{n}_t^1, \widetilde{n}_t^2, \widetilde{n}_t^3$ les composantes de la direction actuelle d'anisotropie *dans la base propre actuelle* $\{\widetilde{\boldsymbol{v}}_1, \widetilde{\boldsymbol{v}}_2, \widetilde{\boldsymbol{v}}_3\}$ du tenseur de déformation. La variable d'anisotropie a s'écrit :

$$\begin{aligned} a &= \widetilde{n}_t^{1\,2}\lambda^2 + \widetilde{n}_t^{2\,2} + \widetilde{n}_t^{3\,2}\lambda^{-2} \\ &= (\lambda^2 - 1)\widetilde{n}_t^{1\,2} + (\lambda^{-2} - 1)\widetilde{n}_t^{3\,2} + 1 \quad \text{car} \quad \widetilde{n}_t^{2\,2} = 1 - \widetilde{n}_t^{1\,2} - \widetilde{n}_t^{3\,2} \\ a &= (\lambda^2 - 1)N^1 + (\lambda^{-2} - 1)N^3 + 1 \end{aligned}$$

où, pour simplifier les écritures, on a posé : $N^1 = \widetilde{n}_t^{1\,2} \in [0;1]$ et $N^3 = \widetilde{n}_t^{3\,2} \in [0;1]$.
On a aussi la relation : $N^1 + N^3 = 1 - N^2 \in [0;1]$ car $\|\boldsymbol{n}_t\| = 1$.

Pour $\lambda \neq 1$, les extrema de cette fonction linéaire à deux variables N^1 et N^3 sont obtenus aux bornes du domaine de définition c'est-à-dire aux bornes du triangle formé par les trois droites $N^1 = 0$, $N^3 = 0$ et $N^1 + N^3 = 1$ du plan (N^1, N^2) [fig. C.2 p. 136].

Puisque $\lambda > 1$, les extrema de la variable a sont :
- le maximum est λ^2 obtenu au sommet $\{N^1 = 1, N^3 = 0\}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{n}_t = \widetilde{\boldsymbol{v}}_1$;
- le minimum est λ^{-2} obtenu au sommet $\{N^1 = 0, N^3 = 1\}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{n}_t = \widetilde{\boldsymbol{v}}_2$;
- la valeur intermédiaire 1 est obtenue au sommet $\{N^1 = 0, N^3 = 0\}$, ainsi qu'au point P.

Si $\lambda = 1$ (pas de glissement), la valeur de la variable d'anisotropie a est toujours égale à 1 quelle que soit la direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$.

On décrit donc toutes les valeurs possibles de la variable a en ne circulant que sur le segment de droite défini par :

$$N^1 + N^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{n}_t^1)^2 + (\widetilde{n}_t^3)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{n}_t^2 = 0$$

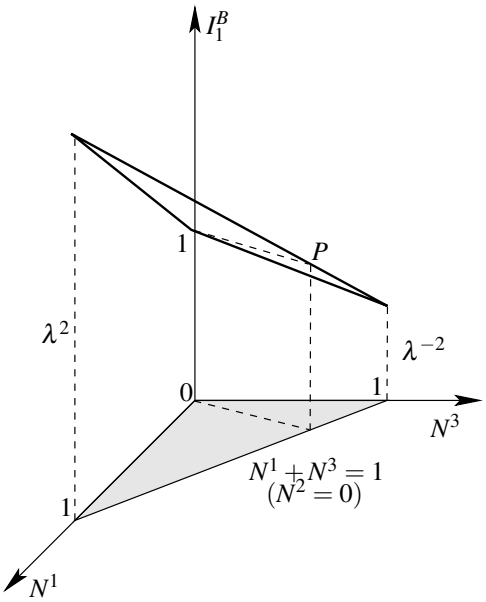


FIGURE C.2 – Évolution de l'invariant a en fonction de $N^1 = \widetilde{n}_t^{1\,2}$ et $N^3 = \widetilde{n}_t^{3\,2}$

c'est-à-dire quand la direction actuelle d'anisotropie est dans le plan de glissement $(\widetilde{\boldsymbol{v}}_1, \widetilde{\boldsymbol{v}}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. En particulier, sur ce segment de droite, l'invariant a passe par la valeur intermédiaire 1 (point P sur la figure C.2) quand :

$$N^1 = \widetilde{n}_t^{1\,2} = \frac{1-\lambda^{-2}}{\lambda^2-\lambda^{-2}} \quad ; \quad N^3 = 1 - N^1 = \widetilde{n}_t^{3\,2} = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\lambda^{-2}} \quad ; \quad N^2 = \widetilde{n}_t^{2\,2} = 0$$

En remplaçant λ par $\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})$ il vient :

$$\widetilde{n}_t^{1\,2} = \cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}) \quad ; \quad \widetilde{n}_t^{3\,2} = \sin^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}) \quad ; \quad \widetilde{n}_t^{2\,2} = 0$$

c'est-à-dire entre autres solutions $\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{e}_2$ [fig. C.1]. On décrit donc toutes les valeurs de l'invariant a en faisant varier la direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ de $\widetilde{\boldsymbol{v}}_3$ à $\widetilde{\boldsymbol{v}}_1$ en passant par $\boldsymbol{e}_2$.

On parcourt donc toutes les valeurs possibles de l'invariant a en faisant varier la direction actuelle d'anisotropie dans le plan de cisaillement $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

Dans la pratique, il est plus commode de repérer la direction actuelle d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ par rapport à la direction de glissement $\boldsymbol{e}_1$ plutôt que par rapport aux directions propres actuelles de déformation. Si on note α_t l'angle polaire de la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ dans la base propre $(\widetilde{\boldsymbol{v}}_1, \widetilde{\boldsymbol{v}}_3)$ et β_t son angle polaire dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, on a la relation :

$$\beta_t = \theta_1 + \alpha_t = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \alpha_t \quad \text{où} \quad \phi = \text{Arctan}\frac{\gamma}{2} \qquad \text{[fig. C.1 p. 135]}$$

C.4 Déviation de la direction d'anisotropie dans le glissement

Dans le mouvement de glissement, la direction d'anisotropie évolue de la direction $\boldsymbol{n}_0$ d'angle polaire β_0 vers la direction $\boldsymbol{n}_t$ d'angle polaire β_t. On montre en cinématique que la direction

d'anisotropie actuelle est donnée par :

$$\boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\|} = \frac{(\cos\beta_0+\gamma\sin\beta_0)\,\boldsymbol{e}_1+\sin\beta_0\,\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{\sin^2\beta_0+(\cos\beta_0+\gamma\sin\beta_0)^2}} \quad\Rightarrow\quad \beta_t = \mathrm{Arctan}\,\frac{\tan\beta_0}{1+\gamma\tan\beta_0}\ [\pi]$$

la formule inverse est :

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_t}{\|\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_t\|} = \frac{(\cos\beta_t-\gamma\sin\beta_t)\,\boldsymbol{e}_1+\sin\beta_t\,\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{\sin^2\beta_t+(\cos\beta_t-\gamma\sin\beta_t)^2}} \quad\Rightarrow\quad \beta_0 = \mathrm{Arctan}\,\frac{\tan\beta_t}{1-\gamma\tan\beta_t}\ [\pi]$$

À titre d'illustration, on donne les graphes de la variable a en fonction de la direction actuelle d'anisotropie β_t [fig. C.3 p. 137] et de la direction initiale d'anisotropie β_0 [fig. C.4 p. 137] pour des glissements γ compris entre 0 et 3 :

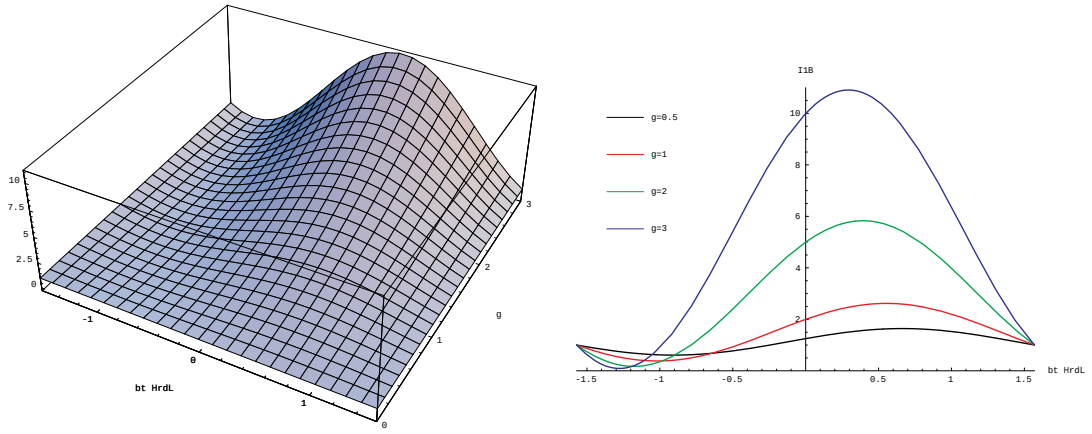


FIGURE C.3 – Variations de a en fonction de $\beta_t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et γ, et coupes à γ constant.

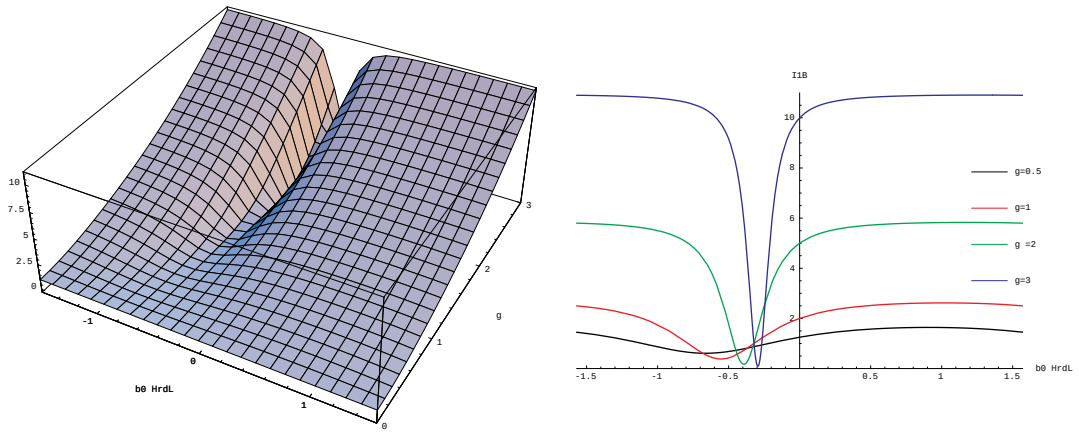


FIGURE C.4 – Variations de a en fonction de $\beta_0 \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et γ, et coupes à γ constant..

D

Transformations d'intégrales

Dans les problèmes de physique régis par des équations différentielles [1], on voit apparaître les opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien de champs scalaires, vectoriels ou tensoriels. Lors de la formulation intégrale de ces équations différentielles en vue de leur résolution numérique, on écrit des intégrales sur un domaine $\mathscr{D}$ de produits scalaires de ces opérateurs avec des champs arbitraires définis sur $\mathscr{D}$ de même tensorialité. On donne dans cette annexe les formules les plus utiles [2] pour transformer ces intégrales de volume de produits scalaires en d'autres intégrales de volume complétées par des intégrales de bord sur la frontière $\partial\mathscr{D}$.

Remarque – Les formules qui suivent peuvent être considérées comme une généralisation de l'intégration par partie des intégrales de produits de fonctions réelles.

Dans toute cette annexe, on utilise les symboles suivants :
- $\mathscr{D}$ est un domaine volumique,
- $\partial\mathscr{D}$ est la frontière de $\mathscr{D}$,
- $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire sortante de $\partial\mathscr{D}$,
- f et g sont des champs scalaires définis dans $\mathscr{D}$,
- $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont des champs vectoriels définis dans $\mathscr{D}$,
- $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ sont des champs tensoriels du second ordre défini dans $\mathscr{D}$,
- $\boldsymbol{K}$ est un champ tensoriel du troisième ordre défini dans $\mathscr{D}$

Toutes les formules qui suivent reposent sur l'utilisation du théorème de la divergence [3] (ou théorème d'Ostrogradski) pour les champs vectoriels ou tensoriels que l'on rappelle ici :

$$\int_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, ds \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathscr{D}} \mathbf{div}\, \boldsymbol{T}\, dv = \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\, ds \tag{D.1}$$

D.1 Intégrale d'un produit $f \operatorname{div} \boldsymbol{v}$

On connaît l'identité :

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\, f + f \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

On en déduit :

$$\int_{\mathscr{D}} f \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\, f\, dv + \int_{\mathscr{D}} \operatorname{div}(f\boldsymbol{v})\, dv$$

[1] Élasticité, thermique, mécanique des fluides, électromagnétisme...
[2] Si besoin était, le lecteur n'aura aucune difficulté à écrire des formules pour des ordres de tensorialité supérieurs.
[3] Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'études des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

En appliquant le théorème (D.1) sur la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{\mathscr{D}} f \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}\, f\, dv + \int_{\partial\mathscr{D}} f\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dv \tag{D.2}$$

D.2 Intégrale d'un produit $f\,\Delta g$

En appliquant le résultat (D.2) avec $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, g$ il vient :

$$\int_{\mathscr{D}} f\,\Delta\, g\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \mathbf{grad}\, g \cdot \mathbf{grad}\, f\, dv + \int_{\partial\mathscr{D}} f\, \mathbf{grad}\, g \cdot \boldsymbol{n}\, dv \tag{D.3}$$

D.3 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}$

On connaît l'identité :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}$$

On en déduit :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}\, dv = \int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, dv - \int_{\mathscr{D}} \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})\, dv$$

En appliquant le théorème (D.1) sur la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}\, dv = \int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, dv - \int_{\partial\mathscr{D}} (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}\, ds \tag{D.4}$$

D.4 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{T}$

On connaît l'identité :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{T} + \mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} : \boldsymbol{T}$$

On en déduit :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{T}\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} : \boldsymbol{T}\, dv + \int_{\mathscr{D}} \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T})\, dv$$

En appliquant le théorème (D.1) sur la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{T}\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} : \boldsymbol{T}\, dv + \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}\, ds \tag{D.5}$$

D.5 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{w}$

En appliquant le résultat (D.5) avec $\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\, \boldsymbol{w}$, il vient :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{w}\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} : \mathbf{grad}\, \boldsymbol{w}\, dv + \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}\, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}\, ds \tag{D.6}$$

D.6 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{T}$: div $\boldsymbol{K}$

On connaît l'identité :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{K}) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \overline{\otimes}^3 \boldsymbol{K} + \boldsymbol{T} : \mathbf{div}\,\boldsymbol{K}$$

On en déduit :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{T} : \mathbf{div}\,\boldsymbol{K}\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \overline{\otimes}^3 \boldsymbol{K}\, dv + \int_{\mathscr{D}} \operatorname{div}(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{K})\, dv$$

En appliquant le théorème (D.1) sur la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{T} : \mathbf{div}\,\boldsymbol{K}\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \overline{\otimes}^3 \boldsymbol{K}\, dv + \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{T} : \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{n}\, ds \tag{D.7}$$

D.7 Intégrale d'un produit scalaire $\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{U}$

En appliquant le résultat (D.7) avec $\boldsymbol{K} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{U}$, il vient :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{U}\, dv = -\int_{\mathscr{D}} \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \overline{\otimes}^3 \mathbf{grad}\,\boldsymbol{U}\, dv + \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{T} : \mathbf{grad}\,\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}\, ds \tag{D.8}$$

E

Distorsions maximales en anisotropie

Dans cette annexe, on calcule les quelques distorsions maximales évoquées en isotropie transverse dans la section 5.4 [p. 78] (critères de limite élastique en isotropie transverse). La recherche des différentes distorsions maximales donnant lieu à des calculs algébriques fastidieux, on se contente de donner la démarche générale et les résultats. Les calculs algébriques sont détaillés dans une feuille de calcul donnée en annexe I [p. 191] qui est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA® dans sa version 5.2.

E.1 Rappels de cinématique

Soit $\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F}}$ le tenseur de déformation non objectif actuel [(1)] en une particule. Le tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$ étant symétrique défini positif, on peut toujours écrire :

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i$$

où les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$ sont les dilatations linéiques principales de cette déformation et où les trois vecteurs $\{\boldsymbol{u}_i\}$ sont une base propre orthonormée directe du tenseur $\boldsymbol{U}$.

Rappels – Toute direction matérielle $\boldsymbol{u}$ peut être identifiée par sa direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ (ou bien $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{u}_0 \otimes \boldsymbol{u}_0$) ou par sa direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ (ou bien $\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{u}_t \otimes \boldsymbol{u}_t$). De même, toute facette matérielle peut être identifiée par sa normale de référence $\boldsymbol{n}_0$ (ou bien $\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{n}_0 \otimes \boldsymbol{n}_0$) ou par sa normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ (ou bien $\boldsymbol{N}_t = \boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t$).

On définit en cinématique [(2)] deux sortes de distorsions :

1. La *distorsion angulaire* actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales ($\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0$) dont la définition est :

$$\delta^a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{K_l(\boldsymbol{u})\,K_l(\boldsymbol{v})}{K_s(\boldsymbol{n})} \geqslant 1 \tag{E.1}$$

   Si $\delta^a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 1$, il n'y a pas de distorsion angulaire actuelle pour les deux directions matérielles initialement orthogonales $\boldsymbol{u}_0$ et $\boldsymbol{v}_0$, c'est-à-dire $\sin(\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{v}_t) = 1$. On rappelle que :

(1) On choisit d'utiliser ici le tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$ car il identifie les directions matérielles par leur direction initiale ; il est ainsi facile d'écrire que les directions matérielles sont initialement orthogonales. On verra dans la suite que ce choix est sans importance, car les résultats sont des fonctions de dilatations linéiques, surfaciques ou volumiques, grandeurs qui sont exprimables avec tout tenseur de déformation.

(2) Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

- $K_l(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}_0\|$ est la dilatation linéique dans la direction matérielle $\boldsymbol{u}$;
- $K_l(\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{v}_0\|$ est la dilatation linéique dans la direction matérielle $\boldsymbol{v}$;
- $K_s(\boldsymbol{n}) = K_v\,\|\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_0\|$ est la dilatation surfacique de la facette matérielle $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ dont la normale de référence est $\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{u}_0\wedge\boldsymbol{v}_0}{\|\boldsymbol{u}_0\wedge\boldsymbol{v}_0\|}$.

2. La *distorsion stérique* actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales (le trièdre $(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{w}_0)$ est orthonormé) dont la définition est :

$$\delta^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \frac{K_l(\boldsymbol{u})\,K_l(\boldsymbol{v})\,K_l(\boldsymbol{w})}{K_v} = \frac{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}_0\|\,\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{v}_0\|\,\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{w}_0\|}{\det\boldsymbol{U}} \geqslant 1$$

Si $\delta^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 1$, il n'y a pas de distorsion stérique actuelle pour les trois directions matérielles initialement orthogonales $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{v}_0$ et $\boldsymbol{w}_0$, c'est-à-dire que $[\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{v}_t,\boldsymbol{w}_t] = \pm 1$.

E.2 Distorsions angulaires maximales

L'une des deux directions est la direction d'anisotropie

Soit la déformation actuelle en une particule représentée par le tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$. On se propose de rechercher quelle est la valeur maximale de la distorsion angulaire sur l'ensemble des couples de directions matérielles initialement orthogonales, dont l'une est la direction d'anisotropie.

On note $\boldsymbol{n}$ la direction d'anisotropie représentée par sa direction initiale $\boldsymbol{n}_0$. On note $\boldsymbol{u}$ une direction matérielle initialement orthogonale à la direction d'anisotropie ($\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{n}_0 = 0$). On engendre toutes les directions initialement orthogonales à la direction d'anisotropie par l'opération suivante :

$$\boldsymbol{u}_0(\mu) = \frac{\boldsymbol{a}(\mu)\wedge\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{a}(\mu)\wedge\boldsymbol{n}_0\|}$$

où $\boldsymbol{a}(\mu) \neq \boldsymbol{n}_0$ est un vecteur variable, fonction quelconque du paramètre μ. La normale à la facette matérielle $(\boldsymbol{n}_0,\boldsymbol{u}_0)$ est le vecteur :

$$\boldsymbol{v}_0(\mu) = \frac{\boldsymbol{n}_0\wedge\boldsymbol{u}_0(\mu)}{\|\boldsymbol{n}_0\wedge\boldsymbol{u}_0(\mu)\|}$$

Le trièdre $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}_0(\mu),\boldsymbol{v}_0(\mu))$ forme un trièdre orthonormé. La distorsion angulaire du couple de directions matérielles $(\boldsymbol{n}_0,\boldsymbol{u}_0(\mu))$ est donc [éq. (E.1) p. 143] :

$$\delta^a(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}(\mu)) = \frac{K_l(\boldsymbol{n})\,K_l(\boldsymbol{u}(\mu))}{K_s(\boldsymbol{v}(\mu))} = \frac{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}_0\|\,\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}_0(\mu)\|}{\det\boldsymbol{U}\;\|\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{v}_0(\mu)\|}$$

Les extrema de la distorsion angulaire sont obtenus quand : $\partial_\mu\delta^a(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}(\mu)) = 0$.

En écrivant cette équation avec les composantes des vecteurs $\boldsymbol{a}(\mu)$ et $\boldsymbol{n}_0$ dans la base propre du tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$, on obtient une équation qui se factorise. Certains facteurs ne sont jamais nuls. L'annulation de l'un des facteurs conduit à un vecteur $\boldsymbol{a}(\mu)$ qui donne une distorsion angulaire égale à 1 (il s'agit donc d'un minimum de la distorsion angulaire). Seul l'un des facteurs conduit à un vecteur $\boldsymbol{a}(\mu)$ qui donne une distorsion angulaire maximale :

$$\delta^a_{max}{}^{(1)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}(\mu)) = \frac{K_l(\boldsymbol{n})\,K_s(\boldsymbol{n})}{K_v} \qquad \text{où} \quad \boldsymbol{u}(\mu)\perp\boldsymbol{n} \tag{E.2}$$

Ce maximum peut être évalué avec tout tenseur de déformation. Par exemple avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$:

$$\delta^a_{max}{}^{(1)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}(\mu)) = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{B}^{-1}:\boldsymbol{N}_t}\,\sqrt{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}}$$

Les deux directions matérielles sont initialement orthogonales à la direction d'anisotropie

On cherche maintenant la distorsion angulaire maximale des couples de directions matérielles initialement orthogonales $(\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu))$, chacun d'eux étant orthogonal à la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}$. Sa distorsion angulaire du couple $(\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu))$ est :

$$\delta^a(\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu)) = \frac{K_l(\boldsymbol{u}(\mu))\,K_l(v(\mu))}{K_s(\boldsymbol{n})} = \frac{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}_0(\mu)\|\;\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{v}_0(\mu)\|}{\det\boldsymbol{U}\;\|\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_0(\mu)\|} \qquad \text{[éq. (E.1) p. 143]}$$

où $\boldsymbol{n}_0$ est la normale initiale à la facette matérielle $(\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu))$. Les extrema de la distorsion angulaire sont obtenus quand $\partial_\mu\delta^a(\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu)) = 0$.

Par le même procédé que précédemment (annulation des facteurs, les calculs sont fastidieux), on trouve que la distorsion maximale du couple de directions matérielles $(\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu))$ est :

$$\delta^a_{max}{}^{(2)}(\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu)) = \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{U}^2 - K_l(\boldsymbol{n})^2}{2\,K_s(\boldsymbol{n})} \tag{E.3}$$

Ce maximum peut être évalué avec tout tenseur de déformation. Par exemple avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$:

$$\delta^a_{max}{}^{(2)}(\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu)) = \left(\mathrm{tr}\boldsymbol{B} - \frac{1}{\boldsymbol{B}^{-1}:\boldsymbol{N}t}\right)\frac{\sqrt{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}}{2\sqrt{\det\boldsymbol{B}}}$$

E.3 Distorsion stérique maximale du triplet $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$

On cherche maintenant un maximum de la distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales dont l'une est la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}$.

La distorsion stérique actuelle de ce triplet est par définition :

$$\delta^s(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu)) = \frac{K_l(\boldsymbol{n})\;K_l(\boldsymbol{u}(\mu))\;K_l(\boldsymbol{v}(\mu))}{K_v}$$

Les extrema de la distorsion stérique sont obtenus quand $\partial_\mu\delta^s(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}(\mu),\boldsymbol{v}(\mu)) = 0$. En analysant cette équation comme précédemment, on trouve deux maximums relatifs :

$$\delta^s_{max}{}^{(1)} = \frac{K_l(\boldsymbol{n})\boldsymbol{K}_s(\boldsymbol{n})}{K_v} = \delta^a_{max}{}^{(1)} \quad \text{et} \quad \delta^s_{max}{}^{(2)} = \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{U}^2 - K_l(\boldsymbol{n})^2}{2\,K_s(\boldsymbol{n})} = \delta^a_{max}{}^{(2)} \tag{E.4}$$

Ces extrémums sont identiques à ceux trouvés dans les distorsions angulaires maximales.

Avec quelques calculs, en comparant leurs carrés, on montre que :

$$\delta^s_{max}{}^{(2)} \geqslant \delta^s_{max}{}^{(1)} \qquad \Rightarrow \qquad \delta^a_{max}{}^{(2)} \geqslant \delta^a_{max}{}^{(1)}$$

F

Calculs du chapitre 3

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs dans la construction du modèle de comportement élastique isotrope présenté dans le chapitre 3 [p. 43].

