



**HAL**  
open science

# Equations générales des milieux continus

Jean Garrigues

► **To cite this version:**

Jean Garrigues. Equations générales des milieux continus. Engineering school. Equations générales des milieux continus, 2012, pp.98. cel-00696063v2

**HAL Id: cel-00696063**

**<https://cel.hal.science/cel-00696063v2>**

Submitted on 16 Jun 2014 (v2), last revised 4 Jan 2023 (v6)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Équations générales des milieux continus

Jean Garrigues

(version du 28 janvier 2014)





# Avant-propos

L'objectif de ce cours est d'établir les équations générales régissant tous les milieux continus, qu'ils soient solides ou fluides. Les développements qui suivent se placent dans le cadre de la physique classique (non relativiste et non quantique). Les équations générales des milieux continus sont donc les conséquences des quatre principes fondamentaux de la physique classique<sup>(1)</sup> :

1. le principe de la conservation de la masse ;
2. le principe fondamental de la mécanique ;
3. le premier principe de la thermodynamique, encore appelé principe de la conservation de l'énergie ;
4. le second principe de la thermodynamique.

En ce qui concerne le principe fondamental de la mécanique, l'auteur a choisi résolument de conserver le principe fondamental de Newton, c'est-à-dire celui qui est généralement exposé dans les cours de mécanique générale élémentaires. Ce choix est un choix pédagogique : au lieu de commencer la mécanique des milieux continus par l'énoncé d'un nouveau principe fondamental (le principe des travaux virtuels ou des puissances virtuelles<sup>(2)</sup>), il semble préférable à l'auteur de se baser sur les connaissances classiques acquises en mécanique générale. Les connaissances préalables de mécanique générale nécessaires à la lecture de ce cours se résument aux trois théorèmes généraux pour des ensembles de points matériels (finis ou non) :

1. le théorème de la résultante dynamique ;
2. le théorème du moment dynamique ;
3. le théorème de la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique).

La lecture de ce cours suppose aussi une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielle<sup>(3)</sup> ainsi que de la cinématique des milieux continus<sup>(4)</sup>.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple :  $a$ ,  $\mu$ ) ;
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple :  $\mathbf{v}$ ) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple :  $\mathbf{T}$ ) ;
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice

---

<sup>(1)</sup> On démontre que si le principe de la conservation de l'énergie est universel et si les grandeurs calorifiques scalaires ou vectorielles sont objectives, les deux premiers principes (masse et mécanique) en sont des conséquences. Voir l'article <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00600261>.

<sup>(2)</sup> Dans ce cours, ils apparaissent donc comme des théorèmes.

<sup>(3)</sup> L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923> ou bien <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html>

<sup>(4)</sup> L'auteur propose un autre cours intitulé *Cinématique des milieux continus* : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00681766> ou bien <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/cinematique.html>.

de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = [m_{ij}]$$

- la transposition est notée avec un  $\top$  en exposant (exemple :  $\mathbf{T}^\top$ ) ;
- les ensembles d'entités mathématiques sont en majuscules doublées, en particulier :
- $\mathbb{R}$  est l'espace des réels,
- $\mathbb{V}_3$  est un espace vectoriel de dimension 3,
- $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$  est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre  $p$  construits sur  $\mathbb{V}_3$  (de dimension  $3^p$ ),
- $\mathbb{Q}_{3+}$  est le groupe des rotations ( $\mathbb{Q}_{3+} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ ) ;
- le produit vectoriel de deux vecteurs de  $\mathbb{V}_3$  est noté «  $\wedge$  » ;
- Le tenseur métrique est noté  $\mathbf{G}$  ;
- Le tenseur d'orientation est noté  $\mathbf{H}$ .

### Remerciement

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND <sup>(5)</sup>, ce grand magicien de  $\text{\LaTeX}$ , sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe book <sup>(6)</sup> et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Bonne lecture.

**Information** – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références de pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

---

<sup>(5)</sup> De l'université McGill, de Montréal.

<sup>(6)</sup> Ceux qui écrivent en  $\text{\LaTeX}$  me comprendront.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Concepts fondamentaux</b>	<b>9</b>
1.1	Les domaines de milieux continus Domaine matériel, 9 • Domaine géométrique, 10 • Comparaison, 10.	9
1.2	Grandeurs physiques extensives Application à un domaine matériel, 11 • Application à un domaine géométrique, 12.	11
1.3	Dérivées temporelle d'intégrales à bord variable Cas d'un domaine matériel, 12 • cas d'un domaine géométrique, 14.	12
1.4	Lemme fondamental	16
1.5	En bref...	16
<b>2</b>	<b>Conservation de la masse</b>	<b>19</b>
2.1	Concept de masse	19
2.2	Principe de la conservation de la masse	19
2.3	Forme locale du principe de la conservation de la masse	20
2.4	Bilan de masse dans un domaine géométrique	21
2.5	Densités massiques de grandeurs extensives	22
2.6	Changements d'observateur	23
2.7	En bref...	23
<b>3</b>	<b>Principe fondamental de la mécanique</b>	<b>25</b>
3.1	Rappels de mécanique générale Loi de Newton et observateurs galiléens, 25 • Théorèmes généraux, 26.	25
3.2	Efforts extérieurs sur un domaine matériel Actions à distance, 27 • Actions de contact, 28.	27
3.3	Efforts intérieurs dans un milieu continu Existence du tenseur des contraintes, 29 • Conditions aux limites en contrainte, 30 • Décomposition des contraintes, 30.	28
3.4	Théorèmes généraux pour un domaine matériel Théorème de la résultante dynamique, 32 • Théorème du moment dynamique, 33 • Théorème de la puissance cinétique, 34.	31
3.5	Conséquences locales des théorèmes généraux Équation de mouvement, 35 • Symétrie du tenseur des contraintes, 36 • Puissance des efforts intérieurs, 37 • Synthèse, 37.	35

<b>3.6</b>	<b>Théorèmes généraux pour un domaine géométrique</b> .....	<b>38</b>
	Bilan de quantité de mouvement, 38 • Bilan de moment cinétique, 40 • Bilan d'énergie cinétique, 41.	
<b>3.7</b>	<b>Formulation intégrale des équations de mouvement</b> .....	<b>42</b>
<b>3.8</b>	<b>Changements d'observateur</b> .....	<b>43</b>
<b>3.9</b>	<b>En bref...</b> .....	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>Conservation de l'énergie</b> .....	<b>47</b>
<b>4.1</b>	<b>Concepts de base en thermodynamique</b> .....	<b>47</b>
	Système, 47 • Variables d'état, 48 • Fonction d'état, 51 • Isotropie des fonctions d'état, 52 • Espace des états, 53 • Évolution thermodynamique, 53.	
<b>4.2</b>	<b>Principe de la conservation de l'énergie</b> .....	<b>54</b>
	Énoncé classique pour une évolution finie entre deux instants, 54 • Énoncé global instantané, 56 • Conservation de l'énergie pour un domaine matériel, 56.	
<b>4.3</b>	<b>Forme locale de la conservation de l'énergie</b> .....	<b>58</b>
<b>4.4</b>	<b>Conservation de l'énergie pour un domaine géométrique</b> .....	<b>59</b>
<b>4.5</b>	<b>Changements d'observateur</b> .....	<b>59</b>
<b>4.6</b>	<b>En bref...</b> .....	<b>60</b>
<b>5</b>	<b>Second principe de la thermodynamique</b> .....	<b>63</b>
<b>5.1</b>	<b>Introduction</b> .....	<b>63</b>
<b>5.2</b>	<b>Énoncé traditionnel</b> .....	<b>64</b>
<b>5.3</b>	<b>Second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel</b> .....	<b>65</b>
<b>5.4</b>	<b>Forme locale du second principe</b> .....	<b>67</b>
<b>5.5</b>	<b>Second principe pour un domaine géométrique</b> .....	<b>70</b>
<b>5.6</b>	<b>Changements d'observateur</b> .....	<b>71</b>
<b>5.7</b>	<b>Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique</b> .....	<b>71</b>
<b>5.8</b>	<b>Capacités calorifiques locales dans une évolution</b> .....	<b>72</b>
<b>5.9</b>	<b>En bref...</b> .....	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Le modèle « fluide simple »</b> .....	<b>75</b>
<b>6.1</b>	<b>Définition d'un fluide simple</b> .....	<b>75</b>
<b>6.2</b>	<b>Conséquences du second principe de la thermodynamique</b> .....	<b>76</b>
	Relation de Helmholtz, 77 • Loi de comportement mécanique, 77 • Loi de comportement thermique, 78 • Synthèse, 78.	
<b>6.3</b>	<b>Fluides simples newtoniens</b> .....	<b>79</b>
<b>6.4</b>	<b>Un exemple de fluide simple : les gaz parfaits</b> .....	<b>80</b>
<b>6.5</b>	<b>Liquides idéaux</b> .....	<b>81</b>

---

<b>6.6 Fluides simples compressibles et dilatables</b> .....	<b>83</b>
Compressibilité et dilatabilité, 83 • Exemple de modèle à compressibilité et dilatabilité constantes, 84.	
<b>6.7 En bref ...</b> .....	<b>87</b>
<b>7 Synthèse</b> .....	<b>89</b>
<b>7.1 Le problème de mécanique des milieux continus</b> .....	<b>89</b>
<b>7.2 La résolution</b> .....	<b>90</b>
<b>7.3 Conclusion</b> .....	<b>91</b>
<b>A Démonstrations</b> .....	<b>93</b>
<b>A.1 Lemme fondamental pour les intégrales de volume</b> .....	<b>93</b>
<b>A.2 Existence du champ tensoriel des contraintes de Cauchy</b> .....	<b>94</b>
<b>A.3 Existence du champ vectoriel courant de chaleur</b> .....	<b>97</b>



# Concepts fondamentaux

Avant d'aborder l'écriture des principes fondamentaux et leurs conséquences pour les milieux continus, il est nécessaire d'introduire des concepts indispensables à la bonne compréhension des chapitres suivants.

## 1.1 Les domaines de milieux continus

En mécanique des milieux continus, on raisonne sur deux types de domaines : les domaines matériels et les domaines géométriques. Dans cette section on en donne les définitions.

**Remarque 1.1** – Dans la littérature spécialisée, les auteurs ne précisent pas toujours clairement le type de domaine qu'ils considèrent, et cette imprécision est à l'origine de nombreux malentendus.

### 1.1.1 Domaine matériel

- **Définition 1.1 – Domaine matériel.** Un domaine matériel est défini par l'ensemble des particules (*a priori* en mouvement) qui le constituent.

Si une particule appartient au domaine matériel à un instant  $t$ , elle lui appartient donc à tout instant. Un domaine matériel se déplace et se déforme en raison du mouvement de ses particules<sup>(1)</sup>. Quand on considère un domaine matériel, on dit souvent que « l'on suit le domaine dans son mouvement ». *Il n'y a donc pas de matière qui traverse la frontière en mouvement.* Le domaine matériel étant en mouvement, l'ensemble des positions actuelles de ses particules définit une région de l'espace qui change à chaque instant.

**Remarque 1.2** – Chaque observateur attribue aux particules du domaine matériel une position et un mouvement différent. La forme d'un domaine matériel évolue avec le temps, mais la forme actuelle est la même pour tous les observateurs (objectivité des distances actuelles entre particules).

- **Notation 1.2** – Dans la suite, on utilisera les conventions suivantes :
  - un domaine matériel sera noté  $\mathcal{D}^m$  (c'est un ensemble de particules) ;
  - le domaine de l'espace occupé par ses particules à l'instant actuel  $t$  sera noté  $\mathcal{D}_t^m$  ;
  - sa frontière à l'instant actuel  $t$  sera notée  $\partial \mathcal{D}_t^m$ .
  - le domaine de l'espace occupé par ses particules à l'instant de référence  $t_0$  sera noté  $\mathcal{D}_0^m$  ;
  - sa frontière à l'instant de référence  $t_0$  sera notée  $\partial \mathcal{D}_0^m$ .

**Vocabulaire** – En thermodynamique, les domaines matériels sont appelés *systèmes fermés*<sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Ce mouvement est différent pour chaque observateur.

<sup>(2)</sup> Avec parfois une petite nuance : les thermodynamiciens supposent parfois implicitement que la frontière étanche à la matière est fixe. Nous ne ferons évidemment pas cette restriction.

### 1.1.2 Domaine géométrique

- **Définition 1.3 – Domaine géométrique.** Un domaine géométrique est défini par l'ensemble des points géométriques qui le constituent.

Comme pour tout domaine, la frontière d'un domaine géométrique est une surface fermée. Quand un milieu continu est en mouvement, les particules qui sont dans le domaine géométrique à un instant  $t$  ne sont pas les mêmes que celles qui s'y trouvent à un instant  $t'$ . On dit que le domaine géométrique est « traversé par le milieu continu en mouvement ». Il y a donc des particules qui traversent la frontière (ou une partie de frontière), en entrant ou en sortant du domaine géométrique. Dans ce cours, les frontières des domaines géométriques seront considérées *a priori* comme mobiles pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement, mais le mouvement des points de la frontière du domaine géométrique est différent du mouvement des particules qui s'y trouvent.

**Remarque 1.3** – Chaque observateur attribue à la frontière du domaine géométrique une position et un mouvement différent. La forme du domaine géométrique peut être variable avec le temps, mais la forme actuelle est la même pour tous les observateurs (objectivité des distances actuelles entre points).

- **Notation 1.4** – Dans la suite, on utilisera les conventions suivantes :
  - un domaine géométrique sera noté  $\mathcal{D}^g$  (région de l'espace délimité par une frontière fermée) ;
  - le domaine de l'espace qu'il occupe à l'instant  $t$  sera noté  $\mathcal{D}_t^g$  ;
  - sa frontière (*a priori* mobile) à l'instant  $t$  sera notée  $\partial \mathcal{D}_t^g$ .

**Vocabulaire** – En thermodynamique, les domaines géométriques sont appelés *systèmes ouverts*. En mécanique des fluides, ils sont souvent aussi appelés *volumes de contrôle* <sup>(3)</sup>.

### 1.1.3 Comparaison entre les deux types de domaines

Les deux types de domaines ont chacun leur intérêt :

- *Les domaines matériels sont les préférés des mécaniciens des solides déformables.* En effet, leur sujet d'étude est le comportement d'un objet déformable toujours constitué des mêmes particules : les particules de l'objet déformable.
- *Les domaines géométriques sont les préférés des mécaniciens des fluides.* En effet, en mécanique des fluides (liquides ou gaz), on ne se préoccupe que de l'évolution des grandeurs physiques des particules qui sont actuellement à l'intérieur du domaine géométrique, sans se préoccuper de leur évolution lorsqu'elles se situent à l'extérieur.

**Remarque 1.4** – Les mécaniciens des fluides qui n'envisagent que des domaines géométriques supposent souvent implicitement (et parfois un peu trop vite) que les domaines géométriques ont des frontières fixes. Il n'est pas toujours possible de trouver un observateur pour lequel le domaine géométrique est à frontières fixes. Par exemple, si on considère le domaine géométrique défini comme l'espace à l'intérieur d'une turbomachine, il existe des parties de frontières qui sont mobiles (les aubages qui tournent) par rapport à d'autres parties de frontières (les parois et les sections d'entrée et de sortie) ; dans ce cas, il n'est pas possible de trouver un observateur pour lequel toutes les frontières du domaine géométrique sont fixes. C'est pourquoi dans la suite, pour ne pas restreindre la généralité des équations, les frontières d'un domaine géométriques seront *a priori* considérées comme mobiles.

<sup>(3)</sup> En thermodynamique comme en mécanique des fluides, il est parfois sous-entendu que les frontières d'un domaine géométrique sont fixes (pour un certain observateur).

## 1.2 Grandeurs physiques extensives

- **Définition 1.5 – Grandeur extensive.** On dit qu'une grandeur physique  $\Psi(\mathcal{D})$  (scalaire, vectorielle ou tensorielle) définie sur un domaine  $\mathcal{D}$  (matériel ou géométrique) est extensive si, pour toute partition du domaine  $\mathcal{D}$ , sa valeur est la somme de ses valeurs pour chaque partie  $\mathcal{D}_i$  de la partition :

$$\Psi(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n \Psi(\mathcal{D}_i), \quad \forall \text{ la partition } \{\mathcal{D}_i\} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi \text{ grandeur extensive}$$

**Rappel** – Une partition d'un domaine  $\mathcal{D}$  est un ensemble de parties  $\{\mathcal{D}_i\}$  tel que :

$$\mathcal{D} = \cup_{i=1}^n \mathcal{D}_i \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

- **Théorème 1.6 – Densité volumique.** Si une grandeur  $\Psi$  est extensive sur un domaine  $\mathcal{D}$ , alors il existe dans  $\mathcal{D}$  un champ, noté  $\Psi^v(M)$ , et appelé densité volumique de  $\Psi$  tel que :

$$\Psi(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \Psi^v(M) \, dv \quad (1.1)$$

**Démonstration** – Cette propriété est l'application du théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue à l'ensemble des parties de  $\mathcal{D}$ .

- **Définition 1.7 – Grandeur intensive.** Toute grandeur physique non extensive est dite intensive.

Certaines grandeurs physiques sont extensives d'autres ne le sont pas. Pour le déterminer, il suffit de vérifier si les conditions de la définition 1.5 sont remplies ou non.

**Exemple 1.8** – Le volume (scalaire), la masse (scalaire), l'énergie cinétique (scalaire), la quantité de mouvement (vecteur) sont des grandeurs extensives.

En revanche, la température (scalaire), la pression (scalaire), la déformation (tenseur d'ordre 2) sont des grandeurs intensives.

### 1.2.1 Application à un domaine matériel

Puisque dans un domaine matériel, les particules qu'il contient sont toujours les mêmes, on peut identifier ses particules indifféremment par la méthode de Lagrange (par leur position de référence) ou par la méthode d'Euler (par leur position actuelle). Pour désigner les domaines, on utilise les notations 1.2 [p. 9].

Soit  $\Psi$  est une grandeur extensive et soit  $\Psi^v$  sa densité volumique [propriété 1.6 p. 11], sa valeur actuelle pour le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  peut s'écrire de deux manières :

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \, dv_0 \quad (1.2)$$

où  $K_v$  est la dilatation volumique actuelle en une particule dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ . Le terme  $K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)$  est la description de Lagrange de ce champ matériel.

**Précisions** – Dans l'équation (1.2), pour passer de l'intégrale sur le domaine actuel  $\mathcal{D}_t^m$  à l'intégrale sur le domaine de référence  $\mathcal{D}_0^m$ , on effectue le changement de variable  $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$ , où  $\mathbf{f}$  est la description de Lagrange du mouvement. On a donc :

$$\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) = \Psi_E^v(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), t) = \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) \quad (= \Psi^v(P, t)) \quad \text{et} \quad dv_t = K_v \, dv_0$$

### 1.2.2 Application à un domaine géométrique

Contrairement aux domaines matériels, on ne peut identifier les particules qui sont actuellement à l'intérieur du domaine géométrique que par la méthode d'Euler, car ce sont les valeurs de la densité volumique  $\Psi^v$  pour les particules qui sont actuellement à l'intérieur du domaine qui sont l'objet de l'intégration (certaines particules ne sont peut-être plus dans le domaine  $\mathcal{D}_t^g$  à un autre instant car des particules traversent la frontière). Par conséquent, la valeur actuelle de la grandeur extensive  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  ne s'écrit qu'avec une description d'Euler du champ  $\Psi^v$  :

$$\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad (1.3)$$

### 1.3 Rappel : dérivées temporelles d'intégrales à bord variable

Que les domaines envisagés soient matériels ou géométriques, on aura besoin, dans les chapitres qui suivent, d'écrire la dérivée temporelle d'intégrales sur des domaines dont les frontières sont *a priori* variables avec le temps. La variation temporelle d'une intégrale de volume dont le domaine d'intégration varie avec le temps est due à la fois à la variation temporelle de son intégrande et à la variation temporelle du domaine d'intégration dû au mouvement des frontières.

On rappelle le résultat mathématique suivant <sup>(4)</sup> :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \Psi^v(\mathbf{x}, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \Psi^v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \Psi^v(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.4)$$

où :

- $\Psi^v(\mathbf{x}, t)$  est un champ défini dans tous les domaines  $\mathcal{D}_t$  de l'intervalle d'étude :  $t \in [t_1; t_2]$  ;
- $\mathbf{v}^f$  est la vitesse des *points de la frontière* <sup>(5)</sup> du domaine d'intégration ;
- $\mathbf{n}_t$  est la normale unitaire extérieure actuelle à la frontière  $\partial \mathcal{D}_t$ .

#### 1.3.1 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine matériel

Soit  $\Psi$  une grandeur extensive dont la densité volumique est le champ matériel  $\Psi^v(P, t)$  et soit  $\mathcal{D}^m$  un domaine matériel. On peut décrire le champ matériel  $\Psi^v(P, t)$  par la méthode de Lagrange ou celle d'Euler [éq. (1.2) p. 11].

**Si le champ  $\Psi^v$  est décrit par la méthode d'Euler,** la valeur actuelle de la grandeur extensive  $\Psi$  pour le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  est :

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad [\text{éq. (1.2) p. 11}]$$

Le domaine d'intégration  $\mathcal{D}_t^m$  est variable avec le temps. Le domaine étant matériel, la vitesse d'un point de la frontière du domaine d'intégration est la vitesse de la particule qui s'y trouve, on a donc :  $\mathbf{v}^f = \mathbf{v}(P, t)$ . En vertu du théorème (1.4), la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial \Psi_E^v}{\partial t}(\mathbf{x}_t, t) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.5)$$

<sup>(4)</sup> La démonstration est dans *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur.

<sup>(5)</sup> Ce n'est pas nécessairement la vitesse des particules qui s'y trouvent.

Le champ des vitesses  $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)$  étant défini dans tout le domaine d'intégration, on peut utiliser le théorème de la divergence pour transformer l'intégrale de frontière en une intégrale de volume. En utilisant l'identité tensorielle algébrique :

$$\mathbf{T}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \forall \mathbf{n} \in \mathbb{V} \quad (1.6)$$

le théorème de la divergence permet d'écrire l'égalité :

$$\int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}) \, ds_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{div}(\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \, dv$$

**Remarque** – Si la grandeur extensive  $\Psi$  est scalaire,  $\otimes$  est un produit simple.

On obtient ainsi une seconde expression de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  :

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{div}(\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \right) dv_t \quad (1.7)$$

En développant la divergence <sup>(6)</sup> dans l'équation (1.7), on obtient une troisième expression de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{grad}_E \Psi^v(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) + \text{div}_E \mathbf{v}(\mathbf{x}_t, t) \Psi^v(\mathbf{x}_t, t) \right) dv_t \\ \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \dot{\Psi}^v(\mathbf{x}_t, t) + d_{vE}(\mathbf{x}_t, t) \Psi^v(\mathbf{x}_t, t) \right) dv_t \quad (\text{déf. de la dérivée particulière}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

où :

- $\dot{\Psi}^v$  est la dérivée particulière de la densité volumique  $\Psi^v$  ;
- $d_v = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v}$  est le taux de dilatation volumique actuel.

Les trois expressions (1.5), (1.7) et (1.8) de  $\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t)$  sont complètement équivalentes. Seule la première expression fait apparaître une intégrale de frontière qui est le flux sortant du tenseur  $\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)$  à travers la frontière. Les deux autres expressions sont des intégrales de volume. La dernière fait apparaître la dérivée particulière de la densité volumique.

**Si le champ  $\Psi^v$  est décrit par la méthode de Lagrange,** la valeur actuelle de la grandeur extensive  $\Psi$  pour le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  est :

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \, dv_0 \quad [\text{éq. (1.2) p. 11}]$$

où  $K_{vL}$  est la description de Lagrange du champ de dilatation volumique actuelle dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ .

Le domaine d'intégration  $\mathcal{D}_0^m$  est, par définition, indépendant du temps. La vitesse des points de la frontière du domaine d'intégration est donc nulle ( $\mathbf{v}^f = \mathbf{0}$ ). En vertu du théorème (1.4) [p. 12],

<sup>(6)</sup> On rappelle l'identité tensorielle :  $\mathbf{div}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{grad} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \text{div} \mathbf{v}$ .

la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{\partial}{\partial t} \left( \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) dv_0 \quad [\text{éq. (1.4) p. 12}] \quad (1.9)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{d}{dt} \left( \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) dv_0 \quad (\mathbf{x}_0 \text{ ne dépend pas de } t)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \dot{\Psi}_L^v(\mathbf{x}_0, t) + \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) \frac{d}{dt} K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0$$

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \dot{\Psi}_L^v(\mathbf{x}_0, t) + \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) d_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0 \quad (1.10)$$

où :

- $\dot{\Psi}^v$  est la dérivée particulaire de la densité volumique  $\Psi^v$  ;
- $K_v$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$  ;

—  $d_v = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v} = \mathbf{grad}_L \mathbf{v} : \mathbf{F}^{-T}$  est le taux de dilatation volumique actuel.

Les trois équations (1.5) [p. 12], (1.7) [p. 13] et (1.8) [p. 13] (avec des descriptions d'Euler), ainsi que les deux équations (1.9) et (1.10) (avec des descriptions de Lagrange) sont toutes des expressions équivalentes de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  sur un domaine matériel où  $\Psi$  est une grandeur extensive. On peut les utiliser indifféremment, selon les termes que l'on a envie de voir apparaître.

### 1.3.2 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine géométrique

Soit  $\Psi$  une grandeur extensive dont la densité volumique est  $\Psi^v(P, t)$  et soit  $\mathcal{D}^g$  un domaine géométrique. Dans un domaine géométrique (de frontière *a priori* variable avec le temps), la seule manière de décrire les grandeurs des particules qui s'y trouvent est la méthode d'Euler :

$$\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad [\text{éq. (1.3) p. 12}]$$

Le domaine d'intégration  $\mathcal{D}_t^g$  est *a priori* variable avec le temps, mais contrairement au domaines matériels, la vitesse des points de la frontière est différente de la vitesse des particules qui s'y trouvent ( $\mathbf{v}^f \neq \mathbf{v}_E(P, t)$ ). En vertu du théorème (1.4) [p. 12], la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad [\text{éq. (1.4) p. 12}] \quad (1.11)$$

**Remarque 1.5** – Si pour l'observateur utilisé toute la frontière du domaine géométrique est fixe, alors  $\mathbf{v}^f = \mathbf{0}$  et l'intégrale de bord disparaît.

En utilisant l'identité tensorielle algébrique rappelée dans l'équation (1.6) [p. 13], le théorème de la divergence permet d'écrire l'égalité :

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div} \left( \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \right) dv_t = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.12)$$

En ajoutant le terme de gauche et en retranchant le terme de droite de l'égalité (1.12) à l'équation (1.11), on obtient une seconde expression de  $\frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  :

$$\frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{div}(\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t))}_{\boldsymbol{\tau}} dv_t + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \left( (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \cdot \mathbf{n}_t \right) ds_t}_{\boldsymbol{\Phi}} \quad (1.13)$$

où :

- le terme  $\boldsymbol{\tau}$  est appelé *taux*<sup>(7)</sup> *de production volumique* de  $\Psi$  (unité :  $[\Psi].m^{-3}.s^{-1}$ );
- son intégrale  $\int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\tau} dv_t$  est appelé *taux de production interne* de  $\Psi$  (unité :  $[\Psi].s^{-1}$ );
- le terme  $\boldsymbol{\Phi}$  est appelé *flux convectif entrant*<sup>(8)</sup> de  $\Psi$  à travers la frontière (unité :  $[\Psi].s^{-1}$ ).

En développant la divergence<sup>(9)</sup> dans l'expression de  $\boldsymbol{\tau}$ , on obtient une troisième expression de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial}{\partial t}\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{grad}_E \Psi^v(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{div}_E \mathbf{v}(\mathbf{x}_t, t) \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\left( \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + d_{vE}(\mathbf{x}_t, t) \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \right)}_{\boldsymbol{\tau}} dv_t + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \left( (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \cdot \mathbf{n}_t \right) ds_t}_{\boldsymbol{\Phi}} \quad (1.14)$$

où  $d_v = \mathbf{div}_E \mathbf{v} = \mathbf{tr} \mathbf{D}$  est le taux de dilatation volumique actuel.

**Interprétations** – Les équations (1.13) et (1.14) sont souvent appelées *équations de bilan* de la grandeur extensive  $\Psi$  pour le domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$ . On dit que la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  est due au taux de production interne  $\int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\tau} dv_t$  à l'intérieur du domaine géométrique et au flux convectif entrant  $\boldsymbol{\Phi}$ . En utilisant l'identité tensorielle algébrique (1.6) [p. 13] le terme  $\boldsymbol{\Phi}$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v \left( (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \right) ds_t = \int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \left( \Psi_E^v \otimes (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \right) \cdot \mathbf{n}_t ds_t$$

Le terme  $\boldsymbol{\Phi}$  est donc le flux convectif sortant du tenseur  $\Psi_E^v \otimes (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E)$  à travers la frontière, ou bien le flux convectif entrant du tenseur  $\Psi_E^v \otimes (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f)$ .

Les trois équations (1.11), (1.13) et (1.14) sont toutes des expressions équivalentes de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  sur un domaine géométrique où  $\Psi$  est une grandeur extensive. On peut les utiliser indifféremment, selon les termes que l'on a envie de voir apparaître.

- **Notation 1.9** – Pour alléger les écritures, on convient de ne plus faire figurer dans la suite du cours les arguments des descriptions d'Euler et de Lagrange. Il est sous entendu que la description de Lagrange d'un champ pour un certain observateur  $\mathcal{R}$  a pour arguments  $(\mathbf{x}_0, t)$  et que sa description d'Euler a pour arguments  $(\mathbf{x}_t, t)$ .

<sup>(7)</sup> **Attention**, ici le mot « taux » signifie ici une dérivée temporelle simple et non une dérivée temporelle logarithmique comme pour les taux de déformation ( $d_l, d_s, d_v, \mathbf{D}$ ) définis en cinématique. Ces dénominations, malheureusement consacrées par l'usage, peuvent induire en erreur.

<sup>(8)</sup> Certains auteurs appellent « flux » l'intégrande de  $\boldsymbol{\Phi}$ . Son unité est alors :  $[\Psi].m^{-2}.s^{-1}$ .

<sup>(9)</sup> On rappelle l'identité tensorielle :  $\mathbf{div}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{grad} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \mathbf{div} \mathbf{v}$ .

## 1.4 Rappel : lemme fondamental

- **Théorème 1.10 – Lemme fondamental.** Soit  $\Psi^v(M)$  un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) défini dans  $\mathcal{E}_3$  et soit un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ . On a l'équivalence suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} \Psi^v(M) dv = \mathbf{0}, \quad \forall \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi^v(M) = \mathbf{0}, \quad \forall M \quad (1.15)$$

Ce lemme dont la démonstration est en annexe A.1 [p. 93] sera systématiquement utilisé dans les chapitres qui suivent pour déduire les expressions locales des principes fondamentaux.

## 1.5 En bref...

Pour appliquer les principes fondamentaux de la physique classique, on raisonne sur deux sortes de domaines : les domaines matériels et les domaines géométriques. Ces domaines ont en général des frontières (ou des parties de frontières) variables avec le temps.

Les grandeurs physiques extensives permettent de définir des champs de densités volumiques de ces grandeurs, qui peuvent être décrits par la méthode de Lagrange (seulement pour les domaines matériels) ou par la méthode d'Euler (pour les domaines matériels ou géométriques).

Suivant le type de domaine (matériel ou géométrique) et suivant le mode de description (Lagrange ou Euler) du champ de densité volumique  $\Psi^v$ , les dérivées temporelles d'une grandeur *extensive*  $\Psi(\mathcal{D}, t)$  définie sur un domaine s'écrivent sous différentes formes :

— sur un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  avec la description d'Euler de  $\Psi^v$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.16)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v + \text{div}(\Psi_E^v \otimes \mathbf{v}_E) \right)}_{\tau_E} dv_t \quad (1.17)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \underbrace{(\dot{\Psi}_E^v + d_{vE} \Psi_E^v)}_{\tau_E} dv_t \quad (1.18)$$

— sur un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  avec la description de Lagrange de  $\Psi^v$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^v K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \underbrace{(\dot{\Psi}_L^v + d_{vL} \Psi_L^v)}_{\tau_L} K_{vL} dv_0 \quad (1.19)$$

— sur un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$  avec la description d'Euler de  $\Psi^v$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.20)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v + \text{div}(\Psi_E^v \otimes \mathbf{v}_E) \right)}_{\tau_E} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi} \quad (1.21)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{(\dot{\Psi}_E^v + d_{vE} \Psi_E^v)}_{\tau_E} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi} \quad (1.22)$$

où

- $\mathbf{v}^f$  est la vitesse d'un point de la frontière ;
- $K_v$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est  $\mathcal{D}_0^m$  ;
- $d_v$  est le taux de dilatation volumique actuel ;
- $\tau$  est le taux de production volumique de  $\Psi$  à l'intérieur du domaine (matériel ou géométrique) ;
- $\Phi$  est le flux convectif de  $\Psi$  entrant dans le domaine géométrique à travers les frontières par convection.

Les équations (1.21) et (1.22) sont souvent appelées *équations de bilan* de  $\Psi$  pour un domaine géométrique.

**Remarque 1.6** – Les équations de bilan (1.21) et (1.22) ont été établies pour les domaines géométriques. Si les frontières mobiles du domaine géométrique sont étanches à la matière, alors ce domaine géométrique contient toujours les mêmes particules, il est donc aussi un domaine matériel et on a l'égalité  $\mathbf{v}^f = \mathbf{v}_E$ . Le flux  $\Phi$  est alors nul et on retrouve les équations (1.17) et (1.18) établies pour un domaine matériel.



