



# Percolation et processus de croissance aléatoires

Lucas Gerin

► **To cite this version:**

Lucas Gerin. Percolation et processus de croissance aléatoires. École thématique. Journées ALEA, CIRM (Marseille), 2013, pp.26. cel-00804232

**HAL Id: cel-00804232**

**<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00804232>**

Submitted on 25 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# PERCOLATION ET PROCESSUS DE CROISSANCE ALÉATOIRES

Lucas Gerin | Mini-cours - Journées ALÉA 2013

## Résumé

L'objectif de ces notes est de présenter les percolations de premier et de dernier passage, et leurs applications à des modèles discrets de formes croissantes aléatoires. Les outils sont assez variés : sous-additivité, percolation "classique", liens avec des systèmes de particules (TASEP), combinatoire, etc.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Percolation de Premier Passage : outils probabilistes</b>	<b>2</b>
1.1	Le modèle de la Percolation de Premier Passage . . . . .	3
1.2	Croissance linéaire : utilisation de la sous-additivité . . . . .	4
1.3	$\mu = 0$ vs $\mu > 0$ : mini-mini-cours de percolation . . . . .	6
1.4	Autres questions en PPP . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Percolation de Dernier Passage : combinatoire et particules</b>	<b>12</b>
2.1	Lien avec le TASEP . . . . .	13
2.2	PDP, sous-suites croissantes et Tableaux de Young . . . . .	15
	<b>Exercices</b>	<b>19</b>
	<b>Corrections</b>	<b>23</b>

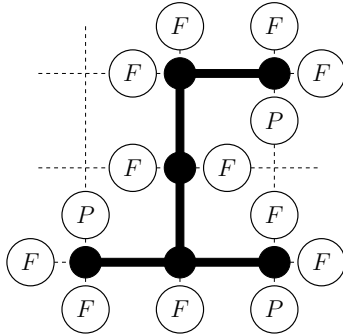
*Je remercie très chaleureusement les responsables du GdT ALÉA de m'avoir confié ce cours, et tous les participants des Journées ALÉA 2013 pour leur participation active (notamment lors de la séance d'exercices!).*

# 1 Percolation de Premier Passage : outils probabilistes

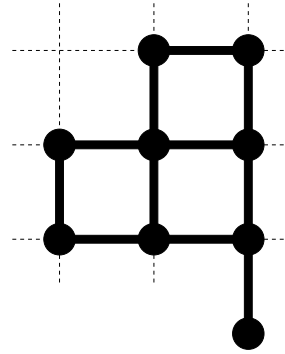
## Motivation : Modèle d'Eden et percolation de premier passage

Nous allons commencer par considérer un objet aléatoire discret très simple : le modèle d'Eden (c'est un physicien, rien à voir avec le jardin). Fixons un paramètre  $p \in (0, 1)$ , et considérons la suite  $\{E(t), t = 0, 1, 2, \dots\}$  de sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^2$  définie de la façon suivante.

- $E(0) = \{0\}$ .
- Connaissant  $E(t)$ , on lance indépendamment sur chaque arête qui "sort" de  $E(t)$  une pièce qui tombe sur "pile" avec probabilité  $p$ . Pour chaque pièce qui tombe sur pile, le sommet de l'arête correspondante qui n'appartenait pas  $E(t)$  est rajouté pour donner  $E(t + 1)$ .



Un exemple de  $E(t)$  avec les pièces



Le  $E(t + 1)$  correspondant

On peut se demander à quelle vitesse croît  $E(t)$ , et s'il a une forme particulière. Le modèle d'Eden fait partie d'une famille d'objets que l'on appelle parfois *processus de croissance aléatoires*. Nous allons plutôt voir ce modèle comme un objet statique : fixons un sommet  $x$ , on va étudier l'instant  $T_x$  où  $x$  est colorié.

Si pour chaque sommet  $y$  voisin de  $x$  on note  $g_{(x,y)}$  le nombre de fois où il a fallu lancer la pièce qui est entre  $x$  et  $y$  avant de tomber sur pile, les variables  $g$  sont des géométriques de paramètre  $p$  indépendantes et on a

$$T_x = \min_{y \sim x} \{T_y + g_{(x,y)}\},$$

où  $y \sim x$  signifie que le min est pris sur les 4 voisins de  $x$  dans  $\mathbb{Z}^2$ . Mais en "remontant" ainsi cette équation jusqu'à l'origine, on peut vérifier que  $T_x$  peut s'écrire

$$T_x = \inf_{\gamma: 0 \rightarrow x} \sum_{(x_i, x_{i+1}) \in \gamma} g_{(x_i, x_{i+1})},$$

où l'inf est pris sur l'ensemble de tous les chemins dans  $\mathbb{Z}^2$  allant de 0 à  $x$ , et la somme est prise sur les arêtes de  $\gamma$ . On pourrait prendre bien sûr n'importe quelle loi positive sur les arêtes à la place de la loi géométrique, c'est justement la *Percolation de Premier Passage*.

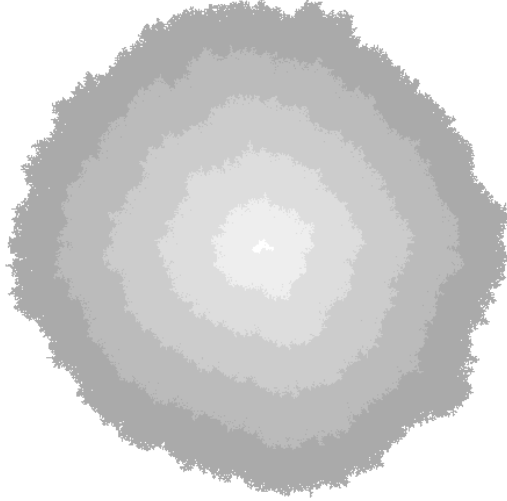


FIGURE 1 – Le modèle d’Eden pour  $p = 0.02$ , représenté à différents temps jusqu’à  $10^6$  (les simulations dans ces notes sont obtenues avec FiatLux <http://webloria.loria.fr/~fates/fiatlux.html>).

## 1.1 Le modèle de la Percolation de Premier Passage

On se donne  $\{\tau_e, e \text{ arêtes de } \mathbb{Z}^2\}$  une famille de variables aléatoires **positives** indépendantes de même loi  $\tau$ . On suppose que  $\tau$  a une **espérance finie**. Pour une arête  $e$ ,  $\tau_e$  est appelé *temps de passage* de l’arête  $e$ .

Pour un *chemin*  $\gamma$  allant de  $x$  à  $y$

$$\gamma : x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_k = y$$

le temps de passage  $\tau(\gamma)$  du chemin  $\gamma$  est, par extension, la somme des temps de passage de ses arêtes :

$$\tau(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{(x_i, x_{i+1})}.$$

Et ainsi les  $\{\tau_e\}$  définissent une distance<sup>(i)</sup> aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  :

$$D(x, y) = \inf_{\gamma: x \rightarrow y} \tau(\gamma),$$

où l’inf est pris sur tous les chemins qui vont de  $x$  à  $y$ .

On peut voir cet objet comme un modèle de propagation d’un liquide dans un milieu poreux aléatoire : si l’on injecte initialement du liquide en l’origine  $\vec{0}$ , et que l’on suppose que le liquide met un temps  $\tau_e$  pour traverser l’arête  $e$ , alors la première goutte arrive en  $x$  à l’instant  $D(\vec{0}, x)$ .

Les exemples à avoir en tête pour la loi des temps de passages sont :

---

(i). ce n’est pas une vraie distance, car deux sommets différent peuvent être à distance nulle si  $\mathbb{P}(\tau = 0) > 0$ .

- Temps de passage géométriques ( $\mathbb{P}(\tau = k) = p(1-p)^{k-1}$ ), et alors  $D(\vec{0}, x)$  est le  $T_x$  du modèle d'Eden de paramètre  $p$ .
- Temps de passage *Bernoulli* :

$$\tau = \begin{cases} a & \text{avec probabilité } 1-p \\ b & \text{avec probabilité } p \end{cases}$$

avec  $a < b$ .

- Temps de passage exponentiels ( $\tau$  de densité  $e^{-u}$ )

Le modèle a été introduit par Hammersley et Welsh [16], les questions qui se posent naturellement sont les suivantes :

1. Que peut-on dire de  $D(x, y)$  lorsque  $x, y$  sont éloignés? Par exemple, si l'on note  $\vec{n} = (n, 0)$ , quel est l'ordre de grandeur de  $D(\vec{0}, \vec{n})$  quand  $n$  tend vers l'infini? Comment évolue son espérance?
2. Et sa variance?
3. À quoi ressemble une géodésique entre  $\vec{0}$  et  $\vec{n}$ ?
4. Quelle est la forme des grandes boules (aléatoires) de  $D$ ?

On a de quoi s'occuper avec la première question, les trois autres sont essentiellement des problèmes ouverts.

## 1.2 Croissance linéaire : utilisation de la sous-additivité

À partir de maintenant, on se concentre sur la distance entre  $\vec{0}$  et  $\vec{n}$ , et on note

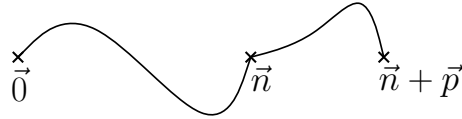
$$D_n = D(\vec{0}, \vec{n}), \quad d_n = \mathbb{E}[D_n].$$

Un examen rapide du cas des temps de passage de Bernoulli montre que  $na \leq D_n \leq nb$ . Pour des lois  $\tau$  plus générales, on voit en considérant le chemin qui "va tout droit" de  $\vec{0}$  à  $\vec{n}$  que

$$D_n \leq \tau_{\vec{0} \rightarrow \vec{1}} + \tau_{\vec{1} \rightarrow \vec{2}} + \dots + \tau_{\vec{n-1} \rightarrow \vec{n}},$$

et donc  $\mathbb{E}[D_n] \leq n\mathbb{E}[\tau]$ . Tout ceci suggère que  $D_n$  (ou en tout cas son espérance) se comporte linéairement en  $n$ . Le but de cette partie est de le démontrer, et l'outil essentiel est la *sous-additivité*.

