

Détection des ondes gravitationnelles

P. Hello

▶ **To cite this version:**

P. Hello. Détection des ondes gravitationnelles. École thématique. Ecole Joliot Curie "Structure nucléaire : un nouvel horizon", Maubuisson, (France), du 8-13 septembre 1997 : 16ème session, 1997. cel-00652732

HAL Id: cel-00652732
https://cel.hal.science/cel-00652732

Submitted on 16 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Détection des ondes gravitationnelles

P. Hello

Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Groupe VIRGO
Bâtiment 208, Université Paris-Sud, 91405 Orsay

Résumé : La détection directe des ondes gravitationnelles est l'un des défis les plus prometteurs de cette fin de siècle. Dans ce cours, on rappelle tout d'abord la notion d'onde gravitationnelle, puis on donne les sources astrophysiques envisagées pour les détecteurs terrestres. Les méthodes de détection sont ensuite passées en revue : barres résonnantes et interféromètres, avec, pour ces derniers des exemples et illustrations tirés de l'expérience VIRGO.

Abstract : The direct detection of gravitational waves is one of the most challenging physics experiments. Here, the notion of gravitational waves is first recalled and astrophysical sources of interest for Earth-based detectors are given. The methods of detection are then reviewed : resonating bars and interferometers, the laters being illustrated by examples from the VIRGO experiment.

1 Les ondes gravitationnelles et les sources astrophysiques

1.1 Les ondes gravitationnelles dans le cadre de la Relativité Générale

Dans le cadre de la Relativité Générale, les ondes gravitationnelles (OG) apparaissent comme une solution naturelle des équations d'Einstein linéarisées. Les équations d'Einstein s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, $T_{\mu\nu}$ est le tenseur impulsion-énergie, R est la courbure scalaire (trace du tenseur de Ricci), et $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique qui définit, entre autre, l'intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2}$$

Dans l'approximation des champs faibles, $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, où $\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur de Minkowski (espace-temps plat) :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

et $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, les équations d'Einstein sont linéarisées et deviennent :

$$\Box k_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{4}$$

où $\Box$ représente l'opérateur D'Alembertien et $T_{\mu\nu}$ est ici l'approximation d'ordre 0 en h du tenseur énergie-impulsion. Le champ gravitationnel $k_{\mu\nu}$ est relié à la perturbation de la métrique $h_{\mu\nu}$ par

$$k_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h, \tag{5}$$

h étant la trace de $h_{\mu\nu}$. Le tenseur métrique étant symétrique, il y a au plus 10 composantes indépendantes dans $h_{\mu\nu}$ et $k_{\mu\nu}$. De plus, l'équation de conservation du tenseur impulsion-énergie, $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$, implique $\partial^\mu k_{\mu\nu} = 0$, ce qui réduit à 6 le nombre de composantes indépendantes.

Un certain changement de jauge, qui correspond à la jauge TT (pour Transverse Traceless), permet encore de simplifier le problème et de se ramener à une description minimale (deux composantes indépendantes). Cette jauge permet en outre de "confondre" les tenseurs métrique $h_{\mu\nu}$ et champ $k_{\mu\nu}$. Dans la jauge TT, la perturbation de la métrique possède les propriétés :

- $h^{TT}_{0\nu} = 0$: le tenseur est transverse (seules les composantes spatiales sont non nulles).
- $h^{TT}_{\mu\mu} = 0$: le tenseur est de trace nulle.
- $\partial^\mu h^{TT}_{\mu\nu} = 0$: le tenseur est de divergence nulle (ce qui n'est pas propre à la jauge TT).
- $\Box h^{TT}_{\mu\nu} = 0$: équation de propagation (loin des sources de champ).

La première conséquence est que les OG se propagent à la vitesse de la lumière, comme l'indique l'équation de propagation. Enfin, l'écriture la plus générale de $h^{TT}_{\mu\nu}$ est (Oz étant la direction de propagation de l'OG):

$$h^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

soit $h^{TT}_{\mu\nu} = h_+ e^+_{\mu\nu} + h_\times e^\times_{\mu\nu}$, avec

$$e^+_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^\times_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

On remarque que les deux tenseurs $e^+_{\mu\nu}$ et $e^\times_{\mu\nu}$ sont linéairement indépendants, ce qui montre qu'il y a finalement deux polarisations indépendantes pour l'OG, que l'on notera "+" et "×". De plus, il est facile de constater que l'on passe d'une polarisation à l'autre par une rotation d'angle $\pi/4$, ce qui est caractéristique d'une onde d'hélicité 2 (le graviton est donc de spin 2).

Enfin, toujours en considérant une OG se propageant selon l'axe des z, en posant encore $h_+ = h^{TT}_{11} = -h^{TT}_{22}$ et $h_\times = h^{TT}_{12} = h^{TT}_{21}$, et en remontant aux sources de champ, on peut montrer que les polarisations h_+ et $h_\times$ de l'OG sont reliées au *moment quadrupolaire réduit* $q^{TT}_{\mu\nu}$ de la source par :

$$h_+ = -\frac{G}{Rc^4}\left(\frac{\partial^2 q^{TT}_{11}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q^{TT}_{22}}{\partial t^2}\right), \tag{8}$$

$$h_\times = -\frac{2G}{Rc^4}\frac{\partial^2 q^{TT}_{12}}{\partial t^2}, \tag{9}$$

où R est la distance de la source. Le moment quadrupolaire réduit $q_{\mu\nu}$ est simplement la partie sans trace du moment quadrupolaire $Q_{\mu\nu} = \int\int\int \rho x_\mu x_\nu d^3x$ de la source : $q_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}Q^\alpha_\alpha$.

1.2 Effet d'une onde gravitationnelle

Une OG étant définie comme une perturbation propagative de la métrique de l'espace-temps, le passage d'une OG au voisinage de deux masses d'épreuve va donc modifier la distance entre celles-ci. Ici, "distance" est à prendre au sens opérationnel, c'est à dire le temps mis par la lumière pour aller d'une masse à l'autre. Si A et B sont les "positions" des deux masses dans l'espace-temps, et si on pose $\mathbf{AB} = (x^\mu)$, le vecteur (x^μ) obéit à l'équation de la géodésique en champ faible :

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{TT}_{\mu\nu}}{\partial t^2}x^\nu. \tag{10}$$

La variation maximale de la distance mesurée entre A et B est donc :

$$\delta L \approx \frac{h}{2}L, \tag{11}$$

où L est la longueur du segment AB au repos et h est l'amplitude de l'onde gravitationnelle. D'après l'équation précédente, h peut être interprété comme un taux de déformation

de l'espace; en effet, l'OG modifie la distance *relative* entre les deux masses-test. On peut montrer que l'effet est de plus différentiel, c'est à dire que lorsque les distances semblent s'allonger dans une certaine direction, elles semblent alors se raccourcir dans une direction orthogonale (et vice versa une demi-période plus tard), ce qui rappelle la nature quadrupolaire des OG (voir figure 1).

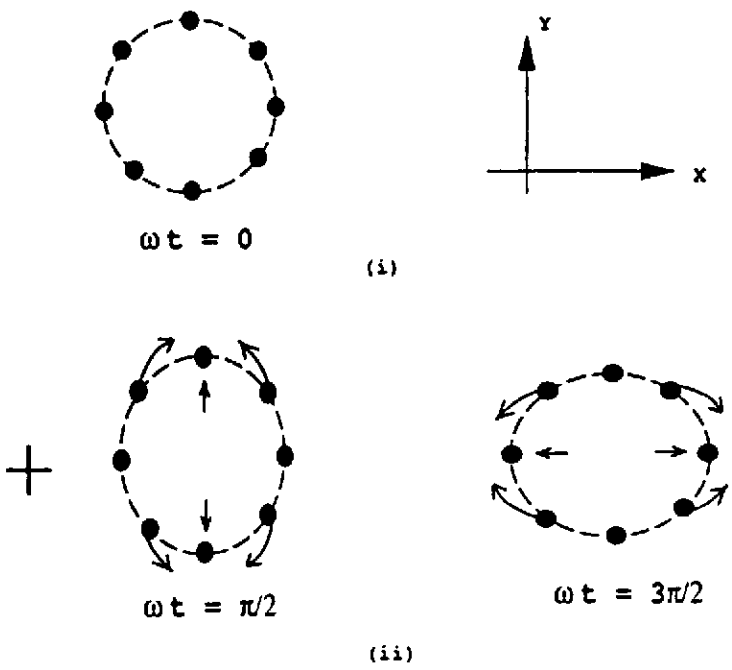


Figure 1: Effet d'une OG sur un cercle de masses d'épreuve. L'incidence est l'onde est normale au plan des masses.

1.3 Sources d'onde gravitationnelle et puissances rayonnées

La puissance rayonnée par un système dans le domaine gravitationnel s'écrit :

$$P = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5} < \frac{\partial^3 Q_{\mu\nu}}{\partial t^3}\frac{\partial^3 Q^{\mu\nu}}{\partial t^3} > . \qquad (12)$$

De façon générale, une source d'ondes gravitationnelles doit posséder un moment quadrupolaire non nul et non statique. On peut déjà conclure que tout système à symétrie sphérique

ne pourra rayonner d'OG. De plus, le rapport G/c^5 est ridiculement petit, de l'ordre de $3 \times 10^{-53}\,\mathrm{W}^{-1}$, si bien que seules des systèmes possédant un moment quadrupolaire consistant et rapidement variable vont donner lieu à des puissances rayonnées appréciables. Le tableau ci dessous donne quelques ordres de grandeur pour les puissances, flux et amplitudes de sources typiques. Les amplitudes ont été calculées selon

$$h \simeq \frac{1}{R\omega}\left(\frac{GP}{c^3}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

où ω est une pulsation caractéristique de la source et R la distance à la source. Force est de constater qu'il s'avère impossible de réaliser une expérience de Hertz (émission-détection) dans le domaine des OG au laboratoire ! Au contraire, la coalescence de deux trous noirs dans l'amas de la Vierge (Virgo), à 10 Mpc, peut rayonner une puissance formidable, de l'ordre de $2 \times 10^{50}\,\mathrm{W}$ (supérieure à la luminosité de l'Univers observable dans le domaine électromagnétique !), qui peut être éventuellement détectée sur Terre.

