

## Généralités sur les polynômes orthogonaux.

Valet Ludovic

► **To cite this version:**

Valet Ludovic. Généralités sur les polynômes orthogonaux.. DEA. Polynômes orthogonaux, 2000, pp.49. <cel-00661847>

**HAL Id: cel-00661847**

**<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00661847>**

Submitted on 20 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# POLYNOMES ORTHOGONAUX

Ludovic VALET

14 mai 2007

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Généralités</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Présentation des polynômes orthogonaux</b>	<b>4</b>
3.1	Généralités . . . . .	4
3.2	Une formule de Christoffel . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Propriétés générales des polynômes orthogonaux</b>	<b>7</b>
4.1	Propriétés d'extrema et de fermeture . . . . .	7
4.2	Formule de récurrence, formule de Christoffel-Darboux . . . . .	10
4.2.1	Formule de récurrence . . . . .	10
4.2.2	Formule de Darboux-Christoffel . . . . .	11
4.3	Propriétés élémentaires des zéros des polynômes orthogonaux . . . . .	12
4.4	Quadrature mécanique de Gauss-Jacobi . . . . .	13
4.5	Fractions continues . . . . .	15
4.5.1	Généralités . . . . .	15
4.5.2	Etude du cas d'un intervalle fini . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Propriétés des polynômes orthogonaux classiques</b>	<b>20</b>
5.1	Formule de Rodriguez . . . . .	20
5.2	Les polynômes classiques . . . . .	20
5.2.1	Polynômes de Hermite . . . . .	20
5.2.2	Polynômes de Laguerre . . . . .	20
5.2.3	Polynômes de Jacobi ou hypergéométriques . . . . .	21
5.3	Equation et forme différentielles . . . . .	21
5.4	Fonctions génératrices . . . . .	25
5.4.1	Généralité . . . . .	25
5.4.2	Cas des polynômes de Hermite . . . . .	27

5.4.3 Recherche d'une formule de récurrence . . . . .	28
<b>6 Table de polynômes</b>	<b>30</b>

# 1 Introduction

Etant donnés :

- $H$  un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ ,
- $\{g_1, \dots, g_n\}$  un système d'éléments linéairement indépendants de  $H$
- $f \in H$

on cherche  $\min \|f - f'\|$ , où  $f'(x) = a_1g_1 + \dots + a_n g_n$ . Il existe une unique  $\tilde{f}$  tel que le minimum soit réalisé (existence de la projection orthogonale) qui est caractérisé par :  $(f - \tilde{f}, g_k) = 0$ , pour  $k = 1, \dots, n$ . Ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n a_i (g_i, g_k) = (f, g_k), k = 1, \dots, n$$

Ce qui nous donne un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues de la forme :

$$AX = B$$

où  $\begin{cases} A &= ((g_i, g_j))_{i,j=1,\dots,n} \\ B &= (f, g_k)_{k=1,\dots,n} \\ X &= (a_k)_{k=1,\dots,n} \end{cases}$  Ce système devient trivial lorsque la matrice  $A$  est la ma-

trice identité (de dimension  $n$ ), c'est à dire quand  $(g_i, g_j) = \delta_{ij}$ , soit quand le système  $\{g_1, \dots, g_n\}$  est orthonormal, on est donc amené à poser la définition suivante :

**Définition 1.1.** Un système  $\{g_1, \dots, g_n\}$ , fini ou non, dans un préhilbertien, est dit *orthonormal* ssi :

$$(g_i, g_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

## Remarque

Un tel système est nécessairement linéairement indépendant. En effet : soit  $a_1g_1 + \dots + a_n g_n = 0$  en prenant  $(\cdot, g_k)$ , pour  $k = 1, \dots, n$ , on a le résultat à savoir :  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

## Exemples

1) Dans l'espace  $l^2$  la suite  $(e_n)$ , de terme général  $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$  constituée de 0 sauf le  $n^{\text{ième}}$  terme qui est égal à 1, est un système orthonormal, pour le produit scalaire :

$$(f, g) = \sum_{i \geq 0} f_i g_i \text{ avec } f = (f_i)_{i \geq 0} \text{ et } g = (g_i)_{i \geq 0}.$$

2) Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[-1, +1]$  et à valeurs dans  $\mathbf{C}$ , muni du produit scalaire :

$$(x, y) = \int_{-1}^{+1} \bar{x}(t)y(t)dt,$$

on vérifie facilement que la suite  $(\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\pi nt))_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthonormal. (pour  $m \neq n$   $e^{i\pi(m-n)} = e^{-i\pi(m-n)} = (-1)^{m-n}$ )

## 2 Généralités

**Théorème 2.1.** *Étant donné un système orthonormal  $\{g_1, \dots, g_n\}$  et un élément  $f$  dans un préhilbertien :*

$$\text{l'expression } \left\| \sum_{i=1}^n c_i g_i - f \right\|$$

*est minimum pour  $c_i = (f, g_i)$  où  $i = 1, \dots, n$ .*

### Démonstration

Posons  $g = \sum_{j=1}^n c_j g_j$  où  $c_j = (f, g_j)$ .  $g - f$  est orthogonale à chaque  $g_i$  car :

$$(g - f, g_i) = (g, g_i) - (f, g_i) = \sum_{j=1}^n c_j (g_j, g_i) - c_i = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{ji} - c_i = 0.$$

Soit  $h$  une autre, quelconque, combinaison linéaire des  $g_j$ , alors  $g - f$  est orthogonal à  $h - g$  ( $h - g$  est une c.l. des  $g_i$ ). Donc :

$\|h - f\|^2 = \|(h - g) + (g - f)\|^2 = \|h - g\|^2 + \|g - f\|^2 \geq \|g - f\|^2$ . Cette dernière inégalité étant stricte à moins que  $h = g$  ce qui prouve l'unicité des coefficients  $c_i$  et établit la valeur du minimum.  $\square$

**Définition 2.1.** *Soit  $\{g_n\}$  un système orthonormal donné, fini ou non. Pour une fonction à valeurs réelles, arbitraire il correspond le développement formel de Fourier :*

$$f \sim a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$$

Où les coefficients  $a_n$ , appelés coefficients de Fourier pour  $f$  respectivement au système donné, sont définis par :  $a_n = (f, g_n)$ .

### Remarque

On a l'inégalité de BESSEL :  $|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \leq \|f\|^2$ .

**Théorème 2.2.** (GRAM-SCHMIDT) *Soit  $\{f_1, \dots, f_n\}$  un système, fini ou non, d'éléments linéairement indépendants dans un préhilbertien. On peut, alors, définir un système orthonormal,  $\{g_1, \dots, g_n\}$ , tel que pour chaque  $k$ ,  $g_k$  soit une combinaison linéaire de  $\{f_1, \dots, f_k\}$ .*

## Démonstration

Par récurrence, posons  $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ , alors le système  $\{g_1\}$  est orthonormal. On remarque que  $f_1$  est non nul puisque c'est un élément d'un système linéairement indépendant. On suppose qu'on a construit un système orthonormal  $\{g_1, \dots, g_{n-1}\}$  (hyp. de récurrence), on pose :

$$u = f_n - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, g_i) g_i.$$

Alors  $(g_k, u) = (g_k, f_n) - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, g_i) \delta_{ki} = 0$  pour  $k = 1, \dots, n-1$ .

$u \neq 0$  sinon  $f_n$  serait une combinaison linéaire de  $g_1, \dots, g_{n-1}$  ce qui contredit que  $f_1, \dots, f_n$  sont linéairement indépendants. Pour finir on pose  $g_n = \frac{u}{\|u\|}$  ce qui fait du système  $\{g_1, \dots, g_n\}$  un système orthonormal.  $\square$

## Remarques

1) Si  $f \in Vect\{g_1, \dots, g_n\}$  alors  $f = \sum_{i=1}^n (f, g_i) g_i$  où  $Vect\{g_1, \dots, g_n\}$  est l'espace vectoriel, sur  $\mathbb{R}$ , engendré par le système considéré.

2) Une caractérisation des systèmes orthogonaux est la minimisation des sommes partielles. En effet, pour des réels,  $a_1, \dots, a_{n-1}$  l'expression :

$$\| a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + f_n \|^2$$

devient minimum SSI :

$$a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + f_n = b_n^{-1} g_n$$

où on a repris les notations du théorème 2.2 et on a écrit  $g_n = \sum_{i=1}^n b_i f_i$ .

En effet :

$$\min_{a_1, \dots, a_{n-1}} \|a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + f_n\|^2 = \min_{h \in V_{n-1}} \|f_n - h\|^2$$

Où on note  $V_{n-1}$  pour l'espace engendré par les éléments  $f_1, \dots, f_{n-1}$ .

On applique le th. 2.1 pour conclure.

## Quelques notations pour la suite :

- Etant donné un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , fini ou non, une fonction poids  $w(x)$  positive sur  $[a, b]$ , on définit le produit scalaire :

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

On note  $L_w^2(a, b)$  l'ensemble des fonctions pour lesquelles  $(f, g) < \infty$  (on suppose  $\int_a^b w(x)dx > 0$ ).

- Plus généralement on peut définir un produit scalaire par une intégrale de Stieltjes :

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x)$$

où  $\alpha(x)$  est une fonction croissante possédant une infinité de points de croissance (pour éviter que  $L_\alpha^2(a, b)$  soit de dimension finie) .

Quand  $\alpha(x)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue on a,  $w(x) = \frac{d\alpha(x)}{dx}$ .

D'autre part si  $\alpha(x)$  est une fonction constante sauf aux points  $x_i$  où elle fait des sauts de magnitude  $w_i$ , alors le produit scalaire devient :

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)g(x_i).$$

Ce qui est particulièrement adapté à l'étude des fonctions à valeurs discrètes.

- Ces définitions font référence à des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles, ce à quoi on va se restreindre ici. Si les fonctions considérées sont à valeurs complexes ou si le domaine d'intégration est un arc du plan complexe alors le produit scalaire devient :

$$(f, g) = \int_\Gamma f(z)\overline{g(z)}w(z)dz$$

où  $\Gamma$  est un certain contour du plan complexe.

### 3 Présentation des polynômes orthogonaux

#### 3.1 Généralités

- Etant donné un système d'éléments linéairement indépendants  $\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$  on sait, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt, construire un système  $\{g_1, \dots, g_n, \dots\}$  orthonormal. Dans cette partie on va s'intéresser au système  $\{1, x, x^2, \dots\}$ . On va commencer par donner un critère simple pour déterminer l'indépendance linéaire d'un système de polynômes.

-Dans toute la suite on va supposer que :

$$\forall n \int_a^b x^n w(x)dx \equiv c_n < \infty.$$

**Théorème 3.1.** *Tout système  $\{Q_0, \dots, Q_n, \dots\}$  de polynômes dans lequel  $Q_n$  est de degré exact  $n$  est linéairement indépendant.*

*De plus, tout polynôme de degré  $\leq n$  peut s'écrire, de façon unique, comme combinaison linéaire des  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .*

## Démonstration

La deuxième assertion entraîne la première, puisque le polynôme 0 ne peut s'écrire que :  $0Q_0 + 0Q_2 + \dots$ . Supposons la deuxième assertion fausse. Soit  $n$  le premier indice pour lequel elle est fausse.

On a  $n > 0$  puisque toute constante ( $\neq 0$ ) s'écrit  $c.Q_0(x)$ ,  $c \neq 0$ . Soit  $P(x)$  un polynôme arbitraire de degré  $\leq n$ . Posons  $P(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ . Supposons que le coefficient de  $x^n$  dans  $Q_n(x)$  soit  $b_n$ . Comme  $\deg(P(x) - \frac{c_n}{b_n} Q_n(x)) \leq n-1$  on peut l'exprimer comme une combinaison linéaire des  $Q_0(x), \dots, Q_{n-1}(x)$ , ce qui est contradictoire.  $\square$

**Théorème 3.2.** *Le système de polynômes défini par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_n = (x - a_n)Q_{n-1} - b_n Q_{n-2} \quad , \quad n \geq 2 \\ Q_0 = 1, Q_1 = x - a_1 \\ a_n = \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})} \quad , \quad n \geq 1 \\ b_n = \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-2})}{(Q_{n-2}, Q_{n-2})} \quad , \quad n \geq 1 \end{array} \right. \quad \text{est orthogonal.}$$

## Démonstration

On voit, par les formules, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n$  est unitaire donc de degré exact  $n$ , donc  $(Q_{n-1}, Q_{n-1})$  et  $(Q_{n-2}, Q_{n-2})$  sont non nuls ( $n > 1$ , le produit scalaire étant non dégénéré) ainsi  $a_n$  et  $b_n$  sont définis. On va montrer, par récurrence sur  $n$ , que  $(Q_n, Q_i) = 0$  pour  $i < n$ .

Pour  $n = 0$  le système se réduit à  $\{1\}$ .

Pour  $n = 1$ ,  $(Q_1, Q_0) = (xQ_0 - a_1Q_0, Q_0) = (xQ_0, Q_0) - a_1(Q_0, Q_0)$ , mais  $a_1 = \frac{(xQ_0, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}$  donc  $(Q_1, Q_0) = 0$ . Supposons que cela soit vrai pour  $Q_k$ ,  $k \leq n-1$ .