Plaçons-nous dans le cas général de temps de passage quelconques, et faisons l'observation élémentaire suivante : si l'on colle le meilleur chemin  $\vec{0} \rightarrow \vec{n}$  et le meilleur chemin  $\vec{n} \rightarrow \vec{n} + \vec{p}$



on obtient un chemin  $\vec{0} \rightarrow \vec{n} + \vec{p}$ , mais qui n'est peut-être pas optimal. Ceci démontre tout de même que

$$D(\vec{0}, \vec{n} + \vec{p}) \leq D(\vec{0}, \vec{n}) + D(\vec{n}, \vec{n} + \vec{p}) \quad (1)$$

(c'est tout simplement l'inégalité triangulaire pour  $D$ ). En prenant pour commencer l'espérance des deux côtés on obtient  $d_{n+p} \leq d_n + d_p$  :  $(d_n)$  est une suite **sous-additive**.

**Lemme** (Fekete (1923)). *Soit  $(u_n)$  une suite sous-additive de réels positifs, alors  $(u_n/n)_{n \geq 1}$  converge. Plus précisément,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}.$$

*Démonstration.* Soit  $p \geq 1$  un entier fixé et, pour  $n \geq p$ ,  $n = pq_n + r_n$  la division euclidienne de  $n$  par  $p$ . Par sous-additivité, on a

$$u_n = u_{pq_n + r_n} \leq u_{pq_n} + u_{r_n} \leq q_n u_p + u_{r_n}.$$

En passant à la limite supérieure, on obtient  $\limsup_n \frac{u_n}{n} \leq \limsup_n \frac{q_n}{n} u_p + \frac{u_{r_n}}{n}$ . Pour le premier terme, on a bien sûr  $q_n/n \sim 1/p$ . Pour le deuxième terme,  $(r_n)$  ne prend que  $p$  valeurs différentes, et donc  $u_{r_n}/n$  tend vers zéro. Finalement,  $\limsup_n \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p}$ , et en prenant l'inf sur  $p$  :  $\limsup_n \frac{u_n}{n} \leq \inf_p \frac{u_p}{p} \leq \liminf_p \frac{u_p}{p}$ , et ces trois quantités sont égales.  $\square$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

**Proposition 1** (L'espérance évolue linéairement). *Pour la percolation de premier passage de loi  $\tau$  d'espérance finie, il existe une constante  $\mu(\tau)$ , appelée constante de temps, telle que*

$$\mu(\tau) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[D(\vec{0}, \vec{n})]}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[D(\vec{0}, \vec{n})]}{n} \in [0, +\infty[.$$

**Remarque .** 1. *À ce stade, rien ne permet d'exclure que pour certaines lois  $\tau$  l'on ait  $\mu(\tau) = 0$ , auquel cas  $d_n$  croît sous-linéairement. Dans le cas Bernoulli par exemple, on a  $D_n \geq na$  et donc  $\mu \geq a$ .*

2. *Pour que  $\mu(\tau)$  soit finie, il n'est en fait pas nécessaire que  $\tau$  soit intégrable, mais seulement que la plus petite de 4 arêtes indépendantes le soit :  $\mathbb{E}[\min \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}] < \infty$ .*
3. *La remarque sur le "chemin qui va tout droit" implique que  $\mu(\tau) \leq \mathbb{E}[\tau]$ . On a même la majoration  $\mu \leq \mathbb{E}[D(\vec{0}, \vec{1})]$ , qui est parfois un peu meilleure.*
4. *La suite de variables aléatoires  $(D_n)_{n \geq 0}$  n'est en général pas sous-additive. On peut très bien avoir  $D_{n+p}$  beaucoup plus grand que  $D_n + D_p$ , par exemple si les quatre arêtes sortant de  $\vec{n} + \vec{p}$  ont des temps de passage très grands.*

La convergence de  $\mathbb{E}[D_n]/n$  vers une constante n'empêche bien sûr pas la suite de variables aléatoires  $D_n/n$  de très mal se comporter, il est donc assez naturel d'essayer de démontrer cette convergence dans un sens beaucoup plus fort : une convergence en probabilité ou presque-sûre.

Pour cela, et dès l'article initial, Hammersley et Welsh [16] ont eu l'idée de démontrer un "Lemme de Fekete aléatoire", mais l'énoncé le plus satisfaisant est dû à Kingman <sup>(ii)</sup>.

**Théorème 1** (Théorème sous-additif de Kingman (1968)). *Soit  $\{X_{m,n} : m < n\}$  une famille de variables aléatoires vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) *Pour tous  $m < p < n$ ,*

$$X_{m,n} \leq X_{m,p} + X_{p,n}.$$

- (ii) *La famille  $\{X_{m+1,n+1}\}_{m,n \geq 0}$  a même loi que  $\{X_{m,n}\}_{m,n \geq 0}$ .*  
 (iii) *Pour chaque  $n$ ,  $\mathbb{E}[X_{0,n}] < \infty$ .*

---

(ii). C'est un résultat de théorie ergodique, une preuve moderne et assez courte, mais forcément difficile, se trouve dans [31]. Pour une discussion sur les hypothèses, il faut lire [21].

Alors, il existe une variable aléatoire  $X$  telle que, presque-sûrement et dans  $L^1$ ,

$$\frac{X_{0,n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

On applique le Théorème de Kingman à  $X_{m,n} = D(\vec{m}, \vec{n})$ . L'indépendance des temps de passage sur les arêtes assure alors une condition d'ergodicité, et la limite  $X$  est en réalité une variable aléatoire constante. Le résultat principal est donc que, presque-sûrement et dans  $L^1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(\vec{0}, \vec{n})}{n} = \mu(\tau) = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[D_n]}{n}. \quad (2)$$

Pour prévenir d'éventuelles déceptions, il faut dire tout de suite qu'à part le cas où  $\mu = 0$  (que nous allons traiter immédiatement), il n'y **aucune loi**  $\tau$  pour laquelle on sache calculer  $\mu(\tau)$ .

### 1.3 $\mu = 0$ vs $\mu > 0$ : mini-mini-cours de percolation

La première question qui se pose est de savoir si la croissance n'est pas par hasard sous-linéaire, c'est-à-dire si la constante de temps  $\mu$  est bien strictement positive. C'est le cas si  $\tau$  est une variable continue, la condition nécessaire et suffisante est la suivante :

**Théorème 2** (Kesten [20]). *La constante de temps  $\mu$  est nulle si et seulement si  $\mathbb{P}(\tau = 0) \geq 1/2$ .*

Pour ceux qui connaissent, l'apparition du 1/2 a bien sûr beaucoup à voir avec le fait que c'est le seuil critique pour la percolation par arête dans  $\mathbb{Z}^2$ .

Nous allons montrer un résultat un peu plus faible, ce sera ainsi l'occasion de faire de la percolation "classique".

**Proposition 2** ( $\mu = 0$  : une version facile). *Si  $\mathbb{P}(\tau = 0) > 2/3$  alors  $\mu = 0$ .*

*Démonstration.* On note

$$p = \mathbb{P}(\tau > 0), \quad 1 - p = \mathbb{P}(\tau = 0).$$

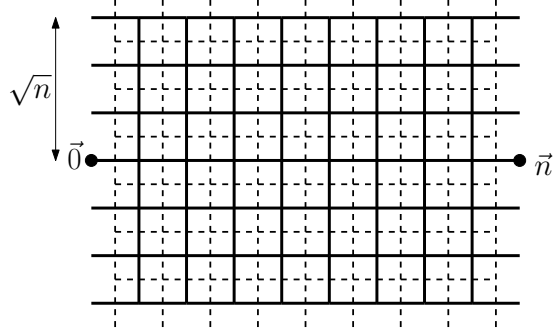
et on dit qu'une arête est *nulle* quand son temps de passage vaut zéro.

Nous allons montrer qu'avec grande probabilité il y a un chemin  $\vec{0} \rightarrow \vec{n}$  qui emprunte seulement  $o(n)$  arêtes non nulles. Plus précisément, considérons dans  $\mathbb{Z}^2$  la boîte  $B_n = [0; n] \times [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ , nous allons montrer la chose suivante :

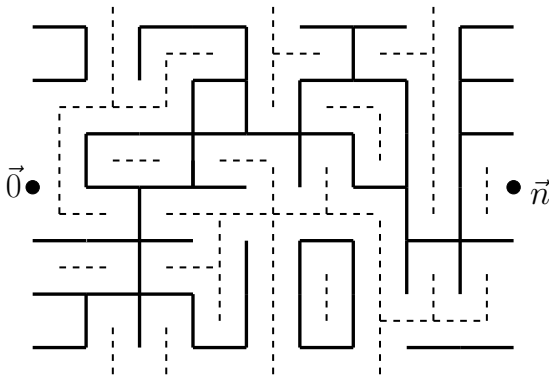
**Lemme .** *Soit  $A_n$  l'événement "il existe un chemin inclus dans la boîte, constitué uniquement d'arêtes nulles, qui va du bord gauche au bord droit". Pour  $n$  assez grand,*

$$\mathbb{P}(A_n) \geq 1 - (3p)^{\sqrt{n}}.$$

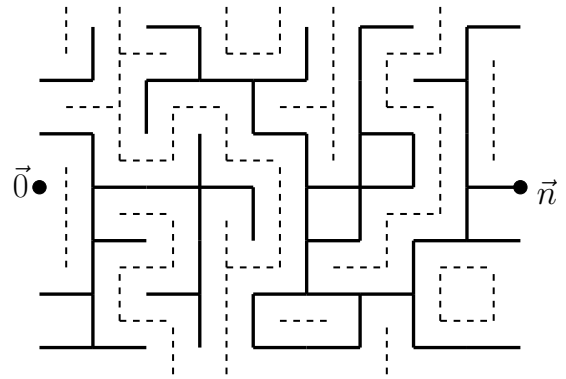
*Preuve du Lemme.* Dessinons  $B_n$  et dessinons aussi sa "boîte duale" en pointillés :