# Conservation de la masse

## 2.1 Concept de masse en mécanique des milieux continus

La masse est une mesure de la quantité de matière. Par principe, la masse d'un domaine est une grandeur *scalaire* (un tenseur d'ordre 0), *extensive* (la masse d'un domaine est la somme des masses d'une de ses partitions) et *objective* (la masse actuelle d'un domaine est la même pour tous les observateurs). L'extensivité de la masse permet d'affirmer l'existence dans ce domaine d'un champ matériel de densité volumique de masse appelé *masse volumique actuelle* [th. 1.6 p. 11], traditionnellement noté  $\rho(P,t)$  <sup>(1)</sup>.

**La masse d'un domaine matériel**  $\mathcal{D}^m$ , de position de référence  $\mathcal{D}_0^m$  et de position actuelle  $\mathcal{D}_t^m$ , peut s'écrire avec une description de Lagrange ou une description d'Euler des masses volumiques [éq. (1.2) p. 11, avec  $\Psi = m$  et  $\Psi^v = \rho$  scalaires] :

$$\begin{aligned} m(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E(\mathbf{x}_t, t) \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \, dv_t && \text{[notations 1.9 p. 15]} \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \, dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} \, dv_0 && \text{[notations 1.9 p. 15]} \end{aligned}$$

où  $K_v$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ , et  $K_{vL}$  est sa description de Lagrange.

**La masse d'un domaine géométrique**  $\mathcal{D}^g$ , de position actuelle  $\mathcal{D}_t^g$ , s'écrit uniquement avec une description d'Euler du champ des masses volumiques [éq. (1.3) p. 12, avec  $\Psi = m$  et  $\Psi^v = \rho$  scalaires] :

$$m(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E(\mathbf{x}_t, t) \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \, dv_t \quad \text{[notations 1.9 p. 15]}$$

## 2.2 Principe de la conservation de la masse

Une des manières d'exprimer le principe de la conservation de la masse est la suivante <sup>(2)</sup> :

- **Principe 2.1 – Conservation de la masse.** La masse de tout domaine matériel est invariante dans le temps.

<sup>(1)</sup> On pourrait la noter  $m^v(P,t)$

<sup>(2)</sup> On peut exprimer le principe de la conservation de la masse de différentes manières. Celle choisie ici, exprimée pour un domaine matériel, semble la plus intuitive à l'auteur. D'autres auteurs préfèrent l'exprimer avec un domaine géométrique, en disant que le taux de production interne de masse y est nul [éq.(1.21) ou (1.22) p. 16]. Dans ce cours, l'expression du principe sur un domaine géométrique devient un théorème.

**Si le champ de masse volumique est décrit par la méthode d'Euler,** le principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  s'écrit :

$$0 = \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \, dv_t \quad [\text{éq. (1.2) p. 11}]$$

$$0 = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \text{div}_E(\rho \mathbf{v}) \right) dv_t \quad [\text{éq. (1.17) p. 16}] \quad (2.1)$$

$$0 = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E d_{vE}) \, dv_t \quad [\text{éq. (1.18) p. 16}] \quad (2.2)$$

**Si le champ des masses volumiques est décrit par la méthode de Lagrange,** le principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  s'écrit :

$$0 = \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} \, dv_0 \quad [\text{éq. (1.2) p. 11}]$$

$$0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} (\dot{\rho}_L + \rho_L d_{vL}) K_{vL} \, dv_0 \quad [\text{éq. (1.19) p. 16}] \quad (2.3)$$

### 2.3 Forme locale du principe de la conservation de la masse

- **Théorème 2.2 – Conservation locale de la masse.** Le principe de la conservation de la masse sur tout domaine matériel est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -d_v \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \quad (2.4)$$

**Démonstration** – Le principe de la conservation de la masse 2.1 [p. 19] pour un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  s'écrit :

$$0 = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E d_{vE}) \, dv_t \quad [\text{éq. (2.2) p. 20}]$$

Ce principe est vrai quel que soit le domaine matériel considéré. En vertu du lemme fondamental rappelé en (1.15) [p. 16], on en déduit le résultat :  $\dot{\rho}_E + \rho_E d_{vE} = 0$ . Dans l'équation (2.4) on a supprimé les indices  $E$  inutiles car par définition  $\rho_E(\mathbf{x}_t, t) = \rho_L(\mathbf{x}_0, t) = \rho(P, t)$ . La démonstration de la réciproque est évidente.

On laisse le soin au lecteur de vérifier, par la même méthode, que l'on aboutit à la même équation (2.4) à partir de l'expression du principe de conservation de la masse (2.3) [p. 20] où les champs sont décrits par la méthode de Lagrange (on rappelle que la dilatation volumique  $K_v$  n'est jamais nulle).

Le principe de la conservation de la masse introduit donc une relation entre les variations temporelles de masse volumique et les variations temporelles de dilatation volumique.

**Expression eulérienne** – Si on exprime la dérivée particulaire  $\dot{\rho}$  par son expression eulérienne :  $\dot{\rho} = \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E \rho \cdot \mathbf{v}_E$ , l'expression locale du principe de la conservation de la masse (2.4) [p. 20] s'écrit<sup>(3)</sup> :

$$\frac{1}{\rho_E} \left( \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E \rho \cdot \mathbf{v}_E \right) = -\text{div}_E \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \text{div}_E(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.5)$$

Sous cette forme, l'équation (2.5) est traditionnellement appelée *équation de continuité*<sup>(4)</sup>.

<sup>(3)</sup> On rappelle l'identité tensorielle :  $\mathbf{div}(f\mathbf{v}) = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{v} + f \text{div} \mathbf{v}$ ,  $\forall f \in \mathbb{R} \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ .

<sup>(4)</sup> La « continuité » évoquée ici n'a aucun rapport avec celle utilisée en mathématiques pour qualifier les fonctions.

**Expression lagrangienne** – Si on exprime la dérivée particulaire  $\dot{\rho}$  par son expression lagrangienne :  $\dot{\rho} = \frac{\partial \rho_L}{\partial t}$ , l'expression locale du principe de la conservation de la masse [éq. (2.4) p. 20] s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = -\operatorname{div}_E \mathbf{v} = -\mathbf{grad}_L \mathbf{v} : \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_L \mathbf{grad}_L \mathbf{v} : \mathbf{F}^{-\top} = 0$$

**Principe alternatif** – Le taux de production volumique de masse est  $\tau_m = \dot{\rho} + \rho d_v$  [éq. (1.22) p. 16, où  $\Psi = m$  et  $\Psi^v = \rho$ ]. Le théorème 2.2 [p. 20] affirme donc que *le taux de production volumique de masse est nul en chaque particule*. Il est possible de prendre cet énoncé comme principe fondamental de la conservation de la masse, et d'en déduire les expressions globales du principe de la conservation de la masse sur un domaine matériel ou géométrique.

L'équation différentielle (2.4) peut s'intégrer temporellement entre les instants  $t_0$  et  $t$  :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -d_v = -\frac{\dot{K}_v}{K_v} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{C}{K_v} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{C}{K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)}$$

où  $C$  est une constante déterminée par les conditions initiales. Pour  $t = t_0$ , on a :  $K_{vL}(\mathbf{x}_0, t_0) = 1$  et  $\rho_L(\mathbf{x}_0, t_0) = \rho_0(\mathbf{x}_0)$  où  $\rho_0(\mathbf{x}_0)$  est la masse volumique de la particule  $\mathbf{x}_0$  à l'instant de référence  $t_0$  (masse volumique initiale). On en déduit la constante  $C = \rho_0(\mathbf{x}_0)$ . On a donc :

$$K_{vL} = \frac{\rho_0(\mathbf{x}_0)}{\rho_L(\mathbf{x}_0, t)} = \frac{\rho_0(P)}{\rho(P, t)} \quad \Leftrightarrow \quad K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.6)$$

Le principe de la conservation de la masse implique l'égalité entre la dilatation volumique actuelle  $K_v$  (concept cinématique) et le rapport des masses volumiques initiale et actuelle.

**Remarque 2.1** – Contrairement à ce qui est parfois affirmé, dans une déformation entre les instants  $t_0$  et  $t$ , la masse volumique n'est donc pas constante en général sauf dans une déformation isovolume<sup>(5)</sup>.

## 2.4 Bilan de masse dans un domaine géométrique

- **Théorème 2.3 – Bilan de masse.** La dérivée temporelle de la masse contenue dans un domaine géométrique est égale au débit massique entrant à travers la frontière.

**Démonstration** – Dans un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$ , la masse du milieu continu contenu dans le domaine ne se conserve pas au cours du temps. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\dot{\rho}_E + d_{vE} \rho_E}_{\tau_m} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi_m} \quad [\text{éq. (1.22) p. 16 où } \Psi = m] \\ \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t = \Phi_m \quad (\text{th. 2.2 [p. 20]} \Rightarrow \tau_m = 0) \quad (2.7) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{v}^f$  est la vitesse des points de la frontière du domaine géométrique et  $\Phi_m$  est le débit massique entrant à travers la frontière du domaine géométrique.

**Principe alternatif** – Le théorème 2.3 peut aussi bien être pris comme principe de la conservation de la masse, et on peut en déduire la forme locale et la forme globale pour un domaine matériel comme étant des théorèmes.

<sup>(5)</sup> Une déformation isovolume ( $K_v = 1$ ) se traduit par  $\det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = \det \mathbf{C} = \det \mathbf{B} = 1$  ou encore dans le cas des « petites perturbations » par :  $\operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} = 0$ . Pour les autres tenseurs de déformation, c'est une relation entre les invariants. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur.

## 2.5 Densités massiques de grandeurs extensives

La distribution d'une grandeur physique extensive  $\Psi$  dans un domaine  $\mathcal{D}$  (géométrique ou matériel) peut aussi se décrire par des densités massiques  $\Psi^m$  (unité :  $[\Psi].\text{kg}^{-1}$ ) plutôt que par des densités volumiques  $\Psi^v$  (unité :  $[\Psi].\text{m}^{-3}$ ). La relation entre ces deux densités est :

$$\Psi^v = \rho \Psi^m \quad (2.8)$$

**Pour un domaine matériel**, la valeur actuelle d'une grandeur extensive  $\Psi$  est :

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \Psi_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^m dm \quad (2.9)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^v K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \Psi_L^m K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^m \rho_0 dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^m dm \quad (2.10)$$

**Pour un domaine géométrique**, la valeur actuelle d'une grandeur extensive  $\Psi$  est :

$$\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \Psi_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^m dm \quad (2.11)$$

On en déduit de nouvelles expressions de la dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine qui seront utiles dans la suite quand on utilise des densités massiques :

### Domaine matériel en description d'Euler

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\Psi}_E^v + d_{vE} \Psi_E^v) dv_t \quad [\text{éq. (1.18) p. 16}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( (\rho_E \Psi_E^m)^\cdot + d_{vE} \rho_E \Psi_E^m \right) dv_t \quad [\text{éq. (2.8)}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\rho_E \dot{\Psi}_E^m + (\dot{\rho}_E + d_{vE} \rho_E) \Psi_E^m) dv_t$$

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{\Psi}_E^m dm \quad [\text{éq. (2.4) p. 20}] \quad (2.12)$$

### Domaine matériel en description de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} (\dot{\Psi}_L^v + d_{vL} \Psi_L^v) K_{vL} dv_0 \quad [\text{éq. (1.19) p. 16}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( (\rho_L \Psi_L^m)^\cdot + d_{vL} \rho_L \Psi_L^m \right) K_{vL} dv_0 \quad [\text{éq. (2.8)}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \rho_L \dot{\Psi}_L^m + (\dot{\rho}_L + d_{vL} \rho_L) \Psi_L^m \right) K_{vL} dv_0$$

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \dot{\Psi}_L^m dm \quad [\text{éq. (2.4) p. 20}] \quad (2.13)$$

### Domaine géométrique en description d'Euler

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^g} (\dot{\Psi}_E^v + d_{vE} \Psi_E^v) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n} ds_t \quad [\text{éq. (1.22) p. 16}] \\
 &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \left( (\rho_E \Psi_E^m)' + d_{vE} \rho_E \Psi_E^m \right) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \Psi_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n} ds_t \\
 \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{\Psi}_E^m dm + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \Psi_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n} ds_t}_{\Phi} \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

- $\Phi$  (unité :  $[\Psi] \cdot s^{-1}$ ) est le flux de  $\Psi$  entrant à travers la frontière du domaine géométrique ;
- $\dot{\Psi}^m$  est la dérivée particulaire de la densité massique  $\Psi^m$  ; c'est aussi le taux de production massique de  $\Psi$  à l'intérieur du domaine.

## 2.6 Changements d'observateur

- **Théorème 2.4** – La masse volumique est un champ scalaire objectif.

**Démonstration** – La masse  $M$  et le volume  $V$  d'un domaine matériel sont des grandeurs objectives par principe (physique classique). La masse volumique moyenne  $M/V$  est donc objective pour tout domaine matériel. En passant à la limite on en déduit que le champ des masses volumiques est un champ objectif.

- **Théorème 2.5** – La dérivée particulaire de la masse volumique est un champ scalaire objectif.

**Démonstration** – On montre en cinématique que la dérivée particulaire de toute grandeur scalaire objective est objective.

- **Théorème 2.6** – La divergence eulérienne du champ des vitesses est un champ scalaire objectif.

**Démonstration** – Ce résultat se déduit immédiatement de l'équation (2.4) [p. 20] :  $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -d_v$  car le taux de dilatation volumique  $d_v$  est égal à  $\text{div}_E \mathbf{v}$  (cinématique)

## 2.7 En bref...

La masse d'un domaine matériel est une grandeur scalaire, extensive, objective et invariante dans le temps, qui mesure la quantité de matière contenue dans le domaine matériel.

L'expression locale du principe de la conservation de la masse pour un milieu continu est une équation différentielle.

La masse d'un domaine géométrique est variable dans le temps car de la matière traverse les frontières.

On peut calculer la dérivée temporelle d'une grandeur extensive  $\Psi$  sur un domaine matériel ou géométrique, non seulement avec des intégrales de volume de densités volumiques  $\Psi^v$  [section 1.5 p. 16], mais aussi avec des intégrales de masse de densités massiques  $\Psi^m$  [section 2.5 p. 22]. Cette diversité de formules est due à :

1. l'utilisation de domaines géométriques ou matériels,
2. l'utilisation de densités volumiques ou massiques,

3. l'utilisation de la description de Lagrange ou de celle d'Euler pour décrire les densités,
4. la mise en évidence ou non des flux à travers la frontière (équations de bilan),

Les expressions les plus simples sont celles avec les densités massiques  $\Psi^m$  et leur dérivée particulière.

# Principe fondamental de la mécanique

## 3.1 Rappels de mécanique générale

### 3.1.1 Loi de Newton et observateurs galiléens

- **Définition 3.1 – Observateur galiléen.** Un observateur galiléen est un observateur pour lequel le mouvement des points matériels obéit à la loi de Newton :

$$\mathbf{f} = m\boldsymbol{\gamma} \quad (\text{égalité vectorielle})$$

où  $m$  est la masse d'un point matériel,  $\boldsymbol{\gamma}$  est son accélération pour un observateur galiléen et  $\mathbf{f}$  est la résultante des forces que l'extérieur exerce sur le point matériel.

On ne peut savoir si un observateur est galiléen ou non qu'en faisant des expériences pour vérifier si les prédictions de la loi de Newton sont correctes ou non pour cet observateur <sup>(1)</sup>.

**Exemples d'expériences** – La loi de Newton prédit qu'un point matériel sans vitesse initiale et soumis à une force constante se déplace en ligne droite. Elle prédit aussi qu'un pendule lâché sans vitesse initiale oscille dans un plan fixe.

Si pour un observateur, les prédictions de la loi de Newton sont considérées comme suffisamment correctes, on peut déclarer galiléen cet observateur. Déclarer galiléen un observateur, c'est donc accepter une certaine approximation dans la confrontation avec des expériences.

**Exemples 3.1** – Si on assimile un objet pesant à un point matériel, et si on utilise un observateur lié à la terre pour analyser son mouvement, cet objet est soumis à une force constante (en première approximation) : son poids <sup>(2)</sup>. Lâché sans vitesse initiale, la loi de Newton prédit que sa trajectoire est une droite colinéaire au poids. En première approximation, on peut constater que c'est vrai, cependant des mesures fines mettent en évidence une petite déviation vers l'est. De même, si on observe le mouvement d'un pendule simple, on constate que, pour un observateur terrestre, son plan d'oscillation est sensiblement fixe. Mais une observation plus fine (expérience du pendule de Foucault) montre que ce plan tourne à une faible vitesse. Selon que l'on considère que la déviation vers l'est de la chute des corps ou que la vitesse de rotation du plan d'oscillation d'un pendule sont négligeables ou non, on décide si un observateur terrestre est galiléen ou non.

Tous les observateurs dont le mouvement par rapport à un observateur galiléen est une translation à vitesse constante sont aussi des observateurs galiléens car pour tous ces observateurs

<sup>(1)</sup> On rappelle que la valeur de l'accélération d'un point matériel dépend de l'observateur utilisé pour observer le mouvement.

<sup>(2)</sup> Il faut faire l'expérience dans le vide pour éliminer l'action de l'air.

l'accélération d'un point matériel est la même. On ne peut donc pas distinguer un observateur galiléen particulier qui serait qualifié d'absolu. Par ailleurs, tout observateur qui n'est pas en translation à vitesse constante par rapport à un observateur galiléen n'est pas galiléen.

N'étant pas valable pour tous les observateurs, *la loi de Newton  $\mathbf{f} = m\boldsymbol{\gamma}$  n'est pas une loi universelle*<sup>(3)</sup>. On peut la rendre artificiellement universelle en ajoutant aux forces extérieures  $\mathbf{f}$  des forces extérieures fictives appelées *forces d'inertie* (d'entraînement et de Coriolis). La loi de Newton est alors vraie pour tous les observateurs, mais les forces extérieures agissant sur un point matériel sont la somme des forces réelles<sup>(4)</sup> et de forces fictives qui sont particulières à chaque observateur non galiléen.

### 3.1.2 Rappel des théorèmes généraux

L'objet de la mécanique (des milieux continus ou non) est de trouver les relations entre le mouvement d'un système matériel, c'est-à-dire d'un ensemble de points matériels liés entre eux ou non, et les actions mécaniques exercées sur le système matériel par son extérieur. En mécanique des milieux continus, un système matériel est un domaine matériel [déf. 1.1 p. 9].

- **Définition 3.2 – Actions extérieures.** On appelle actions mécaniques extérieures d'un système matériel l'action mécanique exercée par l'extérieur (le reste de l'univers) sur ce système matériel.

En appliquant à chaque point matériel d'un système matériel les deux lois fondamentales énoncées par Newton<sup>(5)</sup> pour les points matériels, on démontre les trois théorèmes généraux suivants, valables pour tout système matériel :

- **Théorème 3.3 – Résultante dynamique.** La résultante dynamique actuelle (somme des quantités d'accélération) est égale à la résultante des actions mécaniques extérieures actuelles .
- **Théorème 3.4 – Moment dynamique.** Le moment dynamique actuel en un point (somme des moments en ce point des quantités d'accélération) est égale au moment en ce point des actions mécaniques extérieures actuelles.
- **Théorème 3.5 – Puissance cinétique.** La puissance cinétique actuelle (dérivée temporelle de l'énergie cinétique) est égale à la somme de la puissance actuelle des efforts extérieurs et de la puissance actuelle des efforts intérieurs.

On rappelle que le choix du point pour évaluer les moments est indifférent. *Dans toute la suite, ce point sera l'origine de l'observateur utilisé pour décrire le mouvement.* Le vecteur moment en  $O$  d'un vecteur  $\mathbf{w}$  s'écrira donc :

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{w}) = \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{w}$$

Les trois théorèmes généraux rappelés ci-dessus constituent les connaissances mécaniques préalables qui sont nécessaires et suffisantes pour comprendre les développements qui suivent. On peut les considérer comme des axiomes pour la mécanique des milieux continus.

**Remarque 3.2 –** Ces théorèmes sont encore vrais pour un observateur non galiléen si l'on ajoute aux forces extérieures des forces d'inertie fictives d'entraînement et de Coriolis.

<sup>(3)</sup> La seule mécanique dont les lois sont universelles est la *théorie de la relativité générale* due à A. EINSTEIN.

<sup>(4)</sup> C'est-à-dire les forces dont la source est identifiée.

<sup>(5)</sup> D'une part, la loi  $\mathbf{f} = m\boldsymbol{\gamma}$ , et d'autre part l'action d'un point matériel sur un autre est une *force* colinéaire à la droite qui joint les deux points matériels (interactions de Newton)

## 3.2 Efforts extérieurs sur un domaine matériel

Les actions mécaniques extérieures sur un domaine matériel de milieu continu peuvent se classer en deux catégories : les actions mécaniques à distance et les actions mécaniques de contact. Chacune de ces actions extérieures est modélisée par un champ.

### 3.2.1 Modélisation des actions mécaniques extérieures à distance

Les actions mécaniques extérieures à distance agissent sur toutes les particules du domaine. On les modélise par un champ matériel de *densité volumique de force*<sup>(6)</sup>, qu'on notera  $\mathbf{f}^v(P,t)$  (unité :  $\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$ ) ou bien par un champ matériel de *densité massique de force* que l'on notera  $\mathbf{f}^m(P,t)$  (unité :  $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1} = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ). Le vecteur  $\mathbf{f}^v(P,t)$  représente la force volumique à distance<sup>(7)</sup> actuelle exercée par la totalité de l'extérieur du domaine matériel sur la particule  $P$ . *A priori*, la valeur de cette densité volumique de force dépend du domaine matériel choisi pour l'étude, car pour chaque domaine matériel, la définition de son extérieur est *a priori* différente<sup>(8)</sup>.

**Remarques 3.3** – Si l'observateur utilisé pour décrire le mouvement ne peut pas être considéré comme galiléen, le vecteur  $\mathbf{f}^v$  (ou bien  $\mathbf{f}^m$ ) contient en outre des champs de forces d'inertie volumiques (ou massiques) fictives d'entraînement et de Coriolis.

Dans la plupart des études, les seules forces à distance notables exercées par l'extérieur sur les particules du domaine matériel se réduisent à la gravitation terrestre<sup>(9)</sup>, les autres masses extérieures ayant une action gravitationnelle négligeable devant celle de la terre, soit parce qu'elles sont trop éloignées<sup>(10)</sup>, soit parce que leur masse est trop faible<sup>(11)</sup>. On peut donc souvent affirmer que le champ de forces gravitationnelles d'origine extérieure est indépendant du choix du domaine.

Lorsque les dimensions du domaine sont petites devant celles de la terre, on simplifie souvent le champ de gravitation terrestre (qui est approximativement un champ vectoriel central convergeant vers le centre de gravité de la terre) en disant que le champ de forces gravitationnel terrestre est un champ de forces massique uniforme  $\mathbf{g}$ , orienté vers la terre, appelé *accélération de la pesanteur*, et dont la norme au voisinage de la surface de la terre est  $\|\mathbf{g}\| = g \simeq 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

On peut représenter les forces à distance par un champ de forces volumiques ou un champ de forces massiques ( $\mathbf{f}^v = \rho \mathbf{f}^m$ ). Dans les applications où seule la pesanteur est prise en compte, on affirme parfois que le champ des forces volumiques est uniforme. Les lois de la gravitation montrent que c'est le champ des forces massiques  $\mathbf{f}^m$  (l'accélération de la pesanteur) qui est uniforme. Le champ des forces volumiques  $\mathbf{f}^v$  n'est uniforme que si l'on peut considérer que la masse volumique  $\rho$  est aussi un champ uniforme, ce qui est rarement le cas en mécanique des milieux continus [éq. (2.4) p. 20]. Cette approximation est acceptable pour des liquides (variations de volume négligeables), elle est assez grossière pour les solides déformables, et elle est difficilement admissible pour les gaz.

<sup>(6)</sup> Noter que l'on n'envisage pas de densité volumique de moment. De ce fait, on élimine la possibilité d'actions magnétiques. Le comportement électromagnétique des milieux continus n'est pas envisagé dans ce cours. Il demanderait une refonte de toute la cinématique des milieux continus : en électromagnétisme, la position à un instant  $t$  d'un milieu continu n'est pas suffisamment décrite par la seule position actuelle de ses particules, il faut y ajouter leur orientation actuelle (en électromagnétisme, une particule est la limite d'un dipôle magnétique).

<sup>(7)</sup> Forces gravitationnelles, électrostatiques . . .

<sup>(8)</sup> Dans la pratique, on simplifie souvent l'extérieur en le réduisant à quelques sources de champs gravitationnels ou électriques. Les champs de forces à distance extérieurs ne changent donc pas pour bon nombre de domaines matériels, tant qu'ils n'incluent pas l'une de ces sources.

<sup>(9)</sup> À condition que la terre ne fasse pas partie du domaine, auquel cas la gravitation terrestre ne serait pas un effort extérieur.

<sup>(10)</sup> Les astres par exemple. Toutefois, si l'on veut prévoir un phénomène comme la marée, il faut prendre en compte la gravitation due à la lune et celle due au soleil.

<sup>(11)</sup> La matière voisine du domaine, par exemple des parois ou l'immeuble d'à côté.

### 3.2.2 Modélisation des actions mécaniques extérieures de contact

Pour un domaine matériel de milieu continu, les forces extérieures de contact ne peuvent exister que sur la frontière du domaine. Elles sont modélisées par une densité surfacique de force s'appliquant sur la frontière  $\partial \mathcal{D}^m$ , qui sera notée  $\mathbf{f}^s$  (unité : Pa = N.m<sup>-2</sup>).

**Remarques 3.4** – La mécanique des milieux continus est par essence inapte à représenter finement les interactions microscopiques. Les champs de forces surfaciques de contact modélisent macroscopiquement les actions mécaniques d'attraction ou de répulsion, à court rayon d'action, entre les corpuscules voisins situés de part et d'autre de la frontière.

Par ailleurs, si les densités surfaciques de force ont bien la dimension d'une pression (N.m<sup>-2</sup>), l'orientation et le sens du champ surfacique  $\mathbf{f}^s$  peuvent être quelconques par rapport à la normale extérieure de la frontière.

### 3.3 Efforts intérieurs dans un milieu continu

Soit  $\mathcal{D}^m$  un domaine matériel dont la position actuelle est  $\mathcal{D}_1^m$ . On a défini dans la section précédente les actions de l'extérieur sur ce domaine matériel. On se propose maintenant de définir des efforts intérieurs à ce domaine matériel.

En mécanique générale élémentaire, on considère des domaines matériels constitués d'un nombre fini de points matériels. Dans ce cas, il est aisé de définir les efforts intérieurs en considérant individuellement toutes les interactions de Newton<sup>(12)</sup> entre tous les couples de points matériels (le nombre de couples est fini). Dans un milieu continu, cette méthode est inapplicable. Afin d'envisager les efforts intérieurs dans un domaine de milieu continu, on considère des efforts extérieurs à des sous-domaines du domaine matériel étudié.

Soit un sous-domaine matériel  $\mathcal{D}_1^m \subset \mathcal{D}^m$ . L'extérieur du sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  peut être partitionné de la manière suivante :

$$\text{ext}(\mathcal{D}_1^m) = (\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m) \cup \text{ext}(\mathcal{D}^m)$$

Les actions du sous-domaine  $\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m$  sur le sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  sont des actions extérieures au sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  mais *intérieures* au domaine  $\mathcal{D}^m$ . Comme pour tout domaine matériel, les actions extérieures au sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  sont de deux sortes :

1. *Des actions extérieures à distance* provenant de  $(\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m)$  et de  $\text{ext}(\mathcal{D}^m)$  :

$$\mathbf{f}_{\mathcal{D}_1^m}^v = \mathbf{f}_{(\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m)/\mathcal{D}_1^m}^v + \mathbf{f}_{\text{ext}(\mathcal{D}^m)/\mathcal{D}_1^m}^v$$

L'action à distance  $\mathbf{f}_{(\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m)/\mathcal{D}_1^m}^v$  est une action à distance extérieure au sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  mais c'est une action *intérieure* au domaine  $\mathcal{D}^m$ .

2. *Des actions extérieures de contact* sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_1^m$  : on note  $\mathbf{c}$  la densité de force surfacique actuelle exercée par le sous-domaine  $\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m$  sur le sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$ , distribuée sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_1^m$ . La densité surfacique de force  $\mathbf{c}$  est une action de contact extérieure au sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  mais *intérieure* au domaine  $\mathcal{D}^m$ .

- **Définition 3.6 – Contrainte.** On appelle contrainte actuelle, la densité surfacique de force de contact actuelle qui s'exerce sur la frontière d'un sous-domaine de domaine matériel.

<sup>(12)</sup> On rappelle que les interactions de Newton entre deux points matériels se limitent à des *forces* (pas de moment d'interaction).

La valeur du champ vectoriel de contraintes  $\mathbf{c}$  (unité : Pa = N.m<sup>-2</sup>), défini sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_1^m$ , dépend *a priori* à la fois du choix du sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m \subset \mathcal{D}^m$  et du choix de la particule  $P$  sur sa frontière.

- **Hypothèse 3.7 – Hypothèse de Cauchy.** La contrainte actuelle  $\mathbf{c}$  en une particule  $P$  de la frontière d'un sous-domaine matériel ne dépend que de la particule  $P$  de la frontière et de la facette matérielle<sup>(13)</sup> tangente en  $P$  à la frontière actuelle du sous-domaine matériel  $\mathcal{D}_1^m$ . Il existe donc une fonction à valeur vectorielle  $\boldsymbol{\sigma}$  telle que :

$$(P, \mathbf{n}_t) \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{c} = \boldsymbol{\sigma}(P, \mathbf{n}_t) \quad \text{où } \mathbf{n}_t \text{ est la direction actuelle de la facette matérielle.} \quad (3.1)$$

L'hypothèse de Cauchy affirme donc que tous les sous-domaines matériels  $\mathcal{D}_1^m$  dont la frontière contient la particule  $P$  et qui ont la même normale extérieure actuelle<sup>(14)</sup> en  $P$ , ont la même contrainte extérieure actuelle en  $P$  :  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$ . En revanche, pour la même particule  $P$ , le vecteur contrainte  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}'_t, t)$  est *a priori* différent pour une autre facette matérielle de normale unitaire  $\mathbf{n}'_t$  (c'est une autre famille de sous-domaines).

**Justification microphysique** – Une facette matérielle en une particule  $P$  sépare les corpuscules du voisinage de  $P$  en deux groupes. La contrainte  $\mathbf{c}$  représente les actions à court rayon d'action<sup>(15)</sup> des corpuscules du côté positif de la normale sur ceux du côté négatif. Si on change de facette matérielle, la définition des deux groupes de corpuscules change, l'action d'un groupe sur l'autre est donc différente.

Compte tenu de l'hypothèse de Cauchy, on pose une nouvelle définition pour la contrainte :

- **Définition 3.8 – Contrainte (redéfinition).** On appelle contrainte actuelle en une particule  $P$  pour une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , la force surfacique actuelle  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$  qui s'exerce en  $P$  sur la frontière de tout sous-domaine passant par  $P$  et de normale unitaire extérieure  $\mathbf{n}_t$ .

### 3.3.1 Existence du tenseur des contraintes

- **Théorème 3.9 – Tenseur des contraintes de Cauchy.** En chaque particule d'un milieu continu et à chaque instant, il existe un tenseur du second ordre appelé tenseur des contraintes de Cauchy actuel, noté  $\boldsymbol{\sigma}$ , tel que la contrainte actuelle s'exerçant sur une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est donnée par :

$$\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t \quad (3.2)$$

**Démonstration** – En appliquant le principe fondamental de la mécanique à un certain domaine matériel que l'on fait tendre d'une certaine manière vers un volume nul, on montre que l'application  $\boldsymbol{\sigma}$  définie dans l'hypothèse de Cauchy [éq. (3.1)] est nécessairement un opérateur *linéaire sur son argument vectoriel*  $\mathbf{n}_t$ . L'opérateur linéaire  $\boldsymbol{\sigma}$  est donc un endomorphisme linéaire de  $\mathbb{V}_3$ , c'est-à-dire un tenseur du second ordre<sup>(16)</sup>. La démonstration détaillée est donnée en annexe section A.2 [p.94].

<sup>(13)</sup> Une facette matérielle en une particule  $P$  est engendrée par deux directions matérielles distinctes issues de  $P$ ; elle est identifiée par leur normale commune. Des définitions précises sont données dans le cours *Cinématique des milieux continus* du même auteur.

<sup>(14)</sup> Toutes les frontières de ces sous-domaines matériels sont donc tangentes en  $P$ .

<sup>(15)</sup> Ces actions peuvent être des forces d'attraction ou de répulsion, selon que le mouvement tend à les éloigner ou les rapprocher de leur distance naturelle.

<sup>(16)</sup> Les endomorphismes linéaires de  $\mathbb{V}_3$  sont isomorphes aux tenseurs du second ordre. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur.

Ce théorème ne prouve que l'existence du champ tensoriel des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  sans en préciser la valeur en toute particule et à tout instant. Le champ tensoriel  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  est solution d'équations différentielles qui seront établies plus loin. Comme tous les champs matériels, le champ de tenseur des contraintes peut aussi bien être décrit par la méthode de Lagrange que par la méthode d'Euler :  $\boldsymbol{\sigma}(P, t) = \boldsymbol{\sigma}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\sigma}_E(\mathbf{x}_t, t)$ . Toutefois, quel que soit le mode de description, c'est l'application de la valeur actuelle  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  à la direction *actuelle* de la normale à une facette matérielle qui conduit à la valeur actuelle de la contrainte pour cette facette matérielle.