Cette feuille de calcul est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA® dans sa version 5.2. Elle utilise, pour les quelques calculs tensoriels, des fonctionnalités de la bibliothèque `Tens3D` écrite par l'auteur pour pratiquer l'algèbre et l'analyse tensorielle dans le cadre de la physique classique dans des bases quelconques et des systèmes de coordonnées quelconques. Cette bibliothèque (développée dans la version 5.2 de MATHEMATICA®) est téléchargeable à : `http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html`

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque `Tens3D`, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

Modèle élastique isotrope (T,Kv,δ)

Préparations

■ Le package Tens3D (pour les calculs tensoriels)

Le package Tens3D est utile pour les quelques calculs tensoriels qui suivent.
Il est téléchargeable à http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html (pour la version 5.2 de *Mathematica*)

```
In[1]:= Needs["Tens3D`"]
```

Raccourcis de notations :

```
In[2]:= G = MetricTensor; B0 = CanonicalBasis;
```

Vecteurs de base :

```
In[3]:= {e1, e2, e3} = BasisVectors[B0];
```

■ Préparation du système de coordonnées cartésiennes orthonormées

```
In[4]:= OM = DefineTensor[{x1, x2, x3}, {1}, B0];

In[5]:= SC = DefineCoordinateSystem[OM, {x1, x2, x3}];

        Direct normalized orthogonal natural basis.

In[6]:= Off[General::spell]
```

■ Une fonction qui change le nom des variables muettes dans une intégrale :

Le premier argument est une expression et le second est le nom désiré pour la variable muette
(Attention, cette fonction ne marche bien que si toutes les variables muettes **K$xxx** de **expr** ont le même nom)

```
In[7]:= ChVarMu = Function[{expr, var},
          MapAll[If[ToString[Head[#]] == "Integrate" && StringMatchQ[ToString[#[[2, 1]]], "K$*"],
             # /. #[[2, 1]] → var, #] &, expr ]]

Out[7]= Function[{expr, var},
         (If[ToString[Head[#1]] == Integrate && StringMatchQ[ToString[#1[[2, 1]]], K$*],
             #1 /. #1[[2, 1]] → var, #1] &) //@ expr]
```

■ Une fonction qui développe les sommes d'intégrandes

In[8]:=
```
DevelopInt = Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == "Integrate" (* test si l'argument est une intégrale *) ,
   Distribute[Integrate[Expand[ X[[1]] ], X[[2]] ]],
   X ](* If :  inchangé sinon  *)
 ]
```

Out[8]= $\text{Function}\left[X, \text{If}\left[\text{ToString}[\text{Head}[X]] == \text{Integrate}, \text{Distribute}\left[\int \text{Expand}[X[[1]]]\, dX[[2]], X\right]\right]\right]$

Exemple :

In[9]:= $X = \int_{x1}^{x2} \left(a + x^2 + \frac{\int_{y1}^{x} (h + b\, g[y])\, dy}{-d + c[x]}\right) dx$ (*Integrate ne sait pas intégrer*)

Out[9]= $\int_{x1}^{x2} \left(a + x^2 + \frac{\int_{y1}^{x} (h + b\, g[y])\, dy}{-d + c[x]}\right) dx$

In[10]:= `DevelopInt[X]`

Out[10]= $-a\, x1 - \frac{x1^3}{3} + a\, x2 + \frac{x2^3}{3} + \int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^{x} (h + b\, g[y])\, dy}{-d + c[x]}\, dx$

In[11]:= `MapAll[DevelopInt, X]`

Out[11]= $-a\, x1 - \frac{x1^3}{3} + a\, x2 + \frac{x2^3}{3} + \int_{x1}^{x2} \frac{h\, x}{-d + c[x]}\, dx + \int_{x1}^{x2} -\frac{h\, y1}{-d + c[x]}\, dx + \int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^{x} b\, g[y]\, dy}{-d + c[x]}\, dx$

■ Une fonction qui sort les constantes des intégrales

```
In[12]:= SorsConst = Function[X,
           If[ToString[Head[X]] == "Integrate" && (* test si l'argument est une intégrale *)
             ToString[Head[X[[1]]]] == "Times",  (* et si l'intégrande est un produit *)
            Apply[Times,
              Select[
               Apply[List, X[[1]] ], (* Apply[List, : transformation de l'intégrande en liste *)
               FreeQ[#, X[[2, 1]]] &
               (* FreeQ : test si l'élément ne contient pas la variable d'intégration *)
              ] (* Select : sélection des éléments constants *)
             ] (* Apply[Times, : produit des constantes *)
              *  (* produit des constantes par l'intégrale restante *)
             Integrate[
              Apply[Times,
               Select[
                Apply[List, X[[1]]],  (* transformation de l'intégrande en liste *)
                ! FreeQ[#, X[[2, 1]]] &
                (* !FreeQ : test si l'élément contient la variable d'intégration *)
               ] (* Select : sélection des éléments non constants *)
              ] (* Apply[Times, : produit des éléments non constants *)
              , X[[2]]] (* Integrate : intégration des éléments non constant *)
            , X] (* If : inchangé sinon *)
          ]
```

```
Out[12]= Function[X, If[ToString[Head[X]] == Integrate && ToString[Head[X[[1]]]] == Times,
           Times @@ Select[List @@ X[[1]], FreeQ[#1, X[[2, 1]]] &]
             ∫Times @@ Select[List @@ X[[1]], ! FreeQ[#1, X[[2, 1]]] &] dX[[2]], X]]
```

Exemples :

In[13]:= $\text{MapAll}\left[\text{SorsConst}, \int_{x1}^{x2} -\frac{\int_{y1}^{y2} b\, g[y]\, dy}{-d + c[x]}\, dx\right]$

Out[13]= $-b \left(\int_{x1}^{x2} \frac{1}{-d + c[x]}\, dx\right) \int_{y1}^{y2} g[y]\, dy$

```
In[14]:= MapAll[DevelopInt, X]
```

Out[14]= $-a\, x1 - \frac{x1^3}{3} + a\, x2 + \frac{x2^3}{3} + \int_{x1}^{x2} \frac{h\, x}{-d + c[x]}\, dx + \int_{x1}^{x2} -\frac{h\, y1}{-d + c[x]}\, dx + \int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^{x} b\, g[y]\, dy}{-d + c[x]}\, dx$

```
In[15]:= Map[SorsConst, MapAll[DevelopInt, X]]
```

Out[15]= $-a\, x1 - \frac{x1^3}{3} + a\, x2 + \frac{x2^3}{3} - h\, y1 \int_{x1}^{x2} \frac{1}{-d + c[x]}\, dx + h \int_{x1}^{x2} \frac{x}{-d + c[x]}\, dx + \int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^{x} b\, g[y]\, dy}{-d + c[x]}\, dx$

```
In[16]:= MapAll[SorsConst, MapAll[DevelopInt, X]]
```

Out[16]= $-a\, x1 - \frac{x1^3}{3} + a\, x2 + \frac{x2^3}{3} - h\, y1 \int_{x1}^{x2} \frac{1}{-d + c[x]}\, dx + h \int_{x1}^{x2} \frac{x}{-d + c[x]}\, dx + b \int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^{x} g[y]\, dy}{-d + c[x]}\, dx$

■ Une fonction qui fait les deux précédentes

```
In[17]:= ArrangeInt = Function[X, MapAll[SorsConst, MapAll[DevelopInt, X]]]
```

```
Out[17]= Function[X, SorsConst //@ DevelopInt //@ X]
```

Exemple :

```
In[18]:= ArrangeInt[X]
```

Out[18]= $-a\,x1 - \frac{x1^3}{3} + a\,x2 + \frac{x2^3}{3} - h\,y1 \int_{x1}^{x2} \frac{1}{-d + c[x]}\,dx + h \int_{x1}^{x2} \frac{x}{-d + c[x]}\,dx + b \int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^{x} g[y]\,dy}{-d + c[x]}\,dx$

On comble ainsi la carence de **Simplify** suivante :

```
In[19]:= Integrate[f[x], {x, x1, x2}] + Integrate[-f[x], {x, x1, x2}] //
          Simplify (* Simplify ne fait rien *)
```

Out[19]= $\int_{x1}^{x2} -f[x]\,dx + \int_{x1}^{x2} f[x]\,dx$

```
In[20]:= % // ArrangeInt
```

```
Out[20]= 0
```

Forme générale des fonctions d'état

Quelques hypothèses physiques destinées à aider les simplifications et les intégrations :

```
In[21]:= $Assumptions = $Assumptions && T > 0 && T0 > 0 && Kv > 0 && δ > 1 && ρ0 > 0 ;
```

Remplacements pour obtenir les valeurs à l'état initial :

```
In[22]:= EtatInitial = {T → T0, Kv → 1, δ → 1};
```

■ Energie libre de Helmholtz

```
In[23]:= ψ = g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, δ];
```

```
In[24]:= g2[_, 1] := 0 ; g3[_, _, 1] := 0;
```

■ Entropie massique

```
In[25]:= s = - D[ψ, T] (* relation de Helmholtz *)
```

Out[25]= $-g1'[T] - g2^{(1,0)}[T, Kv] - g3^{(1,0,0)}[T, Kv, \delta]$

■ Energie interne

```
In[26]:= e = ψ + T s (* définition de l'énergie libre de Helmholtz *)
```

Out[26]= $g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, \delta] + T\,(-g1'[T] - g2^{(1,0)}[T, Kv] - g3^{(1,0,0)}[T, Kv, \delta])$

■ Tenseur des contraintes

```
In[27]:= K0 = ρ0 (D[ψ, Kv] - δ / Kv D[ψ, δ])  // Expand (* voir cours *)
```

Out[27]= $\rho 0\, g2^{(0,1)}[T, Kv] - \frac{\delta\, \rho 0\, g3^{(0,0,1)}[T, Kv, \delta]}{Kv} + \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T, Kv, \delta]$

```
In[28]:= K1 = ρ0 δ^(1/3) Kv^(-5/3) D[ψ, δ] // Expand (* voir cours *)
```

Out[28]= $\frac{\delta^{1/3}\, \rho 0\, g3^{(0,0,1)}[T, Kv, \delta]}{Kv^{5/3}}$

Définition tensorielle du tenseur des contraintes : (***exécution retardée*** (**:=**) car la valeur de B n'est pas encore définie)

```
In[29]:= σ := K0 ∘ G ⊕ K1 ∘ B; (* ∘ et ⊕ sont des opérateurs opérateurs définis dans Tens3D *)
```

Variation de T0 à T à déformation nulle (chemin $C^{(1)}$)

```
In[30]:= Chemin1 = {Kv → 1, δ → 1}
```

Out[30]= $\{Kv \to 1, \delta \to 1\}$

■ Tenseur de déformation

```
In[31]:= B = G;
```

■ Tenseur des contraintes

```
In[32]:= σ1 = σ;
```

Calcul de la contrainte moyenne :

```
In[33]:= σmoy1 = I1[σ1] / 3 /. Chemin1 // Simplify
           (* I1 : fonction de Tens3D qui calcule le premier invariant*)
```

Out[33]= $\rho 0\, (g2^{(0,1)}[T, 1] + g3^{(0,1,0)}[T, 1, 1])$

■ mesure de chaleur massique à déformation nulle : `Q1Exp[T]` (conservation de l'énergie)

```
In[34]:= eq1 = Q1Exp[T] == (e /. Chemin1)
```

Out[34]= $Q1Exp[T] == g1[T] + T\,(-g1'[T] - g2^{(1,0)}[T, 1] - g3^{(1,0,0)}[T, 1, 1])$

■ Résolution de `eq1` (on trouve `g1`)

In[35]:=
```
sol = DSolve[eq1, g1, T]
```

Out[35]=
$$\left\{\left\{g1 \to \text{Function}\left[\{T\}, T\,C[1] + T \int_1^T \frac{1}{K\$1590^2} \left(-Q1Exp[K\$1590] - K\$1590\, g2^{(1,0)}[K\$1590, 1] - K\$1590\, g3^{(1,0,0)}[K\$1590, 1, 1]\right) dK\$1590\right]\right\}\right\}$$

In[36]:=
```
sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
      C[1] → g11 (* changement de nom de la constante C[1] *) /.
     {dx_, 1, T} → {dx, T0, T} (* changement de la borne d'intégration inférieure *) //
   ChVarMu[#, Tx] & (* changement de nom de la variable muette *) //
  ArrangeInt // Expand
```

Out[36]=
$$g11\,T - T \int_{T0}^{T} \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2}\, dTx - T \int_{T0}^{T} \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx}\, dTx - T \int_{T0}^{T} \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx}\, dTx$$

In[37]:=
```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g1 *)
```

In[38]:=
```
cond = 0 == g1[T0]
```

Out[38]=
$0 == g11\,T0$

In[39]:=
```
g11 = 0;
```

RESULTAT :

In[40]:=
```
g1[T]
```

Out[40]=
$$-T \int_{T0}^{T} \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2}\, dTx - T \int_{T0}^{T} \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx}\, dTx - T \int_{T0}^{T} \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx}\, dTx$$

In[41]:=
```
X = g1[T] /.
   T ∫_T0^T Q1Exp[Tx]/Tx^2 dTx -> T ∫_T0^T Q1Exp′[Tx]/Tx dTx - Q1Exp[T]   (* intégration par parties *)
```

Out[41]=
$$-T \int_{T0}^{T} \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx}\, dTx - T \int_{T0}^{T} \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx}\, dTx - T \int_{T0}^{T} \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx}\, dTx + Q1Exp[T]$$

Déformation sphérique isotherme (chemin $C^{(2)}$)

In[42]:=
```
Chemin2 = {δ → 1}
```

Out[42]=
$\{\delta \to 1\}$

■ Tenseur des déformations

In[43]:=
```
B = Kv^(2/3) ∘ G;
```

■ Tenseur des contraintes

In[44]:=
```
σ2 = σ;
```

Vérification : le tenseur des contraintes est bien sphérique (son déviateur est nul):

```
In[45]:= (Dev[σ2] // Components) /. Chemin2
        Note: Components in CanonicalBasis
Out[45]= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

Calcul de la contrainte moyenne :

```
In[46]:= σmoy2 = I1[σ2] / 3 /. Chemin2 // Simplify
```

Out[46]= $\rho 0\,(g2^{(0,1)}[T, Kv] + g3^{(0,1,0)}[T, Kv, 1])$

■ Mesure mécanique : σ2Exp[T,Kv]

```
In[47]:= eq2 = σ2Exp[T, Kv] == σmoy2 // Simplify
```

Out[47]= $\sigma 2Exp[T, Kv] == \rho 0\,(g2^{(0,1)}[T, Kv] + g3^{(0,1,0)}[T, Kv, 1])$

■ Résolution de eq2 (on trouve g2)

```
In[48]:= sol = DSolve[eq2, g2, {T, Kv}]
```

Out[48]= $\left\{\left\{g2 \to \text{Function}\left[\{T, Kv\}, \int_1^{Kv} \frac{\sigma 2Exp[T, K\$1855] - \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T, K\$1855, 1]}{\rho 0}\, dK\$1855 + C[1][T]\right]\right\}\right\}$

```
In[49]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
            C[1] → g21  (* changement de nom de la fonction C[1] *) //
           ChVarMu[#, Kvx] &  (* changement de nom de la variable muette en Kvx *) //
          ArrangeInt
```

Out[49]= $g21[T] + \frac{\int_1^{Kv} \sigma 2Exp[T, Kvx]\, dKvx}{\rho 0} - \int_1^{Kv} g3^{(0,1,0)}[T, Kvx, 1]\, dKvx$

```
In[50]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g2 *)
In[51]:= g2[T, Kv]
```

Out[51]= $g21[T] + \frac{\int_1^{Kv} \sigma 2Exp[T, Kvx]\, dKvx}{\rho 0} - \int_1^{Kv} g3^{(0,1,0)}[T, Kvx, 1]\, dKvx$

Condition sur **g2 :**

```
In[52]:= cond = 0 == g2[T, 1]
Out[52]= 0 == g21[T]
In[53]:= sol = DSolve[cond, g21, T]
Out[53]= {{g21 → Function[{T}, 0]}}
In[54]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g21 *)
```

RESULTAT :

In[55]:= `g2[T, Kv]`

Out[55]= $\frac{\int_1^{Kv} \sigma 2Exp[T, Kvx]\, dKvx}{\rho 0} - \int_1^{Kv} g3^{(0,1,0)}[T, Kvx, 1]\, dKvx$

Déformation isovolume isotherme (chemin $C^{(3)}$)

■ Cinématique

On choisit une expérience de "glissement" simple, dont la cinématique est connue

■ champ de déplacement (x1, x2 et x3 sont les positions initiales des particules)

```
In[56]:= u = ( (Kv^(1/3) x1 - x1) ∘ e1 ⊕ (Kv^(1/3) x2 - x2) ∘ e2 ⊕ (Kv^(1/3) x3 - x3) ∘ e3 ) ⊕
           (γ Kv^(1/3) x2) ∘ e1;
```

Position actuelle des particules (le vecteur **OM** a été précédemment défini dans la section Préparations) :

```
In[57]:= xt = OM ⊕ u;
```

■ gradient de la transformation

```
In[58]:= F = Gradient[xt, SC] ; (* Gradient est un opérateur défini dans Tens3D *)
```

Composantes de **F** :

```
In[59]:= F // Components // MatrixForm

         Note: Components in CanonicalBasis
```

Out[59]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{1/3} & Kv^{1/3}\gamma & 0 \\ 0 & Kv^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{1/3} \end{pmatrix}$$

■ Tenseur de déformation

```
In[60]:= B = F.F^T ; (* "." et "^T " sont des opérateurs redéfinis dans Tens3D *)
```

Composantes de **B** :

```
In[61]:= B // Components // MatrixForm

         Note: Components in CanonicalBasis
```

Out[61]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3}(1+\gamma^2) & Kv^{2/3}\gamma & 0 \\ Kv^{2/3}\gamma & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

relation entre γ et δ

```
In[62]:= eq = δ == Sqrt[3] / 9 I1[B] ^ (3 / 2) / Kv  (* Définition de la distorsion stérique maximale *)
```

Out[62]= $\delta == \frac{(Kv^{2/3}\,(3+\gamma^2))^{3/2}}{3\sqrt{3}\,Kv}$

```
In[63]:= Solve[eq, γ] // Simplify
```

Out[63]= $\{\{\gamma \to -\sqrt{3}\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\}, \{\gamma \to \sqrt{3}\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\}, \{\gamma \to -\sqrt{-3-\frac{3}{2}\,i\,(-i+\sqrt{3})\,\delta^{2/3}}\},$
$\{\gamma \to \sqrt{-3-\frac{3}{2}\,i\,(-i+\sqrt{3})\,\delta^{2/3}}\}, \{\gamma \to -\sqrt{-3+\frac{3}{2}\,i\,(i+\sqrt{3})\,\delta^{2/3}}\}, \{\gamma \to \sqrt{-3+\frac{3}{2}\,i\,(i+\sqrt{3})\,\delta^{2/3}}\}\}$

Expression de γ en fonction de la variable d'état δ (on peut toujours choisir **e1** tel que $\gamma > 0$)

```
In[64]:= γ = √3 √(-1 + δ^(2/3));
```

Les composantes de **B** en fonction de δ sont :

```
In[65]:= B // Components // MatrixForm

         Note: Components in CanonicalBasis
```

Out[65]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3}\,(-2+3\,\delta^{2/3}) & \sqrt{3}\,Kv^{2/3}\sqrt{-1+\delta^{2/3}} & 0 \\ \sqrt{3}\,Kv^{2/3}\sqrt{-1+\delta^{2/3}} & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

■ Tenseur des contraintes

```
In[66]:= σ3 = σ;

In[67]:= compσ3 = σ3 // Components;

         Note: Components in CanonicalBasis
```

■ mesure mécanique τ3Exp[T,Kv,δ]

Contrainte de cisaillement dans le chemin $C^{(3)}$:

```
In[68]:= τ3 = compσ3[[1, 2]] // Simplify
```

Out[68]= $\frac{\sqrt{3}\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\,\delta^{1/3}\,\rho 0\,g3^{(0,0,1)}[T, Kv, \delta]}{Kv}$

```
In[69]:= eq3 = τ3Exp[T, Kv, δ] == τ3
```

Out[69]= $\tau 3Exp[T, Kv, \delta] == \frac{\sqrt{3}\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\,\delta^{1/3}\,\rho 0\,g3^{(0,0,1)}[T, Kv, \delta]}{Kv}$

■ résolution de eq3 (on trouve g3)

```
In[70]:= sol = DSolve[eq3, g3, {T , Kv, δ}] // Simplify
```

Out[70]= $\{\{g3 \to Function[\{T, Kv, \delta\}, \int_1^{\delta} \frac{Kv\,\tau 3Exp[T, Kv, K\$2070]}{\sqrt{3}\sqrt{-1+K\$2070^{2/3}}\,K\$2070^{1/3}\,\rho 0}\,dK\$2070 + C[1][T, Kv]]\}\}$

```
In[71]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
           C[1] → g31 // ChVarMu[#, δx] & // ArrangeInt
```

Out[71]= $g31[T, Kv] + \frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3Exp[T,Kv,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\, d\delta x}{\sqrt{3}\,\rho 0}$

```
In[72]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g3 *)
```

Condition sur **g3**

```
In[73]:= cond = 0 == g3[T, Kv, 1]
```

Out[73]= 0 == g31[T, Kv]

```
In[74]:= sol = DSolve[cond, g31, {T, Kv}]
```

Out[74]= {{g31 → Function[{T, Kv}, 0]}}

```
In[75]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g31 *)
```

RESULTAT :

```
In[76]:= g3[T, Kv, δ]
```

Out[76]= $\frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3Exp[T,Kv,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\, d\delta x}{\sqrt{3}\,\rho 0}$

Récapitulation

```
In[77]:= {g1[T], g1[T0]}
```

Out[77]= $\left\{-T \int_{T0}^{T} \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2}\, dTx,\ 0\right\}$

```
In[78]:= {g2[T, Kv], g2[T, 1]}
```

Out[78]= $\left\{\frac{\int_1^{Kv} \sigma 2Exp[T, Kvx]\, dKvx}{\rho 0},\ 0\right\}$

```
In[79]:= {g3[T, Kv, δ], g3[T, Kv, 1]}
```

Out[79]= $\left\{\frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3Exp[T,Kv,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\, d\delta x}{\sqrt{3}\,\rho 0},\ 0\right\}$

■ Fonctiond d'état

Energie libre massique de Helmholtz