On ne garde dans la boîte que les arêtes nulles et à chaque fois on efface l'arête "duale" associée. Alors de deux choses l'une :



$A_n$  : il y a un chemin **d'arêtes nulles** dans la boîte du bord gauche au bord droit



non  $A_n$  : alors il y a chemin dans la boîte duale qui va du bord haut au bord bas et **qui ne coupe que des arêtes non nulles**

Et donc

$$\mathbb{P}(\text{non } A_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{\mathcal{C}^*} \mathcal{C}^* \text{ ne passe que par des arêtes non nulles}\right),$$

où l'union se fait sur les chemins **auto-évitants** formés d'arêtes duales traversant la boîte de haut en bas. Puisque  $\mathbb{P}(\cup) \leq \sum \mathbb{P}$ , on obtient

$$\mathbb{P}(\text{non } A_n) \leq \sum_{\ell \geq 2\sqrt{n}} n 3^\ell p^\ell,$$

où l'on a sommé les chemins  $\mathcal{C}$  selon leur longueur  $\ell$ , et il y a moins que  $n \times 3^\ell$  tels chemins (le  $n$  est là pour choisir le point de départ du chemin sur le bord haut de la boîte). Pour conclure,

$$\mathbb{P}(\text{non } A_n) \leq n(3p)^{2\sqrt{n}} \frac{1}{1-3p},$$

qui, pour  $n$  assez grand, est plus petite que  $(3p)^{\sqrt{n}}$ . □



On finit la preuve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D_n] &= \mathbb{E}[D_n \mathbf{1}_{A_n \text{ est r\u00e9alis\u00e9}}] + \mathbb{E}[D_n \mathbf{1}_{A_n \text{ n'est pas r\u00e9alis\u00e9}}] \\ &\leq 2\sqrt{n} \mathbb{E}[\tau] + 3n\mathbb{E}[\tau](1 - \mathbb{P}(A_n)) \\ &\leq 2\sqrt{n} \mathbb{E}[\tau] + 3n\mathbb{E}[\tau](3p)^{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

En effet,

- Si  $A_n$  est r\u00e9alis\u00e9, on peut passer par un chemin dont les ar\u00eates non nulles sont uniquement sur les bords gauche et droit. Les temps de passage de ces (au plus)  $2\sqrt{n}$  ar\u00eates sont des  $\tau_i$  ind\u00e9pendantes de ce qui se passe dans la bo\u00eete.
- Si  $A_n$  n'est pas r\u00e9alis\u00e9, on peut toujours contourner la bo\u00eete en  $\sqrt{n} + n + \sqrt{n} \leq 3n$  ar\u00eates.

Finalement  $\mu = \lim \mathbb{E}[D_n/n] = 0$ . □

Inversement, si peu d'ar\u00eates valent z\u00e9ro, alors  $\mu > 0$ , pour une raison de d\u00e9nombrement. L\u00e0 aussi c'est un argument vraiment typique de percolation, et il remonte \u00e0 Hammersley (1965). Pour ne pas trop epsiloniser la discussion, nous allons consid\u00e9rer des temps de passage Bernoulli 0/1, mais la preuve s'adapte facilement pour toute loi. On note

$$p = \mathbb{P}(\tau = 1), \quad 1 - p = \mathbb{P}(\tau = 0).$$

**Proposition 3** ( $\mu > 0$ , une version facile). *Pour de la PPP avec des temps de passage Bernoulli 0/1, si  $1 - p < 1/4$ , alors  $\mu > 0$ .*

*D\u00e9monstration.* Soit  $\delta > 0$  petit (on le choisira plus tard), nous allons trouver  $c > 0$  tel que

$$\mathbb{P}(D_n \leq n\delta) \leq \exp(-cn), \quad (3)$$

et la Proposition en d\u00e9coulera, par Borel-Cantelli ou plus simplement parce que

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[D_n] \geq \frac{1}{n} \mathbb{E}[D_n \mathbf{1}_{D_n \geq n\delta}] \geq \frac{1}{n} n\delta(1 - e^{-cn}) \rightarrow \delta.$$

Montrons (3) : dire que  $D_n$  est inf\u00e9rieur \u00e0  $n\delta$ , c'est dire qu'il existe un chemin auto-\u00e9vitant  $\vec{0} \rightarrow \vec{n}$  avec  $\ell \geq n$  ar\u00eates, dont le temps de passage est inf\u00e9rieur \u00e0  $n\delta$ . Par  $\mathbb{P}(U) \leq \sum \mathbb{P}$ , cela donne, en notant  $\tau_1, \tau_2, \dots$  des temps de passage Bernoulli ind\u00e9pendants,

$$\mathbb{P}(D_n \leq n\delta) \leq \sum_{\ell \geq n} 3^\ell \underbrace{\mathbb{P}(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_\ell \leq n\delta)}_{\text{compense le } 3^\ell ?}.$$

Avec le Lemme suivant (pas optimal) c'est gagn\u00e9 :

**Lemme** (In\u00e9galit\u00e9 \u00e0 la Chernov). *Si  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$  sont des Bernoulli avec  $1 - p \leq 1/4$ , alors pour tout entier  $n$  et tout r\u00e9el  $\delta > 0$  on a*

$$\mathbb{P}(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_\ell \leq n\delta) \leq e^{3\delta n} \times 0, 3^\ell.$$

On a en effet

$$\mathbb{P}(D_n \leq n\delta) \leq e^{3\delta n} \sum_{\ell \geq n} 0, 9^\ell \leq c^{\text{ste}} e^{3\delta n} 0, 9^n.$$

Si  $\delta$  est assez petit, le terme de droite d\u00e9cro\u00eet exponentiellement vite vers z\u00e9ro. □

## Mini-mini-mini-cours d'inégalités de concentration

Je montre le Lemme. La technique, due à Chernov, est très utile. On utilise le fait que, pour tout  $\lambda > 0$ , la fonction  $u \mapsto \exp(-\lambda u)$  est décroissante :

$$\mathbb{P}(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\ell \leq n\delta) = \mathbb{P}\left(e^{-\lambda \sum_i \tau_i} \geq e^{-\lambda n\delta}\right)$$

L'inégalité de Markov <sup>(iii)</sup> appliquée à la variable  $e^{-\lambda \sum_i \tau_i}$  donne ensuite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\ell \leq n\delta) &\leq e^{\lambda n\delta} \mathbb{E}[e^{-\lambda \sum_i \tau_i}] \\ &\leq e^{\lambda n\delta} \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}]^\ell \\ &= e^{\lambda n\delta} (pe^{-\lambda} + (1-p))^\ell. \end{aligned}$$

Maintenant je choisis  $\lambda = 3$ , on a  $pe^{-\lambda} + (1-p) \leq e^{-3} + 1/4 \leq 0,3$ .

## 1.4 Autres questions en PPP

Pour finir, je signale rapidement quelques problèmes historiques ou actuels en PPP. Pour plus de détails, je conseille [18, 7].

### Existence d'une forme limite

Pour revenir à la motivation initiale, on peut essayer de décrire l'évolution des grandes boules aléatoires

$$B_t := \left\{ x \in \mathbb{Z}^2, D(\vec{0}, x) \leq t \right\}.$$

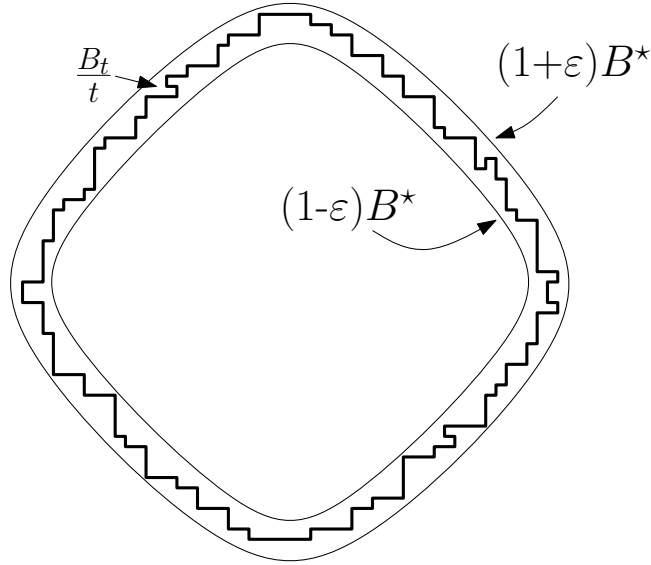
Alors, si  $\mu > 0$ , il y a une sorte de loi des grands nombres pour  $B_t$  :

**Théorème 3** (Richardson (1973), puis Cox-Durrett (1981)). *On suppose que  $\tau$  est tel que  $\mu > 0$  et que  $\mathbb{E}[\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}^2] < \infty$ . Il existe alors un ensemble non vide  $B^* \subset \mathbb{R}^2$  compact convexe et déterministe tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\mathbb{P}\left( (1-\varepsilon)B^* \subset \frac{1}{t}B_t \subset (1+\varepsilon)B^*, \text{ pour } t \text{ assez grand} \right) = 1.$$

---

(iii). Pour une variable aléatoire  $Z$  positive et un réel  $a > 0$ ,  $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \mathbb{E}[Z]/a$ .