$(Q_n, Q_{n-1}) = (xQ_{n-1}, Q_{n-1}) - a_n(Q_{n-1}, Q_{n-1}) = 0$ , en explicitant  $a_n$ . De même  $(Q_n, Q_{n-2}) = (xQ_{n-1}, Q_{n-2}) - b_n(Q_{n-2}, Q_{n-2}) = 0$ , en explicitant  $b_n$ . Supposons que  $i < n-2$ , on a :

$$(Q_n, Q_i) = (xQ_{n-1}, Q_i) - a_n(Q_{n-1}, Q_i) - b_n(Q_{n-2}, Q_i),$$

mais  $(Q_{n-1}, xQ_i) = (Q_{n-1}, Q_{i+1} + a_{i+1}Q_i + b_{i+1}Q_{i-1}) = 0$  d'où le résultat.  $\square$

## Exemple

$$[a, b] = [-1, +1], \quad w(x) = 1.$$

$$X_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{(xX_0, X_0)}{(X_0, X_0)} = \int_{-1}^{+1} x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{+1} = 0 \Rightarrow X_1 = x - a_1 = x$$

$$a_2 = \frac{(xX_1, X_1)}{(X_1, X_1)} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^3 dx}{\int_{-1}^{+1} x^2 dx} = 0 \text{ et } b_2 = \frac{(xX_1, X_0)}{(X_0, X_0)} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^2 dx}{\int_{-1}^{+1} 1 dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$X_2 = (x - a_2)X_1 - b_2X_0 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Ce sont les deux premiers polynômes de Legendre unitaires.



**Définition 3.1.** Si on orthogonalise le système  $\{1, x, x^2, \dots\}$ , qui est indépendant par le théorème 3.1, on obtient un système orthogonal de polynômes  $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots\}$  uniquement déterminé par les conditions :

- a)  $P_n(x)$  est un polynôme de degré exact  $n$  dans lequel le coefficient de  $x^n$  est  $k_n > 0$ .
- b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le système  $\{P_0(x), \dots, P_n(x)\}$  est orthonormal.

### Notation

Nous dirons que  $\rho(x)$  est un  $\pi_n$  si c'est un polynôme de degré  $\leq n$ . Et nous noterons  $h_n = (P_n, P_n)$ .

### Remarques

- 1) Le procédé de Gram-Schmidt nous fournit ( $P_0 = 1/\sqrt{D_0}$ ) :

$$n \geq 1, P_n(x) = (D_n D_{n-1})^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \text{ où } D_n = \det((c_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n}).$$

- 2) L'unicité est aussi obtenue en fixant  $P_n(a)$  ou  $P_n(b)$  ou en prenant des polynômes unitaires (le procédé du th. 3.2 fournit des polynômes unitaires).

- 3) Le développement de Fourier d'une fonction arbitraire  $f(x)$  en termes des polynômes  $\{P_0(x), \dots, P_n(x)\}$  a la forme :

$$f(x) \sim f_1 P_1(x) + \cdots + f_n P_n(x) + \cdots$$

où  $f_k = (f, P_k)$  (les sommes partielles ont la même propriété que dans le théorème 2.1).

- 4) On a la caractérisation, importante, suivante des polynômes orthogonaux unitaires (on prend un  $\pi_n, \rho(x)$ ) :

$$\int_a^b |\rho(x)|^2 w(x) dx \text{ est minimum} \iff \rho(x) = \text{const} P_n(x).$$

La constante est déterminée par la normalisation que l'on choisit pour  $\rho(x)$ .

Par exemple prenons le unitaire.

Si  $k_n$  est le coefficient de  $x^n$  dans  $P_n(x)$  (donc  $k_n = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}$ ) comme  $\rho(x)$  est unitaire on a  $\text{const} = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}$  et donc  $\min \int_a^b \|\rho(x)\|^2 dx = (\text{const})^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}}$ .

5) Comme tout polynôme de degré  $n$  est une C.L. de  $P_0(x), \dots, P_n(x)$ ,  $P_n(x)$  est orthogonal à tout  $\pi_{n-1}$  et donc en particulier :

$$\int_a^b P_n(x)x^k d\alpha(x) = 0, \forall k = 0, \dots, n-1.$$

Cette condition détermine  $P_n(x)$  à une constante près. C'est souvent cette propriété des polynômes orthogonaux qui est donnée.

Notons que si  $\rho(x)$  est un  $\pi_n$  et  $\int_a^b P_n(x)\rho(x)d\alpha(x) = c$  alors le coefficient de  $x^n$  dans  $\rho(x)$  est  $ck_n$ .

6) Si  $[a, b]$  est symétrique par rapport à 0 ( $b = -a$ ) et si  $w(x)$  est paire alors  $P_n(x)$  a la même parité que  $n$ . De plus  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  donc  $P_n(x)$  ne peut contenir que des puissances de  $x$  congrues à  $n \pmod{2}$ . Pour voir ce résultat un changement de variables et la troisième remarque suffisent :

comme  $\int_{-a}^{+a} P_n(-x)x^k w(x)dx = (-1)^k \int_{-a}^{+a} P_n(x)x^k w(x)dx = 0$ ,  $P_n(-x)$  possède les mêmes propriétés d'orthogonalité que  $P_n(x)$  donc en comparant les coefficients de  $x^n$  on obtient :  $P_n(-x) = \text{const} P_n(x) = (-1)^n P_n(x)$  ( $P_n(-x)$  est un polynôme de degré  $n$ ).

7) La transformation linéaire  $x = kx' + l, k \neq 0$  transforme  $[a, b]$  en  $[a', b']$  ( ou  $[b', a']$  ) et la fonction poids  $w(x)$  en  $w(kx' + l)$ . Les polynômes :

$$(sg(x))^n |k|^{\frac{1}{2}} P_n(kx' + l), n \in \mathbb{N}$$

sont orthogonaux relativement à la fonction poids  $w(kx' + l)$  sur  $[a', b']$  (ou  $[b', a']$ ).

### 3.2 Une formule de Christoffel

**Théorème 3.3.** Soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille orthonormée de polynômes associée à la distribution  $w(x)dx$  sur  $[a, b]$ . Soit :

$$\rho(x) = c(x - x_1) \cdots (x - x_l) \text{ un } \pi_l \geq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ avec } c \neq 0 \text{ et les } x_j \text{ distincts.}$$

Alors les polynômes orthogonaux  $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  associés à la distribution  $\rho(x)w(x)dx$  peuvent se représenter comme suit :

$$\rho(x)q_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & \cdots & P_{n+l}(x) \\ P_n(x_1) & P_{n+1}(x_1) & \cdots & P_{n+l}(x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ P_n(x_l) & P_{n+1}(x_l) & \cdots & P_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}.$$

## Remarques

- 1) Dans le cas où  $\rho(x)$  a un zéro,  $x_k$ , d'ordre  $m > 1$ , on remplace les lignes correspondantes par les dérivées d'ordre  $0, \dots, m-1$  des polynômes  $P_n(x), \dots, P_{n+l}(x)$  en  $x_k$ .
- 2)  $q_n(x)$  n'est, en général, pas normalisé.

## Démonstration du th. 3.3

Le membre de droite est un  $\pi_{n+l}$  divisible par  $\rho(x)$  (puisque pour  $x = x_k$  le déterminant est nul,  $k = 1, \dots, l$ ). Donc il est de la forme  $\rho(x)q_n(x)$  où  $q_n(x)$  est un  $\pi_n$ . De plus  $\rho(x)q_n(x)$  est une combinaison linéaire des  $P_n(x), \dots, P_{n+l}(x)$ , donc si  $q(x)$  est un  $\pi_{n-1}$  arbitraire alors :

$$\int_a^b \rho(x)q_n(x)q(x)d\alpha(x) = \int_a^b q_n(x)q(x)(\rho(x)d\alpha(x)) = 0.$$

Pour finir nous devons montrer que ce membre de droite n'est pas identiquement nul. Pour cela il suffit de voir que le coefficient de  $P_{n+l}(x)$ , c'est-à-dire le déterminant

$$|(P_{n+i}(x_{j+1}))_{i,j=0,\dots,l-1}|,$$

n'est pas nul.

Supposons qu'il soit nul. Alors il existe des réels,  $a_0, \dots, a_{l-1}$ , non tous nuls, tels que  $a_0P_n(x) + \dots + a_{l-1}P_{n+l-1}(x)$  s'annule en les points  $x_1, \dots, x_l$  donc

$$a_0P_n(x) + \dots + a_{l-1}P_{n+l-1}(x) = \rho(x)G(x)$$

où  $G(x)$  est un  $\pi_{n-1}$ . Puisque cette expression est orthogonale à tous les  $\pi_{n-1}$  on a,

$$\int_a^b (\rho(x)G(x))G(x)d\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \rho(x)G^2(x)d\alpha(x) = 0 \Rightarrow G(x) = 0.$$

Puisque l'on a, par hypothèse,  $\rho(x) \geq 0$ .  $\square$

## 4 Propriétés générales des polynômes orthogonaux

Dans ce paragraphe on va étudier les propriétés des polynômes orthogonaux, lesquelles sont vérifiées pour des distributions du type Stieltjes,  $d\alpha(x)$ , cependant, on se contentera quelquefois du cas particulier d'une distribution du type  $w(x)dx$ .

## 4.1 Propriétés d'extrema et de fermeture

Soit  $f \in L^2_\alpha(a, b)$  donnée et supposons  $x^n \in L^2_\alpha(a, b) \forall n \in \mathbb{N}$ .  
Alors il est évident que les intégrales :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) \text{ et } \int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) \forall n \in \mathbb{N}$$

existent, dans le sens Stieltjes-Lebesgue.

Ensuite, en notant  $\{ P_n(x) \}$  le système orthonormal de polynômes associé à la distribution  $d\alpha(x)$  sur  $[a, b]$ , on a le théorème suivant, qui n'est qu'un cas particulier du théorème 2.1 :

**Théorème 4.1.**

$$\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x) \text{ où } \rho(x) \text{ est un } \pi_n$$

est minimum SSI  $\rho(x)$  est la *n*<sup>ième</sup> somme partielle du développement, formel, de Fourier :

$$f(x) \sim f_0 P_0(x) + \dots + f_n P_n(x) + \dots \text{ où } f_n = \int_a^b f(x) P_n(x) d\alpha(x).$$

Le minimum vaut :  $\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^n |f_k|^2$ .

**Remarque**

La valeur du minimum étant positive, on a l'inégalité de Bessel,

$$|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2 + \dots \leq \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x).$$

**Théorème 4.2.** L'intégrale :  $\int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x)$ , où  $\rho(x)$  est un  $\pi_n$  unitaire, est minimum SSI  $\rho(x) = \text{const} \cdot P_n(x)$ .

**Démonstration**

On a :

$$\min_{\rho(x), \pi_n \text{ unitaire}} \int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x) = \min_{q(x), \pi_{n-1}} \int_a^b |k_n^{-1} P_n(x) - q(x)|^2 d\alpha(x)$$

On obtient cela en écrivant :  $\rho(x) = k_n^{-1} P_n(x) - a_0 P_{n-1}(x) - \dots - a_{n-1} P_0(x)$  et en faisant varier les  $a_k$ .

Ensuite on utilise le théorème précédant pour conclure que  $q(x) = 0$ .  $\square$

**Théorème 4.3.** Soit  $x_0$  un nombre complexe arbitraire, posons :

$$S = \{\rho(x) \in \pi_n : \int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x) = 1\}$$

(les  $\pi_n$  peuvent être à coefficients complexes).

Alors le maximum de  $|\rho(x_0)|^2$  est donné par le polynôme :

$$\rho(x) = \varepsilon \{K_n(x_0, x_0)\}^{-\frac{1}{2}} K_n(x_0, x) \text{ où } |\varepsilon| = 1$$

où  $K_n(x_0, x) = \overline{P_0(x_0)}P_0(x) + \dots + \overline{P_n(x_0)}P_n(x) = P_0(\overline{x_0})P_0(x) + \dots + P_n(\overline{x_0})P_n(x)$ .

Le maximum étant :  $K_n(x_0, x_0)$ .

### Démonstration

Si on écrit  $\rho(x) = a_0P_0(x) + \dots + a_nP_n(x)$ , la condition de normalisation s'écrit :  $|a_0|^2 + \dots + |a_n|^2 = 1$ .

$$|\rho(x_0)|^2 = \left| \sum_{i=0}^n a_i P_i(x_0) \right|^2 \underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=0}^n |a_i|^2 \sum_{i=0}^n |P_i(x_0)|^2 = \sum_{i=0}^n |P_i(x_0)|^2$$

ce qui s'écrit :  $|\rho(x_0)|^2 \leq \sum_{i=0}^n P_i(x_0)\overline{P_i(x_0)} = K_n(x_0, x_0)$ . Cette inégalité est atteinte pour

$a_k = \overline{P_k(x_0)}$   $k = 0, \dots, n$ , où  $a$  est déterminé par :  $|a|^2 \sum_{i=0}^n |P_i(x_0)|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 = [K_n(x_0, x_0)]^{-1} \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{C}$  de module 1, tel que  $a = \varepsilon \cdot [K_n(x_0, x_0)]^{-\frac{1}{2}}$ .