### 3.3.2 Conditions aux limites en contrainte

- **Théorème 3.10 – Condition aux limites en contraintes.** Soit  $\partial \mathcal{D}_1^m$  la frontière actuelle d'un domaine matériel, soit  $P'$  une particule générique de cette frontière et soit  $\mathbf{n}_t(P', t)$  la normale extérieure actuelle à la frontière en  $P'$ . On note  $\mathbf{f}^s(P', t)$  la densité de force surfacique extérieure de contact actuelle en  $P'$ . Le champ de tenseurs des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  doit satisfaire la condition à la frontière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = \mathbf{f}^s(P', t), \quad \forall P' \in \partial \mathcal{D}_1^m \quad (3.3)$$

**Démonstration** – Considérons la famille de sous-domaines  $\mathcal{D}_1^m$  dont la frontière est tangente en  $P'$  à  $\partial \mathcal{D}_1^m$ . En cette particule frontière, la contrainte extérieure  $\mathbf{c}(P', \mathbf{n}_t, t)$  sur un sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  [déf. 3.8 p. 29] est égale à la force surfacique de contact  $\mathbf{f}^s(P', t)$  extérieure au domaine  $\mathcal{D}_1^m$  car en  $P'$ , les frontières  $\partial \mathcal{D}_1^m$  et  $\partial \mathcal{D}_1^m$  ont la même normale extérieure. On a donc  $\mathbf{c}(P', \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{f}^s(P', t)$ . Le théorème d'existence 3.9 [p. 29] entraîne l'égalité (3.3).

**Remarque 3.5** – En particulier, sur une partie de frontière où il n'y a pas de forces extérieures de contact (rien n'agit sur la frontière, on l'appelle souvent « bord libre »), le champ de tenseur des contraintes doit néanmoins satisfaire la condition aux limites :

$$P' \text{ sur un bord libre} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = \mathbf{0}$$

En mécanique des solides déformables on considère comme bord libre les frontières sur lesquelles aucun effort n'est exercé par un objet en contact. En mécanique des fluides, ce sont souvent des surfaces libres (limites de jets, surface libre d'un liquide dans un réservoir). Dans les deux cas on néglige la pression atmosphérique.

La condition aux limites (3.3) est très importante : elle contribue à déterminer la solution particulière du problème parmi l'infinité de solutions des équations différentielles<sup>(17)</sup> de la mécanique des milieux continus.

### 3.3.3 Décomposition des contraintes

Soit  $P$  une particule à l'intérieur d'un milieu continu, et soit  $\mathbf{n}_t$  la normale unitaire actuelle d'une facette matérielle en  $P$ . On note  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$  la contrainte actuelle en  $P$  pour cette facette matérielle. La contrainte  $\mathbf{c}$  est la force surfacique de contact actuelle exercée par la matière qui se trouve du côté de  $\mathbf{n}_t$  (l'extérieur d'un sous-domaine matériel  $\mathcal{D}_1^m$ ) sur la matière qui se trouve de l'autre côté de la facette matérielle (l'intérieur d'un sous-domaine matériel  $\mathcal{D}_1^m$ ).

<sup>(17)</sup> On rappelle que la solution générale d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles contient des fonctions et des constantes indéterminées, qui sont résolues par les conditions aux limites et les conditions initiales.

- **Définition 3.11 – Contrainte normale.** On appelle contrainte normale actuelle en la particule  $P$  pour la facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , le scalaire défini par :

$$c_N = \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t = \boldsymbol{\sigma}(P, t) : (\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) : \mathbf{N}_t$$

Si  $c_N > 0$  on dit que c'est une *traction* (l'extérieur de  $\mathcal{D}_1^m$  exerce sur  $\partial \mathcal{D}_1^m$  une force vers lui).  
Si  $c_N < 0$  on dit que c'est une *compression*.

**Remarque 3.6** – Noter que le signe de la contrainte normale  $c_N$  ne change pas avec sens de  $\mathbf{n}_t$ .

- **Définition 3.12 – Contrainte tangentielle.** On appelle contrainte tangentielle actuelle en la particule  $P$  pour la facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , le vecteur défini par :

$$\mathbf{c}_T = \mathbf{c} - c_N \mathbf{n}_t = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t - (\mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t$$

La contrainte tangentielle actuelle  $\mathbf{c}_T$  pour la facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est un donc vecteur orthogonal à  $\mathbf{n}_t$  (on vérifie aisément que  $\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{c}_T = 0$ ). Pour une facette matérielle en une particule  $P$ , de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , on peut donc décomposer le vecteur contrainte actuelle  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$  en une partie normale et une partie tangentielle :

$$\mathbf{c} = c_N \mathbf{n}_t + \mathbf{c}_T \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{c}\|^2 = c_N^2 + \|\mathbf{c}_T\|^2$$

Les trois réels  $\|\mathbf{c}\|$ ,  $c_N$  et  $\|\mathbf{c}_T\|$  sont des scalaires (leur valeur ne dépend pas d'une base).

**Remarque 3.7** – Contrairement au scalaire  $c_N$ , le vecteur  $\mathbf{c}_T$  est sensible au sens de  $\mathbf{n}_t$ . Par ailleurs, dans le plan de la facette matérielle, on peut choisir *arbitrairement* deux directions unitaires orthogonales  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  et poser  $\mathbf{c}_T = c_{T1} \mathbf{t}_1 + c_{T2} \mathbf{t}_2$ . On a alors :

$$c_{T1} = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{c}_T = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{t}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t \quad ; \quad c_{T2} = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{c}_T = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{t}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t$$

Les nombres  $c_{T1}$  et  $c_{T2}$  sont parfois appelés contraintes tangentielles pour les directions  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$ , en  $P$  pour la facette matérielle  $\mathbf{n}_t$ . Ces définitions sont de peu d'intérêt : les nombres  $c_{T1}$  et  $c_{T2}$  ne sont pas des scalaires, car leur valeur dépend du choix arbitraire des directions  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$ . Ils sont donc dénués de signification physique. Seule la norme  $\|\mathbf{c}_T\|$  est un scalaire (la valeur ne dépend pas d'une base).

### 3.4 Théorèmes généraux pour un domaine matériel

Par définition, la résultante dynamique, le moment dynamique en un point et l'énergie cinétique sont des grandeurs extensives. On peut donc définir des densités volumiques de ces grandeurs [th. 1.6 p. 11] :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_1^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t \quad ; \quad \mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_1^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t \quad ; \quad E_{cin} = \int_{\mathcal{D}_1^m} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} \, dv_t$$

Par ailleurs, les efforts extérieurs sur un domaine matériel (forces extérieures à distance et forces extérieures de contact) sont décrits avec des densités respectivement volumiques et surfaciques. La résultante, le moment résultant en  $O$  et la puissance des efforts extérieurs sont :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_1^m} \mathbf{f}_E^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_1^m} \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad (3.4)$$

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_1^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_1^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad (3.5)$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_1^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_1^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad (3.6)$$

Les trois théorèmes généraux de la mécanique appliqués à un domaine matériel s'écrivent simplement [section 3.1.2 p. 26] :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext} \quad ; \quad \mathbf{M}_{dyn O} = \mathbf{M}_{ext O} \quad ; \quad \frac{d}{dt} E_{cin} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec}$$

Suivant la manière dont on transforme l'écriture de toutes ces intégrales, on obtient différentes versions des trois théorèmes généraux pour un domaine de milieu continu.

### 3.4.1 Théorème de la résultante dynamique sur un domaine matériel

#### Expressions de la résultante des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_E^s ds_t \quad [\text{éq. (3.4) p. 31}] \quad (3.7)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad [\text{éq. (3.3) p. 30}]$$

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) dv_t \quad (\text{théorème de la divergence}) \quad (3.8)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_L^s K_{sL} ds_0 \quad (\text{ch. var. de éq. (3.7)})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 \quad (\text{cinématique : } \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (\text{cinématique : } K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|)$$

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0 \quad (\text{théorème de la divergence}) \quad (3.9)$$

#### Expressions de la résultante dynamique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{\mathbf{v}}_E dm \quad (\text{définition de l'accélération}) \quad (3.10)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E dm \quad [\text{éq. (2.12) p. 22}]$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E dv_t \quad (dm = \rho_E dv_t)$$

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad [\text{éq. (1.4) p. 12}] \quad (3.11)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \quad [\text{éq. (2.10) p. 22}] \quad (3.12)$$

En écrivant l'égalité :  $\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext}$  et en choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit le théorème de la résultante dynamique pour un domaine matériel sous les différentes formes que l'on peut trouver dans la littérature.

### 3.4.2 Théorème du moment dynamique sur un domaine matériel

#### Expressions du moment résultant des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^s ds_t \quad [\text{éq. (3.5) p. 31}] \quad (3.13)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge (\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad [\text{éq. (3.3) p. 30}]$$

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad (\text{produit vectoriel écrit avec } \mathbf{H}) \quad (3.14)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E)) \right) dv_t \quad (\text{théorème de la divergence})$$

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) dv_t \quad (\text{développement de la divergence}) \quad (3.15)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange ( $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$  où  $\mathbf{f}$  est la description de Lagrange du mouvement) :

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 \quad (\text{ch. var. de éq. (3.14)})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0 \quad (\text{th. de la divergence})$$

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{f} \wedge (\mathbf{f}_L^v + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_L \right) K_{vL} dv_0 \quad (3.16)$$

#### Expressions du moment dynamique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E)' - \mathbf{v}_E \wedge \mathbf{v}_E \right) dm \quad (3.17)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E dm = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E dv_t \quad [\text{éq. (2.12) p. 22}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad [\text{éq. (1.16) p. 16}]$$

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad \left( \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial t} = \mathbf{v}_E \right) \quad (3.18)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange ( $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$  où  $\mathbf{f}$  est la description de Lagrange du mouvement) :

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \quad [\text{éq. (2.10) p. 22}] \quad (3.19)$$

En écrivant l'égalité :  $\mathbf{M}_{dyn O} = \mathbf{M}_{ext O}$  et en choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit le théorème du moment dynamique pour un domaine matériel sous les différentes formes que l'on peut trouver dans la littérature.

### 3.4.3 Théorème de la puissance cinétique sur un domaine matériel

#### Expressions de la puissance des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^s ds_t \quad [\text{éq. (3.6) p. 31}]$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad [\text{éq. (3.3) p. 30}] \quad (3.20)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^v + \text{div}_E(\mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E) \right) dv_t \quad (\text{théorème de la divergence})$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \right) dv_t \quad (\text{développement de la divergence}) \quad (3.21)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 \quad (\text{ch. var. de (3.20)})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_L^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_L^v K_{vL} + \text{div}_L(K_v \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0 \quad (\text{théorème de la divergence}) \quad (3.22)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{grad}_L^T \mathbf{v}_L \right) dv_0$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} \right) dv_0$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L : (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \right) dv_0 \quad (3.23)$$

#### Expressions de la puissance cinétique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathcal{P}_{cin}^{mec} = \frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dv_t = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{(\mathbf{v}_E^2)'}{2} dm \quad [\text{éq. (2.12) p. 22}]$$

$$\mathcal{P}_{cin}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t \quad (3.24)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathcal{P}_{cin}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \quad (3.25)$$

Le théorème de la puissance cinétique permet d'évaluer la puissance mécanique des efforts intérieurs dans un domaine matériel de milieu continu :

$$P_{int}^{mec} = \mathcal{P}_{cin}^{mec} - \mathcal{P}_{ext}^{mec} \quad (3.26)$$

En choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit les différentes expressions de la puissance mécanique des efforts intérieurs  $P_{int}^{mec}$  pour un domaine matériel que l'on peut trouver dans la littérature.

### 3.5 Conséquences locales des théorèmes généraux

Les résultats qui suivent sont les conséquences locales des trois théorèmes généraux énoncés pour un domaine matériel dans la section précédente.

#### 3.5.1 Équation de mouvement

- **Théorème 3.13 – Équation de mouvement.** Le théorème de la résultante dynamique est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^v = \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}^m \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \quad (3.27)$$

**Démonstration** – En prenant l'expression (3.8) [p. 32] pour la résultante des efforts extérieurs et l'expression (3.10) [p. 32] pour la résultante dynamique (on choisit les expressions sans intégrale de frontière), le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_E^v) \, dv_t$$

Cette égalité étant vraie pour tout domaine matériel, en utilisant le théorème 1.10 [p. 16], on en déduit le résultat. Dans l'équation (3.27), on a supprimé les indices  $E$  inutiles car, par définition,  $\boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\Psi}(P, t)$ . La démonstration de la réciproque est évidente.

**Écritures lagrangiennes** – En prenant l'expression (3.9) [p. 32] pour la résultante des efforts extérieurs et l'expression (3.12) [p. 32] pour la résultante dynamique, le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} \boldsymbol{\gamma}_L \, dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{f}_L^v K_{vL} + \operatorname{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) \, dv_0$$

En utilisant le lemme énoncé en (1.15) page 16, on en déduit l'équation différentielle<sup>(18)</sup> :

$$\rho K_v \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{f}^v K_v + \operatorname{div}_L (K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \quad (3.28)$$

$$\rho_0 \boldsymbol{\gamma} = \rho_0 \mathbf{f}^m + \operatorname{div}_L (K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \quad (K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \text{ et } \mathbf{f}^v = \rho \mathbf{f}^m) \quad (3.29)$$

où  $K_v = \det \mathbf{F}$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$  et où  $\rho_0$  est la masse volumique *initiale* ( $\rho_0(P) = \rho(P, t_0)$ ). Une autre expression, sans tenseurs artificiels [remarque 3.8], est déduite directement de l'équation (3.27) :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \operatorname{grad}_L \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{F}^{-\top} + \rho \mathbf{f}^m \quad (\text{car } \operatorname{div}_E \boldsymbol{\Psi} = \operatorname{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \mathbf{F}^{-\top}, \forall \boldsymbol{\Psi}) \quad (3.30)$$

**Remarque 3.8 – Autres « tenseurs des contraintes »** Pour tenter une ressemblance entre l'équation (3.29) et l'équation de mouvement (3.27), le groupement de termes  $\boldsymbol{\Pi} = K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$  qui apparaît dans la divergence lagrangienne de l'équation (3.29) est parfois appelé premier « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff (ou encore de Boussinesq). On peut trouver une « interprétation » à ce tenseur : le vecteur  $\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{n}_0$  est la force de contact *actuelle* par unité de surface *de référence*. Contrairement au tenseur des contraintes de Cauchy, le tenseur  $\boldsymbol{\Pi}$  n'est pas symétrique [th. 3.14].

Dans la littérature scientifique on trouve encore d'autres « tenseurs des contraintes » : le tenseur de Kirchhoff :  $\boldsymbol{\tau} = K_v \boldsymbol{\sigma}$  et le second tenseur de Piola-Kirchhoff :  $\boldsymbol{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Pi}$  qui sont symétriques. Ces groupements de termes ne sont nommés que parce qu'ils apparaissent dans certains calculs. Ils n'ont pas d'interprétation physique.

<sup>(18)</sup> On a enlevé les indices  $L$  inutiles car par définition  $\boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\Psi}(P, t)$ .

### 3.5.2 Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy

- **Théorème 3.14** – Le théorème du moment dynamique implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy.

**Démonstration** – En prenant l’expression (3.15) [p. 33] pour le moment en  $O$  des forces extérieures et l’expression (3.17) [p. 33] pour le moment dynamique en  $O$  (on choisit les expressions sans intégrales de frontière), le théorème du moment dynamique s’écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_i \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_i = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{x}_i \wedge (f_E^v + \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) dv_i$$

En tenant compte de l’équation de mouvement (3.27) [p. 35], il reste :

$$\mathbf{0} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \, dv_i$$

En utilisant le théorème 1.10 page 16, on en déduit :  $\mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ . Le tenseur d’orientation  $\mathbf{H}$  étant complètement antisymétrique, cette égalité implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .

**Remarques 3.9** – Cette conclusion n’est valable que si les actions extérieures et intérieures sont modélisables par des densités de forces *sans densités de moments* (milieux continus dits « non polarisés »). On laisse le soin au lecteur de vérifier que dans le cas contraire, le théorème du moment dynamique contient des termes supplémentaires qui invalident la conclusion.

D’autre part, on laisse le soin au lecteur de vérifier que l’on pouvait aussi bien déduire ce résultat à partir de l’expression (3.16) [p. 33] pour le moment en  $O$  des forces extérieures et l’expression (3.19) [p. 33] pour le moment dynamique en  $O$  (expressions avec les descriptions de Lagrange des champs).

Le tenseur des contraintes de Cauchy actuel  $\boldsymbol{\sigma}$  étant symétrique, il a donc 3 valeurs propres réelles  $\sigma_1(P, t)$ ,  $\sigma_2(P, t)$  et  $\sigma_3(P, t)$  (éventuellement confondues) et des espaces propres associés à ces valeurs propres.

- **Définition 3.15 – Contraintes principales.** Les valeurs propres actuelles du tenseur des contraintes de Cauchy actuel sont appelées contraintes principales actuelles.
- **Définition 3.16 – Directions principales des contraintes.** Les directions propres du tenseur des contraintes de Cauchy actuel sont appelées directions principales actuelles des contraintes.
- **Propriété 3.17** – En une particule  $P$ , les facettes matérielles dont la direction actuelle de la normale coïncide avec une direction principale des contraintes actuelle ont une contrainte tangentielle nulle et la contrainte normale est égale à la contrainte principale actuelle.

**Démonstration** – Si la direction actuelle de la normale à une facette  $\mathbf{n}_i$  coïncide avec une direction propre associée à la valeur propre  $\sigma_i$ , alors la contrainte pour cette facette matérielle est :

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_i = \sigma_i \mathbf{n}_i$$

La contrainte normale pour cette facette matérielle [déf. 3.11 p. 31] est donc :  $c_N = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_i = \sigma_i$  et la contrainte tangentielle [déf. 3.12 p. 31] est  $c_T = \mathbf{c} - c_N \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$ .

Si les trois contraintes principales actuelles sont distinctes, il n’existe en une particule que trois facettes matérielles, actuellement orthogonales, dont les contraintes sont purement normales ; si deux contraintes principales sont confondues, il en existe une infinité dont les normales actuelles sont dans un plan propre du tenseur des contraintes de Cauchy actuel ; si les trois contraintes principales actuelles sont égales, alors toutes les facettes matérielles ont une contrainte tangentielle nulle.

**Représentation de Mohr du tenseur des contraintes de Cauchy** – Le tenseur des contraintes de Cauchy étant symétrique, il est susceptible d’être représenté graphiquement avec la représentation de Mohr<sup>(19)</sup>. Cette représentation graphique montre que la contrainte normale actuelle et la norme de la contrainte tangentielle actuelle pour une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  quelconque ne peuvent prendre des valeurs quelconques : le point de coordonnées  $(c_N, \|\mathbf{c}_T\|)$  est astreint à rester à l’intérieur du tricerclé de Mohr. Si on ordonne les contraintes principales  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , la norme de la contrainte tangentielle est telle que  $0 \leq \|\mathbf{c}_T\| \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , et la contrainte normale est telle que  $\sigma_3 \leq c_N \leq \sigma_1$ .

### 3.5.3 Puissance volumique des efforts intérieurs

- **Théorème 3.18 – Densité volumique de puissance des efforts intérieurs.** La puissance des efforts intérieurs dans un milieu continu est une grandeur extensive. La densité volumique de puissance des efforts intérieurs (unité :  $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$ ) est :

$$\mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}}(P,t) = -\boldsymbol{\sigma}(P,t) : \mathbf{D}(P,t) \quad \text{où } \mathbf{D} \text{ est le tenseur des taux de déformation} \quad (3.31)$$

**Démonstration** – En utilisant l’expressions de la puissance cinétique (3.24) [p.34] et l’expression de la puissance des efforts extérieurs (3.21) [p. 34] (on choisit les expressions sans intégrale de frontière), la puissance des efforts intérieurs dans un domaine matériel est donnée par le théorème de la puissance cinétique [éq. (3.26) p. 34] :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \right) dv_t$$

Compte tenu de l’équation de mouvement (3.27) [p. 35], il reste :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = - \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \, dv_t$$

Enfin, compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}} = - \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{sym grad}_E \mathbf{v} \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (-\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E) \, dv_t$$

La puissance des efforts intérieurs dans un milieu continu est donc une grandeur extensive dont la densité volumique est :  $\mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}} = -\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ .

On laisse le soin au lecteur de vérifier qu’on aboutit au même résultat en utilisant les expressions lagrangiennes (3.23) page 34 et (3.25) page 34.

### 3.5.4 Synthèse

Les trois théorèmes généraux, énoncés pour un domaine matériel quelconque, ont permis d’aboutir aux résultats suivants :

1. le théorème de la résultante dynamique conduit à l’équation de mouvement ;
2. le théorème du moment dynamique conduit à la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy ;
3. le théorème de la puissance cinétique conduit à l’évaluation de la puissance des efforts intérieurs dans un domaine matériel de milieu continu, et à sa densité volumique.

<sup>(19)</sup> Cette représentation graphique des tenseurs symétriques est présentée dans le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l’étude des milieux continus*, du même auteur.

### 3.6 Théorèmes généraux pour un domaine géométrique

En mécanique générale, les théorèmes généraux rappelés en section 3.1.2 [p. 26] sont établis pour des systèmes matériels, c'est-à-dire contenant toujours la même matière. En mécanique des milieux continus, ce sont des domaines matériels [déf. 1.1 p. 9]. Dans cette section, on va les établir pour des domaines géométriques [déf. 1.3 p. 10].

Soit un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$  dont le domaine actuel <sup>(20)</sup> est  $\mathcal{D}_t^g$ . L'équation de mouvement (3.27) [p. 35] permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_E^v \, dv_t \\ \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t}_{\mathbf{R}_{dyn}} &= \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} \, ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_E^v \, dv_t}_{\mathbf{R}_{ext}} \quad (\text{théorème de la divergence}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

De même, l'équation de mouvement (3.27) [p. 35] permet d'écrire :

$$\underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t}_{\mathbf{M}_{dyn O}} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E \, dv_t}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^v \, dv_t}_{\mathbf{M}_{ext O}^{dist}} \quad (3.33)$$

L'intégrande de l'intégrale  $\mathbf{A}$  peut s'écrire sous la forme d'une divergence :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E &= \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{H} : (\mathbf{div}_E (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}_E) \\ &= \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) - \mathbf{H} : (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_E) \\ &= \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) \quad (\text{symétrie de } \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

L'intégrale  $\mathbf{A}$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) \, dv_t = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) \cdot \mathbf{n} \, ds_t = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge (\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}) \, ds_t \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^s \, ds_t = \mathbf{M}_{ext O}^{cont} \end{aligned}$$

L'intégrale  $\mathbf{A}$  de (3.33) est donc le moment en  $O$  des actions extérieures de contact.

Finalement, le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment dynamique pour un domaine géométrique traversé par un milieu continu s'expriment exactement de la même manière que pour un domaine matériel, à la différence près que les intégrales sont sur le domaine géométrique actuel.

#### 3.6.1 Bilan de quantité de mouvement sur un domaine géométrique

On peut présenter le théorème de la résultante dynamique appliqué à un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$  comme une équation de bilan de *quantité de mouvement* <sup>(21)</sup> sur ce domaine géométrique, de la

<sup>(20)</sup> Les frontières sont éventuellement en mouvement, mais ce mouvement est *a priori* différent des particules qui s'y trouvent.

<sup>(21)</sup> On rappelle que la quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$  est le produit  $m\mathbf{v}$ . Le vecteur  $\mathbf{v}_E$  peut donc être vu comme une densité massique de quantité de mouvement et le vecteur  $\rho_E \mathbf{v}_E$  est une densité volumique de quantité de mouvement. La quantité de mouvement est aussi parfois appelée impulsion.

manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{dyn} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\gamma}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{\mathbf{v}}_E \, dm \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \, dm - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t && \text{[éq. (2.14) p. 23 avec } \boldsymbol{\Psi}_E^m = \mathbf{v}_E] \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t
\end{aligned}$$

Le terme  $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dv_t$  est la dérivée temporelle de la quantité de mouvement dans le domaine géométrique. Le théorème de la résultante dynamique  $\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext}$  s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dv_t = - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}^s \, ds_t}_{\mathbf{R}_{ext}}$$

En notant que  $\mathbf{f}^s = \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t$ , et en utilisant le théorème de la divergence, le théorème de la résultante dynamique peut encore s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \, dv_t}_{\mathcal{Q}_{mvt}} = - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t}_{\Phi_{\mathcal{Q}_{mvt}}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} (\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) \, dv_t}_{\mathbf{R}_{ext}} \quad (3.34)$$

où  $\Phi_{\mathcal{Q}_{mvt}}$  est le flux de quantité de mouvement entrant par convection à travers la frontière.

En comparant l'équation (3.34) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 16], le vecteur  $(\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma})$  peut être interprété comme un taux de production volumique de quantité de mouvement dans le domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$  et son intégrale  $\mathbf{R}_{ext}$  comme le taux de production interne de quantité de mouvement. Ainsi, le théorème de la résultante dynamique peut être interprété comme un théorème de « conservation de la quantité de mouvement », si l'on considère la résultante des forces extérieures  $\mathbf{R}_{ext}$  (ou la résultante dynamique  $\mathbf{R}_{dyn}$  qui lui est égale) comme une source de quantité de mouvement. Pour un domaine matériel,  $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}^f$ , le terme  $\Phi_{\mathcal{Q}_{mvt}}$  est nul.

**Remarques 3.10** – Dans certains ouvrages de mécanique, cette interprétation du théorème de la résultante dynamique est érigée en principe. Le théorème de la résultante dynamique devient alors une interprétation.

L'équation (3.34) est très utile en mécanique des fluides lorsque le mouvement est stationnaire. Le terme de gauche est alors nul et il suffit de connaître les vitesses seulement à la frontière d'un domaine géométrique pour en déduire la résultante des efforts extérieurs (à distance et de contact) sur le domaine géométrique. Les actions à distance se réduisent la plupart du temps à la pesanteur dont la résultante est facile à évaluer (le poids du fluide dans le domaine géométrique). En revanche, la résultante des actions extérieures de contact est l'opposé de la résultante de l'action du fluide sur les frontières du domaine géométrique. On peut donc, en ne connaissant que les vitesses à la frontière du domaine géométrique, calculer la résultante des actions du fluide sur ses frontières, sans toutefois connaître sa distribution sur la frontière.

### 3.6.2 Bilan de moment cinétique sur un domaine géométrique

On peut suivre la même démarche que précédemment pour interpréter le théorème du moment dynamique.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{dyn O} &= \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{x}_t \wedge \dot{\mathbf{v}}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E)' - \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_t \wedge \mathbf{v}_E}_{\mathbf{0}} \right) dm \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dm - \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \quad [\text{éq. (2.14) p. 23 ; } \boldsymbol{\Psi}_E^m = \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E] \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t
 \end{aligned}$$

Le terme  $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t$  est la dérivée temporelle du *moment cinétique* <sup>(22)</sup> dans le domaine géométrique. Le théorème du moment dynamique  $\mathbf{M}_{dyn O} = \mathbf{M}_{ext O}$  s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t = - \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^s \, ds_t}_{\mathbf{M}_{ext O}}$$

où  $\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^s = \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{f}^s) = \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E) \cdot \mathbf{n}_t$ . En utilisant le théorème de la divergence :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t &= - \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \\
 &\quad \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E)) \right) dv_t \\
 &= - \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \\
 &\quad \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \underbrace{\mathbf{H} : (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma})}_{\mathbf{0}} \right) dv_t \\
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t &= \underbrace{- \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E \, dv_t}_{\mathbf{M}_{cin O}} - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t}_{\boldsymbol{\Phi}_{M_{cin O}}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) \, dv_t}_{\mathbf{M}_{ext O}}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

En comparant l'équation (3.35) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 16], le vecteur  $\mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma})$  peut être interprété comme le taux de production volumique de moment cinétique dans le domaine géométrique et  $\mathbf{M}_{ext O}$  comme le taux de production interne de moment cinétique. Ainsi, le théorème du moment dynamique peut être interprété comme un théorème de « conservation du moment cinétique », si l'on considère le moment résultant en  $O$  des forces extérieures  $\mathbf{M}_{ext O}$  (ou le moment dynamique en  $O$   $\mathbf{M}_{dyn O}$  qui lui est égal) comme une source de moment cinétique. Pour un domaine matériel,  $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}^f$ , le terme  $\boldsymbol{\Phi}_{M_{cin O}}$  est nul.

**Remarques 3.11** – Dans certains ouvrages de mécanique, cette interprétation du théorème du moment dynamique est érigée en principe. Le théorème du moment dynamique devient alors une interprétation.

<sup>(22)</sup> On rappelle que le moment cinétique en un point  $A$  d'un point matériel de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$  est le produit vectoriel  $mAP \wedge \mathbf{v}(P)$ , c'est-à-dire le moment en  $A$  de la quantité de mouvement.

L'équation (3.35) est très utile en mécanique des fluides lorsque le mouvement est stationnaire. Le terme de gauche est alors nul et il suffit de connaître les vitesses seulement à la frontière d'un domaine géométrique pour en déduire le moment résultant en  $O$  des efforts extérieurs (à distance et de contact) sur le domaine géométrique. Les actions à distance se réduisent la plupart du temps à la pesanteur, dont le moment résultant en  $O$  est facile à évaluer (c'est le moment en  $O$  du poids du fluide dans le domaine géométrique). En revanche, le moment résultant en  $O$  des actions extérieures de contact est l'opposé du moment résultant en  $O$  de l'action du fluide sur les frontières du domaine géométrique. On peut donc, en ne connaissant que les vitesses à la frontière du domaine géométrique, calculer le moment résultant en  $O$  des actions du fluide sur ses frontières, sans toutefois connaître sa distribution sur la frontière.

### 3.6.3 Bilan d'énergie cinétique sur un domaine géométrique

On peut interpréter le théorème de la puissance cinétique comme un bilan d'énergie cinétique sur le domaine géométrique : la puissance cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{cin} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = \int_{\mathcal{D}_t^s} \frac{(\mathbf{v}_E^2)}{2} dm + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad [\text{éq. (2.14) p. 23 ; } \Psi_E^m = \frac{\mathbf{v}_E^2}{2}] \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \end{aligned} \quad (3.36)$$

La puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^s ds_t = \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t ds_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^v + \text{div}_E (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}^v + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t \quad [\text{éq. (3.27) p. 35}] \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t - \mathcal{P}_{int}^{mec} \quad [\text{éq. (3.31) p. 37}] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Avec les équations (3.36) et (3.37), il vient :

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^s} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm}_{E_{cin}} = - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi_{E_{cin}}} + \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} \quad (3.38)$$

où  $\Phi_{E_{cin}}$  est le flux convectif d'énergie cinétique entrant à travers la frontière.

En comparant l'équation (3.38) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 16], la quantité

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_E^v + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t$$

peut être interprétée comme un taux de production interne d'énergie cinétique et l'intégrande

$$\tau_{ec} = \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \rho (\mathbf{f}^v + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

peut être interprété comme un taux de production volumique d'énergie cinétique. Ainsi, le théorème de la puissance cinétique peut être interprété comme un théorème de « conservation de l'énergie cinétique », si l'on considère la puissance des efforts extérieurs et l'opposé de la puissance des efforts intérieurs comme des sources d'énergie cinétique par unité de temps. Pour un domaine matériel,  $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}^f$ , le terme  $\Phi_{E_{cin}}$  est nul.

### 3.7 Formulation intégrale des équations de mouvement

Dans cette section, on établit une formulation équivalente de l'équation de mouvement qui est à la base des méthodes numériques employées pour la résolution des équations différentielles.

Soit  $\mathbf{w}(M)$  un champ vectoriel quelconque défini sur la position actuelle  $\mathcal{D}_t$  d'un domaine de milieu continu matériel ou géométrique<sup>(23)</sup>. L'équation de mouvement (3.27) [p. 35] (équation vectorielle) est évidemment équivalente à la proposition *scalaire* suivante :

$$\rho \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} \cdot \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}^v, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$$

En intégrant cette égalité sur le domaine actuel  $\mathcal{D}_t$ , il vient :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} dv + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^m dv, \quad \forall \mathbf{w} \quad (3.39)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div}_E (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{w} dv + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^m dv, \quad \forall \mathbf{w}$$

$$= \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^m dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{w} dv, \quad \forall \mathbf{w}$$

$$\int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv = \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^s ds + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^m dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{sym grad}_E \mathbf{w} dv, \quad \forall \mathbf{w} \quad (3.40)$$

On démontre en analyse fonctionnelle que si cette égalité *scalaire* d'intégrales est vraie *pour tout champ*  $\mathbf{w}$  défini sur  $\mathcal{D}_t$ , alors elle est équivalente à l'équation *différentielle vectorielle* de mouvement.

**Aperçu de la démonstration** – Si les champs  $\mathbf{w}$ ,  $\rho \boldsymbol{\gamma}$ ,  $\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma}$  et  $\rho \mathbf{f}^m$  sont dans l'espace vectoriel, noté  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$ , des fonctions définies sur  $\mathcal{D}_t$  et de carré intégrable sur  $\mathcal{D}_t$  (l'espace  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  est un espace de Hilbert de dimension infinie), alors on montre en analyse fonctionnelle que l'intégrale  $\int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) dv_t$  est un produit scalaire, noté  $\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle$ , de cet espace. L'équation (3.39) s'écrit donc :

$$\int_{\mathcal{D}_t} (\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_E^m) \cdot \mathbf{w} dv_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_E^m, \mathbf{w} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$$

Le champ  $(\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_E^m) \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  étant orthogonal (dans l'espace  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$ ) à tout champ arbitraire  $\mathbf{w} \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$ , il est donc nécessairement nul.