Les outils principaux sont les suivants :

1. La convergence (2) peut en réalité s'écrire dans toutes les directions : pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(\vec{0}, n\vec{x})}{n} = \mu(\vec{x}) = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[D(\vec{0}, n\vec{x})]}{n}.$$

2. On démontre que  $\mu(\cdot)$  peut se prolonger en une norme sur  $\mathbb{Q}^2$ , puis sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Un candidat pour  $B^*$  est alors la boule pour  $\mu(\cdot)$  de rayon 1. Pour le confirmer, il faut avoir une sorte de contrôle uniforme des distances : on montre que  $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{D(\vec{0}, \vec{x}) - \mu(x)}{|x|} = 0$ .

Mais bien sûr, puisqu'on ne connaît jamais  $\mu$ , on ne connaît jamais  $B^*$ . On sait simplement que, chaque  $B_t$  ayant une loi invariante par symétrie axiale ou verticale,  $B^*$  est symétrique par rapport aux deux axes.

## $\mu$ comme fonction de $\tau$

Dans la mesure où on ne sait calculer  $\mu(\tau)$  pour aucune loi  $\tau$  non triviale (sauf quand  $\mu = 0$ ), on cherche à savoir si au moins elle dépend continûment de  $\tau$ . C'est vrai sans aucune hypothèse :

**Théorème 4** (Cox-Kesten (1981)). *Si  $(\tau_n)$  est une suite de lois sur  $[0, +\infty)$  convergeant faiblement vers  $\tau$ , alors  $\mu(\tau_n) \rightarrow \mu(\tau)$ .*

Il y a même une notion d'ordre sur les lois  $\tau$  qui rend  $\tau \mapsto \mu(\tau)$  strictement croissante : si  $\tilde{\tau}$  est strictement plus variable que  $\tau$  alors  $\mu(\tilde{\tau}) < \mu(\tau)$  (voir [24] pour la définition et le résultat optimal).

## Fluctuations et Relation KPZ

Le problème ouvert le plus célèbre en percolation de premier passage est celui des fluctuations de  $D_n$ . Pour des raisons de classe d'universalité que je n'ai jamais vraiment comprises, il est acquis par la communauté que  $\text{Var}(D_n) \approx n^{2/3}$ . Le meilleur résultat connu aujourd'hui est le suivant :

**Théorème 5** (Benjamini-Kalai-Schramm [5] et Benaïm-Rossignol [4]). *Pour une grande famille de temps de passages discrets et continus,*

$$\text{Var}(D_n) \leq c^{\text{ste}} \frac{n}{\log(n)}.$$

Les preuves reposent sur des inégalités fonctionnelles et de concentration dans des espaces produits. Pour la borne inférieure, Newman et Piza [26] ont démontré que, pour certaines lois,  $\text{Var}(D_n) \geq c^{\text{ste}} \log(n)$ .

Récemment, Chatterjee a réalisé une avancée très spectaculaire en démontrant rigoureusement un cas particulier de ce que les physiciens appellent la relation KPZ (celle de Kardar-Parisi-Zhang, pas l'autre). Cette relation relie l'exposant des fluctuations et l'exposant de dispersion. Si  $\gamma_n$  est le meilleur chemin  $\vec{0} \rightarrow \vec{n}$  et  $\text{Haut}(\gamma_n)$  en est l'ordonnée maximale, alors

**Théorème 6** (Relation KPZ en Percolation de Premier Passage, Chatterjee [8]). *Pour une grande famille de temps de passages continus, il est équivalent de démontrer que*

$$\text{Var}(D_n) \approx n^{2/3} \quad \text{et que} \quad \text{Haut}(\gamma_n) \approx n^{2/3}.$$

Une conséquence d'un travail que nous avons réalisé avec A.-L. Basdevant et N. Enriquez [3] est que dans la percolation de premier passage sur un graphe de dimension 2 très particulier la variance est effectivement de l'ordre de  $n^{2/3}$ . Notre argument consiste à exprimer la quantité  $D_n$  comme une fonctionnelle du TASEP (voir plus loin en 2.1 la définition du TASEP), dont on sait que la variance est en  $n^{2/3}$ .

## PPP sur d'autres graphes

On peut imaginer énormément de variantes de la PPP sur d'autres graphes que  $\mathbb{Z}^d$ . Ahlberg [1] a par exemple récemment étudié de façon très précise la PPP sur les graphes de la forme  $\mathbb{Z} \times \{1, 2, \dots, n\}$ . Il prouve notamment que  $D_n$  vérifie alors un Théorème Central Limite "classique" (*i.e.* avec des fluctuations en  $\sqrt{n}$ ), contrairement donc au comportement conjecturé dans  $\mathbb{Z}^2$ . Par ailleurs, Fill et Pemantle [11] ont étudié de leur côté la PPP sur l'hypercube.

Il existe également des résultats sur des graphes aléatoires. Garet et Marchand [12] ont adapté le Théorème sous-additif pour la PPP sur la composante connexe infinie de percolation. Il a aussi été étudié, par exemple dans [6], un programme d'étude de la PPP sur le graphe d'Erdős-Rényi. Les techniques semblent assez différentes de ce que nous avons vu, il s'agit de comparer la PPP avec des processus de branchements et des marches branchantes.

## PPP et modèles de compétition

On peut construire à partir de la PPP avec une loi  $\tau$  continue un *modèle de compétition* sur  $\mathbb{Z}^2$  entre deux couleurs (les "liquides" de tout à l'heure). Imaginons que  $\vec{0}$  est colorié en bleu et  $\vec{1}$  en rouge, on dit que  $x \in \mathbb{Z}^2$  est bleu si

$$D(\vec{0}, x) < D(\vec{1}, x),$$

rouge sinon. Il y a clairement une probabilité positive que l'une des deux couleurs "perde" : elle n'occupe qu'une partie finie de l'espace (bleu a beaucoup de chances de

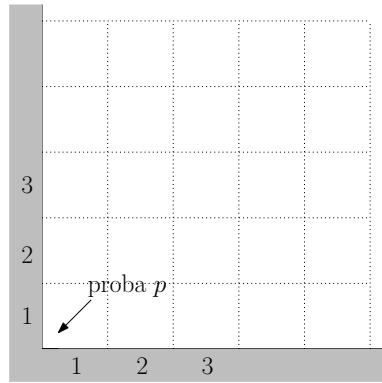
perdre si, par exemple, chacune des 4 arêtes autour de  $\vec{0}$  vaut plus de  $10^{100}$ ). On se demande s'il y a une probabilité positive de "match nul" : les deux couleurs survivent. Cela a été démontré par Häggström et Pemantle [15] pour la loi exponentielle, puis par Garet et Marchand [13] et Hoffman [17] pour d'autres lois continues.

Là aussi il y a beaucoup d'extensions possibles, notamment si l'une des couleurs avance plus vite que l'autre, voir [7].

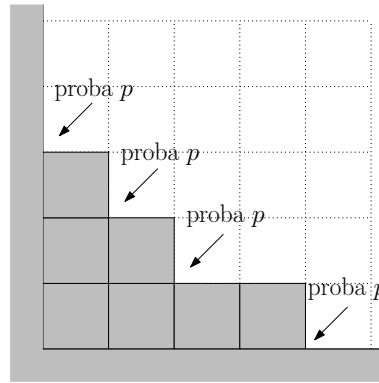
## 2 Percolation de Dernier Passage : combinatoire et particules

### Motivation : *corner growth model* et PDP

Pour commencer, imaginons le modèle aléatoire discret suivant. On cherche à remplir le quart de plan  $\{i, j \geq 1\}$  "par les coins" : à chaque instant, chaque carré unité dont les voisins à gauche et en bas sont pleins se remplit avec une probabilité  $p$  (on imagine que les carrés qui sont dans  $\{i \leq 0$  ou  $j \leq 0\}$  sont initialement pleins), c'est le *corner-growth model*.



Le *corner growth model* à l'instant initial



Le *corner growth model* après quelques unités de temps

Notons  $T_{i,j}$  l'instant où la case  $(i, j)$  se remplit, et  $g_{i,j}$  le nombre de tentatives pour remplir la case  $(i, j)$  à partir du moment où ses voisins de gauche et du bas sont remplies, les  $g_{i,j}$  sont des géométriques indépendantes de paramètre  $p$ .

On a par définition du modèle  $T_{i,j} = 0$  dès que  $i$  ou  $j$  est nul, et

$$T_{i,j} = \max \{T_{i-1,j}, T_{i,j-1}\} + g_{i,j}.$$

Et donc, en remontant jusqu'à  $(1, 1)$ ,

$$T_{i,j} = \max_{\gamma: (1,1) \rightarrow (i,j)} \sum_{x \in \gamma} g_x,$$

où le max est pris sur l'ensemble des chemins qui vont de  $(1, 1)$  à  $(i, j)$  n'empruntant **que des pas est/nord**, et  $x$  est l'ensemble des cases traversées par  $\gamma$ . Le *corner growth model* est donc en réalité un problème de *Percolation de Dernier Passage*, avec des temps de passage géométriques<sup>(iv)</sup>.

(iv). Il y a une autre différence : les temps de passage sont placés sur les cases de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Quand on parle de PDP, les temps de passage sont donc sur les sites et pas sur les arêtes comme en PPP.

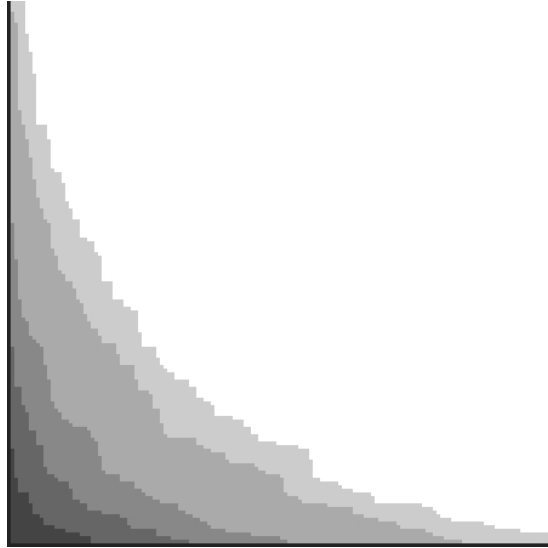


FIGURE 2 – Le *corner growth model* pour  $p = 0.04$ , à divers instants jusqu'à  $10^5$ .