```
In[80]:= ψ
```

Out[80]= $-T \int_{T0}^{T} \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2}\, dTx + \frac{\int_1^{Kv} \sigma 2Exp[T, Kvx]\, dKvx}{\rho 0} + \frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3Exp[T,Kv,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\, d\delta x}{\sqrt{3}\,\rho 0}$

Entropie massique

In[81]:= **s**

Out[81]= $$\int_{T0}^{T} \frac{\text{Q1Exp}[\text{Tx}]}{\text{Tx}^2}\, d\text{Tx} - \frac{\int_1^{\text{Kv}} \sigma\text{2Exp}^{(1,0)}[\text{T}, \text{Kvx}]\, d\text{Kvx}}{\rho 0} - \frac{\text{Kv} \int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}^{(1,0,0)}[\text{T},\text{Kv},\delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x}}{\sqrt{3}\,\rho 0} + \frac{\text{Q1Exp}[\text{T}]}{\text{T}}$$

Energie interne

In[82]:= **e = e // Simplify // Expand**

Out[82]= $$\frac{\int_1^{\text{Kv}} \sigma\text{2Exp}[\text{T}, \text{Kvx}]\, d\text{Kvx}}{\rho 0} + \frac{\text{Kv} \int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}[\text{T},\text{Kv},\delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x}}{\sqrt{3}\,\rho 0} - \frac{\text{T} \int_1^{\text{Kv}} \sigma\text{2Exp}^{(1,0)}[\text{T}, \text{Kvx}]\, d\text{Kvx}}{\rho 0} - \frac{\text{Kv T} \int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}^{(1,0,0)}[\text{T},\text{Kv},\delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x}}{\sqrt{3}\,\rho 0} + \text{Q1Exp}[\text{T}]$$

■ Résultats du modèle utiles pour un calcul numérique

Coefficients de la loi de comportement

In[83]:= **K0 = K0 // Expand**

Out[83]= $$\frac{\int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}[\text{T},\text{Kv},\delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x}}{\sqrt{3}} + \frac{\text{Kv} \int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}^{(0,1,0)}[\text{T},\text{Kv},\delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x}}{\sqrt{3}} + \sigma\text{2Exp}[\text{T}, \text{Kv}] - \frac{\delta^{2/3}\, \tau\text{3Exp}[\text{T}, \text{Kv}, \delta]}{\sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}}$$

In[84]:= **K1**

Out[84]= $$\frac{\tau\text{3Exp}[\text{T}, \text{Kv}, \delta]}{\sqrt{3}\,\text{Kv}^{2/3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}}$$

Dérivée particulaire de l'énergie interne

In[85]:= **ep = D[e, T] Tp + D[e, Kv] Kvp + D[e, δ] δp // Simplify // Collect[#, {Tp, Kvp, δp}] &**

Out[85]= $$\frac{1}{3\rho 0}\left(\text{Tp}\left(-3\,\text{T}\int_1^{\text{Kv}} \sigma\text{2Exp}^{(2,0)}[\text{T}, \text{Kvx}]\, d\text{Kvx} - \sqrt{3}\,\text{Kv T}\int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}^{(2,0,0)}[\text{T}, \text{Kv}, \delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x} + 3\,\rho 0\,\text{Q1Exp}'[\text{T}]\right)\right) + \frac{1}{3\rho 0}\left(\text{Kvp}\left(\sqrt{3}\int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}[\text{T}, \text{Kv}, \delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x} + \sqrt{3}\,\text{Kv}\int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}^{(0,1,0)}[\text{T}, \text{Kv}, \delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x} - \sqrt{3}\,\text{T}\int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}^{(1,0,0)}[\text{T}, \text{Kv}, \delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x} - \sqrt{3}\,\text{Kv T}\int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}^{(1,1,0)}[\text{T}, \text{Kv}, \delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x} + 3\,\sigma\text{2Exp}[\text{T}, \text{Kv}] - 3\,\text{T}\,\sigma\text{2Exp}^{(1,0)}[\text{T}, \text{Kv}]\right)\right) + \frac{\text{Kv}\,\delta\text{p}\,(\tau\text{3Exp}[\text{T}, \text{Kv}, \delta] - \text{T}\,\tau\text{3Exp}^{(1,0,0)}[\text{T}, \text{Kv}, \delta])}{\sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\,\delta^{1/3}\,\rho 0}$$

Hypothèse supplémentaire facultative

Constatation : la contrainte moyenne d'un état quelconque dépend de la contrainte tangentielle **τ3Exp** :

In[86]:= **σmoy3 = I1[σ3] / 3 // Simplify**

Out[86]= $$\frac{\int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}[\text{T},\text{Kv},\delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x}}{\sqrt{3}} + \frac{\text{Kv} \int_1^{\delta} \frac{\tau\text{3Exp}^{(0,1,0)}[\text{T},\text{Kv},\delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\, d\delta\text{x}}{\sqrt{3}} + \sigma\text{2Exp}[\text{T}, \text{Kv}]$$

■ Hypothèse 2 : la contrainte moyenne ne varie pas pendant la déformation isovolume

In[87]:= `eq = 0 == D[σmoy3, δ] // Simplify`

Out[87]= $\tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta] + Kv\, \tau 3\text{Exp}^{(0,1,0)}[T, Kv, \delta] == 0$

In[88]:= `sol = DSolve[eq, τ3Exp, {T, Kv, δ}]`

Out[88]= $\left\{\left\{\tau 3\text{Exp} \to \text{Function}\left[\{T, Kv, \delta\}, \frac{C[1][T, \delta]}{Kv}\right]\right\}\right\}$

In[89]:= `sol = sol /. C[1] → τ3Exp1 (* Changement de nom de la fonction C[1] *)`

Out[89]= $\left\{\left\{\tau 3\text{Exp} \to \text{Function}\left[\{T, Kv, \delta\}, \frac{\tau 3\text{Exp1}[T, \delta]}{Kv}\right]\right\}\right\}$

In[90]:= `hypothese2 = sol[[1]]`

Out[90]= $\left\{\tau 3\text{Exp} \to \text{Function}\left[\{T, Kv, \delta\}, \frac{\tau 3\text{Exp1}[T, \delta]}{Kv}\right]\right\}$

In[91]:= `τ3Exp[T, Kv, δ] /. hypothese2`

Out[91]= $\frac{\tau 3\text{Exp1}[T, \delta]}{Kv}$

Sous l'hypothèse 2, il suffit de faire l'expérience $C^{(3)}$ sans dilatation sphérique initiale : on mesure **τ3ExpKv1[T,δ]**

In[92]:= `g3[T, Kv, δ] /. hypothese2 // ArrangeInt`

Out[92]= $\frac{\int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp1}[T, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\, \delta x^{1/3}}\, d\delta x}{\sqrt{3}\, \rho 0}$

In[93]:= `K0 /. hypothese2 // ArrangeInt`

Out[93]= $\sigma 2\text{Exp}[T, Kv] - \frac{\delta^{2/3}\, \tau 3\text{Exp1}[T, \delta]}{\sqrt{3}\, Kv\, \sqrt{-1+\delta^{2/3}}}$

In[94]:= `K1 /. hypothese2 // ArrangeInt`

Out[94]= $\frac{\tau 3\text{Exp1}[T, \delta]}{\sqrt{3}\, Kv^{5/3}\, \sqrt{-1+\delta^{2/3}}}$

In[95]:= `ep /. hypothese2 // Expand // ArrangeInt // Collect[#, {Tp, Kvp, δp}] &`

Out[95]= $Tp\left(-\frac{T\int_1^{Kv} \sigma 2\text{Exp}^{(2,0)}[T, Kvx]\, dKvx}{\rho 0} - \frac{T\int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp1}^{(2,0)}[T, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\, \delta x^{1/3}}\, d\delta x}{\sqrt{3}\, \rho 0} + Q1\text{Exp}'[T]\right) +$
$Kvp\left(\frac{\sigma 2\text{Exp}[T, Kv]}{\rho 0} - \frac{T\, \sigma 2\text{Exp}^{(1,0)}[T, Kv]}{\rho 0}\right) + \delta p\left(\frac{\tau 3\text{Exp1}[T, \delta]}{\sqrt{3}\, \sqrt{-1+\delta^{2/3}}\, \delta^{1/3}\, \rho 0} - \frac{T\, \tau 3\text{Exp1}^{(1,0)}[T, \delta]}{\sqrt{3}\, \sqrt{-1+\delta^{2/3}}\, \delta^{1/3}\, \rho 0}\right)$

Remplacement du chemin $C^{(1)} = C^{(5)} + C^{(6)}$

■ Dilatation libre (chemin $C^{(5)}$)

In[96]:= `B = (Kv5Exp[T]^(2/3)) ∘ G;`

In[97]:= `σ5 = σ;`

In[98]:=
```
σmoy5 = I1[σ5] / 3 // Expand
```

Out[98]=

$$\frac{\int_1^{\delta} \frac{\tau 3\mathrm{Exp}[T,Kv,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{Kv\int_1^{\delta} \frac{\tau 3\mathrm{Exp}^{(0,1,0)}[T,Kv,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2\mathrm{Exp}[T,Kv] - \frac{\delta^{2/3}\,\tau 3\mathrm{Exp}[T,Kv,\delta]}{\sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}} + \frac{\left(\frac{Kv5Exp[T]}{Kv}\right)^{2/3}\tau 3\mathrm{Exp}[T,Kv,\delta]}{\sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}}$$

■ équation mécanique (on mesure la dilatation thermique à contrainte nulle : `Kv5Exp[T]`)

In[99]:=
```
eq5meca = 0 == (σmoy5 /. Kv -> Kv5Exp[T] // FullSimplify) /. δ -> 1
```

Out[99]=

$$0 == \sigma 2\mathrm{Exp}[T, Kv5Exp[T]]$$

■ équation thermique (conservation de l'énergie, forme globale, le travail reçu est nul)

In[100]:=
```
eq5energie = Q5Exp[T] == (e /. Kv → Kv5Exp[T] /. δ → 1)
```

Out[100]=

$$Q5Exp[T] == \frac{\int_1^{Kv5Exp[T]} \sigma 2\mathrm{Exp}[T, Kvx]\,dKvx}{\rho 0} - \frac{T\int_1^{Kv5Exp[T]} \sigma 2\mathrm{Exp}^{(1,0)}[T, Kvx]\,dKvx}{\rho 0} + Q1Exp[T]$$

Il y a donc une relation entre **`Q5Exp[T]`** et **`Q1Exp[T]`**

On remplace la mesure de **`Q1Exp`** par celle de **`Q5Exp`**

In[101]:=
```
sol = DSolve[eq5energie, Q1Exp, T]
```

Out[101]=

$$\left\{\left\{Q1Exp \to \mathrm{Function}\left[\{T\}, \frac{1}{\rho 0}\left(-\int_1^{Kv5Exp[T]} \sigma 2\mathrm{Exp}[T, Kvx]\,dKvx + T\int_1^{Kv5Exp[T]} \sigma 2\mathrm{Exp}^{(1,0)}[T, Kvx]\,dKvx + \rho 0\, Q5Exp[T]\right)\right]\right\}\right\}$$

In[102]:=
```
sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] // Expand
```

Out[102]=

$$-\frac{\int_1^{Kv5Exp[T]} \sigma 2\mathrm{Exp}[T, Kvx]\,dKvx}{\rho 0} + \frac{T\int_1^{Kv5Exp[T]} \sigma 2\mathrm{Exp}^{(1,0)}[T, Kvx]\,dKvx}{\rho 0} + Q5Exp[T]$$

In[103]:=
```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution Q1Exp *)
```

Traction simple dans la direction e1 (chemin $C^{(6)}$)

In[104]:=
```
$Assumptions = $Assumptions && λ1 > 0 && λ2 > 0
```

Out[104]=

$$T > 0 \,\&\&\, T0 > 0 \,\&\&\, Kv > 0 \,\&\&\, \delta > 1 \,\&\&\, \rho 0 > 0 \,\&\&\, \lambda 1 > 0 \,\&\&\, \lambda 2 > 0$$

■ Tenseur de déformation en traction simple :

In[105]:=

```
V = DefineTensor[{{λ1, 0, 0}, {0, λ2, 0}, {0, 0, λ2}}, {1, 1}, B0];
```

In[106]:=

```
V // Components // MatrixForm
```

```
Note: Components in CanonicalBasis
```

Out[106]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 2 \end{pmatrix}$$

Dilatation volumique en traction simple :

In[107]:=

```
Kv6 = I3[V]
```

Out[107]=

$$\lambda 1\, \lambda 2^2$$

Distorsion stérique en traction simple :

In[108]:=

```
δ6 = Sqrt[3] / 9 (I1[V]^2 - 2 I2[V])^(3 / 2) / Kv6 // Simplify
```

Out[108]=

$$\frac{(\lambda 1^2 + 2\, \lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\, \lambda 1\, \lambda 2^2}$$

Tenseur de déformation **B** en traction simple :

In[109]:=

```
B = V.V;
```

■ Composantes du tenseur des contraintes en traction simple :

In[110]:=

```
σ6 = σ;
```

In[111]:=

```
compσ6 = (σ6 // Components) /. Kv → Kv6 /. δ → δ6 ;
```

```
Note: Components in CanonicalBasis
```

Vérification : les composantes du tenseur des contraintes sont bien diagonales :

In[112]:=

```
{compσ6[[1, 2]], compσ6[[1, 3]], compσ6[[2, 3]]}
```

Out[112]=

```
{0, 0, 0}
```

Vérification ; les contraintes principales transversales sont bien égales :

In[113]:=

```
compσ6[[2, 2]] == compσ6[[3, 3]]
```

Out[113]=

```
True
```

■ Conditions à vérifier lors d'un essai de traction simple

Le tenseur des contraintes doit être uniaxial

In[114]:=

```
cond1 = 0 == compσ6[[2, 2]]
```

Out[114]=

$$0 == \frac{\int_1^{\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}} \frac{\tau 3\mathrm{Exp}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda 1\,\lambda 2^2 \int_1^{\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}} \frac{\tau 3\mathrm{Exp}^{(0,1,0)}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2\mathrm{Exp}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2] + \frac{\lambda 2^2\,\tau 3\mathrm{Exp}\left[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}\right]}{\sqrt{3}\,(\lambda 1\,\lambda 2^2)^{2/3}\sqrt{-1+\frac{1}{3}\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}}} - \frac{\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}\tau 3\mathrm{Exp}\left[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}\right]}{3\sqrt{3}\sqrt{-1+\frac{1}{3}\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}}}$$

La contrainte de traction est fonction des autres expériences

In[115]:=

```
cond2 = σ6Exp == compσ6[[1, 1]]
```

Out[115]=

$$\sigma 6\mathrm{Exp} == \frac{\int_1^{\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}} \frac{\tau 3\mathrm{Exp}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda 1\,\lambda 2^2 \int_1^{\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}} \frac{\tau 3\mathrm{Exp}^{(0,1,0)}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2\mathrm{Exp}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2] + \frac{\lambda 1^2\,\tau 3\mathrm{Exp}\left[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}\right]}{\sqrt{3}\,(\lambda 1\,\lambda 2^2)^{2/3}\sqrt{-1+\frac{1}{3}\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}}} - \frac{\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}\tau 3\mathrm{Exp}\left[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}\right]}{3\sqrt{3}\sqrt{-1+\frac{1}{3}\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}}}$$

Autre expression de **cond1** :

In[116]:=

$$\mathbf{sol} = \mathbf{Solve}\left[\mathbf{cond1},\ \tau 3\mathrm{Exp}\left[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2,\ \frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}\right]\right]$$

Out[116]=

$$\left\{\left\{\tau 3\mathrm{Exp}\left[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2,\ \frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}\right] \to \left(\frac{\int_1^{\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}} \frac{\tau 3\mathrm{Exp}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda 1\,\lambda 2^2 \int_1^{\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}} \frac{\tau 3\mathrm{Exp}^{(0,1,0)}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2\mathrm{Exp}[T,\lambda 1\,\lambda 2^2]\right) \Big/ \left(-\frac{\lambda 2^2}{\sqrt{3}\,(\lambda 1\,\lambda 2^2)^{2/3}\sqrt{-1+\frac{1}{3}\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}}} + \frac{\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}}{3\sqrt{3}\sqrt{-1+\frac{1}{3}\left(\frac{(\lambda 1^2+2\lambda 2^2)^{3/2}}{\lambda 1\,\lambda 2^2}\right)^{2/3}}}\right)\right\}\right\}$$

In[117]:=

```
cond11 = sol[[1]] // Simplify
```

Out[117]=

$$\left\{\tau 3\text{Exp}\left[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2,\ \frac{\left(\lambda 1^2+2\,\lambda 2^2\right)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}\right] \to \frac{1}{\lambda 1^2-\lambda 2^2}\left(\left(\lambda 1\,\lambda 2^2\right)^{2/3}\sqrt{-3+\frac{\lambda 1^2+2\,\lambda 2^2}{\lambda 1^{2/3}\,\lambda 2^{4/3}}}\left(\sqrt{3}\int_1^{\frac{\left(\lambda 1^2+2\,\lambda 2^2\right)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}}\frac{\tau 3\text{Exp}[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2,\ \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x+\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2\int_1^{\frac{\left(\lambda 1^2+2\,\lambda 2^2\right)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}}\frac{\tau 3\text{Exp}^{(0,1,0)}[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2,\ \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x+3\,\sigma 2\text{Exp}[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2]\right)\right)\right\}$$

Autre expression de **cond2** :

In[118]:=

```
cond22 = cond2 /. cond11 // Simplify
```

Out[118]=

$$\sigma 6\text{Exp} == \sqrt{3}\int_1^{\frac{\left(\lambda 1^2+2\,\lambda 2^2\right)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}}\frac{\tau 3\text{Exp}[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2,\ \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x+\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2\int_1^{\frac{\left(\lambda 1^2+2\,\lambda 2^2\right)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}}\frac{\tau 3\text{Exp}^{(0,1,0)}[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2,\ \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x+3\,\sigma 2\text{Exp}[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2]$$

■ Les mêmes conditions sous l'hypothèse 2

In[119]:=

```
cond11 /. hypothese2 // ArrangeInt
```

Out[119]=

$$\left\{\frac{\tau 3\text{Exp1}\left[T,\ \frac{\left(\lambda 1^2+2\,\lambda 2^2\right)^{3/2}}{3\sqrt{3}\,\lambda 1\,\lambda 2^2}\right]}{\lambda 1\,\lambda 2^2} \to \frac{3\,\left(\lambda 1\,\lambda 2^2\right)^{2/3}\sqrt{-3+\frac{\lambda 1^2+2\,\lambda 2^2}{\lambda 1^{2/3}\,\lambda 2^{4/3}}}\,\sigma 2\text{Exp}[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2]}{\lambda 1^2-\lambda 2^2}\right\}$$

In[121]:=

```
cond22 /. hypothese2 // ArrangeInt
```

Out[121]=

$$\sigma 6\text{Exp} == 3\,\sigma 2\text{Exp}[T,\ \lambda 1\,\lambda 2^2]$$

Un exemple d'idéalisation des courbes expérimentales

■ Cisaillement cinématique sans Kv initial idéalisé (on suppose l'hypothèse 2)

In[120]:=

```
$Assumptions = $Assumptions && μ0 > 0
```

Out[120]=

$$T > 0\ \&\&\ T0 > 0\ \&\&\ Kv > 0\ \&\&\ \delta > 1\ \&\&\ \rho 0 > 0\ \&\&\ \lambda 1 > 0\ \&\&\ \lambda 2 > 0\ \&\&\ \mu 0 > 0$$

In[121]:=

```
τ3Exp1 = Function[{T, δ}, μ0 e^(b (1 - T/T0)) γ]; (* proportionnalité à γ *)
```

In[122]:=

```
τ3Exp1[T, δ]
```

Out[122]=

$$\sqrt{3}\, e^{b\left(1-\frac{T}{T0}\right)} \sqrt{-1+\delta^{2/3}}\, \mu 0$$

Sous l'hypothèse facultative, la contrainte tangentielle dans le chemin $C^{(3)}$ est :

In[123]:=

```
τ3Exp[T, Kv, δ] /. hypothese2
```

Out[123]=

$$\frac{\sqrt{3}\, e^{b\left(1-\frac{T}{T0}\right)} \sqrt{-1+\delta^{2/3}}\, \mu 0}{Kv}$$

■ Compression/dilatation sphérique (chemin $C^{(2)}$) idéalisée

In[124]:=

```
$Assumptions = $Assumptions && ξ0 > 0
```

Out[124]=

$T > 0 \,\&\&\, T0 > 0 \,\&\&\, Kv > 0 \,\&\&\, \delta > 1 \,\&\&\, \rho 0 > 0 \,\&\&\, \lambda 1 > 0 \,\&\&\, \lambda 2 > 0 \,\&\&\, \mu 0 > 0 \,\&\&\, \xi 0 > 0$

In[125]:=

```
σ2Exp = Function[{T, Kv}, σ1Exp[T] + ξ0 e^(a (1 - T/T0)) Log[Kv]]
```

Out[125]=

$\text{Function}\left[\{T, Kv\}, \sigma 1\text{Exp}[T] + \xi 0\, e^{a\left(1-\frac{T}{T0}\right)} \text{Log}[Kv]\right]$

■ Dilatation libre (contrainte nulle) idéalisée

In[126]:=

```
$Assumptions = $Assumptions && Cp > 0
```

Out[126]=

$T > 0 \,\&\&\, T0 > 0 \,\&\&\, Kv > 0 \,\&\&\, \delta > 1 \,\&\&\, \rho 0 > 0 \,\&\&\, \lambda 1 > 0 \,\&\&\, \lambda 2 > 0 \,\&\&\, \mu 0 > 0 \,\&\&\, \xi 0 > 0 \,\&\&\, Cp > 0$

■ chaleur massique à contrainte nulle idéalisée

In[127]:=

```
Q5Exp = Function[T, Cp (T - T0)];
```

■ dilatation linéique libre idéalisée

In[128]:=

```
$Assumptions = $Assumptions && β > 0 && 1 + β (T - T0) > 0
```

Out[128]=

$T > 0 \,\&\&\, T0 > 0 \,\&\&\, Kv > 0 \,\&\&\, \delta > 1 \,\&\&\, \rho 0 > 0 \,\&\&\, \lambda 1 > 0 \,\&\&$
$\lambda 2 > 0 \,\&\&\, \mu 0 > 0 \,\&\&\, \xi 0 > 0 \,\&\&\, Cp > 0 \,\&\&\, \beta > 0 \,\&\&\, 1 + (T - T0)\, \beta > 0$

In[129]:=

```
Kl5Exp = Function[T, 1 + β (T - T0)];
```

■ dilatation volumique libre idéalisée

In[130]:=

```
Kv5Exp = Function[T, Kl5Exp[T]^3];
```

■ Condition de contrainte nulle dans la dilatation libre

In[131]:=

```
eq = σ2Exp[T, Kv5Exp[T]] == 0
```

Out[131]=

$$e^{a\left(1-\frac{T}{T0}\right)}\,\xi 0\,\mathrm{Log}\left[\left(1+(T-T0)\,\beta\right)^3\right]+\sigma 1\mathrm{Exp}[T]==0$$

On en déduit la fonction **σ1Exp[T]** :

In[132]:=

```
sol = DSolve[eq, σ1Exp, T]
```

Out[132]=

$$\left\{\left\{\sigma 1\mathrm{Exp}\to \mathrm{Function}\left[\{T\},\,-e^{a\left(1-\frac{T}{T0}\right)}\,\xi 0\,\mathrm{Log}\left[\left(1+(T-T0)\,\beta\right)^3\right]\right]\right\}\right\}$$

In[133]:=

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* assignation de la solution σ1Exp[T] *)
```

In[134]:=

```
σ1Exp[T]
```

Out[134]=

$$-e^{a\left(1-\frac{T}{T0}\right)}\,\xi 0\,\mathrm{Log}\left[\left(1+(T-T0)\,\beta\right)^3\right]$$

■ Récapitulation des résultats utiles sous cette idéalisation

■ Energie interne

In[135]:=

```
eId = e /. hypothese2 // Collect[#, {Cp, ξ0, μO, ρ0}, Simplify] &
```

Out[135]=

$$\mathrm{Cp}\,(T-T0)+\frac{3\,e^{b-\frac{b\,T}{T0}}\,(b\,T+T0)\,\left(-1+\delta^{2/3}\right)\mu 0}{T0\,\rho 0}-\frac{1}{T0\,(-1-T\,\beta+T0\,\beta)\,\rho 0}\left(e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,\xi 0\,\left((-\mathrm{Kv}+(1+T\,\beta-T0\,\beta)^3)\,(a\,T\,(1+T\,\beta-T0\,\beta)-T0\,(-1+2\,T\,\beta+T0\,\beta))+\mathrm{Kv}\,(a\,T+T0)\,(1+T\,\beta-T0\,\beta)\,\mathrm{Log}[\mathrm{Kv}]-3\,\mathrm{Kv}\,(a\,T+T0)\,(1+T\,\beta-T0\,\beta)\,\mathrm{Log}[1+T\,\beta-T0\,\beta]\right)\right)$$

■ chaleur massique à contrainte nulle idéalisée

In[138]:=

```
Q5Exp = Function[T, Cp (T - T0)];
```

■ dilatation linéique libre idéalisée

In[139]:=

```
$Assumptions = $Assumptions && β > 0 && 1 + β (T - T0) > 0
```

Out[139]=

$T > 0 \,\&\&\, T0 > 0 \,\&\&\, Kv > 0 \,\&\&\, \delta > 1 \,\&\&\, \rho 0 > 0 \,\&\&\, \lambda 1 > 0 \,\&\&\, \lambda 2 > 0 \,\&\&\, \mu 0 > 0 \,\&\&\, \xi 0 > 0 \,\&\&\, Cp > 0 \,\&\&\, \beta > 0 \,\&\&\, 1 + (T - T0)\, \beta > 0$

In[140]:=

```
Kl5Exp = Function[T, 1 + β (T - T0)];
```

■ dilatation volumique libre idéalisée

In[141]:=

```
Kv5Exp = Function[T, Kl5Exp[T]^3];
```

■ Condition de contrainte nulle dans la dilatation libre

In[142]:=

```
eq = σ2Exp[T, Kv5Exp[T]] == 0
```

Out[142]=

$e^{a\left(1-\frac{T}{T0}\right)}\, \xi 0\, \mathrm{Log}\left[(1 + (T - T0)\, \beta)^3\right] + \sigma 1\mathrm{Exp}[T] == 0$

On en déduit la fonction **σ1Exp[T]** :

In[143]:=

```
sol = DSolve[eq, σ1Exp, T]
```

Out[143]=

$\left\{\left\{\sigma 1\mathrm{Exp} \to \mathrm{Function}\left[\{T\}, -e^{a\left(1-\frac{T}{T0}\right)}\, \xi 0\, \mathrm{Log}\left[(1 + (T - T0)\, \beta)^3\right]\right]\right\}\right\}$

In[144]:=

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* assignation de la solution σ1Exp[T] *)
```

In[145]:=

```
σ1Exp[T]
```

Out[145]=

$-e^{a\left(1-\frac{T}{T0}\right)}\, \xi 0\, \mathrm{Log}\left[(1 + (T - T0)\, \beta)^3\right]$

■ Entropie

In[149]:=

```
sId = - D[ψId, T]
```

Out[149]=

$$\frac{3\,b\,e^{b-\frac{b\,T}{T0}}\,(-1+\delta^{2/3})\,\mu 0}{T0\,\rho 0}-\frac{1}{\rho 0}\left(e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\left(-\frac{3\,\beta}{1+T\,\beta-T0\,\beta}-\frac{3\,(-1+Kv)\,\beta}{1+T\,\beta-T0\,\beta}+(T-T0)\,\beta\,((T-T0)\,\beta^2+\beta\,(3+T\,\beta-T0\,\beta))+\beta\,(3+(T-T0)\,\beta\,(3+T\,\beta-T0\,\beta))\right)\xi 0\right)+Cp\,Log\left[\frac{T}{T0}\right]+\frac{1}{T0\,\rho 0}\left(a\,e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,\xi 0\,((T-T0)\,\beta\,(3+(T-T0)\,\beta\,(3+T\,\beta-T0\,\beta))+Kv\,Log[Kv]-3\,Log[1+T\,\beta-T0\,\beta]-(-1+Kv)\,(1+3\,Log[1+T\,\beta-T0\,\beta]))\right)$$

■ Loi de comportement

In[153]:=

```
K0Id = K0 /. hypothese2 // Collect[#, {μ0, ξ0, Kv}, Simplify] &
```

Out[153]=

$$-\frac{e^{b-\frac{b\,T}{T0}}\,\delta^{2/3}\,\mu 0}{Kv}+e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,\xi 0\,(Log[Kv]-3\,Log[1+T\,\beta-T0\,\beta])$$

In[154]:=

```
K1Id = K1 /. hypothese2
```

Out[154]=

$$\frac{e^{b\,(1-\frac{T}{T0})}\,\mu 0}{Kv^{5/3}}$$

■ Dérivée particulaire de l'énergie interne massique

In[158]:=

```
epId = D[eId, T] Tp + D[eId, Kv] Kvp + D[eId, δ] δp //
  Collect[#, {Tp, Kvp, δp, Cp, ρ0, ξ0, Log[Kv], Log[1 + T β - T0 β]}, Simplify] &
```

Out[158]=

$$\frac{2\,e^{b-\frac{b\,T}{T0}}\,(b\,T+T0)\,\delta p\,\mu 0}{T0\,\delta^{1/3}\,\rho 0}+\frac{Kvp\,\xi 0\left(\frac{3\,e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,T\,\beta}{1+T\,\beta-T0\,\beta}+\frac{e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,(a\,T+T0)\,Log[Kv]}{T0}-\frac{3\,e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,(a\,T+T0)\,Log[1+T\,\beta-T0\,\beta]}{T0}\right)}{\rho 0}+Tp\left(Cp+\frac{1}{\rho 0}\left(-\frac{3\,b^2\,e^{b-\frac{b\,T}{T0}}\,T\,(-1+\delta^{2/3})\,\mu 0}{T0^2}+\xi 0\left(\frac{1}{T0^2\,(1+T\,\beta-T0\,\beta)^2}\left(e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,(3\,Kv\,T0\,(a\,T+T0)\,\beta\,(-1-T\,\beta+T0\,\beta)-T0\,(-1-T\,\beta+T0\,\beta)\,(a+2\,a\,T\,\beta-2\,T0\,\beta-a\,T0\,\beta)\,(-Kv+(1+T\,\beta-T0\,\beta)^3)-T0\,\beta\,(-Kv+(1+T\,\beta-T0\,\beta)^3)\,(a\,T\,(1+T\,\beta-T0\,\beta)-T0\,(-1+2\,T\,\beta+T0\,\beta))+a\,(-1-T\,\beta+T0\,\beta)\,(-Kv+(1+T\,\beta-T0\,\beta)^3)\,(a\,T\,(1+T\,\beta-T0\,\beta)-T0\,(-1+2\,T\,\beta+T0\,\beta))+3\,T0\,\beta\,(-1-T\,\beta+T0\,\beta)^3\,(-a\,T\,(1+T\,\beta-T0\,\beta)+T0\,(-1+2\,T\,\beta+T0\,\beta)))-\frac{a^2\,e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,Kv\,T\,Log[Kv]}{T0^2}+\frac{3\,a^2\,e^{a-\frac{a\,T}{T0}}\,Kv\,T\,Log[1+T\,\beta-T0\,\beta]}{T0^2}\right)\right)\right)$$

■ Si on suppose en plus que les coefficients indépendants de la température ...

In[159]:=

```
eId /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &
```

Out[159]=

$$\mathrm{Cp}\,(\mathrm{T}-\mathrm{T0})+\frac{3\,(-1+\delta^{2/3})\,\mu 0}{\rho 0}-\frac{1}{(-1-\mathrm{T}\,\beta+\mathrm{T0}\,\beta)\,\rho 0}\,(\xi 0\,(-(-1+2\,\mathrm{T}\,\beta+\mathrm{T0}\,\beta)\,(-\mathrm{Kv}+(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)^3)+\mathrm{Kv}\,(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)\,\mathrm{Log}[\mathrm{Kv}]-3\,\mathrm{Kv}\,(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)\,\mathrm{Log}[1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta]))$$

In[160]:=

```
sId /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &
```

Out[160]=

$$-\frac{3\,\beta\,(-\mathrm{Kv}+(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)^3)\,\xi 0}{(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)\,\rho 0}+\mathrm{Cp}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T0}}\right]$$

In[161]:=