Finalement on a :  $\rho(x) = \sum_{k=0}^n (a \cdot \overline{P_k(x_0)}) P_k(x) = \varepsilon \cdot [K_n(x_0, x_0)]^{-\frac{1}{2}} \cdot K_n(x_0, x)$ .  $\square$

### Remarque

Le noyau polynômial :  $K_n(x_0, x) = \overline{K_n(x_0, x)} = K_n(\overline{x}, \overline{x_0})$  peut être utilisé pour la représentation des  $n^{\text{èmes}}$  sommes partielles,  $s_n(x)$ , du développement de Fourier sous forme intégrale. En fait on a :

$$s_n(x) = f_0P_0(x) + \dots + f_nP_n(x) = \sum_{k=0}^n P_k(x) \int_a^b f(t)P_k(t)d\alpha(t) = \int_a^b f(t)K_n(x, t)d\alpha(t)$$

en conséquence on obtient :

$$\int_a^b K_n(x, t)\rho(t)d\alpha(t) = \rho(x)$$

et cela pour tout  $\pi_n, \rho(x)$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b K_n(x, t) \rho(t) d\alpha(t) &= \sum_{k=0}^n P_k(x) \int_a^b P_k(t) \rho(t) d\alpha(t) = \sum_{k=0}^n P_k(x) \sum_{l=0}^n a_k \int_a^b P_k(t) P_l(t) d\alpha(t) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k P_k(x) = \rho(x). \end{aligned}$$

**Théorème 4.4.** Soit  $a$  et  $x_0$  finis tel que  $x_0 \leq a$ .

Alors les noyaux  $\{K_n(x_0, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sont orthogonaux respectivement à la distribution :

$$(x - x_0) \cdot d\alpha(x)$$

### Démonstration

Ceci découle immédiatement du fait que pour tout  $\pi_n, \rho(x)$  :

$$\int_a^b \rho(t) K_n(t, x) d\alpha(t) = \rho(x) \cdot \square$$

**Définition 4.1.** Soit  $p \geq 1$ . Une famille de fonctions,  $\{f_0(x), \dots, f_n(x), \dots\}$ , sera dite dense dans  $L_\alpha^p(a, b)$  si :

$\forall f(x) \in L_\alpha^p(a, b), \forall \varepsilon > 0, \exists k(x) = C_0 f_0(x) + \dots + C_n f_n(x)$  tel que :

$$\int_a^b |f(x) - k(x)|^p d\alpha(x) < \varepsilon.$$

### Remarque

$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^n |f_k|^2$  est décroissante pour  $n$  croissant (car  $\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^n |f_k|^2 \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\sum_{k=1}^n |f_k|^2$  est une suite croissante) en conséquence cela tend vers une limite positive quand  $n \rightarrow \infty$ .

On a la formule de Parseval :  $|f_0|^2 + \dots + |f_n|^2 + \dots = \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x)$  ssi cette limite est 0.

La validité de ce résultat est équivalente au fait que l'intégrale  $\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x)$  peut être prise aussi petite qu'on veut par un choix judicieux de  $\rho(x)$ . C'est à dire que cela dépend si la famille  $\{P_n(x)\}$  (où  $\{x^n\}$ ) est dense ou non dans  $L_\alpha^2(a, b)$ . En fait du théorème classique de Weierstrass sur la densité des polynômes dans l'ensemble des fonctions continues il vient le théorème suivant :

**Théorème 4.5.** - L'ensemble des polynômes orthogonaux  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  associé à la distribution  $d\alpha(x)$  sur un intervalle fini  $[a, b]$ , est dense dans  $L_\alpha^2(a, b)$ .

Plus généralement, il est dense dans  $L_\alpha^p(a, b)$   $p \geq 1$ .

-De plus, pour  $f(x) \in L_\alpha^2(a, b)$ , la formule de Parseval est vérifiée :  $\sum_{k \geq 0} |f_k|^2 = \|f\|^2$ .

- Une fonction  $f(x) \in L^2_\alpha(a, b)$  pour laquelle  $f_n = 0$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$  est nécessairement identiquement nulle.

### Remarques

- Le fait que l'intervalle est fermé est une condition nécessaire (on verra, polynômes de Laguerre, de Hermite, des cas d'intervalles de longueur infinie).

- Dire  $f_n = 0$   $n = 1, 2, 3, \dots$  est équivalent à dire :

$$\int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) = 0 \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

La discussion de cette condition est reliée à l'unicité des moments.

- On a le contre exemple suivant, dans le cas d'un intervalle infini,  $[0, +\infty[$  :

$$d\alpha(x) = \exp(-x^\mu \cos(\mu\pi)) dx \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sin(x^\mu \sin(\mu\pi)) \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}$$

On vérifie (intégration complexe sur un quartier de cercle qu'on peut définir avec les points d'affixe :  $0, R, Re^{i\frac{\pi}{4}}, Re^{i\frac{3\pi}{4}}$ )  $\int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) = 0 \forall n$  et  $f \neq 0$ . Ainsi si  $\rho(x)$  est un polynôme arbitraire :

$$\begin{aligned} A &\equiv \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 d\alpha(x) = \int_0^{+\infty} f(x)(f(x) - \rho(x)) d\alpha(x) \\ &\leq \int_0^{+\infty} (f(x) - \rho(x)) d\alpha(x) \text{ puisque } f(x) \leq 1 \\ &\leq \left[ \int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_0^{+\infty} d\alpha(x) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)| d\alpha(x)$  et  $\int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x)$  ne peuvent être rendus arbitrairement petits. On a le résultat de densité suivant, pour le cas d'un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  :

**Théorème 4.6.** Soient  $]a, b[$  un intervalle fini ou infini de  $\mathbb{R}$ ,  $\omega$  une fonction mesurable positive définie sur  $]a, b[$  et telle que :

$$\int_a^b e^{r|t|} \omega(t) dt < \infty$$

où  $r$  est un réel strictement positif. Si  $(P_n)_n$  est une suite de polynômes orthogonaux sur  $]a, b[$  associée au poids  $\omega$ , cette suite est complète dans l'espace de Hilbert  $L^2_\omega$ .

## Remarques

- De nombreux problèmes analogues surgissent si nous remplaçons la variation quadratique par une variation d'un ordre supérieur :  $\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^p d\alpha(x)$   $p > 1$  et le cas limite appelé variation de Tchebichef :

$$\max_{a \leq x \leq b} \{|f(x) - \rho(x)|w(x)\}$$

où  $f(x)$  et  $\rho(x)$  sont supposées continues.

- Si on remplace  $d\alpha(x)$  par  $\{w(x)\}^p dx$  on a (  $a, b$  finis,  $f(x)$  et  $\rho(x)$  continues ) :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ \int_a^b |f(x) - \rho(x)|^p \{w(x)\}^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \max_{a \leq x \leq b} \{|f(x) - \rho(x)|w(x)\}.$$

## 4.2 Formule de récurrence, formule de Christoffel-Darboux

### 4.2.1 Formule de récurrence

**Théorème 4.7.** Soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  un système de polynômes orthogonaux (donné par la définition 3.1), alors on a la formule de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \text{ pour } n \geq 1$$

où  $A_n, B_n, C_n$  sont les constantes suivantes :

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} > 0, \quad B_n = -A_n \frac{(xP_n, P_n)}{(P_n, P_n)}, \quad C_n = A_n \frac{(xP_n, P_{n-1})}{(P_{n-1}, P_{n-1})} > 0.$$

### Démonstration

Il suffit de remarquer que  $P_{n+1}(x) - A_n \cdot x \cdot P_n(x)$  est un  $\pi_n$ , donc de la forme :  $a_0 P_n(x) + \dots + a_n P_0(x)$ , et de la propriété d'orthogonalité des  $P_n(x)$  on déduit les valeurs des constantes  $a_0, \dots, a_n$ . On a l'égalité :

$$P_{n+1}(x) - A_n \cdot x \cdot P_n(x) = a_0 P_n(x) + \dots + a_n P_0(x).$$

On prend  $(\cdot, P_k)$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-2$ , on trouve  $a_k = 0$  pour  $k = 2, \dots, n$ .

On prend  $(\cdot, P_{n-1})$  :

$$-A_n(P_n, xP_{n-1}) = a_1 h_{n-1}.$$

On prend  $(\cdot, P_n)$  :

$$-A_n(P_n, xP_n) = a_0 h_n$$

on a donc bien  $B_n = \frac{-A_n(P_n, xP_n)}{h_n}$  et  $C_n = \frac{A_n(P_n, xP_{n-1})}{h_{n-1}}$ , puisque  $a_0 = B_n$  et  $a_1 = -C_n$ .  $\square$



## Remarque

- Réciproquement, un système de polynômes satisfaisant une telle formule de récurrence est un système orthogonal, comme on l'avait déjà vu pour des polynômes unitaires dans le théorème 3.2.

### 4.2.2 Formule de Darboux-Christoffel

**Théorème 4.8.** *Pour un système orthogonal,  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ , de polynômes on a les formules pour  $x \neq y$  dans  $[a, b]$  :*

$$1) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{P_\nu(x)P_\nu(y)}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

$$2) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{P_\nu(x)^2}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} (P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)).$$

### Démonstration

L'identité 1) découle facilement de la formule de récurrence.

$$\begin{aligned} & P_{\nu+1}(x)P_\nu(y) - P_\nu(x)P_{\nu+1}(y) = \\ & \{(A_\nu \cdot x + B_\nu)P_\nu(x) - C_\nu P_{\nu-1}(x)\}P_\nu(y) - \{(A_\nu \cdot y + B_\nu)P_\nu(y) - C_\nu P_{\nu-1}(y)\}P_\nu(x) \\ & = A_\nu(x-y)P_\nu(x)P_\nu(y) + C_\nu\{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y) - P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)\} \end{aligned}$$

ainsi on a :

$$\frac{1}{A_\nu} \left\{ \frac{P_{\nu+1}(x)P_\nu(y) - P_\nu(x)P_{\nu+1}(y)}{x-y} \right\} = P_\nu(x)P_\nu(y) - \frac{C_\nu}{A_\nu} \left\{ \frac{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y) - P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)}{x-y} \right\}$$

comme :  $\frac{C_\nu}{A_\nu} = \frac{k_{\nu-1}h_\nu}{k_\nu h_{\nu-1}}$  et en divisant par  $h_\nu$  on a :

$$U_{\nu+1} - U_\nu = \frac{1}{h_\nu} P_\nu(x)P_\nu(y) \quad \text{où} \quad U_\nu = \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu h_{\nu-1}} \frac{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y) - P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)}{x-y}. \quad \text{On fait la somme pour } \nu = 1 \text{ jusqu' à } n : \sum_{\nu=1}^n \frac{P_\nu(x)P_\nu(y)}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} - \frac{P_0(x)P_0(y)}{h_0}.$$

Pour l'identité 2) il suffit de passer à la limite quand  $y$  tend vers  $x$ .  $\square$

## Remarque

On a précédemment posé :

$$K_n(t, x) = \overline{P_0(t)}P_0(t) + \cdots + \overline{P_n(t)}P_n(t) = P_0(\bar{t})P_0(t) + \cdots + P_n(\bar{t})P_n(t).$$

Si on prend une famille  $\{P_n(x)\}$  orthonormale ( $h_\nu = 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$ ) alors le membre de gauche de la formule de Darboux-Christoffel n'est rien d'autre que :  $K_n(\bar{x}, y) = K_n(\bar{y}, x)$ . On peut donc écrire :

$$\mathbf{D - C} : K_n(x, t) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}.$$

On a une autre démonstration du th. 4.7 en intégrant le second membre de D-C. En appelant  $I(x)$  le résultat on a :

$$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \int_a^b \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t} \rho(t) d\alpha(t),$$

ce qu'on peut écrire :

$$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \left\{ \int_a^b (P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)) \frac{\rho(t) - \rho(x)}{x-t} d\alpha(t) + \rho(x) \int_a^b P_n(t) \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t) + \rho(x) \int_a^b P_{n+1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{x-t} d\alpha(t) \right\}.$$

La première et la dernière intégrale sont nulles, puisque  $\rho(x)$  est un  $\pi_n$ , ainsi :

$$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \rho(x) \int_a^b P_n(t) \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t).$$

Mais  $\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} = k_n t^n + \dots$ , le système  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  étant orthonormal ( $(P_n, P_n) = (P_n, k_n t^n)$ ) on en déduit que  $I(x) = \rho(x)$  et par suite  $\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t} = K_n(x, t)$ .

### 4.3 Propriétés élémentaires des zéros des polynômes orthogonaux

**Théorème 4.9.** *Les zéros des polynômes orthogonaux  $\{P_n(x)\}$  associés à la distribution  $d\alpha(x)$  sur  $[a, b]$  sont réels, distincts et dans  $(a, b)$ .*

#### Démonstration

La démonstration classique de ce théorème est basée sur la propriété d'orthogonalité. Comme  $\int_a^b P_n(x) d\alpha(x) = 0$   $n \geq 1$  on est assuré de l'existence d'au moins un point sur  $(a, b)$  en lequel  $P_n(x)$  change de signe (on a supposé que  $\alpha(x)$  avait une infinité de points de croissance).