De façon analogue, on peut écrire (avec des notations évidentes)

$$T_{0 \rightarrow (n+p, n+p)} \geq T_{0 \rightarrow (n, n)} + T_{(n, n) \rightarrow (p, p)},$$

et ainsi les outils de la PPP vont également s'appliquer pour la PDP à la famille  $(-T_{(n, n) \rightarrow (p, p)})_{n < p}$  qui est sous-additive. Comme prévu  $T_{n, n}/n$  va converger presque-sûrement vers une constante.

**Théorème 7.** *Pour la Percolation de Dernier Passage avec des temps de passage géométriques de paramètre  $p$ , il existe une constante  $\nu(p)$  telle que,*

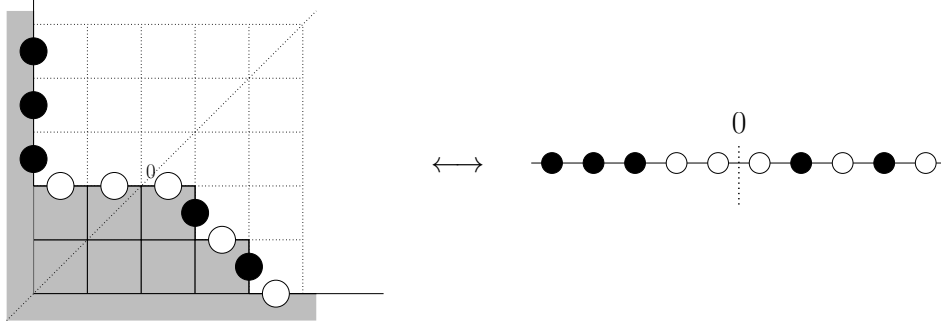
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n, n}}{n} = \nu(p) = \sup_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[T_{n, n}]}{n}.$$

On peut bien sûr comme en PPP définir ce modèle avec d'autres temps de passage (voir le survey [25]), mais nous allons nous concentrer sur des temps de passage géométriques, pour des raisons qui vont vite apparaître.

## 2.1 Lien avec le TASEP

Il y a un lien direct entre le *corner growth model* et un système de particules en temps discret : le *Totally Asymmetric Simple Exclusion Process* (ce lien a été exploité pour la première fois par Rost [27] pour le problème analogue en temps continu).

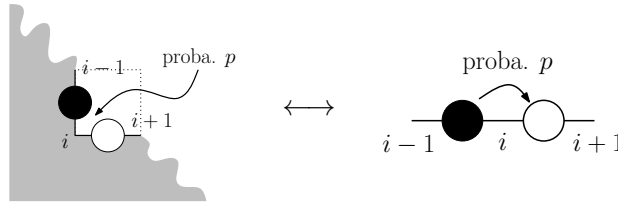
Pour l'illustrer, reprenons le schéma précédent en plaçant sur chaque arête verticale (resp. horizontale) de la frontière de la zone grisée  $A_t$  une particule noire  $\bullet$  (resp. un site vide  $\circ$ ). Si cette frontière est une "corde" et qu'on la "tend", on obtient une configuration de  $\{\bullet, \circ\}^{\mathbb{Z}}$  :



(l'origine est placée à l'endroit où la corde croisait la première bissectrice). La configuration initiale des particules est bien sûr

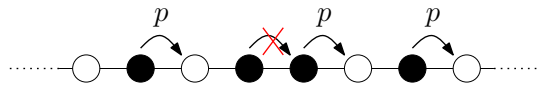
$$\sigma^0 := (\dots, \bullet, \bullet, \bullet, \circ, \circ, \circ, \dots).$$

Colorier un carré revient à faire avancer une particule noire sur un site vide :



Ceci amène la définition suivante :

**Définition 1.** *Le TASEP parallèle (ou synchrone) sur  $\mathbb{Z}$  avec taux  $p$  est le processus à temps discret et à valeurs dans  $\{\bullet, \circ\}^{\mathbb{Z}}$  défini de la façon suivante. À chaque instant, chaque particule  $\bullet$  suivie d'un site vide  $\circ$  à sa droite avance d'un pas avec probabilité  $p$ , indépendamment des autres. Toutes les particules effectuent leur déplacement **simultanément**.*

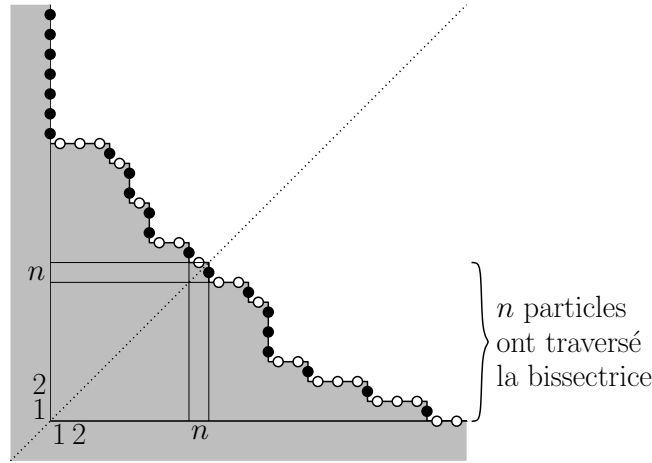


Voici une conséquence de cette correspondance TASEP-PDP :

**Proposition 4** (Lien TASEP  $\leftrightarrow$  *corner growth model*  $\leftrightarrow$  Percolation de Dernier Passage). *Pour tout  $n \geq 1$ , on a égalité en loi*

$$T_{n,n} = \text{Premier instant où, dans le TASEP partant de } \dots, \bullet, \bullet, \bullet, \circ, \circ, \circ, \dots, n \text{ particules ont dépassé zéro.}$$

La preuve de cette Proposition est dans ce dessin :



Le *corner growth model* à l'instant  $T_{n,n}$ .

Cette connexion TASEP-PDP a permis de démontrer le résultat suivant pour le temps de dernier passage en  $(n, n)$ , quand  $p \leq 1/2$ . La formule générale pour tout  $p$  a été obtenue par des méthodes combinatoires que nous allons aborder à la section suivante.

**Théorème 8** (Jockusch-Propp-Shor [19] pour  $p \leq 1/2$  puis Johansson [22] pour tout  $p$ ).

$$\nu(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n,n}}{n} = \frac{2 + 2\sqrt{1-p}}{p}.$$

Une piste pour comprendre comment trouver cette formule à partir du TASEP est donnée à l'exercice 6. Plus généralement, la limite dans toutes les directions est la suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{nx,ny}}{n} = \Psi(x, y) := \frac{x + y + 2\sqrt{(1-p)xy}}{p}.$$

Autrement dit, la forme limite observée à la Figure 2 est la courbe

$$x + y + 2\sqrt{(1-p)xy} = p.$$

## 2.2 PDP, sous-suites croissantes et Tableaux de Young

*Cette section est un quasi-plagiat de [23].*

Il existe une formule, due à K.Johansson [22], pour la loi exacte de  $T_{n,n}$  (pour n'importe quel  $T_{m,n}$  en fait). Elle n'est pas très explicite mais fait intervenir de façon un peu surprenante la combinatoire des Tableaux de Young. Pour comprendre cette formule, nous allons suivre un exemple de calcul de  $T_{3,3}$ . Imaginons que les variables  $g_{i,j}$ , pour  $i, j \leq 3$  soient les suivantes :

1	3-2	
3-2	2	
2	2	3



alors  $T_{3,3} = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12$ , avec un chemin (indiqué) qui réalise ce maximum.

Une autre façon de voir ce 12 est d'écrire un tableau  $\phi$  à 2 lignes, dans lequel chaque couple  $(i, j)$  apparaît sous la forme  $\binom{i}{j}$ , exactement  $(g_{i,j} - 1)$  fois. Le tableau est rangé par ordre lexicographique :

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 = \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{3} \boxed{3} \boxed{3} \\ \phi_2 = \boxed{1} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{3} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \end{bmatrix}$$

La longueur de ce tableau est bien sûr le nombre d'échecs des pièces  $\sum(g_{i,j} - 1) = 20 - 9 = 11$ , et je vous laisse vous convaincre que

**Proposition 5.**  $T_{n,n} - (2n - 1) =$  *Longueur de la plus longue sous-suite croissante en la coordonnée du bas de ce tableau.*

*Demi-preuve.* Comme les couples sont dans ordre lexicographique, la sous-suite est croissante en chacune des coordonnées. Croître selon la première correspond à un pas Est, selon la seconde à un pas Nord. On "perd" les  $2n - 1$  pas nécessaires pour aller de  $(1, 1)$  à  $(n, n)$  car ils ne sont pas comptés dans le tableau.  $\square$

J'ai encadré ici la sous-suite correspondant au chemin qui réalise  $T_{3,3}$ , elle est bien de longueur  $7 = 12 - 5$ .

Ceci "prouve", puisque  $\mathbb{P}(g_{i,j} = k) = p(1 - p)^{k-1}$  que

$$\mathbb{P}(T_{n,n} \leq t) = \mathbb{P}(T_{n,n} - (2n - 1) \leq t - (2n - 1)) = \sum_{\phi \in D(n,t)} p^{n^2} (1 - p)^{|\phi|},$$

où la somme porte sur toutes les tableaux  $\phi$  à deux lignes, à coefficients dans  $\{1, \dots, n\}$ ,

- qui sont classées dans l'ordre lexicographique ;
- dont la plus longue sous-suite croissante de  $\phi_2$  est de longueur  $\leq t - (2n - 1)$ .

La quantité  $|\phi|$  est la longueur de  $\phi$  (ici, 11). Il reste à faire la combinatoire des  $D(n, t)$ , celle-ci s'exprime, grâce à la correspondance RSK (pour Robinson-Schensted-Knuth), en termes de *Tableaux de Young semi-standards*.