```
ψId /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &
```

Out[161]=

$$\frac{3\,(-1+\delta^{2/3})\,\mu 0}{\rho 0}-\mathrm{Cp}\left(-\mathrm{T}+\mathrm{T0}+\mathrm{T}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T0}}\right]\right)+\frac{1}{\rho 0}\,(\xi 0\,((\mathrm{T}-\mathrm{T0})\,\beta\,(3+(\mathrm{T}-\mathrm{T0})\,\beta\,(3+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta))+\mathrm{Kv}\,\mathrm{Log}[\mathrm{Kv}]-3\,\mathrm{Log}[1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta]-(-1+\mathrm{Kv})\,(1+3\,\mathrm{Log}[1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta])))$$

In[162]:=

```
K0Id /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &
```

Out[162]=

$$-\frac{\delta^{2/3}\,\mu 0}{\mathrm{Kv}}+\xi 0\,(\mathrm{Log}[\mathrm{Kv}]-3\,\mathrm{Log}[1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta])$$

In[163]:=

```
K1Id /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &
```

Out[163]=

$$\frac{\mu 0}{\mathrm{Kv}^{5/3}}$$

■ Dérivée particulaire de l'énergie interne massique

In[164]:=

```
epId2 = epId /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &
```

Out[164]=

$$\mathrm{Tp}\left(\mathrm{Cp}-\frac{3\,\mathrm{T}\,\beta^2\,(\mathrm{Kv}+2\,(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)^3)\,\xi 0}{(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)^2\,\rho 0}\right)+\frac{2\,\delta\mathrm{p}\,\mu 0}{\delta^{1/3}\,\rho 0}+\frac{\mathrm{Kvp}\,\xi 0\,\left(\frac{3\,\mathrm{T}\,\beta}{1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta}+\mathrm{Log}[\mathrm{Kv}]-3\,\mathrm{Log}[1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta]\right)}{\rho 0}$$

Coefficient de **Tp**

In[165]:=

```
Coefficient[epId2, Tp] // Expand // Collect [#, {ξ0, ρ0, Kv}, Factor] &
```

Out[165]=

$$\mathrm{Cp}+\frac{\left(-\frac{3\,\mathrm{Kv}\,\mathrm{T}\,\beta^2}{(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)^2}-6\,\mathrm{T}\,\beta^2\,(1+\mathrm{T}\,\beta-\mathrm{T0}\,\beta)\right)\,\xi 0}{\rho 0}$$

Coefficient de **Kvp**

In[166]:=

```
Coefficient[epId2, Kvp] // Expand //
 Collect [#, {ρ0, ξ0, Log[Kv], Log[1 + T β - T0 β]}, Simplify] &
```

Out[166]=

$$\frac{\xi 0 \left(\frac{3\,T\,\beta}{1+T\,\beta-T0\,\beta}+\mathrm{Log}[Kv]-3\,\mathrm{Log}[1+T\,\beta-T0\,\beta]\right)}{\rho 0}$$

Coefficient de **δp**

In[167]:=

```
Coefficient[epId2, δp]
```

Out[167]=

$$\frac{2\,\mu 0}{\delta^{1/3}\,\rho 0}$$

G

Calculs du chapitre 4

Les feuilles de calcul reproduites dans les pages qui suivent décrivent le détail des calculs d'intégration des systèmes différentiels du chapitre 4 [p. 59] (Pseudo-élasticité de Hooke).

Elles sont exécutables dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA® version 5.2.

Ces feuilles de calcul sont largement commentées. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire les feuilles de calcul dans son propre langage.

Recherche d'une énergie libre de Hooke

```
Off[General::spell]
```

```
$Assumptions = $Assumptions && T > 0 && ϵ1 ∈ Reals && ϵ2 ∈ Reals && ϵ3 ∈ Reals
```

$T > 0 \,\&\&\, \epsilon 1 \in \text{Reals} \,\&\&\, \epsilon 2 \in \text{Reals} \,\&\&\, \epsilon 3 \in \text{Reals}$

Système d'équations à résoudre

```
eq1 = 0 == -2 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] + D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3]
```

$0 == \psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] - 2\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3]$

```
eq2 = 2 μ == ρ0 (1 - ϵ1)
   (2 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ1] + (2 ϵ1 - 1) D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] - ϵ1 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3])
```

$2\,\mu == (1 - \epsilon 1)\,\rho 0$
$\quad (-\epsilon 1\,\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + (-1 + 2\,\epsilon 1)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + 2\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$

```
eq3 = λ ϵ1 - (3 λ + 2 μ) α (T - T0) == ρ0 (1 - ϵ1)
   (D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ1] + ϵ1 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] + (ϵ2 + 2 ϵ3) D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3])
```

$\epsilon 1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) ==$
$\quad (1 - \epsilon 1)\,\rho 0\,((\epsilon 2 + 2\,\epsilon 3)\,\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + \epsilon 1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$

Résolution

- **Elimination de D[ψ[T,ϵ1,ϵ2,ϵ3],ϵ3]**

```
sol1 = Solve[eq1, D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3]]
```

$\{\{\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] \to 2\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3]\}\}$

```
eq21 = eq2 /. sol1[[1]]
```

$2\,\mu == (1 - \epsilon 1)\,\rho 0$
$\quad (-2\,\epsilon 1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + (-1 + 2\,\epsilon 1)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + 2\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$

```
eq31 = eq3 /. sol1[[1]]
```

$\epsilon 1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) == (1 - \epsilon 1)\,\rho 0$
$\quad (\epsilon 1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + 2\,(\epsilon 2 + 2\,\epsilon 3)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$

- **Elimination de D[ψ[T,ϵ1,ϵ2,ϵ3],ϵ2]**

```
sol2 = Solve[eq21, D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2]]
```

$$\left\{\left\{\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] \to \frac{2\,(\mu - \rho 0\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + \epsilon 1\,\rho 0\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])}{(-1 + \epsilon 1)\,\rho 0}\right\}\right\}$$

```
eq32 = eq31 /. sol2[[1]] // Map[Simplify, #] &
```

$$\epsilon 1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) == \frac{1}{-1 + \epsilon 1}$$
$$(1 - \epsilon 1)\,(2\,(\epsilon 1 + 2\,\epsilon 2 + 4\,\epsilon 3)\,\mu + (-1 + \epsilon 1)\,(1 + 2\,\epsilon 1 + 4\,\epsilon 2 + 8\,\epsilon 3)\,\rho 0\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$$

Résolution de eq3 (eq32)

```
sol = DSolve[eq32, ψ, {T, ϵ1, ϵ2, ϵ3}]
```

$$\left\{\left\{\psi \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{1}{2\,(3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\rho 0}\,(2\,((1-3\,T\,\alpha+3\,T0\,\alpha)\,\lambda+2\,(1-T\,\alpha+T0\,\alpha+2\,\epsilon 2+4\,\epsilon 3)\,\mu)\,\text{Log}[-1+\epsilon 1]+((1+6\,T\,\alpha-6\,T0\,\alpha+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\lambda+2\,(1+2\,T\,\alpha-2\,T0\,\alpha)\,\mu)\,\text{Log}[1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3])+C[1][T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Changement de nom

```
sol = sol /. C[1] → f1
```

$$\left\{\left\{\psi \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{1}{2\,(3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\rho 0}\,(2\,((1-3\,T\,\alpha+3\,T0\,\alpha)\,\lambda+2\,(1-T\,\alpha+T0\,\alpha+2\,\epsilon 2+4\,\epsilon 3)\,\mu)\,\text{Log}[-1+\epsilon 1]+((1+6\,T\,\alpha-6\,T0\,\alpha+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\lambda+2\,(1+2\,T\,\alpha-2\,T0\,\alpha)\,\mu)\,\text{Log}[1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3])+f1[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{1}{2\,(3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\rho 0}\,(2\,((1-3\,T\,\alpha+3\,T0\,\alpha)\,\lambda+2\,(1-T\,\alpha+T0\,\alpha+2\,\epsilon 2+4\,\epsilon 3)\,\mu)\,\text{Log}[-1+\epsilon 1]+((1+6\,T\,\alpha-6\,T0\,\alpha+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\lambda+2\,(1+2\,T\,\alpha-2\,T0\,\alpha)\,\mu)\,\text{Log}[1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3])+f1[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]$$

Résolution de eq2 (eq21)

```
eq21 = eq21 // Simplify
```

$$\frac{1}{3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3}\left(-2\,((-1+3\,T\,\alpha-3\,T0\,\alpha)\,\lambda+(1+2\,T\,\alpha-2\,T0\,\alpha)\,\mu)\,(3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3+2\,(-1+\epsilon 1)\,\text{Log}[-1+\epsilon 1]-2\,(-1+\epsilon 1)\,\text{Log}[1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3])+(-1+\epsilon 1)\,(3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)^2\,\rho 0\,f1^{(0,1,0)}[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right)==0$$

```
solf1 = DSolve[eq21, f1, {T, ϵ2, ϵ3}]
```

$$\left\{\left\{f1 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, (((-1+3\,T\,\alpha-3\,T0\,\alpha)\,\lambda+(1+2\,T\,\alpha-2\,T0\,\alpha)\,\mu)\,(-2\,(-1+\epsilon 1)\,\text{Log}[-1+\epsilon 1]+(1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\text{Log}[1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3]))\,/\,(2\,(-1+\epsilon 1)\,(3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\rho 0)+C[1][T, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Changement de nom

```
solf1 = solf1 /. C[1] → f2
```

$$\left\{\left\{f1 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, (((-1+3\,T\,\alpha-3\,T0\,\alpha)\,\lambda+(1+2\,T\,\alpha-2\,T0\,\alpha)\,\mu)\,(-2\,(-1+\epsilon 1)\,\text{Log}[-1+\epsilon 1]+(1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\text{Log}[1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3]))\,/\,(2\,(-1+\epsilon 1)\,(3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\rho 0)+f2[T, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[solf1[[1, 1, 1]]] = solf1[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Function}[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, (((-1+3\,T\,\alpha-3\,T0\,\alpha)\,\lambda+(1+2\,T\,\alpha-2\,T0\,\alpha)\,\mu)\,(-2\,(-1+\epsilon 1)\,\text{Log}[-1+\epsilon 1]+(1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\text{Log}[1+2\,\epsilon 1+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3]))\,/\,(2\,(-1+\epsilon 1)\,(3+4\,\epsilon 2+8\,\epsilon 3)\,\rho 0)+f2[T, \epsilon 3]]$$

Résolution de eq1

```
eq1 = eq1 // Simplify
```

$f2^{(0,1)}[T, \epsilon 3] == 0$

```
solf2 = DSolve[eq1, f2, {T, ϵ3}]
```

```
{{f2 → Function[{T, ϵ3}, C[1][T]]}}
```

Changement de nom

```
solf2 = solf2 /. C[1] → f3
```

```
{{f2 → Function[{T, ϵ3}, f3[T]]}}
```

Assignation de la solution

```
Evaluate[solf2[[1, 1, 1]]] = solf2[[1, 1, 2]]
```

```
Function[{T, ϵ3}, f3[T]]
```

Résultat

```
ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3] // Simplify
```

$$\frac{1}{2\,(-1+\epsilon 1)\,\rho 0}\,(2\,(-1+\epsilon 1)\,\rho 0\,f3[T] - 2\,(-1+\epsilon 1)\,\mu\,\mathrm{Log}[-1+\epsilon 1] + (-\epsilon 1\,\lambda + \mu + T\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) - T0\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu))\,\mathrm{Log}[1 + 2\,\epsilon 1 + 4\,\epsilon 2 + 8\,\epsilon 3])$$

Vérifications :

```
eq1 // Simplify
```

```
True
```

```
eq2 // Simplify
```

```
True
```

```
eq3 // Simplify
```

```
True
```

Mise en forme lisible

```
ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3] /. Log[1 + 2 ϵ1 + 4 ϵ2 + 8 ϵ3] → 2 Log[Kv] // Expand // Collect[#, {α, λ, μ}] & //
 Map[Factor, #] &
```

$$f3[T] - \frac{\epsilon 1\,\lambda\,\mathrm{Log}[Kv]}{(-1+\epsilon 1)\,\rho 0} + \frac{(T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu)\,\mathrm{Log}[Kv]}{(-1+\epsilon 1)\,\rho 0} + \frac{\mu\,(\mathrm{Log}[Kv] + \mathrm{Log}[-1+\epsilon 1] - \epsilon 1\,\mathrm{Log}[-1+\epsilon 1])}{(-1+\epsilon 1)\,\rho 0}$$

Approximation ρ=ρ0

```
Off[General::spell]
```

```
$Assumptions = $Assumptions && T > 0 && ϵ1 ∈ Reals && ϵ2 ∈ Reals && ϵ3 ∈ Reals
```

$T > 0 \,\&\&\, \epsilon 1 \in \text{Reals} \,\&\&\, \epsilon 2 \in \text{Reals} \,\&\&\, \epsilon 3 \in \text{Reals}$

Système d'équations à résoudre

```
eq1 = 0 == -2 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] + D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3]
```

$0 == \psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] - 2\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3]$

```
eq2 = 2 μ ==
  ρ0 (2 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ1] + (2 ϵ1 - 1) D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] - ϵ1 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3])
```

$2\,\mu == \rho 0\,(-\epsilon 1\,\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + (-1 + 2\,\epsilon 1)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + 2\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$

```
eq3 = λ ϵ1 - (3 λ + 2 μ) α (T - T0) ==
  ρ0 (D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ1] + ϵ1 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] + (ϵ2 + 2 ϵ3) D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3])
```

$\epsilon 1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) ==$
$\rho 0\,((\epsilon 2 + 2\,\epsilon 3)\,\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + \epsilon 1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$

Résolution

- **Elimination de D[ψ[T,ϵ1,ϵ2,ϵ3],ϵ3]**

```
sol1 = Solve[eq1, D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3]]
```

$\{\{\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] \to 2\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3]\}\}$

```
eq21 = eq2 /. sol1[[1]]
```

$2\,\mu == \rho 0\,(-2\,\epsilon 1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + (-1 + 2\,\epsilon 1)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + 2\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$

```
eq31 = eq3 /. sol1[[1]]
```

$\epsilon 1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) ==$
$\rho 0\,(\epsilon 1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + 2\,(\epsilon 2 + 2\,\epsilon 3)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])$

- **Elimination de D[ψ[T,ϵ1,ϵ2,ϵ3],ϵ2]**

```
sol2 = Solve[eq21, D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2]]
```

$$\left\{\left\{\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3] \to -\frac{2\,(\mu - \rho 0\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3])}{\rho 0}\right\}\right\}$$

```
eq32 = eq31 /. sol2[[1]] // Map[Simplify, #] &
```

$\epsilon 1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) == -2\,(\epsilon 1 + 2\,\epsilon 2 + 4\,\epsilon 3)\,\mu + (1 + 2\,\epsilon 1 + 4\,\epsilon 2 + 8\,\epsilon 3)\,\rho 0\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3]$

- **Résolution de eq3 (eq32)**

```
sol = DSolve[eq32, ψ, {T, ϵ1, ϵ2, ϵ3}]
```

$$\left\{\left\{\psi \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \frac{1}{\rho 0}\left(\frac{1}{4}\,(1 + 2\,\epsilon 1 + 4\,\epsilon 2 + 8\,\epsilon 3)\,(\lambda + 2\,\mu) + \frac{1}{4}\,(-\lambda - 6\,T\,\alpha\,\lambda + 6\,T0\,\alpha\,\lambda - 4\,\epsilon 2\,\lambda - 8\,\epsilon 3\,\lambda - 2\,\mu - 4\,T\,\alpha\,\mu + 4\,T0\,\alpha\,\mu)\,\text{Log}[1 + 2\,\epsilon 1 + 4\,\epsilon 2 + 8\,\epsilon 3]\right) + C[1][T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Changement de nom

```
sol = sol /. C[1] → f1
```

$$\left\{\left\{\psi \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \frac{1}{\rho 0}\left(\frac{1}{4}(1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3)(\lambda+2\mu)+\frac{1}{4}(-\lambda-6T\alpha\lambda+6T0\alpha\lambda-4\epsilon 2\lambda-8\epsilon 3\lambda-2\mu-4T\alpha\mu+4T0\alpha\mu)\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\text{Log}[1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3]\right)+f1[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \frac{1}{\rho 0}\left(\frac{1}{4}(1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3)(\lambda+2\mu)+\frac{1}{4}(-\lambda-6T\alpha\lambda+6T0\alpha\lambda-4\epsilon 2\lambda-8\epsilon 3\lambda-2\mu-4T\alpha\mu+4T0\alpha\mu)\right.\right.$$
$$\left.\left.\text{Log}[1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3]\right)+f1[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]$$

■ Résolution de eq2 (eq21)

```
eq21 = eq21 // Simplify
```

$$2\mu+\rho 0\, f1^{(0,1,0)}[T, \epsilon 2, \epsilon 3] == \lambda\, \text{Log}[1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3]$$

```
solf1 = DSolve[eq21, f1, {T, ϵ2, ϵ3}]
```

$$\left\{\left\{f1 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \frac{(-1-2\epsilon 1-4\epsilon 2-8\epsilon 3)\lambda}{4\rho 0}-\frac{2\epsilon 2\mu}{\rho 0}+\frac{(1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3)\lambda\,\text{Log}[1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3]}{4\rho 0}+C[1][T, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Changement de nom

```
solf1 = solf1 /. C[1] → f2
```

$$\left\{\left\{f1 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \frac{(-1-2\epsilon 1-4\epsilon 2-8\epsilon 3)\lambda}{4\rho 0}-\frac{2\epsilon 2\mu}{\rho 0}+\frac{(1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3)\lambda\,\text{Log}[1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3]}{4\rho 0}+f2[T, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[solf1[[1, 1, 1]]] = solf1[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \frac{(-1-2\epsilon 1-4\epsilon 2-8\epsilon 3)\lambda}{4\rho 0}-\frac{2\epsilon 2\mu}{\rho 0}+\frac{(1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3)\lambda\,\text{Log}[1+2\epsilon 1+4\epsilon 2+8\epsilon 3]}{4\rho 0}+f2[T, \epsilon 3]\right]$$

■ Résolution de eq1

```
eq1 = eq1 // Simplify
```

$$\frac{4\mu}{\rho 0}+f2^{(0,1)}[T, \epsilon 3] == 0$$

```
solf2 = DSolve[eq1, f2, {T, ϵ3}]
```

$$\left\{\left\{f2 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 3\}, -\frac{4\epsilon 3\mu}{\rho 0}+C[1][T]\right]\right\}\right\}$$

Changement de nom

```
solf2 = solf2 /. C[1] → f3
```

$$\left\{\left\{f2 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 3\}, -\frac{4\epsilon 3\mu}{\rho 0}+f3[T]\right]\right\}\right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[solf2[[1, 1, 1]]] = solf2[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 3\}, -\frac{4\,\epsilon 3\,\mu}{\rho 0} + f3[T]\right]$$

Résultat

```
ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3] // Simplify
```

$$\frac{1}{2\,\rho 0}\left(\mu + 2\,\epsilon 1\,\mu + 2\,\rho 0\,f3[T] + (\epsilon 1\,\lambda - \mu - T\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) + T0\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu))\,\text{Log}[1 + 2\,\epsilon 1 + 4\,\epsilon 2 + 8\,\epsilon 3]\right)$$

Vérifications :

```
eq1 // Simplify
```

True

```
eq2 // Simplify
```

True

```
eq3 // Simplify
```

True

Mise en forme lisible

```
ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3] /. Log[1 + 2 ϵ1 + 4 ϵ2 + 8 ϵ3] → 2 Log[Kv] // Expand //
  Collect[#, {α, λ, μ, Log[-1 + ϵ1]}] & // Map[Simplify, #] &
```

$$f3[T] + \frac{\mu\,(1 + 2\,\epsilon 1 - 2\,\text{Log}[Kv])}{2\,\rho 0} + \frac{\epsilon 1\,\lambda\,\text{Log}[Kv]}{\rho 0} - \frac{(T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu)\,\text{Log}[Kv]}{\rho 0}$$

Loi linéaire en ϵ^v

```
Off[General::spell]
```

```
$Assumptions = $Assumptions && T > 0 && ϵ1 ∈ Reals && ϵ2 ∈ Reals && ϵ3 ∈ Reals
```

```
T > 0 && ϵ1 ∈ Reals && ϵ2 ∈ Reals && ϵ3 ∈ Reals
```

Système d'équations à résoudre

```
eq1 = 0 == D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] - D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3]
```

$$0 == -\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] + \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3]$$

```
eq2 = 2 μ (1 + ϵ1 + ϵ2 + ϵ3) ==
  ρ0 ( D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ1] - ( 1 - ϵ1 ) D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] - ϵ1 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3])
```

$$2\,(1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)\,\mu == \rho0\,(-\epsilon1\,\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] - (1 - \epsilon1)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3])$$

```
eq3 = (λ ϵ1 - (3 λ + 2 μ) α (T - T0)) (1 + ϵ1 + ϵ2 + ϵ3) ==
  ρ0 (D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ1] + ϵ1 D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2] + (ϵ2 + ϵ3) D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3])
```

$$(1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)\,(\epsilon1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu)) == \rho0\,((\epsilon2 + \epsilon3)\,\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] + \epsilon1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3])$$

Résolution

- **Elimination de D[ψ[T,ϵ1,ϵ2,ϵ3],ϵ3]**

```
sol1 = Solve[eq1, D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ3]]
```

$$\{\{\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] \to \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3]\}\}$$

```
eq21 = eq2 /. sol1[[1]]
```

$$2\,(1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)\,\mu == \rho0\,(-(1 - \epsilon1)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] - \epsilon1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3])$$

```
eq31 = eq3 /. sol1[[1]]
```

$$(1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)\,(\epsilon1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu)) == \rho0\,(\epsilon1\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] + (\epsilon2 + \epsilon3)\,\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3])$$

- **Elimination de D[ψ[T,ϵ1,ϵ2,ϵ3],ϵ2]**

```
sol2 = Solve[eq21, D[ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3], ϵ2]]
```

$$\left\{\left\{\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3] \to \frac{1}{\rho0}\left(-2\,\mu - 2\,\epsilon1\,\mu - 2\,\epsilon2\,\mu - 2\,\epsilon3\,\mu + \rho0\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3]\right)\right\}\right\}$$

```
eq32 = eq31 /. sol2[[1]] // Map[Simplify, #] &
```

$$(1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)\,(\epsilon1\,\lambda - (T - T0)\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu)) == -(1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)\,(2\,(\epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)\,\mu - \rho0\,\psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon1, \epsilon2, \epsilon3])$$

Résolution de eq3 (eq32)

```
sol = DSolve[eq32, ψ, {T, ϵ1, ϵ2, ϵ3}]
```

$$\left\{\left\{\psi \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{3\,T\,\alpha\,\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} + \frac{3\,T0\,\alpha\,\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2\,\lambda}{2\,\rho 0} - \frac{2\,T\,\alpha\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,T0\,\alpha\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,\epsilon 1\,\epsilon 2\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,\epsilon 1\,\epsilon 3\,\mu}{\rho 0} + C[1][T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Changement de nom

```
sol = sol /. C[1] → f1
```

$$\left\{\left\{\psi \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{3\,T\,\alpha\,\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} + \frac{3\,T0\,\alpha\,\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2\,\lambda}{2\,\rho 0} - \frac{2\,T\,\alpha\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,T0\,\alpha\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,\epsilon 1\,\epsilon 2\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,\epsilon 1\,\epsilon 3\,\mu}{\rho 0} + f1[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{3\,T\,\alpha\,\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} + \frac{3\,T0\,\alpha\,\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2\,\lambda}{2\,\rho 0} - \frac{2\,T\,\alpha\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,T0\,\alpha\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,\epsilon 1\,\epsilon 2\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,\epsilon 1\,\epsilon 3\,\mu}{\rho 0} + f1[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]$$

Résolution de eq2 (eq21)

```
eq21 = eq21 // Simplify
```

$$\epsilon 1\,\lambda + T0\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) == 2\,(1 + \epsilon 1)\,\mu + T\,\alpha\,(3\,\lambda + 2\,\mu) + \rho 0\,f1^{(0,1,0)}[T, \epsilon 2, \epsilon 3]$$

```
solf1 = DSolve[eq21, f1, {T, ϵ2, ϵ3}]
```

$$\left\{\left\{f1 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \epsilon 2\left(-\frac{3\,T\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{3\,T0\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} - \frac{2\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,T\,\alpha\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,T0\,\alpha\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0}\right) + C[1][T, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Changement de nom

```
solf1 = solf1 /. C[1] → f2
```

$$\left\{\left\{f1 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \epsilon 2\left(-\frac{3\,T\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{3\,T0\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} - \frac{2\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,T\,\alpha\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,T0\,\alpha\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0}\right) + f2[T, \epsilon 3]\right]\right\}\right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[solf1[[1, 1, 1]]] = solf1[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \epsilon 2\left(-\frac{3\,T\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{3\,T0\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} - \frac{2\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,T\,\alpha\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,T0\,\alpha\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0}\right) + f2[T, \epsilon 3]\right]$$

Résolution de eq1

```
eq1 = eq1 // Simplify
```

$$\frac{1}{\rho 0}\left(3\,T\,\alpha\,\lambda - 3\,T0\,\alpha\,\lambda - \epsilon 1\,\lambda + 2\,\mu + 2\,T\,\alpha\,\mu - 2\,T0\,\alpha\,\mu + 2\,\epsilon 1\,\mu + \rho 0\,f2^{(0,1)}[T, \epsilon 3]\right) == 0$$

```
solf2 = DSolve[eq1, f2, {T, ϵ3}]
```

$$\left\{\left\{f2 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 3\}, \epsilon 3\left(-\frac{3\,T\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{3\,T0\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} - \frac{2\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,T\,\alpha\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,T0\,\alpha\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0}\right) + C[1][T]\right]\right\}\right\}$$

Changement de nom

```
solf2 = solf2 /. C[1] → f3
```

$$\left\{\left\{f2 \to \text{Function}\left[\{T, \epsilon 3\}, \epsilon 3\left(-\frac{3\,T\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{3\,T0\,\alpha\,\lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0} - \frac{2\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,T\,\alpha\,\mu}{\rho 0} + \frac{2\,T0\,\alpha\,\mu}{\rho 0} - \frac{2\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0}\right) + f3[T]\right]\right\}\right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[solf2[[1, 1, 1]]] = solf2[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 3\}, \epsilon 3 \left(-\frac{3\,T\,\alpha\,\lambda}{\rho 0}+\frac{3\,T0\,\alpha\,\lambda}{\rho 0}+\frac{\epsilon 1\,\lambda}{\rho 0}-\frac{2\,\mu}{\rho 0}-\frac{2\,T\,\alpha\,\mu}{\rho 0}+\frac{2\,T0\,\alpha\,\mu}{\rho 0}-\frac{2\,\epsilon 1\,\mu}{\rho 0}\right)+f3[T]\right]$$

■ Résultat