Si  $x_1, \dots, x_l$  sont les abscisses de ces points alors le produit  $P_n(x) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_l)$  a un signe constant, on a évidemment  $l \leq n$ . Si  $l < n$  alors  $\int_a^b P_n(x) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_l) d\alpha(x) = 0$ . Le signe étant constant cette intégrale ne peut pas être nulle d'où  $l = n$ .  $\square$

#### Remarques

1) Si  $a < x_0 < b$  est un zéro multiple de  $P_n(x)$  alors :

$$\int_a^b P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x-x_0)^2} d\alpha(x) = \int_a^b \left( \frac{P_n(x)}{x-x_0} \right)^2 d\alpha(x) = 0$$

ce qui est impossible.

2) Soit  $x_0$  un zéro de  $P_n(x)$ . Comme  $P_n(x)$  est à coefficients réels  $P_n(\overline{x_0}) = 0$ , donc  $\frac{P_n(x)}{x-x_0}$  est un  $\pi_{n-1}$  et  $\int_a^b P_n(x) \cdot \frac{P_n(x)}{x-x_0} d\alpha(x) = \int_a^b (x-x_0) \cdot \left\{ \frac{P_n(x)}{x-x_0} \right\}^2 d\alpha(x) = 0$  ce qui entraîne :  $x_0 \int_a^b \left\{ \frac{P_n(x)}{x-x_0} \right\}^2 d\alpha(x) = \int_a^b x \cdot \left\{ \frac{P_n(x)}{x-x_0} \right\}^2 d\alpha(x) \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ .

## Quelques propriétés

Les polynômes  $P_0(x), \dots, P_n(x)$  vérifient :

a) si  $P_\nu(x_0) = 0$ ,  $\nu \geq 1$ ,  $P_{\nu-1}(x_0)P_{\nu+1}(x_0) < 0$

En effet,  $P_{n+1}(x) = (A_n \cdot x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$ , pour  $n = \nu$  et  $x = x_0$  on a :

$$P_{\nu+1}(x_0) = -C_n P_{\nu-1}(x_0) \Rightarrow P_{\nu+1}(x_0)P_{\nu-1}(x_0) = -C_n [P_{\nu-1}(x_0)]^2$$

b) En un point  $x_0$  où  $P_n(x_0) = 0$  on a :  $P'_n(x_0)P_{n-1}(x_0) > 0$ .

On regarde l'identité de Darboux-Christoffel :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \frac{P_\nu(x)^2}{h_\nu} &= \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} (P_{n+1}(x)P'_n(x) - P_n(x)P'_{n+1}(x)) \\ \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{P_\nu(x_0)^2}{h_\nu} &= \frac{k_{n-1}}{k_n} (P'_n(x_0)P_{n-1}(x_0) - P'_{n-1}(x_0)P_n(x_0)) \end{aligned}$$

Comme  $P_n(x_0) = 0$  on a le résultat (puisque les coefficients  $k_n$  ont été pris  $> 0$ ).

c) En utilisant b) on obtient l'importante inégalité suivante :

$$P_{n+1}(x)P'_n(x) - P_n(x)P'_{n+1}(x) > 0$$

d'où il ressort que  $P_n(x)$  et  $P_{n+1}(x)$  ne peuvent avoir des zéros communs. On a en plus les deux théorèmes de séparation suivants :

**Théorème 4.10.** Soient  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  les zéros de  $P_n(x)$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_{n+1} = b$ . Alors chaque intervalle  $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n$  contient exactement un zéro de  $P_{n+1}(x)$ .

**Théorème 4.11.** Entre deux zéros de  $P_n(x)$  il y a au moins un zéro de  $P_m(x)$  pour  $m > n$ .

**Théorème 4.12.** On a la décomposition suivante en fraction continue :

$$\frac{P_n(x)}{P_{n+1}(x)} = \sum_{\nu=0}^n \frac{l_\nu}{x - \xi_\nu} \text{ pour } l_\nu > 0$$

où  $\{\xi_\nu\}_{\nu=0, \dots, n}$  sont les zéros de  $P_{n+1}(x)$  et :

$$l_\nu = \frac{P_n(\xi_\nu)}{P'_{n+1}(\xi_\nu)} > 0.$$

## Démonstration

Simple décomposition en fractions continues,  $l_\nu = \lim_{x \rightarrow \xi_\nu} (x - \xi_\nu) \frac{P_n(x)}{P_{n+1}(x)}$   
avec  $P_{n+1}(x) = k_{n+1} \cdot (x - \xi_0) \cdot \dots \cdot (x - \xi_n)$ .

On a  $P'_{n+1}(x) = k_{n+1} \sum_{\nu=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \nu}}^n (x - \xi_k)$  donc  $P'_{n+1}(\xi_\nu) = k_{n+1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \nu}}^n (x - \xi_k)$ .

Pour voir que  $l_\nu > 0$  il suffit de remarquer qu'on peut écrire :

$$\frac{P_n(\xi_\nu)}{P'_{n+1}(\xi_\nu)} = \frac{P'_{n+1}(\xi_\nu)P_n(\xi_\nu) - P'_n(\xi_\nu)P_{n+1}(\xi_\nu)}{[P'_{n+1}(\xi_\nu)]^2}$$

et on a déjà vu que cette expression est positive dans la remarque précédente en c).  $\square$

## 4.4 Quadrature mécanique de Gauss-Jacobi

**Théorème 4.13.** *Si  $x_1 < \dots < x_n$  sont les racines de  $P_n(x)$ , alors il existe des réels  $a_1, \dots, a_n$  tels que :*

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = a_1 \rho(x_1) + \dots + a_n \rho(x_n)$$

où  $\rho(x)$  est un  $\pi_{2n-1}$  quelconque. Ainsi la distribution  $d\alpha(x)$  et l'entier  $n$  déterminent uniquement les nombres  $a_\nu$  (c'est ce qu'on appelle quadrature mécanique de Gauss-Jacobi).

### Remarques

- Les ensembles  $\{x_\nu\}$  et  $\{a_\nu\}$  dépendent de  $n$ .
- Les nombres  $a_1, \dots, a_n$  sont souvent appelés nombres de Christoffel.

### Démonstration

Il suffit de le montrer pour  $x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$ , cela représente  $2n$  conditions qui déterminent uniquement les  $a_n$  et les points  $x_\nu$  (si les points, distincts,  $x_\nu$  sont donnés arbitrairement, les nombres  $a_\nu$  peuvent être déterminés tels que l'égalité du théorème soit vraie pour tout  $\pi_{n-1}$ ).

On va construire le polynôme d'interpolation de Lagrange,  $L(x)$ , de degré  $n - 1$  qui coïncide avec  $\rho(x)$  en les points  $x_\nu$  :

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^n \rho(x_\nu) \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x - x_\nu)} = \sum_{\nu=1}^n \rho(x_\nu) l_\nu(x)$$

où les  $l_\nu(x)$  sont les polynômes fondamentaux associés aux points  $x_1, \dots, x_n$  de l'interpolation de Lagrange.

$\rho(x) - L(x) = \rho(x) - \sum_{\nu=1}^n \rho(x_\nu) \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x-x_\nu)} = 0$  en les points  $x_1, \dots, x_n$  donc  $P_n(x) =$

$k_n \prod_{\nu=1}^n (x-x_\nu)$  divise  $\rho(x) - L(x)$ . Ainsi il existe un  $\pi_{n-1}$ ,  $r(x)$  tel que l'on ait :

$\rho(x) - L(x) = P_n(x)r(x)$ . Par suite :

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \int_a^b L(x) d\alpha(x) + \int_a^b P_n(x)r(x) d\alpha(x) = \int_a^b L(x) d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^n \rho(x_\nu) \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x),$$

ce qui établit le théorème avec  $a_\nu = \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x) = \int_a^b \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x-x_\nu)} d\alpha(x)$ .  $\square$

### Remarques

1) Inversement, supposons que pour tout  $\pi_{2n-1}$  l'expressions  $\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = a_1 \rho(x_1) + \dots + a_n \rho(x_n)$  soit vérifiée, alors on applique cette formule à un polynôme de la forme  $\rho(x) \cdot r(x)$  où  $\rho(x) = (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$  et  $r(x)$  est un  $\pi_{n-1}$  quelconque. On trouve :  $\int_a^b \rho(x)r(x) d\alpha(x) = 0 \Rightarrow \rho(x) = \text{const} \cdot P_n(x)$ .

2) Pour une fonction arbitraire  $f$  sur  $[a, b]$ , on peut écrire :  $Q_n(f) = a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n)$ . Dans ces conditions le théorème 4.12 peut être reformuler comme suit :

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x) \text{ pourvu que } f(x) \text{ soit un } \pi_{2n-1}.$$

De plus, comme  $a_\nu = \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x)$ , les nombres de Christoffel sont les valeurs de  $Q_n(f)$  pour  $f(x) = l_\nu(x)$ . On peut également discuter, pour une fonction fixée,  $f(x)$ , la convergence de la suite  $\{Q_n(x)\}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Théorème 4.14.** *Les nombres de Christoffel  $a_\nu$  sont positifs et :*

$$a_1 + \dots + a_n = \int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

De plus :

$$a_\nu = \int_a^b \left\{ \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x-x_\nu)} \right\}^2 d\alpha(x) = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)} = \frac{k_n}{k_{n-1}} \frac{1}{P_{n-1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)}$$

$$a_\nu^{-1} = (P_0(x_\nu))^2 + \dots + (P_n(x_\nu))^2 = K_n(x_\nu, x_\nu).$$

## Remarques

- Le cas particulier  $a = -1, b = +1, d\alpha(x) = dx$  est très important. Les abscisses  $x_\nu$  sont les zéros du  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Legendre et la somme des nombres de Christoffel est 2, ce qui est la longueur de l'intervalle d'intégration.
- Un autre cas particulier important :  $a = -1, b = +1, d\alpha(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$  (du à Mehler).
- La positivité des  $a_\nu$  est claire et donnée dans le théorème.
- Ce théorème nous dit que la somme des nombres de Christoffel est égale à la masse totale de la distribution  $d\alpha(x)$  sur  $[a, b]$ .

## Démonstration

$$\text{Notons } \rho(x) = \{l_\nu(x)\}^2, \text{ alors } \int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \sum_{k=0}^n a_k \{l_\nu(x_k)\}^2,$$

$$\text{mais } l_\nu(x_k) = \frac{P_n(x_k)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x_k - x_\nu)} = \begin{cases} 0 & x \neq x_\nu \\ 1 & x = x_\nu \end{cases} \Rightarrow a_\nu = \int_a^b \rho(x) d\alpha(x).$$

De plus en écrivant  $y = x_\nu$  dans la formule de Christoffel-Darboux on obtient :

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) P_k(x_\nu) \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(x_\nu) - P_n(x) P_{n+1}(x_\nu)}{x - x_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{-P_n(x) P_{n+1}(x_\nu)}{x - x_\nu}.$$

En intégrant de  $a$  à  $b$  relativement à  $d\alpha(x)$  :

$$\sum_{k=0}^n P_k(x_\nu) \int_a^b P_k(x) d\alpha(x) = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_\nu} d\alpha(x).$$

Mais  $\int_a^b P_k(x) d\alpha(x) = \delta_{0k}$  puisque  $\{P_k(x)\}$  est une famille orthonormale, ainsi :

$$1 = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_\nu} d\alpha(x) = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu) \int_a^b \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x - x_\nu)} d\alpha(x)$$

$$\text{et donc } a_\nu = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)}.$$

Pour trouver la deuxième représentation de  $a_\nu$  on utilise la formule de récurrence :  $P_{n+1}(x_\nu) = -C_n P_{n-1}(x_\nu)$  avec  $C_n = \frac{k_{n+1}}{k_n^2} k_{n-1}$ , en remplaçant  $P_{n+1}(x_\nu)$  par cette valeur on a le résultat.

Pour avoir  $(a_\nu)^{-1}$  on utilise la formule de Christoffel-Darboux limite pour  $x = x_\nu$  :

$$\sum_{k=0}^n (P_k(x_\nu))^2 = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)$$

$$\text{comme } a_\nu = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)} \text{ on a } (a_\nu)^{-1} = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu) = \sum_{k=0}^n (P_k(x_\nu))^2. \quad \square$$

## Application

Pour des réels quelconque  $u_0, \dots, u_{n-1}$  posons :

$$F(u) \equiv \int_a^b (u_0 + u_1x + \dots + u_{n-1}x^{n-1})^2 d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu (u_0 + u_1x_\nu + \dots + u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2$$

et :

$$G(u) \equiv \int_a^b x(u_0 + u_1x + \dots + u_{n-1}x^{n-1})^2 d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu x_\nu (u_0 + u_1 \cdot x_\nu + \dots + u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2.$$

$$G(u) - \xi F(u) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu (x_\nu - \xi)(u_0 + u_1x + \dots + u_{n-1}x^{n-1})^2 = 0 \text{ pour } \xi = x_1, \dots, x_n.$$

En introduisant  $c_n$  on obtient la forme quadratique suivante :

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} (c_{\nu+\mu+1} - \xi \cdot c_{\nu+\mu}) u_\nu u_\mu.$$

Son déterminant est un  $\pi_n$  en  $\xi$  qui s'annule pour  $\xi = x_1, \dots, x_n$ . et est donc égal à  $KP_n(x)$ , où  $K$  est une constante, cela nous permet de dire que :

$$P_n(x) = (D_n D_{n-1})^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} c_0x - c_1 & c_1x - c_2 & \cdots & c_{n-1}x - c_n \\ c_1x - c_2 & c_2x - c_3 & \cdots & c_nx - c_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n-1}x - c_n & c_nx - c_{n+1} & \cdots & c_{2n-2}x - c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

## 4.5 Fractions continues

### 4.5.1 Généralités

Historiquement les polynômes orthogonaux tirent leur origine de l'étude des fractions continues.