**Définition 2.** Pour  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  une suite décroissante finie d'entiers, un Tableau de Young semi-standard (TYss) de forme  $\lambda$  est un tableau de Young dont la  $\ell$ -ème ligne est de longueur  $\lambda_\ell$ , dont le contenu est croissant sur les lignes et strictement croissant sur les colonnes.

Un TYss de forme  $(5, 2, 2, 1)$  (dessiné "à l'anglaise") :

1	1	2	3	3
2	3			
4	4			
5				

Définissons la règle d'*insertion* de l'entrée  $r$  dans un tableau  $T$ . On cherche à insérer  $r$  dans la 1ère ligne :

- si  $r$  est supérieur ou égal à tous ceux de la 1ère ligne, on le met tout à droite.
- sinon, on le met à la place du premier qui est strictement plus grand que lui ; on cherche alors à insérer ce nombre là dans la 2ème ligne et ainsi de suite.

Avec cette règle d'insertion, nous allons associer à  $\phi$  deux TYss de même forme.

**1er TYss  $T_1$  : 2ème ligne de  $\phi$ .**

On insère successivement tous les nombres de  $\phi_2$ , en partant du tableau vide (je fais les 3 premières étapes d'un coup parce que c'est croissant) :

$$\square \xrightarrow{1,2,2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} \cdots \xrightarrow{} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & & & \\ \hline \end{array} =: T_1.$$

On obtient un TYss<sup>(v)</sup> pour lequel  $\lambda_1 = 7$ , soit la longueur de la plus longue sous-suite croissante de  $\phi_2$ , et  $\lambda_1 + \lambda_2 = 11$ . Cette transformation n'est pas bijective, pour pouvoir retrouver  $\phi$  il faudrait également avoir la trace de l'ordre dans lequel on a ajouté chaque nouvelle case.

**TYss intermédiaire : évolution de la forme de  $T_1$ .**

On regarde pour chaque case de  $T_1$  à quelle moment elle est apparue dans la construction précédente. Ici cela donne

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 11 \\ \hline 4 & 8 & 9 & 10 & & & \\ \hline \end{array} \quad (4)$$

**2ème TYss  $T_2$  : 1ère ligne de  $\phi$ .**

Les 3 premiers chiffres dans  $\phi_1$  sont des 1, donc on remplace 1, 2, 3 dans (4) par 1. Les 4 suivants sont des 2, donc on remplace 4, 5, 6, 7 dans (4) par 2. On remplace les derniers par 3. On obtient<sup>(vi)</sup> :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & & & \\ \hline \end{array} =: T_2.$$

Ce qui est intéressant c'est qu'on peut effectivement, à partir de  $T_1$  et  $T_2$  retrouver  $\phi$ . En effet,

**Théorème 9** (Knuth (1970)). *Il y a une bijection*

$$\begin{array}{l} \text{Tableau } \phi \text{ à deux lignes, à coefficients dans} \\ \{1, \dots, n\}, \text{ rangé par ordre lexicographique} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{Deux TYss de même forme, de taille} \\ |\phi|, \text{ à coefficients dans } \{1, \dots, n\}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Longueur de la plus longue sous-suite croissante} \\ \text{de } \phi_2 \end{array} = \lambda_1.$$

On obtient ainsi :

**Théorème 10** ((2.4) dans Johansson [22]).

$$\mathbb{P}(T_{n,n} \leq t) = \sum_{\substack{\text{formes } \lambda, \\ \lambda_1 \leq t - (2n-1)}} p^{n^2} (1-p)^{\sum \lambda_i} L(\lambda, n)^2,$$

où  $L(\lambda, n)$  est le nombre de Tableaux de Young semi-standards de forme  $\lambda$  et à coefficients dans  $\{1, \dots, n\}$ .

(v). C'est clair que le Tableau reste croissant sur les lignes. Pour la croissance sur les colonnes, il faut réfléchir un peu plus, pour cela et plus sur RSK, voir [30] Chap.7.11.

(vi). Là aussi il faut réfléchir pour s'assurer que l'on tombe bien sur un TYss.

On peut rendre cette formule plus explicite en sachant que (c'est le Lemme 2.3 dans [22] mais c'est aussi sûrement ailleurs) :

$$L(\lambda, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

En réalité, l'obtention de cette formule explicite pour  $T_{n,n}$  n'occupe qu'une toute petite partie de l'article de Johansson. Ce qui a marqué la communauté à la sortie de [22] est plutôt le théorème limite qu'en a déduit Johansson. Les fluctuations de  $T_{n,n}$  autour de sa moyenne<sup>(vii)</sup>  $n\nu(p)$ , obtenue au Théorème 8, sont en fait atypiques : de l'ordre de  $\sqrt[3]{n}$  au lieu de  $\sqrt{n}$ , plus habituel.

**Théorème 11** (Johansson [22] Th.1.2).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{T_{n,n} - n\nu(p)}{sn^{1/3}} \leq t \right) = F_2(t),$$

où  $F_2$  est la fonction de répartition de la loi de Tracy-Widom<sup>(viii)</sup>, et  $s = s(p)$  est une certaine constante explicite.

---

(vii). Au passage, obtenir à partir du Théorème 10 que  $T_{n,n}/n \rightarrow \nu(p)$  est déjà difficile. C'est fait dans [28].  
(viii). La loi de Tracy-Widom est une loi à densité (qui ne s'exprime pas à l'aide de fonctions usuelles) sur  $\mathbb{R}$ , elle a été découverte lors de l'étude des fluctuations de la plus grande valeur propre d'une matrice du GUE (par Tracy et Widom justement).

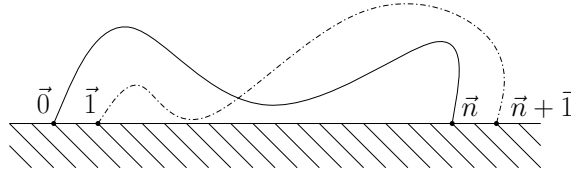
# Exercices

## Exercice 1 [Croissance de $(d_n)$ , extrait de [2]]

Il est complètement évident que la quantité  $d_n = \mathbb{E}[D(\vec{0}, \vec{n})]$  est croissante en  $n$ . C'est pourtant un problème ouvert et J.-B. Gouéré [14] l'a démontré seulement en 2012 avec des restrictions sur le support de  $\tau$ .

Pour la PPP restreinte au demi-plan supérieur, c'est étrangement beaucoup plus simple, et nous allons le faire. On prend la loi  $\tau$ , d'espérance finie, quelconque.

1. En méditant la figure ci-dessous (où j'ai représenté les plus courts chemins dans le demi-plan entre  $\vec{0} \rightarrow \vec{n}$  et  $\vec{1} \rightarrow \vec{n} + \vec{1}$ ),



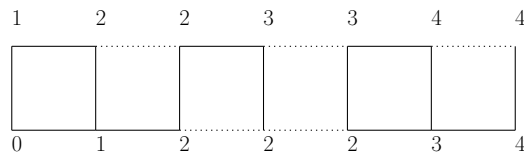
démontrer que

$$d_{n-1} + d_{n+1} \leq 2d_n.$$

2. En déduire que  $(d_n)$  est croissante.

## Exercice 2 [PPP sur une échelle]

On considère la PPP sur l'échelle infinie  $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$  dans laquelle les arêtes verticales valent toutes 1, et les arêtes horizontales valent 1 ou 0 avec probabilité  $p/1-p$  respectivement. Voici un exemple avec les distances associées, les arêtes de temps 0 sont représentées en pointillés :



On note

$$X_n = D(\vec{0}, (n, 0)) \quad \text{et} \quad Y_n = D(\vec{0}, (n, 1)),$$

et  $\Delta_n = X_n - Y_n$ . Ici,  $(X_3, Y_3) = (2, 3)$ . Pour alléger les notations, on note également  $h_n$  la  $n$ -ème arête du haut  $(n, 1) \rightarrow (n+1, 1)$  et  $b_n$  la  $n$ -ème arête du bas  $(n, 0) \rightarrow (n+1, 0)$

Le but de l'exercice est de calculer la constante de temps  $\mu(p) := \lim X_n/n$ .

1. Se convaincre que  $(\Delta_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov d'espace d'états  $\{-1, 0, 1\}$ . Déterminer ses probabilités de transition et sa mesure stationnaire.

2. Écrire  $X_{k+1}$  en fonction de  $X_k, \tau(b_k), \tau(h_k), \Delta_k$ .

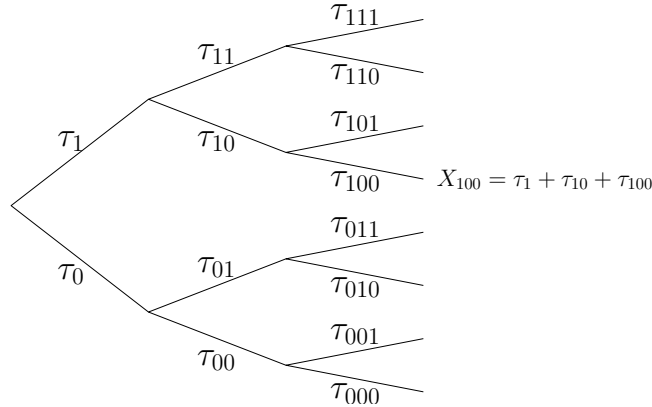
3. En déduire que

$$\mathbb{E}[X_n] \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} np - n \frac{p(1-p)}{3}$$

et conclure.

**Exercice 3** [PPP sur un arbre binaire : marche branchante]

On fait de la percolation de premier passage sur l'arbre binaire infini, les notations sont expliquées sur le dessin. On place sur chacune des arêtes de l'arbre des variables de Bernoulli de paramètre  $p$  :  $\mathbb{P}(\tau = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\tau = 0)$ .