```
ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3] // Simplify
```

$$\frac{1}{2\,\rho 0}\left(6\,T0\,\alpha\,\epsilon 1\,\lambda+\epsilon 1^2\,\lambda+6\,T0\,\alpha\,\epsilon 2\,\lambda+2\,\epsilon 1\,\epsilon 2\,\lambda+6\,T0\,\alpha\,\epsilon 3\,\lambda+2\,\epsilon 1\,\epsilon 3\,\lambda+4\,T0\,\alpha\,\epsilon 1\,\mu+2\,\epsilon 1^2\,\mu-4\,\epsilon 2\,\mu+4\,T0\,\alpha\,\epsilon 2\,\mu-4\,\epsilon 3\,\mu+4\,T0\,\alpha\,\epsilon 3\,\mu-2\,T\,\alpha\,(\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)\,(3\,\lambda+2\,\mu)+2\,\rho 0\,f3[T]\right)$$

Vérifications :

```
eq1 // Simplify
```

True

```
eq2 // Simplify
```

True

```
eq3 // Simplify
```

True

Mise en forme lisible

```
ψ[T, ϵ1, ϵ2, ϵ3] // Expand // Collect[#, {α, λ, μ}, Factor] & // Map[Factor, #] &
```

$$\frac{\epsilon 1\,(\epsilon 1+2\,\epsilon 2+2\,\epsilon 3)\,\lambda}{2\,\rho 0}+\frac{\left(\epsilon 1^2-2\,\epsilon 2-2\,\epsilon 3\right)\mu}{\rho 0}-\frac{(T-T0)\,\alpha\,(\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)\,(3\,\lambda+2\,\mu)}{\rho 0}+f3[T]$$

H

Calculs en isotropie transverse

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs en isotropie transverse du chapitre 5 [p. 71].

Elle est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA® version 5.2.

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage.

Calculs en isotropie transverse

```
In[1]:= Off[General::spell] Off[General::spell];

In[2]:= $Assumptions = B3 > 0 && V1 V2 - V3 > 0 && V3 > 0;
```

La loi de comportement avec **B** est :

```
In[3]:= σB = 2 ρ0 / Sqrt[B3] (
          B3 dB3ψB G + ( dB1ψB + B1 dB2ψB) B - dB2ψB B.B +
           dI1BψB (Nt.B + B.Nt - I1B Nt) + dI2BψB (Nt.B .B + B.B.Nt - I2B Nt + B.Nt.B)
         )
```

Out[3]= $\frac{1}{\sqrt{B3}}$ (2 ρ0 (B (dB1ψB + B1 dB2ψB) + B3 dB3ψB G - dB2ψB B.B + dI1BψB (-I1B Nt + B.Nt + Nt.B) + dI2BψB (-I2B Nt + B.B.Nt + B.Nt.B)))

Passage en V

■ Relations entre les invariants

```
In[4]:= B1 = V1^2 - 2 V2;
```

vérification

```
In[5]:= v1^2 + v2^2 + v3^2 == (v1 + v2 + v3)^2 - 2 (v1 v2 + v2 v3 + v3 v1) // Simplify

Out[5]= True

In[6]:= B2 = V2^2 - 2 V1 V3;
```

vérification :

```
In[7]:= v1^2 v2^2 + v2^2 v3^2 + v3^2 v1^2 ==
          (v1 v2 + v2 v3 + v3 v1)^2 - 2 (v1 + v2 + v3) v1 v2 v3 // Simplify

Out[7]= True

In[8]:= B3 = V3^2;

In[9]:= I1B = I2V;

In[10]:= I2B = (V1^2 - V2) I2V + (V3 - V1 V2) I1V + V1 V3;
```

vérification

```
In[11]:= {n1, n2, n3}.{{v1^4, 0, 0}, {0, v2^4, 0}, {0, 0, v3^4}}.{n1, n2, n3} ==
           ((v1 + v2 + v3)^2 - ( v1 v2 + v2 v3 + v3 v1))
             {n1, n2, n3}.{{v1^2, 0, 0}, {0, v2^2, 0}, {0, 0, v3^2}}.{n1, n2, n3} +
           (v1 v2 v3 - (v1 + v2 + v3) (v1 v2 + v2 v3 + v3 v1))
             {n1, n2, n3}.{{v1, 0, 0}, {0, v2, 0}, {0, 0, v3}}.{n1, n2, n3} +
           (v1 + v2 + v3) v1 v2 v3 /.
          n3^2 → 1 - n1^2 - n2^2 // Simplify

Out[11]= True
```

■ Relations entre les dérivées partielles

In[12]:=
```
eq1 = dTψV == dTψB D[T, T] + dB1ψB D[B1, T] +
   dB2ψB D[B2, T] + dB3ψB D[B3, T] + dI1BψB D[I1B, T] + dI2BψB D[I2B, T]
```

Out[12]= $dT\psi V == dT\psi B$

In[13]:=
```
eq2 = dV1ψV == dTψB D[T, V1] + dB1ψB D[B1, V1] +
   dB2ψB D[B2, V1] + dB3ψB D[B3, V1] + dI1BψB D[I1B, V1] + dI2BψB D[I2B, V1]
```

Out[13]= $dV1\psi V == 2\, dB1\psi B\, V1 - 2\, dB2\psi B\, V3 + dI2B\psi B\, (2\, I2V\, V1 - I1V\, V2 + V3)$

In[14]:=
```
eq3 = dV2ψV == dTψB D[T, V2] + dB1ψB D[B1, V2] +
   dB2ψB D[B2, V2] + dB3ψB D[B3, V2] + dI1BψB D[I1B, V2] + dI2BψB D[I2B, V2]
```

Out[14]= $dV2\psi V == -2\, dB1\psi B + dI2B\psi B\, (-I2V - I1V\, V1) + 2\, dB2\psi B\, V2$

In[15]:=
```
eq4 = dV3ψV == dTψB D[T, V3] + dB1ψB D[B1, V3] +
   dB2ψB D[B2, V3] + dB3ψB D[B3, V3] + dI1BψB D[I1B, V3] + dI2BψB D[I2B, V3]
```

Out[15]= $dV3\psi V == -2\, dB2\psi B\, V1 + dI2B\psi B\, (I1V + V1) + 2\, dB3\psi B\, V3$

In[16]:=
```
eq5 = dI1VψV == dTψB D[T, I1V] + dB1ψB D[B1, I1V] +
   dB2ψB D[B2, I1V] + dB3ψB D[B3, I1V] + dI1BψB D[I1B, I1V] + dI2BψB D[I2B, I1V]
```

Out[16]= $dI1V\psi V == dI2B\psi B\, (-V1\, V2 + V3)$

In[17]:=
```
eq6 = dI2VψV == dTψB D[T, I2V] + dB1ψB D[B1, I2V] +
   dB2ψB D[B2, I2V] + dB3ψB D[B3, I2V] + dI1BψB D[I1B, I2V] + dI2BψB D[I2B, I2V]
```

Out[17]= $dI2V\psi V == dI1B\psi B + dI2B\psi B\, (V1^2 - V2)$

■ résolution

In[18]:=
```
sol =
 Solve[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6}, {dTψB, dB1ψB, dB2ψB, dB3ψB, dI1BψB, dI2BψB}] // Simplify
```

Out[18]=

$$\Big\{\Big\{dB3\psi B \to \frac{(V1\, V2 - V3)\, (dV1\psi V\, V1 + dV2\psi V\, V1^2 + dV3\psi V\, V1\, V2 - dV3\psi V\, V3) + dI1V\psi V\, (I2V\, V1^2 + V1^2\, V2 - I1V\, (V1^3 + V3))}{2\, V3\, (-V1\, V2 + V3)^2},$$

$$dT\psi B \to dT\psi V,\ dI1B\psi B \to dI2V\psi V + \frac{dI1V\psi V\, (V1^2 - V2)}{V1\, V2 - V3},$$

$$dB1\psi B \to \frac{(V1\, V2 - V3)\, (dV1\psi V\, V2 + dV2\psi V\, V3) + dI1V\psi V\, (I2V\, (2\, V1\, V2 - V3) + V2\, V3 - I1V\, (V2^2 + V1\, V3))}{2\, (-V1\, V2 + V3)^2},$$

$$dB2\psi B \to \frac{(dV1\psi V + dV2\psi V\, V1)\, (V1\, V2 - V3) + dI1V\psi V\, (I2V\, V1 - I1V\, (V1^2 + V2) + V3)}{2\, (-V1\, V2 + V3)^2},\ dI2B\psi B \to -\frac{dI1V\psi V}{V1\, V2 - V3}\Big\}\Big\}$$

■ remplacements

```
In[19]:= σV = σB /. sol[[1]] /.
                Nt.B.B → (V1^2 - V2) Nt.V.V + (V3 - V1 V2) Nt.V + V1 V3 Nt /.
               B.B. Nt → (V1^2 - V2) V.V .Nt + (V3 - V1 V2) V.Nt + V1 V3 Nt /.
              B.Nt.B → V.V.Nt.V.V /.
             Nt.B → Nt.V.V /.
            B.Nt → V.V.Nt /.
           B.B → (V1^2 - V2) V.V + (V3 - V1 V2) V + V1 V3 G /.
          B → V.V //
         Collect[#, {G, V, V.V, Nt, Nt.V, V.Nt, V.V.Nt, Nt.V.V,
            V.V.Nt, V.V.Nt.V.V, ρ0, dV1ψV, dV2ψV, dV3ψV, dI1VψV, dI2VψV}, Simplify] &
```

$$\begin{aligned}\text{Out[19]=}\ & G\left(dV3\psi V+\frac{dI1V\psi V\,(I1V+V1)}{V1\,V2-V3}\right)\rho 0+V\left(\frac{dV1\psi V}{V3}+\frac{dV2\psi V\,V1}{V3}+\frac{dI1V\psi V\,(I2V\,V1-I1V\,(V1^2+V2)+V3)}{(V1\,V2-V3)\,V3}\right)\rho 0+\\ & Nt\left(-\frac{2\,dI2V\psi V\,I2V}{V3}+\frac{2\,dI1V\psi V\,(I1V\,V1\,V2-I1V\,V3+V1\,V3)}{V3\,(-V1\,V2+V3)}\right)\rho 0+\\ & \frac{2\,dI1V\psi V\,\rho 0\,Nt.V}{V3}+\frac{2\,dI1V\psi V\,\rho 0\,V.Nt}{V3}+\left(-\frac{dV2\psi V}{V3}+\frac{dI1V\psi V\,(I2V+I1V\,V1)}{V1\,V2\,V3-V3^2}\right)\rho 0\,V.V+\\ & \frac{2\,dI2V\psi V\,\rho 0\,Nt.V.V}{V3}+\frac{2\,dI2V\psi V\,\rho 0\,V.V.Nt}{V3}+\frac{2\,dI1V\psi V\,\rho 0\,V.V.Nt.V.V}{V3\,(-V1\,V2+V3)}\end{aligned}$$

Passage en ϵ^V

■ Relations entre les invariants

```
In[20]:= V1 = 3 + ϵ1;

In[21]:= V2 = 3 + 2 ϵ1 + ϵ2;
```

Vérification

```
In[22]:= (1 + e1) (1 + e2) + (1 + e2) (1 + e3) + (1 + e3) (1 + e1) // Expand

Out[22]= 3 + 2 e1 + 2 e2 + e1 e2 + 2 e3 + e1 e3 + e2 e3

In[23]:= V3 = 1 + ϵ1 + ϵ2 + ϵ3;
```

vérification

```
In[24]:= (1 + e1) (1 + e2) (1 + e3) // Expand

Out[24]= 1 + e1 + e2 + e1 e2 + e3 + e1 e3 + e2 e3 + e1 e2 e3

In[25]:= I1V = 1 + I1ϵ

Out[25]= 1 + I1ϵ

In[26]:= I2V = 1 + 2 I1ϵ + I2ϵ

Out[26]= 1 + 2 I1ϵ + I2ϵ
```

■ Relations entre les dérivées partielles

```
In[27]:= eq1 = dTψϵ == dTψV D[T, T] + dV1ψV D[V1, T] +
           dV2ψV D[V2, T] + dV3ψV D[V3, T] + dI1VψV D[I1V, T] + dI2VψV D[I2V, T]

Out[27]= dTψϵ == dTψV

In[28]:= eq2 = dϵ1ψϵ == dTψV D[T, ϵ1] + dV1ψV D[V1, ϵ1] +
           dV2ψV D[V2, ϵ1] + dV3ψV D[V3, ϵ1] + dI1VψV D[I1V, ϵ1] + dI2VψV D[I2V, ϵ1]

Out[28]= dϵ1ψϵ == dV1ψV + 2 dV2ψV + dV3ψV

In[29]:= eq3 = dϵ2ψϵ == dTψV D[T, ϵ2] + dV1ψV D[V1, ϵ2] +
           dV2ψV D[V2, ϵ2] + dV3ψV D[V3, ϵ2] + dI1VψV D[I1V, ϵ2] + dI2VψV D[I2V, ϵ2]

Out[29]= dϵ2ψϵ == dV2ψV + dV3ψV

In[30]:= eq4 = dϵ3ψϵ == dTψV D[T, ϵ3] + dV1ψV D[V1, ϵ3] +
           dV2ψV D[V2, ϵ3] + dV3ψV D[V3, ϵ3] + dI1VψV D[I1V, ϵ3] + dI2VψV D[I2V, ϵ3]

Out[30]= dϵ3ψϵ == dV3ψV

In[31]:= eq5 = dI1ϵψϵ == dTψV D[T, I1ϵ] + dV1ψV D[V1, I1ϵ] +
           dV2ψV D[V2, I1ϵ] + dV3ψV D[V3, I1ϵ] + dI1VψV D[I1V, I1ϵ] + dI2VψV D[I2V, I1ϵ]

Out[31]= dI1ϵψϵ == dI1VψV + 2 dI2VψV

In[32]:= eq6 = dI2ϵψϵ == dTψV D[T, I2ϵ] + dV1ψV D[V1, I2ϵ] +
           dV2ψV D[V2, I2ϵ] + dV3ψV D[V3, I2ϵ] + dI1VψV D[I1V, I2ϵ] + dI2VψV D[I2V, I2ϵ]

Out[32]= dI2ϵψϵ == dI2VψV
```

■ Résolution

```
In[33]:= sol = Solve[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6}, {dTψV, dV1ψV, dV2ψV, dV3ψV, dI1VψV, dI2VψV}]

Out[33]= {{dTψV → dTψϵ, dV1ψV → dϵ1ψϵ - 2 dϵ2ψϵ + dϵ3ψϵ,
            dV2ψV → dϵ2ψϵ - dϵ3ψϵ, dV3ψV → dϵ3ψϵ, dI1VψV → dI1ϵψϵ - 2 dI2ϵψϵ, dI2VψV → dI2ϵψϵ}}
```

■ Remplacements

```
In[34]:= σϵ = σV /. sol[[1]] /.
                V.V.Nt.V.V → Distribute[(G + ϵ).(G + ϵ).Nt.(G + ϵ).(G + ϵ)] /.
               Nt.V.V → Distribute[Nt.(G + ϵ).(G + ϵ)] /.
              V.V.Nt → Distribute[(G + ϵ).(G + ϵ).Nt] /.
             V.Nt → Distribute[(G + ϵ).Nt] /.
            Nt.V → Distribute[Nt.(G + ϵ)] /.
           V.V → Distribute[(G + ϵ).(G + ϵ)] /.
          V → G + ϵ /.
         Dot[x___, G, y___] → Dot[x, y] /. Dot[x___, G, y___] → Dot[x, y] /.
       Dot[x___, G, y___] → Dot[x, y] /. Dot[x___, G, y___] → Dot[x, y] //
     Collect[#, {G , Nt, ϵ , ϵ.Nt , Nt.ϵ , ϵ.ϵ , ϵ.Nt.ϵ , ϵ.ϵ.Nt , Nt.ϵ.ϵ , ϵ.ϵ.Nt.ϵ ,
        ϵ.Nt.ϵ.ϵ , ϵ.ϵ.Nt.ϵ.ϵ, ρ0, dϵ1ψϵ, dϵ2ψϵ, dϵ3ψϵ, dI1ϵψϵ, dI2ϵψϵ}, Factor] &
```

Out[34]=

$$
\begin{aligned}
&\epsilon \Bigg(\frac{d\epsilon 1\psi\epsilon}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3} + \frac{d\epsilon 2\psi\epsilon\,(-1+\epsilon 1)}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3} - \frac{d\epsilon 3\psi\epsilon\,\epsilon 1}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3} - \\
&\quad \frac{dI1\epsilon\psi\epsilon\,(-4\,I1\epsilon - 5\,I2\epsilon + 4\,\epsilon 1 + 4\,I1\epsilon\,\epsilon 1 - I2\epsilon\,\epsilon 1 + \epsilon 1^2 + I1\epsilon\,\epsilon 1^2 + I1\epsilon\,\epsilon 2 - \epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(-4\,I1\epsilon - 5\,I2\epsilon + 4\,\epsilon 1 + 4\,I1\epsilon\,\epsilon 1 - I2\epsilon\,\epsilon 1 + \epsilon 1^2 + I1\epsilon\,\epsilon 1^2 + I1\epsilon\,\epsilon 2 - \epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0 + \\
&G \Bigg(\frac{d\epsilon 1\psi\epsilon}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3} + \frac{d\epsilon 2\psi\epsilon\,\epsilon 1}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3} + \frac{d\epsilon 3\psi\epsilon\,(\epsilon 2+\epsilon 3)}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3} - \\
&\quad \frac{dI1\epsilon\psi\epsilon\,(-4\,I2\epsilon + 4\,I1\epsilon\,\epsilon 1 - I2\epsilon\,\epsilon 1 + I1\epsilon\,\epsilon 1^2 - 4\,\epsilon 2 - \epsilon 1\,\epsilon 2 - 5\,\epsilon 3 - I1\epsilon\,\epsilon 3 - \epsilon 1\,\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(-4\,I2\epsilon + 4\,I1\epsilon\,\epsilon 1 - I2\epsilon\,\epsilon 1 + I1\epsilon\,\epsilon 1^2 - 4\,\epsilon 2 - \epsilon 1\,\epsilon 2 - 5\,\epsilon 3 - I1\epsilon\,\epsilon 3 - \epsilon 1\,\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0 + \\
&Nt \Bigg(-\frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(8\,I2\epsilon + 8\,I2\epsilon\,\epsilon 1 + 2\,I2\epsilon\,\epsilon 1^2 - 4\,\epsilon 2 + 2\,I2\epsilon\,\epsilon 2 - \epsilon 1\,\epsilon 2 + I2\epsilon\,\epsilon 1\,\epsilon 2 - 7\,\epsilon 3 - I2\epsilon\,\epsilon 3 - 2\,\epsilon 1\,\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} - \\
&\quad \frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon\,(-4 + 8\,I1\epsilon - 4\,\epsilon 1 + 8\,I1\epsilon\,\epsilon 1 - \epsilon 1^2 + 2\,I1\epsilon\,\epsilon 1^2 + \epsilon 2 + 2\,I1\epsilon\,\epsilon 2 + I1\epsilon\,\epsilon 1\,\epsilon 2 + 4\,\epsilon 3 - I1\epsilon\,\epsilon 3 + \epsilon 1\,\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg) \\
&\rho 0 + \Bigg(\frac{8\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon\,(6+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,Nt.\epsilon + \\
&\Bigg(\frac{8\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon\,(6+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,\epsilon.Nt + \\
&\Bigg(-\frac{d\epsilon 2\psi\epsilon}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3} + \frac{d\epsilon 3\psi\epsilon}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3} + \frac{dI1\epsilon\psi\epsilon\,(4+5\,I1\epsilon + I2\epsilon + \epsilon 1 + I1\epsilon\,\epsilon 1)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} - \\
&\quad \frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(4+5\,I1\epsilon + I2\epsilon + \epsilon 1 + I1\epsilon\,\epsilon 1)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,\epsilon.\epsilon + \\
&\Bigg(-\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(10+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,Nt.\epsilon.\epsilon + \\
&\Bigg(-\frac{8\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{16\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,\epsilon.Nt.\epsilon + \\
&\Bigg(-\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(10+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,\epsilon.\epsilon.Nt + \\
&\Bigg(-\frac{4\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{8\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,\epsilon.Nt.\epsilon.\epsilon + \\
&\Bigg(-\frac{4\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{8\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,\epsilon.\epsilon.Nt.\epsilon + \\
&\Bigg(-\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} + \\
&\quad \frac{4\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)} \Bigg)\,\rho 0\,\epsilon.\epsilon.Nt.\epsilon.\epsilon
\end{aligned}
$$

In[35]:= **K0 = Coefficient[σϵ, G]**

Out[35]=
$$\left(\frac{d\epsilon 1\psi\epsilon}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3}+\frac{d\epsilon 2\psi\epsilon\,\epsilon 1}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3}+\frac{d\epsilon 3\psi\epsilon\,(\epsilon 2+\epsilon 3)}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3}-\frac{dI1\epsilon\psi\epsilon\,(-4\,I2\epsilon+4\,I1\epsilon\,\epsilon 1-I2\epsilon\,\epsilon 1+I1\epsilon\,\epsilon 1^2-4\,\epsilon 2-\epsilon 1\,\epsilon 2-5\,\epsilon 3-I1\epsilon\,\epsilon 3-\epsilon 1\,\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}+\frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(-4\,I2\epsilon+4\,I1\epsilon\,\epsilon 1-I2\epsilon\,\epsilon 1+I1\epsilon\,\epsilon 1^2-4\,\epsilon 2-\epsilon 1\,\epsilon 2-5\,\epsilon 3-I1\epsilon\,\epsilon 3-\epsilon 1\,\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}\right)\rho 0$$

In[36]:= **K1 = Coefficient[σϵ, Nt]**

Out[36]=
$$\left(-\frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(8\,I2\epsilon+8\,I2\epsilon\,\epsilon 1+2\,I2\epsilon\,\epsilon 1^2-4\,\epsilon 2+2\,I2\epsilon\,\epsilon 2-\epsilon 1\,\epsilon 2+I2\epsilon\,\epsilon 1\,\epsilon 2-7\,\epsilon 3-I2\epsilon\,\epsilon 3-2\,\epsilon 1\,\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}-\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon\,(-4+8\,I1\epsilon-4\,\epsilon 1+8\,I1\epsilon\,\epsilon 1-\epsilon 1^2+2\,I1\epsilon\,\epsilon 1^2+\epsilon 2+2\,I1\epsilon\,\epsilon 2+I1\epsilon\,\epsilon 1\,\epsilon 2+4\,\epsilon 3-I1\epsilon\,\epsilon 3+\epsilon 1\,\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}\right)\rho 0$$

In[37]:= **K2 = Coefficient[σϵ, ϵ]**

Out[37]=
$$\left(\frac{d\epsilon 1\psi\epsilon}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3}+\frac{d\epsilon 2\psi\epsilon\,(-1+\epsilon 1)}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3}-\frac{d\epsilon 3\psi\epsilon\,\epsilon 1}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3}-\frac{dI1\epsilon\psi\epsilon\,(-4\,I1\epsilon-5\,I2\epsilon+4\,\epsilon 1+4\,I1\epsilon\,\epsilon 1-I2\epsilon\,\epsilon 1+\epsilon 1^2+I1\epsilon\,\epsilon 1^2+I1\epsilon\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}+\frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(-4\,I1\epsilon-5\,I2\epsilon+4\,\epsilon 1+4\,I1\epsilon\,\epsilon 1-I2\epsilon\,\epsilon 1+\epsilon 1^2+I1\epsilon\,\epsilon 1^2+I1\epsilon\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}\right)\rho 0$$

In[38]:= **K3 = Coefficient[σϵ, ϵ.Nt]**

Out[38]=
$$\left(\frac{8\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}+\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon\,(6+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}\right)\rho 0$$

In[39]:= **K31 = Coefficient[σϵ, Nt.ϵ]**

Out[39]=
$$\left(\frac{8\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}+\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon\,(6+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}\right)\rho 0$$

In[40]:= **K3 == K31**

Out[40]= True

In[41]:= **K4 = Coefficient[σϵ, ϵ.ϵ]**

Out[41]=
$$\left(-\frac{d\epsilon 2\psi\epsilon}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3}+\frac{d\epsilon 3\psi\epsilon}{1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3}+\frac{dI1\epsilon\psi\epsilon\,(4+5\,I1\epsilon+I2\epsilon+\epsilon 1+I1\epsilon\,\epsilon 1)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}-\frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(4+5\,I1\epsilon+I2\epsilon+\epsilon 1+I1\epsilon\,\epsilon 1)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}\right)\rho 0$$

In[42]:= **K5 = Coefficient[σϵ, ϵ.Nt.ϵ]**

Out[42]=
$$\left(-\frac{8\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}+\frac{16\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}\right)\rho 0$$

In[43]:= **K6 = Coefficient[σϵ, ϵ.ϵ.Nt]**

Out[43]=
$$\left(-\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}+\frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(10+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)}{(8+8\,\epsilon 1+2\,\epsilon 1^2+2\,\epsilon 2+\epsilon 1\,\epsilon 2-\epsilon 3)\,(1+\epsilon 1+\epsilon 2+\epsilon 3)}\right)\rho 0$$

```
In[44]:= K61 = Coefficient[σϵ, Nt.ϵ.ϵ]
```

Out[44]= $\left(-\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)\,(1+\epsilon1+\epsilon2+\epsilon3)}+\frac{2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(10+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)}{(8+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)\,(1+\epsilon1+\epsilon2+\epsilon3)}\right)\rho0$

```
In[45]:= K6 == K61
Out[45]= True
In[46]:= K7 = Coefficient[σϵ, ϵ.ϵ.Nt.ϵ]
```

Out[46]= $\left(-\frac{4\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)\,(1+\epsilon1+\epsilon2+\epsilon3)}+\frac{8\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)\,(1+\epsilon1+\epsilon2+\epsilon3)}\right)\rho0$

```
In[47]:= K71 = Coefficient[σϵ, ϵ.Nt.ϵ.ϵ]
```

Out[47]= $\left(-\frac{4\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)\,(1+\epsilon1+\epsilon2+\epsilon3)}+\frac{8\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)\,(1+\epsilon1+\epsilon2+\epsilon3)}\right)\rho0$

```
In[48]:= K7 == K71
Out[48]= True
In[49]:= K7 == K5 / 2 // Simplify
Out[49]= True
In[50]:= K8 = Coefficient[σϵ, ϵ.ϵ.Nt.ϵ.ϵ]
```

Out[50]= $\left(-\frac{2\,dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)\,(1+\epsilon1+\epsilon2+\epsilon3)}+\frac{4\,dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\,\epsilon1+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,\epsilon2-\epsilon3)\,(1+\epsilon1+\epsilon2+\epsilon3)}\right)\rho0$