Pour une fraction continue infinie on utilisera la notation :

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \cdots + \frac{a_n}{|b_n|} + \cdots$$

pour :

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{\cdots + \frac{a_n}{b_n}}}$$

On définit  $\frac{R_n}{S_n}$  pour  $n = 0, 1, 2 \dots$  comme la fraction (finie) obtenue à l'aide de la fraction infinie en s'arrêtant au terme  $b_n$ , on a la :

**Proposition 4.1.** *On a les formules de récurrence :*

$$R_0 = b_0, R_1 = b_0b_1 + a_1, R_n = b_nR_{n-1} + a_nR_{n-2} \text{ pour } n \geq 2$$

$$S_0 = 1, S_1 = b_1, S_n = b_nS_{n-1} + a_nS_{n-2} \text{ pour } n \geq 2.$$

En prenant  $R_{-1} = S_{-1} = 0$  ces formules sont valables pour  $n \geq 1$ .

### Démonstration

Posons  $f_n(z) = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n+z|}$ , il suffit de montrer que  $f_n(z) = \frac{R_{n-1}z + R_n}{S_{n-1}z + S_n}$  (on retrouve la fomule de la proposition en regardant  $f_n(0)$ ).

Pour  $n = 1$  :  $b_0 + \frac{a_1}{b_1+z} = \frac{b_0z + (b_0b_1 + a_1)}{1 \cdot z + b_1}$ .

On suppose la formule vraie jusqu'au rang  $n - 1$  :  $f_{n-1}(z) = \frac{R_{n-2}z + R_{n-1}}{S_{n-2}z + S_{n-1}}$ .

Dans cette équation remplaçons  $z$  par  $\frac{a_n}{b_n+z}$  :  $f_{n-1}(z) = \frac{R_{n-2} \cdot \frac{a_n}{b_n+z} + R_{n-1}}{S_{n-2} \cdot \frac{a_n}{b_n+z} + S_{n-1}}$ .

Mais  $f_n(z) = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \dots + \frac{a_{n-1}|}{|\frac{a_n}{b_n+z}|} = \frac{a_n R_{n-2} + (b_n+z) \cdot R_{n-1}}{a_n S_{n-2} + (b_n+z) \cdot S_{n-1}} = \frac{A_n + A_{n-1}z}{B_n + B_{n-1}z}$ .

On prend  $z = 0$  et on a :  $f_n(0) = \frac{R_n}{S_n} = \frac{R_{n-2}a_n + R_{n-1}b_n}{S_{n-2}a_n + S_{n-1}b_n}$ .  $\square$

**Corollaire 4.1.** *On a les formules :*

$$\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(-1)^n a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{S_{n-1}S_n} \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

(donc  $R_n S_{n-1} - R_{n-1} S_n = (-1)^n a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ ).

### Démonstration

$\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{R_n S_{n-1} - R_{n-1} S_n}{S_{n-1} S_n}$  donc il suffit que nous montrions que  $R_n S_{n-1} - R_{n-1} S_n = (-1)^n a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ , ce qu'on montre par récurrence sur  $n$ .

$n = 1$   $R_1 S_0 - S_1 R_0 = (b_0 b_1 + a_1) 1 - b_1 (b_0) = a - 1$ . On suppose la formule vraie jusqu'au rang  $n$ . Alors :

$$R_{n+1} S_n - S_{n+1} R_n = S_n (b_{n+1} R_n + a_{n+1} R_{n-1}) - R_n (b_{n+1} S_n + a_{n+1} S_{n-1})$$

$$= -a_{n+1} (-R_{n-1} S_n + R_n S_{n-1}), \text{ on applique l'hypothèse de récurrence :}$$

$$R_{n+1} S_n - S_{n+1} R_n = -a_{n+1} ((-1)^n a_1 \cdot \dots \cdot a_n). \square$$

### Remarque

Soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  un ensemble de polynômes orthogonaux associés à la distribution  $d\alpha(x)$  sur  $[a, b]$ . La formule de récurrence :  $P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$ , nous



suggère de considérer la fraction continue :

$$\frac{1|}{|A_1x + B_1|} - \frac{C_2|}{|A_2x + B_2|} - \dots - \frac{C_n|}{|A_nx + B_n|} - \dots$$

c'est à dire de prendre  $b_0 = 0$ ,  $b_n = A_nx + B_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_n = -C_n$   $n \geq 2$ .

**Théorème 4.15.** Les  $\frac{R_n}{S_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont déterminés par les formules :

$$R_n = ( = R_n(x) ) = c_0^{\frac{-3}{2}} (c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$$

$$S_n( = S_n(x) ) = c_0^{\frac{1}{2}} P_n(x)$$

où  $c_n = \int_a^b x^n d\alpha(x)$ .

### Démonstration

Pour la première égalité on vérifie que ça marche aux rangs  $n = 0$ ,  $n = 1$  :

$$R_0 = b_0 = 0 \text{ et : } \int_a^b \frac{P_0(x) - P_0(t)}{x-t} d\alpha(t) = 0 \text{ puisque } P_0 = \text{const}, R_1 = b_0b_1 + a_1 = 0 \cdot b_1 + a_1 = 1,$$

$$\int_a^b \frac{P_1(x) - P_1(t)}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(k_1x - b) - (k_1t - b)}{x-t} d\alpha(t) = k_1 \int_a^b d\alpha(t) = k_1c_0 \text{ mais } k_n = \left(\frac{D_{n-1}}{D_n}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ avec}$$

$$D_n = |[c_{\mu+\nu}]_{\mu,\nu=0,1,\dots,n}| \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{c_0}{c_0c_2 - c_1^2}} \Rightarrow R_1 = c_0^{\frac{-3}{2}} (c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{c_0}{c_0c_2 - c_1^2}} c_0 = 1.$$

On va supposer maintenant que  $n \geq 2$ .

Pour exprimer  $R_n$  on introduit le polynôme :  $q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$ . C'est un polynôme de degré  $n-1$  :

$$\frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} = \frac{1}{x-t} [k_n(x^n - t^n) + \dots + k_1(x-t)] = k_n(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + (-1)^n t^{n-1}) + \dots + k_1.$$

On intègre en  $t$  de  $a$  à  $b$ , on obtient un  $\pi_{n-1}$ . On va utiliser les formules de récurrence des polynômes orthogonaux :

$$q_{n+1}(x) = \int_a^b \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{[(A_nx + B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)] - [(A_nt + B_n)P_n(t) - C_nP_{n-1}(t)]}{x-t} d\alpha(t)$$

$$= A_n \int_a^b \frac{xP_n(x) - tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + B_n \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - C_n \int_a^b \frac{P_{n-1}(x) - P_{n-1}(t)}{x-t} d\alpha(t)$$

mais :

$$\int_a^b \frac{xP_n(x) - tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + \int_a^b \frac{xP_n(t) - tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + \int_a^b P_n(t) d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t).$$

Ainsi :

$$q_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)q_n(x) - C_nq_{n-1}(x) \text{ avec } q_0(x) = \int_a^b \frac{P_0(x) - P_0(t)}{x-t} d\alpha(t) = 0,$$

$$q_1(x) = k_1c_0.$$

Comme  $R_1 = b_0b_1 + a_1 = 1$  on a  $R_n(x) = (k_1c_0)^{-1}q_n(x)$  ( $R_n$  et  $q_n$  vérifient la même formule de récurrence).

On a vu que :  $k_1 = c_0^{\frac{1}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow R_n(x) = c_0^{\frac{-3}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$ .

Montrons maintenant la deuxième égalité : D'une part on a  $S_n = (A_nx + B_n)S_{n-1} - C_nS_{n-2}$  avec  $S_0 = 1$ ,  $S_1 = A_1x + b_1 = P_1$  et d'autre part  $P_n = (A_nx + B_n)P_{n-1} - C_nP_{n-2}$ . Ainsi  $P_n$  et  $S_n$  vérifient la même formule de récurrence donc  $S_n = \text{const} \cdot P_n$ . On a  $P_0 = k_0$ ,  $S_0 = 1 \Rightarrow S_n = k_0^{-1}P_n$

(on a vu que  $P_0(x) = D_0^{\frac{-1}{2}} = c_0^{\frac{-1}{2}}$ ).

□

### Remarque

On peut aussi voir que  $\frac{R_n}{S_n}$  est une fonction rationnelle avec des pôles simples en les points,  $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$  (qui ne sont autres que les zéros de  $P_n(x)$ ). Les résidus en ces pôles s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_{\nu,n}} (x - x_{\nu,n}) \frac{(k_1c_0)^{-1}P_n(x)}{k_0^{-1}P_n(x)} \\ &= \frac{k_0}{k_1c_0} \lim_{x \rightarrow x_{\nu,n}} \left\{ \frac{x - x_{\nu,n}}{P_n(x)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) \right\} \\ &= \frac{k_0}{k_1c_0} \lim_{x \rightarrow x_{\nu,n}} \int_a^b \left\{ \frac{x - x_{\nu,n}}{x-t} - \frac{x - x_{\nu,n}}{P_n(x)} \frac{P_n(t)}{(x-t)} \right\} d\alpha(t) = \frac{k_0}{k_1c_0} \int_a^b \frac{P_n(t)}{P_n'(x_{\nu,n})(t - x_{\nu,n})} d\alpha(t) \end{aligned}$$

(On peut remarquer que  $\frac{k_0}{k_1c_0} = \frac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}}$ )

On reconnaît les symboles de Christoffel :

$$\text{Res}\left(\frac{R_n}{S_n}, x_{\nu,n}\right) = \frac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}} \lambda_{\nu,n} \text{ donc } \frac{R_n}{S_n} = \frac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}} \sum_{\nu=0}^n \frac{\lambda_{\nu,n}}{x - x_{\nu,n}}.$$

On peut montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{S_n} = \frac{k_0}{k_1c_0} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c_h}{x^{h+1}} = \frac{k_0}{k_1c_0} \int_a^b \frac{1}{x-t} d\alpha(t)$$

(on a  $c_h = \sum_{\nu=0}^n x_{\nu,n}^h \lambda_{\nu,n}$ )

Pour  $n \geq 1$  on a  $\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0x^{-1} + \mu_1x^{-2} + \dots$

Avec l'expression  $\frac{R_n(x)}{S_n(x)} - \frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)} = \frac{(-1)^{n-1}a_1a_2 \dots a_n}{S_{n-1}S_n}$  on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{S_n(x)} &= \frac{a_1}{S_1S_0} - \frac{a_1a_2}{S_1S_2} + \frac{a_1a_2a_3}{S_2S_3} + \frac{(-1)^{n-1}a_1a_2 \dots a_n}{S_{n-1}S_n} = \left(\frac{R_n(x)}{S_n(x)} - \frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)}\right) + \left(\frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)} - \frac{R_{n-2}(x)}{S_{n-2}(x)}\right) + \\ &\dots + \left(\frac{R_1(x)}{S_1(x)} - \frac{R_0(x)}{S_0(x)}\right). \end{aligned}$$

On obtient une série commençant en  $x^{-1}$  ( $R_0 = 0$ ) et pour  $n \geq 1$  on a :

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n} + \sum_{\nu=2n}^{\infty} \mu_{\nu} x^{-\nu-1}. \square$$

**Théorème 4.16.** *On a  $\lambda_{\nu} = c_0^{-2} c_{\nu} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)}$  pour  $\nu = 0, 1, 2, \dots$*