	P(W)	distance	Flux($\mathrm{W.m^{-2}}$)	h
barreau acier				
$\mathrm{M} = 500\,\mathrm{T}$, $\mathrm{r} = 1\,\mathrm{m}$	2×10^{-29}	1 m	5×10^{-31}	2×10^{-34}
$\mathrm{L} = 20\,\mathrm{m}$, 5 tours/s				
Bombe H – 1MT, asym = 10%	5×10^{-11}	10 km	5×10^{-18}	2×10^{-39}
systeme Terre – Lune	6×10^{-6}			
systeme Terre – Soleil	187			
supernova – $10\,\mathrm{M}_\odot$, asym = 3%	10^{44}	10 Mpc	10^{-3}	10^{-23}
2 trous noirs $1\,\mathrm{M}_\odot$, $\mathrm{d} = 3\,\mathrm{km}$	2×10^{50}	10 Mpc	2×10^{3}	10^{-20}

Table 1 : Quelques exemples de générateurs d'ondes gravitationnelles.

On peut réécrire la puissance rayonnée en fonction des paramètres caractéristiques de la source, sa masse M, ses dimensions d, une pulsation ω. En posant le moment quadrupolaire typique $Q \simeq aMR^2$, où a est un facteur d'assymetrie (écart à la symétrie sphérique), il vient :

$$P \sim \frac{G}{c^5} a^2 M^2 \omega^6 d^4. \tag{14}$$

Suivant Weber[1)], on peut alors transformer cette expression de façon à inverser le rapport G/c^5 ridiculement petit en $c^5/G \simeq 4 \times 10^{52}\,\mathrm{W}$, facteur fantastiquement grand ! En effet, si $R_s = 2GM/c^2$ est le rayon de Schwarzschild de la source, et si v est une vitesse caractéristique de la source, alors $\omega \sim v/d \sim v/c \times c/d$ et $M = R_s c^2/2G$ d'où :

$$P \sim \frac{G}{c^5} a^2 \left(\frac{R_s c^2}{G}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6 \left(\frac{c}{d}\right)^6 d^4, \tag{15}$$

soit

$$P \sim \frac{c^5}{G} a^2 \left(\frac{R_s}{d}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6, \tag{16}$$

et le tour est joué; un système tel que $d \sim R_s$ et $v \sim c$ pourra rayonner gravitationnellement une puissance formidable. Heureusement, de tels objets existent dans l'Univers: ce sont les astres "compacts" (relativistes), étoiles à neutrons ($d \sim$ quelques R_s) et trous noirs ($d = R_s$, vitesse de chute libre d'une particule sur un trou noir $= c$ sur l'horizon). Il est clair que seules des sources impliquant un ou plusieurs astres compacts peuvent produire une puissance rayonnée intense (voir la table 1). Cependant, si la puissance émise peut être énorme, l'amplitude h reste toujours très petite. Dans l'exemple de la coalescence des deux trous noirs ci-dessus, la puissance rayonnée équivaut à environ 10^{24} fois la luminosité du Soleil, mais l'amplitude, après 10 Mpc de propagation, n'est que $h \sim 10^{-20}$. On peut interpréter h comme un taux de déformation de l'espace-temps, mais l'espace-temps est un milieu très rigide, d'impédance mécanique caractéristique $Z_{vide} \sim c^3/G \sim 4 \times 10^{35}$ $\mathrm{kg\,s^{-1}}$, ce qui explique qu'une OG, même propageant une énergie considérable, ne peut avoir qu'une amplitude très faible. Une autre conséquence, importante du point de vue de la détection, est que le rayonnement gravitationnel se couple très peu avec la matière. Prenons l'exemple d'un détecteur résonnant (voir partie 2) d'impédance mécanique typique $Z_d \sim 10^8\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$; la désadaptation d'impédance entre le "vide" et le milieu détecteur est de l'ordre de $Z_d/Z_{vide} \sim 10^{-27}$ ce qui indique la difficulté de la détection directe des OG.

1.4 Sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles

1.4.1 Supernovae

Les effondrements d'étoiles sont historiquement les premières sources possibles d'OG envisagées par les astrophysiciens. Si l'on connait assez bien le taux d'occurence des supernovae de type II, environ 2-3 SN II par siècle et par galaxie, on ne sait pas en revanche prédire les formes d'ondes émises. Il n'y a pas en effet de véritable contrainte observationnelle directe sur l'asphéricité (nécessaire pour émettre) des effondrements; rappelons qu'une SN II est l'effondrement du coeur d'une étoile massive (en fin d'évolution) en étoile à neutrons et que l'on ne peut observer à l'aide de nos télescopes que les couches externes de l'étoile, éjectées lors de l'effondrement. Les seules causes possibles d'asymétrie sont liées à la présence d'un compagnon ou à la loi de rotation de l'étoile. Les modèles modernes[2)] prédisent que l'asphéricité reste faible et que l'amplitude reçue sur Terre est $h \sim 10^{-23} - 10^{-22}$ pour une source située à 10 Mpc (dans l'amas de la Vierge) avec des fréquences d'émission typiques de l'ordre de 100 Hz à 1 kHz (voir figure 2). Cependant, on connait des pulsars (résidus de SN II) se déplaçant à des vitesses de l'ordre de plusieurs centaines de km/s; en particulier le pulsar PSR 2224+65 ("s'échappant" de la nébuleuse de la guitare) possède une vitesse supérieure à 800 km/s, ce qui en fait l'objet le plus rapide de la Galaxie[3)]. Ceci montre que dans quelques cas, un effondrement peut-être TRES asymétrique.

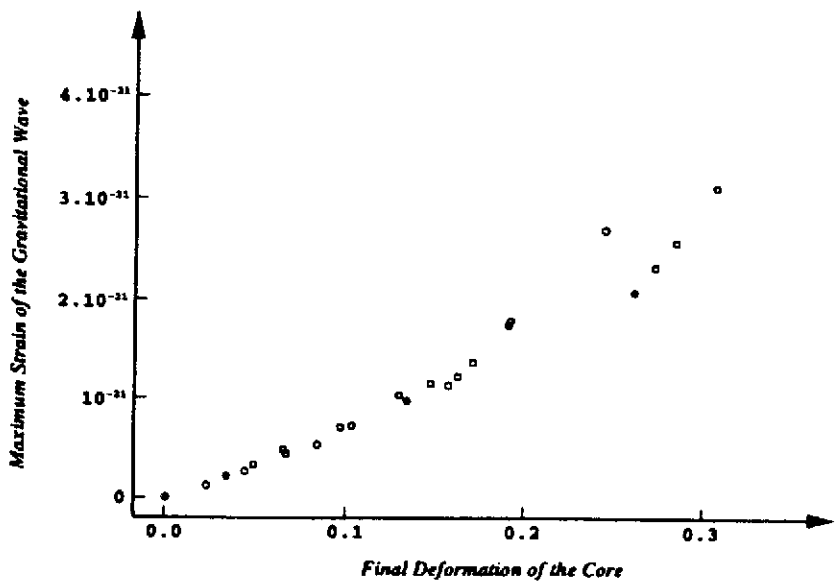


Figure 2: Amplitude maximale d'OG émises par une supernova de type II à 1 Mpc en fonction de la déformation finale du coeur pour différents scénarios et conditions initiales, d'après Bonazzola et Marck[2].

Les effondrements en trous noirs (supernovae "silencieuses") semblent plus efficaces du point de vue émission avec des amplitudes typiques $h \sim 10^{-22}$ à 10 Mpc[4]. Par contre on ne peut pas dire grand chose quant au taux d'occurence de ces événements, car ils sont justement optiquement inobservables.

1.4.2 Binaires spiralantes

Une binaire compacte spiralante désigne un couple d'étoiles à neutrons ou de trous noirs ou d'un trou noir et une étoile à neutrons. Au contraire des supernovae, les signaux émis par les binaires compactes spiralantes sont très bien modélisés, jusqu'à des instants proches de la coalescence (fusion) finale. Un tel système possède en effet un moment quadrupolaire variable et émet donc des OG. Emettant des OG, il perd de l'énergie et les deux étoiles se

rapprochent. Se rapprochant, la variation de moment quadrupolaire augmente, de même que l'énergie perdue par émission d'OG, et cette évolution catastrophique du système conduit inexorablement les deux compagnons jusqu'à la coalescence; le fameux pulsar binaire PSR 1913+16 coalescera par exemple dans environ 300 millions d'années. La partie spiralante est très bien comprise[5]: il s'agit essentiellement d'un mouvement newtonien de deux masses ponctuelles avec dissipation due à la génération d'OG. On peut voir sur la figure 3, la forme d'onde typique pour les derniers instants d'un système de deux étoiles à neutrons. Par contre la coalescence proprement dite est pour ainsi dire inconnue, car les détails fins de la structure des étoiles sont prépondérants (équation d'état des étoiles à neutrons par exemple) ou encore car on ne sait pas résoudre exactement le problème à deux corps en relativité générale (problème de la fusion de deux trous noirs).

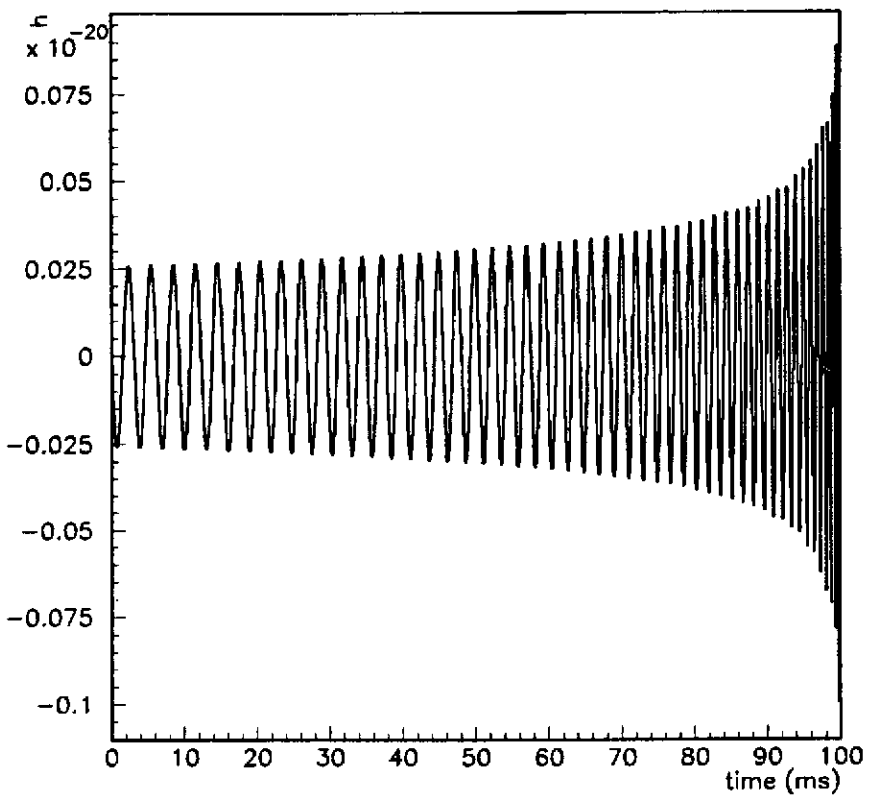


Figure 3: Amplitude h d'une OG émise par un système de deux étoiles à neutrons situé à 10 Mpc. Les deux étoiles ont même masse $\simeq 1.4\,M_\odot$.