```
In[51]:= K8 == K7 / 2 // Simplify
Out[51]= True
```

On retrouve la loi linéaire isotrope si **dI2ϵψϵ = 0** et **dI2ϵψϵ = 0** :

```
In[52]:= σϵ /. dI2ϵψϵ → 0 /. dI1ϵψϵ → 0 /. 1 + ϵ1 + ϵ2 + ϵ3 → Kv //
          Collect[#, {G, ϵ, ϵ.ϵ, ρ0, Kv, dϵ1ψϵ, dϵ2ψϵ}, Factor] &
```

Out[52]= $\frac{\epsilon\,(d\epsilon1\psi\epsilon+d\epsilon2\psi\epsilon\,(-1+\epsilon1)-d\epsilon3\psi\epsilon\,\epsilon1)\,\rho0}{Kv}+\frac{G\,(d\epsilon1\psi\epsilon+d\epsilon2\psi\epsilon\,\epsilon1+d\epsilon3\psi\epsilon\,(\epsilon2+\epsilon3))\,\rho0}{Kv}+\frac{(-d\epsilon2\psi\epsilon+d\epsilon3\psi\epsilon)\,\rho0\,\epsilon.\epsilon}{Kv}$

Recherche d'une loi linéaire en ϵ^V (en déformations finies)

```
In[53]:= eq1 = 0 == K4 // Simplify
```

Out[53]= $(dI1\epsilon\psi\epsilon\,(4+I2\epsilon+\epsilon1+I1\epsilon\,(5+\epsilon1))-2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,(4+I2\epsilon+\epsilon1+I1\epsilon\,(5+\epsilon1))-(d\epsilon2\psi\epsilon-d\epsilon3\psi\epsilon)\,(8+2\,\epsilon1^2+2\,\epsilon2+\epsilon1\,(8+\epsilon2)-\epsilon3))\,\rho0==0$

```
In[54]:= eq2 = 0 == K5 // Simplify
```

Out[54]= $dI1\epsilon\psi\epsilon\,\rho0==2\,dI2\epsilon\psi\epsilon\,\rho0$

```
In[55]:= eq3 = 0 == K6 // Simplify
```

Out[55]= $(dI1\epsilon\psi\epsilon - dI2\epsilon\psi\epsilon\,(10 + 2\,\epsilon 1^2 + 2\,\epsilon 2 + \epsilon 1\,(8 + \epsilon 2) - \epsilon 3))\,\rho 0 == 0$

```
In[56]:= sol = Solve[{eq1, eq2, eq3}, {dϵ2ψϵ, dϵ3ψϵ, dI1ϵψϵ, dI2ϵψϵ}]
Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. Plus…
```

Out[56]= $\{\{d\epsilon 3\psi\epsilon \to d\epsilon 2\psi\epsilon,\ dI1\epsilon\psi\epsilon \to 0,\ dI2\epsilon\psi\epsilon \to 0\}\}$

L'énergie libre **ψϵ** n'est fonction ni de **I1ϵ** ni de **I2ϵ** !

I

Calculs de distorsions maximales en anisotropie

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs effectués dans l'annexe E [p. 143].

Elle est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA® version 5.2.

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque `Tens3D`, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

Distorsions maximales en isotropie

Préparations

```
In[1]:= Needs["Tens3D`"]

In[2]:= G = MetricTensor; H = OrientationTensor; B0 = CanonicalBasis;

In[3]:= Off[General::spell]
```

Soit un tenseur de déformation **U** défini par ses composantes dans une base propre :

```
In[4]:= $Assumptions = λ1 > 0 && λ2 > 0 && λ3 > 0;

In[5]:= U = DefineTensor[{{λ1, 0, 0}, {0, λ2, 0}, {0, 0, λ3}}, {1, 1}, B0];
```

Soit **n0** la direction initiale d'anisotropie, définie par ses composantes dans la base propre du tenseur de déformation **U** :

```
In[6]:= n0 = DefineTensor[
          {n01 / Sqrt[n01^2 + n02^2 + n03^2], n02 / Sqrt[n01^2 + n02^2 + n03^2],
           n03 / Sqrt[n01^2 + n02^2 + n03^2]}, {1}, B0];
```

Soit un vecteur **a[μ]** quelconque non colinéaire à **n0**, défini par ses composantes dans une base propre du tenseur de déformation **U** :

```
In[7]:= a = DefineTensor[{a1[μ], a2[μ], a3[μ]}, {1}, B0];

In[8]:= x = a ∧ n0;
```

On engendre tous les vecteurs unitaires orthogonaux à **n0** par :

```
In[9]:= u0 = (1 / EuclidianNorm[x]) ∘ x;
```

On complète le système de vecteurs orthonormés **(n0,u0,v0)** :

```
In[10]:= v0 = n0 ∧ u0;
```

Vérifications :

```
In[11]:= {n0.u0, n0.v0, v0.u0 , u0.u0, v0.v0, n0.n0} // Simplify
```

```
Out[11]= {0, 0, 0, 1, 1, 1}
```

La dilatation linéique dans la direction matérielle initiale **u0** est :

```
In[12]:= Klu = EuclidianNorm[U.u0]
```

$$\text{Out[12]=}\ \sqrt{\left(\left(\left(n03^2\,\lambda 2^2+n02^2\,\lambda 3^2\right)a1[\mu]^2+\left(n03^2\,\lambda 1^2+n01^2\,\lambda 3^2\right)a2[\mu]^2-2\,n02\,n03\,\lambda 1^2\,a2[\mu]\,a3[\mu]+\left(n02^2\,\lambda 1^2+n01^2\,\lambda 2^2\right)a3[\mu]^2-2\,n01\,a1[\mu]\left(n02\,\lambda 3^2\,a2[\mu]+n03\,\lambda 2^2\,a3[\mu]\right)\right)\Big/\left(\left(n02^2+n03^2\right)a1[\mu]^2+\left(n01^2+n03^2\right)a2[\mu]^2-2\,n02\,n03\,a2[\mu]\,a3[\mu]+\left(n01^2+n02^2\right)a3[\mu]^2-2\,n01\,a1[\mu]\left(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]\right)\right)\right)}$$

La dilatation linéique dans la direction matérielle initiale **v0** est :

```
In[13]:= Klv = EuclidianNorm[U.v0]
```

$$\text{Out[13]=}\ \sqrt{\left(\left(\lambda 3^2\left(n01\,n03\,a1[\mu]+n02\,n03\,a2[\mu]-\left(n01^2+n02^2\right)a3[\mu]\right)^2+\lambda 2^2\left(n01\,n02\,a1[\mu]-\left(n01^2+n03^2\right)a2[\mu]+n02\,n03\,a3[\mu]\right)^2+\lambda 1^2\left(\left(n02^2+n03^2\right)a1[\mu]-n01\left(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]\right)\right)^2\right)\Big/\left(\left(n01^2+n02^2+n03^2\right)\left(\left(n02^2+n03^2\right)a1[\mu]^2+\left(n01^2+n03^2\right)a2[\mu]^2-2\,n02\,n03\,a2[\mu]\,a3[\mu]+\left(n01^2+n02^2\right)a3[\mu]^2-2\,n01\,a1[\mu]\left(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]\right)\right)\right)\right)}$$

La dilatation linéique dans la direction matérielle initiale **n0** est :

```
In[14]:= Kln = EuclidianNorm[U.n0]
```

$$\text{Out[14]=}\ \sqrt{\frac{n01^2\,\lambda 1^2+n02^2\,\lambda 2^2+n03^2\,\lambda 3^2}{n01^2+n02^2+n03^2}}$$

La dilatation surfacique de la facette de direction initiale **n0** est :

```
In[15]:= Ksn = I3[U] EuclidianNorm[ Inverse[U].n0]
```

$$\text{Out[15]=}\ \lambda 1\,\lambda 2\,\lambda 3\sqrt{\frac{n03^2\,\lambda 1^2\,\lambda 2^2+\left(n02^2\,\lambda 1^2+n01^2\,\lambda 2^2\right)\lambda 3^2}{\left(n01^2+n02^2+n03^2\right)\lambda 1^2\,\lambda 2^2\,\lambda 3^2}}$$

La dilatation surfacique de la facette de direction initiale **v0** est :

```
In[16]:= Ksv = EuclidianNorm[I3[U] ∘ Inverse[U].v0] // FullSimplify
```

$$\text{Out[16]=}\ \sqrt{\left(\left(\lambda 1^2\,\lambda 2^2\,(n01\,n03\,a1[\mu]+n02\,n03\,a2[\mu]-(n01^2+n02^2)\,a3[\mu])^2+\lambda 1^2\,\lambda 3^2\,(n01\,n02\,a1[\mu]-(n01^2+n03^2)\,a2[\mu]+n02\,n03\,a3[\mu])^2+\lambda 2^2\,\lambda 3^2\,((n02^2+n03^2)\,a1[\mu]-n01\,(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]))^2\right)\Big/\left((n01^2+n02^2+n03^2)\,((n02^2+n03^2)\,a1[\mu]^2+(n01^2+n03^2)\,a2[\mu]^2-2\,n02\,n03\,a2[\mu]\,a3[\mu]+(n01^2+n02^2)\,a3[\mu]^2-2\,n01\,a1[\mu]\,(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]))\right)\right)}$$

```
In[17]:= Kv = I3[U]
```

$$\text{Out[17]=}\ \lambda 1\,\lambda 2\,\lambda 3$$

Distorsion angulaire maximale du couple (n0,u0)

Distorsion angulaire

```
In[18]:= δa1 = Sqrt[(Klu Kln / Ksv)^2 // Simplify]
```

$$\text{Out[18]=}\ \sqrt{\left((n01^2\,\lambda 1^2+n02^2\,\lambda 2^2+n03^2\,\lambda 3^2)\,((n03^2\,\lambda 2^2+n02^2\,\lambda 3^2)\,a1[\mu]^2+(n03^2\,\lambda 1^2+n01^2\,\lambda 3^2)\,a2[\mu]^2-2\,n02\,n03\,\lambda 1^2\,a2[\mu]\,a3[\mu]+(n02^2\,\lambda 1^2+n01^2\,\lambda 2^2)\,a3[\mu]^2-2\,n01\,a1[\mu]\,(n02\,\lambda 3^2\,a2[\mu]+n03\,\lambda 2^2\,a3[\mu]))\right)\Big/\left(\lambda 1^2\,\lambda 2^2\,(n01\,n03\,a1[\mu]+n02\,n03\,a2[\mu]-(n01^2+n02^2)\,a3[\mu])^2+\lambda 1^2\,\lambda 3^2\,(n01\,n02\,a1[\mu]-(n01^2+n03^2)\,a2[\mu]+n02\,n03\,a3[\mu])^2+\lambda 2^2\,\lambda 3^2\,((n02^2+n03^2)\,a1[\mu]-n01\,(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]))^2\right)\right)}$$

Dérivée par rapport à μ :

```
In[19]:= X = D[δa1, μ] // Factor // Numerator
```

$$\begin{aligned}\text{Out[19]=}\ & -(n01^2\,\lambda 1^2+n02^2\,\lambda 2^2+n03^2\,\lambda 3^2)\\ & (-n02\,n03\,\lambda 2^2\,a1[\mu]+n02\,n03\,\lambda 3^2\,a1[\mu]+n01\,n03\,\lambda 1^2\,a2[\mu]-n01\,n03\,\lambda 3^2\,a2[\mu]-n01\,n02\,\lambda 1^2\,a3[\mu]+n01\,n02\,\lambda 2^2\,a3[\mu])\\ & (-n01\,n03^2\,\lambda 1^2\,\lambda 2^2\,a1[\mu]-n01\,n02^2\,\lambda 1^2\,\lambda 3^2\,a1[\mu]+n01\,n02^2\,\lambda 2^2\,\lambda 3^2\,a1[\mu]+n01\,n03^2\,\lambda 2^2\,\lambda 3^2\,a1[\mu]-n02\,n03^2\,\lambda 1^2\,\lambda 2^2\,a2[\mu]+n01^2\,n02\,\lambda 1^2\,\lambda 3^2\,a2[\mu]+n02\,n03^2\,\lambda 1^2\,\lambda 3^2\,a2[\mu]-n01^2\,n02\,\lambda 2^2\,\lambda 3^2\,a2[\mu]+n01^2\,n03\,\lambda 1^2\,\lambda 2^2\,a3[\mu]+n02^2\,n03\,\lambda 1^2\,\lambda 2^2\,a3[\mu]-n02^2\,n03\,\lambda 1^2\,\lambda 3^2\,a3[\mu]-n01^2\,n03\,\lambda 2^2\,\lambda 3^2\,a3[\mu])\\ & (-n03\,a2[\mu]\,a1'[\mu]+n02\,a3[\mu]\,a1'[\mu]+n03\,a1[\mu]\,a2'[\mu]-n01\,a3[\mu]\,a2'[\mu]-n02\,a1[\mu]\,a3'[\mu]+n01\,a2[\mu]\,a3'[\mu])\end{aligned}$$

Le résultat est un produit de 5 facteurs

```
In[20]:= {Head[X], Length[X]}

Out[20]= {Times, 5}

In[21]:= X[[1]]

Out[21]= -1

In[22]:= X[[2]]
```

Out[22]= $n01^2\,\lambda1^2 + n02^2\,\lambda2^2 + n03^2\,\lambda3^2$

```
In[23]:= X[[3]]
```

Out[23]= $-n02\,n03\,\lambda2^2\,a1[\mu] + n02\,n03\,\lambda3^2\,a1[\mu] + n01\,n03\,\lambda1^2\,a2[\mu] - n01\,n03\,\lambda3^2\,a2[\mu] - n01\,n02\,\lambda1^2\,a3[\mu] + n01\,n02\,\lambda2^2\,a3[\mu]$

```
In[24]:= sol1 = Solve[X[[3]] == 0, a1[μ]]
```

Out[24]= $\left\{\left\{a1[\mu] \to \frac{1}{n02\,n03\,(\lambda2^2 - \lambda3^2)}\,(n01\,n03\,\lambda1^2\,a2[\mu] - n01\,n03\,\lambda3^2\,a2[\mu] - n01\,n02\,\lambda1^2\,a3[\mu] + n01\,n02\,\lambda2^2\,a3[\mu])\right\}\right\}$

Cet extrémum est un minimum :

```
In[25]:= δa1 /. sol1[[1]] // Simplify

Out[25]= 1

In[26]:= X[[4]]
```

Out[26]= $-n01\,n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,a1[\mu] - n01\,n02^2\,\lambda1^2\,\lambda3^2\,a1[\mu] + n01\,n02^2\,\lambda2^2\,\lambda3^2\,a1[\mu] + n01\,n03^2\,\lambda2^2\,\lambda3^2\,a1[\mu] - n02\,n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,a2[\mu] + n01^2\,n02\,\lambda1^2\,\lambda3^2\,a2[\mu] + n02\,n03^2\,\lambda1^2\,\lambda3^2\,a2[\mu] - n01^2\,n02\,\lambda2^2\,\lambda3^2\,a2[\mu] + n01^2\,n03\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,a3[\mu] + n02^2\,n03\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,a3[\mu] - n02^2\,n03\,\lambda1^2\,\lambda3^2\,a3[\mu] - n01^2\,n03\,\lambda2^2\,\lambda3^2\,a3[\mu]$

```
In[27]:= sol = Solve[X[[4]] == 0, a1[μ]]
```

Out[27]= $\{\{a1[\mu] \to (-n02\,n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,a2[\mu] + n01^2\,n02\,\lambda1^2\,\lambda3^2\,a2[\mu] + n02\,n03^2\,\lambda1^2\,\lambda3^2\,a2[\mu] - n01^2\,n02\,\lambda2^2\,\lambda3^2\,a2[\mu] + n01^2\,n03\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,a3[\mu] + n02^2\,n03\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,a3[\mu] - n02^2\,n03\,\lambda1^2\,\lambda3^2\,a3[\mu] - n01^2\,n03\,\lambda2^2\,\lambda3^2\,a3[\mu]) / (n01\,(n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2 + n02^2\,\lambda1^2\,\lambda3^2 - n02^2\,\lambda2^2\,\lambda3^2 - n03^2\,\lambda2^2\,\lambda3^2))\}\}$

```
In[28]:= δa1max = δa1 /. sol[[1]] // FullSimplify
```

Out[28]= $\sqrt{\frac{(n01^2\,\lambda1^2 + n02^2\,\lambda2^2 + n03^2\,\lambda3^2)\,(n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2 + (n02^2\,\lambda1^2 + n01^2\,\lambda2^2)\,\lambda3^2)}{(n01^2 + n02^2 + n03^2)^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,\lambda3^2}}$

Interprétation :

```
In[29]:= δa1max^2 == Kln^2 Ksn^2 / Kv^2

Out[29]= True
```

La distorsion angulaire maximale esr donc : **δa1max =** $\frac{\mathbf{Kln\,Ksn}}{\mathbf{Kv}}$

```
In[30]:= X[[5]] // Collect[#, {a1′[μ], a2′[μ], a3′[μ]}] &

Out[30]= (-n03 a2[μ] + n02 a3[μ]) a1′[μ] +
          (n03 a1[μ] - n01 a3[μ]) a2′[μ] + (-n02 a1[μ] + n01 a2[μ]) a3′[μ]

In[31]:= eq1 = Coefficient[X[[5]], a1′[μ]] == 0

Out[31]= -n03 a2[μ] + n02 a3[μ] == 0

In[32]:= eq2 = Coefficient[X[[5]], a2′[μ]] == 0

Out[32]= n03 a1[μ] - n01 a3[μ] == 0

In[33]:= eq3 = Coefficient[X[[5]], a3′[μ]] == 0

Out[33]= -n02 a1[μ] + n01 a2[μ] == 0
```

Ces trois équations ne sont jamais nulles car **a0** est non colinéaire à **n0**

Distorsion angulaire maximale du couple (u0,v0)

```
In[34]:= δa2 = Sqrt[(Klu Klv / Ksn)^2 // Simplify]

Out[34]= √(((((n03^2 λ2^2 + n02^2 λ3^2) a1[μ]^2 + (n03^2 λ1^2 + n01^2 λ3^2) a2[μ]^2 -
                2 n02 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] + (n02^2 λ1^2 + n01^2 λ2^2) a3[μ]^2 -
                2 n01 a1[μ] (n02 λ3^2 a2[μ] + n03 λ2^2 a3[μ]))
              (λ3^2 (n01 n03 a1[μ] + n02 n03 a2[μ] - (n01^2 + n02^2) a3[μ])^2 +
                λ2^2 (n01 n02 a1[μ] - (n01^2 + n03^2) a2[μ] + n02 n03 a3[μ])^2 +
                λ1^2 ((n02^2 + n03^2) a1[μ] - n01 (n02 a2[μ] + n03 a3[μ]))^2)) /
            ((n03^2 λ1^2 λ2^2 + (n02^2 λ1^2 + n01^2 λ2^2) λ3^2)
              ((n02^2 + n03^2) a1[μ]^2 + (n01^2 + n03^2) a2[μ]^2 - 2 n02 n03 a2[μ] a3[μ] +
                (n01^2 + n02^2) a3[μ]^2 - 2 n01 a1[μ] (n02 a2[μ] + n03 a3[μ]))^2))
```

Dérivée par rapport à μ

```
In[35]:= Y = D[δa2, μ] // Factor // Numerator
```

```
Out[35]= (n01 n02 n03 λ2^2 a1[μ]^2 - n01 n02 n03 λ3^2 a1[μ]^2 + n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a2[μ] +
    n03^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - n01^2 n03 λ2^2 a1[μ] a2[μ] - n03^3 λ2^2 a1[μ] a2[μ] +
    n01^2 n03 λ3^2 a1[μ] a2[μ] - n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a2[μ] -
    n01 n02 n03 λ1^2 a2[μ]^2 + n01 n02 n03 λ3^2 a2[μ]^2 - n02^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
    n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a3[μ] - n01^2 n02 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
    n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + n01^2 n02 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
    n02^3 λ3^2 a1[μ] a3[μ] + n01 n02^2 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - n01 n03^2 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
    n01^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] + n01 n03^2 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - n01^3 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
    n01 n02^2 λ3^2 a2[μ] a3[μ] + n01 n02 n03 λ1^2 a3[μ]^2 - n01 n02 n03 λ2^2 a3[μ]^2)
  (n02^4 λ1^2 a1[μ]^2 + 2 n02^2 n03^2 λ1^2 a1[μ]^2 + n03^4 λ1^2 a1[μ]^2 +
    n01^2 n02^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 -
    n03^4 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^4 λ3^2 a1[μ]^2 +
    n01^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - 2 n01 n02^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] -
    2 n01 n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - 2 n01^3 n02 λ2^2 a1[μ] a2[μ] -
    2 n01 n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a2[μ] + 2 n01^3 n02 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
    2 n01 n02^3 λ3^2 a1[μ] a2[μ] + 4 n01 n02 n03^2 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
    n01^2 n02^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 -
    n03^4 λ1^2 a2[μ]^2 + n01^4 λ2^2 a2[μ]^2 + 2 n01^2 n03^2 λ2^2 a2[μ]^2 + n03^4 λ2^2 a2[μ]^2 -
    n01^4 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 +
    n02^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 - 2 n01 n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
    2 n01 n03^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01^3 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
    4 n01 n02^2 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01 n03^3 λ2^2 a1[μ] a3[μ] -
    2 n01^3 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] - 2 n01 n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
    4 n01^2 n02 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] + 2 n02^3 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
    2 n02 n03^3 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ2^2 a2[μ] a3[μ] -
    2 n02 n03^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
    2 n02^3 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] - n01^2 n02^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^4 λ1^2 a3[μ]^2 +
    n01^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n01^4 λ2^2 a3[μ]^2 -
    n01^2 n02^2 λ2^2 a3[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 + n02^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 +
    n01^4 λ3^2 a3[μ]^2 + 2 n01^2 n02^2 λ3^2 a3[μ]^2 + n02^4 λ3^2 a3[μ]^2)
  (-n03 a2[μ] a1′[μ] + n02 a3[μ] a1′[μ] + n03 a1[μ] a2′[μ] -
    n01 a3[μ] a2′[μ] - n02 a1[μ] a3′[μ] + n01 a2[μ] a3′[μ])
```

Le résultat est un produit de 3 facteurs :

```
In[36]:= {Head[Y], Length[Y]}
```

```
Out[36]= {Times, 3}
```

```
In[37]:= Y[[1]]

Out[37]= n01 n02 n03 λ2^2 a1[μ]^2 - n01 n02 n03 λ3^2 a1[μ]^2 + n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a2[μ] +
          n03^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - n01^2 n03 λ2^2 a1[μ] a2[μ] - n03^3 λ2^2 a1[μ] a2[μ] +
          n01^2 n03 λ3^2 a1[μ] a2[μ] - n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a2[μ] -
          n01 n02 n03 λ1^2 a2[μ]^2 + n01 n02 n03 λ3^2 a2[μ]^2 - n02^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
          n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a3[μ] - n01^2 n02 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
          n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + n01^2 n02 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
          n02^3 λ3^2 a1[μ] a3[μ] + n01 n02^2 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - n01 n03^2 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
          n01^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] + n01 n03^2 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - n01^3 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
          n01 n02^2 λ3^2 a2[μ] a3[μ] + n01 n02 n03 λ1^2 a3[μ]^2 - n01 n02 n03 λ2^2 a3[μ]^2

In[38]:= sol = Solve[Y[[1]] == 0, a1[μ]];

In[39]:= Length[sol]

Out[39]= 2
```

Les deux solutions conduisent au même extrémum qui est un minimum :

```
In[40]:= δa2^2 /. sol[[1]] // FullSimplify

Out[40]= 1

In[41]:= δa2^2 /. sol[[2]] // FullSimplify

Out[41]= 1
```

```
In[42]:= Y[[2]]
```

Out[42]=

$$
\begin{aligned}
&n02^4\,\lambda1^2\,a1[\mu]^2 + 2\,n02^2\,n03^2\,\lambda1^2\,a1[\mu]^2 + n03^4\,\lambda1^2\,a1[\mu]^2 + \\
&n01^2\,n02^2\,\lambda2^2\,a1[\mu]^2 - n01^2\,n03^2\,\lambda2^2\,a1[\mu]^2 - n02^2\,n03^2\,\lambda2^2\,a1[\mu]^2 - \\
&n03^4\,\lambda2^2\,a1[\mu]^2 - n01^2\,n02^2\,\lambda3^2\,a1[\mu]^2 - n02^4\,\lambda3^2\,a1[\mu]^2 + \\
&n01^2\,n03^2\,\lambda3^2\,a1[\mu]^2 - n02^2\,n03^2\,\lambda3^2\,a1[\mu]^2 - 2\,n01\,n02^3\,\lambda1^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] - \\
&2\,n01\,n02\,n03^2\,\lambda1^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] - 2\,n01^3\,n02\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] - \\
&2\,n01\,n02\,n03^2\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] + 2\,n01^3\,n02\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] + \\
&2\,n01\,n02^3\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] + 4\,n01\,n02\,n03^2\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] + \\
&n01^2\,n02^2\,\lambda1^2\,a2[\mu]^2 - n01^2\,n03^2\,\lambda1^2\,a2[\mu]^2 - n02^2\,n03^2\,\lambda1^2\,a2[\mu]^2 - \\
&n03^4\,\lambda1^2\,a2[\mu]^2 + n01^4\,\lambda2^2\,a2[\mu]^2 + 2\,n01^2\,n03^2\,\lambda2^2\,a2[\mu]^2 + n03^4\,\lambda2^2\,a2[\mu]^2 - \\
&n01^4\,\lambda3^2\,a2[\mu]^2 - n01^2\,n02^2\,\lambda3^2\,a2[\mu]^2 - n01^2\,n03^2\,\lambda3^2\,a2[\mu]^2 + \\
&n02^2\,n03^2\,\lambda3^2\,a2[\mu]^2 - 2\,n01\,n02^2\,n03\,\lambda1^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] - \\
&2\,n01\,n03^3\,\lambda1^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] + 2\,n01^3\,n03\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] + \\
&4\,n01\,n02^2\,n03\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] + 2\,n01\,n03^3\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] - \\
&2\,n01^3\,n03\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] - 2\,n01\,n02^2\,n03\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] + \\
&4\,n01^2\,n02\,n03\,\lambda1^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] + 2\,n02^3\,n03\,\lambda1^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] + \\
&2\,n02\,n03^3\,\lambda1^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] - 2\,n01^2\,n02\,n03\,\lambda2^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] - \\
&2\,n02\,n03^3\,\lambda2^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] - 2\,n01^2\,n02\,n03\,\lambda3^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] - \\
&2\,n02^3\,n03\,\lambda3^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] - n01^2\,n02^2\,\lambda1^2\,a3[\mu]^2 - n02^4\,\lambda1^2\,a3[\mu]^2 + \\
&n01^2\,n03^2\,\lambda1^2\,a3[\mu]^2 - n02^2\,n03^2\,\lambda1^2\,a3[\mu]^2 - n01^4\,\lambda2^2\,a3[\mu]^2 - \\
&n01^2\,n02^2\,\lambda2^2\,a3[\mu]^2 - n01^2\,n03^2\,\lambda2^2\,a3[\mu]^2 + n02^2\,n03^2\,\lambda2^2\,a3[\mu]^2 + \\
&n01^4\,\lambda3^2\,a3[\mu]^2 + 2\,n01^2\,n02^2\,\lambda3^2\,a3[\mu]^2 + n02^4\,\lambda3^2\,a3[\mu]^2
\end{aligned}
$$