Pour un sommet  $s$ ,  $X_s$  est la somme des  $\tau$  le long du chemin menant à  $s$ . On admet qu'il existe une constante  $\gamma \leq \mathbb{E}[\tau] = p$  telle que, presque sûrement,

$$\frac{1}{n} \min_{|s|=n} X_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma.$$

( $|s|$  désigne la profondeur du sommet  $s$ ).

1. En construisant un chemin **très simple**, montrer que  $\gamma \leq p^2 < p$ .

*C'est en fait l'un des rares graphes où la valeur exacte de  $\gamma$  est connue. Si  $p \leq 1/2$  alors Galton et Watson assurent qu'il existe un sous-arbre infini formé uniquement d'arêtes valant zéro, ceci implique que  $\gamma = 0$ . Si  $p > 1/2$  on peut montrer (mais c'est beaucoup plus dur, voir Théorème 2.1 dans [29]) que  $\gamma$  est la solution de l'équation*

$$\log(2) = \gamma \log\left(\frac{\gamma}{p}\right) + (1 - \gamma) \log\left(\frac{1 - \gamma}{1 - p}\right).$$

**Exercice 4** [ $\mu$  en grande dimension, tiré de [9]]

On considère la PPP dans  $\mathbb{Z}^d$  avec  $d$  grand, avec des temps de passage exponentiels. La constante de temps est alors

$$\mu_d := \lim \frac{D(\vec{0}, (n, 0, \dots, 0))}{n}.$$

Puisqu'il y a plein de place en grande dimension, on s'attend à ce que la constante de temps  $\mu_d$  soit petite, nous allons effectivement déterminer une bonne majoration de  $\mu_d$ . On rappelle pour cet exercice que si  $e_1, \dots, e_k$  sont des exponentielles de paramètre 1 indépendantes,

$$e_1 + \dots + e_k \stackrel{\text{loi}}{=} \text{Gamma}(k)$$

et que la Gamma( $k$ ) a pour densité  $x^{k-1} \exp(-x)/\Gamma(k)$ .

1. Expliquer pourquoi

$$\mu_d \leq \mathbb{E}[\min\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{2(d-1)}, e_1\}]$$

où les  $\Gamma_i$  sont des variables Gamma(3) indépendantes et  $e_1$  est une exponentielle indépendante des  $\Gamma_i$ .

2. En déduire une majoration de la forme  $\mu_d \leq c/d^\alpha$ , où  $c, \alpha$  sont des constantes à déterminer.

Vous pourrez avoir besoin du fait que pour tout  $u \leq 1$ ,  $\mathbb{P}(\text{Gamma}(3) \leq u) \geq u^3/6e$ .

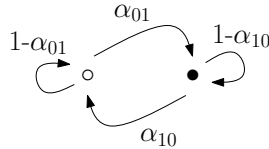
On attribue à Eden la conjecture suivante : pour des temps de passage exponentiels (c'est donc la version continue du modèle d'Eden présenté au tout début), les boules de  $D$  sont asymptotiquement des boules euclidiennes. On pense aujourd'hui que ce n'est pas le cas, cet exercice est un peu l'idée de départ pour montrer qu'en grande dimension cette conjecture est effectivement fautive, voir [10, 9] : il y est montré que l'on va "trop vite" le long des axes :  $\mu_d \approx \log(d)/d$ .

**Exercice 5** [Percolation de Dernier Passage : un calcul facile]

On va regarder le temps de dernier passage le plus simple :  $T_{2,2}$ , toujours avec des temps géométriques. On a bien sûr  $T_{2,2} \geq 3$ , calculer  $\mathbb{P}(T_{2,2} = 4)$  (et vérifier que cela coïncide avec la formule de Johansson).

**Exercice 6** [Mesures stationnaires markoviennes pour le TASEP, extrait de [19]]

L'objectif de cet exercice est de deviner quelles sont les mesures stationnaires du TASEP parallèle de taux  $p$  qui sont fabriquées comme chaînes de Markov sur  $\{\bullet, \circ\}$ . Commençons par des notations : une chaîne de Markov sur  $\{\bullet, \circ\}$  est donnée par un couple  $\alpha = (\alpha_{10}, \alpha_{01}) \in [0, 1]^2$ , qui engendre une suite  $(X_k)_{k \geq 0}$  par exemple avec  $\mathbb{P}(X_{k+1} = \bullet | X_k = \circ) = \alpha_{01}$ . On comprend tout sur le dessin :



Le couple  $\alpha$  détermine une mesure de probabilité sur  $\{\bullet, \circ\}^{\mathbb{Z}}$ , notée  $\mu_\alpha$ , d'une façon à peu près évidente, en prenant une réalisation  $(X_k)$  partant de sa mesure stationnaire. Par exemple, la probabilité qu'à un endroit fixé on ait la succession  $\circ \bullet \bullet \circ$  est notée  $\mu_\alpha(? \circ \bullet \bullet \circ ?)$  et vaut <sup>(ix)</sup>

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(? \circ \bullet \bullet \circ ?) &:= \mathbb{P}(X_{72} = \circ, X_{73} = \bullet, X_{74} = \bullet, X_{75} = \circ) \\ &= \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{10} + \alpha_{01}} \alpha_{01} (1 - \alpha_{10}) \alpha_{10}. \end{aligned}$$

On cherche des conditions nécessaires sur  $\alpha$  pour que  $\mu_\alpha$  soit stationnaire pour le TASEP. Pour alléger les notations, on note

$$\begin{aligned} \mu &:= \mu(? \bullet ?) = \frac{\alpha_{01}}{\alpha_{10} + \alpha_{01}}, \\ 1 - \mu &= \mu(? \circ ?) = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{10} + \alpha_{01}}, \end{aligned}$$

---

(ix). Dans cette équation,  $(X_k)$  est donc supposée partir de sa mesure stationnaire, et le 72 est arbitraire. On a  $\mathbb{P}(X_{72} = \circ) = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{10} + \alpha_{01}}$ .

les fréquences respectives de  $\bullet, \circ$  dans une configuration de loi  $\mu_\alpha$ . Nous allons voir que pour chaque  $p$  et  $\mu$  fixés il y a (au plus) une chaîne de Markov qui marche.

1. Se convaincre que

$$\mu(? \bullet \bullet ?) = \mu(? \bullet \bullet \bullet ?) + (1 - p)\mu(? \bullet \bullet \circ ?) + p\mu(? \bullet \circ \bullet \bullet ?) + p(1 - p)\mu(? \bullet \circ \bullet \circ ?).$$

2. En écrivant que  $\alpha_{01} = \frac{\mu}{1-\mu}\alpha_{10}$ , déduire de la question précédente que

$$\alpha_{10} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p\mu(1 - \mu)}}{2p\mu} \quad (5)$$

est la seule solution possible.

*Dans ([19], Sec. 4), il est démontré que ces chaînes de Markov sont effectivement des mesures stationnaires pour le TASEP parallèle quand  $p \leq 1/2$ , et que ce sont les seules qui sont invariantes par translation<sup>(x)</sup>. Je ne sais pas ce qu'il en est pour  $p > 1/2$ .*

3. Démontrer que pour aucun  $\rho$  la mesure Bernoulli( $\rho$ ) (i.e. il y a sur chaque site indépendamment  $\bullet/\circ$  avec probabilité  $\rho/1 - \rho$ ) n'est stationnaire pour le TASEP parallèle.

*Ceci démontre que la situation est (pour une fois) plus compliquée en temps discret que continu. Pour le TASEP continu en effet, les seules mesures stationnaires invariantes par translation sont les Bernoulli.*

---

(x). Pour être précis, il y a aussi les combinaisons convexes de ces mesures qui sont bien sûr également stationnaires.

# Corrections

## Exercice 1

1. Comme les deux chemins se croisent forcément, on peut les échanger à leur premier croisement, ceci donne un chemin  $\vec{0} \rightarrow \vec{n} + \vec{1}$  et un chemin  $\vec{1} \rightarrow \vec{n}$ . Ces deux chemins ne sont pas optimaux, mais en prenant l'espérance on a bien l'inégalité recherchée.

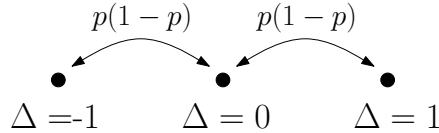
2. On a exactement démontré que  $d$  est "concave" : sa "dérivée"  $(d_{n+1} - d_n)$  est décroissante. Si jamais pour un certain  $n_0$  cette différence devenait égale à  $-\varepsilon < 0$ , alors elle le resterait et

$$d_n = (d_n - d_{n-1}) + (d_{n-1} - d_{n-2}) + \dots + (d_{n_0+1} - d_{n_0}) + d_{n_0}$$

finirait par être négatif, ce qui est absurde.

## Exercice 2

1. On va faire les 3 cas, selon que  $\Delta_n = 0, 1, -1$ .
  - Si  $\Delta_n = 0$ , alors  $Y_{n+1} = X_{n+1}$  sauf si  $h_n$  et  $b_n$  diffèrent. On passe ainsi en  $-1$  ou  $1$  avec probabilité  $p(1-p)$ .
  - Si  $\Delta_n = 1$ , alors  $Y_{n+1}$  "rattrape"  $X_{n+1}$  si et seulement si  $\tau(h_n) = 0$  et  $\tau(b_n) = 1$ . On revient donc en  $0$  avec probabilité  $p(1-p)$ .
  - Si  $\Delta_n = -1$ , idem.



Finalement, on a une chaîne de Markov sur  $\{0, -1, 1\}$  pour laquelle les probas de transition sont symétriques. La mesure uniforme est donc réversible, donc stationnaire.