### Démonstration

On suppose que  $\lambda_{\nu}$  est donné par le théorème

$$\begin{aligned} R_n(x) - S_n(x)(\mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n}) &= \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - c_0^{\frac{1}{2}} P_n(x) (\mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n}) \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - c_0^{\frac{1}{2}} c_0^{-2} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} P_n(x) (c_0 x^{-1} + \cdots + c_{2n-1} x^{-2n}) \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x) (c_0 x^{-1} + \cdots + c_{2n-1} x^{-2n}) \right\} \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - \int_a^b P_n(x) \left( \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{t^k}{x^{k-1}} \right) d\alpha(t) \right\} \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x) \int_a^b \frac{1 - (t/x)^{2n}}{1 - (t/x)} d\alpha(t) \right\} \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x) \int_a^b \frac{1 - x^{-2n} t^{2n}}{x-t} d\alpha(t) \right\} \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} x^{-2n} t^{2n} d\alpha(t) - \int_a^b P_n(t) \frac{1 - x^{-2n} t^{2n}}{x-t} d\alpha(t) \right\} \\ & \text{(Puisque : } -P_n(x) \int_a^b \frac{1 - x^{-2n} t^{2n}}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} (1 - x^{-2n} t^{2n}) d\alpha(t) - \\ & \hspace{20em} \int_a^b \frac{P_n(t)}{x-t} (1 - x^{-2n} t^{2n}) d\alpha(t)) \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \{S_1(x) + S_2(x)\} \\ & \text{avec } S_1(x) = x^{-2n} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} t^{2n} d\alpha(t) \\ & \text{et } S_2(x) = -x^{-2n} \int_a^b P_n(t) [x^{2n-1} + x^{2n-2} t + \cdots + x t^{2n-2} + t^{2n-1}] d\alpha(t) \end{aligned}$$

$$S_2(x) = -x^{-2n} \sum_{k=n}^{2n-1} x^{2n-1-k} \int_a^b P_n(t) t^k d\alpha(t) = - \sum_{k=n}^{2n-1} x^{-1-k} \int_a^b P_n(t) t^k d\alpha(t)$$

Ainsi en divisant l'expression suivante par  $S_n(x)$  :

$$R_n(x) - S_n(x)(\mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n}) = S_1(x) + S_2(x)$$

on obtient une série de la forme :

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n} + \sum_{\nu=2n}^{\infty} \mu_{\nu} x^{-\nu-1}. \square$$

**Théorème 4.17.** *On a la décomposition en fraction rationnelle suivante :*

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = c_0^{-2} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \sum_{\nu=1}^n \frac{\lambda_{\nu,n}}{x - x_\nu}.$$

### Démonstration

On sait que  $R_n(x) = c_0^{-\frac{3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$   
 $S_n(x) = c_0^{\frac{1}{2}} P_n(x).$

Cela entraîne que  $\frac{R_n(x_\nu)}{S'_n(x_\nu)} = \frac{c_0^{-\frac{3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x_\nu) - P_n(t)}{x_\nu - t} d\alpha(t)}{\sqrt{c_0} P'_n(x_\nu)}.$

Mais  $\lambda_{\nu,n} = \int_a^b \frac{P_n(t)}{P'_n(x_\nu)(t-x_\nu)} d\alpha(t).$

Donc  $\frac{R_n(x_\nu)}{S'_n(x_\nu)} = c_0^{-2} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \lambda_{\nu,n}$  d'où le résultat.  $\square$

### 4.5.2 Etude du cas d'un intervalle fini

Considérons le cas  $[a, b]$  intervalle fini.

Etant donnée une distribution  $\alpha(t) = w(t)dt$ , sur  $[a, b]$ , il existe une unique suite de polynômes orthogonaux unitaires  $Q_0(x), Q_1(x), \dots$  vérifiant :

$$Q_0(x) = 1, Q_1(x) = x - a_1, Q_n(x) = (x - a_n)Q_{n-1}(x) - b_n Q_{n-2}(x) \text{ (confer th. 3.2 p.4)}$$

Il existe une deuxième suite de polynômes  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots$  vérifiant la même formule de récurrence et ayant comme conditions initiales :

$$\phi_0 = 0, \phi_1 = b_1 (= \int_a^b d\alpha(t))$$

On pose, comme précédemment,  $c_n = \int_a^b x^n d\alpha(x)$ , tout ceci étant établi, on a le remarquable théorème suivant :

**Théorème 4.18.** ( de Stieltjes )

$$\forall x \notin [a, b], \frac{b_1}{|x - a_1|} + \frac{b_2}{|x - a_2|} + \dots = \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x - t} = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{x^{n+1}}$$

Le  $n^{\text{ième}}$  terme partiel étant  $\frac{\phi_n(x)}{Q_n(x)}$

Pour démontrer ce théorème on a besoin du :

**Lemme 4.1.**  $\phi_n(x) = \int_a^b \frac{Q_n(t) - Q_n(x)}{t-x} d\alpha(t)$ , pour  $n \geq 0$

### Démonstration

Par récurrence :  $\phi_0(x) = 0, \phi_1(x) = b_1$

$$\int_a^b \frac{Q_1(t) - Q_1(x)}{t-x} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(t-a_1) - (x-a_1)}{t-x} d\alpha(t) = \int_a^b d\alpha(t)$$

On suppose l'égalité vraie pour  $k = 0, \dots, n-1$ .

Pour  $n \geq 2$  on a :

$$\int_a^b \frac{Q_n(t) - Q_n(x)}{t-x} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(t-a_n)Q_{n-1}(t) - b_n Q_{n-2}(t) - ((x-a_n)Q_{n-1}(x) - b_n Q_{n-2}(x))}{t-x} d\alpha(t)$$

$$\begin{aligned}
&= (x - a_n) \int_a^b \frac{Q_{n-1}(t) - Q_{n-1}(x)}{t-x} d\alpha(t) + \int_a^b (t-x) \frac{Q_{n-1}(t)}{t-x} d\alpha(t) - b_n \int_a^b \frac{Q_{n-2}(t) - Q_{n-2}(x)}{t-x} d\alpha(t) \\
&= (x - a_n) \phi_{n-1}(x) - b_n \phi_{n-2} = \phi_n(x). \quad \square
\end{aligned}$$

### Démonstration du théorème

Montrons tout d'abord la deuxième égalité.

$$\int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x-t} = \frac{1}{x} \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{1-t/x} = \frac{1}{x} \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} (t/x)^n d\alpha(t) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} \int_a^b t^n d\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^{n+1}}$$

Pour montrer la première égalité prenons  $x \notin [a, b]$  par exemple  $x > b$ .

Soit  $H_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x-t)^k$  où les  $\mu_k$  sont choisis de telle sorte que  $\varepsilon_n \equiv \int_a^b \frac{H_n^2(t)}{x-t} d\alpha(t)$

soit minimum.

Comme  $\frac{d\varepsilon}{d\mu_k} = 0 \Leftrightarrow \int_a^b H_n(t) (x-t)^k \frac{d\alpha(t)}{x-t} = 0$   $k = 1, 2, \dots$  on voit que  $H_n(t)$  est orthogonal à  $1, x-t, (x-t)^2, \dots, (x-t)^{n-1}$  et donc à  $Q_0(t), Q_1(t), \dots, Q_{n-1}(t)$ . Ainsi  $H_n(t)$  est un multiple de  $Q_n(t)$  disons  $H_n(t) = cQ_n(t)$ .

En prenant  $t = x$  on a  $c = \frac{1}{Q_n(x)}$ . La valeur de  $\varepsilon_n$  peut maintenant être déterminée avec l'aide des propriétés d'orthogonalité :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{Q_n(x)} \int_a^b Q_n(t) \frac{H_n(t)}{x-t} d\alpha(t) = \frac{1}{Q_n(x)} \int_a^b Q_n(t) \left[ \frac{1}{x-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x-t)^{k-1} \right] d\alpha(t)$$

C'est à dire  $\varepsilon_n = \frac{1}{Q_n(x)} \int_a^b \frac{Q_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$ , on utilise maintenant le lemme pour écrire :

$$\varepsilon_n = \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x-t} - \frac{\phi(x)}{Q_n(x)}. \text{ Il ne nous reste plus qu'à voir que } \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Appelons  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  les paramètres dans  $H_{n-1}(t)$  qui rendent  $\varepsilon_{n-1}$  minimum.

Alors  $\forall \lambda$  :

$$\varepsilon_n \leq \int_a^b \{ [1 - \lambda(x-t)] [1 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x-t)^k] \}^2 \frac{d\alpha(t)}{x-t}$$

Prenons  $\lambda = \frac{1}{x+a}$  et utilisons les inégalités :  $0 \leq 1 - \frac{x-t}{a+x} \leq 1 - \frac{x-a}{a+x} \equiv \theta < 1$

$$\varepsilon_n \leq \int_a^b \{ [1 - \frac{x-t}{x+a}] [1 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x-t)^k] \}^2 \frac{d\alpha(t)}{x-t} \leq \theta^2 \varepsilon_{n-1}.$$

Ce qui montre que  $\varepsilon_n$  tend vers zéro quand  $n \rightarrow +\infty$  et finit la démonstration.  $\square$

## 5 Propriétés des polynômes orthogonaux classiques

Dans cette partie on se donne un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , on prend comme distribution  $w(x)dx$  et on se place sur  $L_w^2(a, b)$  ( $\subset L^2(a, b)$ ). On suppose :  $w(x) > 0$  sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b x^n w(x) dx < \infty$ .

### 5.1 Formule de Rodriguez

**Théorème 5.1.** Soit  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'applications de  $]a, b[$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie :

- 1)  $(\phi_n)_n$  est de classe  $C^n$  sur  $]a, b[$
- 2)  $\phi_n^{(k)}(a^+) = \phi_n^{(k)}(b^-) = 0$  pour  $0 \leq k \leq n - 1$
- 3)  $T_n \equiv \frac{1}{K_n w} \phi_n^{(n)}$  est un polynôme de degré  $n$ .

Alors  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite orthogonale graduée.

La réciproque est vraie quand  $\omega(x)$  est  $c^\infty$ .

### Démonstration

On prend une suite  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant 1), 2) et 3). Elle est graduée par construction, il suffit de s'assurer que c'est une famille orthogonale. Soit  $P$  un polynôme de degré  $\leq n - 1$ . Alors :  $\int_a^b w(x) T_n(x) P(x) dx = \int_a^b \phi_n^{(n)}(x) P(x) dx = (-1)^n \int_a^b \phi_n(x) P^{(n)}(x) dx = 0$ .

Réciproquement, on pose  $w(x) P_n(x) = \phi_n^{(n)}(x)$  alors  $\int_a^b q_{n-1}(x) \phi_n^{(n)}(x) dx = 0 \forall q_{n-1}$  un  $\pi_{n-1}$   
 $\Rightarrow [\phi_n^{(n-1)}(x) q_{n-1}(x) - \phi_n^{(n-2)}(x) q_{n-1}'(x) + \dots + (-1)^{n-1} \phi_n(x) q_{n-1}^{(n-1)}(x)]_a^b = 0$ .

Ceci étant vrai pour tout polynôme de degré  $\leq n$  on en déduit que  $\phi_n^{(k)}(a^+) = \phi_n^{(k)}(b^-) = 0 \forall k = 0, \dots, n - 1$ .  $\square$

### 5.2 Les polynômes classiques

On suppose dans cette section qu'on dispose d'une famille de polyômes orthogonaux donnée par une formule de Rodriguez de la forme :

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[ w(x) X^n \right].$$

Où  $X$  est un polynôme en  $x$  de degré  $k$ .

Pour  $n = 1$  :

$$K_1 P_1(x) = X' + \frac{X w'(x)}{w(x)}$$

### 5.2.1 Polynômes de Hermite

Prenons  $k = 0$ , alors  $X$  est une constante, par exemple 1, et  $\frac{w'}{w}$  est une fonction linéaire en  $x$ . Par un changement de variable on peut se ramener à :  $\frac{w'}{w} = -2x$ . Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X = 1, w(x) = \exp(-x^2), K_n$$

sont appelés polynômes de Hermite.

### 5.2.2 Polynômes de Laguerre

Prenons  $k = 1$ , par un changement de variable on peut se ramener à  $\frac{w'}{w} = -1 + \frac{a}{x}$ . Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X = x, w(x) = x^a e^{-x}, K_n$$

sont appelés polynômes de Laguerre.

### 5.2.3 Polynômes de Jacobi ou hypergéométriques

Supposons  $k \geq 2$ , on peut prendre  $X = \prod_{r=1}^k (x - a_r)$ .

Commençons par supposer que les  $a_r$  sont distincts. On peut écrire  $\frac{w'(x)}{w(x)} = \sum_{r=0}^k \frac{a_r}{x - a_r}$

$\Rightarrow w(x) = \prod_{r=1}^k (x - a_r)^{a_r}$ . Cela nous donne :

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n \prod_{r=1}^k (x - a_r)^{a_r}} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \prod_{r=1}^k (x - a_r)^{n+a_r} \right\}$$

Sauf pour  $k = 2$ , cette expression n'est pas un polynôme de degré 2 quand  $n=2$ .

Supposons donc  $k = 2$ .

Regardons le cas  $a_1 = a_2 = a$ .

$P_n(x) = \frac{1}{K_n (x-a)^{2a}} \frac{d^n}{dx^n} \{(x-a)^{2(n+a)}\} = A_n (x-a)^n$ . On voit donc que  $P_n(x)$  n'appartient pas à une famille de polynômes orthogonaux, puisqu'il a un zéro multiple.

Le seul cas possible est donc :

$$k = 2 \text{ et } a_1 \neq a_2.$$

Par un changement de variable linéaire on peut se ramener au cas,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ . Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X = 1 - x^2, w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, \alpha, \beta > -1, K_n$$

sont appelés polynômes de Jacobi.