```
In[43]:= sol = Solve[Y[[2]] == 0, a1[μ]];

In[44]:= Length[sol]

Out[44]= 2
```

Les deux solutions conduisent au même maximum

```
In[45]:= δa2^2 /. sol[[1]] // FullSimplify
```

Out[45]=

$$
\frac{\left(n03^2\,(\lambda1^2+\lambda2^2)+n02^2\,(\lambda1^2+\lambda3^2)+n01^2\,(\lambda2^2+\lambda3^2)\right)^2}{4\,(n01^2+n02^2+n03^2)\,\left(n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2+(n02^2\,\lambda1^2+n01^2\,\lambda2^2)\,\lambda3^2\right)}
$$

```
In[46]:= δa2maxcarre = δa2^2 /. sol[[2]] // FullSimplify
```

Out[46]=

$$
\frac{\left(n03^2\,(\lambda1^2+\lambda2^2)+n02^2\,(\lambda1^2+\lambda3^2)+n01^2\,(\lambda2^2+\lambda3^2)\right)^2}{4\,(n01^2+n02^2+n03^2)\,\left(n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2+(n02^2\,\lambda1^2+n01^2\,\lambda2^2)\,\lambda3^2\right)}
$$

Interprétation :

```
In[47]:= δa2maxcarre == (I1[U.U] (n0.G.n0) - Kln^2)^2 / Ksn^2 / 4 // Simplify

Out[47]= True
```

La distorsion maximale est donc : **δa2max** $= \frac{Tr[C]-Kln^2}{2\,Ksn}$

Distorsion stérique maximale du triplet (u0,v0,n0)

In[48]:= **δs = Klu Klv Kln / Kv**

Out[48]=

$$\frac{1}{\lambda 1\,\lambda 2\,\lambda 3}\left(\sqrt{\frac{n01^2\,\lambda 1^2+n02^2\,\lambda 2^2+n03^2\,\lambda 3^2}{n01^2+n02^2+n03^2}}\right.$$
$$\sqrt{\left(\left(n03^2\,\lambda 2^2+n02^2\,\lambda 3^2\right)a1[\mu]^2+\left(n03^2\,\lambda 1^2+n01^2\,\lambda 3^2\right)a2[\mu]^2-2\,n02\,n03\,\lambda 1^2\,a2[\mu]\,a3[\mu]+\left(n02^2\,\lambda 1^2+n01^2\,\lambda 2^2\right)a3[\mu]^2-2\,n01\,a1[\mu]\,\left(n02\,\lambda 3^2\,a2[\mu]+n03\,\lambda 2^2\,a3[\mu]\right)\right)\Big/\left(\left(n02^2+n03^2\right)a1[\mu]^2+\left(n01^2+n03^2\right)a2[\mu]^2-2\,n02\,n03\,a2[\mu]\,a3[\mu]+\left(n01^2+n02^2\right)a3[\mu]^2-2\,n01\,a1[\mu]\,\left(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]\right)\right)}$$
$$\sqrt{\left(\left(\lambda 3^2\,\left(n01\,n03\,a1[\mu]+n02\,n03\,a2[\mu]-\left(n01^2+n02^2\right)a3[\mu]\right)^2+\lambda 2^2\,\left(n01\,n02\,a1[\mu]-\left(n01^2+n03^2\right)a2[\mu]+n02\,n03\,a3[\mu]\right)^2+\lambda 1^2\,\left(\left(n02^2+n03^2\right)a1[\mu]-n01\,\left(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]\right)\right)^2\right)\Big/\left(\left(n01^2+n02^2+n03^2\right)\left(\left(n02^2+n03^2\right)a1[\mu]^2+\left(n01^2+n03^2\right)a2[\mu]^2-2\,n02\,n03\,a2[\mu]\,a3[\mu]+\left(n01^2+n02^2\right)a3[\mu]^2-2\,n01\,a1[\mu]\,\left(n02\,a2[\mu]+n03\,a3[\mu]\right)\right)\right)}\Bigg)$$

Dérivation par rapport à μ :

```
In[49]:= Z = D[δs^2, μ] // Simplify // Factor // Numerator
```

```
Out[49]= 2 (n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2)
  (n01 n02 n03 λ2^2 a1[μ]^2 - n01 n02 n03 λ3^2 a1[μ]^2 + n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a2[μ] +
    n03^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - n01^2 n03 λ2^2 a1[μ] a2[μ] - n03^3 λ2^2 a1[μ] a2[μ] +
    n01^2 n03 λ3^2 a1[μ] a2[μ] - n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a2[μ] -
    n01 n02 n03 λ1^2 a2[μ]^2 + n01 n02 n03 λ3^2 a2[μ]^2 - n02^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
    n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a3[μ] - n01^2 n02 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
    n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + n01^2 n02 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
    n02^3 λ3^2 a1[μ] a3[μ] + n01 n02^2 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - n01 n03^2 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
    n01^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] + n01 n03^2 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - n01^3 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
    n01 n02^2 λ3^2 a2[μ] a3[μ] + n01 n02 n03 λ1^2 a3[μ]^2 - n01 n02 n03 λ2^2 a3[μ]^2)
  (n02^4 λ1^2 a1[μ]^2 + 2 n02^2 n03^2 λ1^2 a1[μ]^2 + n03^4 λ1^2 a1[μ]^2 +
    n01^2 n02^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 -
    n03^4 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^4 λ3^2 a1[μ]^2 +
    n01^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - 2 n01 n02^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] -
    2 n01 n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - 2 n01^3 n02 λ2^2 a1[μ] a2[μ] -
    2 n01 n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a2[μ] + 2 n01^3 n02 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
    2 n01 n02^3 λ3^2 a1[μ] a2[μ] + 4 n01 n02 n03^2 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
    n01^2 n02^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 -
    n03^4 λ1^2 a2[μ]^2 + n01^4 λ2^2 a2[μ]^2 + 2 n01^2 n03^2 λ2^2 a2[μ]^2 + n03^4 λ2^2 a2[μ]^2 -
    n01^4 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 +
    n02^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 - 2 n01 n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
    2 n01 n03^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01^3 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
    4 n01 n02^2 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01 n03^3 λ2^2 a1[μ] a3[μ] -
    2 n01^3 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] - 2 n01 n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
    4 n01^2 n02 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] + 2 n02^3 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
    2 n02 n03^3 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ2^2 a2[μ] a3[μ] -
    2 n02 n03^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
    2 n02^3 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] - n01^2 n02^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^4 λ1^2 a3[μ]^2 +
    n01^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n01^4 λ2^2 a3[μ]^2 -
    n01^2 n02^2 λ2^2 a3[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 + n02^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 +
    n01^4 λ3^2 a3[μ]^2 + 2 n01^2 n02^2 λ3^2 a3[μ]^2 + n02^4 λ3^2 a3[μ]^2)
  (-n03 a2[μ] a1′[μ] + n02 a3[μ] a1′[μ] + n03 a1[μ] a2′[μ] -
    n01 a3[μ] a2′[μ] - n02 a1[μ] a3′[μ] + n01 a2[μ] a3′[μ])
```

Ce terme est un produit de 5 facteurs

```
In[50]:= {Head[Z], Length[Z]}

Out[50]= {Times, 5}

In[51]:= Z[[1]]

Out[51]= 2

In[52]:= Z[[2]]

Out[52]= n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2
```

```
In[53]:= Z[[3]]
```

Out[53]=
$$n01\,n02\,n03\,\lambda2^2\,a1[\mu]^2 - n01\,n02\,n03\,\lambda3^2\,a1[\mu]^2 + n02^2\,n03\,\lambda1^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] + n03^3\,\lambda1^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] - n01^2\,n03\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] - n03^3\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] + n01^2\,n03\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] - n02^2\,n03\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a2[\mu] - n01\,n02\,n03\,\lambda1^2\,a2[\mu]^2 + n01\,n02\,n03\,\lambda3^2\,a2[\mu]^2 - n02^3\,\lambda1^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] - n02\,n03^2\,\lambda1^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] - n01^2\,n02\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] + n02\,n03^2\,\lambda2^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] + n01^2\,n02\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] + n02^3\,\lambda3^2\,a1[\mu]\,a3[\mu] + n01\,n02^2\,\lambda1^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] - n01\,n03^2\,\lambda1^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] + n01^3\,\lambda2^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] + n01\,n03^2\,\lambda2^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] - n01^3\,\lambda3^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] - n01\,n02^2\,\lambda3^2\,a2[\mu]\,a3[\mu] + n01\,n02\,n03\,\lambda1^2\,a3[\mu]^2 - n01\,n02\,n03\,\lambda2^2\,a3[\mu]^2$$

```
In[54]:= sol = Solve[Z[[3]] == 0, a1[μ]];

In[55]:= Length[sol]
```

Out[55]= 2

Les deux solutions conduisent au même maximum :

```
In[56]:= δs^2 /. sol[[1]] // FullSimplify
```

Out[56]=
$$\frac{(n01^2\,\lambda1^2 + n02^2\,\lambda2^2 + n03^2\,\lambda3^2)\,(n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2 + (n02^2\,\lambda1^2 + n01^2\,\lambda2^2)\,\lambda3^2)}{(n01^2 + n02^2 + n03^2)^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,\lambda3^2}$$

```
In[57]:= δsmax1carre = δs^2 /. sol[[2]] // FullSimplify
```

Out[57]=
$$\frac{(n01^2\,\lambda1^2 + n02^2\,\lambda2^2 + n03^2\,\lambda3^2)\,(n03^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2 + (n02^2\,\lambda1^2 + n01^2\,\lambda2^2)\,\lambda3^2)}{(n01^2 + n02^2 + n03^2)^2\,\lambda1^2\,\lambda2^2\,\lambda3^2}$$

Interprétation :

```
In[58]:= δsmax1carre == Kln^2 Ksn^2 / Kv^2

Out[58]= True
```

Premier maximum de la distorsion stérique : $\delta\mathbf{smax1} = \dfrac{\mathbf{Kln\,Ksn}}{\mathbf{Kv}}$

```
In[59]:= Z[[4]]
```

```
Out[59]= n02^4 λ1^2 a1[μ]^2 + 2 n02^2 n03^2 λ1^2 a1[μ]^2 + n03^4 λ1^2 a1[μ]^2 +
  n01^2 n02^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 -
  n03^4 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^4 λ3^2 a1[μ]^2 +
  n01^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - 2 n01 n02^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] -
  2 n01 n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - 2 n01^3 n02 λ2^2 a1[μ] a2[μ] -
  2 n01 n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a2[μ] + 2 n01^3 n02 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
  2 n01 n02^3 λ3^2 a1[μ] a2[μ] + 4 n01 n02 n03^2 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
  n01^2 n02^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 -
  n03^4 λ1^2 a2[μ]^2 + n01^4 λ2^2 a2[μ]^2 + 2 n01^2 n03^2 λ2^2 a2[μ]^2 + n03^4 λ2^2 a2[μ]^2 -
  n01^4 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 +
  n02^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 - 2 n01 n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
  2 n01 n03^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01^3 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
  4 n01 n02^2 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01 n03^3 λ2^2 a1[μ] a3[μ] -
  2 n01^3 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] - 2 n01 n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
  4 n01^2 n02 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] + 2 n02^3 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
  2 n02 n03^3 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ2^2 a2[μ] a3[μ] -
  2 n02 n03^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
  2 n02^3 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] - n01^2 n02^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^4 λ1^2 a3[μ]^2 +
  n01^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n01^4 λ2^2 a3[μ]^2 -
  n01^2 n02^2 λ2^2 a3[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 + n02^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 +
  n01^4 λ3^2 a3[μ]^2 + 2 n01^2 n02^2 λ3^2 a3[μ]^2 + n02^4 λ3^2 a3[μ]^2
```

```
In[60]:= sol = Solve[Z[[4]] == 0, a1[μ]];
```

```
In[61]:= Length[sol]
```

```
Out[61]= 2
```

Les deux solutions conduisent au même maximum :

```
In[62]:= δs^2 /. sol[[1]] // Simplify
```

```
Out[62]= ((n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2)
    (n03^2 (λ1^2 + λ2^2) + n02^2 (λ1^2 + λ3^2) + n01^2 (λ2^2 + λ3^2))^2) /
  (4 (n01^2 + n02^2 + n03^2)^3 λ1^2 λ2^2 λ3^2)
```

```
In[63]:= δsmax2carre = δs^2 /. sol[[2]] // Simplify
```

```
Out[63]= ((n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2)
    (n03^2 (λ1^2 + λ2^2) + n02^2 (λ1^2 + λ3^2) + n01^2 (λ2^2 + λ3^2))^2) /
  (4 (n01^2 + n02^2 + n03^2)^3 λ1^2 λ2^2 λ3^2)
```

Interprétation :

```
In[64]:= δsmax2carre == Kln^2 (I1[U.U] - Kln^2)^2 / Kv^2 / 4 // Simplify
Out[64]= True
```

Second maximum de la distorsion stérique : **δsmax2 =** $\dfrac{\mathbf{Kln\,(Tr[C] - Kln^2)}}{\mathbf{2\,Kv}}$

```
In[65]:= Z[[5]] // Collect[#, {a1′[μ], a2′[μ], a3′[μ]}] &
Out[65]= (-n03 a2[μ] + n02 a3[μ]) a1′[μ] +
          (n03 a1[μ] - n01 a3[μ]) a2′[μ] + (-n02 a1[μ] + n01 a2[μ]) a3′[μ]
```

Ce terme n'est jamais nul car **a0** est non colinéaire à **n0**.

■ Comparaison des extrémums

```
In[66]:= XX = δsmax2carre - δsmax1carre // Factor // Numerator // FullSimplify
Out[66]= (n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2) (n02^4 (λ1^2 - λ3^2)^2 + 2 n02^2 (λ1 - λ3)
            (λ1 + λ3) (n03^2 (λ1 - λ2) (λ1 + λ2) + n01^2 (λ2 - λ3) (λ2 + λ3)) +
           (n03^2 (λ1 - λ2) (λ1 + λ2) + n01^2 (-λ2^2 + λ3^2))^2)
```

Si **λ1 >= λ2 >= λ3 > 0**

```
In[67]:= XX[[1]] >= 0
Out[67]= n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2 ≥ 0

In[68]:= XX[[2, 1]] ≥ 0
Out[68]= n02^4 (λ1^2 - λ3^2)^2 ≥ 0

In[69]:= XX[[2, 2]] ≥ 0
Out[69]= 2 n02^2 (λ1 - λ3) (λ1 + λ3)
           (n03^2 (λ1 - λ2) (λ1 + λ2) + n01^2 (λ2 - λ3) (λ2 + λ3)) ≥ 0

In[70]:= XX[[2, 3]] ≥ 0
Out[70]= (n03^2 (λ1 - λ2) (λ1 + λ2) + n01^2 (-λ2^2 + λ3^2))^2 ≥ 0
```

On a donc **δsmax2 > δsmax1**

J

Calculs du chapitre 6

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs dans la construction du modèle de comportement élastique isotrope transverse présenté dans le chapitre 6 [p. 81].

Cette feuille de calcul est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA® dans sa version 5.2. Elle utilise, pour les quelques calculs tensoriels, des fonctionnalités de la bibliothèque `Tens3D` écrite par l'auteur pour pratiquer l'algèbre et l'analyse tensorielle dans le cadre de la physique classique dans des bases quelconques et des systèmes de coordonnées quelconques. Cette bibliothèque (développée dans la version 5.2 de MATHEMATICA®) est téléchargeable à : `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html`

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque `Tens3D`, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

Modèle élastique isotrope transverse (T,Kv,δ,a)

Préparations

■ Le package Tens3D (pour les calculs tensoriels)

Le package Tens3D est utile pour les quelques calculs tensoriels qui suivent.
Il est téléchargeable à http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html (pour la version 5.2 de *Mathematica*)

```
In[1]:= Needs["Tens3D`"]
```

Raccourcis de notations :

```
In[2]:= G = MetricTensor; B0 = CanonicalBasis;
```

Vecteurs de base :

```
In[3]:= {e1, e2, e3} = BasisVectors[B0];
```

■ Préparation du système de coordonnées cartésiennes orthonormées

```
In[4]:= OM = DefineTensor[{x1, x2, x3}, {1}, B0];

In[5]:= SC = DefineCoordinateSystem[OM, {x1, x2, x3}];

        Direct normalized orthogonal natural basis.

In[6]:= Off[General::spell]
```

■ Une fonction qui change le nom des variables muettes dans une intégrale :

Le premier argument est une expression et le second est le nom désiré pour la variable muette
(Attention, cette fonction ne marche bien que si toutes les variables muettes **K$xxx** de **expr** ont le même nom)

```
In[7]:= ChVarMu = Function[{expr, var},
          MapAll[If[ToString[Head[#]] == "Integrate" && StringMatchQ[ToString[#[[2, 1]]], "K$*"],
             # /. #[[2, 1]] → var, #] &, expr ]]

Out[7]= Function[{expr, var},
         (If[ToString[Head[#1]] == Integrate && StringMatchQ[ToString[#1[[2, 1]]], K$*],
             #1 /. #1[[2, 1]] → var, #1] &) //@ expr]
```

■ Une fonction qui développe les sommes d'intégrandes

```
In[8]:= DevelopInt = Function[X,
          If[ToString[Head[X]] == "Integrate" (* test si l'argument est une intégrale *) ,
           Distribute[Integrate[Expand[ X[[1]] ], X[[2]] ]],
           X ](* If :  inchangé sinon  *)
         ]
```

Out[8]= $\text{Function}\left[X, \text{If}\left[\text{ToString}[\text{Head}[X]] == \text{Integrate}, \text{Distribute}\left[\int \text{Expand}[X[[1]]]\, dX[[2]], X\right]\right]\right]$

■ Une fonction qui sort les constantes des intégrales

```
In[9]:= SorsConst = Function[X,
          If[ToString[Head[X]] == "Integrate" && (* test si l'argument est une intégrale *)
            ToString[Head[X[[1]]]] == "Times",  (* et si l'intégrande est un produit *)
           Apply[Times,
             Select[
              Apply[List, X[[1]] ], (* Apply[List, : transformation de l'intégrande en liste *)
              FreeQ[#, X[[2, 1]]] &
              (* FreeQ : test si l'élément ne contient pas la variable d'intégration *)
             ] (* Select : sélection des éléments constants *)
            ] (* Apply[Times, : produit des constantes *)
            *  (* produit des constantes par l'intégrale restante *)
            Integrate[
             Apply[Times,
              Select[
               Apply[List, X[[1]]],  (* transformation de l'intégrande en liste *)
               ! FreeQ[#, X[[2, 1]]] &
               (* !FreeQ : test si l'élément contient la variable d'intégration *)
              ] (* Select : sélection des éléments non constants *)
             ] (* Apply[Times, : produit des éléments non constants *)
             , X[[2]]] (* Integrate : intégration des éléments non constant *)
           , X] (* If : inchangé sinon *)
         ]
```

Out[9]= $\text{Function}\left[X, \text{If}\left[\text{ToString}[\text{Head}[X]] == \text{Integrate} \,\&\&\, \text{ToString}[\text{Head}[X[[1]]]] == \text{Times}, \text{Times} @@ \text{Select}[\text{List} @@ X[[1]], \text{FreeQ}[\#1, X[[2, 1]]] \,\&] \int \text{Times} @@ \text{Select}[\text{List} @@ X[[1]], !\,\text{FreeQ}[\#1, X[[2, 1]]] \,\&]\, dX[[2]], X\right]\right]$

■ Une fonction qui fait les deux précédentes

```
In[10]:= ArrangeInt = Function[X, MapAll[SorsConst, MapAll[DevelopInt, X]]]
```

Out[10]= Function[X, SorsConst //@ DevelopInt //@ X]

```
In[11]:= Integrate[f[x], {x, x1, x2}] + Integrate[-f[x], {x, x1, x2}] //
          Simplify (* Simplify ne fait rien *)
```

Out[11]= $\int_{x1}^{x2} -f[x]\, dx + \int_{x1}^{x2} f[x]\, dx$

```
In[12]:= % // ArrangeInt

Out[12]= 0
```

Forme générale des fonctions d'état

Quelques hypothèses physiques destinées à aider les simplifications et les intégrations :

```
In[13]:= $Assumptions =
           $Assumptions && T > 0 && T0 > 0 && a > 0 && Kv > 0 && δ > 1 && ρ0 > 0 && γ > 0 && a > 0;
```

Remplacements pour obtenir les valeurs à l'état initial :

```
In[14]:= EtatInitial = {T → T0, Kv → 1, δ → 1, a → 1};
```

■ Energie libre de Helmholtz

```
In[15]:= ψ = g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, δ] + g4[T, Kv, δ, a];

In[16]:= g1[T0] = 0 ; g2[_, 1] := 0 ; g3[_, _, 1] := 0 ; g4[_, _, _, 1] := 0;
```

■ Entropie massique (relation de Helmholtz)

```
In[17]:= s = -D[ψ, T]

Out[17]= -g1′[T] - g2^(1,0)[T, Kv] - g3^(1,0,0)[T, Kv, δ] - g4^(1,0,0,0)[T, Kv, δ, a]
```

■ Energie interne massique

```
In[18]:= e = ψ + T s

Out[18]= g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, δ] + g4[T, Kv, δ, a] +
          T (-g1′[T] - g2^(1,0)[T, Kv] - g3^(1,0,0)[T, Kv, δ] - g4^(1,0,0,0)[T, Kv, δ, a])
```

■ Tenseur des contraintes (éq. (6.8) du cours)

```
In[19]:= KG = ρ0 (D[ψ, Kv] - δ / Kv D[ψ, δ] - 2 a / 3 / Kv D[ψ, a]) // Expand // ArrangeInt ;

In[20]:= KB = ρ0 δ^(1 / 3) / Kv^(5 / 3) D[ψ, δ] // Expand // ArrangeInt;

In[21]:= KsymNtB = 4 ρ0 / Kv^(5 / 3) D[ψ, a] // Expand // ArrangeInt;

In[22]:= KNt = -2 ρ0 a / Kv D[ψ, a] // Expand // ArrangeInt;
```

Définition tensorielle du tenseur des contraintes : (exécution retardée (**:=**) car les valeurs de B et Nt ne sont pas encore définies)

```
In[23]:= σ := KG ∘ G ⊕ KB ∘ B ⊕ KsymNtB ∘ Sym[Nt.B] ⊕ KNt ∘ Nt ;
         (* Les symboles ∘ et ⊕ sont des opérateurs définis dans Tens3D *)
```

Chemin $C^{(1)}$ (variation de température sans déformation)

```
In[24]:= Chemin1 = {Kv → 1, δ → 1, a → 1};
```

■ Direction d'anisotropie

```
In[25]:= Nt = e3 ⊗ e3;
```

■ Tenseur de déformation

```
In[26]:= B = G;
```

■ Tenseur des contraintes

```
In[27]:= σ1 = σ;

In[28]:= compσ1 = (σ1 // Components) /. Chemin1 // Simplify

         Note: Components in CanonicalBasis
```

Out[28]= $\left\{\left\{\rho 0\, g2^{(0,1)}[T,1] + \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T,1,1] - \frac{2}{3}\rho 0\, g4^{(0,0,0,1)}[T,1,1,1] + \rho 0\, g4^{(0,1,0,0)}[T,1,1,1],\ 0,\ 0\right\},\ \left\{0,\ \rho 0\, g2^{(0,1)}[T,1] + \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T,1,1] - \frac{2}{3}\rho 0\, g4^{(0,0,0,1)}[T,1,1,1] + \rho 0\, g4^{(0,1,0,0)}[T,1,1,1],\ 0\right\},\ \left\{0,\ 0,\ \rho 0\, g2^{(0,1)}[T,1] + \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T,1,1] + \frac{4}{3}\rho 0\, g4^{(0,0,0,1)}[T,1,1,1] + \rho 0\, g4^{(0,1,0,0)}[T,1,1,1]\right\}\right\}$

Vérifications :

```
In[29]:= {compσ1[[1, 1]] - compσ1[[2, 2]] , compσ1[[1, 2]] , compσ1[[1, 3]] , compσ1[[2, 3]]}

Out[29]= {0, 0, 0, 0}
```

■ mesure de chaleur massique à déformation nulle : `Q1Exp[T]` (premier principe global)

```
In[30]:= eq1 = (e /. Chemin1) == Q1Exp[T]
```

Out[30]= $g1[T] + T\left(-g1'[T] - g2^{(1,0)}[T,1] - g3^{(1,0,0)}[T,1,1] - g4^{(1,0,0,0)}[T,1,1,1]\right) == Q1Exp[T]$

```
In[31]:= Q1Exp[T0] = 0;
```

■ Résolution de `eq1` (on trouve `g1`)

In[32]:=
```
sol = DSolve[eq1, g1, T] // Simplify
```

Out[32]=

$$\left\{\left\{g1 \to \text{Function}\left[\{T\}, T\,C[1] + T\int_1^T \frac{1}{K\$281^2}\left(-Q1Exp[K\$281] - K\$281\, g2^{(1,0)}[K\$281, 1] - K\$281\, g3^{(1,0,0)}[K\$281, 1, 1] - K\$281\, g4^{(1,0,0,0)}[K\$281, 1, 1, 1]\right) dK\$281\right]\right\}\right\}$$

In[33]:=
```
sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
    C[1] → g11 (* changement de nom de C[1] *) /.
   {dx_, 1, T} → {dx, T0, T} (* changement de la borne inférieure *) //
  ChVarMu[#, Tx] & (* changement de nom de la variable muette *) // ArrangeInt // Expand
```

Out[33]=

$$g11\,T - T\int_{T0}^{T} \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g4^{(1,0,0,0)}[Tx, 1, 1, 1]}{Tx}\, dTx$$

In[34]:=
```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g1 *)
```

In[35]:=
```
g1[T]
```

Out[35]=

$$g11\,T - T\int_{T0}^{T} \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g4^{(1,0,0,0)}[Tx, 1, 1, 1]}{Tx}\, dTx$$

In[36]:=
```
cond = 0 == g1[T0]
```

Out[36]= $0 == g11\,T0$

In[37]:=
```
sol = Solve[cond, g11]
```

Out[37]= $\{\{g11 \to 0\}\}$

In[38]:=
```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g11 *)
```

RESULTAT

In[39]:=
```
g1[T]
```

Out[39]=

$$-T\int_{T0}^{T} \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx}\, dTx - T\int_{T0}^{T} \frac{g4^{(1,0,0,0)}[Tx, 1, 1, 1]}{Tx}\, dTx$$

In[40]:=
```
g1[T0]
```

Out[40]= 0

Chemin $C^{(2)}$ (déformation sphérique isotherme)

In[41]:=
```
Chemin2 = {δ → 1, a → 1}
```

Out[41]= $\{\delta \to 1, a \to 1\}$

■ Direction d'anisotropie