#### Terminologie

— L'égalité (3.40) est appelée *formulation intégrale* ou encore *formulation variationnelle*<sup>(24)</sup> ou encore *formulation faible*<sup>(25)</sup> des équations de mouvement. Les champs arbitraires  $\mathbf{w}$  sont appelés *fonctions test* ou encore *fonctions de pondération*.

— Si l'on interprète le champ vectoriel arbitraire  $\mathbf{w}$  comme un champ de vitesses arbitraire, il est appelé champ de *vitesses virtuelles*. Les termes de l'égalité (3.40) sont alors de la dimension d'une puissance, et le théorème prend le nom de *théorème des puissances virtuelles*.

<sup>(23)</sup> Dans le calcul qui suit, on n'utilise pas de dérivées temporelles d'intégrales, les résultats sont donc valables pour tout type de domaine.

<sup>(24)</sup> Ce nom est utilisé par les auteurs qui utilisent un autre principe fondamental de la mécanique : la solution d'un problème de mécanique est le champ défini sur  $\mathcal{D}_t$  qui minimise une certaine intégrale appelée « énergie potentielle ». Pour chercher ce minimum, on utilise le calcul variationnel.

<sup>(25)</sup> Ce nom est plutôt utilisé par les numériciens : cette formulation n'est pas plus faible que l'équation de mouvement, elle lui est rigoureusement équivalente. Elle ne devient faible que lorsqu'on limite la recherche du champ solution dans un sous-espace de  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  (on obtient alors une solution approchée).

— Si l'on interprète le champ vectoriel arbitraire  $\mathbf{w}$  comme un champ de déplacements arbitraire, il est appelé champ de *déplacements virtuels*. Les termes de l'égalité (3.40) sont alors de la dimension d'un travail, et le théorème prend le nom de *théorème des travaux virtuels*.

**Remarques 3.12** – Du fait de son équivalence à l'équation de mouvement (3.27) page 35, la formulation (3.39) ou (3.40) [p. 42] est présentée dans beaucoup de cours de mécanique des milieux continus comme le principe fondamental (peu intuitif) de la mécanique.

Cette formulation est à la base d'une méthode numérique de résolution *approchée* de systèmes d'équations différentielles : la méthode des éléments finis. L'approximation provient de ce que l'on cherche des solutions, non pas dans l'espace  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  de toutes les fonctions définies sur  $\mathcal{D}_t$ , mais seulement dans un sous-espace de dimension finie de fonctions définies sur  $\mathcal{D}_t$  (le plus souvent polynomiales par morceaux) et de carré intégrable sur  $\mathcal{D}_t$ .

Dans le cas de domaines *matériels*, on peut décrire les champs par la méthode de Lagrange [éq. (1.2) p. 11]. On laisse le soin au lecteur, en suivant la même démarche que précédemment mais en partant de l'expression lagrangienne de l'équation de mouvement (3.28) [p. 35], de vérifier que l'expression lagrangienne de ce théorème est :

$$\int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_L \, dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_L^m \, dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_L^s \, dv_0 - \int_{\mathcal{D}_0^m} K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{grad}_L \mathbf{w} \, dv_0, \quad \forall \mathbf{w}$$

où  $\mathbf{F} = \mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t$  est le gradient de la transformation entre les instants  $t_0$  et  $t$ , où  $K_{vL} = \det \mathbf{F}$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est  $\mathcal{D}_0^m$  et où  $\rho_0$  est la masse volumique à l'instant de référence  $t_0$ . Les auteurs qui interprètent  $\mathbf{w}$  comme un champ de *vitesse virtuelle* transforment parfois le dernier terme :

$$\underbrace{K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})}_{\boldsymbol{\Pi}_L} : \mathbf{grad}_L \mathbf{w} = \underbrace{K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L}_{\boldsymbol{\tau}_L} : \mathbf{sym}(\mathbf{grad}_L \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \boldsymbol{\tau}_L : \underbrace{\mathbf{sym grad}_E \mathbf{w}}_{\mathbf{D}^w}$$

où  $\mathbf{D}^w$  serait interprétable comme un « taux de déformation virtuel » par « analogie » avec les vitesses réelles. Les groupements de termes  $\boldsymbol{\Pi}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  ont déjà été évoqués dans la remarque 3.8 [p. 35].

### 3.8 Changements d'observateur

- **Notation 3.19** – Dans cette section, on considère deux observateurs quelconques  $\mathcal{R}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$  en mouvement relatif quelconque. *A priori* ils ne sont donc pas galiléens. On convient de surmonter d'un «  $\tilde{\phantom{x}}$  » les grandeurs relatives à l'observateur  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Le tenseur (orthogonal) de changement d'observateur de  $\mathcal{R}$  à  $\tilde{\mathcal{R}}$  sera noté  $\mathbf{Q}_t$ .

On rappelle<sup>(26)</sup> que les formules de changement d'observateur de la direction actuelle  $\mathbf{u}_t$  d'une direction matérielle, de la direction actuelle  $\mathbf{n}_t$  de la normale d'une facette matérielle et de toute grandeur actuelle vectorielle  $\mathbf{w}(t)$  objective sont :

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \quad ; \quad \tilde{\mathbf{n}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t \quad ; \quad \tilde{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{w}(t) \quad (3.41)$$

- **Principe 3.20 – Objectivité des forces de contact.** Les forces extérieures surfaciques actuelles de contact sur la frontière de tout domaine matériel sont des grandeurs vectorielles objectives.

**Commentaire** – La signification physique de l'objectivité d'une grandeur vectorielle est que la valeur vectorielle actuelle de cette grandeur a « la même position par rapport à la position actuelle de la matière » pour tous les observateurs, ce qui se traduit par l'une de ces deux égalités équivalentes :

$$\tilde{\mathbf{f}}^s(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{f}^s(P, t), \quad \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}^s(P, t) \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}''_t) = \tilde{\mathbf{f}}^s(P, t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}''_t), \quad \forall P' \forall P'' \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}$$

<sup>(26)</sup> Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur.

Ainsi, l'objectivité des forces de contact implique que si un observateur constate que l'extérieur d'un domaine exerce sur une facette matérielle de la frontière une contrainte normale, alors tous les observateurs font la même constatation. Il en est de même si la contrainte est tangentielle. L'orthogonalité du tenseur de changement d'observateur  $\mathbf{Q}_t$  garantit que tous les observateurs observent aussi la même norme de la contrainte.

En revanche, il n'est pas possible de postuler une objectivité pour les forces volumiques car les observateurs sont a priori en mouvement relatif quelconque. Même si l'observateur  $\mathcal{R}$  est galiléen, l'observateur  $\tilde{\mathcal{R}}$  ne l'est pas *a priori* et les forces volumiques qu'il doit prendre en compte contiennent des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

- **Théorème 3.21 – Objectivité du tenseur des contraintes de Cauchy.** Le champ de tenseur des contraintes de Cauchy est un champ tensoriel du second ordre objectif.

**Démonstration** – Les forces extérieures de contact étant objectives par principe, leur formule de changement d'observateur est :

$$\tilde{\mathbf{f}}^s = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{f}^s \quad (3.42)$$

En appliquant la condition aux limites (3.3) [p. 30] pour chaque observateur, l'égalité (3.42) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t), \quad \forall \mathbf{n}_t \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t, \quad \forall \mathbf{n}_t \quad [\text{éq. (3.41)}] \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \end{aligned} \quad (3.43)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre objective.

**Remarque 3.13** – On laisse le soin au lecteur d'établir les formules de changement d'observateur des autres « tenseurs des contraintes »  $\boldsymbol{\Pi}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{S}$  évoqués dans la remarque 3.8 [p. 35]. Il en déduira<sup>(27)</sup> que seul le tenseur  $\boldsymbol{\tau} = K_V \boldsymbol{\sigma}$  est objectif.

On en déduit aisément qu'une contrainte normale actuelle  $c_N(P, \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t$  est un scalaire objectif quelle que soit la facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ . De même, le vecteur contrainte tangentielle actuelle en une particule pour une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , ainsi que sa norme sont des grandeurs respectivement vectorielle et scalaire objectives car  $\tilde{\mathbf{c}}_T \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{c}_T \cdot \mathbf{u}_t \quad \forall \mathbf{u}_t$ . Les valeurs propres actuelles et les invariants actuels du tenseur des contraintes de Cauchy sont des scalaires objectifs et les directions propres actuelles sont des grandeurs vectorielles objectives.

- **Théorème 3.22 – Objectivité de la puissance des efforts intérieurs.** La densité volumique de puissance des efforts intérieurs est une grandeur scalaire objective.

**Démonstration** – La formule de changement d'observateur du tenseur des contraintes de Cauchy est donnée dans l'équation (3.43). On rappelle que le tenseur des taux de déformation actuel est aussi objectif. Sa formule de changement d'observateur est donc :  $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^\top$ . Le lecteur montera sans difficulté que l'on a alors l'égalité :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{int}^{mec} = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{D}} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \mathcal{P}_{int}^{mec}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

<sup>(27)</sup> On rappelle que la formule de changement d'observateur du gradient lagrangien des positions actuelles  $\mathbf{F}$  est :  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top$ .

En revanche, la puissance des efforts extérieurs (à distance comme de contact)  $\mathcal{P}_{ext}^{mec}$  et la puissance cinétique  $\mathcal{P}_{cin}$  ne sont pas des grandeurs scalaires objectives, car la vitesse et l'accélération ne sont pas des grandeurs vectorielles objectives. Toutefois, le théorème de la puissance cinétique ( $\mathcal{P}_{int}^{mec} = \mathcal{P}_{cin} - \mathcal{P}_{ext}^{mec}$ ) montre que leur différence est objective.

### 3.9 En bref...

Dans ce chapitre, on a déduit les équations de la mécanique des milieux continus à partir des théorèmes généraux établis en mécanique générale à partir des lois de Newton.

Les résultats essentiels sont :

1. *Les efforts extérieurs* agissant sur un domaine de milieu continu sont :
  - des forces à distance qui agissent sur toutes les particules du domaine de milieu continu, décrites par un champ de forces volumiques  $\mathbf{f}^v$  ou massiques  $\mathbf{f}^m$  ;
  - des forces de contact agissant sur la frontière, décrites par un champ de forces surfaciques  $\mathbf{f}^s$ .
2. *Les efforts intérieurs* sont décrits par le champ de tenseurs des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$ . En une particule  $P$ , la contrainte s'exerçant sur une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est donnée par :

$$\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t$$

En particulier, en toute particule  $P'$  de la frontière d'un domaine, de normale extérieure actuelle  $\mathbf{n}_t(P', t)$ , le tenseur des contraintes de Cauchy doit satisfaire la condition aux limites :

$$\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = \mathbf{f}^s(P', t)$$

3. *Les lois de la mécanique* impliquent que :
  - en toute particule et à tout instant, l'équation de mouvement doit être satisfaite :

$$\text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}^m = \rho \boldsymbol{\gamma} \quad (\text{équation différentielle vectorielle})$$

- le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique ;
- la puissance des efforts intérieurs est une grandeur extensive de densité volumique :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec}(P, t) = -\boldsymbol{\sigma}(P, t) : \mathbf{D}(P, t)$$

Il existe une formulation intégrale équivalente à l'équation de mouvement, utile pour la résolution numérique de l'équation de mouvement.

On a donné quelques manières d'écrire et d'interpréter les théorèmes généraux de la mécanique pour des domaines matériels ou géométriques.

Le tenseur des contraintes de Cauchy est une grandeur tensorielle du second ordre objective, et la puissance des efforts intérieurs ainsi que sa densité volumique sont des grandeurs scalaires objectives.



# Conservation de l'énergie

Le principe de la conservation de l'énergie est aussi appelé *premier principe de la thermodynamique*. Avant d'aborder l'expression du principe de la conservation de l'énergie pour un domaine de milieu continu, il est utile de clarifier un certain nombre de concepts de base utilisés en thermodynamique.

## 4.1 Concepts de base en thermodynamique

### 4.1.1 Système

La thermodynamique a pour objectif d'étudier l'évolution de systèmes matériels dont la constitution interne est *a priori* quelconque (machines, objets matériels solides ou non, ponctuels ou non, agencés de manière quelconque) et susceptibles d'échanger de la matière et de l'énergie avec l'extérieur du système. L'échange d'énergie se fait sous la forme d'énergie mécanique : le *travail* et sous la forme d'autres énergies non mécaniques, principalement la *chaleur*.

Dans ce cours, les systèmes dont on étudie l'évolution sont des domaines matériels (systèmes fermés) [déf. 1.1 p. 9] ou des domaines géométriques (systèmes ouverts) [déf. 1.3 p. 10] remplis d'un milieu presque partout<sup>(1)</sup> continu.

**Remarques 4.1** – La modélisation d'un dispositif matériel réel au moyen d'un modèle de milieu continu par morceaux, séparés par des surfaces est très générale. On peut pratiquement modéliser n'importe quel dispositif de cette manière : les objets solides (déformables ou non) sont des milieux continus séparés des autres constituants du système par leur surface frontière ; les autres constituants peuvent être des fluides (liquides ou gaz) qui eux aussi sont délimités par des frontières de solides (parois, aubages) ou des surfaces limites du système. Chaque morceau est un milieu continu avec son propre comportement, soumis à des conditions aux limites aux interfaces entre les morceaux ou à ses frontières avec l'extérieur du système. Dans les cours de thermodynamique élémentaires, les constituants d'un système sont généralement fortement simplifiés (solides indéformables, fluides non visqueux, gaz parfaits, ressorts, liaisons sans frottement, pressions et températures uniformes dans l'espace, etc.). Ces simplifications sont sous la responsabilité de l'ingénieur qui fait l'étude.

- **Définition 4.1 – Système thermodynamique.** Un système thermodynamique est un domaine matériel (système fermé) ou un domaine géométrique (système ouvert) dont le contenu est modélisé par un milieu (presque partout) continu. Ce système échange de l'énergie avec son extérieur sous forme de travail et de chaleur.

<sup>(1)</sup> Le sens de la locution « presque partout » est celui qu'on lui donne dans la théorie de la mesure et des distributions : l'ensemble des points où le milieu n'est pas continu est de volume nul (points, lignes surfaces). En particulier, un milieu continu par morceaux est un milieu presque partout continu.

### 4.1.2 Variables d'état

Comme on va le voir dans la suite, le principe de la conservation de l'énergie évoque « l'état d'un système ». Il convient de préciser ce concept.

Dans les cours de thermodynamique élémentaire, les systèmes envisagés sont des systèmes suffisamment simplifiés pour que le nombre de paramètres qui évoluent lorsque le système évolue soit limité à quelques unités. Ces paramètres évolutifs sont appelés « variables d'état ». Il existe aussi d'autres paramètres fixes qui définissent le système (dimensions, raideurs, caractéristiques de fluides, etc.) qui ne sont pas des variables d'état. L'état d'un système est défini par un ensemble de valeurs donné aux variables d'état.

**Exemple 4.2** – Quelques systèmes simplifiés classiques :

1. le système est un domaine (matériel ou géométrique) de fluide dont les caractéristiques sont des champs supposés uniformes (toutes les particules sont dans le même état). Dans ce cas, les grandeurs d'une particule du domaine caractérisent l'état du domaine complet.
2. le système est composé d'un nombre fini de constituants simplifiés (solides indéformables, ressorts élastiques sans masse, liaisons sans frottement, etc.). Dans ce cas, l'état du système est défini par un nombre fini de paramètres géométriques définissant la position des éléments du système.
3. un mélange des deux cas précédents : typiquement un cylindre indéformable et un piston indéformable avec un glissement étanche et sans frottement enfermant un gaz en état uniforme, et plus généralement une machine thermodynamique idéalisée.

Dans tous ces exemples, les simplifications ont pour objectif de pouvoir décrire l'évolution du système par l'évolution d'un petit nombre de variables.

On qualifie souvent de « variables d'état » des grandeurs physiques évolutives, sans se soucier si ces variables sont indépendantes ou non <sup>(2)</sup>. Si les variables d'état ne sont pas indépendantes la définition d'un état (ensemble de valeurs données aux variables d'état) doit être compatible avec les relations d'interdépendance entre les variables. Dans ce cours, la liste des variables d'état sera un ensemble nécessaire et suffisant pour la description de l'état du système modélisé. Les variables d'état seront donc des grandeurs indépendantes, c'est-à-dire que l'on peut donner à chacune d'elles une valeur arbitraire (dans son domaine de définition) pour définir un état.

L'ensemble de variables d'état (indépendantes ou non) est la *définition* de l'état du système, et toutes les valeurs possibles des variables d'états engendrent tous les états envisageables par ce modèle du système. Toutefois, en thermodynamique élémentaire, on se soucie rarement de l'universalité de cette définition de l'état du système : un même ensemble de valeurs pour les variables d'état devrait définir le même état du système pour tous les observateurs. En d'autres termes, les variables d'état devraient être des grandeurs scalaires objectives, afin que tous les observateurs décrivent le même état du système avec les mêmes valeurs de variables d'état ; les évolutions d'un système (c'est-à-dire celle de ses variables d'état) sont alors les mêmes pour tous les observateurs.

**Commentaire** – Le vecteur position ou le vecteur vitesse d'une particule par rapport à un observateur sont des vecteurs différents d'un observateur à l'autre. Ces paramètres peuvent effectivement servir à décrire l'état d'un système pour un certain observateur, mais un autre observateur décrira le même état du système avec d'autres valeurs. En revanche, des grandeurs telles que des distances actuelles ou des vitesses relatives actuelles entre éléments du système sont des paramètres communs à tous les

<sup>(2)</sup> Il n'est pas rare de lire que pour un gaz parfait en état uniforme, la pression, le volume massique (ou son inverse la masse volumique) et la température absolue sont des variables d'état alors qu'elles sont liées par la loi de Mariotte.

observateurs qui peuvent définir un état de système avec les mêmes valeurs pour tous les observateurs. En particulier, quand les variables d'état contiennent des paramètres géométriques ou cinématiques *relatifs* entre éléments du système, ces paramètres permettent de reconstituer la géométrie actuelle et le mouvement actuel du système à un mouvement de solide près, ce qui est suffisant pour définir l'état d'un système. Un système et son état existent indépendamment de tout observateur et ils doivent pouvoir être décrits intrinsèquement, c'est-à-dire indépendamment de l'observateur utilisé pour analyser son évolution.

En conséquence, dans ce chapitre et dans le chapitre suivant qui parlent de thermodynamique, on prendra les options suivantes :

1. Les systèmes étudiés sont des domaines (matériels ou géométriques) de milieux continus, éventuellement par morceaux [déf. 4.1 p. 47], chaque morceau pouvant être constitué d'un milieu continu de nature différente (solides, fluides, etc.).
2. Les variables d'état sont des *champs matériels*<sup>(3)</sup> scalaires vectoriels ou tensoriels, (presque partout) différentiables : le ou les milieux continus considérés ne sont donc pas *a priori* en état uniforme ; les champs matériels décrivent l'état actuel de chaque particule.
3. La liste des variables d'état (champs matériels) est la liste *nécessaire et suffisante* pour définir un état du système, c'est-à-dire celui de ses particules : on peut donc donner une valeur arbitraire (dans son domaine de définition) à chacune des variables d'état pour définir un état du système.
4. Les variables d'état sont des grandeurs scalaires vectorielles ou tensorielles *objectives*.

**Remarque 4.2** – On verra plus loin [déf. 4.7 p. 53] que toute liste de variables d'état tensorielles objectives peut se ramener à une liste de variables d'état scalaires objectives indépendantes.

*Le choix d'une liste de variables d'état indépendantes est la première étape de la modélisation du comportement d'un système thermodynamique.* En faisant ce choix, on *décide* que tous les états envisageables par ce *modèle* du système sont obtenus en donnant indépendamment une valeur arbitraire à chacune des variables d'état (dans leur domaine de valeurs admissibles). Les grandeurs physiques objectives choisies pour caractériser un état de domaine matériel peuvent être des champs scalaires, vectoriels ou tensoriels.

**Remarques 4.3** – Le choix d'un ensemble de variables d'état indépendantes est normalement suggéré par des constatations expérimentales sur le milieu continu qu'on veut modéliser : on doit pouvoir donner indépendamment à chacune des variables d'état une valeur arbitraire. Elles ne doivent donc pas être liées par une relation issue d'une définition, de la cinématique, d'un principe fondamental ou d'une loi de comportement.

Par exemple, on ne peut pas prendre simultanément la masse volumique actuelle  $\rho$  et un tenseur de déformation actuel  $\mathbf{X}$  comme variables d'état indépendantes, car la dilatation volumique actuelle  $K_V$  en une particule, déterminée par le tenseur de déformation actuelle, est liée à la masse volumique actuelle en raison du principe de la conservation de la masse :  $K_V = \rho_0 \rho^{-1}$  [éq. (2.6) p. 21]. Les deux grandeurs  $\mathbf{X}$  et  $\rho$  ne sont donc pas indépendantes.

Autre exemple : si le milieu continu est un gaz parfait, on ne peut pas prendre comme variables d'état indépendantes à la fois la température actuelle  $T$ , la masse volumique actuelle  $\rho$  et la pression actuelle  $p$  d'une particule car ces trois grandeurs sont liées par la définition d'un gaz parfait ( $p = k \rho T$  où  $k$  est une constante caractéristique du gaz parfait). Si on choisit la température et la masse volumique comme variables d'état d'un gaz parfait, la pression en une particule de gaz parfait est par définition une fonction d'état [déf 4.5 p. 51].

<sup>(3)</sup> C'est-à-dire des champs  $\Psi(P, t)$  définis (éventuellement par morceaux) sur le système (domaine matériel ou géométrique).

En revanche, si on constate expérimentalement qu'il faut distinguer des états qui auraient les mêmes valeurs de variables d'état, alors il faut ajouter à la liste de ces variables d'état une ou plusieurs variables d'état qui permettent de distinguer ces états [exemple 4.4 p. 50]. Plus l'ensemble de variables d'état indépendantes est grand, plus le modèle de la matière est compliqué, mais ce modèle sera d'autant plus apte à rendre compte du comportement physique du système modélisé.

- **Notation 4.3** – Tant que les modèles de milieu continu ne sont pas précisés (fluide, solide déformable, etc), les variables d'état seront notées  $\{\chi_1(P, t), \dots, \chi_n(P, t)\}$ , chacun de ces champs matériels pouvant être scalaire, vectoriel ou tensoriel.

### Exemples de listes de variables d'état indépendantes pour un milieu continu :

On verra dans le chapitre suivant qu'une variable d'état scalaire et objective obligatoire est la température absolue  $T$ . Elle figure donc toujours dans la liste des variables d'état des exemples qui suivent.

1. La variable d'état masse volumique actuelle (un scalaire) traduit la présence d'une certaine quantité de matière par unité de volume<sup>(4)</sup>. Cette description macroscopique locale de la répartition actuelle de la matière est la plupart du temps jugée suffisante pour les modèles de fluides simples. Une liste de variables d'état indépendantes et objectives pour décrire l'état d'une particule de fluide simple est donc  $\{T, \rho\}$ .
2. Un tenseur de déformation actuelle (un tenseur du second ordre) traduit plus finement la disposition actuelle de la matière en comparant les distances actuelles entre particules voisines avec celles d'une forme de référence. Un tenseur de déformation doit donc obligatoirement figurer dans la liste des variables d'état d'une particule de milieu continu solide déformable. La forme de référence utilisée pour définir les déformations serait, par exemple, la forme du solide déformable lorsqu'il n'a encore jamais été sollicité. Une liste de variables d'état objectives pour décrire l'état d'une particule de solide déformable isotrope est donc  $\{T, \mathbf{X}\}$  où  $\mathbf{X}$  est un tenseur de déformation actuelle objectif<sup>(5)</sup>.
3. Pour les solides déformables anisotropes, un tenseur de déformation actuelle est insuffisant pour définir un état actuel : il faut compléter la description de l'état actuel d'une particule en précisant l'orientation du tenseur des déformations actuelles par rapport aux directions actuelles d'anisotropie. Les variables d'état doivent donc comporter à la fois un tenseur de déformation actuelle et les directions matérielles actuelles d'anisotropie. Une liste de variables d'état objectives<sup>(6)</sup> pour décrire l'état d'une particule de solide déformable anisotrope est donc  $\{T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_p\}$  où  $\mathbf{X}$  est un tenseur de déformation actuelle objectif et où les  $\mathbf{N}_i$  sont des tenseurs uniaxiaux unitaires représentant les directions d'anisotropie actuelles.
4. Pour certains milieux continus, on constate parfois que l'histoire de l'évolution des variables d'état pour parvenir à un état donné est importante.

**Exemple 4.4** – Allongement isotherme d'une barre : on allonge une barre de 1% par un chargement progressif ou bien en l'allongeant de 10% puis en la recomprimant pour la ramener à un allongement de 1%. Si l'on constate que l'effort final diffère dans les deux chemins, cela signifie que la déformation par rapport à l'état initial est n'est pas suffisante pour caractériser l'état final.

Dans ce cas, il faut ajouter des variables d'état (scalaires, vectorielles ou tensorielles) qui sont

<sup>(4)</sup> Microscopiquement, c'est un nombre moyen de corpuscules par unité de volume

<sup>(5)</sup> Il en existe plusieurs, voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur.

<sup>(6)</sup> Lorsqu'il y a plusieurs directions d'anisotropie, la liste de variables d'états proposée ici n'est pas indépendante car les angles entre les directions actuelles d'anisotropie ne sont pas indépendantes de la déformation actuelle. Cette question sera abordée lors de l'étude des milieux continus solides anisotropes.

le résumé actuel de l'histoire de cette particule<sup>(7)</sup>. Ces variables d'état sont souvent appelées *variables d'état internes*. Ce résumé de l'histoire peut être plus ou moins riche selon les éléments de l'histoire que l'on a sélectionnés comme importants.

**Terminologie 4.4** – Le qualificatif d'« interne » semble plus ou moins consacré par l'usage, bien que toutes les variables d'état puissent être vues comme « internes » puisqu'elles traduisent l'état local des particules du domaine. Certains auteurs les appellent « non observables » ou « cachées », les autres variables d'état étant donc « observables » ou « visibles ». Ces variables d'état sont pourtant bien observables puisque ce sont des constatations expérimentales qui permettent d'en détecter l'existence<sup>(8)</sup>. Si l'auteur osait proposer une terminologie qui ne soit pas trompeuse, il les appellerait *variables d'état mnésiques* pour rappeler qu'elles sont le résumé (la mémoire partielle) de l'histoire thermodynamique de la particule.

### 4.1.3 Fonction d'état

L'énoncé du principe de la conservation de l'énergie évoque la notion de « fonction d'état ». Il convient de préciser ce concept.

- **Définition 4.5 – Fonction d'état.** On appelle fonction d'état, toute grandeur physique dont la valeur est déterminée par la seule connaissance des valeurs de la liste des variables d'état indépendantes.

Les fonctions d'état sont donc des applications  $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\} \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes q}$  où  $q$  est l'ordre de tensorialité de la fonction d'état. Une fonction d'état est donc une grandeur  $\boldsymbol{\chi}'_j$  dont la définition  $f_{\boldsymbol{\chi}'_j}$  est de la forme :

$$\boldsymbol{\chi}'_j(P, t) = f_{\boldsymbol{\chi}'_j}(\boldsymbol{\chi}_1(P, t), \dots, \boldsymbol{\chi}_n(P, t))$$

La plupart des fonctions d'état envisagées dans la suite seront scalaires ( $q = 0, \mathbb{V}_3^{\otimes q} = \mathbb{R}$ ).

Lors de l'évolution d'un domaine, l'état  $\{\boldsymbol{\chi}_0, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$  des particules évolue avec le temps, la valeur de la fonction d'état  $\boldsymbol{\chi}'_j$  évolue donc aussi avec le temps. Sa dérivée particulaire<sup>(9)</sup> est :

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}'_j = \sum_{i=1}^n \partial_i f_{\boldsymbol{\chi}'_j} \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i$$

où  $p_i$  est l'ordre de tensorialité de la variable d'état  $\boldsymbol{\chi}_i$  et où  $\overline{\otimes}^{p_i}$  est un produit tensoriel  $p_i$ -contracté. Si la fonction d'état est *scalaire* on écrit :

$$\dot{\chi}'_j = \sum_{i=1}^n \partial_i f_{\chi'_j} \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\chi}_i \quad (\text{rappel : } \partial_i f_{\chi'_j} = \frac{\partial f_{\chi'_j}}{\partial \chi_i} \text{ est un tenseur d'ordre } p_i)$$

**Vocabulaire** – Les fonctions d'état scalaires (ou seulement certaines d'entre-elles) sont parfois appelées *potentiels thermodynamiques*.

<sup>(7)</sup> Ces variables d'état traduisent macroscopiquement des phénomènes microscopiques tels que des réarrangements ou des ruptures de liaisons intercorporelles qui se sont produits dans l'évolution qui a abouti à l'état actuel. Les phénomènes macroscopiques s'appellent : plastification, endommagement, etc.

<sup>(8)</sup> Dans l'exemple 4.4 [p. 50] on « observe » une différence dans l'effort final et une déformation permanente après décharge de la barre.

<sup>(9)</sup> C'est-à-dire la dérivée temporelle à particule constante (« on suit la particule dans son mouvement »).

**Remarques 4.5** – On peut définir un grand nombre de fonctions d'état  $\chi'_j$  : toute fonction de fonctions d'état et de variables d'état est une fonction d'état. Parmi un ensemble de grandeurs  $\{\chi_1, \dots, \chi_n, \chi'_1, \dots, \chi'_q\}$ , on peut choisir  $n$  grandeurs  $\{\chi''_1, \dots, \chi''_n\}$  telles que les  $q$  grandeurs restantes s'expriment en fonction des  $\chi''_i$ . Il suffit que l'application (changement de variables d'états)  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\} \leftrightarrow \{\chi''_1, \dots, \chi''_n\}$  soit inversible. Cette possibilité de changer de liste de variables d'états indépendantes explique la profusion de formules (exprimant la même chose) que l'on peut trouver dans beaucoup de cours de thermodynamique. Dans ce cours, par souci de clarté, on évitera de faire de tels changements de variables d'état.

Par ailleurs, les seules fonctions d'état réellement indispensables sont celles introduites par les deux principes fondamentaux de la thermodynamique, à savoir l'énergie interne introduite par le premier principe de la thermodynamique [section 4.2.1 p.54] et l'entropie introduite par le second principe de la thermodynamique [chapitre 5 p.63]. Les autres fonctions d'état évoquées classiquement en thermodynamique (enthalpie, énergie libre, etc.) ne sont que des combinaisons de ces deux fonctions d'état et de variables d'état, qui apparaissent dans l'étude de certaines évolutions particulières de certains milieux continus particuliers ; elles n'ont rien de fondamental.

#### 4.1.4 Isotropie des fonctions d'état

- **Théorème 4.6** – Toute fonction d'état scalaire et objective, fonction de variables d'état tensorielles objectives, est nécessairement une fonction isotrope de ses arguments.

**Démonstration** – Les variables d'état étant objectives, leur formule de changement d'observateur est connue *a priori* :

$$\tilde{\chi}_i(P, t) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\chi_i(P, t))$$

où  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\chi_i)$  est la rotation par le tenseur de changement d'observateur actuel  $\mathbf{Q}_t$  du tenseur  $\chi_i$ <sup>(10)</sup>.

Soit une fonction d'état *scalaire* définie par  $\chi' = f_{\chi'}(\chi_1, \dots, \chi_n)$ . L'universalité de sa définition signifie que l'application  $f_{\chi'}$  est la même pour tous les observateurs. Son objectivité implique l'égalité :

$$f_{\chi'}(\chi_1, \dots, \chi_n) = f_{\chi'}(\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_n) = f_{\chi'}(\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\chi_1), \dots, \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\chi_n)), \quad \forall \mathbf{Q}_t$$

ce qui est la définition d'une fonction isotrope de ses arguments.

On démontre en analyse<sup>(11)</sup> que si une fonction scalaire est isotrope pour ses arguments tensoriels, alors il existe alors une fonction  $\bar{f}_{\chi'}$  telle que :

$$f_{\chi'}(\chi_1, \dots, \chi_n) = \bar{f}_{\chi'}(I_1, \dots, I_m) \quad (4.1)$$

où  $\{I_1, \dots, I_m\}$  est une liste minimale de scalaires calculés à partir des arguments tensoriels  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$  de la fonction  $f_{\chi'}$ . La longueur  $m$  de la liste est minimale et toujours inférieure ou égale au nombre de composantes nécessaires pour donner une valeur aux  $n$  variables d'état tensorielles  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ . Puisque les variables d'état tensorielles  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$  sont objectives, les invariants calculés à partir de ces variables sont des grandeurs scalaires objectives. Les listes minimales  $\{I_1, \dots, I_m\}$  de scalaires objectifs dépendent du nombre et de l'ordre de tensorialité des variables d'état tensorielles  $\chi_i$  ; elles ne sont pas uniques, mais pour un certain ensemble de variables d'état tensorielles elles sont toutes de même longueur. La description de l'état d'une particule de milieu continu avec des variables d'état tensorielles objectives  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$

<sup>(10)</sup> On rappelle que pour une grandeur vectorielle objective  $\mathbf{v}$ , la formule de changement d'observateur est :  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{v}$ , et pour une grandeur tensorielle d'ordre 2 objective  $\mathbf{T}$  elle s'écrit :  $\tilde{\mathbf{T}} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{T}) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}_t^T$ .