Si la partie quasi-newtonienne du mouvement est bien connue, on ne peut pas en dire autant de la statistique des événements. Les chiffres varient de 1 à 100 selon les auteurs[6], cette disparité étant due essentiellement au faible échantillon de pulsars binaires détectés dans la

Galaxie (5 soit 1% du nombre total de pulsars connus). Un consensus conservateur permet d'espérer en gros un événement par an détectable par les détecteurs interférométriques.

1.4.3 Pulsars

On estime à plus de 10^5 le nombre de pulsars dans notre Galaxie et à quelques milliers le nombre de pulsars de fréquence supérieure à quelques Hz et susceptibles d'être détectés sur Terre. Si ces derniers sont asymétriques (mémoire de "starquakes" ou instabilité de rotation) ou même s'ils restent axisymétriques mais précessent, ils peuvent émettre un signal périodique d'OG. Mais les amplitudes attendues sont faibles (contraintes par le ralentissement observé de quelques pulsars), par exemple $h_{max} \sim 10^{-24}$ pour le pulsar du crabe. Par contre, le signal étant périodique, il peut être intégré sur un temps suffisement long pour l'exhiber du bruit du détecteur, après une démodulation Doppler convenable.

1.4.4 Sources stochastiques

On peut regrouper dans cette catégorie nombre de sources plus ou moins exotiques. Fonds cosmologiques dus à différentes transitions de phase de l'Univers naissant, vibrations de cordes cosmiques, ou superposition incohérente d'un grand nombre de sources individuelles, comme le fond dû aux binaires galactiques (fond à basse fréquence $<$ mHz).

2 Détection des ondes gravitationnelles, généralités

L'américain Joe Weber eut le premier l'idée, à la fin des années 50, que des OG de fréquence appropriée pouvaient exciter les modes de vibration d'un solide. Il conçut ainsi le premier détecteur : un cyclindre d'Aluminium de 1.5 m de longueur de de 65 cm de diamètre (fréquence du fondamental $\sim$ 1660 Hz), couplé à des capteurs piezoélectriques. Il est remarquable de songer que ce travail de pionnier fut entrepris alors que l'on savait peu de choses sur les sources possibles d'OG; rappelons que certains objets comme les pulsars, les quasars ou les binaires X n'avaient pas encore été découverts à l'époque, et qu'on avait alors l'image d'un Univers bien tranquille, image bouleversée ensuite grâce aux progrès de la radioastronomie et aux détecteurs X, γ... embarqués. Le tableau ci-dessous rappelle les dates essentielles concernant les efforts entrepris pour la détection des OG depuis Weber.

- 1960 Premier détecteur (Weber)
- 1963 Proposition de détection interférométrique (Gertsenshtein et Pustovoit)
- 1969 Fausse première détection (Weber)
- 1970s Essort des détecteurs résonnants

- 1972 Faisabilité des détecteurs interférométriques (Weiss)
- 1972 Premier prototype d'interféromètre (Forward)
- 1974 Découverte du pulsar binaire PSR 1913+16 (Hulse et Taylor)
- Fin des 70s-début des 80s Barres refroidies à 4 K et prototypes d'interféromètres (Garching, Glasgow et Caltech)
- 1980 Premières études en France concernant les détecteurs interférom. (Brillet et Tourrenc)
- 1986 Début de la collaboration Virgo (France+Italie)
- 1989 Soumission du Virgo proposal au CNRS et à l'INFN. Soumission du LIGO proposal à la NSF
- 1990 GEO proposal (RFA+GB). Plans au Japon et en Australie.
- 1992 Virgo approuvé en France. Approbation de LIGO. GEO retardé
- 1993 Virgo approuvé en Italie. Pré-études d'interféromètres spatiaux (LISA)
- 1996 Début construction Virgo et LIGO. GEO devient GEO600. TAMA-300 au Japon
- Futur probable : 3 grands interféromètres (1 pour Virgo et 2 pour LIGO)+GEO600+TAMA-300 et barres de troisième génération refroidies sous les 100 mK.

Le principe général de détection repose sur une mesure sensible de la modification des longueurs induite par le passage d'une OG (cf Eq.11). On peut séparer les détecteurs en deux catégories : détecteurs résonnants (barre de Weber) où l'OG incidente vient exciter la résonance mécanique de la barre et détecteurs électromagnétiques (interféromètre, timing de pulsars ou poursuite Doppler de sondes spatiales) où l'OG perturbe le temps de vol des photons (ou la phase de l'onde lumineuse) se propageant entre un émetteur et un récepteur. Dans la suite, on va étudier en détail les deux principaux types de détecteurs terrestres d'OG : les barres résonnantes et les interféromètres de type Michelson.

3 Barres résonnantes ou barres de Weber

3.1 Les barres résonnantes dans le monde

Les barres actuellement en service ou en dévellopement (voir table 2) sont restées fidèles au principe du premier détecteur de Weber. Sur la figure 4, on peut voir la barre Niobe

en service en Australie. C'est une barre de seconde génération, refroidie à l'Hélium liquide. Le matériau utilisé est un quasi monocristal de Niobium ($m \simeq 1500\,\mathrm{kg}$), particulièrement intéressant pour son facteur de qualité mécanique très élevé ($Q \simeq 2 \times 10^8$ à 4 K). On remarque le transducteur placé sur l'une des extrémités de la barre et chargé de recueillir et d'amplifier les vibrations de la barre au voisinage de sa fréquence fondameantale. Notons que toutes les autres barres sont en Aluminium Al5056 ($Q \simeq 4 \times 10^7$ à 4 K).

Nom	Location	Température	Fréquence	Sensibilité r.m.s.
Explorer	CERN (Rome)	4 K	840 Hz	$h \sim 6 \times 10^{-19}$
Allegro	Bâton Rouge (L.S.U.)	4 K	915 Hz	$h \sim 8 \times 10^{-19}$
Niobe	Perth (UWA)	4 K	700 Hz	$h \sim 7 \times 10^{-19}$
Nautilus	Rome	$< 100\,\mathrm{mK}$	920 Hz	$h < 10^{-19}$ (*)
Auriga	Legnaro	$< 100\,\mathrm{mK}$	920 Hz	$h < 10^{-19}$ (*)

Table 2 : barres de Weber en service ou en développement. (*) : sensibilité prévue.

3.2 Réponse d'une barre à une onde gravitationnelle

Une OG incidente sur la barre produit des contraintes à l'intérieur de matériau qui se traduisent par l'excitation de ses modes de vibration (principalement le fondamental). Si $x(t)$ représente le déplacement de la face du cylindre où est placé le transducteur, $x(t)$ est régi par l'équation d'un oscillateur harmonique équivalent de même pulsation ω_0 que la barre, de longueur $L_{eq} = 4L/\pi^2$ et de masse $m_{eq} = M_{barre}/2$ [8] :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{2L}{\pi^2}\frac{d^2h}{dt^2}, \tag{17}$$

où Q est le facteur de qualité mécanique de la barre et le terme de droite (écrit pour une incidence optimale de l'OG) est l'analogue d'une force ("force de Riemann"). On obtient alors facilement la fonction de transfert gravito-mécanique de la barre :

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{2L}{\pi^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}}\tilde{h}(\omega). \tag{18}$$

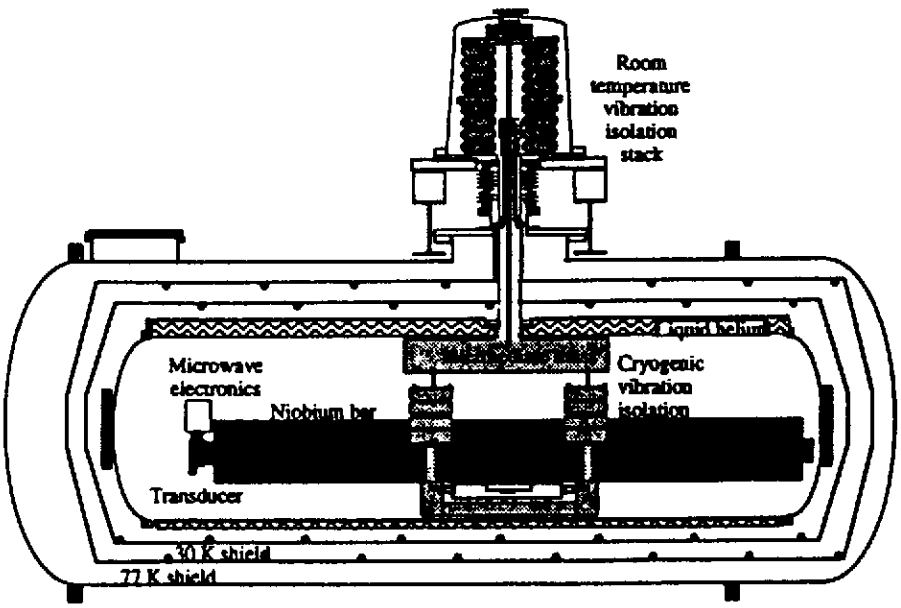


Figure 1. Cross-section of the antenna showing the niobium bar and vibration isolation system.

Figure 4: Barre résonnante de l'University of Western Australia[7].

On reconnait la forme d'un filtre lorentzien centré sur ω_0. On peut alors en déduire la réponse de la barre à un burst d'OG de durée τ, modélisé comme un créneau de largeur temporelle τ :

$$x(t) = \frac{2L}{\pi^2} \exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)\, h(\omega_0)\, \omega_0 \tau\, \sin(\omega_0 t). \tag{19}$$

La barre détecte donc la composante de Fourier de l'OG à sa fréquence de résonance et elle garde la mémoire du signal pendant la durée $\sim 2Q/\omega_0$. La barre se comporte finalement comme un gong sous l'action de l'OG.

3.3 Extraction du signal mécanique: le transducteur

Le transducteur est chargé de transformer les vibrations mécaniques de la barre en signal électrique. Dans les premiers détecteurs, on utilisait de simples céramiques piezoélectriques,

vite remplacées, dans les années 70, par des accéléromètres à SQUIDS. Les transducteurs ont en général une fréquence de résonance accordée sur celle de la barre, ce qui induit un gain considérable entre les oscillations du transducteur et celles de la barre. En effet, le schéma mécanique équivalent du système barre+transducteur est reproduit sur la figure 5. Les raideurs et masses de la barre et du transducteur, K_{barre}, k_t, M_{barre} et m_t respectivement, sont reliées par $K_{barre}/k_t = M_{barre}/m_t$, qui exprime l'égalité des deux fréquences de résonance.