```
In[42]:= Nt = e3 ⊗ e3;
```

■ Tenseur de déformation

```
In[43]:= F2 = (Kv^(1/3)) ∘ G;

In[44]:= B = F2.F2ᵀ;

In[45]:= B // Components // MatrixForm

         Note: Components in CanonicalBasis
```

Out[45]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

■ Tenseur des contraintes

```
In[46]:= σ2 = σ;

In[47]:= compσ2 = (σ2 // Components) /. Chemin2 // Simplify

         Note: Components in CanonicalBasis
```

Out[47]=

$$\left\{\left\{\rho 0\, g2^{(0,1)}[T, Kv] + \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T, Kv, 1] - \frac{2\,\rho 0\, g4^{(0,0,0,1)}[T, Kv, 1, 1]}{3\,Kv} + \rho 0\, g4^{(0,1,0,0)}[T, Kv, 1, 1], 0, 0\right\}, \left\{0, \rho 0\, g2^{(0,1)}[T, Kv] + \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T, Kv, 1] - \frac{2\,\rho 0\, g4^{(0,0,0,1)}[T, Kv, 1, 1]}{3\,Kv} + \rho 0\, g4^{(0,1,0,0)}[T, Kv, 1, 1], 0\right\}, \left\{0, 0, \rho 0\, g2^{(0,1)}[T, Kv] + \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T, Kv, 1] + \frac{4\,\rho 0\, g4^{(0,0,0,1)}[T, Kv, 1, 1]}{3\,Kv} + \rho 0\, g4^{(0,1,0,0)}[T, Kv, 1, 1]\right\}\right\}$$

Vérifications le tenseur des contraintes est bien diagonal :

```
In[48]:= {compσ2[[1, 1]] - compσ2[[2, 2]] , compσ2[[1, 2]] , compσ2[[1, 3]] , compσ2[[2, 3]]}

Out[48]= {0, 0, 0, 0}
```

■ mesure mécanique

contrainte moyenne

```
In[49]:= eq2tr = σ2m[T, Kv] == (compσ2[[1, 1]] + compσ2[[2, 2]] + compσ2[[3, 3]]) / 3 // Simplify

Out[49]= σ2m[T, Kv] == ρ0 (g2^(0,1)[T, Kv] + g3^(0,1,0)[T, Kv, 1] + g4^(0,1,0,0)[T, Kv, 1, 1])
```

■ Résolution

```
In[50]:= sol = DSolve[eq2tr, g2, {T, Kv}]
```

Out[50]= $\left\{\left\{g2 \to \text{Function}\left[\{T, Kv\}, \int_1^{Kv} \frac{\sigma 2m[T, K\$666] - \rho 0\, g3^{(0,1,0)}[T, K\$666, 1] - \rho 0\, g4^{(0,1,0,0)}[T, K\$666, 1, 1]}{\rho 0}\, dK\$666 + C[1][T]\right]\right\}\right\}$

```
In[51]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /. C[1] → g21 // ChVarMu[#, Kvx] & // ArrangeInt
```

Out[51]= $g21[T] + \frac{\int_1^{Kv} \sigma 2m[T, Kvx]\, dKvx}{\rho 0} - \int_1^{Kv} g3^{(0,1,0)}[T, Kvx, 1]\, dKvx - \int_1^{Kv} g4^{(0,1,0,0)}[T, Kvx, 1, 1]\, dKvx$

```
In[52]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g2 *)
In[53]:= cond = 0 == g2[T, 1]
```

Out[53]= $0 == g21[T]$

```
In[54]:= sol = DSolve[cond, g21, T]
```

Out[54]= $\{\{g21 \to \text{Function}[\{T\}, 0]\}\}$

```
In[55]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g21 *)
```

RESULTAT :

```
In[56]:= g2[T, Kv]
```

Out[56]= $\frac{\int_1^{Kv} \sigma 2m[T, Kvx]\, dKvx}{\rho 0} - \int_1^{Kv} g3^{(0,1,0)}[T, Kvx, 1]\, dKvx - \int_1^{Kv} g4^{(0,1,0,0)}[T, Kvx, 1, 1]\, dKvx$

```
In[57]:= g2[T, 1]
```

Out[57]= 0

Chemin $C^{(3)}$ (glissement dans le plan transversal)

```
In[58]:= chemin3 = {a → 1};
```

■ Direction d'anisotropie

```
In[59]:= Nt = e3 ⊗ e3;
```

■ Gradient de la transformation

In[60]:=
```
F = DefineTensor[{{1, γ, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}, {1, 1}, B0];
F3 = F.F2;  (* F2 : dilatation sphérique initiale *)
F3 // Components // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

Out[61]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{1/3} & Kv^{1/3}\,\gamma & 0 \\ 0 & Kv^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{1/3} \end{pmatrix}$$

■ Tenseur de déformation

In[62]:=
```
B = F3 . F3ᵀ;
```

In[63]:=
```
B // Components // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

Out[63]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3}\,(1+\gamma^2) & Kv^{2/3}\,\gamma & 0 \\ Kv^{2/3}\,\gamma & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

■ Relation γ <-> δ

In[64]:=
```
eq = δ == (Sqrt[3] / 9 I1[B] ^ (3 / 2) / I3[B] ^ (1 / 2) // Simplify)
```

Out[64]= $\delta == \frac{(3+\gamma^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}}$

In[65]:=
```
Solve[eq, γ]
```

Out[65]=

$$\left\{\left\{\gamma \to -\sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\right\}, \left\{\gamma \to \sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\right\}, \left\{\gamma \to -\sqrt{-3-\frac{3\,\delta^{2/3}}{2}-\frac{3}{2}\,i\,\sqrt{3}\,\delta^{2/3}}\right\}, \left\{\gamma \to \sqrt{-3-\frac{3\,\delta^{2/3}}{2}-\frac{3}{2}\,i\,\sqrt{3}\,\delta^{2/3}}\right\}, \left\{\gamma \to -\sqrt{-3-\frac{3\,\delta^{2/3}}{2}+\frac{3}{2}\,i\,\sqrt{3}\,\delta^{2/3}}\right\}, \left\{\gamma \to \sqrt{-3-\frac{3\,\delta^{2/3}}{2}+\frac{3}{2}\,i\,\sqrt{3}\,\delta^{2/3}}\right\}\right\}$$

In[66]:=
```
γ = √3 √(-1 + δ^(2/3))
```

Out[66]= $\sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}$

■ Tenseur des contraintes

In[67]:=
```
σ3 = σ;
```

In[68]:=
```
compσ3 = (σ3 // Components) /. chemin3 // Simplify;
```

Note: Components in CanonicalBasis

■ mesure de contrainte de cisaillement

In[69]:= **eq3 = τ3Exp[T, Kv, δ] == compσ3[[1, 2]]**

Out[69]= $\tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta] == \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\,\delta^{1/3}\,\rho 0\,(g3^{(0,0,1)}[T, Kv, \delta] + g4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, 1])}{Kv}$

■ Resolution de eq3

In[70]:= **sol = DSolve[eq3, g3, {T, Kv, δ}]**

Out[70]= $\{\{g3 \to \text{Function}[\{T, Kv, \delta\}, \int_1^{\delta} -\frac{-Kv\,\tau 3\text{Exp}[T, Kv, K\$987] + \sqrt{3}\,\sqrt{-1+K\$987^{2/3}}\,K\$987^{1/3}\,\rho 0\,g4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, K\$987, 1]}{\sqrt{3}\,\sqrt{-1+K\$987^{2/3}}\,K\$987^{1/3}\,\rho 0}\,dK\$987 + C[1][T, Kv]]\}\}$

In[71]:= **sol[[1, 1, 2, 2]] = (sol[[1, 1, 2, 2]] /. C[1] → g31 // ChVarMu[#, δx] & // ArrangeInt)**

Out[71]= $g31[T, Kv] + \frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}[T,Kv,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}\,\rho 0} - \int_1^{\delta} g4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta x, 1]\,d\delta x$

In[72]:= **Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g3 *)**

In[73]:= **cond = 0 == g3[T, Kv, 1]**

Out[73]= $0 == g31[T, Kv]$

In[74]:= **sol = DSolve[cond, g31, {T, Kv}]**

Out[74]= $\{\{g31 \to \text{Function}[\{T, Kv\}, 0]\}\}$

In[75]:= **Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g31 *)**

RESULTAT

In[76]:= **g3[T, Kv, δ]**

Out[76]= $\frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}[T,Kv,\delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}}\,\delta x^{1/3}}\,d\delta x}{\sqrt{3}\,\rho 0} - \int_1^{\delta} g4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta x, 1]\,d\delta x$

In[77]:= **g3[T, Kv, 1]**

Out[77]= 0

Chemin $C^{(4)}$ (dir. anisotropie dans le plan de glissement)

■ Tenseur de déformation

```
In[78]:= $Assumptions =
          $Assumptions && θ1 > 0 && θ1 < π / 2 && λ > 1 && αt > 0 && αt < π / 2 && a <= λ^2 && a ≥ λ^(-2)
```

Out[78]= $T > 0 \,\&\&\, T0 > 0 \,\&\&\, a > 0 \,\&\&\, Kv > 0 \,\&\&\, \delta > 1 \,\&\&\, \rho 0 > 0 \,\&\&\, \sqrt{3}\,\sqrt{-1+\delta^{2/3}} > 0 \,\&\&$
$a > 0 \,\&\&\, \theta 1 > 0 \,\&\&\, \theta 1 < \frac{\pi}{2} \,\&\&\, \lambda > 1 \,\&\&\, \alpha t > 0 \,\&\&\, \alpha t < \frac{\pi}{2} \,\&\&\, a \le \lambda^2 \,\&\&\, a \ge \frac{1}{\lambda^2}$

Première direction propre de déformation (λ)

```
In[79]:= v1 = DefineTensor[{Cos[θ1] , Sin[θ1], 0}, {1}, B0];
```

Troisième direction propre de déformation ($1/\lambda$)

```
In[80]:= v3 = DefineTensor[{-Sin[θ1] , Cos[θ1], 0}, {1}, B0];
```

Seconde direction propre de déformation (1)

```
In[81]:= v2 = v3 ∧ v1;
```

Définition de la base propre

```
In[82]:= Bpr = DefineBasis[v1, v2, v3];

         Direct normalized orthogonal basis.
```

Définition du tenseur de déformation par ses composantes dans sa base propre

```
In[83]:= B = Kv^(2 / 3) ∘ DefineTensor[{{λ^2 , 0 , 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, λ^(-2)}}, {1, 1}, Bpr];

In[84]:= Components[B, {1, -1}, Bpr] // MatrixForm
```

Out[84]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3}\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Kv^{2/3}}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

■ Direction d'anisotropie

Les composantes de **nt** sont données dans la base propre **Bpr**

```
In[85]:= nt = DefineTensor[{Cos[αt], 0, Sin[αt]}, {1}, Bpr];

In[86]:= Nt = nt ⊗ nt;
```

Calcul de **Cos[αt]²** en fonction de **a**

```
In[87]:= eq = a == ((B : Nt) / Kv^(2/3) /.
            Sin[αt]^2 → 1 - Cos[αt]^2 // Collect[#, {Kv, Cos[αt]^2}, Simplify] &) /. Cos[αt]^2 → CC
```

Out[87]= $a == \frac{1}{\lambda^2} + \frac{CC\,(-1+\lambda^4)}{\lambda^2}$

```
In[88]:= solCC = Solve[eq, CC]
```

Out[88]= $\left\{\left\{CC \to \frac{-1+a\,\lambda^2}{-1+\lambda^4}\right\}\right\}$

■ Tenseur des contraintes

```
In[89]:= σ4 = σ;

In[90]:= compσ4 = σ4 // Components // TrigFactor // Simplify;

         Note: Components in CanonicalBasis
```

■ mesure de la contrainte de cisaillement

```
In[91]:= eq4 =
          τ4Exp[T, Kv, δ, a] == (compσ4[[1, 2]] // Collect[#, {g4^(0,0,0,1)[T, Kv, δ, a]}, Simplify] &) /.
           αt → ArcCos[Sqrt[(-1 + a λ^2)/(-1 + λ^4)]] (* voir Out[91] *)
```

Out[91]= $\tau 4Exp[T, Kv, \delta, a] == \frac{\rho 0\left((-1+\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1] + (1-a\,\lambda^2+\lambda^4)\,Sin\left[2\left(\theta 1 + ArcCos\left[\sqrt{\frac{-1+a\,\lambda^2}{-1+\lambda^4}}\right]\right)\right]\right) g4^{(0,0,0,1)}[T, Kv, \delta, a]}{Kv\,\lambda^2} + \frac{1}{6\,Kv\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\,\lambda^2}\left((-1+\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1]\left(\sqrt{3}\,Kv\,\tau 3Exp[T, Kv, \delta] + 3\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\,\delta^{1/3}\,\rho 0\,(-g4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, 1] + g4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, a])\right)\right)$

Simplification du Sinus

```
In[92]:= X = Sin[2 (θ1 + ArcCos[Sqrt[(-1 + a λ^2)/(-1 + λ^4)]])] // TrigExpand // Simplify
```

Out[92]= $\frac{2\sqrt{-\lambda^4 - a^2\,\lambda^4 + a\,(\lambda^2+\lambda^6)}\,Cos[2\,\theta 1] + (-1+2\,a\,\lambda^2-\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1]}{-1+\lambda^4}$

```
In[93]:= eq4 = eq4 /. Sin[2 (θ1 + ArcCos[Sqrt[(-1 + a λ^2)/(-1 + λ^4)]])] → X // Simplify
```

Out[93]= $\tau 4Exp[T, Kv, \delta, a] == \frac{1}{6\,Kv\,\lambda^2}\left(6\,\rho 0\left((-1+\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1] - \frac{(1-a\,\lambda^2+\lambda^4)\left(-2\sqrt{-\lambda^4-a^2\,\lambda^4+a\,(\lambda^2+\lambda^6)}\,Cos[2\,\theta 1] + (1-2\,a\,\lambda^2+\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1]\right)}{-1+\lambda^4}\right) g4^{(0,0,0,1)}[T, Kv, \delta, a] + \frac{1}{\sqrt{-1+\delta^{2/3}}}\left((-1+\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1]\left(\sqrt{3}\,Kv\,\tau 3Exp[T, Kv, \delta] + 3\sqrt{-1+\delta^{2/3}}\,\delta^{1/3}\,\rho 0\,(-g4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, 1] + g4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, a])\right)\right)\right)$

■ Hypothèse simplificatrice :

```
In[94]:= hyp = D[g4[T, Kv, δ, a], δ, a] == 0
```

Out[94]= $g4^{(0,0,1,1)}[T, Kv, \delta, a] == 0$

```
In[95]:= DSolve[hyp, g4, {T, Kv, δ, a}]
```

Out[95]= {{g4 → Function[{T, Kv, δ, a}, C[1][T, Kv][δ] + C[2][T, Kv][a]]}}

g4 est donc sous la forme d'une somme :

```
In[96]:= g4 = Function[{T, Kv, δ, a} , g41[T, Kv, δ] + g42[T, Kv, a]]
```

Out[96]= Function[{T, Kv, δ, a}, g41[T, Kv, δ] + g42[T, Kv, a]]

dans ces conditions, l'équation **eq4** se simplifie :

```
In[97]:= eq4
```

Out[97]=

$$\tau 4Exp[T, Kv, \delta, a] == \frac{1}{6\,Kv\,\lambda^2}\left(\frac{\sqrt{3}\,Kv\,(-1+\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1]\,\tau 3Exp[T, Kv, \delta]}{\sqrt{-1+\delta^{2/3}}} + 6\,\rho 0\left((-1+\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1] - \frac{(1-a\,\lambda^2+\lambda^4)\left(-2\sqrt{-\lambda^4-a^2\,\lambda^4+a\,(\lambda^2+\lambda^6)}\,Cos[2\,\theta 1]+(1-2\,a\,\lambda^2+\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1]\right)}{-1+\lambda^4}\right) g42^{(0,0,1)}[T, Kv, a]\right)$$

■ Simplifications manuelles
(pour les remplacements signalés en rouge, voir l'annexe C2)

Le coefficient de **τ3Exp[T,Kv,δ]** dans **eq4** vaut **1**:

```
In[98]:= Cτ3 = Coefficient[eq4[[2]], τ3Exp[T, Kv, δ]] /.
           1/ (√3 √(-1 + δ^(2/3)) λ^2) → 1 / 2 / Tan[ϕ] / λ^2  /.
           2 θ1 → π / 2 - ϕ /.
          1 / λ^2 → (1 - Sin[ϕ]) ^2 / Cos[ϕ] ^2 /.
         λ^4 → (1 + Sin[ϕ]) ^4 / Cos[ϕ] ^4 // Simplify
```

Out[98]= 1

Coefficient de $g42^{(0,0,1)}[T, Kv, a]$

```
In[99]:= Cg42 = Coefficient[eq4[[2]], g42^(0,0,1)[T, Kv, a]] // Factor // Map[FullSimplify, #] &
```

Out[99]=

$$\frac{\rho 0\left(2\,\lambda\sqrt{(-a+\lambda^2)\,(-1+a\,\lambda^2)}\,(1-a\,\lambda^2+\lambda^4)\,Cos[2\,\theta 1]+\lambda^2\,(3\,a-2\,(2+a^2)\,\lambda^2+3\,a\,\lambda^4)\,Sin[2\,\theta 1]\right)}{Kv\,(-1+\lambda)\,\lambda^2\,(1+\lambda)\,(1+\lambda^2)}$$

Nouvelle forme de **eq4** :

In[100]:=

```
eq4Simpl = τ4Exp[T, Kv, δ, a] == Cτ3 τ3Exp[T, Kv, δ] + Cg42 g42^(0,0,1)[T, Kv, a]
```

Out[100]=

$$\tau 4\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta, a] == \tau 3\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta] + \left(\rho 0 \left(2 \lambda \sqrt{(-a+\lambda^2)\,(-1+a\,\lambda^2)}\,(1-a\,\lambda^2+\lambda^4)\,\mathrm{Cos}[2\,\theta 1] + \lambda^2\,(3\,a-2\,(2+a^2)\,\lambda^2+3\,a\,\lambda^4)\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1]\right) g42^{(0,0,1)}[T, Kv, a]\right) \Big/ \left(Kv\,(-1+\lambda)\,\lambda^2\,(1+\lambda)\,(1+\lambda^2)\right)$$

■ Résolution de `eq4Simpl`

In[101]:=

```
sol = DSolve[eq4Simpl, g42, {T, Kv, a}]
```

Out[101]=

$$\left\{\left\{g42 \to \mathrm{Function}\left[\{T, Kv, a\}, \int_1^a \left(-Kv\,\lambda\,\tau 3\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta] + Kv\,\lambda^5\,\tau 3\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta] + Kv\,\lambda\,\tau 4\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta, K\$2835] - Kv\,\lambda^5\,\tau 4\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta, K\$2835]\right) \Big/ \left(\rho 0 \left(-2\sqrt{K\$2835-\lambda^2-K\$2835^2\,\lambda^2+K\$2835\,\lambda^4}\,\mathrm{Cos}[2\,\theta 1] + 2\,K\$2835\,\lambda^2\sqrt{K\$2835-\lambda^2-K\$2835^2\,\lambda^2+K\$2835\,\lambda^4}\,\mathrm{Cos}[2\,\theta 1] - 2\,\lambda^4\sqrt{K\$2835-\lambda^2-K\$2835^2\,\lambda^2+K\$2835\,\lambda^4}\,\mathrm{Cos}[2\,\theta 1] - 3\,K\$2835\,\lambda\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1] + 4\,\lambda^3\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1] + 2\,K\$2835^2\,\lambda^3\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1] - 3\,K\$2835\,\lambda^5\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1]\right)\right) dK\$2835 + C[1][T, Kv]\right]\right\}\right\}$$

In[102]:=

```
sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /. C[1] → g421 // ChVarMu[#, ax] & // Simplify
```

Out[102]=

$$g421[T, Kv] + \int_1^a \frac{Kv\,\lambda\,(-1+\lambda^4)\,(\tau 3\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta] - \tau 4\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta, ax])}{\rho 0\left(2\,(-1+ax\,\lambda^2-\lambda^4)\sqrt{ax-\lambda^2-ax^2\,\lambda^2+ax\,\lambda^4}\,\mathrm{Cos}[2\,\theta 1] + \lambda\,(4\,\lambda^2+2\,ax^2\,\lambda^2-3\,ax\,(1+\lambda^4))\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1]\right)}\, dax$$

In[103]:=

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g42 *)
```

In[104]:=

```
g4[T, Kv, δ, a]
```

Out[104]=

$$g41[T, Kv, \delta] + g421[T, Kv] + \int_1^a \frac{Kv\,\lambda\,(-1+\lambda^4)\,(\tau 3\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta] - \tau 4\mathrm{Exp}[T, Kv, \delta, ax])}{\rho 0\left(2\,(-1+ax\,\lambda^2-\lambda^4)\sqrt{ax-\lambda^2-ax^2\,\lambda^2+ax\,\lambda^4}\,\mathrm{Cos}[2\,\theta 1] + \lambda\,(4\,\lambda^2+2\,ax^2\,\lambda^2-3\,ax\,(1+\lambda^4))\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1]\right)}\, dax$$

In[105]:=

```
cond = 0 == g4[T, Kv, δ, 1]
```

Out[105]=

$$0 == g41[T, Kv, \delta] + g421[T, Kv]$$

In[106]:=

```
sol = DSolve[cond, g41, {T, Kv, δ}]
```

Out[106]=

$$\{\{g41 \to \mathrm{Function}[\{T, Kv, \delta\}, -g421[T, Kv]]\}\}$$

In[107]:=

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g41 *)
```

In[108]:=

```
g4[T, Kv, δ, a] /. ax - λ^2 - ax^2 λ^2 + ax λ^4 → (λ^2 - ax) (ax λ^2 - 1) // PowerExpand
```

Out[108]=

$$\int_1^a \frac{\text{Kv}\,\lambda\,(-1+\lambda^4)\,(\tau 3\text{Exp}[\text{T, Kv, }\delta]-\tau 4\text{Exp}[\text{T, Kv, }\delta\text{, ax}])}{\rho 0\,\left(2\sqrt{-\text{ax}+\lambda^2}\,\sqrt{-1+\text{ax}\,\lambda^2}\,(-1+\text{ax}\,\lambda^2-\lambda^4)\,\text{Cos}[2\,\theta 1]+\lambda\,(4\,\lambda^2+2\,\text{ax}^2\,\lambda^2-3\,\text{ax}\,(1+\lambda^4))\,\text{Sin}[2\,\theta 1]\right)}\,d\text{ax}$$

In[109]:=

```
g4[T, Kv, δ, 1]
```

Out[109]=

0

Résultats

In[110]:=

```
g4[T, Kv, δ, a]
```

Out[110]=

$$\int_1^a \frac{\text{Kv}\,\lambda\,(-1+\lambda^4)\,(\tau 3\text{Exp}[\text{T, Kv, }\delta]-\tau 4\text{Exp}[\text{T, Kv, }\delta\text{, ax}])}{\rho 0\,\left(2\,(-1+\text{ax}\,\lambda^2-\lambda^4)\,\sqrt{\text{ax}-\lambda^2-\text{ax}^2\,\lambda^2+\text{ax}\,\lambda^4}\,\text{Cos}[2\,\theta 1]+\lambda\,(4\,\lambda^2+2\,\text{ax}^2\,\lambda^2-3\,\text{ax}\,(1+\lambda^4))\,\text{Sin}[2\,\theta 1]\right)}\,d\text{ax}$$

In[111]:=

```
g3[T, Kv, δ]
```

Out[111]=

$$\frac{\text{Kv}\int_1^{\delta}\frac{\tau 3\text{Exp}[\text{T,Kv,}\delta\text{x}]}{\sqrt{-1+\delta\text{x}^{2/3}}\,\delta\text{x}^{1/3}}\,d\delta\text{x}}{\sqrt{3}\,\rho 0}$$

In[112]:=

```
g2[T, Kv]
```

Out[112]=

$$\frac{\int_1^{\text{Kv}}\sigma 2\text{m}[\text{T, Kvx}]\,d\text{Kvx}}{\rho 0}$$

In[113]:=

```
g1[T]
```

Out[113]=

$$-\text{T}\int_{\text{T0}}^{\text{T}}\frac{\text{Q1Exp}[\text{Tx}]}{\text{Tx}^2}\,d\text{Tx}$$

Présentation de l'intégrande de g4

In[114]:=

```
integrandeg4 = D[g4[T, Kv, δ, a], a]
```

Out[114]=

$$\frac{\text{Kv}\,\lambda\,(-1+\lambda^4)\,(\tau 3\text{Exp}[\text{T, Kv, }\delta]-\tau 4\text{Exp}[\text{T, Kv, }\delta\text{, a}])}{\rho 0\,\left(2\,(-1+\text{a}\,\lambda^2-\lambda^4)\,\sqrt{\text{a}-\lambda^2-\text{a}^2\,\lambda^2+\text{a}\,\lambda^4}\,\text{Cos}[2\,\theta 1]+\lambda\,(4\,\lambda^2+2\,\text{a}^2\,\lambda^2-3\,\text{a}\,(1+\lambda^4))\,\text{Sin}[2\,\theta 1]\right)}$$

In[115]:=

```
fa = Denominator[integrandeg4] / ρ0
```

Out[115]=

$$2\,(-1+a\,\lambda^2-\lambda^4)\,\sqrt{a-\lambda^2-a^2\,\lambda^2+a\,\lambda^4}\,\mathrm{Cos}[2\,\theta 1]+\lambda\,(4\,\lambda^2+2\,a^2\,\lambda^2-3\,a\,(1+\lambda^4))\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1]$$

In[116]:=

```
fa = fa /. a → (B : Nt) / Kv^(2 / 3) // Simplify
```

Out[116]=

$$-\frac{(-1+\lambda^4)\,(3\,(-1+\lambda^4)\,\mathrm{Sin}[2\,\theta 1]+2\,(1+\lambda^4)\,\mathrm{Sin}[2\,(\alpha t+\theta 1)]-(-1+\lambda^4)\,\mathrm{Sin}[4\,\alpha t+2\,\theta 1])}{4\,\lambda}$$