<sup>(11)</sup> La démonstration est donnée dans l'annexe du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur.

de la fonction  $f_{\mathcal{X}'}$ , peut donc toujours se ramener à un ensemble de  $m$  variables d'état scalaires objectives  $\{I_1, \dots, I_m\}$ . On ne pourra préciser cette liste que lorsque les variables d'état indépendantes  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$  auront été choisies.

- **Définition 4.7 – Variables d'état réduites.** La liste des  $m$  champs scalaires objectifs  $\{I_1, \dots, I_m\}$  est appelée liste de variables d'état réduites.

**Interprétation** – La signification physique du théorème mathématique sur les fonctions isotropes est que les seules valeurs réelles, communes à tous les observateurs, nécessaires et suffisantes pour décrire un état de particule défini par des variables d'état vectorielles ou tensorielles, sont les invariants de chacune des variables d'état et des invariants croisés<sup>(12)</sup> qui définissent les orientations relatives de ces tenseurs les uns par rapport aux autres<sup>(13)</sup>, en excluant toute orientation absolue par rapport à un observateur particulier. Les  $m$  variables scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  ne permettent donc pas de reconstruire complètement les variables d'état tensorielles pour un observateur donné, elles permettent seulement de reconstruire l'ensemble des variables d'état tensorielles à une rotation quelconque près, c'est-à-dire à un changement d'observateur quelconque près. Ce théorème permet donc de trouver systématiquement des descriptions intrinsèques de l'état.

#### 4.1.5 Espace des états

Chaque état de particule étant défini par un nombre fini  $m$  de scalaires objectifs [déf. 4.7 p. 53], on peut donc représenter les tous états envisageables d'une particule de ce modèle de milieu continu avec un point de  $\mathbb{R}^m$  (ou d'un certain domaine de  $\mathbb{R}^m$ ).

- **Définition 4.8 – Espace des états.** Soit  $m$  le nombre de variables d'état réduites. On appelle espace des états, la région d'un espace de points de dimension  $m$  tel que chaque point représente un état de particule.

Dans l'espace des états, une fonction d'état scalaire peut se représenter par ses isovaleurs (ce sont des hypersurfaces de dimension  $m - 1$ ).

**Remarque 4.6** – En thermodynamique des gaz, les variables d'état indépendantes se réduisent à deux scalaires objectifs ( $m = 2$ , on dit que les gaz sont « divalents »). Les isovaleurs des fonctions d'état d'un gaz sont donc des courbes dans un espace des états de dimension 2. On peut donc les représenter graphiquement sur des diagrammes plans. Du fait que les thermodynamiciens changent souvent d'ensemble de variables d'état indépendantes [remarque 4.5 p. 52], il existe plusieurs versions de ces diagrammes, qui expriment néanmoins tous la même chose : l'évolution de fonctions d'état le long d'un chemin dans l'espace des états<sup>(14)</sup>.

#### 4.1.6 Évolution thermodynamique

L'évolution thermodynamique d'un domaine (matériel ou géométrique) est la description des changements d'état de chaque particule du domaine, c'est-à-dire la donnée des  $m$  champs matériels scalaires  $\{I_1(P, t), \dots, I_m(P, t)\}$ . Dans l'évolution thermodynamique d'un domaine, chaque particule suit donc son propre chemin dans l'espace des états, paramétré par le temps.

<sup>(12)</sup> C'est-à-dire calculés à partir de plusieurs arguments tensoriels.

<sup>(13)</sup> Voir la démonstration du théorème sur les fonctions isotropes, en annexe du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur.

<sup>(14)</sup> On peut tenter de justifier ces différentes versions de diagrammes par le fait qu'on souhaite représenter des chemins d'évolutions particulières (isothermes, isobares, isochores, isentropes...) par des verticales ou des horizontales.

- **Définition 4.9 – Évolution.** On appelle évolution thermodynamique d'une particule, la courbe décrite par le point représentatif de l'état de la particule au cours du temps dans l'espace des états.
- **Définition 4.10 – Vitesse d'évolution.** On appelle vitesse d'évolution thermodynamique à l'instant  $t$  de la particule  $P$ , la dérivée temporelle dans l'espace des états du point représentatif de l'état au cours d'une évolution.

Les  $m$  composantes de la vitesse d'évolution thermodynamique d'une particule dans l'espace des états sont donc les  $m$  dérivées particulières  $\{\dot{I}_1(P,t), \dots, \dot{I}_m(P,t)\}$ .

Il faut bien noter que si l'ensemble des variables d'état d'un modèle de milieu continu est bien un ensemble de valeurs indépendantes<sup>(15)</sup>, l'ensemble de ses dérivées particulières dans une évolution ne l'est pas nécessairement : il se peut que des lois cinématiques, physiques ou des principes fondamentaux imposent des relations entre les dérivées particulières des variables d'état. *Toutes les directions de vitesse d'évolution thermodynamique autour d'un point de l'espace des états ne sont donc pas toujours possibles.*

**Exemple 4.11 –** Pour un milieu continu solide anisotrope à une seule direction d'anisotropie, la déformation actuelle et la direction d'anisotropie actuelle sont des variables d'état indépendantes : tout tenseur de déformation associé à toute direction d'anisotropie est un état possible. Néanmoins, les directions d'anisotropie étant des directions matérielles, la cinématique implique des relations entre la dérivée particulière des déformations et la dérivée particulière de la direction d'anisotropie car la direction d'anisotropie est entraînée par le mouvement.

## 4.2 Principe de la conservation de l'énergie

La démarche suivie dans ce chapitre est similaire à celle suivie dans les deux chapitres précédents : on pose le principe pour un domaine matériel, on en déduit une expression locale et on exprime les conséquences pour un domaine géométrique. Le principe de la conservation de l'énergie est aussi appelé *premier principe de la thermodynamique*. Il fait intervenir une nouvelle forme d'énergie : la chaleur, qui est une forme d'énergie non mécanique, mais qui peut aussi être échangée avec l'extérieur du système étudié.

### 4.2.1 Énoncé classique pour une évolution finie entre deux instants

On considère un domaine matériel<sup>(16)</sup> quelconque en évolution entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ .

- **Principe 4.12 – Premier principe de la thermodynamique.** Le premier principe de la thermodynamique postule deux axiomes :
  1. *L'énergie se conserve* : il existe une grandeur scalaire, extensive<sup>(17)</sup> et objective, appelée *énergie interne* du domaine matériel, telle que l'énergie (travail et chaleur) reçue<sup>(18)</sup> de l'extérieur du domaine matériel entre ces deux instants sert à modifier son énergie cinétique (modification du mouvement), le reste servant à modifier son énergie interne.

<sup>(15)</sup> On peut donner une valeur arbitraire à chacune des variables d'état pour définir un état.

<sup>(16)</sup> Les thermodynamiciens disent *système fermé*. Pour l'instant, le domaine matériel n'est pas nécessairement un domaine de milieu continu, mais il est néanmoins toujours constitué de la même matière.

<sup>(17)</sup> L'extensivité postulée de l'énergie interne est parfois appelée en thermodynamique : « principe de l'état local ».

<sup>(18)</sup> Par convention, on parle toujours de l'énergie reçue de l'extérieur par le domaine matériel. Si l'énergie « reçue » est négative, elle est en fait cédée au milieu extérieur.

**Remarque 4.7** – Bien noter qu'il n'y a pas de spécialisation : on peut modifier l'énergie cinétique aussi bien avec du travail que de la chaleur. Il en est de même pour l'énergie interne.

2. *L'énergie interne du domaine matériel est une fonction d'état* : à chaque état du domaine matériel correspond une valeur de son énergie interne. Des variations de l'énergie interne du domaine matériel se traduisent donc nécessairement par des variations de variables d'état du domaine matériel.

L'énergie reçue de l'extérieur est à la fois de l'énergie mécanique (du travail) et de l'énergie non mécanique (de la chaleur). Le premier principe s'écrit donc classiquement :

$$(E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1)) + (E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1)) = W_{t_1}^{t_2} + Q_{t_1}^{t_2} \quad (4.2)$$

où :

- la variation d'énergie interne  $E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1)$  du domaine matériel se traduit par des changements d'état dans le domaine matériel, c'est-à-dire des modifications des variables d'état ;
- le terme  $W_{t_1}^{t_2}$  désigne le travail mécanique (éventuellement négatif) reçu de l'extérieur par le système pendant l'évolution entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  ;
- le terme  $Q_{t_1}^{t_2}$  désigne la chaleur (éventuellement négative) reçue de l'extérieur par le système pendant l'évolution entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

L'expression de la fonction d'état énergie interne en fonction des variables d'état n'est pas précisée par le principe. Cette fonction d'état est particulière à chaque système étudié. Dans le cas d'un domaine matériel de milieu continu, elle est particulière à chaque milieu continu (acier, eau, air...).

*C'est en précisant d'une part la liste nécessaire et suffisante des variables d'état et d'autre part l'expression de l'énergie interne en fonction de ces variables d'état, que l'on construit un modèle de comportement du milieu continu contenu dans le domaine.*

**Remarque 4.8** – Dans un grand nombre d'ouvrages de thermodynamique, le premier et le second principes de la thermodynamique sont énoncés avec des systèmes supposés « à l'équilibre » aux instants  $t_1$  et  $t_2$ , sans définition claire de ce que signifie cet « équilibre » : tantôt les vitesses sont supposées nulles<sup>(19)</sup> (il n'y a donc pas de variation d'énergie cinétique) ou supposées constantes dans le temps (accélération nulle, « équilibre mécanique ») et/ou uniformes dans l'espace (mouvement de translation du système), tantôt les champs de variables d'état dans le domaine sont supposés uniformes (« équilibre thermique » et autres<sup>(20)</sup>), et bien souvent les deux à la fois. Comme on va le voir par la suite, cette condition floue d'« équilibre » (mécanique ou thermodynamique) est inutile, voire néfaste, et ne sera jamais utilisée dans la suite. Ces conditions soit-disant simplificatrices ne sont évoquées que parce que c'est dans ces conditions particulières que les vérifications expérimentales sont les plus faciles à faire. Lorsqu'un système matériel (continu ou non) évolue, les vitesses ou les accélérations de ses particules se sont en général pas nulles, les champs de variables d'état ne sont en général pas uniformes et le principe de la conservation de l'énergie n'en reste pas moins vrai. Pour appliquer le principe de la conservation de l'énergie avec de telles restrictions, ces auteurs sont amenés à considérer les évolutions du système étudié comme une « succession d'états d'équilibre », éventuellement « infiniment lente » qui n'ont aucun sens physique.

<sup>(19)</sup> Pour quel observateur ?

<sup>(20)</sup> Par exemple la température ou la pression sont supposés uniformes dans l'espace, ce qui évite de parler de champs matériels pour les variables d'état.

### 4.2.2 Énoncé global instantané

L'énoncé classique (4.2) [p. 55] est affirmé pour toutes les transformations, c'est-à-dire  $\forall t_1$  et  $\forall t_2$ , et donc en particulier pour toute sous-transformation entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  aussi proches que l'on veut <sup>(21)</sup>. On va donc en donner une formulation instantanée qui garantit le respect du principe de la conservation de l'énergie pour toute sous-évolution d'une évolution :

$$\frac{d}{dt}E_{cin} + \frac{d}{dt}E_{int} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} \quad (4.3)$$

où :

- $\mathcal{P}_{ext}^{mec}$  est la puissance mécanique actuelle des efforts extérieurs (à distance et de contact) ;
- $\mathcal{P}_{ext}^{cal}$  est la puissance calorifique actuelle reçue de l'extérieur.

Il faut maintenant traduire cet énoncé global valable pour un système matériel *a priori* quelconque, dans le cas où la matière du système matériel est modélisée par un milieu continu.

### 4.2.3 Conservation de l'énergie pour un domaine matériel

Soit  $\mathcal{D}^m$  un domaine matériel. On note  $\mathcal{D}_t^m$  sa position actuelle et  $\mathcal{D}_0^m$  sa position de référence.

L'énergie interne est, par principe, une grandeur extensive, on peut donc définir une densité massique d'énergie interne, notée  $e^m$  et appelée *énergie interne massique* <sup>(22)</sup> (unité :  $\text{J.kg}^{-1}$ ), telle que l'énergie interne actuelle d'un domaine matériel est [éq.(1.2) p. 11] :

$$E_{int}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} e_E^m dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E e_E^m dv_t \quad \left( = \int_{\mathcal{D}_0^m} e_L^m dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L e_L^m K_v dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 e_L^m dv_0 \right)$$

L'énergie interne massique est, par principe, une fonction d'état. Il existe donc une application réelle  $f_e$  telle que :

$$e^m(P, t) = f_e(\boldsymbol{\chi}_1(P, t), \dots, \boldsymbol{\chi}_n(P, t)) \quad \text{où } \{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\} \text{ sont les variables d'état.}$$

L'application universelle <sup>(23)</sup>  $f_e$  est caractéristique de chaque type de milieu continu, par la liste des variables d'état  $\boldsymbol{\chi}_i$  et par l'application  $f_e$  elle-même (expression de l'énergie interne massique en fonction des variables d'état).

L'énergie interne est, par principe, une grandeur scalaire objective. Puisque les variables d'état sont objectives, l'application  $f_e$  est une fonction isotrope de ses arguments tensoriels et peut donc être ramenée à une fonction  $\bar{f}_e$  d'arguments scalaires [éq. (4.1) p. 52] :

$$e^m(P, t) = \bar{f}_e(I_1(P, t), \dots, I_m(P, t))$$

où les variables d'état réduites scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  sont connues quand on connaît la liste des variables d'état tensorielles objectives. La dérivée particulière de l'énergie interne massique est donc :

$$\dot{e}^m(P, t) = \sum_{j=1}^m \partial_j \bar{f}_e \dot{I}_j \quad (4.4)$$

<sup>(21)</sup> Naturellement, tous les états intermédiaires  $t \in [t_1, t_2]$  ne sont pas « à l'équilibre » quel que soit le sens qu'on donne à ce mot.

<sup>(22)</sup> Voir la note 17 [p. 54]. Les thermodynamiciens disent aussi : énergie interne spécifique.

<sup>(23)</sup> C'est-à-dire identique pour tous les observateurs.

On est maintenant en mesure de détailler les différents termes du principe de la conservation de l'énergie instantané (4.3) [p. 56].

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique est :

$$\frac{d}{dt} E_{cin} = \mathcal{P}_{cin}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t \quad [\text{éq. (3.24) p. 34}]$$

La dérivée temporelle de l'énergie interne est :

$$\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^m} e_E^m dm = \int_{\mathcal{D}^m} \dot{e}_E^m dm \quad [\text{éq. (2.12) p. 22}]$$

La puissance mécanique des efforts extérieurs est :

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t \quad [\text{éq. (3.21) p. 34}]$$

La puissance calorifique reçue de l'extérieur est la somme de deux termes :

$$\mathcal{P}_{ext}^{cal} = \mathcal{P}_{ext}^{cal cont} + \mathcal{P}_{ext}^{cal dist} = - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t$$

Le terme  $\mathcal{P}_{ext}^{cal cont}$  est la puissance calorifique reçue de l'extérieur par contact à la frontière (conduction thermique à travers la frontière<sup>(24)</sup>) et le terme  $\mathcal{P}_{ext}^{cal dist}$  est la puissance calorifique reçue de l'extérieur à distance.

- **Définition 4.13** – Le champ vectoriel  $\mathbf{q}$ , défini dans tout le domaine matériel<sup>(25)</sup>, est appelé courant de chaleur<sup>(26)</sup> ( $\text{W.m}^{-2}$ ).
- **Définition 4.14** – Le champ scalaire  $r_{ext}^v$  est appelé puissance calorifique volumique reçue à distance de l'extérieur ( $\text{W.m}^{-3}$ ).

**Remarque 4.9** – On peut utiliser le terme  $r_{ext}^v$  pour modéliser une production de chaleur due à un rayonnement d'origine extérieure qui cède une partie de son énergie sous forme de chaleur en traversant le domaine matériel par interaction avec la matière (par exemple un rayonnement micro-ondes). Dans beaucoup d'applications, ce terme est nul.

Le principe de la conservation de l'énergie (4.3) [p. 56] pour un domaine matériel s'écrit donc :

$$\underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t}_{\frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}^m, t)} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{e}_E^m dm}_{\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^m, t)} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{mec}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{cal}}$$

<sup>(24)</sup> On applique ici le principe à un domaine *matériel*. Aucune matière ne traverse la frontière, il n'y a donc pas d'apport de chaleur à travers la frontière par convection.

<sup>(25)</sup> L'existence du champ vectoriel  $\mathbf{q}$  dans le domaine est le plus souvent postulée, mais son existence est prouvée de la même manière que celle du tenseur des contraintes. La démonstration d'existence est donnée en annexe A.3 [p. 97].

<sup>(26)</sup> Le vecteur  $\mathbf{q}$  est parfois appelé « flux » de chaleur ; quelquefois, c'est le scalaire  $q^s = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  qui est appelé « flux » de chaleur.

Compte tenu de l'équation de mouvement [éq. (3.27) 35] et du théorème de la divergence, il reste :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{e}_E^m \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} (r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q}) \, dv_t \quad (4.5)$$

**Écriture lagrangienne** – On laisse le soin au lecteur de vérifier que si on utilise les descriptions de Lagrange dans le domaine matériel, le principe de la conservation de l'énergie pour un domaine matériel s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \dot{e}_L^m K_{vL} \, dv_0 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L K_{vL} \, dv_0 + \int_{\mathcal{D}_0^m} r_{extL}^v K_{vL} \, dv_0 - \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} \, ds_0 \\ \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \dot{e}_L^m \, dv_0 &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L K_{vL} \, dv_0 + \int_{\mathcal{D}_0^m} r_{extL}^v K_{vL} \, dv_0 - \int_{\mathcal{D}_0^m} \text{div}_L (K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}) \, dv_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

où  $K_v$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont la référence est  $\mathcal{D}_0^m$ . On peut encore transformer cette expression en développant la divergence.

### 4.3 Forme locale de la conservation de l'énergie

- **Théorème 4.15 – Équation de la chaleur.** Le principe de la conservation de l'énergie est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\rho \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad (4.7)$$

**Démonstration** – On obtient cette équation différentielle par le même procédé que pour deux principes précédents (conservation de la masse et principe fondamental de la mécanique) : en utilisant le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16] à partir de l'expression globale du principe de la conservation de l'énergie pour un domaine matériel (4.5) [p. 58], on obtient la forme locale de la conservation de l'énergie (4.7). On a enlevé les indices  $E$  inutiles car par définition  $\boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\Psi}(P, t)$ . La réciproque est évidente.

**Rappel : interprétation de la divergence d'un champ vectoriel** – Si  $\text{div}_E \mathbf{q} < 0$ , la particule est un puits de chaleur ; si  $\text{div}_E \mathbf{q} > 0$ , la particule est une source de chaleur ; si  $\text{div}_E \mathbf{q} = 0$ , le champ  $\mathbf{q}$  est localement conservatif.

Pour un certain milieu continu (la fonction  $\bar{f}_e$  et la liste des variables d'état sont connues), la conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$\rho \sum_{j=1}^m \partial_j \bar{f}_e \dot{I}_j = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad [\text{éq. (4.4) p. 56}] \quad (4.8)$$

**Écritures lagrangiennes** – En appliquant le lemme fondamental à l'équation (4.6) [p. 58], il vient :

$$\underbrace{K_v \rho}_\rho \dot{e}^m = \underbrace{K_v \boldsymbol{\sigma}}_\tau : \mathbf{D} + K_v r_{ext}^v - \text{div}_L (\underbrace{K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}}_{\mathbf{q}_0})$$

où  $\rho_0 = \rho(P, t_0)$  (masse volumique initiale) et où  $\tau$  est le « tenseur des contraintes » de Kirchhoff évoqué dans la remarque 3.8 [p. 35]. Le groupement de termes  $K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$ , parfois noté  $\mathbf{q}_0$  pour une ressemblance avec l'équation (4.7), est difficilement interprétable. On peut aussi, si on le souhaite, développer la divergence. Une autre expression, sans « tenseur des contraintes » artificiel<sup>(27)</sup>, est déduite directement de l'équation (4.7) :

$$\rho \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \text{grad}_L \mathbf{q} : \mathbf{F}^{-\top} \quad (\text{car } \text{div}_E \boldsymbol{\Psi} = \text{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \mathbf{F}^{-\top}, \forall \boldsymbol{\Psi}) \quad (4.9)$$

<sup>(27)</sup> Voir la remarque 3.8 [p. 35]

#### 4.4 Conservation de l'énergie pour un domaine géométrique

Soit un domaine géométrique dont la position actuelle est  $\mathcal{D}_t^g$ . En intégrant les termes de l'équation locale (4.7) [p. 58] sur la position actuelle du domaine géométrique, on obtient l'égalité :

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \dot{e}_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{r}_{ext E}^v dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \mathbf{q} dv_t$$

Avec la dérivation des intégrales de masse sur un domaine géométrique (2.14) [p. 23], il vient :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} e^m dm}_{\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^g, t)} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t}_{-\mathcal{P}_{int}^{mec}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{r}_{ext E}^v dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \mathbf{q} dv_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{cal}} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E e_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi_e} \quad (4.10)$$

où  $\Phi_e$  est le flux convectif d'énergie interne entrant à travers la frontière et où  $\mathbf{v}^f$  est la vitesse de la frontière du domaine géométrique. En comparant l'équation (4.10) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 16], la quantité

$$\mathcal{P}_{ext}^{cal} - \mathcal{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^g} (\mathbf{r}_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E) dv_t$$

peut s'interpréter comme un taux de production interne d'énergie interne, et son intégrande  $\tau_{int} = \mathbf{r}_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$  est le taux de production volumique d'énergie interne. Ainsi, on peut interpréter le principe de la conservation de l'énergie, comme un principe de « conservation de l'énergie interne », à condition de considérer la puissance calorifique extérieure et l'opposé de la puissance mécanique des efforts intérieurs comme des sources d'énergie interne.

**Bilan d'énergie totale** – En utilisant le théorème de la puissance cinétique sous forme de bilan d'énergie cinétique pour un domaine géométrique (3.38) page 37 :

$$\frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}^g, t) = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} + \Phi_{E_{cin}}$$

et en additionnant terme à terme avec (4.10) il vient :

$$\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^g, t) + \frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}^g, t) = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} + \Phi_e + \Phi_{E_{cin}}$$

Ainsi, si on appelle *énergie totale* le terme  $E_{tot} = E_{cin} + E_{int}$ , en comparant avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.14) p. 15], le principe de la conservation de l'énergie peut être présenté comme un principe de conservation de l'énergie totale, à condition de considérer la puissance mécanique des efforts extérieurs et la puissance calorifique extérieure comme des sources d'énergie totale. Le taux de production volumique d'énergie totale est :  $\tau_{E_{tot}} = \mathbf{v} \cdot (\text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^v) + \mathbf{r}_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q}$ .

#### 4.5 Changements d'observateur

- **Principe 4.16 – Objectivité de la chaleur transmise par conduction.** La puissance calorifique surfacique actuelle transmise par conduction à travers la frontière  $q^s = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) est un scalaire objectif :

$$\tilde{q}^s = q^s, \quad \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}$$

**Commentaire** – Quand un système reçoit de la chaleur par conduction, il est naturel de poser que cette quantité de chaleur reçue est la même pour tous les observateurs. Ce principe minimal est suffisant pour déduire les théorèmes d'objectivité qui suivent.

- **Théorème 4.17** – Le champ vectoriel courant de chaleur actuel  $\mathbf{q}$  est un champ vectoriel objectif.

**Démonstration** – Le principe 4.16 [p. 59] implique l'égalité :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_t &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t, & \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} \forall \mathbf{n}_t & \quad [\text{principe 4.16 p. 59}] \\ \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t, & \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} \forall \mathbf{n}_t & \quad [\text{éq. (3.41) p. 43}] \\ \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{Q}_t &= \mathbf{q}, & \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} & \quad [\text{éq. (3.41) p. 43}] \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q}_t^\top = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{q}, & \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} & \quad (\mathbf{q} \text{ est un vecteur}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective.

- **Théorème 4.18** – Le champ actuel  $\text{div}_E \mathbf{q}$  est un champ scalaire objectif.

**Démonstration** – On sait de la cinématique que la divergence eulérienne d'un champ vectoriel objectif est un champ scalaire objectif.

- **Théorème 4.19** – La puissance calorifique volumique extérieure actuelle  $r_{ext}^v$  est une grandeur scalaire objective.

**Démonstration** – L'équation de la chaleur (4.7) [p. 58] est :

$$\rho \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q}$$

La masse volumique  $\rho$  est une grandeur objective [th. 2.4 p. 23], l'énergie interne massique  $e^m$  est une grandeur scalaire objective (par principe), sa dérivée particulaire  $\dot{e}^m$  est donc aussi une grandeur scalaire objective (cinématique). La puissance volumique des efforts intérieurs  $-\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$  est une grandeur objective [th. 3.22 p. 44] et la divergence eulérienne  $\text{div}_E \mathbf{q}$  est objective [th. 4.18]. On en déduit que  $r_{ext}^v$  est la somme de grandeurs scalaires objectives.

En revanche, l'énergie cinétique actuelle, sa dérivée temporelle (la puissance cinétique) et la puissance des efforts extérieurs actuelle ne sont pas des grandeurs objectives, car la vitesse n'est pas une grandeur objective. Si l'on récrit le principe de la conservation de l'énergie global pour un domaine matériel sous la forme :

$$\frac{d}{dt} E_{int} - \mathcal{P}_{ext}^{cal} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} - \frac{d}{dt} E_{cin}$$

Le terme de gauche étant objectif, le terme de droite  $\mathcal{P}_{ext}^{mec} - \frac{d}{dt} E_{cin}$  l'est aussi. Bien que chacun des termes de cette différence soit non objectif, leur différence est objective.

## 4.6 En bref...

Lorsqu'un domaine de milieu continu évolue, le point représentatif de l'état de chaque particule suit son propre chemin dans l'espace des états.

Le premier principe de la thermodynamique postule la conservation de l'énergie d'un domaine matériel (système fermé) via l'existence d'une énergie interne qui est une fonction d'état objective. On en déduit une équation différentielle locale de la conservation de l'énergie appelée *équation de la chaleur*.

La fonction d'état objective *énergie interne massique* est caractéristique de chaque modèle de milieu continu (par la liste des variables d'état objectives et par son expression en fonction de ces variables). Elle peut être identifiée par des mesures expérimentales (un abaque) ou bien cette fonction peut être définie *a priori* par une relation mathématique physiquement raisonnable avec des coefficients à ajuster aux mesures.

Pour un domaine géométrique (système ouvert), l'expression globale du principe s'écrit en tenant compte du flux d'énergie interne traversant la frontière par convection.

L'énergie interne actuelle, sa densité massique, le champ vectoriel courant de chaleur actuel et les puissances calorifiques actuelles reçues sont des grandeurs objectives. En revanche, l'énergie cinétique actuelle, la puissance cinétique actuelle, la puissance actuelle des forces extérieures ne le sont pas.



# Second principe de la thermodynamique

## 5.1 Introduction

Le second principe de la thermodynamique n'est pas souvent présenté dans les cours mécanique des milieux continus pour deux raisons :

1. Il n'est utile que lorsque l'on cherche à construire des nouveaux modèles de comportement de milieux continus thermodynamiquement admissible (tous devraient l'être !).
2. Contrairement aux trois principes fondamentaux précédents, il ne conduit pas à des équations mais à une inéquation dont on n'a pas à se soucier dans la résolution d'un problème dès lors qu'un modèle de comportement (thermodynamiquement admissible) a été choisi.

La lecture de ce chapitre n'est donc indispensable qu'aux lecteurs qui ont en vue la construction de nouveaux modèles de comportements. Les lois de comportement (mécaniques et thermiques) classiques des solides et des fluides, proposées généralement sans justification dans les cours élémentaires, satisfont (approximativement parfois) automatiquement l'inégalité du second principe de la thermodynamique.

**Remarque 5.1** – Cependant, il n'est pas pédagogiquement inutile de vérifier que les modèles de comportement classiques satisfont bien le principe. Il est aussi pédagogiquement utile de reconstruire les modèles de comportement classiques à partir du second principe de la thermodynamique, pour les justifier<sup>(1)</sup>.

Le second principe de la thermodynamique introduit une nouvelle variable d'état : la *température absolue*, ainsi qu'une nouvelle fonction d'état : l'*entropie*. Il sort du cadre de ce cours de tenter de justifier l'énoncé de ce principe par un exposé de l'évolution historique des idées en thermodynamique ou par des expériences de pensée sur les machines thermiques idéales de Carnot, comme il est couramment fait dans les cours de thermodynamique. L'auteur a résolument choisi de présenter ce principe comme les précédents, c'est-à-dire en l'énonçant comme un axiome sans tenter de le justifier.

Dans ce chapitre, on suit la même démarche que dans les chapitres précédents : le principe est énoncé de manière globale pour un domaine matériel, on en déduit une expression locale et une expression globale pour les domaines géométriques.

---

<sup>(1)</sup> Historiquement, les lois de comportement classiques des fluides et des solides déformables ont été proposées sans le souci de respecter le second principe. On les présente habituellement comme des équations de fermeture. C'est donc un peu par chance qu'ils se trouvent être thermodynamiquement admissibles (ou presque). L'oubli de ce principe a notamment pu conduire, à la fin du XX<sup>e</sup> siècle, à la proposition de certaines lois de comportement thermodynamiquement inadmissibles comme le comportement dit « hypoélastique », dont on peut encore trouver la trace dans certains codes de calcul.

## 5.2 Énoncé traditionnel

Dans les cours de thermodynamique élémentaire, le second principe de la thermodynamique est généralement énoncé ainsi :

1. Il existe une variable d'état scalaire, positive, non extensive et objective appelée *température absolue*<sup>(2)</sup> (unité légale : le Kelvin de symbole K).
2. Un échange de chaleur entre deux corps en contact ne peut se faire que du corps à la plus haute température vers le corps à la plus faible température (on dit que « la chaleur va du chaud vers le froid »). Pour quantifier cette dissymétrie, on appelle « variation élémentaire » d'entropie d'un corps au cours d'une « transformation élémentaire », la « quantité de chaleur élémentaire »  $dQ_{ext}$  reçue de l'extérieur du corps rapportée à sa température  $T$  au moment de cet échange :

$$dS = \frac{dQ_{ext}}{T} \quad (\text{unité : J.K}^{-1})$$

**Exemple 5.1** – Si un corps reçoit de la chaleur ( $dQ_{ext} > 0$ ), son entropie augmente ; s'il cède de la chaleur ( $dQ_{ext} < 0$ ), son entropie diminue. Soit un corps  $A$  à la température  $T_A$  et un corps  $B$  à une température  $T_B < T_A$ , on note  $dQ_{ext}^B > 0$  la quantité de chaleur reçue par le corps  $B$ . On suppose que les corps  $A$  et  $B$  n'échangent pas d'autres énergies mécaniques ou thermiques avec leur extérieur et que leur température n'évolue pratiquement pas car l'évolution est « infinitésimale ». Dans ces conditions, le principe de la conservation de l'énergie appliqué au système  $A \cup B$  impose que la chaleur reçue par le corps  $A$  est négative et vaut  $dQ_{ext}^A = -dQ_{ext}^B < 0$ . Les variations « infinitésimales »<sup>(3)</sup> d'entropie des deux corps sont donc les suivantes :

$$dS_A = -\frac{dQ_{ext}^B}{T_A} < 0 \quad \text{et} \quad dS_B = \frac{dQ_{ext}^B}{T_B} > 0$$

L'entropie étant une grandeur extensive, la variation d'entropie de l'ensemble  $A \cup B$  est la somme des variations d'entropie :

$$dS_A + dS_B = -\frac{dQ_{ext}^B}{T_A} + \frac{dQ_{ext}^B}{T_B} = dQ_{ext}^B \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right) > 0 \quad \text{car } T_A > T_B$$

On en déduit que s'il se produit un échange de chaleur entre des parties  $A$  et  $B$  d'un système isolé mécaniquement et thermiquement, l'entropie du système  $A \cup B$  augmente pendant une transformation « infinitésimale ».

3. L'entropie est une fonction d'état scalaire extensive et objective.
4. La variation d'entropie dans une « évolution infinitésimale » d'un système est due en partie aux apports d'entropie extérieure  $\frac{dQ_{ext}}{T}$  où  $dQ_{ext}$  est la chaleur reçue de l'extérieur entre les instants  $t$  et  $t + dt$  à la température  $T$  du système :

$$dS \geq \frac{dQ_{ext}}{T} \quad \text{ou encore :} \quad dS - \frac{dQ_{ext}}{T} = dS_{int} \geq 0$$

<sup>(2)</sup> L'affirmation de l'existence de la variable d'état température absolue est souvent présentée préalablement, comme ne faisant pas partie du second principe de la thermodynamique. L'auteur a choisi de l'intégrer au second principe par commodité, puisque c'est seulement dans ce principe que l'on y fait référence. La seule chose importante est d'affirmer à un moment ou à un autre l'existence de la température absolue.

<sup>(3)</sup> Les quantités « infinitésimales » sont traditionnellement notées comme des différentielles ou avec des  $\delta Q$ . Le lecteur verra dans la suite que l'auteur évite ce genre de notation et qu'il n'y aura pas à distinguer entre différentielles exactes et « inexactes ».