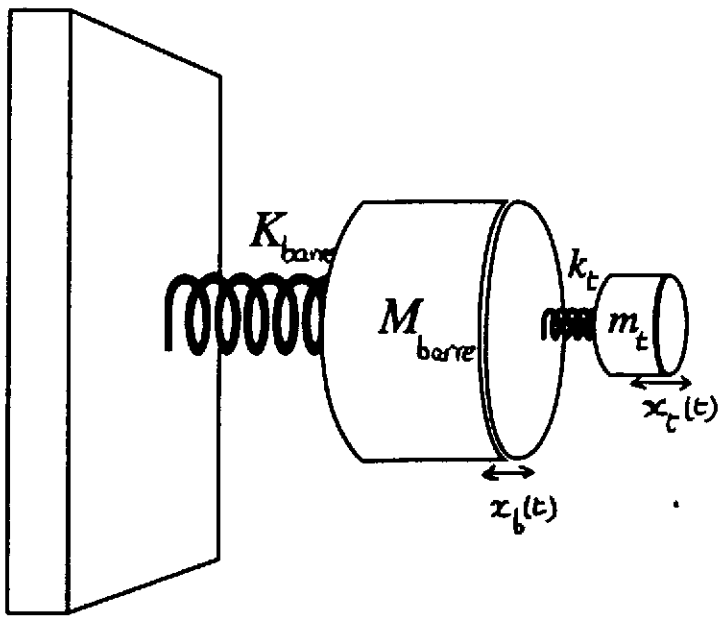


Figure 5: Schéma mécanique du système barre+transducteur

On a donc affaire à deux oscillateurs couplés et on montre sans mal que les vibrations du transducteur suivent celles de la barre mais avec un gain de l'ordre de $\sqrt{M_{barre}/m_t}$:

$$x_t = \pm 2\sqrt{\frac{M_{barre}}{m_t}}\, x_b \tag{20}$$

Le signal mécanique ainsi amplifié peut être plus facilement converti en signal électrique. Pour un transducteur capacitif comme celui utilisé sur Explorer, la tension mesurée aux bornes du transducteur est simplement proportionnelle à x_t qui définit la distance entre les deux armatures d'une capacité (voir la figure 6)

L'efficacité du transducteur est définie par

$$\beta = \frac{\text{energie electrique}}{\text{energie mecanique}} \simeq \frac{1/2CV^2}{1/2m\omega_0^2 < x^2 >}, \tag{21}$$

dans le cas d'un transducteur capacitif. Le coefficient β peut être interprété comme un facteur d'adaptation d'impédance entre la barre et le transducteur. Pour les détecteurs actuels on a $\beta < 10^{-2}$.

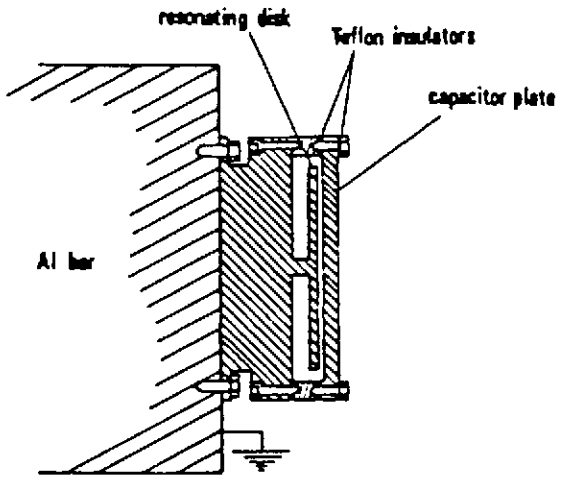


Figure 6: Le transducteur d'Explorer

3.4 Bruits et bande passante

Le bruit thermique résulte de l'excitation aléatoire du mode de vibration de la barre par couplage avec le monde extérieur. L'oscillateur harmonique représentant la barre (voir section 3.2) est excité par la force de Langevin de densité spectrale :

$$\tilde{F}_{th}(\omega) = \frac{4kTm\omega_0}{Q}, \tag{22}$$

où Q est le facteur de qualité mécanique de la barre (voir Appendice 1). La réponse de la barre s'écrit donc, en terme de densité spectrale :

$$\tilde{x}_{th}(\omega) = \frac{4kT\omega_0/Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0/Q}. \tag{23}$$

On peut noter que la force de Langevin est filtrée par la fonction de transfert lorentzienne de la barre de la même façon que la "force" de Riemann due à une OG. Si le bruit thermique était le seul bruit, ou le bruit dominant, dans la barre, alors le rapport signal/bruit serait indépendant de la fréquence et la bande passante serait en principe infinie. Malheureusement, l'existence d'autres sources de bruit (de plus en plus critiques au fur et à mesure que la barre est refroidie) limite sévèrement la bande passante autour de ω_0. En particulier le

bruit de l'amplificateur (à peu près blanc) n'est pas filtré par la réponse de la barre et est le principal responsable de la réduction de la bande passante[9]. Par exemple, dans le cas du transducteur capacitif, la bande passante peut s'écrire[10]:

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{2\omega_0}{Q}}\frac{\alpha\sigma_{th}}{\sqrt{S_0}} \tag{24}$$

où α est le coefficient de proportion entre le déplacement de l'armature du transducteur et la tension mesurée aux bornes de la capacité, $V = \alpha x$, σ_{th} est la valeur rms du bruit thermique et S_0 (unité $\mathrm{V^2\,Hz^{-1}}$) est la densité spectrale du bruit de l'amplificateur, bruit supposé blanc. Avec les valeurs courantes pour les détecteurs actuels, on arrive difficilement à des bandes passantes de l'ordre de quelques dizaines de Hz.

3.5 Limite quantique

Etant donné l'ordre de grandeur des déplacements à mesurer pour espérer détecter le passage d'une OG, il est nécessaire de considérer le comportement quantique d'une barre résonnante. La barre étant toujours considérée comme un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 (dans son état fondamental) et de masse équivalente $m_{eq} = m/2$, l'incertitude sur la mesure de sa position est donnée par[11] :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eq}\omega_0}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}, \tag{25}$$

qui ne dépend que de la masse de la barre et de sa fréquence de vibration. Pour une barre de 2 tonnes résonnant à 1 kHz, on trouve $\Delta x \simeq 2 \times 10^{-21}$ m, soit une sensibilité rms $h_{quant} \sim 10^{-21}$, ce qui est malencontreusement l'ordre de grandeur de la sensibilité minimale pour espérer détecter des OG d'origine extragalactique. Voilà donc le drame apparent des barres de Weber: l'amélioration continue des barres depuis bientôt 40 ans va finir par se heurter à cette limite quantique alors que la valeur de cette limite définit aussi la sensibilité minimale pour enfin détecter quelque chose. Mais cette limite, dite "limite quantique standard" n'est heureusement pas infranchissable. En effet si on réécrit la position $x(t)$ comme

$$x(t) = X_1\cos(\omega_0 t) + X_2\sin(\omega_0 t), \tag{26}$$

on peut montrer que les deux quadratures X_1 et X_2 vérifient la relation d'incertitude

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{\hbar}{m\omega_0}. \tag{27}$$

On retrouve la limite quantique standard pour l'état fondamental de l'oscillateur harmonique pour lequel $\Delta X_1 = \Delta X_2 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$. Mais on peut tout à fait favoriser une quadrature, X_1 par exemple, au détriment de l'autre de façon à ce que l'incertitude sur X_1 "batte" la

limite quantique : $\Delta X_1 \leq \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$. Cela équivaut à préparer l'état quantique du détecteur dans un autre état que son état propre fondamental. Ces concepts appelés "Quantum Non-demolition" en anglais sont développés depuis les années 70 et forment un chapitre de la théorie de la mesure en Mécanique Quantique essentiellement dû au développement des détecteurs d'OG[12].

3.6 Barres et astrophysique

Il existe actuellement un réseau de 3 barres de seconde génération fonctionnant en coincidence (Explorer, Allegro et Niobe). C'est le minimum pour reconstruire la direction d'un éventuel signal (la réponse spatiale d'une barre n'étant pas très directionnelle), et donc pour faire de l'astronomie. Par contre, chaque barre étant sensible dans une bande étroite autour de sa fréquence fondamentale, on ne peut pas faire d'astrophysique, c'est a dire remonter au spectre d'émission de la source et en tirer des informations sur la physique de cette source.

Il existe cependant une alternative : la construction de détecteurs "xylophone", par exemple plusieurs barres de longueurs différentes sur un même site, sensible à plusieurs fréquences (la fréquence de résonance d'un cyclindre est en $1/L$). Parallèlement, les physiciens des barres ont commencé à dévelloper un nouveau type de détecteur résonnant : les TIGAs (pour Truncated Isocahedral Gravitational Antenna). L'avantage d'une telle géométrie (celle du ballon de football) est qu'en principe on dispose de 5 signaux indépendants sur un seul détecteur et donc qu'on peut reconstruire avec ce seul détecteur la direction et la polarisation de l'OG. Un xylophone de TIGAs pourrait donc fournir un observatoire gravitationnel sur un seul site avec lequel on puisse faire de l'astronomie ET de l'astrophysique. La figure 7 permet de comparer la sensibilité d'un xylophone de barres et d'un xylophone de TIGAs à la sensibilité de LIGO. Attention : les sensibilités des détecteurs résonnants correspondent à leur bruit quantique (on n'y est pas encore !) alors que la sensibilité de LIGO est celle, réaliste, prévue pour la première génération et est loin de la limite quantique (voir chap.4.8); de plus LIGO et VIRGO auront une bien meilleure bande passante que la bande 800 Hz-2.2 kHz montrée sur la figure.