### Remarque

Il y a des polynômes de Jacobi particuliers :

- $\alpha = \beta$ , polynômes hypersphériques
- $\alpha = \beta = (-1/2)$ , polynômes de Tchebitchev de première espèce,  $T_n(x) = \cos(n\theta)$ ,  $x = \cos \theta$
- $\alpha = \beta = 1/2$ , polynômes de Tchebitchev de deuxième espèce,  $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$ ,  $x = \cos \theta$
- $\alpha = \beta = 0$ , polynômes de Legendre.

### 5.3 Equation et forme différentielles

**Théorème 5.2.** Soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes orthogonaux définie à l'aide d'une formule de Rodriguez, alors  $P_n(x)$  satisfait, pour  $n \geq 0$ , une équation différentielle de la forme :

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0$$

Où  $A(x)$  et  $B(x)$  ne dépendent pas de  $n$  et  $\lambda_n$  ne dépend pas de  $x$ .

### Démonstration

D'une part la formule de Liebniz nous dit (on pose  $D = \frac{d}{dx}$ ) :

$$\begin{aligned} D^{n+1}[XD(wX^n)] &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)} D^{n+1}[D(wX^n)], \text{ où } X^{(0)} = X \\ &= XD^{n+2}(wX^n) + (n+1)X'D^{n+1}(wX^n) + \frac{(n+1)n}{2}X''D^n(wX^n) \end{aligned}$$

car  $X^{(k)} = 0$  pour  $k \geq 3$

On utilise maintenant le fait que  $D^n(wX^n) = K_n w P_n$  pour déduire que :

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = K_n \{XD^2(wP_n) + (n+1)X'D(wP_n) + \frac{(n+1)n}{2}X''(wP_n)\}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} D^{n+1}[XD(wX^n)] &= D^{n+1}[X^{n+1}Dw + nX'X^n w] = D^{n+1}[X^n(XDw + nX'w)] \\ &= D^{n+1}[X^n(D(Xw) + (n-1)wX')] \end{aligned}$$

Mais  $D(Xw) = K_1 w P_1$  (formule de Rodriguez pour  $n=1$ ) donc

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = D^{n+1}[X^n(K_1 P_1 + (n-1)X')]$$

On développe en utilisant la formule de Liebniz :

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = D^{n+1}(X^n w)(K_1 P_1 + (n-1)X') + (n+1)D^n(X^n w)(K_1 P_1' + (n-1)X'')$$



$$= K_n \{ D(wP_n)(K_1P_1 + (n-1)X') + (n+1)(wP_n)(K_1P_1' + (n-1)X'') \}.$$

On identifie ces deux valeurs de  $D^{n+1}[XD(wX^n)]$  :

$$XD^2(wP_n) + (n+1)X'D(wP_n) + \frac{(n+1)n}{2}X''(wP_n) = D(wP_n)(K_1P_1 + (n-1)X') + (n+1)(wP_n)(K_1P_1' + (n-1)X'')$$

$\Leftrightarrow$

$$XD^2(wP_n) + D(wP_n)[(n+1)X' - K_1P_1 - (n-1)X''] + (wP_n)[\frac{n(n+1)}{2}X'' - (n+1)K_1P_1' - (n+1)(n-1)X''] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XD^2(wP_n) + D(wP_n)[2X' - K_1P_1] + (wP_n)[-\frac{n^2+n+2}{2}X'' - (n+1)K_1P_1'] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$X(w''P_n + 2w'P_n' + wP_n'') + (w'P_n + wP_n')(2X' - K_1P_1) + (wP_n)[-\frac{n^2+n+2}{2}X'' - (n+1)K_1P_1'] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XwP_n'' + P_n'[2w'X + w(2X' - K_1P_1)] + P_n[Xw'' + w'(2X' - K_1P_1) + w - \frac{n^2+n+2}{2}X'' - w(n+1)K_1P_1'] = 0, \text{ on divise par } w \text{ ( non nul sur } [a, b] \text{ )} :$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + \frac{P_n'}{w} \{ 2(wX)' - wK_1P_1 \} + \frac{P_n}{w} \{ (wX)'' - wX'' - w'K_1P_1 - w(\frac{n^2+n+2}{2})X'' + w(n+1)K_1P_1' \} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + \frac{P_n'}{w} \{ 2(wX)' - wK_1P_1 \} + \frac{P_n}{w} \{ K_1(P_1'w + w'P_1) - w'K_1P_1 + w(\frac{-n^2+n}{2})X'' - (n+1)K_1P_1' \} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n \{ K_1P_1' + \frac{w'}{w}K_1P_1 - \frac{w'}{w}K_1P_1 + \frac{-n^2+n}{2}X'' - (n+1)K_1P_1' \} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n \{ -\frac{n}{2}(n-1)X'' - nK_1P_1' \} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n \{ -n[\frac{n-1}{2}X'' + K_1P_1'] \} = 0$$

$$\begin{cases} A(x) &= X(x) \\ B(x) &= K_1P_1(x) \\ \lambda_n &= -n(\frac{n-1}{2}X'' + k_1K_1). \square \end{cases}$$

### Remarque

L'opérateur autoadjoint associé à cette équation différentielle est :

$$\frac{d}{dx} [Xw \frac{dy}{dx}] + \lambda_n wy = 0.$$

**Théorème 5.3.** (*Mêmes notations*)

$$X \frac{dP_n(x)}{dx} = \left(\alpha_n + \frac{1}{2}nX''\right)P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x)$$

Où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont des constantes indépendantes de  $x$ .

### Démonstration

La démonstration (due à Tricomi, 1948) est basée sur le fait que  $XP'_n(x) - (1/2)nX''xP_n(x)$  est un polynôme de degré  $\leq n$  et donc peut s'écrire :  $\alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \gamma_2 P_{n-2}(x) + \dots + \gamma_n P_0(x)$ , les coefficients étant déterminés par les propriétés d'orthogonalités. Dans la détermination de  $\beta_n$  on va en plus utiliser l'équation différentielle  $\frac{d}{dx}[Xw \frac{dy}{dx}] + \lambda_n w y = 0$ .

On part donc de l'égalité :

$$XP'_n(x) - (1/2)nX''xP_n(x) = \alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \gamma_2 P_{n-2}(x) + \dots + \gamma_n P_0(x)$$

On prend  $(\cdot, P_{n-k})$  pour  $k \geq 2$ , à droite et à gauche :

$$(XP'_n, P_{n-k}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-k}) = \gamma_k h_{n-k}$$

Comme  $(xP_n, P_{n-k}) = (P_n, xP_{n-k})$  et que  $k \geq 2$  on a :

$$(XP'_n, P_{n-k}) = \gamma_k h_{n-k}.$$

Mais :

$$\begin{aligned}(XP'_n, P_{n-k}) &= \int_a^b XP'_n(x)P_{n-k}(x)w(x)dx = -\int_a^b P_n(x)(XP_{n-k}(x)w(x))'dx \\ &= -\{(P_n, X'P_{n-k}) + (P_n, XP'_{n-k}) + \int_a^b P_nXP_{n-k}w'(x)dx\}.\end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule de Rodriguez pour  $n = 1$  ( $Xw' = K_1wP_1 - X'w$ ) :  
 $(XP'_n, P_{n-k}) = -K_1(P_n, P_{n-k}P_1) + (P_n, X'P_{n-k}) = 0$ , pour  $k \geq 2$ .

Finalement on a :

$$(XP'_n, P_{n-k}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-k}) = \alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x).$$

Pour déterminer  $\alpha_n$  on  $(\cdot, P_n)$  :

$$\alpha_n h_n = (XP'_n, P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n).$$

Posons  $X = ax^2 + bx + c$  alors :

$$\begin{aligned}(XP'_n, P_n) &= a(x^2P'_n, P_n) + b(xP'_n, P_n) + c(P'_n, P_n) \\ &= a(nk_n x^{n+1} + (n-1)q_{n,n-1}x^n, P_n) + bk_n n(x^n, P_n) \\ &= ank_n(x^{n+1}, P_n) + (a(n-1)q_{n,n-1} + bk_n n)(x^n, P_n).\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n) = -\frac{1}{2}n2a(k_n x^{n+1} + q_{n,n-1}x^n, P_n).$$

Ainsi :

$$(XP'_n, P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n) = (-aq_{n,n-1} + bk_n n)(x^n, P_n)$$

comme  $(x^n, P_n) = \frac{1}{k_n}h_n$  on déduit que :

$$\alpha_n = -\frac{1}{2}X''\frac{q_{n,n-1}}{k_n} + X(0)n.$$

Pour trouver  $\beta_n$  on  $(\cdot, P_{n-1})$  :

$$\begin{aligned}\beta_n h_{n-1} &= (XP'_n, P_{n-1}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-1}) \\ P_{n+1} &= (A_n x + B_n)P_n - C_n P_{n-1} \Rightarrow (P_{n+1}, P_{n-1}) = A_n(xP_n, P_{n-1}) + B_n(P_n, P_{n-1}) - \\ &C_n(P_{n-1}, P_{n-1})\end{aligned}$$

$$(xP_n, P_{n-1}) = \frac{C_n}{A_n}h_{n-1}$$

$$\begin{aligned}(XP'_n, P_{n-1}) &= \int_a^b Xw(x)P'_n(x)P_{n-1}(x)dx \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dx}(Xw(w)P'_n(x))\wp_{n-1}(x)dx = \lambda_n \int_a^b P_n(x)w(x)\wp_{n-1}(x)dx \\ &= \lambda_n(P_n, \frac{k_{n-1}}{n}x^n) = \lambda_n \frac{k_{n-1}}{n}(P_n, x^n)\end{aligned}$$

Comme  $(xP_{n-1}, P_n) = k_{n-1}(x^n, P_n)$  on a  $(XP'_n, P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{n}(xP_{n-1}, P_n)$ .

$$\beta_n h_{n-1} = \frac{\lambda_n}{n}(xP_{n-1}, P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-1}) = (\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX'')(xP_{n-1}, P_n) = (\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX'')\frac{C_n}{A_n}h_{n-1}.$$

Donc :

$$\beta_n = \frac{C_n}{A_n}(\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX'') = \frac{C_n}{A_n}(\frac{-n(k_1K_1 + \frac{1}{2}(n-1)X'')}{n} - \frac{1}{2}nX'').$$

Finalement :

$$\beta_n = -\frac{C_n}{A_n}(k_1K_1 + (n - \frac{1}{2})X'').$$

Ce qui termine la preuve avec

$$\begin{cases} \alpha_n &= -\frac{1}{2}X''\frac{q_{n,n-1}}{k_n} + X(0)n \\ \beta_n &= -\frac{C_n}{A_n}(k_1K_1 + (n - \frac{1}{2})X''). \square \end{cases}$$

**Proposition 5.1.** On a les égalités :

$$1) h_n = (-1)^n k_n n! K_n^{-1} \int_a^b X^n w(x) dx$$

$$\begin{aligned} 2) \lambda_{\nu,n} &= A_{n-1} h_{n-1} \frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n [P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2} \\ &= A_{n-1} h_{n-1} \frac{\beta_n}{X(x_{\nu,n}) [P'_n(x_{\nu,n})]^2} \end{aligned}$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} 1) (P_n, P_n) &= \int_a^b P_n(x) \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} w(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n n! k_n}{K_n} \int_a^b X^n w(x) dx \text{ apr\`es } n \text{ int\`egrations par parties.} \end{aligned}$$

2) On a vu que :

$$\begin{aligned} a) \lambda_{\nu,n} &= -\frac{k_{n+1} h_n}{k_n} \frac{1}{P'_n(x_{\nu,n}) P_{n+1}(x_{\nu,n})} \\ b) XP'_n(x) &= (a_n + \frac{1}{2}nX''x)P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) \\ c) P_{n+1}(x) &= (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Les deuxi\`eme et troisi\`eme expressions donnent pour  $x = x_{\nu,n}$  :

$$X(x_{\nu,n})P'_n(x_{\nu,n}) = \beta_n P_{n-1}(x_{\nu,n}) \text{ et } P_{n+1}(x_{\nu,n}) = -C_n P_{n-1}(x_{\nu,n})$$

On remplace ces valeurs dans l'expression de  $\lambda_{\nu,n}$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{\nu,n} &= -\frac{k_{n+1} h_n}{k_n} \frac{X(x_{\nu,n})}{-\beta_n C_n [P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2} \\ \text{mais } C_n &= \frac{k_{n+1} h_n}{k_n A_{n-1} h_{n-1}} \Rightarrow \lambda_{\nu,n} = A_{n-1} h_{n-1} \frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n C_n [P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2} \\ \text{et } P_{n-1}(x_{\nu,n}) &= \frac{X(x_{\nu,n}) P'_n(x_{\nu,n})}{\beta_n} \\ \text{donc } \lambda_{\nu,n} &= A_{n-1} h_{n-1} \frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n [\frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n} P'_n(x_{\nu,n})]^2} = A_{n-1} h_{n-1} \frac{\beta_n}{X(x_{\nu,n}) [P'_n(x_{\nu,n})]^2}. \square \end{aligned}$$

## 5.4 Fonctions génératrices

### 5.4.1 Généralité

**Définition 5.1.** Etant donnée une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ , on appellera :

- fonction génératrice ordinaire de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  (fgo), la fonction :  $f(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n$

- fonction génératrice exponentielle de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  (fge), la fonction :  $f(t) = \sum_{n \geq 0} u_n \frac{t^n}{n!}$ .