**Remarque 5.2** – Les causes et la valeur de l’augmentation d’entropie  $dS_{int}$  ne sont pas précisées par le principe. On donne dans l’exemple 5.1 un cas d’augmentation d’entropie d’un système due à des échanges internes de chaleur, mais il peut exister d’autres causes : par exemple, une partie de système peut produire de la chaleur par un frottement interne. Il peut aussi se produire dans le système des apports ou des absorptions de chaleur dues à des changements de phase ou des réactions chimiques exothermiques ou endothermiques. Les phénomènes exothermiques provoquent une augmentation locale d’entropie et les phénomènes endothermiques provoquent une diminution locale d’entropie. Mais quels que soient les phénomènes internes au système, la variation d’entropie totale  $dS_{int}$  (création ou absorption de chaleur et échanges thermiques internes) reste non négative.

Dans la présentation classique qui précède, on peut constater un certain nombre de difficultés et même d’incohérences :

1. Dans la définition de la variation d’entropie d’un système (axiome 4), on évoque la « température d’un système » ce qui signifie que le système est à température uniforme. On ne pourrait donc pas définir la variation d’entropie d’un système à température non uniforme (mais dans l’exemple 5.1, le système est composé de deux parties à des températures  $T_A$  et  $T_B$  différentes ! Quelle est la température du système qui peut servir à définir sa variation d’entropie ?).
2. N’envisager que des systèmes à température uniforme (« équilibre thermique ») pour faire de la *thermodynamique* paraît peu raisonnable. Lorsqu’un système échange de la chaleur avec son extérieur, il n’est jamais à température uniforme sauf au bout d’un temps infini.
3. Le principe n’est présenté que pour des évolutions « infinitésimales ». Il faut donc admettre que dans une évolution finie, les températures d’un système évoluent au cours du temps tout en restant uniformes (physiquement peu raisonnable), ou bien qu’il faut attendre l’« équilibre thermique » à chaque instant intermédiaire (évolution « infiniment lente ») pour parler des entropies intermédiaires ou bien admettre que dans une évolution finie entre deux états à l’« équilibre thermique », l’entropie des états intermédiaires n’est pas définissable !

Sous la forme classique qui vient d’être donnée, le second principe de la thermodynamique est inexploitable<sup>(4)</sup> pour étudier des évolutions réelles<sup>(5)</sup>. En mécanique des milieux continus, le champ de températures n’est jamais uniforme (il n’y a pas d’« équilibre thermique »<sup>(6)</sup>) et le second principe de la thermodynamique demande donc à être reformulé de manière plus pertinente.

### 5.3 Second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel

Soit  $\mathcal{D}^m$  un domaine matériel<sup>(7)</sup> dont la position actuelle est  $\mathcal{D}_t^m$  et dont la position de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ . Le second principe de la thermodynamique affirme que :

1. Il existe une variable d’état *de particule*, notée  $T$ , scalaire, objective, positive et intensive appelée *température absolue*. Les températures du domaine matériel sont décrites par un champ matériel  $T(P, t)$ . La liste des variables d’état indépendantes et objectives caractérisant l’état d’une particule s’écrit donc :  $\{T, \chi_2, \dots, \chi_n\}$  [notation 4.3 p. 50] et sa liste de variables d’état réduites est  $\{T, I_2, \dots, I_m\}$  [déf. 4.7 p. 53].

<sup>(4)</sup> Voire incompréhensible.

<sup>(5)</sup> Sauf à inventer des évolutions d’entropie artificielles comme les évolutions « polytropiques » de systèmes à température uniforme.

<sup>(6)</sup> Voir la remarque 4.8 [p. 55].

<sup>(7)</sup> Éventuellement continu par morceaux [remarque 4.1 p. 47].

2. En toute particule, on a l'inégalité (traduction locale de « dans une conduction thermique, la chaleur va du chaud vers le froid ») :

$$\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T \leq 0 \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur courant de chaleur [déf. 4.13 p. 57].

3. Il existe une *fonction d'état* scalaire et extensive<sup>(8)</sup>  $S$  appelée *entropie*. Son extensivité permet de définir une *entropie massique*<sup>(9)</sup> (unité :  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ). L'entropie actuelle  $S(\mathcal{D}^m, t)$  d'un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  peut donc s'écrire [section 1.2 p. 11] :

$$S(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} s_E^m dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E s_E^m dv_t \quad \left( = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L s_L^m K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 s_L^m dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} s_L^m dm \right)$$

L'entropie massique en une particule  $P$  étant une fonction d'état scalaire objective, et les variables d'état étant objectives, il existe une fonction  $f_s$  isotrope [th. 4.6 p. 52] et donc une fonction  $\bar{f}_s$  telles que :

$$s^m = f_s(T, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) = \bar{f}_s(T, I_2, \dots, I_m) \quad [\text{éq. (4.1) p. 52}]$$

où les fonctions universelles  $f_s$  et  $\bar{f}_s$  sont caractéristiques de chaque modèle de milieu continu, par le choix de ses variables (les variables d'état indépendantes) et par l'application elle-même (valeur de l'entropie massique en fonction des variables d'état). La dérivée particulaire de l'entropie massique est :

$$\dot{s}^m = \partial_T \bar{f}_s \dot{T} + \sum_{i=2}^m \partial_i \bar{f}_s \dot{I}_i$$

4. Pendant une évolution, la dérivée temporelle de l'entropie du domaine matériel, appelée *taux*<sup>(10)</sup> *d'entropie* du domaine matériel, est supérieure ou égale au taux d'entropie d'origine extérieure :

$$\frac{d}{dt} S(\mathcal{D}^m, t) \geq \int_{\mathcal{D}_t} \frac{r_{extE}^v}{T_E} dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} ds_t$$

Le taux d'entropie extérieure est dû à la puissance calorifique reçue à distance de l'extérieur du domaine, représentée par  $r_{ext}^v$  [déf. 4.14 p. 57] et à la puissance calorifique reçue par contact à la frontière (conduction), représentée par  $q^s = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t$  [déf. 4.13 p. 57].

**Rappel** – Il n'y a pas d'apport de chaleur par convection car le principe est posé pour un domaine matériel. Le cas des domaines géométriques est envisagé en section 5.5 [p. 70].

Au cours d'une évolution, il existe donc dans le domaine matériel un taux de production interne d'entropie (unité :  $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$ ), *non négatif*, dû à des processus internes, non précisés<sup>(11)</sup> par le principe, à l'intérieur du domaine :

$$\frac{d}{dt} S_{int} = \frac{d}{dt} S(\mathcal{D}^m, t) - \int_{\mathcal{D}_t} \frac{r_{extE}^v}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} ds_t \geq 0 \quad (5.2)$$

<sup>(8)</sup> Le postulat d'extensivité de l'entropie est parfois appelé « principe de l'état local ».

<sup>(9)</sup> Les thermodynamiciens disent aussi : entropie spécifique.

<sup>(10)</sup> Contrairement aux définitions données en cinématique à propos des vitesses de déformation, le mot « taux » signifie ici « dérivée temporelle » et non « dérivée temporelle logarithmique ».

<sup>(11)</sup> Voir la remarque 5.2 [p. 65].

Le cas où  $\frac{d}{dt} S_{int} = 0$  (pas de production interne d'entropie dans le domaine  $\mathcal{D}^m$ ) n'a lieu que pour une classe particulière d'évolutions thermodynamiques idéales que l'on qualifie de « réversibles ». Les autres sont dites « irréversibles »<sup>(12)</sup>.

Avec cet énoncé du second principe de la thermodynamique, l'entropie actuelle d'un domaine matériel (ou d'un sous-domaine) en cours d'évolution est définie même quand les variables d'état sont des champs non uniformes [remarque 4.8 p.55]. Cet énoncé est évidemment toujours valable dans le cas particulier où les champs des variables d'état (et en particulier les températures) sont uniformes.

## 5.4 Forme locale du second principe de la thermodynamique

- **Théorème 5.2** – Le second principe de la thermodynamique appliqué à un domaine matériel est équivalent à l'inégalité différentielle suivante :

$$\rho s^m - \frac{r_{ext}^v}{T} + \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \quad (5.3)$$

**Démonstration** – En utilisant la dérivée temporelle d'une intégrale de masse sur un domaine matériel [éq. (2.12) p. 22] et le théorème de la divergence, le second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel [éq. (5.2)] s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E s_E^m dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{r_{extE}^v}{T_E} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} dv_t \geq 0$$

Le terme  $\frac{r_{ext}^v}{T} - \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T}$  s'interprète comme le taux de production volumique d'entropie *d'origine externe* ( $\text{W.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ ). En utilisant le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16], on obtient le résultat<sup>(13)</sup>.

**Écriture lagrangienne** – Si on préfère utiliser la description de Lagrange des champs dans le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$ , le second principe de la thermodynamique [éq. (5.2) p. 66] s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L s_L^m K_{vL} dv_0 - \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{r_{extL}^v}{T_L} K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} K_{vL} \frac{\mathbf{q}_L}{T_L} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 ds_0 \geq 0$$

Le théorème de la divergence et le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16] conduisent à l'équation différentielle :

$$\rho_0 s^m - K_v \frac{r_{ext}^v}{T} + \text{div}_L \left( K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0$$

où  $\rho_0 = K_v \rho = \rho(P, t_0)$  est la masse volumique *initiale*.

Une autre écriture lagrangienne locale s'obtient directement à partir de l'équation (5.3) :

$$\rho s^m - \frac{r_{ext}^v}{T} + \left( \mathbf{grad}_L \frac{\mathbf{q}}{T} \right) : \mathbf{F}^{-T} \geq 0 \quad (\text{car } \text{div}_E \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi : \mathbf{F}^{-T}, \forall \Psi)$$

En utilisant l'identité :

$$\text{div}_E \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{\text{div}_E \mathbf{q}}{T} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E \frac{1}{T} = \frac{\text{div}_E \mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{grad}_E T}{T^2}$$

<sup>(12)</sup> Ces qualificatifs usuels peuvent induire en erreur : certaines évolutions (comme une fissuration ou une fracture) sont irréversibles au sens commun du terme, alors que d'autres, bien que sujettes à une production interne d'entropie, ne le sont pas vraiment car il suffit parfois de céder de la chaleur au milieu extérieur pour revenir à l'état antérieur. C'est notamment le cas pour les milieux continus visqueux.

<sup>(13)</sup> On a supprimé les indices  $E$  inutiles car  $\Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t) = \Psi(P, t)$ .

l'expression locale du second principe [(5.3) p. 67] s'écrit encore :

$$\rho \dot{s}^m - \frac{r_{ext}^v}{T} + \frac{\text{div}_E \mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{grad}_E T}{T^2} \geq 0 \quad \text{en toute particule et à tout instant.}$$

Puisque  $T > 0$ , on peut multiplier chaque membre par  $T$  sans changer le sens de l'inégalité. L'expression locale du second principe de la thermodynamique s'écrit donc encore :

$$\rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \quad (5.4)$$

- **Définition 5.3 – Dissipation.** On appelle dissipation, le champ matériel scalaire, noté  $\Phi$ , non négatif par principe, défini par :

$$\Phi = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T} \quad (\text{unité : W.m}^{-3}) \quad (5.5)$$

**Expressions lagrangiennes** – On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'une expression lagrangienne de la dissipation est :

$$\Phi = \rho_0 T \dot{s}^m - K_v r_{ext}^v + T \text{div}_L (K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T})$$

ou encore :

$$\Phi = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \mathbf{grad}_L \mathbf{q} : \mathbf{F}^{-\top} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_L T \cdot \mathbf{F}^{-1}}{T}$$

En utilisant l'équation de la chaleur [éq. (4.7) p.58], on obtient une autre expression de la dissipation :

$$\Phi = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \quad (5.6)$$

Avec cette définition, on peut reformuler le théorème 5.2 [p. 67] :

- **Théorème 5.4** – Le second principe de la thermodynamique est équivalent à la non négativité de la dissipation en toute particule et à tout instant :

$$\Phi(P, t) \geq 0, \quad \forall P \forall t \quad (5.7)$$

Le second principe n'affirme rien *a priori* sur la nature des processus internes qui produisent cette dissipation, excepté le fait que le dernier terme  $-\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T}$ , qui traduit la dissipation produite par les échanges thermiques par conduction dans le domaine matériel, est non négatif par principe [éq. (5.1) p. 66]. Le reste de la dissipation reflète donc la production ou la perte d'entropie due à des phénomènes exothermiques ou endothermiques [remarque 5.2 p. 65] autres que les échanges thermiques internes. On sépare donc la dissipation en deux termes :

- **Définition 5.5 – Dissipation thermique.** On appelle dissipation thermique, la puissance volumique non négative (par principe) définie par :

$$\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad [\text{éq. (5.1) p. 66}] \quad (5.8)$$

- **Définition 5.6 – Dissipation intrinsèque.** On appelle dissipation intrinsèque, la puissance volumique définie par :

$$\Phi_{int} = \Phi - \Phi_{th} = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} \quad [\text{éq. (5.5) p. 68}]$$

$$= \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (5.6) p. 68}] \quad (5.9)$$

Avec ces définitions, la forme locale du second principe s'écrit :

$$\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geq 0 \quad \text{avec} \quad \Phi_{th} \geq 0$$

Comme on peut le constater, le second principe de la thermodynamique n'impose pas que la dissipation intrinsèque soit non négative. Il impose seulement que

$$\Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$$

**Remarque 5.3** – Lors de la construction de modèles de milieux continus, on peut satisfaire à l'inégalité du second principe de la thermodynamique en s'arrangeant pour que la dissipation intrinsèque soit toujours non négative. Imposer arbitrairement  $\Phi_{int} \geq 0$  n'est qu'une condition suffisante pour satisfaire au principe. Elle n'est nullement nécessaire. Si on impose  $\Phi_{int} \geq 0$ , on élimine la possibilité d'existence de processus internes endothermiques. C'est le cas pour la plupart des modèles de milieux continus monoconstituants (pas de réaction chimique ni changement de phase). Dans les milieux continus monoconstituants, le seul processus interne générant de la dissipation intrinsèque est le frottement, qui est exothermique.

Les milieux continus multiconstituants sortent du cadre de ce cours, mais on peut noter que si la dissipation intrinsèque est négative, sa norme est limitée par la dissipation thermique :

$$\Phi_{int} = -|\Phi_{int}| \geq -\Phi_{th} \Rightarrow |\Phi_{int}| \leq \Phi_{th}$$

Autrement dit : la chaleur nécessaire à un processus interne endothermique local (par exemple une fusion ou un changement de phase) ne peut être fournie que par un échange de chaleur de la particule avec ses voisines (conduction,  $\text{div}_E \mathbf{q} < 0$ ) ou par un éventuel rayonnement ( $r_{ext}^v$ ).

L'expression de la dissipation (5.6) [p. 68] montre que, pour un modèle de milieu continu donné (la liste des variables d'état et les fonctions d'état énergie interne massique et entropie massique sont connues), la dissipation actuelle en une particule dépend des paramètres suivants :

- l'état actuel de la particule (au moins par  $\rho$  et  $T$ , mais aussi par d'autres variables d'état éventuelles),
- la vitesse d'évolution thermodynamique actuelle de la particule (par les dérivées particulières des variables d'état),
- la cinématique du mouvement (au moins par tenseur des taux de déformation actuel  $\mathbf{D}$ , mais aussi éventuellement par les dérivées particulières de certaines variables d'état),
- de son environnement thermique actuel (par  $\mathbf{grad} T$ ).

Comme on le verra dans la construction de modèles de comportement de milieux continus, les inégalités  $\Phi \geq 0$  et  $\Phi_{th} \geq 0$  impliquent l'existence<sup>(14)</sup> de lois de comportement, sans toutefois donner leur expression. Il faut évidemment choisir des lois de comportement telles que ces deux inégalités (équivalentes au second principe de la thermodynamique) soient respectées en toute particule et à tout instant, c'est-à-dire que ces lois de comportement soient thermodynamiquement admissibles. Un exemple de construction de modèles classiques (fluides simples) est donné dans le chapitre 6 [p. 75]

**Inégalité de Clausius-Duhem** – On définit une nouvelle fonction d'état appelée l'énergie libre de Helmholtz massique définie par :  $\psi^m = e^m - T s^m$ . Sa dérivée particulière est donc :

$$\dot{\psi}^m = \dot{e}^m - s^m \dot{T} - T \dot{s}^m \quad \Rightarrow \quad \dot{e}^m = \dot{\psi}^m + s^m \dot{T} + T \dot{s}^m$$

<sup>(14)</sup> Un exemple de loi dont l'existence est impliquée par une inégalité est donné plus loin en section 5.7 [p. 71].

En remplaçant  $e^m$  dans l'expression de la dissipation (5.6) [p. 68], on obtient une autre expression de la dissipation, avec deux les fonctions d'état  $\psi^m$  et  $s^m$ . Sous cette forme, l'inégalité locale du second principe est appelée *inégalité de Clausius-Duhem* :

$$\Phi = \underbrace{-\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T})}_{\Phi_{int}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T}_{\Phi_{th}} \geq 0$$

En thermomécanique des solides déformables, le couple de fonctions d'état  $(\psi^m, s^m)$  est souvent préféré au couple  $(e^m, s^m)$  naturellement introduit par les deux principes de la thermodynamique, car il simplifie l'écriture de certaines formules <sup>(15)</sup>.

## 5.5 Second principe pour un domaine géométrique

Soit  $\mathcal{D}^g$  un domaine géométrique de position actuelle  $\mathcal{D}_t^g$ . De l'inégalité (5.3) [p. 67], il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E s_E^m dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) dv_t &\geq 0 \\ \int_{\mathcal{D}_t^g} s_E^m dm - \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} dv_t &\geq 0 \end{aligned}$$

En utilisant la dérivée d'une intégrale de masse sur un domaine géométrique (2.14) [p. 23], on obtient :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} s_E^m dm}_{\frac{dS}{dt}} - \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} dv_t}_{\frac{dS_{ext}}{dt}} - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E s_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\phi_s} \geq 0 \quad (5.10)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} s_E^m dm}_{\frac{dS}{dt}} \geq \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \left( \frac{r_{ext}^v E}{T_E} - \text{div}_E \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right) dv_t}_{\frac{dS_{ext}}{dt}} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E s_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\phi_s} \quad (5.11)$$

où  $\phi_s$  est le flux d'entropie entrant à travers la frontière par convection et où  $\mathbf{v}^f$  est la vitesse de la frontière.

En comparant les équations (5.10) ou (5.11) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 16], on peut interpréter ces équations comme un bilan d'entropie : la dérivée temporelle de l'entropie d'un domaine géométrique est supérieure ou égale à la somme de la production d'entropie d'origine extérieure (conduction et rayonnement :  $\frac{dS_{ext}}{dt}$  et convection :  $\phi_s$ ). La différence est une production d'entropie due à des processus internes.

**Remarque 5.4** – On obtient d'autres équations équivalentes à (5.10) ou (5.11) en transformant la dérivée d'intégrale  $\frac{dS}{dt}$  avec les formules (1.20) à (1.22) page 16 ou encore (2.14) page 23 ; on peut aussi développer la divergence dans  $\frac{dS_{ext}}{dt}$ .

<sup>(15)</sup> Toutefois, l'origine de l'appellation et l'interprétation physique du groupement de termes  $e - T s$  restent obscures pour l'auteur, sauf dans des évolutions particulières à température constante. En revanche, les variations de l'énergie interne et de l'entropie gardent leur sens quelle que soit l'évolution.

## 5.6 Changements d'observateur

- **Théorème 5.7** – Le gradient eulérien du champ des températures actuelles est un champ vectoriel objectif. Sa formule de changement d'observateur est donc :

$$(\mathbf{grad}_E T)^\sim = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E T \quad (5.12)$$

**Démonstration** – Le champ des températures est un champ matériel scalaire objectif par principe. Or, on montre en cinématique que le gradient eulérien d'un champ scalaire objectif est un toujours champ vectoriel objectif.

Puisque toutes les grandeurs qui interviennent dans l'expression de la dissipation (5.6) [p. 68] sont des grandeurs objectives, on en déduit que les dissipations actuelles  $\Phi(P,t)$ ,  $\Phi_{th}(P,t)$  et  $\Phi_{int}(P,t)$  sont donc des champs matériels de grandeurs scalaires objectives.

## 5.7 Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique

L'axiome 2 de l'énoncé du second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel de milieu continu donné en section 5.3 [p 65] impose l'inégalité :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T \leq 0 \quad (\text{dissipation thermique non négative}) \quad (5.13)$$

Cette inégalité doit être vraie en toutes situations, et notamment quel que soit l'environnement thermique actuel d'une particule représenté par le vecteur  $\mathbf{grad}_E T$ . On en déduit que le vecteur courant de chaleur  $\mathbf{q}$  est nécessairement au moins fonction du vecteur  $\mathbf{grad}_E T$  :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T \leq 0, \forall \mathbf{grad}_E T \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{f}_q \text{ tel que } \mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots)$$

La fonction  $\mathbf{f}_q$  est appelée *loi de comportement thermique* ou *loi de conduction thermique*. L'inégalité (5.13) implique que la fonction  $\mathbf{f}_q$  existe, sans pour autant la préciser. Un large choix reste possible.

La loi la plus simple que l'on puisse choisir est la très populaire *loi de Fourier* :

$$\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 0 \quad (5.14)$$

Le lecteur vérifiera aisément qu'elle satisfait bien la non négativité de la dissipation thermique et qu'elle est bien universelle<sup>(16)</sup>. Cette loi linéaire simple n'est *a priori* valable que pour des milieux continus isotropes, car aucune référence n'est faite à des directions matérielles d'anisotropie (la loi de conduction thermique est la même quelle que soit l'orientation de  $\mathbf{grad}_E T$  par rapport aux directions matérielles).

On peut construire des lois de comportement thermiques isotropes plus évoluées : le scalaire  $\alpha$  peut être remplacé par toute fonction isotrope (au sens mathématique) à valeur non négative de la forme  $\alpha(\mathbf{grad}_E T, T, \chi_i, \mathbf{D}, \dots)$ <sup>(17)</sup>. On obtient ainsi des lois de conduction thermique isotropes non linéaires.

<sup>(16)</sup> En utilisant la formule de changement d'observateur de  $\mathbf{q}$  [éq. (4.11) p. 60] et celle de  $\mathbf{grad}_E T$  [éq. (5.12) p. 71], on vérifie aisément que la loi est la même pour un autre observateur  $\tilde{\mathcal{H}}$  :  $\tilde{\mathbf{q}} = -\alpha(\mathbf{grad}_E T)^\sim$ .

<sup>(17)</sup> Les arguments de la fonction isotrope  $\alpha$  étant objectifs, il existe une fonction  $\tilde{\alpha}$  d'arguments scalaires telle que  $\alpha(\dots) = \tilde{\alpha}(\dots)$  [éq. (4.1) p. 52].

On peut aussi construire des lois de conduction thermique pour des milieux continus anisotropes<sup>(18)</sup>. Par exemple, pour un milieu continu à une seule direction d'anisotropie<sup>(19)</sup> dont la direction actuelle d'anisotropie est  $\mathbf{n}_t$  (vecteur unitaire), on peut prendre des lois de conduction thermique de la forme suivante :

$$\mathbf{q}_E = -\alpha_1(\dots) \underbrace{(\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t}_{\mathbf{grad}_E T \cdot (\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t)} - \alpha_2(\dots) \underbrace{(\mathbf{grad}_E T - (\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t)}_{\mathbf{grad}_E T \cdot (\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t)}$$

où  $\alpha_1$  est la conductivité thermique dans la direction d'anisotropie, et  $\alpha_2$  est la conductivité thermique transverse (perpendiculairement à la direction d'anisotropie). Le lecteur vérifiera aisément que cette loi satisfait le second principe si les fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont à valeur scalaire non négative et que cette loi de conductivité thermique est bien universelle si les fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des fonctions non négatives isotropes de leurs arguments tensoriels objectifs.

## 5.8 Capacités calorifiques locales dans une évolution

La *capacité calorifique* ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) souvent aussi appelée *chaleur massique*<sup>(20)</sup>, est traditionnellement définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 Kelvin l'unité de masse de matière dans une certaine transformation finie dont les états initiaux et finaux sont à température uniforme ( $\mathbf{grad}_E T_1 = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{grad}_E T_2 = \mathbf{0}$ ) mais différentes ( $T_2 - T_1 = 1 \text{ K}$ ). On va en donner ici une définition locale et instantanée.

Dans un milieu continu en évolution, les puissances calorifiques volumiques reçues en une particule sont :

$$\tau_{ext}^{cal} = r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} = \rho \dot{e}^m - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{conservation de l'énergie (4.7) p. 58}] \quad (5.15)$$

$$\text{et } \Phi_{int} = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{dissipation intrinsèque (5.6) p. 68}] \quad (5.16)$$

La première représente la puissance calorifique volumique locale d'origine extérieure et la seconde représente la puissance calorifique volumique locale due aux processus internes de production de chaleur<sup>(21)</sup>. La somme des deux est la puissance calorifique volumique totale actuelle reçue par une particule.

On peut alors définir une capacité calorifique locale actuelle  $C$  qui donne la vitesse d'échauffement due à ces puissances calorifiques volumiques locales :

$$\begin{aligned} \rho C \dot{T} &= \tau_{ext}^{cal} + \Phi_{int} = \rho T \dot{s}^m && [\text{éq. (5.15) et éq. (5.16)}] \\ C &= \frac{T}{\dot{T}} \dot{s}^m = T \partial_T f_s + T \sum_{j=2}^m \partial_{j\bar{f}_s} \frac{\dot{I}_j}{\dot{T}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

- **Définition 5.8 – Capacité calorifique.** La capacité calorifique en une particule dans une évolution non isotherme est définie par :

$$C = \frac{T}{\dot{T}} \dot{s}^m$$

<sup>(18)</sup> En général ce sont des milieux continus solides déformables.

<sup>(19)</sup> On les appelle milieux continus « isotropes transverses ». Ce sont, par exemple, des milieux fibreux ou feuilletés que l'on veut modéliser comme des milieux continus.

<sup>(20)</sup> Cette dénomination est trompeuse, elle suggère que l'unité est en  $\text{J.kg}^{-1}$ .

<sup>(21)</sup> Pour les milieux continus monoconstituants, il s'agit seulement du frottement (exothermique).

La valeur de la dérivée particulière  $s^m$  dépend de la dérivée particulière des variables d'état, et donc de la vitesse d'évolution dans l'espace des états. La capacité calorifique locale  $C$  dépend donc *a priori* à la fois de l'état actuel et de la direction actuelle de la vitesse d'évolution de la particule dans l'espace des états. On ne peut donc parler de capacité calorifique que pour une certaine direction d'évolution dans l'espace des états<sup>(22)</sup>. Pour des vitesses d'évolution telles que  $\dot{T} = 0$  (évolution à température constante dans le temps) elle n'est évidemment pas définie. *La capacité calorifique n'est pas une caractéristique du matériau* sauf si on précise dans quel type d'évolution elle est mesurée.

## 5.9 En bref...

Le second principe est une inégalité qui exprime que, lors de l'évolution d'un domaine, le taux d'entropie du domaine  $\frac{dS}{dt}$  n'est pas dû qu'à l'entropie reçue de l'extérieur<sup>(23)</sup> mais aussi à un taux de production interne d'entropie *non négatif*  $\int_{\mathcal{D}} \Phi T^{-1} dv \geq 0$  (unité :  $\text{W.K}^{-1}$ ), sauf pour des évolutions particulières idéales<sup>(24)</sup> dites « réversibles ».

La forme locale de ce principe est la non négativité de la dissipation :  $\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geq 0$  avec  $\Phi_{th} \geq 0$ , à respecter en toute particule et à tout instant de l'évolution de tout milieu continu.

La dissipation thermique actuelle  $\Phi_{th} \geq 0$  est due à la non uniformité actuelle des températures. La dissipation intrinsèque actuelle est due à l'existence éventuelle de processus internes (endothermiques ou exothermiques). Dans les modèles de milieux continus monoconstituants (donc sans réaction chimique ni changement de phase), le seul processus interne est le frottement (exothermique) ; dans ce cas, la dissipation intrinsèque est non négative.

L'inégalité  $\Phi_{th} \geq 0$  conduit à la nécessité d'existence d'une loi de comportement thermique. De même, dans la construction de modèles de comportement de milieux continus monoconstituants, l'inégalité  $\Phi_{int} \geq 0$  conduira à la nécessité d'existence d'une loi de comportement mécanique<sup>(25)</sup>. Non seulement ces lois de comportement existent nécessairement, mais elles doivent de plus satisfaire les inégalités du second principe en toute particule et à tout instant de toute évolution. Le choix reste néanmoins large. Les modèles de milieux continus ainsi construits sont *thermodynamiquement admissibles*.

Dans la résolution d'un problème de thermomécanique des milieux continus dans lequel le modèle de milieu continu est donné, le second principe n'apparaît pas dans les équations car il est normalement automatiquement respecté par le modèle de comportement donné (il est normalement thermodynamiquement admissible).

<sup>(22)</sup> En thermodynamique des gaz, on utilise couramment une capacité calorifique à volume massique ( $\rho^{-1}$ ) constant  $C_v$  et une capacité calorifique à pression constante  $C_p$ .

<sup>(23)</sup> Conduction, convection et rayonnement pour les domaines géométriques ; conduction et rayonnement seulement pour les domaines matériels.

<sup>(24)</sup> Même sans dissipation intrinsèque (pas de frottement ni de changement de phase ni de réaction chimique), la nullité de la dissipation thermique dans un domaine en évolution est rarissime : il faudrait que toutes les particules du domaine partent d'une température uniforme et évoluent toutes à la même vitesse.

<sup>(25)</sup> On en verra un exemple pour les fluides dans le chapitre suivant, et d'autres exemples dans les cours d'élasticité ( $\Phi_{int} = 0$ ) et d'inélasticité ( $\Phi_{int} > 0$ ) des solides déformables.



## Le modèle « fluide simple »

L'objet de ce chapitre est d'illustrer comment on peut construire des modèles de fluides simples thermodynamiquement admissibles. On verra comment le second principe de la thermodynamique implique l'existence d'une loi de comportement mécanique et d'une loi de comportement thermique, que ces lois ne peuvent pas être choisies arbitrairement et qu'enfin le modèle classique *fluide newtonien* est le plus simple d'entre eux.

Il est tout à fait possible d'ignorer ce chapitre et de poser la loi de comportement mécanique des fluides newtoniens ainsi que la loi de comportement thermique de Fourier de manière autoritaire. Nonobstant, la démarche de construction de ces lois est pédagogiquement intéressante : elle montre les racines profondes de ce modèle et elle ouvre la voie à la construction de modèles de comportement thermodynamiquement admissibles de fluides simples non linéaires.

### 6.1 Définition d'un fluide simple

- **Définition 6.1 – Fluide simple.** On appelle fluide simple, un milieu continu dont les deux variables d'état indépendantes sont la température  $T$  et la masse volumique  $\rho$ .

La présence de la température dans les variables d'état est imposée par le second principe. Le choix de la masse volumique comme seule autre variable d'état traduit l'intention de ne pas distinguer l'état de deux particules ayant la même température autrement que par la densité volumique de masse actuelle, sans référence à une déformation par rapport à une forme particulière. Autrement dit, les fluides simples n'ont pas de forme propre par rapport à laquelle on pourrait donner un sens physique à un tenseur de déformation qui comparerait les distances actuelles entre particules par rapport à celles d'une forme de référence. Avec seulement deux variables d'état scalaires et objectives, un fluide simple est un des modèles de milieux continus les plus simples que l'on puisse construire.

La fonction d'état énergie interne massique et la fonction d'état entropie massique sont donc des fonctions des deux variables d'état  $(T, \rho)$  :

$$e(P,t) = f_e(T(P,t), \rho(P,t)) \quad ; \quad s(P,t) = f_s(T(P,t), \rho(P,t))$$

**Remarque 6.1** – Les deux variables d'état étant des scalaires, les variables d'état réduites sont identiques.

Leurs dérivées particulières sont donc :

$$\dot{e} = \partial_T f_e \dot{T} + \partial_\rho f_e \dot{\rho} \quad ; \quad \dot{s} = \partial_T f_s \dot{T} + \partial_\rho f_s \dot{\rho}$$

## 6.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

D'une manière générale, le second principe de la thermodynamique s'écrit [éq. (5.6) p. 68] :

$$\Phi = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0$$

En détaillant les dérivées particulières  $\dot{s}^m$  et  $\dot{e}^m$  pour un fluide simple, il vient :

$$\rho \left( T \partial_T f_s - \partial_T f_e \right) \dot{T} + \rho \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e \right) \dot{\rho} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad (6.1)$$

Cette inégalité doit être satisfaite en toutes situations, c'est-à-dire pour toute vitesse d'évolution ( $\forall \dot{T} \forall \dot{\rho}$ ), pour tout mouvement ( $\forall \mathbf{D}$ ) à partir de tout état  $(T, \rho)$  et pour tout environnement thermique ( $\forall \mathbf{grad}_E T$ ). Cependant, les grandeurs  $\dot{\rho}$  et  $\mathbf{D}$  ne peuvent varier indépendamment : elles sont liées par le principe de la conservation de la masse :

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad [\text{éq. (2.5) p. 20}]$$

En décomposant le tenseur  $\mathbf{D}$  en partie sphérique et déviatorique, on isole  $\operatorname{tr} \mathbf{D}$  :

$$\mathbf{D} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}}{3} \mathbf{G} + \operatorname{dev} \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{G} + \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{dev} \mathbf{D} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{dev} \mathbf{D}$$

Le second principe de la thermodynamique pour un fluide simple [éq. (6.1)] s'écrit donc :

$$\rho \left( T \partial_T f_s - \partial_T f_e \right) \dot{T} - \rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right) \operatorname{tr} \mathbf{D} + \operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{dev} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad (6.2)$$

Cette inégalité doit être vraie dans toutes les situations c'est-à-dire :

- $\forall \dot{T}$  (vitesse actuelle d'évolution de la température de la particule),
- $\forall \mathbf{D}$  (taux de déformation), c'est-à-dire :  $\forall \operatorname{tr} \mathbf{D}$  (partie sphérique) et  $\forall \operatorname{dev} \mathbf{D}$  (partie déviatorique), autrement dit : pour tout mouvement actuel au voisinage de la particule ;
- $\forall \mathbf{grad}_E T$  (environnement thermique actuel de la particule),

où chacune des quatre grandeurs  $\{\dot{T}, \operatorname{tr} \mathbf{D}, \operatorname{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T\}$  peut prendre *indépendamment* une valeur arbitraire.