4 Détection interférométrique des ondes gravitationnelles

L'idée d'une détection interférométrique des OG remonte au début des années 60 [14]. Les premiers travaux sérieux ne commencèrent qu'une dizaine d'années plus tard, tant pour la théorie de l'instrument et l'étude systématique des bruits[15] que le premier prototype[16] qui montrèrent l'intérêt de l'approche interférométrique. Depuis, plusieurs prototypes ont vu le jour, à Garching, Glasgow et au Caltech, avec des sensibilités de l'ordre de $10^{-18}/\sqrt{\text{Hz}}$, comparables à celle des barres modernes autour de leur fréquence de résonance. Aujourd'hui, des grands projets d'interféromètre kilométriques, comme le projet franco-italien

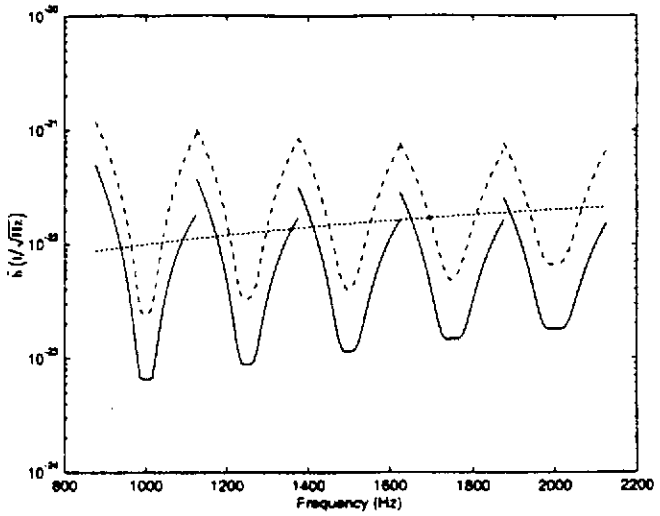


Figure 7: Sensibilités comparés d'un xylophone de TIGAs à la limite quantique (trait plein), d'un xylophone de barres traditionnelles à la limite quantique (tirets) et du détecteur interférométrique LIGO (limité par le bruit de photons à ces fréquences (pointillés)[13)]

VIRGO ou le projet américain LIGO, visent des sensibilités de l'ordre de $10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$ autour de 1 kHz et $10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}}$ autour de 10 Hz, ce que semble permettre le meilleur de la technologie actuelle, comme on va le voir dans ce qui suit.

4.1 Principe: phase minimale détectable

Une OG incidente sur une interféromètre de Michelson va induire un changement apparent de longueur de ses bras: l'un semble s'allonger pendant que l'autre se rétrécit et vice versa une demi-période gravitationnelle plus tard (voir 1.2) Un point de vue équivalent est aussi de dire que l'indice du vide dans les bras de l'interféromètre est modifié. Si l'OG est polarisée "+" selon les bras du Michelson, supposés alignés selon les directions Ox et Oy, d'incidence normale et de fréquence $\nu_{og} = \Omega/2\pi$, alors on peut calculer,à partir de

$ds^2 = 0$, les temps de vol (retardés) des photons pour un aller-retour dans chacun des bras de l'interféromètre :

$$t_r \simeq t - \frac{2L}{c} \pm h\frac{L}{c}\cos\left(\Omega t + \frac{\Omega L}{c}\right), \tag{28}$$

où L est la longueur (macroscopique) des bras, et le $\pm$ vaut par exemple + dans le bras Ox et − dans le bras Oy. Chaque onde réfléchie par les bras de l'interféromètre acquiert donc une phase ωt_r où ω est la pulsation de l'onde lumineuse incidente. On peut maintenant développer le terme de phase correspondant,

$$e^{-i\omega t_r} = e^{\frac{2i\omega L}{c}}\left(e^{-i\omega t} \pm \frac{h}{2}\frac{\omega L}{c}e^{\frac{-i\Omega L}{c}}e^{-i(\omega+\Omega)t} \pm \frac{h}{2}\frac{\omega L}{c}e^{\frac{i\Omega L}{c}}e^{-i(\omega-\Omega)t}\right), \tag{29}$$

et on voit que l'effet de l'OG revient finalement, du point de vue de la lumière, à une modulation de phase et une modulation de plus différentielle dans les deux bras, qui induit l'apparition de bandes latérales à la fréquence de l'OG autour d'une porteuse à la fréquence de la lumière. Selon les réglages de l'interféromètre, les bandes latérales réfléchies par chacun des bras peuvent interférer de façon à induire sur une photodiode placée en sortie un signal reproduisant fidèlement la signature de l'OG, c'est à dire proportionnel à l'amplitude h et de même fréquence angulaire Ω que l'OG.

La question qui se pose ensuite est d'estimer la phase minimale puis l'amplitude d'OG minimale détectables par un Michelson. Considérons un interféromètre tel que celui représenté sur la fig.8, éclairé par un faisceau de puissance P_{in} et transmettant vers un photodétecteur une puissance P_{out}. On peut écrire le déphasage entre les deux bras comme $\delta\varphi = \pi + \alpha + \varphi_{OG}$, où le terme $\pi + \alpha$ résulte du réglage du Michelson et φ_{OG} est le déphasage induit par une éventuelle OG, proportionnel à l'amplitude de l'OG. Le terme de réglage du Michelson est écrit ainsi de façon à ce que α représente un écart à la frange noire (minimum de transmission) : si $\alpha = 0$ et en l'absence d'OG, l'interféromètre est réglé sur une frange noire ($P_{out} = 0$).

La puissance transmise par le Michelson s'écrit en général comme

$$P_{out} = P_{in}\,\sin^2\left(\frac{\alpha + \varphi_{OG}}{2}\right), \tag{30}$$

et comme $\varphi_{OG} \ll 1$, on obtient :

$$P_{out} \simeq P_{in}\,\left(\sin^2(\alpha/2) + \frac{1}{2}\sin\alpha\,\varphi_{OG}\right). \tag{31}$$

On suppose que les seules parturbations à la mesure proviennent du bruit de photons (ou bruit de grenaille ou bruit de comptage de photons). Pour évaluer ce bruit, on calcule les fluctations δN du nombre N de photons détectés par la photodiode en l'absence de signal ($\varphi_{OG} = 0$). Pendant le temps δt, la photodiode compte N photons tel que :

$$N\hbar\omega = \eta P_{in}\sin^2(\alpha/2)\delta t, \tag{32}$$

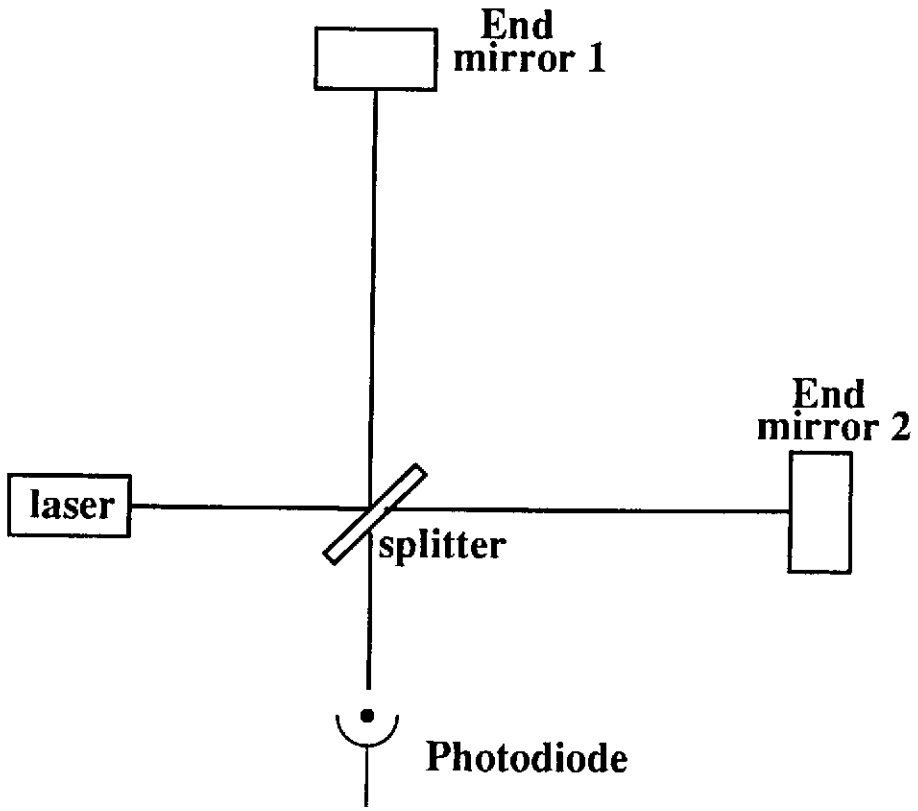


Figure 8: Schéma de l'interféromètre de Michelson.

où le rendement quantique η de la diode est proche de 1. Le nombre de photons N fluctue comme $\delta N = \sqrt{N}$ (processus poissonien), soit :

$$\delta N = \sqrt{\frac{\eta P_{in} \delta t}{\hbar\omega} \sin^2(\alpha/2)}, \tag{33}$$

ce qui correspond à une fluctuation de puissance détectée δP telle que $\eta \delta P \delta t = \delta N \hbar\omega$, c'et à dire :

$$\delta P = \sqrt{\frac{P_{in}\hbar\omega}{\eta\delta t}} |\sin(\alpha/2)|. \tag{34}$$

En présence d'une OG, le signal correspond à la puissance détectée :

$$P_s = \frac{1}{2} P_{in} \sin\alpha\, \varphi_{OG}, \tag{35}$$

d'où le rapport signal sur bruit $S/B = P_s/\delta P$:

$$S/B = \sqrt{\frac{\eta P_{in}\delta t}{\hbar\omega}} |\cos(\alpha/2)|\, \varphi_{OG}. \tag{36}$$

Le rapport S/B est donc maximal si $\alpha = 0$, c'est à dire que l'expérimentateur a tout intérêt à régler le Michelson sur une frange noire (interféromètre parfaitement symétrique). Dans ce cas le S/B devient :

$$S/B_{opt} = \sqrt{\frac{\eta P_{in} \delta t}{\hbar \omega}}\, \varphi_{OG}, \tag{37}$$

et le plus petit déphasage détectable par un interféromètre de Michelson limité par le bruit de photons, correspondant au cas limite S/B=1, est :

$$\varphi_{OG}^{min} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\eta P_{in} \delta t}}. \tag{38}$$

Avec un laser source tel que celui prévu pour VIRGO ($\lambda = 1064\,\mathrm{nm}$ et $P_{in} \simeq 20\,\mathrm{W}$) et pour un photodétecteur idéal ($\eta = 1$), on obtient en terme de sensibilité :

$$\varphi_{OG}^{min} \simeq 10^{-10}\,\mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}. \tag{39}$$

En terme d'amplitude d'OG h, on a $\varphi_{OG} = \frac{4\pi L}{\lambda} h$, d'où la sensibilité d'un Michelson de longueur de bras L et éclairé par un laser de puissance P_{in} :

$$\tilde{h}_{min} = \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\eta P_{in}}}\, /\sqrt{\mathrm{Hz}}. \tag{40}$$

Pour les valeurs numériques précédentes et pour $L = 1\,\mathrm{m}$, on obtient $\tilde{h}_{min} \simeq 10^{-17}\,/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. On est loin de la sensibilité visée qui est $\tilde{h} \simeq 2 - 3 \times 10^{-23}\,/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. En inspectant l'équation 40, on remarque qu'on ne peut jouer que sur deux paramètres pour améliorer la sensibilité (si celle-ci est limitée par le bruit de photons) : la longueur des bras et la puissance du laser.