### Remarques

- Les séries qu'on rencontre dans cette définition sont des séries formelles (dans le sens qu'on ne cherche pas à savoir les valeurs de  $t$  pour lesquelles la série converge et encore moins en quel sens).

- On va noter par la suite :

$$f \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$$

$$f \stackrel{fge}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{t^n}{n!}.$$

**Proposition 5.2.** Propriétés des fgo :

Si  $f \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty}$  alors :

$$1) \{a_{n+h}\} \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \frac{f - a_0 - \dots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$$

$$2) \{P(n)a_n\} \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} P(xD)f \text{ o\`u } p(x) \text{ est un polyn\`ome}$$

$$3) fg \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \left\{ \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right\}_0^{+\infty} \text{ o\`u } g \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \{b_n\}_0^{+\infty}$$

$$4) fk \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \left\{ \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} a_{n_1} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \right\}_0^{+\infty}$$

$$5) \frac{f}{1-x} \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \right\}_0^{+\infty}.$$

### Démonstration

Ce n'est qu'une vérification.  $\square$

### Exemple

Calculons  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n + 5}{n!}$ .

On reconnaît une fgo de terme général  $a_n = \frac{1}{n!}$  prise en  $x = 1$ , on applique 2) :

$$((xD)^2 + (xD) + 5)e^x = [(x^2 + x) + (xD) + 5]e^x = (x^2 + 5x + 5)e^x \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n + 5}{n!} = 11e.$$

**Proposition 5.3.** *Propriétés des fge :*

Si  $f \xleftrightarrow{fge} \{a_n\}_0^{+\infty}$  alors :

$$1) \{a_{n+h}\} \xleftrightarrow{fge} D^h f$$

$$2) \{P(n)a_n\} \xleftrightarrow{fge} P(xD)f \text{ o\i } p(x) \text{ est un polyn\ome}$$

$$3) fg \xleftrightarrow{fge} \left\{ \sum_{j=0}^n \binom{n}{k} a_j b_{n-j} \right\}_0^{+\infty} \text{ o\i } g \xleftrightarrow{fge} \{b_n\}_0^{+\infty}$$

$$4) f^k \xleftrightarrow{fge} \left\{ \sum_{n_1+\dots+n_k=n} a_{n_1} \dots a_{n_k} \right\}_0^{+\infty}.$$

**Remarque**

On peut être surpris que ces deux propositions (5.2 et 5.3) donnent le même résultat. La dérivation met un  $n$  en facteur en diminuant de un le degré de  $x$  et en multipliant par  $x$  on augmente le degré de un donc en itérant on obtient :

$$(xD)^p \left\{ \sum a_n x^n \right\} = \sum n^p a_n x^n$$

$$(xD)^p \left\{ \sum a_n \frac{x^n}{n!} \right\} = \sum n^p a_n \frac{x^n}{n!}.$$

**Exemple**

Nombres de Bell. Il vérifient la formule de récurrence :

$$b(n+1) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} b(k) \text{ pour } n > 0 \text{ } b(0) = 1 \text{ on veut trouver la fge associée, } B(x) =$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{b(k)x^k}{k!}.$$

$$\text{On a : } \bullet B'(x) = \sum_{n \geq 0} b(n+1) \frac{x^n}{n!}$$

$$\bullet B(x) \cdot \sum_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k \right) \frac{x^n}{n!} = e^x B(x)$$

Ce qui nous donne :

$$B'(x) = e^x B(x) \Rightarrow B(x) = c \exp(e^x) \text{ mais } B(0) = 1 \Rightarrow c = e^{-1}, \text{ finalement :}$$

$$B(x) = \exp(e^x - 1).$$

Le nombre de Bell  $b(n)$  est le nombre de partitions d'un ensemble,  $S$ , à  $n$  éléments (une partition étant un recouvrement disjoint de  $S$  par des sous-ensembles de  $S$ ).

## Remarque

Il existe de nombreuses autres fonctions génératrices, elles sont toutes de la forme :  $\sum_{n \geq 0} \frac{f(n)x^n}{B(n)}$  où  $B(n)$  est un certain nombre complexe, notamment :

- F.G. Eulériennes :  $B(n) = (1 - q) \cdot (1 + q + q^2) \cdot \dots \cdot (1 + q + q \dots + q^{n-1})$  où  $q$  est un entier naturel donné.
- F.G. exponentielles multiples :  $B(n) = (n!)^r, r > 1.$

### 5.4.2 Cas des polynômes de Hermite

En partant de la formule de récurrence des polynômes de hermite ( $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x), H_{-1} \equiv 0, H_0 = 0$ ), on veut retrouver la formule de Rodriguez et une formulation explicite par la méthode des fonctions génératrices.

On multiplie chacun des membres de l'égalité par  $\frac{t^n}{n!}$ , on  $\sum_{n \geq 0}$  et en notant  $F(x; t)$  la fge des polynômes de Hermite on a :

$$\frac{d}{dt}F(x, t) = (x - t)F(x, t) \Rightarrow F(x, t) = K_x e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}, F(x, 0) = 1 \Rightarrow K_x = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Finalement :

$$F(x, t) = e^{-\frac{t^2}{2} + xt}$$

En développant la fonction  $e^{\frac{(x-t)^2}{2}}$  en série entière on a :

$$F(x, t) = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (e^{\frac{(x-t)^2}{2}}) \right]_{t=0} = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{\frac{x^2}{2}})$$

Ce qui nous donne la formule de Rodriguez qu'on attendait :

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{\frac{x^2}{2}})$$

Passons à la recherche d'une formulation explicite :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{xt} &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{(-t^2)^j (xt)^k}{2^j j! k!} = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^j x^k t^{2j+k}}{2^j j! k!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{2j+k=n} \frac{(-1)^j x^k t^n}{2^j j! k!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j j! (n-2j)!} \right) t^n \end{aligned}$$

Finalement :

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j j! (n-2j)!}.$$



### 5.4.3 Recherche d'une formule de récurrence

Dans ce qu'on a fait jusqu'à présent on connaissait la formule de récurrence de nos suites, on va voir comment, à partir de la fonction génératrice on peut déterminer la formule de récurrence. Pour ce faire nous allons introduire une opération standard (dans ce genre de recherche!) :

l'opération  $x(\frac{d}{dx}) \log$

- 1) prendre le logarithme des 2 côtés de l'équation,
- 2) différentier les deux membres et multiplier par  $x$ ,
- 3) arranger les fractions des 2 membres,
- 4) pour chaque  $n$ , trouver le coefficient de  $x^n$  des deux membres de l'équation et les équaler.

### Exemple

On a trouvé la fonction génératrice,  $\exp(e^x - 1)$ , des nombres de Bell, retrouvons leur formule de récurrence. Pour cela on va utiliser la méthode du  $x(\frac{d}{dx}) \log$  :

$$1) \log\left\{\sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n\right\} = e^x - 1$$

$$2) x \frac{\sum_{n \geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^{n-1}}{\sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n} = xe^x$$

$$3) \sum_{n \geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^{n-1} = xe^x \sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n$$

On regarde les coefficients de  $x^n$  des 2 membres :

$$\text{à droite : } \sum_{m \geq 0} \frac{x^{m+1}}{m!} \sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n = x \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b(k) \frac{x^n}{n!}$$

$$[x^n] \left\{ xe^x \sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n \right\} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b(k).$$

$$\text{A gauche : } [x^n] \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^n \right\} = \frac{b(n)}{(n-1)!}.$$

Finalement on a :

$$b(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b(k), \quad n \geq 1, \quad b(0) = 1.$$

## 6 Table de polynômes

POLYNOMES DE HERMITE, $H_n(x)$
--------------------------------

Intervalle d'étude :

$$(-\infty, +\infty).$$

Standardisation :

$$[x^n]H_n(x) = 2^n.$$

Fonction poids :

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Norme :

$$h_n = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

Formulation explicite :

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = 2x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad y = H_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \{e^{-x^2}\}.$$

Fonction génératrice :

$$e^{2xz-z^2} = \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Inégalités :

$$|H_{2m}(x)| \leq e^{x^2/2} 2^{2m} m! \left[ 2 - \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \right],$$
$$|H_{2m+1}(x)| \leq |x| e^{x^2/2} \frac{(2m+2)!}{(m+1)!}.$$

POLYNOMES DE LAGUERRE GENERALISES,  $L_n^\alpha(x)$

Intervalle d'étude :

$$[0, +\infty).$$

Standardisation :

$$[x^n]L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Fonction poids :

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}.$$

Formulation explicite :

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n + \alpha}{n - m} \frac{1}{m!} x^m.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} (n + 1)L_{n+1}^\alpha(x) &= [(2n + \alpha + 1) - x]L_n^\alpha(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x) \\ L_0^\alpha(x) &= 1 \\ L_1^\alpha(x) &= 1 + \alpha - x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0, y = L_n^\alpha(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}.$$

Fonction génératrice :

$$(1 - z)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) = \sum_{n \geq 0} L_n^\alpha(x) z^n, |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|L_n^\alpha(x)| \leq \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} e^{x/2}, x \geq 0, \alpha \geq 0,$$

$$|L_n^\alpha(x)| \leq \left(2 - \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}\right) e^{x/2}, x \geq 0, -1 < \alpha < 0.$$

POLYNOMES DE JACOBI,  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$

Intervalle d'étude :

$$]-1, +1[.$$

Standardisation :

$$P_n^{\alpha, \beta}(1) = \frac{(n + \alpha) \cdot (n - 1 + \alpha) \cdot \dots \cdot (\alpha + 1)}{n!} \equiv \binom{n + \alpha}{n}.$$

Fonction poids :

$$w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1) n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}.$$

Formulation explicite :

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n + \alpha}{m} \binom{n + \beta}{n - m} (x - 1)^{n - m} (x + 1)^m.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} 2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) \\ = (2n + \alpha + \beta + 1)[(\alpha^2 - \beta^2) + (2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)x]P_n^{\alpha, \beta}(x) \\ - 2(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) \\ P_0^{\alpha, \beta}(x) = 1 \\ P_1^{\alpha, \beta}(x) = (1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta))x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0, \quad y = P_n^{\alpha, \beta}(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \{(1 - x)^{n + \alpha} (1 + x)^{n + \beta}\}.$$

Fonction génératrice :

$$R^{-1}(1 - z + R)^{-\alpha} (1 + z + R)^{-\beta} = \sum_{n \geq 0} 2^{-\alpha - \beta} P_n^{\alpha, \beta}(x) z^n,$$

$$R = (1 - 2xz + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad |z| < 1.$$

Inégalités :

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n^{\alpha, \beta}(x)| = \begin{cases} \binom{n+q}{n} \sim n^q & \text{si } q = \max(\alpha, \beta) \geq -\frac{1}{2} \\ |P_n^{\alpha, \beta}(x')| \sim n^{-\frac{1}{2}} & \text{si } q < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

Où  $x'$  est l'un des deux plus grands points les plus proches de  $\frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 1}$ .

POLYNOMES DE TCHEBYCHEF DE PREMIERE ESPECE,  $T_n(x)$

Intervalle d'étude :

$$]-1, +1[.$$

Standardisation :

$$T_n(1) = 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = (1 - X^2)^{\frac{-1}{2}}.$$

Norme :

$$h_n = \begin{cases} \pi/2 & n \neq 0 \\ \pi & n = 0. \end{cases}$$

Formulation explicite :

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = \cos(n \operatorname{Arccos} x)$$

$$x^{2m} = 2^{1-2m} \sum_{j=0}^m \binom{2m}{m-j} T_{2j}(x) - 2^{-2m} \binom{2m}{m}$$

$$x^{2m+1} = 2^{-2m} \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{m-j} T_{2j+1}(x)$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} T_{n+1} &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad y = T_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2} = \sum_{n \geq 0} T_n(x) z^n, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

POLYNOMES DE TCHEBYCHEF DE SECOND ESPECE, $U_n(x)$
--

Intervalle d'étude :

$$[-1, +1].$$

Standardisation :

$$U_n(1) = n + 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Norme :

$$h_n = \frac{\pi}{2}.$$

Formulation explicite :

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(m-n)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1},$$

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \\ U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0, \quad y = U_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1) \sqrt{\pi}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2})} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n \geq 0} U_n(x) z^n, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|U_n(x)| \leq n + 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$



POLYNOMES DE LEGENDRE,  $P_n(x)$

Intervalle d'étude :

$$[-1, +1].$$

Standardisation :

$$P_n(1) = 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = 1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{2}{2n+1}.$$

Formulation explicite :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \\ P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad y = P_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^n\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n \geq 0} P_n(x)z^n, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad |z| < 1.$$

Inégalité :

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- **SZEGO** : orthogonal polynomials.
- **CHENEY** : introduction to approximation theory.
- **BATEMAN** : higher transcendental functions (vol. 2).
- **HILDEBRANT** : introduction to numerical analysis.
- **DAVIS&ROBINOWITZ** : methods of numerical integration.
- **RICHARD&STANLEY** : enumerative combinatoire (vol. 1).
- **WILF** : generating functionology .
- **BOCCARA** : analyse fonctionnelle .