2. On a  $X_{k+1} = X_k + \tau(b_k)$ , sauf lorsque l'on gagne  $1$  à passer par  $(k+1, 1)$ . Ceci arrive lorsque  $Y_k = X_k - 1$ , que  $\tau(b_k = 1)$  et  $\tau(h_k) = 0$ . On a donc

$$X_{k+1} = X_k + \tau(b_k) - \mathbf{1}_{\Delta_k=1; \tau(b_k)=1; \tau(h_k)=0}.$$

3. On passe à l'espérance et on somme jusqu'à  $n$  :

$$\mathbb{E}[X_n] = np - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\Delta_k = 1)p(1-p)$$

(car bien sûr  $\Delta_k, \tau(b_k)$  et  $\tau(h_k)$  sont indépendantes). Une conséquence de la question 1 est que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Delta_k = 1) \rightarrow 1/3$ . Par Césaro, on a  $\mathbb{E}[X_n]/n \rightarrow (2p + p^2)/3$ . Pour avoir la limite presque-sûre, on utilise le Théorème ergodique pour une chaîne de Markov.

## Exercice 3

1. La stratégie est la suivante : on part de la racine et on emprunte toujours l'arête la "plus petite". À chaque instant, avec probabilité  $1-p^2$  il y a au moins une arête qui vaut  $0$ , avec proba  $p^2$  elles valent toutes les deux  $1$ . Cette stratégie me coûte donc  $p^2$ , qui est ainsi un majorant de  $\gamma$ .

## Exercice 4

1. Puisque  $\mu_d \leq \mathbb{E}[D(\vec{0}, (1, 0, 0, \dots, 0))]$ , alors on va regarder les chemins qui vont simplement jusqu'à  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ . Si on ne considère que le chemin de longueur  $1$  et les  $2(d-1)$  chemins de longueur  $3$  qui y vont, alors on a l'inégalité recherchée.



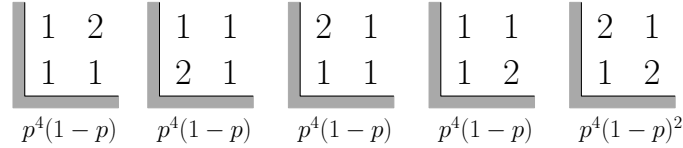
2. Pour  $u \leq 1$  (et même très petit), on décompose selon que le plus petit des  $\Gamma_i$  est en-dessous de  $u$  ou pas :

$$\begin{aligned} \mu_d &\leq \mathbb{E}[\min \Gamma_i \mathbf{1}_{\min \Gamma_i \leq u}] + \mathbb{E}[e \mathbf{1}_{\min \Gamma_i > u}] \\ &\leq u + \mathbb{E}[e] \mathbb{P}(\min \Gamma_i > u) \\ &\leq u + 1 \times \left(1 - \frac{u^3}{6e}\right)^{2(d-1)} \\ &\leq u + \exp\left(-\frac{(d-1)u^3}{3e}\right) \end{aligned}$$

(inégalité de convexité). Si maintenant l'on prend par exemple  $u = 1/d^{1/4}$ , alors on obtient (pour  $d$  grand)

$$\mu_d \leq \frac{2}{d^{1/4}}.$$

**Exercice 5** Tous les cas possibles sont là :

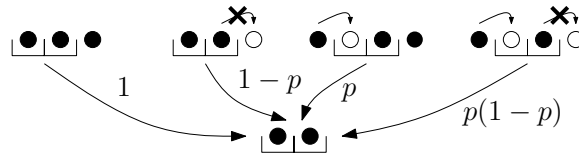


Et ainsi  $\mathbb{P}(T_{2,2} = 4) = 4p^4(1-p) + p^4(1-p)^2$ . C'est cohérent avec Johansson : le 4 = 2<sup>2</sup> correspond aux deux TYss que l'on peut former avec  $\square$  :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Le 1 correspond au

seul TYSS que l'on peut former avec  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  :

**Exercice 6**

1. Il faut faire un dessin avec toutes les configurations qui mènent à  $\bullet\bullet$ , avec les probas correspondantes, j'espère que le dessin est clair :



2. Ceci donne l'équation

$$\mu(1 - \alpha_{10}) = \mu(1 - \alpha_{10})^2 + (1 - p)\mu(1 - \alpha_{10})\alpha_{10} + p\mu\alpha_{10}\alpha_{01}(1 - \alpha_{10}) + p(1 - p)\mu\alpha_{10}\alpha_{01}\alpha_{10}$$

ce qui, avec la simplification suggérée, se simplifie en l'équation du second degré

$$p \frac{\mu}{1 - \mu} \alpha_{10}^2 - \frac{1}{1 - \mu} \alpha_{10} + 1 = 0,$$

dont la solution est (5).

On pourrait bien sûr essayer d'écrire ce genre d'équation pour n'importe quoi d'autre que la configuration  $\bullet\bullet$ , mais on retombe soit sur  $1 = 1$ , soit sur cette même équation.

3. Nous avons raisonné par conditions nécessaires. Si jamais Bernoulli( $\rho$ ) était stationnaire, puisque c'est un cas particulier de chaîne de Markov avec

$$\mu = \alpha_{01} = \rho, \quad \alpha_{10} = 1 - \rho,$$

on rentrerait dans le cas précédent mais (5) ne peut être vérifiée.

## Références

- [1] D.Ahlberg. Asymptotics of first-passage percolation on 1-dimensional graphs (2011). [arXiv:1107.2276](#).
- [2] S.E.Alm et J.C.Wierman. Inequalities for means of restricted first-passage times in percolation theory. *Combinatorics, Probability and Computing*, vol.8 (1999) p.307-315.
- [3] A.-L. Basdevant, N. Enriquez, L. Gerin. Distances in the highly supercritical percolation cluster (2011). *Annals of Probability*, à paraître.
- [4] M.Benaïm, R.Rossignol. Exponential concentration for first passage percolation through modified Poincaré inequalities. *Annales de l'IHP : Probabilités et Statistiques*, vol.44 (2008) n.3 p.544-573.
- [5] I.Benjamini, G.Kalai, O.Schramm. First passage percolation has sublinear distance variance. *Annals of Probability*, vol.31 (2003) n.4 p.1970-1978.
- [6] S.Bhamidi, R. van der Hofstad, G.Hooghiemstra. First passage percolation on the Erdős-Rényi random graph. *Combinatorics, Probability and Computing*, vol.20 (2011) n.5 p.683-707.
- [7] N.D. Blair-Stahn. First passage percolation and competition models (2010). [arXiv:1005.0649](#).
- [8] S.Chatterjee. The universal relation between scaling exponents in first-passage percolation. *Annals of Mathematics*, à paraître.
- [9] O.Couronné, N.Enriquez, L.Gerin. Construction of a short path in high dimensional first-passage percolation. *Electronic Communications in Probability*, vol.16 (2011) p.22-28.
- [10] D.Dhar. First passage percolation in many dimensions. *Physics Letter A*, vol.130 (1988) n.4-5 p.308-310.
- [11] J.A.Fill, R.Pemantle. Percolation, First-Passage Percolation and Covering Times for Richardson's Model on the n-Cube. *Annals of Applied Probability*, vol.3 (1993) n.2 p.593-629.
- [12] O.Garet, R.Marchand. Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation in random environment. *ESAIM Probability and Statistics*, vol.8 (2004) p.169-199.
- [13] O.Garet, R.Marchand. Coexistence in two-type first-passage percolation models. *Annals of Applied Probability*, vol.15 (2005) n.1A p.298-330.
- [14] J.-B. Gouéré. Monotonicity in first-passage percolation (2012). [arXiv:1202.2665](#).
- [15] O.Häggström, R.Pemantle. First passage percolation and a model for competing spatial growth. *Journal of Applied Probability*, vol.35 (1998) p.683-692.
- [16] J.M.Hammersley, D.J.A.Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. (1965) *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif.* p.61-110.
- [17] C.Hoffman. Coexistence for Richardson type competing spatial growth models. *Annals of Applied Probability*, vol.15 (2005) n. 1B p.739-747.
- [18] C.D.Howard. Models of first-passage percolation. *Probability on discrete structures*, p.125-173, Encyclopaedia Math. Sci., 110, Springer (2004).

- [19] W.Jockusch, J.Propp, P.Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem (1995). [arXiv:math/9801068](https://arxiv.org/abs/math/9801068)
- [20] H.Kesten. *Aspects of first passage percolation*. École d'été de probabilités de Saint-Flour 1984, p.125-264, Lecture Notes in Math. 1180, Springer (1986).
- [21] J.F.C.Kingman. Subadditive ergodic theory. *Annals of Probability*, vol.1 (1973) p.883-909.
- [22] K.Johansson. Shape fluctuations and random matrices. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 209 (2000) n.2 p.437-476.
- [23] T.Kriecherbauer and J.Krug. A pedestrian's view on interacting particle systems, KPZ universality and random matrices. *Journal of Physics A*, vol.43 (2010) n.40 403001.
- [24] R.Marchand. Strict Inequalities for the Time Constant in First Passage Percolation. *Annals of Applied Probability*, vol.12 (2002) n.3 p.1001-1038 .
- [25] J.B.Martin. Last-passage percolation with general weight distribution. *Markov Processes and Related Fields*, vol.12 (2006) n.2 p.273-299.
- [26] C.M.Newman, M.S.T. Piza. Divergence of Shape Fluctuations in Two Dimensions. *Annals of Probability*, vol. 23 (1995) n.3 p.977-1005.
- [27] H.Rost. Nonequilibrium behaviour of a many particle process : density profile and local equilibria. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, vol.58 (1981) n.1 p.41-53.
- [28] T.Seppäläinen. *Lecture Notes on the Corner Growth Model*. Disponible à <http://www.math.wisc.edu/~seppalai/>.
- [29] Z.Shi. *Random walks and trees*. Notes de cours disponibles à <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/zhan>.
- [30] R.P.Stanley. *Enumerative combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press (1999).
- [31] J.M.Steele. *Probability theory and combinatorial optimization*. SIAM, Philadelphia (1997).