4.2 Augmenter la longueur : cavités Fabry-Perot

On peut tout d'abord augmenter la longueur physique des bras, mais on est vite arrêté par des contraintes géométriques (il faut compenser la courbure de la Terre en surélevant les tours abritant les miroirs de renvoi par exmple), de terrain adéquat, et surtout de coût (en particulier du tube à vide). Les longueurs choisies pour LIGO et VIRGO sont respectivement 4 et 3 km. L'emploi de bras de 3 km conduit à une sensibilité de l'ordre de $\tilde{h} \simeq 3 \times 10^{-21}\,/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ et il reste 2 ordres de grandeur à gagner. Notons que l'avantage d'étirer le plus possible la longueur des bras est aussi de diminuer l'influence des bruits (on cherche à détecter une variation *relative* de longueur).

Les longueurs des bras étant fixées, on peut aller plus loin en augmentant cette fois les longueurs optiques, en remplaçant les bras simples du Michelson par des cavités Fabry-Pérot, dont le miroir d'entrée est placé près de la séparatrice et le miroir de fond à l'extrémité

du bras, 3 km plus loin dans le cas de VIRGO (voir fig.9). Des rappels utiles concernant les cavités sont donnés dans l'appendice 2. Pour une cavité de finesse $\mathcal{F}$, le nombre d'aller-retours équivalent pour les photons est de $2\mathcal{F}/\pi$ ce qui correspond à une longueur de bras équivalente de $L_{opt} = \mathcal{F}L/\pi$). Pour une cavité du type VIRGO de longueur 3 km et de finesse 50, on a $L_{opt} \simeq 50$ km. La présence de cavités dans les bras n'a pas en fait un effet aussi simple que de modifier la longueur optique mais change la réponse du Michelson à une OG. La fonction de transfert gravitationnelle d'une cavité peut s'écrire[17] comme :

$$F(\nu_{OG}) = \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{\left(\frac{t_1}{1-r_1 r_2}\right)^2 r_2}{\sqrt{1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{2\pi\nu_{OG}L}{c}\right)}}, \tag{41}$$

où l'on reconnaît la fonction d'Airy de la cavité exprimée à la fréquence de l'OG, ce qui montre que la cavité se comporte comme un filtre passe-bas (c'est une propriété générale des Fabry-Perot) avec une fréquence de coupure $f_c = c/4\mathcal{F}L \simeq 500$ Hz dans le cas de VIRGO. La sensibilité se déduit de la fonction de transfert d'une cavité par[17] :

$$\tilde{h}(\nu_{OG}) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{P_{in}}} \frac{1}{2F(\nu_{OG})}. \tag{42}$$

Le gain par rapport à un Michelson simple de longueur 3 km, pour lequel la fonction de transfert de chaque bras est $F(\nu_{OG}) = 2\pi L/\lambda$, est à basse fréquence $\simeq \left(\frac{t_1}{1-r_1 r_2}\right)^2 \simeq 31.8$ dans le cas de VIRGO et à 1 kHz $\simeq 14.3$ toujours pour VIRGO.

4.3 Augmenter la puissance : le recyclage

L'autre façon d'améliorer la sensibilité est d'augmenter la puissance. Malheureusement, on se sait pas réaliser avec la technologie actuelle des lasers continus fiables et stables en fréquence et en amplitude et délivrant une puissance supérieure à quelques dizaines de Watts. Mais on peut tirer profit de la configuration de l'interféromètre. Celui-ci, réglé sur une frange noire, peut être perçu comme un miroir presque parfaitement réfléchissant (en effet toute la lumière du laser est renvoyé par le Michelson vers la source). On peut alors interposer un miroir partiellement réfléchissant entre la source et l'interféromètre, de façon à former une nouvelle cavité Fabry-Perot (avec un miroir de renvoi "composite"), voir la fig.9. Si cette cavité est résonnante pour le laser incident, alors il y a gain de puissance G pour l'onde stockée dans la cavité (voir l'Appendice 2). Vu depuis la séparatrice, tout ce passe comme si, à la place d'un laser de puissance P_{in}, on disposait d'une source de puissance $G \times P_{in}$. C'est le principe du "recyclage de puissance", dû à l'écossais Drever[18]. La puissance maximale est obtenue quand le gain G compense exactement les pertes $\mathcal{P}$ de l'interféromètre : $G = 1/\mathcal{P}$, la cavité de recyclage est alors couplée optimalement au laser incident (on parle de "recyclage optimal") et toute l'énergie incidente est utile et est dissipée, à travers les pertes, dans l'interféromètre. C'est un bel exemple d'adaptation d'impédances. Finalement, si l'on dispose d'une source laser de 20 W et d'un interféromètre

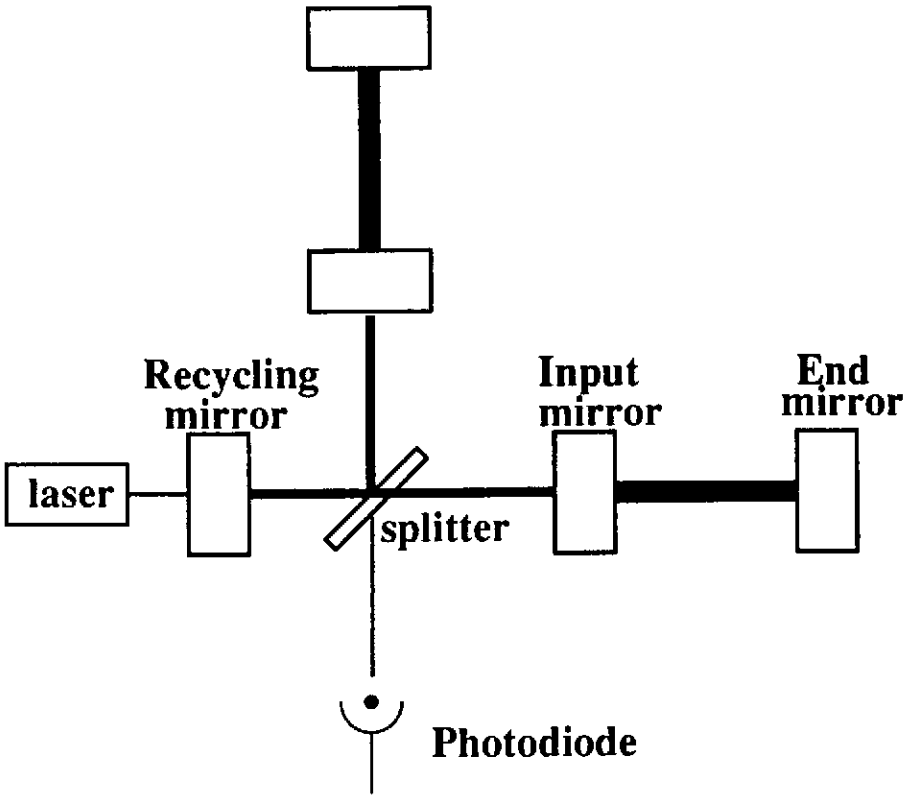


Figure 9: Schéma d'un interféromètre à recyclage tel que VIRGO.

à cavités de pertes de l'ordre de 2%, (soit $G \sim 50$) on arrive à une puissance au niveau de la sépatrice de l'ordre de 1 kW, ce qui permet d'obtenir l'ordre de grandeur qui manquait pour atteindre la sensibilité, limitée par le bruit de photons, $\tilde{h} \simeq 2 \times 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$. Bien entendu, l'objectif de 2% de pertes pour l'interféromètre fixe les tolérances sur la qualité des composants optiques.

4.4 Le bruit sismique et son filtrage

La densité spectrale de déplacement induit par le bruit sismique est typiquement pour un terrain calme de l'ordre de $\delta\tilde{x}_{sism}(\nu) \sim \frac{10^{-6}}{\nu^2}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$. Une telle valeur a été mesurée en particulier sur le site de VIRGO à Cascina (sur la plaine sédimentaire du bassin de l'Arno). Un tel bruit se traduit en terme d'amplitude d'OG ($h \sim \delta x/L$) par :

$$\tilde{h}_{sism}(\nu) \sim \frac{7 \times 10^{-10}}{\nu^2}/\sqrt{\text{Hz}}, \tag{43}$$

avec $L = 3\,\text{km}$. Il est donc indispensable de filtrer ce bruit, c'est à dire isoler les parties sensibles du détecteur (les miroirs) de ce bruit sismique.

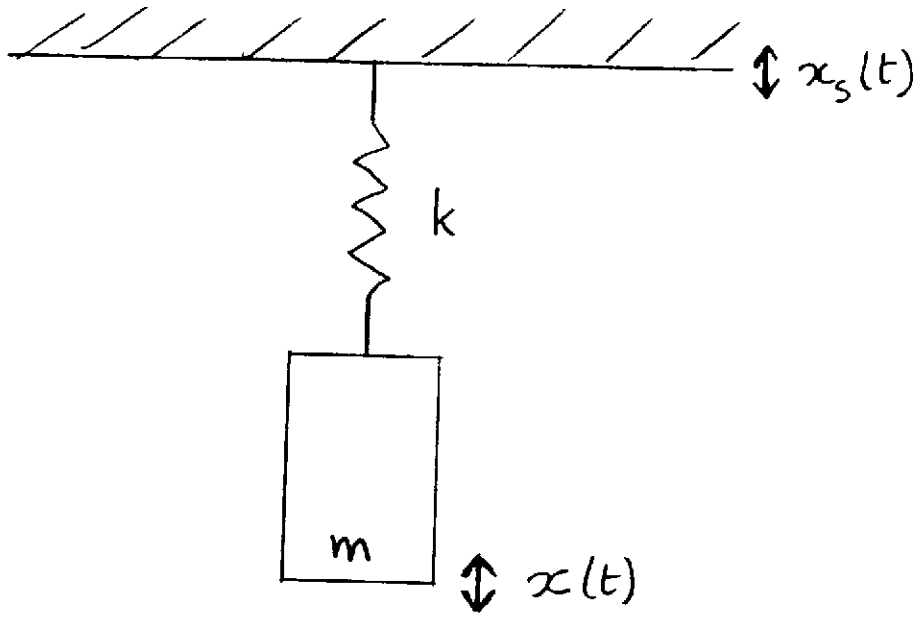


Figure 10: Masse suspendue au bout d'un ressort. Son mouvement est décrit par $x(t)$, les vibrations du sol par $x_s(t)$.