En définissant les deux « vecteurs généralisés »<sup>(1)</sup>  $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3^{\otimes 2sd} \times \mathbb{V}_3$  suivants :

$$\mathbf{x} = \left\{ \rho \left( T \partial_T f_s - \partial_T f_e \right), -\rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right), \operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma}, -\frac{\mathbf{q}}{T} \right\}$$

$$\mathbf{y} = \left\{ \dot{T}, \operatorname{tr} \mathbf{D}, \operatorname{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T \right\}$$

le second principe de la thermodynamique (6.2) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \quad \text{où } \bullet \text{ est un « produit scalaire généralisé ».}$$

Le vecteur  $\mathbf{x}$  est donc nécessairement au moins fonction du « vecteur »  $\mathbf{y}$ . On en déduit la *nécessité de l'existence* des quatre fonctions  $f_1 \in \mathbb{R}$ ,  $f_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f}_3 \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2sd}$  et  $\mathbf{f}_4 \in \mathbb{V}_3$  suivantes :

$$x_1 = f_1(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow \rho \left( T \partial_T f_s - \partial_T f_e \right) = f_1(\dot{T}, \operatorname{tr} \mathbf{D}, \operatorname{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.3)$$

$$x_2 = f_2(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow -\rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right) = f_2(\dot{T}, \operatorname{tr} \mathbf{D}, \operatorname{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.4)$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{f}_3(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow \operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_3(\dot{T}, \operatorname{tr} \mathbf{D}, \operatorname{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.5)$$

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{f}_4(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow -\frac{\mathbf{q}}{T} = \mathbf{f}_4(\dot{T}, \operatorname{tr} \mathbf{D}, \operatorname{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.6)$$

<sup>(1)</sup> L'espace  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2sd}$  est l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre symétriques et de trace nulle (déviateurs). Il est de dimension 5. On rappelle que le produit doublement contracté est un produit scalaire de cet espace.

où les arguments supplémentaires ( $\dots$ ) peuvent être toutes variables autres que les « composantes » du vecteur  $\mathbf{y}$  (par exemple des variables d'état  $T$  et/ou  $\rho$ ).

L'inégalité du second principe de la thermodynamique (6.2) [p. 76] s'écrit donc :

$$f_1 \dot{T} + f_2 \operatorname{tr} \mathbf{D} + \mathbf{f}_3 : \operatorname{dev} \mathbf{D} + \mathbf{f}_4 \cdot \operatorname{grad}_E T \geq 0, \quad \forall \dot{T} \forall \operatorname{tr} \mathbf{D} \forall \operatorname{dev} \mathbf{D} \forall \operatorname{grad}_E T \quad (6.7)$$

Il faut donc *choisir* les quatre fonctions  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $\mathbf{f}_3$  et  $\mathbf{f}_4$  (lois de comportement) dont l'existence est nécessaire, telles que l'inégalité (6.7) soit respectée  $\forall \dot{T}$ ,  $\forall \operatorname{tr} \mathbf{D}$ ,  $\forall \operatorname{dev} \mathbf{D}$  et  $\forall \operatorname{grad}_E T$ . Les quatre sous-sections qui suivent exposent les conséquences de l'existence des quatre fonctions évoquées en (6.3), (6.4), (6.5) et (6.6).

### 6.2.1 Relation de Helmholtz

Dans l'équation (6.3), le terme de gauche  $\rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e)$  est une fonction d'état, c'est-à-dire fonction des seules variables d'état. On en déduit que la fonction  $f_1$  est nécessairement aussi une fonction d'état. Elle n'est donc pas fonction de ses quatre premiers arguments. L'équation (6.3) [p. 76] ne peut être que de la forme :

$$\rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e) = f_1(T, \rho)$$

Dans l'inégalité (6.7), vraie  $\forall \dot{T}$ , la fonction d'état  $f_1$  ne pouvant être fonction de  $\dot{T}$ , elle est nécessairement nulle. On en déduit que dans un fluide simple :

$$T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad (6.8)$$

Dans un fluide simple, le second principe de la thermodynamique implique que les fonctions d'état  $f_e(T, \rho)$  et  $f_s(T, \rho)$  sont liées par la relation différentielle (6.8) appelée *relation de Helmholtz*<sup>(2)</sup>. Pour définir le comportement thermodynamique d'un fluide simple, il suffit donc de donner une seule fonction d'état, l'autre se déduit de la résolution de cette équation différentielle.

**Autre expression de la relation de Helmholtz** – Si on utilise le couple de fonctions d'état  $(\psi^m, s^m)$  à la place du couple  $(e^m, s^m)$  où  $\psi^m = e^m - T s^m$ , il vient :  $\partial_T f_e = \partial_T f_\psi + f_s + T \partial_T f_s$ . La relation de Helmholtz (6.8) s'écrit alors :

$$f_s = -\partial_T f_\psi \quad (6.9)$$

### 6.2.2 Loi de comportement mécanique

Les deux équations (6.4) et (6.5) prouvent la nécessité de l'existence de deux lois de comportement mécanique reliant le tenseur des contraintes aux autres grandeurs :

$$\frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = \underbrace{\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)}_{-p} + f_2(\dot{T}, \operatorname{tr} \mathbf{D}, \operatorname{dev} \mathbf{D}, \operatorname{grad}_E T, \dots) \quad (6.10)$$

$$\operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_3(\dot{T}, \operatorname{tr} \mathbf{D}, \operatorname{dev} \mathbf{D}, \operatorname{grad}_E T, \dots) \quad (6.11)$$

L'équation (6.10) définit la partie sphérique du tenseur des contraintes de Cauchy, et l'équation (6.11) définit sa partie déviatorique.

<sup>(2)</sup> Cette relation est parfois appelée « postulat » de Helmholtz. En fait il est inutile de la postuler : elle est une conséquence du second principe de la thermodynamique.

- **Définition 6.2 – Pression thermodynamique.** On appelle pression thermodynamique d'un fluide simple la fonction d'état définie par :

$$p(T, \rho) = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = \rho^2 \partial_\rho f_\psi \quad (6.12)$$

- **Définition 6.3 – Pression mécanique.** On appelle pression mécanique l'opposé du tiers de la trace du tenseur des contraintes. Pour un fluide simple, elle vaut :

$$p_m = -\frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = p - f_2$$

- **Théorème 6.4 – Comportement mécanique d'un fluide simple.** La loi de comportement mécanique d'un fluide simple est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{sph} \boldsymbol{\sigma} + \text{dev} \boldsymbol{\sigma} = (-p + f_2) \mathbf{G} + \mathbf{f}_3$$

**Démonstration** – La décomposition en partie sphérique et déviatorique étant unique, on peut rassembler les deux lois (6.10) et (6.11) en une seule loi tensorielle.

Il reste à *choisir* les fonctions  $f_2(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$  et  $\mathbf{f}_3(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$  de telle façon que l'inégalité du second principe soit respectée. Des choix possibles sont présentés plus loin en section 6.3 [p. 79].

### 6.2.3 Loi de comportement thermique

La dernière équation (6.6) page 76 affirme la nécessité d'une loi de comportement thermique, encore appelée loi de conduction thermique :

$$\mathbf{q} = -T \mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

Il reste à *choisir* la fonction  $\mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$  de telle façon que l'inégalité du second principe soit respectée. Des choix possibles sont présentés plus loin en section 6.3 [p. 79].

**Remarque 6.2** – La nécessité de l'existence d'une loi de conduction thermique a déjà été déduite de la condition  $\Phi_{th} \geq 0$  imposée par le second principe de la thermodynamique [section 5.7 p. 71].

### 6.2.4 Synthèse

Compte-tenu de la relation de Helmholtz [éq. (6.8) p. 77], l'inégalité du second principe de la thermodynamique pour les fluides simples se réduit à :

$$\Phi = \underbrace{f_2 \text{tr} \mathbf{D} + \mathbf{f}_3 : \text{dev} \mathbf{D}}_{\Phi_{in}} + \underbrace{\mathbf{f}_4 \cdot \text{grad}_E T}_{\Phi_{th} \geq 0} \geq 0, \quad \forall \text{tr} \mathbf{D} \forall \text{dev} \mathbf{D} \forall \text{grad}_E T$$

Hormis leur existence, le second principe ne nous apprend rien sur les fonctions  $f_2$ ,  $\mathbf{f}_3$  et  $\mathbf{f}_4$  qui définissent la loi de comportement mécanique et le loi de comportement thermique<sup>(3)</sup>. Il faut les *choisir* telles que l'inégalité ci-dessus soit respectée dans toute évolution.

<sup>(3)</sup> Ces deux lois de comportement ne sont pas de simples lois de fermeture pour que « le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues », le second principe de la thermodynamique prouve leur nécessité.

### 6.3 Fluides simples newtoniens

Pour continuer la modélisation d'un fluide simple, il faut *choisir* les trois fonctions  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  de telle manière que le second principe de la thermodynamique soit satisfait en toutes situations, c'est-à-dire  $\forall T \forall \mathbf{D} \forall \mathbf{grad}_E T$ . Pour définir les *fluides newtoniens*, on fait les choix suivants :

1.  $f_2 = k(T, \rho) \operatorname{tr} \mathbf{D}$  avec  $k(T, \rho) \geq 0$ . Le coefficient  $k(T, \rho) \geq 0$  est appelé *viscosité de volume*.
2.  $f_3 = 2\mu(T, \rho) \operatorname{dev} \mathbf{D}$  avec  $\mu(T, \rho) \geq 0$ . Le coefficient  $\mu(T, \rho) \geq 0$  est appelé *viscosité de cisaillement* ou encore *viscosité dynamique* <sup>(4)</sup>.
3.  $f_4 = \frac{\alpha(T, \rho)}{T} \mathbf{grad}_E T$  avec  $\alpha(T, \rho) \geq 0$ . Avec ce choix, on retrouve la loi de Fourier linéaire isotrope [éq. (5.14) p. 71]. Le coefficient  $\alpha(T, \rho)$  est appelé *coefficient de conductibilité thermique*.

**Remarque 6.3** – Bien souvent, les fonctions  $k$ ,  $\mu$  et  $\alpha$  sont choisies constantes, c'est-à-dire indépendantes de l'état actuel, ou bien seulement fonctions de la température.

Comme on peut le constater, ces choix simples ne sont pas nécessaires mais ils sont suffisants pour que l'inégalité du second principe de la thermodynamique soit respectée en toutes situations. En effet, avec ces choix, la dissipation est la somme de trois termes non négatifs séparément :

$$\Phi = \underbrace{k(T, \rho) (\operatorname{tr} \mathbf{D})^2 + 2\mu(T, \rho) \|\operatorname{dev} \mathbf{D}\|^2}_{\Phi_{int}} + \underbrace{\alpha(T, \rho) T^{-1} \|\mathbf{grad} T\|^2}_{\Phi_{th}} \geq 0$$

Avec ces choix, les lois de comportement mécanique (6.10) et (6.11) [p. 77] d'un fluide newtonien sont :

$$\frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = \underbrace{\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)}_{-p} + k \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad ; \quad \operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D}$$

que l'on peut rassembler en une seule équation tensorielle. On obtient la *loi de comportement mécanique* des fluides newtoniens :

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{sph} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma} = (-p + k \operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D} = 2\mu \mathbf{D} + \left( -p + \left( k - \frac{2\mu}{3} \right) \operatorname{tr} \mathbf{D} \right) \mathbf{G} \quad (6.13)$$

où la pression thermodynamique  $p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)$  est une fonction d'état caractéristique du fluide étudié.

**Remarque 6.4** – La pression mécanique  $-\frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3}$  et la pression thermodynamique  $p$  d'un fluide newtonien sont égales quand la viscosité de volume  $k$  est nulle (fluides de Stokes) ou pour des mouvements particuliers tels que le taux de dilatation volumique est nul <sup>(5)</sup> ( $d_v = \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$ ).

La loi de comportement thermique choisie est celle de Fourier :  $\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T$ .

Les choix faits précédemment pour les fonctions  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  sont parmi les plus simples que l'on puisse faire pour assurer le respect du second principe de la thermodynamique. Le lecteur vérifiera aisément avec les formules de changement d'observateur des deux tenseurs objectifs  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  [éq.(3.43) p. 44], que la loi de comportement mécanique des fluides newtoniens est bien universelle.

<sup>(4)</sup> On devrait l'appeler viscosité isovolume.

<sup>(5)</sup> C'est notamment le cas en statique des fluides ou si le fluide est supposé parfaitement incompressible ( $\dot{\rho} = 0$ ).

**Remarque 6.5** – On peut construire des lois de comportement non linéaires de fluides simples si les fonctions scalaires non négatives  $k$ ,  $\mu$  et  $\alpha$  ont une liste d'arguments plus complète, comprenant notamment le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$ . Les fonctions scalaires  $k$ ,  $\mu$  et  $\alpha$  doivent être des fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels pour assurer l'universalité de la loi de comportement mécanique. Ces fluides sont dits rhéofluidifiants ou bien rhéoépaississants.

Pour compléter la modélisation du fluide simple, il faut préciser l'expression d'une des fonctions d'état introduites ( $p$ ,  $f_e$ ,  $f_s$  ou  $f_\psi$ ) en fonction des variables d'état. Les autres seront déterminées par leur définition et par la relation de Helmholtz. Les sections qui suivent donnent quelques exemples de fluides simples.

#### 6.4 Un exemple de fluide simple : les gaz parfaits

Plutôt que de se donner une des fonctions d'état  $f_e$ ,  $f_s$  ou  $f_\psi$ , les gaz parfaits sont traditionnellement définis en donnant l'expression de fonction d'état *pression thermodynamique*  $p(T, \rho)$  en fonction des variables d'état  $T$  et  $\rho$ . Cette expression est appelée *loi de Mariotte*<sup>(6)</sup> :

$$p = r \rho T$$

où  $r$  est une constante caractéristique du gaz parfait. La définition de la pression thermodynamique  $p$  [éq. (6.12) p.78] et la relation de Helmholtz [éq. (6.8) p. 77] conduisent au système différentiel suivant, qui permet de déterminer les deux fonctions d'état  $f_e$  et  $f_s$  :

$$-\rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e \right) = r \rho T \quad ; \quad T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0$$

La solution générale de ce système différentiel est :

$$f_s = -r \ln \rho + f_1(T) \quad ; \quad f_e = \int_{T_0}^T T f_1'(T) dT + C$$

**Remarque 6.6** – Noter que l'on retrouve ici un résultat classique, parfois postulé : l'énergie interne massique d'un gaz parfait n'est fonction que de la température.

Les inconnues  $f_1(T)$  et  $C$  peuvent être déterminées par des mesures expérimentales, par exemple la mesure de la capacité calorifique  $C_v(T)$  à  $\rho$  constant ( $\dot{\rho} = 0$ ), habituellement appelée à *volume constant*. Elle s'écrit [éq. (5.17) p. 72] :

$$C_v(T) = T \partial_T f_s + T \partial_\rho f_s \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = T f_1'(T) \quad \Rightarrow \quad f_1(T) = \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C'$$

Finalement, les deux fonctions d'état  $f_e$  et  $f_s$  d'un gaz parfait sont :

$$f_s = -r \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C' \quad ; \quad f_e = \int_{T_0}^T C_v(T) dT + C$$

L'énergie interne massique et l'entropie massique d'un gaz parfait sont définies à une constante près, ce qui est sans importance car seules leurs dérivées interviennent dans les lois de comportement et dans la dissipation. On peut toujours choisir un état de référence  $(T_0, \rho_0)$  dans lequel elles sont déclarées nulles ou égales à une valeur de référence  $s_0^m$  et  $e_0^m$ .

<sup>(6)</sup> Cette loi macroscopique peut aussi bien être considérée comme d'origine expérimentale ou comme suggérée par un modèle issu de la physique statistique.

L'une quelconque de ces fonctions d'état peut être prise comme définition des gaz parfaits, la relation de Helmholtz et la définition de la pression thermodynamique permettent de retrouver la loi de Mariotte.

**Relation de Mayer** – Pour les gaz, il est possible de définir une chaleur massique à pression thermodynamique constante, notée  $C_p$ . Pour un gaz parfait :

$$p = r\rho T \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = rT\dot{\rho} + r\rho\dot{T}$$

Dans une évolution à pression thermodynamique constante, on a donc :

$$\dot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\bar{T}} = -\frac{\rho}{\bar{T}}$$

À pression constante, la capacité calorifique [éq. (5.17) p. 72] s'écrit :

$$C_p = T \partial_T f_s + \partial_\rho f_s \frac{\dot{\rho}}{\bar{T}} = C_v + T \frac{r}{\rho} \frac{\rho}{\bar{T}} = C_v + r$$

ce qui est connu sous le nom de *relation de Mayer*.

En conclusion, les gaz parfaits sont les fluides simples tels que la pression thermodynamique satisfait à la loi de Mariotte. Ils sont complètement caractérisés par la mesure de la constante  $r$ , la mesure d'une capacité calorifique ( $C_p(T)$  ou  $C_v(T)$ ) et la donnée des trois fonctions de dissipation  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  (pour les gaz parfaits newtoniens, ce sont la viscosité de volume  $k$ , la viscosité de cisaillement  $\mu$  et la conductivité thermique  $\alpha$ ). Il est possible de construire un modèle de gaz plus proche des gaz réels en suivant la même démarche, mais en remplaçant la loi de Mariotte par celle de Van der Waals.

## 6.5 Liquides idéaux

Les liquides idéaux sont des fluides simples parfaitement incompressibles ( $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0$ ). La variable d'état  $\rho$  est donc une constante.

On peut construire un modèle de liquide idéal (newtonien ou non) en posant que la pression thermodynamique de ce fluide est indépendante des variables d'état  $T$  et  $\rho$  :

$$p(T, \rho) = p \tag{6.14}$$

Un tel liquide est incompressible ( $\partial_\rho p = 0$ ) et indilatable ( $\partial_T p = 0$ , pas de variation de pression dans une évolution de température à volume constant).

La définition de la pression thermodynamique  $p$  [éq. (6.12) p. 78] et la relation de Helmholtz [éq. (6.8) p. 77] conduisent au système différentiel :

$$-\rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e \right) = p \quad ; \quad T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0$$

dont la solution générale est :

$$f_s = \int_{T_0}^T \frac{g'(T)}{T} dT + C_1 \quad ; \quad f_e = -\frac{p}{\rho_0} + g(T)$$

La fonction  $g(T)$  peut se déterminer par une mesure de capacité calorifique (nécessairement à volume constant car  $\dot{\rho} = 0$ ) :

$$C_v(T) = T \frac{df_s}{dT} = g'(T) \quad [\text{éq. (5.17) p. 72}]$$

On obtient les deux fonctions d'état  $f_e$  et  $f_s$  du liquide idéal :

$$f_s = \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C_1 \quad ; \quad f_e = -\frac{p}{\rho_0} + \int_{T_0}^T C_v(T) dT + C_2$$

**Remarques 6.7** – Dans un liquide idéal, la pression thermodynamique  $p$  en une particule n'est pas fonction des variables d'état par définition [éq. (6.14) p. 81]. Néanmoins, dans un milieu continu, la pression est fonction de la particule et du temps :  $p(P, t)$  est un champ matériel.

La conservation de la masse [th. 2.2 p. 20] pour un liquide idéal s'écrit :

$$d_v = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v} = 0$$

La loi de comportement mécanique d'un liquide idéal [éq. (6.13) p. 79] se réduit à :

$$\boldsymbol{\sigma}(P, t) = -p(P, t) \mathbf{G} + 2\mu(T) \text{dev} \mathbf{D}(P, t)$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier avec un peu de calcul tensoriel que cette loi de comportement mécanique conduit à l'équation de mouvement suivante :

$$\begin{aligned} \rho_0 \boldsymbol{\gamma} &= \rho_0 f^m - \mathbf{grad}_E p + \mu(T) \Delta_E \mathbf{v} + 2 \text{dev} \mathbf{D} \cdot \mathbf{grad}_E \mu(T(P, t)) \\ \rho_0 \dot{\mathbf{v}} &= \rho_0 f^m - \mathbf{grad}_E p + \mu(T) \Delta_E \mathbf{v} + 2\mu'(T) \text{devsym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_E T \end{aligned}$$

De même, si on choisit la loi de Fourier [éq. (5.14) p. 71] comme loi de comportement thermique, on laisse le soin au lecteur d'établir que l'équation de la chaleur [éq. (4.7) p. 58] devient :

$$-\dot{p} + \int_{T_0}^T C'_v(T) \dot{T} dT = 2\mu(T) \text{devsym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \text{devsym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} + r_{ext}^v + \alpha \Delta_E T$$

**Remarques 6.8** – Comme on peut le constater, l'équation de continuité (conservation de la masse), l'équation de mouvement (équation de la mécanique) et l'équation de la chaleur (conservation de l'énergie) sont des équations différentielles couplées dont les inconnues sont les champs de pression, de vitesse et de température. Dans les cours élémentaires de mécanique des fluides incompressibles, afin de simplifier les équations en espérant obtenir des solutions analytiques, on suppose que la viscosité et la capacité calorifique à volume constant ne dépendent pas de la température :  $\mu'(T) = 0$  et  $C'_v(T) = 0$  et qu'il n'y a pas de source de chaleur par rayonnement :  $r_{ext}^v = 0$ . Dans ce cas, il reste :

$$\begin{aligned} \text{div}_E \mathbf{v} &= 0 && \text{(conservation de la masse)} \\ \rho_0 \dot{\mathbf{v}} &= \rho_0 f^m - \mathbf{grad}_E p + \mu_0 \Delta_E \mathbf{v} && \text{(principe fondamental de la mécanique)} \\ -\dot{p} &= 2\mu_0 \text{devsym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \text{devsym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} + \alpha \Delta_E T && \text{(conservation de l'énergie)} \end{aligned}$$

Comme on peut le constater, ces hypothèses sont insuffisantes pour découpler l'équation de la chaleur. Pour y parvenir, on dit souvent qu'on « néglige les phénomènes thermiques », afin d'ignorer délibérément le champ de températures inconnu et l'équation de la chaleur. Dans ce cas, on arrive à trouver quelques solutions analytiques stationnaires<sup>(7)</sup> particulières des deux premières équations dont les champs inconnus sont la pression  $p(P, t)$  et la vitesse  $\mathbf{v}(P, t)$ , mais qui violent délibérément le principe de la conservation de l'énergie.

Le but de ces remarques n'est pas de dénigrer les quelques solutions analytiques stationnaires qui sont présentées dans les cours élémentaires de mécanique des fluides incompressibles et qui sont d'un indéniable intérêt pédagogique, mais seulement de souligner leur coût en hypothèses simplificatrices, coût qui n'est pas toujours mis suffisamment en évidence pour susciter la circonspection idoine.

<sup>(7)</sup> C'est-à-dire  $\partial_t \boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{0}$ . On a donc  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_E$  et  $\dot{p} = \mathbf{grad}_E p \cdot \mathbf{v}_E$ .

## 6.6 Fluides simples compressibles et dilatables

À titre d'illustration, on se propose de construire un modèle de fluide simple (les variables d'état indépendantes sont  $T$  et  $\rho$ ) compressible et dilatable.

### 6.6.1 Compressibilité et dilatabilité

On choisit un « comportement partiel » de la forme suivante :

$$d_v = -\chi_T(T, \rho) \dot{p} + \alpha_p(T, \rho) \dot{T} \quad (6.15)$$

- $d_v$  est le taux de dilatation volumique ;
- $p$  est la pression thermodynamique ;
- $\chi_T > 0$  est la compressibilité à température constante<sup>(8)</sup> (unité : Pa<sup>-1</sup>) ;
- $\alpha_p$  est la dilatabilité à pression constante (unité : K<sup>-1</sup>).

La variation relative de volume dépend de la variation de pression (compressibilité) et de la variation de température (dilatabilité).

**Remarques 6.9** – Les notions de compressibilité isotherme  $\chi_T$  et de dilatabilité isobare  $\alpha_p$  sont couramment employées dans les cours de thermodynamique. Avec l'écriture différentielle familière aux thermodynamiciens, l'équation (6.15) s'écrit :

$$\frac{dv}{v} = -\chi_T dp + \alpha_p dT \quad \text{où } v = \rho^{-1} \text{ est le volume massique.}$$

Pour  $\chi_T = T^{-1}$  et  $\alpha_p = p^{-1}$  on retrouve le « comportement partiel » des gaz parfaits (la loi de Mariotte) et pour  $\chi_T = 0$  et  $\alpha_p = 0$  on retrouve le « comportement partiel » du liquide idéal (incompressible et indilatable).

Par ailleurs, le « comportement partiel » présenté dans l'équation (6.15) est effectivement une description incomplète du comportement : il ne régle que pression thermodynamique  $p$  du fluide [déf. 6.2 p. 78] (et seulement par sa dérivée particulière) . On peut récrire cette loi sous la forme :

$$\dot{p}(T, \rho) = -\frac{1}{\chi_T(T, \rho)} (d_v - \alpha_p(T, \rho) \dot{T}) = \frac{1}{\chi_T(T, \rho)} \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \alpha_p(T, \rho) \dot{T} \right) \quad [\text{éq. (2.4) p. 20}]$$

À supposer que cette équation différentielle en  $p$  ait une solution, la connaissance de la pression thermodynamique est loin d'être suffisante pour connaître le comportement mécanique, c'est-à-dire le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  [éq. (6.13) p. 79] ; il faut préciser en plus la viscosité de volume  $k(T, \rho)$  et la viscosité isovolume  $\mu(T, \rho)$ . Dans leurs raisonnements, les thermodynamiciens ont parfois tendance à affirmer que l'on ne peut fournir du travail à un domaine que par l'intermédiaire de forces de pression (contraintes normales aux frontières) et la pression mécanique [déf. 6.3 p. 78] est le plus souvent confondue avec la pression thermodynamique (pas de viscosité de volume). Lorsque les thermodynamiciens veulent tenir compte de la viscosité isovolume, ce travail est appelé « travail de transvasement ».

La conservation de la masse [éq. (2.5) p. 20] et la définition de la pression thermodynamique [éq. (6.12) p.78] s'écrivent :

$$d_v = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad ; \quad p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = \rho^2 \partial_\rho f_\psi$$

<sup>(8)</sup> On rappelle qu'il faut en général des échanges thermiques pour maintenir la température constante pendant une compression ou une détente isothermes.

où pour abrégé les écritures on a introduit l'énergie libre massique de Helmholtz  $\psi^m = e^m - T s^m$ . L'équation de comportement (6.15) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -\chi_T (\rho^2 \partial_\rho f_\psi) \cdot + \alpha_p \dot{T} \\ &= -\chi_T (2\rho \dot{\rho} \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi \dot{\rho} + \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi \dot{T}) + \alpha_p \dot{T} \\ 0 &= \dot{\rho} \left( \frac{1}{\rho} - \chi_T (2\rho \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi) \right) + \dot{T} \left( -\chi_T \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi + \alpha_p \right) \end{aligned}$$

Cette loi devant être vraie pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état, c'est-à-dire  $\forall \dot{T}$  et  $\forall \dot{\rho}$ , et les termes entre parenthèses étant des fonctions d'état (c'est-à-dire seulement fonction de  $T$  et de  $\rho$ ), on en déduit les deux équations différentielles :

$$0 = \frac{1}{\rho} - \chi_T (2\rho \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi) \quad ; \quad 0 = -\chi_T \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi + \alpha_p$$

**Remarque 6.10** – La seconde équation ci-dessus montre que si un fluide est incompressible ( $\chi_T = 0$ ) alors il est nécessairement indilatable ( $\alpha_p = 0$ ). Un fluide supposé incompressible et dilatable serait thermodynamiquement inadmissible car ses fonctions d'état  $\psi^m$ ,  $e^m$  et  $s^m$  n'existent pas.

L'énergie libre massique de Helmholtz est donc solution des deux équations différentielles :

$$2\partial_\rho f_\psi + \rho \partial_{\rho\rho} f_\psi = \frac{1}{\rho^2 \chi_T} \quad ; \quad \partial_{\rho T} f_\psi = \frac{\alpha_p}{\rho^2 \chi_T} \quad (6.16)$$

où les deux fonctions  $\chi_T(T, \rho)$  et  $\alpha_p(T, \rho)$  peuvent être identifiées par des mesures expérimentales de compression à température constante et de dilatation volumique à pression constante. En dérivant par rapport à  $T$  la première équation (6.16) [p. 84] et en tenant compte la seconde équation (6.16) [p. 84], on en déduit une équation différentielle que doit satisfaire la fonction d'état  $f_\psi$  :

$$\frac{2\alpha_p}{\rho^2 \chi_T} + \rho \partial_{\rho\rho T} f_\psi = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial_T \chi_T}{\chi_T^2} \Leftrightarrow \partial_{\rho\rho T} f_\psi = -\frac{1}{\rho^3 \chi_T} \left( \frac{\partial_T \chi_T}{\chi_T} + 2\alpha_p \right) \quad (6.17)$$

dont la solution doit satisfaire les deux conditions (6.16) [p. 84].

### 6.6.2 Exemple de modèle à compressibilité et dilatabilité constantes

- **Hypothèse 6.5** – Afin d'obtenir un modèle simple et facile à identifier, on suppose que la compressibilité à température constante  $\chi_T$  et la dilatation thermique à pression constante  $\alpha_p$  sont des constantes :  $\chi_T(T, \rho) = \chi_0$  et  $\alpha_p(T, \rho) = \alpha_0$ , sous réserve que sous ces hypothèses une fonction  $f_\psi$  existe.

**Remarque 6.11** – Dans les liquides et les gaz, la compressibilité à température constante  $\chi_T$  est toujours non négative (le volume diminue toujours avec la pression). En revanche, la dilatation thermique à pression constante n'est pas toujours non négative. Par exemple, on sait que pour l'eau à la pression atmosphérique et à des températures entre 273,15 K et 277,15 K, le coefficient de dilatation à pression constante est négatif, nul à 277,15 K, puis positif pour des températures supérieures. On ne peut donc pas modéliser le comportement de l'eau avec l'approximation  $\alpha_p = \alpha_0$ , sauf loin de cette singularité.

**Remarque 6.12** – La méthode employée dans ce chapitre pour construire un modèle de comportement, qui consiste à se fixer *a priori* un comportement du type de l'équation (6.15) [p. 83] avec des fonctions  $\chi_T(T, \rho)$  et  $\alpha_p(T, \rho)$  arbitraires est imprudente car il n'est pas certain qu'avec ces choix arbitraires, le système d'équations différentielles (6.16) [p. 84] ait une solution. S'il n'existe pas de fonction d'état réelle énergie libre massique de Helmholtz solution du système différentiel (6.16) [p. 84], le modèle de comportement proposé est thermodynamiquement inadmissible.

Sous ces hypothèses, la solution générale des équations différentielles (6.16) [p.84] est <sup>(9)</sup> :

$$f_\psi = -\frac{1}{\rho \chi_0} (\ln \rho + \alpha_0 T + 1) - \frac{C}{\rho} + g(T) \quad (6.18)$$

La pression thermodynamique [éq. (6.12) p. 78] est alors :

$$p = \frac{1}{\chi_0} (\ln \rho + \alpha_0 T) + C$$

Pour un état de référence  $\rho = \rho_0$  et  $T = T_0$ , on pose  $p = p_0$ . La constante  $C$  est alors :

$$C = p_0 - \frac{1}{\chi_0} (\ln \rho_0 + \alpha_0 T_0)$$

Finalement, la pression thermodynamique est :

$$p = \frac{1}{\chi_0} \left( \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0 (T - T_0) \right) + p_0$$

**Distinction liquide/gaz 6.13** – La distinction entre liquide et gaz est souvent exprimée en disant qu'« un gaz occupe tout le volume dont il dispose », contrairement aux liquides. Cette définition est difficilement exploitable mathématiquement. L'auteur propose de faire la distinction, pour les modèles de comportement, en observant la limite de la masse volumique quand la pression tend vers 0 : pour les gaz, la masse volumique tend vers 0 (le vide) et pour les liquides elle tend vers une limite finie non nulle. Cette distinction est évidemment théorique car chacun sait qu'en dessous de la pression de vapeur saturante tout liquide se vaporise et le modèle du milieu continu change (notamment ses coefficients  $\chi_T$ ,  $\alpha_p$  et  $C_v$ ) ; le comportement de la vapeur n'est plus représenté par les mêmes fonctions d'état. La validité de tout modèle de liquide est donc limitée par  $p > p_{sat}(T)$ . Néanmoins, l'étude de cette limite en supposant qu'il n'y a pas vaporisation est instructive.