L'isolation sismique repose sur un principe fort simple: si pour un oscillateur il y a gain d'amplitude à résonance, il peut y avoir atténuation en dehors. En effet, considérons le pendule de la fig.10; le déplacement de la masse test obéit à (en négligeant l'amortissement):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k(x - x_s) = 0. \tag{44}$$

En passant dans l'espace de Fourier, on déduit immédiatement la fonction de transfert entre les fluctuations de x_s et celles de x:

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{x}_s(\omega)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{45}$$

et si $\omega \gg \omega_0$, alors $|\tilde{H}(\omega)| = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$. Il y a bien atténuation si $\omega > \omega_0$. Si maintenant, on attache N pendules identiques de même pulsation à la queue le leu, la fonction de transfert globale devient

$$|\tilde{H}(\omega)| = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{2N}. \tag{46}$$

Prenons l'exemple de 5 oscillateurs de pulsation $\omega_0 = 2\pi \times 1$ Hz; on trouve une atténuation $|\tilde{H}| \sim 10^{10}$ à 10 Hz, ce qui donne un bruit sismique résiduel

$$\tilde{h}_{sism}(\nu) \sim \frac{7 \times 10^{-10}}{\nu^{12}} / \sqrt{\text{Hz}}, \tag{47}$$

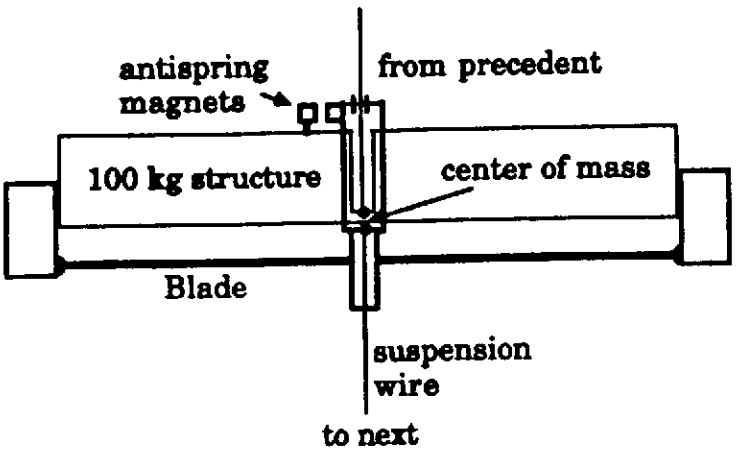


Figure 11: Schéma d'un atténuateur sismique.

soit $\tilde{h}_{sism} \sim 7 \times 10^{-22}/\sqrt{\text{Hz}}$ à 10 Hz. Le "superatténuateur" développé pour VIRGO suit ce principe. Il s'agit d'une chaîne de 5 éléments en forme de boîte de camembert, chacun supportant plusieurs ressorts à lame auquel est attaché le point de suspension du câble reliant un étage au précédant (voir figures 11 et 12).

4.5 Les bruits thermiques

Chaque partie sensible du détecteur interférométrique rassemble une collection de résonnateurs mécaniques perpétuellement excités par l'agitation thermique : le miroir lui -même, les fils de suspension et le pendule formé par le miroir suspendu au bout de la chaîne de suspension. Chaque mode est caractérisé principalement par sa ou ses fréquences de résonance et par le facteur de qualité de chacune de ces résonances, relié aux pertes mécaniques (frottement généralisé). Les facteurs de qualité de ces résonnateurs ont été mesurées dans différents laboratoires et on estime raisonnables les valeurs $Q \sim 10^6$ (et même plus si on

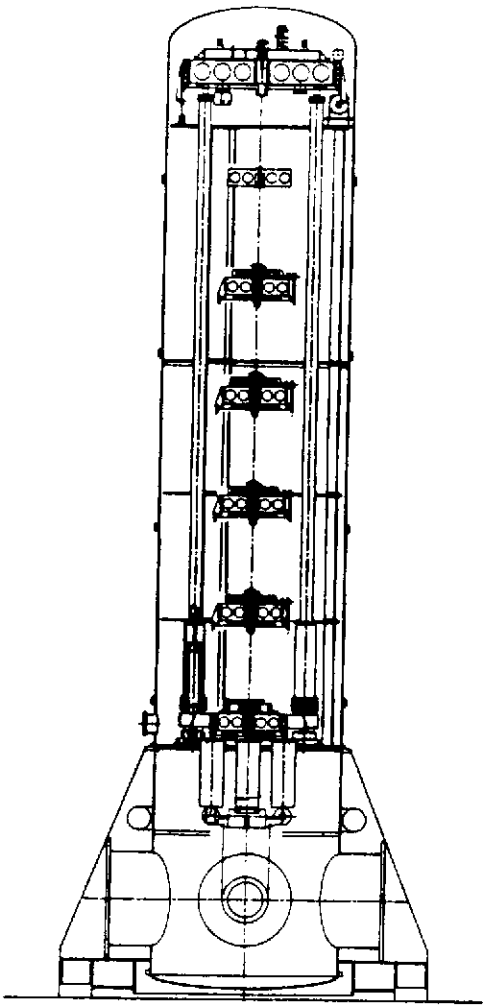


Figure 12: Une tour abritant l'un des miroirs de VIRGO. On remarque la chaîne du Super-Atténuateur à laquelle est suspendu le miroir.

est optimiste) pour les substrats de Silice des miroirs, $Q \sim 10^4 - 10^5$ pour les différents modes des fils de suspension et $Q \sim 10^6 - 10^7$ pour le mode pendule (difficile à mesurer). De plus, de façon générale (voit Appendice I), le comportement du bruit thermique vis à vis de la fréquence ν est en $1\nu^{1/2}$ en deça de la fréquence de résonance et en $1\nu^{5/2}$ au delà. Ainsi le bruit thermique associé aux pendules est estimé dans VIRGO à

$$\tilde{h}_{pend}(\nu) \sim \frac{2 \times 10^{-18}}{\nu^{5/2}} / \sqrt{\text{Hz}}, \tag{48}$$

avec un facteur de qualité $Q = 10^6$, et une fréquence de résonance ($\propto \sqrt{g/l_{eq}}$) de l'ordre de 0.6 Hz. Cette expression est donc valable si $\nu \gg 0.6$ Hz, c'est à dire en pratique au delà de quelques Hz. Le bruit thermique pendulaire est donc un bruit important : c'est lui qui domine à basse fréquence (jusqu'à ~ 30 Hz) dans VIRGO. Heureusement, il diminue très vite en fonction de la fréquence.

En ce qui concerne le bruit thermique des miroirs, il faut sommer les contributions des

différents modes de vibrations et aussi prendre en compte le couplage avec le faisceau lumineux. Par exemple les modes de vibration de valeur moyenne nulle ne vont pas contribuer au bruit total. Pour VIRGO, ce bruit est estimé à [19] :

$$\tilde{h}_{mir}(\nu) \sim \frac{6 \times 10^{-22}}{\nu^{1/2}} / \sqrt{\text{Hz}}, \tag{49}$$

valable pour les fréquences ν inférieures aux fréquences fondamentales des miroirs (4.5 kHz).

Enfin, le bruit thermique associé aux modes "violon" des fils de suspension se traduit par l'apparition de résonances aigues dans le spectre de sensibilité (les queues des résonances sont largement en dessous des contributions précédentes). Ce bruit a un impact moins important que les deux précédents car ces résonances aigues ("lignes") peuvent être éliminées par un filtrage adéquat.

4.6 Les bruits du laser

Certains bruits inhérents au laser source peuvent induire un bruit de détection supplémentaire via les asymétries de l'interféromètre. Le bruit du laser le plus ennuyeux a priori est le bruit de fréquence. En effet les fluctuations de fréquence du laser $\delta\tilde{\nu}$ induisent les fluctutations de phase en sortie du Michelson :

$$\delta\tilde{\varphi}(\nu) = \frac{2\pi d}{c} \delta\tilde{\nu}(\nu), \tag{50}$$

où d est la différence de marche. Si $d = 0$, le bruit de phase est toujours nul quelque soient les fluctuations du laser. Par contre, dès qu'on s'écarte de la différence de marche nulle, un bruit de phase apparaît. Une différence de marche non nulle peut être due à une asymétrie de longueur ou de finesse des bras de l'interféromètre; en effet, on peut écrire succintement $d = \Delta\mathcal{F}L = L\Delta\mathcal{F} + \mathcal{F}\Delta L$, à un facteur près. En terme de sensibilité à une OG, et rappelant qu'une OG d'amplitude h provoque un déphasage $\delta\varphi \sim \frac{4\pi L\nu}{c}\frac{\mathcal{F}}{\pi}h$, on voit que le couplage entre des fluctuations de fréquence du laser $\delta\tilde{\nu}$ et l'asymétrie du Michelson $\Delta L/L + \Delta\mathcal{F}/\mathcal{F}$ se traduit par le bruit :

$$\tilde{h}(\nu) \sim \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}}\right) \frac{\delta\tilde{\nu}(\nu)}{\nu}. \tag{51}$$

Si on demande que ce bruit soit plus petit que le bruit de photons ($\sim 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$) et sachant que l'asymétrie sur la finesse peut être, selon les fabricants de miroir, au mieux de $\Delta\mathcal{F}/\mathcal{F} \sim 10^{-3}$, on déduit la contrainte sur les fluctuations de fréquence du laser : $\delta\tilde{\nu} < 10^{-5}\text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$. Un tel niveau de stabilité naturelle n'existe pas dans les lasers actuels Pour l'atteindre on utilise une technique de stabilisation active grâce à une cavité rigide de grande finesse ($\mathcal{F} \sim 30000$) fabriquée en ULE, matériau très peu dilatable. Cette cavité résonnante fournit ainsi un étalon de longueur ce qui équivaut à un étalon de fréquence. Le faisceau laser est asservi sur cette cavité et reproduit les fluctuations de cette dernière à la

place de ses fluctuations propres. Le laser stabilisé à Orsay [20]selon ces principes constitue le standard de fréquence le plus stable à court terme du monde (à court terme car on a besoin de stabilité uniquement dans la gamme de fréquences allant de quelques Hz à 10 kHz).

Les fluctuations de puissance du laser induisent aussi un bruit de phase mais celui est bien moins critique que le précédent. En ce qui concerne les fluctuations de géométrie (pointé, taille et position du waist), ces dernières peuvent se coupler aux asymétries d'alignement des bras de l'interféromètre pour donner un bruit de nature similaire au précédent[21]. Pour atténuer cet effet, on dispose en entrée de l'interféromètre, une cavité en anneau de finesse de l'ordre du milier appelée "mode-cleaner"[22] et dont l'objet est d'éliminer les fluctuations de géométrie du laser incident (tout ce qui n'est pas dans le bon mode). Une cavité Fabry-Perot est en effet aussi un filtre spatial (voir Appendice 2). Un avantage annexe est que ses capacités de filtrage fréquentiel permettent d'assouplir un peu la contrainte sur les fluctuations de fréquence.