Dans le cas du modèle simple qui a été développé ici ( $\chi_T(T, \rho) = \chi_0$  et  $\alpha_p(T, \rho) = \alpha_0$ ), lorsque la pression thermodynamique est nulle ( $p = 0$ ), il vient :

$$\rho_{(p=0)} = \rho_0 e^{-\alpha_0 (T - T_0) - \chi_0 p_0} \quad \text{où } p_0 \text{ est la pression à un état de référence } (T_0, \rho_0).$$

La valeur  $\rho_{(p=0)}$  n'est jamais nulle quelle que soit la température  $0 < T < \infty$ . Du point de vue du critère proposé dans cette remarque, le modèle construit ici est un modèle de liquide.

L'énergie libre massique de Helmholtz est donc [éq. (6.18)] :

$$f_\psi = -\frac{1}{\rho \chi_0} \left( 1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0 (T - T_0) \right) - \frac{p_0}{\rho} + g(T)$$

L'entropie massique se déduit de la relation de Helmholtz [éq. (6.9) p. 77] :

$$f_s = -\partial_T f_\psi = \frac{\alpha_0}{\rho \chi_0} - g'(T)$$

<sup>(9)</sup> Pour la trouver, il faut résoudre l'équation dérivée (6.17) et tenir compte des conditions (6.16).

L'énergie interne massique se déduit de la définition de l'énergie libre de Helmholtz :

$$f_e = f_\psi + T f_s = -\frac{1}{\rho \chi_0} \left(1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha_0 T_0\right) - \frac{p_0}{\rho} + g(T) - T g'(T)$$

La fonction  $g(T)$  se détermine avec une mesure de la capacité calorifique [éq. (5.17) p. 72]  $C_v(T)$  à volume constant ( $\dot{\rho} = 0$ ) :

$$C_v(T) = T \partial_T f_s = -T g''(T) \quad \Rightarrow \quad g(T) = -\int_{T_0}^T \left( \int_{T_0}^T \frac{C_v}{T} dT \right) dT + C_1 T + C_2$$

**Remarque 6.14** – On constate que dans ce modèle simplifié ( $\chi_T(T, \rho) = \chi_0$  et  $\alpha_p(T, \rho) = \alpha_0$ ), la capacité calorifique à volume constant  $C_v$  n'est fonction que de la température. Si l'expérience le contredit, il faut remettre en question les hypothèses 6.5 [p. 84].

- **Hypothèse 6.6** – Pour simplifier le modèle, on suppose de plus que la capacité calorifique à volume constant est indépendante de la température :

$$C_v(T) = C_{v0}$$

Sous cette hypothèse, la fonction  $g(T)$  est solution de l'équation différentielle :

$$g' = -C_{v0} \ln T + C_1 \quad \text{dont la solution est : } g = -C_{v0}(T \ln T - T) + C_1 T + C_2$$

Finalement, sous les hypothèses  $\chi_T = \chi_0$ ,  $\alpha_p = \alpha_0$  et  $C_v = C_{v0}$ , et en posant  $f_s(T_0, \rho_0) = s_0$  et  $f_e(T_0, \rho_0) = e_0$  pour déterminer les constantes  $C_1$  et  $C_2$ , les fonctions d'état sont :

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{\alpha_0}{\rho_0 \chi_0} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) + C_{v0} \ln \frac{T}{T_0} + s_0 \\ f_e &= -\frac{1}{\rho \chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \left( \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0 \chi_0} - \frac{T_0 \alpha_0}{\rho_0 \chi_0} \right) + C_{v0} (T - T_0) + e_0 \\ p &= \frac{1}{\chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\alpha_0}{\chi_0} (T - T_0) + p_0 \\ f_\psi &= -\frac{1}{\rho \chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \left( \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0 \chi_0} + \frac{\alpha_0 (T - T_0)}{\rho_0 \chi_0} \right) + C_{v0} \left( T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right) + e_0 - T s_0 \end{aligned}$$

Ce modèle est complètement identifié par les mesures de  $\chi_0$ ,  $\alpha_0$  et  $C_{v0}$ .

**Relation de Mayer pour ce modèle** – Dans une évolution à pression constante, le comportement choisi (6.15) [p. 83] implique :

$$-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \alpha_0 \dot{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = -\rho \alpha_0$$

La capacité calorifique à pression constante [(5.17) p. 72] est donc :

$$C_p = T \partial_T f_s + T \partial_\rho f_s \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = C_v + T \partial_\rho f_s \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = C_v + \frac{\alpha_0^2 T}{\chi_0 \rho} \quad \Rightarrow \quad C_p - C_v = \frac{\alpha_0^2 T}{\chi_0 \rho}$$

On peut appeler cette équation « relation de Mayer » pour ce modèle de liquide [remarque 6.13 p. 85] compressible dilatable.

La capacité calorifique à pression constante  $C_p$  est plus aisée à mesurer expérimentalement. Sous les hypothèses de ce modèle (notamment  $C_v(T) = C_{v0}$ ), la capacité calorifique à pression constante  $C_p$  est nécessairement une fonction de la température actuelle et de la masse volumique actuelle. Si l'expérience le contredit, il faut revoir les hypothèses simplificatrices 6.5 [p. 84] en donnant des lois  $\chi_T(T, \rho)$  et  $\alpha_p(T, \rho)$  plus réalistes suggérées par des mesures, puis reprendre l'intégration de l'équation différentielle (6.17) [p. 84] avec les conditions (6.16) [p. 84].

## 6.7 En bref ...

Les fluides simples sont les fluides dont les deux variables d'état indépendantes sont la température absolue  $T$  (imposée par le second principe de la thermodynamique) et la masse volumique  $\rho$ .

Le second principe de la thermodynamique appliqué aux fluides simples implique la relation de Helmholtz qui est une relation entre les deux fonctions d'état *énergie interne massique*  $e^m$  et *l'entropie massique*  $s^m$  dont l'existence est postulée par les deux principes de la thermodynamique. Les fluides simples sont donc thermodynamiquement déterminés par une seule fonction d'état (ou toute combinaison de ces deux fonctions d'état et de variables d'état telles que l'énergie libre de Helmholtz ou la pression thermodynamique).

Pour compléter le comportement du modèle, il faut ajouter le choix des fonctions dissipatives (viscosités de volume et isovolume) et choisir le comportement thermique.

Les *fluides newtoniens* sont des fluides simples dont la loi de comportement mécanique est :

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + k \operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D} = 2\mu \mathbf{D} + \left( -p + \left( k - \frac{2\mu}{3} \right) \operatorname{tr} \mathbf{D} \right) \mathbf{G}$$

où

—  $p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)$  est une fonction d'état caractéristique du fluide simple appelée la pression thermodynamique ;

—  $k(T, \rho)$  est la viscosité de volume, souvent considérée comme une constante ou seulement fonction de la température ou même parfois nulle (fluides de Stokes) ;

—  $\mu(T, \rho)$  est la viscosité de cisaillement ou viscosité dynamique, souvent considérée comme une constante ou seulement fonction de la température ou même parfois nulle (fluides non visqueux) ;

—  $\mathbf{D}$  est le tenseur des taux de déformation.

La loi de comportement thermique (loi de conduction thermique) choisie pour les fluides newtoniens est généralement la loi de Fourier.

On a construit quelques modèles de fluides simples thermodynamiquement admissibles avec des fonctions d'état mathématiquement simples et physiquement motivées.



# Synthèse

Dans les chapitres de ce cours, on a exprimé les conséquences des quatre principes fondamentaux de la physique classique sur les milieux continus, sous forme globale pour des domaines matériels ou géométriques, ainsi que sous une forme locale.

Les formes locales du principe de la conservation de la masse, du principe fondamental de la mécanique et du principe de la conservation de l'énergie sont des équations différentielles aux dérivées partielles, qui doivent être satisfaites en tout point et à tout instant de l'évolution de tout milieu continu.

En revanche, l'inéquation du second principe de la thermodynamique est automatiquement satisfaite dès lors que l'on utilise un modèle de milieu continu thermodynamiquement admissible. Cette inéquation disparaît donc dans la résolution d'un problème de thermomécanique des milieux continus. Cette inéquation n'est utile que lorsque l'on cherche à construire des nouveaux modèles, pour qu'ils ne soient pas thermodynamiquement absurdes.

## 7.1 Le problème de mécanique des milieux continus

Les équations restantes (les trois premiers principes) sont évidemment insuffisantes pour déterminer l'évolution d'un domaine de milieu continu particulier (acier, eau, air, etc) sous l'action de sollicitations extérieures. Il faut les compléter par :

1. Un modèle de comportement du milieu continu non seulement thermodynamiquement admissible, mais qui reflète aussi correctement le comportement réel de la matière. Ceci suppose :
  - (a) le choix d'une liste de variables d'état objectives indépendantes (ou la liste des variables scalaires réduites) ;
  - (b) le choix de lois de comportement mécanique et thermique satisfaisant le second principe de la thermodynamique ;
  - (c) l'expression des deux fonctions d'état <sup>(1)</sup> énergie interne massique ( $f_e$  ou  $\bar{f}_e$ ) et entropie massique ( $f_s$  ou  $\bar{f}_s$ ) <sup>(2)</sup> en fonction de ces variables d'état (tensorielles ou réduites) reflétant correctement le comportement thermodynamique de la matière (capacités calorifiques, dilatation...).
2. Une description des sollicitations extérieures sur le domaine étudié : ce sont les *conditions aux limites* (mécaniques et/ou thermiques) et les *conditions initiales* (mécaniques et/ou thermiques), ainsi que les actions à distance (mécaniques et/ou thermiques) qui apparaissent dans les équations locales de la mécanique (équation de mouvement) et de l'énergie (équation de la chaleur).

<sup>(1)</sup> Ou de l'une des deux si la relation de Helmholtz est vraie.

<sup>(2)</sup> En thermomécanique des solides déformables, on préfère souvent le couple de fonctions d'état  $(\psi^m, s^m)$  au couple de fonctions d'état  $(e^m, s^m)$ . On passe de l'un à l'autre par la relation  $\psi^m = e^m - T s^m$ .

— Les conditions aux limites mécaniques sont souvent des positions (ou des déplacements) ou des vitesses imposées aux frontières ou encore des forces surfaciques de contact imposées aux frontières :

$$\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P') = \mathbf{f}_0^s(P', t)$$

— Les conditions aux limites thermiques sont souvent des températures imposées aux frontières ou des puissances calorifiques surfaciques imposées aux frontières :

$$\mathbf{q}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t = q_0^s(P', t)$$

— On peut aussi envisager des conditions aux limites plus compliquées comme des relations entre forces appliquées et positions ou encore entre température de bord et puissance calorifique surfacique transmise à travers la frontière.

Ces conditions aux limites doivent modéliser de façon aussi réaliste que possible les actions de l'extérieur sur la frontière du domaine étudié. Elles sont donc essentielles pour la qualité de la solution.

L'ensemble de ces équations étant posé, la description du problème est complète. Les champs matériels à déterminer sont : les champs des variables d'état, des fonctions d'état, des vitesses, des positions (ou des déplacements), des contraintes, des déformations, des taux de déformation, etc, pour toute particule et à tout instant. On peut aussi bien rechercher la description de Lagrange ou la description d'Euler de ces champs matériels, les équations différentielles ont été données dans les deux cas.

En mécanique des milieux continus (solides ou fluides), il arrive bien souvent que l'on ne recherche qu'une solution stationnaire (si elle existe). Dans ce cas, le temps disparaît des équations différentielles et le problème s'en trouve quelque peu simplifié.

## 7.2 La résolution

La résolution analytique d'un système d'équations aussi complexe est rarement possible sauf dans quelques problèmes académiques extrêmement simplistes (mais pédagogiquement intéressants). Les causes des difficultés de résolution sont :

- la complexité du système différentiel (équations couplées, le plus souvent non linéaires) ;
- la non unicité éventuelle des solutions, leur instabilité éventuelle, la présence éventuelle de bifurcations (en nombre fini voire infini) ;
- la complexité de la forme du domaine étudié ;
- la complexité des conditions aux limites modélisant correctement les interactions mécaniques et thermiques avec l'extérieur du domaine.

Pour la plupart des problèmes industriels, le recours à une méthode de résolution numérique est incontournable pour la résolution du problème exposé en section 7.1. Ces méthodes numériques sont précieuses mais il ne faut jamais perdre de vue que :

1. Le résultat numérique est approché pour trois raisons :
  - (a) les calculs sont nécessairement approchés car la représentation des nombres dans les calculateurs est nécessairement finie, donc tronquée, et les erreurs de troncature se propagent en croissant dans les calculs successifs ;

- (b) la méthode numérique est par elle-même approchée car l'espace des fonctions dans lequel on cherche une solution approchée est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions définies sur le domaine étudié ;
  - (c) la « convergence numérique » apparente de l'implémentation numérique d'un algorithme théorique n'est jamais une preuve de la convergence mathématique. Inversement l'implémentation d'un algorithme mathématiquement convergent ne converge pas nécessairement numériquement en raison de l'imperfection des calculs.
2. Pour étudier l'influence d'un paramètre, on ne peut que refaire le calcul pour différentes valeurs numériques du paramètre en supposant que cette influence est suffisamment régulière entre deux valeurs successives pour faire des interpolations.
  3. Dans les problèmes non linéaires, dans lesquels on est rarement assuré de l'unicité de la solution ou de l'absence de bifurcations voire de solutions caotiques, un résultat numérique est toujours sujet à caution et doit toujours être considéré avec circonspection car on maîtrise rarement la (les) branche(s) suivie(s) par l'algorithme en cas de solutions multiples.

**Remarque 7.1** – Dans les problèmes stationnaires, on peut néanmoins obtenir analytiquement des résultats partiels intéressants en utilisant les trois premiers principes, non pas sous leur forme locale, mais sous une forme globale (sur un domaine matériel ou géométrique précis) avec quelques hypothèses simplificatrices sur les frontières. Par exemple, il est souvent possible d'évaluer des valeurs intégrées sur des parties de frontière (débits, forces résultantes, moments résultants, quantités de chaleur échangée), mais sans information sur le détail de leur répartition.

### 7.3 Conclusion

Les applications de la mécanique des milieux continus se divisent traditionnellement en deux disciplines : la mécanique des fluides et la mécanique des solides déformables. La distinction est justifiée par le fait que les préoccupations et les modèles de comportement des deux spécialités sont différents :

**En mécanique des fluides**, les variables d'état des fluides simples  $(T, \rho)$  sont généralement suffisantes. Les lois de comportement mécanique des fluides ne font donc pas référence à un tenseur de déformation, mais seulement au tenseur des taux de déformation. La loi de comportement des fluides simples newtoniens est satisfaisante pour bon nombre de fluides.

On cherche le mouvement inconnu dans un domaine géométrique décidé *a priori*. Ce mouvement est donc décrit par la méthode d'Euler, c'est-à-dire qu'on cherche description d'Euler des vitesses actuelles, des masses volumiques actuelles et des températures actuelles.

Les difficultés de la mécanique des fluides résident essentiellement dans la complexité de l'équation de la mécanique des fluides newtoniens<sup>(3)</sup>, dont les solutions sont fréquemment instables (phénomène de turbulence). Les simplifications courantes sont la recherche de solutions stationnaires, l'incompressibilité, l'isothermie et la linéarité du comportement (viscosités et dilatabilité constantes ou même nulles).

**En mécanique des solides**, les variables d'état des solides déformables contiennent toujours la température et un tenseur de déformation, mais aussi souvent des directions d'anisotropie et même parfois des variables d'état qui résument l'histoire de la particule. Les lois de comportement des solides déformables sont donc beaucoup plus diverses qu'en mécanique des fluides. On cherche le mouvement inconnu d'un domaine matériel (le solide). Ce mouvement est plus

<sup>(3)</sup> L'équation de mouvement des fluides newtoniens prend le nom d'équation de *Navier-Stokes*.

commodément décrit par la méthode de Lagrange<sup>(4)</sup> car la forme actuelle du domaine matériel est *a priori* inconnue<sup>(5)</sup>. On cherche donc la description de Lagrange du champ des positions actuelles (ou du champ des déplacements actuels) et des champs actuels des variables d'état. Les difficultés de la mécanique des solides résident aussi essentiellement dans la complexité de l'équation de la mécanique, mais celle-ci est surtout dûe à la complexité de la loi de comportement. Les instabilités des solutions existent aussi, mais de manière moins cruciale. Les simplifications courantes sont la recherche de solutions d'équilibre (pas d'accélération), l'élasticité (pas de dissipation intrinsèque), l'isothermie (pas de dissipation thermique) et les petites déformations.

**En acoustique**, on étudie la propagation des sons dans les milieux matériels. Son champ d'investigation concerne donc à la fois les fluides et les solides. Les sons étant de petites perturbations de contraintes autour d'un état moyen, la modélisation du comportement des fluides et des solides autour de l'état moyen est le plus souvent linéarisée.

Le souhait de l'auteur est que ce cours ainsi que celui de cinématique des milieux continus, au delà des résultats généraux qui y sont exposés, favorise la communication entre les spécialistes de ces trois applications de la mécanique des milieux continus.

---

<sup>(4)</sup> On rappelle que les deux descriptions du mouvement sont équivalentes.

<sup>(5)</sup> Contrairement aux domaines géométriques utilisés en mécanique des fluides dont la forme est connue *a priori*.

# Démonstrations

## A.1 Lemme fondamental pour les intégrales de volume

Soit  $g(M)$  un champ scalaire défini dans  $\mathcal{E}_3$  et soit un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ . Il faut montrer que :

$$\forall \mathcal{D} \int_{\mathcal{D}} g(M) dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \ g(M) = 0$$

L'implication  $g(M) = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} g(M) dv = \mathbf{0}$  est triviale. Il suffit donc de montrer l'implication inverse.

On représente les points  $M \in \mathcal{D}$  par un vecteur  $\mathbf{x}$ . Pour définir des domaines  $\mathcal{D}$  arbitraires, on considère un domaine fixe  $\mathcal{D}_0$  arbitraire dont les points courants sont  $\mathbf{x}_0$  et une application  $\bar{\mathbf{f}}$  arbitraire mais différentiable telle que :

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$$

Avec une fonction  $\bar{\mathbf{f}}$  arbitraire, on génère tous les domaines  $\mathcal{D}$ .

Par changement de variable, on ramène l'intégrale sur  $\mathcal{D}$  à une intégrale sur  $\mathcal{D}_0$  :

$$\int_{\mathcal{D}} g(\mathbf{x}) dv = \int_{\mathcal{D}_0} g(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)) \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) dv_0$$

où  $\bar{K}_v = \frac{dv}{dv_0} = \det \mathbf{grad} \bar{\mathbf{f}} > 0$  (analogie avec la cinématique, la fonction arbitraire  $\bar{\mathbf{f}}$  étant comparable à la description de Lagrange  $\mathbf{f}$  d'un mouvement réel). On a donc :

$$\forall \mathcal{D} \int_{\mathcal{D}} g(M) dv = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \forall \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) > 0 \int_{\mathcal{D}_0} g(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)) \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) dv_0 = \mathbf{0}$$

On démontre en analyse fonctionnelle que l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathcal{D}_0$  et de carré intégrable sur  $\mathcal{D}_0$ , noté  $\mathbb{L}_{\mathcal{D}_0}^2$ , est un espace vectoriel de Hilbert, de dimension infinie, sur lequel on peut définir un produit scalaire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathcal{D}_0} f_1(\mathbf{x}_0) f_2(\mathbf{x}_0) dv_0$$

L'intégrale  $\int_{\mathcal{D}_0} g(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)) \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) dv_0$  est donc le produit scalaire des deux fonctions  $h = g \circ \bar{\mathbf{f}}$  et  $\bar{K}_v$  appartenant à  $\mathbb{L}_{\mathcal{D}_0}^2$  :

$$\int_{\mathcal{D}_0} \underbrace{g(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0))}_{h(\mathbf{x}_0)} \bar{K}_v(\mathbf{x}_0) dv_0 = \langle h, \bar{K}_v \rangle \quad \text{où } h = g \circ \bar{\mathbf{f}}$$

Si un vecteur  $h$  de  $\mathbb{L}_{\mathcal{D}_0}^2$  est orthogonal à tout vecteur de cet espace, alors ce vecteur est nul. La fonction  $\bar{f}$  étant arbitraire, la fonction  $\bar{K}_v = \det \mathbf{grad} \bar{f}$  l'est aussi. On en déduit :

$$\forall \bar{K}_v > 0 \quad \langle h, \bar{K}_v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = 0 \quad \Rightarrow \quad g \circ \bar{f} = 0 \quad \forall \bar{f} \quad \Rightarrow \quad g = 0$$

On généralise sans difficulté aux champs vectoriels ou tensoriels, il suffit d'appliquer le résultat précédent aux composantes du champ. On a donc :

$$\forall \mathcal{D} \quad \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Psi}(M) \, dv = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \quad \boldsymbol{\Psi}(M) = \mathbf{0}$$

## A.2 Existence du champ tensoriel des contraintes de Cauchy

Considérons un sous-domaine matériel dont la position actuelle est le tétraèdre  $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}_t^m$ , défini par les particules sommets  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ , et dont les faces planes  $P_0P_2P_3, P_0P_3P_1$  et  $P_0P_1P_2$  sont orthogonales. Les normales unitaires sont respectivement  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  et  $\mathbf{n}_3$ . On note  $\mathbf{n}_0$  la normale unitaire à la face  $P_1P_2P_3$ .

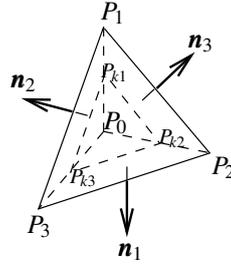


FIGURE A.1 – Un sous-domaine matériel tétraédrique  $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}_t^m$

On note  $S_i$  les aires des faces, la géométrie de ce tétraèdre permet d'écrire :

$$\frac{S_i}{S_0} = -\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_i \quad \forall i \in [1, 2, 3] \quad (\text{A.1})$$

Comme pour tout domaine matériel, les efforts extérieurs qui s'appliquent sur le sous-domaine matériel tétraédrique  $\mathcal{T}$  sont :

1. un champ de forces massiques à distance  $\mathbf{f}_{\mathcal{T}}^m$  (gravitation, forces d'inertie, etc) agissant sur l'intérieur du tétraèdre,
2. un champ de contraintes sur chaque face de la frontière :  $\mathbf{c}_i$  sur la face  $S_i$ .

En appliquant le théorème de la résultante dynamique (voir (3.1.2) page 26) au domaine matériel  $\mathcal{T}$ , il vient :

$$\int_{\mathcal{T}} (\boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_{\mathcal{T}E}^m) \rho_E \, dv = \sum_{i=0}^3 \int_{S_i} \mathbf{c}_{iE} \, ds$$

On définit les valeurs moyennes de chacune de ces intégrales :

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{V_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} \rho_E (\boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_{\mathcal{T}E}^m) \, dv \quad \bar{\mathbf{c}}_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \mathbf{c}_{iE} \, ds \quad \forall i \in [0, 1, 2, 3]$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au domaine matériel  $\mathcal{T}$  s'écrit donc encore :

$$\bar{\mathbf{f}} V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_0 S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_i S_i$$

On définit maintenant d'autres sous-domaines matériels  $\mathcal{T}_k$  par homothétie de centre  $P_0$  et de rapport  $k$  appliquée au tétraèdre  $\mathcal{T}$ . Les tétraèdres  $\mathcal{T}_k$  obtenus ont le même sommet  $P_0$ , les autres étant  $P_{1k}$ ,  $P_{2k}$  et  $P_{3k}$  (voir figure A.1 page 94). Dans cette homothétie, les aires sont multipliées par  $k^2$  et les volumes par  $k^3$ . Les faces de  $\mathcal{T}_k$  sont parallèles à celles de  $\mathcal{T}$  et leurs normales unitaires  $\mathbf{n}_i$  sont donc invariantes dans l'homothétie. Le théorème de la résultante dynamique appliqué aux sous-domaines  $\mathcal{T}_k$  s'écrit comme précédemment :

$$\bar{\mathbf{f}}_k V_{\mathcal{T}_k} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} S_{0k} + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} S_{ik}$$

où  $\bar{\mathbf{f}}_k$  est la valeur moyenne des forces à distance moins les quantités d'accélération sur le domaine  $\mathcal{T}_k$ , et où  $\bar{\mathbf{c}}_{ik}$  est la valeur moyenne des vecteurs contraintes sur les faces  $S_{ik}$ .

Compte tenu de l'homothétie,  $V_{\mathcal{T}_k} = k^3 V_{\mathcal{T}}$  et  $S_{ik} = k^2 S_i$ . Il vient :

$$\bar{\mathbf{f}}_k k^3 V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} k^2 S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} k^2 S_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{f}}_k k V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} S_i$$

En faisant tendre le rapport d'homothétie  $k$  vers 0, on obtient <sup>(1)</sup> :

$$\mathbf{0} = S_0 \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{0k} + \sum_{i=1}^3 S_i \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{ik}$$

Dans cette limite, les valeurs des contraintes moyennes sur chacune des faces tendent (par définition de la contrainte) respectivement vers les contraintes en  $P_0$  pour les directions de ces faces dont les normales sont de direction constante :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{ik} = \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) \quad \forall i \in [0, 1, 2, 3]$$

Le passage à la limite conduit donc à :

$$\mathbf{0} = S_0 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) + \sum_{i=1}^3 S_i \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t)$$

La contrainte en la particule  $P_0$  pour la facette de normale  $\mathbf{n}_0$  est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) &= - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_0) && \text{(voir (A.1) page 94)} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^3 (\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) \otimes \mathbf{n}_i)}_{\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t)} \cdot \mathbf{n}_0 && \text{(algèbre tensorielle)} \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Il est remarquable de constater que dans le passage à la limite, les intégrales de volume (les forces à distance et les accélérations) disparaissent.

Pour toute direction  $\mathbf{n}_0$ , la contrainte actuelle  $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t)$  est une fonction linéaire de  $\mathbf{n}_0$ , car le tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t)$  est indépendant de  $\mathbf{n}_0$ .

En revanche, le tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\sigma}$  est encore *a priori* une fonction des trois directions unitaires  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  et  $\mathbf{n}_3$ . Pour montrer qu'elle en est indépendante, on fait le même raisonnement avec un autre domaine tétraédrique  $\mathcal{T}'$ , de même sommet  $P_0$  dont les normales unitaires aux faces sont  $\mathbf{n}_0$  (identique au précédent),  $\mathbf{n}'_1$ ,  $\mathbf{n}'_2$  et  $\mathbf{n}'_3$  (les trois autres directions orthogonales sont différentes). Par passage à la limite, on trouve une autre expression de la contrainte actuelle  $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t)$  :

$$\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}'_i, t)}_{\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t)} \otimes \mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{n}_0$$

On a donc :  $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) \cdot \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t) \cdot \mathbf{n}_0$ .

Cette égalité étant vraie pour toute direction  $\mathbf{n}_0$ , les deux tenseurs sont égaux :

$$\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t)$$

Cette dernière égalité est vraie pour toute base  $\{\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3\}$ . L'opérateur  $\boldsymbol{\sigma}$  n'est donc pas fonction du choix des orientations des faces  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ , et on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, t)$$

Il existe donc bien en chaque particule  $P_0$  d'un milieu continu un tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\sigma}(P_0, t)$  tel que la contrainte actuelle sur une facette matérielle de normale  $\mathbf{n}_0$  est donnée par :

$$\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_0, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, t) \cdot \mathbf{n}_0$$

La démonstration précédente ne prouve que l'existence du champ matériel tensoriel du second ordre appelé *tenseur des contraintes de Cauchy* sans préciser sa distribution dans l'espace ni son évolution dans le temps.

Contrairement à ce qui est parfois affirmé, pour prouver l'existence du champ de tenseurs des contraintes dans un milieu continu, il n'est pas nécessaire de négliger les forces de volume extérieures à distance agissant sur les tétraèdres (autogravitation dans un domaine contenant le tétraèdre et inerties d'accélération) : elles disparaissent dans le passage à la limite.

Si le champ d'autogravitation  $\mathbf{f}_a^m$  est défini dans un domaine  $\mathcal{D}$  et est ajouté au champ de gravitation d'origine extérieure  $\mathbf{f}_e^m$ , le champ de tenseur des contraintes, solution de l'équation de mouvement  $\text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_a^m + \rho \mathbf{f}_e^m = \rho \boldsymbol{\gamma}$ , prend en compte l'autogravitation. Toutefois, la résolution de l'équation de mouvement se trouve fortement compliquée, car le champ d'autogravitation  $\mathbf{f}_a^m$  dépend de la forme actuelle du domaine  $\mathcal{D}$ . C'est dans l'écriture de l'équation de mouvement que l'on peut faire l'approximation  $\mathbf{f}_a^m \ll \mathbf{f}_e^m$ .

### A.3 Existence du champ vectoriel courant de chaleur

Cette démonstration d'existence est semblable à celle du champ de tenseur des contraintes de Cauchy.

On considère un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  dont la position actuelle est  $\mathcal{D}_t^m$ . La puissance calorifique surfacique extérieure actuelle entrant par conduction à travers sa frontière est un scalaire noté  $q_s(t)$  ( $\text{W.m}^{-2}$ ).

Pour étudier les échanges de chaleur à l'intérieur du domaine, on procède comme pour la définition des efforts intérieurs à un milieu continu : on considère des sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  et leurs échanges thermiques avec leur extérieur  $(\mathcal{D} - \mathcal{D}_1) \cup \text{ext}(\mathcal{D})$ , dont une partie sont des échanges thermiques intérieurs à  $\mathcal{D}_t^m$  (voir section 3.3 page 28).

■ **Définition A.1 –**

Hypothèse La puissance calorifique surfacique actuelle  $q_s(t)$  traversant une facette matérielle ne dépend que de la particule et de la facette matérielle (repérée par sa normale actuelle).

Cette hypothèse est semblable à l'hypothèse de Cauchy posée en section 3.3 page 29.

Il existe donc une fonction  $f_q$  telle que  $q_s(t) = f_q(P_0, \mathbf{n}, t)$  où  $P_0$  est une particule et  $\mathbf{n}$  est la normale actuelle à une facette matérielle.

On applique ensuite le principe de la conservation de l'énergie (équation (??) page ??) au sous-domaine matériel tétraédrique de la démonstration de Cauchy (voir figure A.1 page 94) :

$$\int_{\mathcal{T}} \dot{e}_E^m dm = \int_{\mathcal{T}} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t + \int_{\mathcal{T}} r_{ext E}^v dv_t - \sum_{i=0}^3 \int_{\mathcal{S}_i} q_{sE} ds_t$$

On définit ensuite les valeurs moyennes des intégrales suivantes :

$$\bar{I}_v = \frac{1}{V_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} (\rho_E \dot{e}_E^m - \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E - r_{ext E}^v) dv_t \quad \bar{I}_i = \frac{1}{S_i} \int_{\mathcal{S}_i} q_{sE} ds_t$$

où  $V_{\mathcal{T}}$  est le volume du tétraèdre  $\mathcal{T}$  et  $S_i$  l'aire des faces  $\mathcal{S}_i$ .

Le principe de la conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$V_{\mathcal{T}} \bar{I}_v + \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_i = 0$$

Ce même principe de la conservation de l'énergie appliqué à des tétraèdres  $\mathcal{T}_k$  homothétiques de  $\mathcal{T}$  de centre  $P_0$  et de rapport  $k$  s'écrit :

$$k^3 V_{\mathcal{T}} \bar{I}_{vk} + k^2 \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_{ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad k V_{\mathcal{T}} \bar{I}_{vk} + \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_{ik} = 0$$

où  $\bar{I}_{vk}$  et  $\bar{I}_{ik}$  sont les valeurs moyennes des intégrales de volume et de surface sur le tétraèdre  $\mathcal{T}_k$ .

Lorsqu'on fait tendre  $k$  vers 0, les normales  $n_i$  sont de direction constante et il reste :

$$S_0 q_{s0} = - \sum_{i=1}^3 S_i q_{si}$$

$$q_{s0} = - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} q_{si} = \sum_{i=1}^3 q_{si} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{n}_0 \quad (\text{voir (A.1) page 94})$$

où  $q_{si} = \lim_{k \rightarrow 0} \bar{I}_{ik} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{S_{ik}} \int_{\mathcal{S}_k} q_{si}(t) \, ds_t$ , ce qui est par définition la puissance calorifique surfacique traversant la facette matérielle en  $P_0$  de normale actuelle  $\mathbf{n}_i$ .

Pour toute facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_0$ , la puissance calorifique surfacique actuelle entrant par cette facette est une fonction linéaire de la direction  $\mathbf{n}_0$  :

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) \cdot \mathbf{n}_0$$

On termine la démonstration de la même manière que dans la section précédente : on considère les autres tétraèdres, de même sommet  $P_0$ , de même normale  $\mathbf{n}_0$  mais dont les autres normales orthogonales sont différentes :  $\mathbf{n}'_1$ ,  $\mathbf{n}'_2$  et  $\mathbf{n}'_3$ . En refaisant le calcul précédent, on en déduit que :

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t) \cdot \mathbf{n}_0 \quad \forall \mathbf{n}'_1 \quad \forall \mathbf{n}'_2 \quad \forall \mathbf{n}'_3$$

On a donc :

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, t) \cdot \mathbf{n}_0$$

En chaque particule  $P_0$  d'un milieu continu, il existe un champ matériel vectoriel  $\mathbf{q}(P_0, t)$ , appelé courant de chaleur, tel que la puissance calorifique surfacique traversant par conduction une facette matérielle en la particule  $P_0$  de normale actuelle  $\mathbf{n}_0$  est donnée par  $q_s(P_0, t) = \mathbf{q}(P_0, t) \cdot \mathbf{n}_0$ .

Cette démonstration ne prouve que l'existence du champ matériel vectoriel *courant de chaleur* sans préciser sa distribution dans l'espace ni son évolution dans le temps.