4.7 Autres bruits

Parmi toutes les autres sources de bruit, la pluspart sont négligeables devant les précédentes, et seules certaines demandent des contraintes supplémentaires sur le design de l'interféromètre. Ainsi, la présence de gaz résiduel dans les bras peut induire des fluctuations d'indice et donc simuler un signal d'OG. Pour s'affranchir de ce bruit, il faut maintenir un vide poussé, pression résiduelle $< 10^{-7}$ mbar. Ceci implique une batterie de stations de pompes (une dizaine par bras), et, en amont, un étuvage spécial des tubes et des bas de tour pour forcer le dégazage avant assemblage. Remarquons que le volume de vide dans VIRGO est d'environ 7000 m^3 (2 bras de 3 km de long et de 1.2 m de dimaètre) ce qui en fait la plus grande enceinte à vide jamais construite! Le système de vide défini pour VIRGO (tubes + pompes) est la partie la plus coûteuse de l'expérience (environ 1/3 du coût total).

Un autre bruit qui peut être très embêtant est le bruit de lumière diffusée. Les miroirs n'étant pas parfaits, ils possèdent une certaine rugosité responsable de pertes par diffusion. Les photons diffusés sous un grand angle vont rencontrer les paroies du tube à vide, s'y réfléchir un certain nombre de fois avant d'éventuellement se recombiner avec le faisceau principal. Le problème vient du fait que les tubes ne sont pas isolés sismiquement et qu'à chaque réflexion, les photons diffusés acquièrent une phase aléatoire. Le bruit de phase résultant est, si l'on ne fait rien, du même ordre de grandeur que le bruit de photon ($\sim 10^{-11}\mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ pour 1 kW dans la cavité de recyclage). Le remède consiste à utiliser des "pièges à lumière" dans les tubes. Ce sont des diaphragmmes en forme de cônes tronqués (voir fig.13); un revêtement absorbant est déposé sur les parties externes de façon à ce qu'un photon incident sur le piège, astreint à de multiples réflexions, ait une probabilité ~ 1 d'être absorbé. Dans VIRGO, il y aura 80 de ces pièges dans chacun des bras, à des emplacements optimisés pour réduire le plus possible le bruit de lumière diffusée.

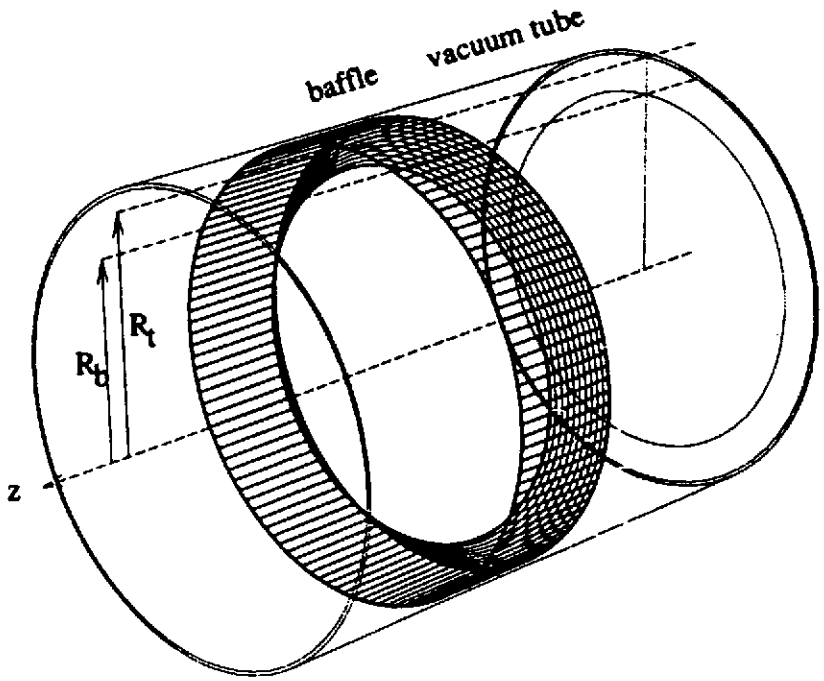


Figure 13: Un piège à lumière conçu dans VIRGO.

4.8 Limite quantique

Le bruit de photon calculé plus haut est en fait un aspect du bruit quantique. La limite quantique à la détection interférométrique résulte du fait que plus on veut réduire le bruit de photons, c'est à dire augmenter les puissances circulantes, plus les miroirs vont être sujets aux fluctuations de pression de radiation[23]. Lors de la mesure de la position d'un miroir, si N photons sont détectés pendant δt, l'incertitude sur la position est

$$\delta x_{bp} \sim \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{\lambda}{4\pi}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{P\delta t}}, \tag{52}$$

où l'on a considéré un photo-détecteur parfait. Les fluctuations d'impulsion des photons, c'est à dire (comme $p = N\hbar\omega/c$) $\delta p = \sqrt{N}\hbar\omega/c$, induisent les fluctuations d'impulsion du miroir $\delta p_{mir} = 2\delta p = \sqrt{N}\hbar\omega/c$ via la pression de radiation (vrai si la réflectivité du miroir est proche de 1). L'incertitude correspondante sur la mesure de la position du miroir est

alors :

$$\delta x_{pr} \sim \frac{\delta p_{mir}}{m}\delta t = \sqrt{N}\frac{2\hbar\omega}{mc}\delta t. \tag{53}$$

Au total, bruit de photon et fluctuations de pression de radiation induisent l'incertitude sur la mesure de position :

$$\delta x^2 = \delta x_{bp}^2 + \delta x_{pr}^2 = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{N} + \left(\frac{2\hbar\omega}{mc}\delta t\right)^2 N. \tag{54}$$

L'incertitude δx est minimale pour $N_0 = \frac{\lambda mc}{8\pi\hbar\omega\delta t}$ et alors $\delta x_{bp} = \delta x_{pr}$ (les deux bruits contribuent pour la même part à la limite quantique). Dans ce cas , on a finalement :

$$\delta x = \sqrt{\frac{2\hbar}{m}}\delta t, \tag{55}$$

qui ne dépend que de la masse m du miroir. Du point de vue sensibilité aux ondes gravitationnelles d'un interféromètre possédant 2 miroirs par bras, on a finalement :

$$\tilde{h}_{quant}(\nu) \simeq \frac{2}{L}\sqrt{\frac{2\hbar}{m}}\frac{1}{2\pi\nu}. \tag{56}$$

Avec $L = 3\,\mathrm{km}$ et $m = 30\,\mathrm{kg}$, on trouve :

$$\tilde{h}_{quant}(\nu) \simeq \frac{3\times 10^{-22}}{\nu}/\sqrt{\mathrm{Hz}}. \tag{57}$$

Contrairement aux barres de Weber, la sensibilité prévue des grands interféromètres tels que LIGO ou VIRGO est encore largement au dessus du bruit quantique qui vaut $\tilde{h} \sim 3\times 10^{-23}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à 10 Hz et $\tilde{h} \sim 3\times 10^{-25}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à 1 kHz Malgré tout, certains groupes d'optique quantique réfléchissent, depuis une quinzaine d'années, aux moyens de battre la limite quantique[24]. En théorie, cela peut sembler facile : il suffit de diminuer l'incertitude sur le bruit de phase (n'oublions pas qu'un Michelson effectue une mesure de phase) au détriment du bruit d'amplitude. En pratique, on peut préparer la lumière dans un état de phase comprimée ("phase squeezing") mais les performances sont encore très faible (typiquement un gain de 3 dB soit un facteur 2).

4.9 La collaboration VIRGO

La collaboration VIRGO regroupe plusieurs équipes françaises (du LAL à Orsay, du LAPP à Annecy, de l'IPN de Lyon et de l'ESPCI à Paris) et italiennes (sections INFN de Pise, de Naples, Rome+Frascati et Perugia). Le site de l'expérience est situé à Cascina près de Pise, et les dimensions des bras de l'interféromètre ont été fixées à 3 km. Le schéma de principe de l'interféromètre est reproduit sur la fig.14.

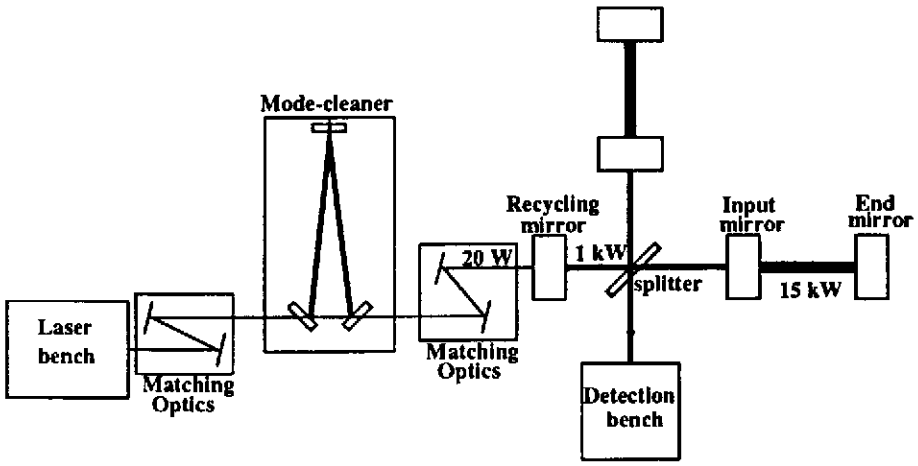


Figure 14: Schéma optique simplifié de VIRGO.

La partie centrale (banc d'entrée+mode-cleaner+cavité de recyclage+banc de détection) devrait être terminée puis testée courant 1999. L'interféromètre complet devrait être terminé en 2001, et la prise de données pourra enfin commencer. La sensibilité visée est telle que $\tilde{h} \sim 10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}}$ à 10 Hz et $\tilde{h} \sim 3 \times 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$ à 1 kHz. La courbe de sensibilité "officielle" est montrée sur la figure 15; notons que certaines estimations de bruit sont "conservatrices" et que cette courbe de sensibilité doit être considérée comme un minimum. Il est clair aussi qu'une amélioration de la sensibilité passe par une diminution des bruits thermiques, peut-être par l'utilisation d'autres matériaux (miroirs en Saphir à la place de la Silice par exemple).

Finalement, le coût de l'expérience est précisément 81.7 MEcus ($\sim$ 500 MF), répartis pour 55% pour l'Italie (qui possède le site) et 45% pour la France.

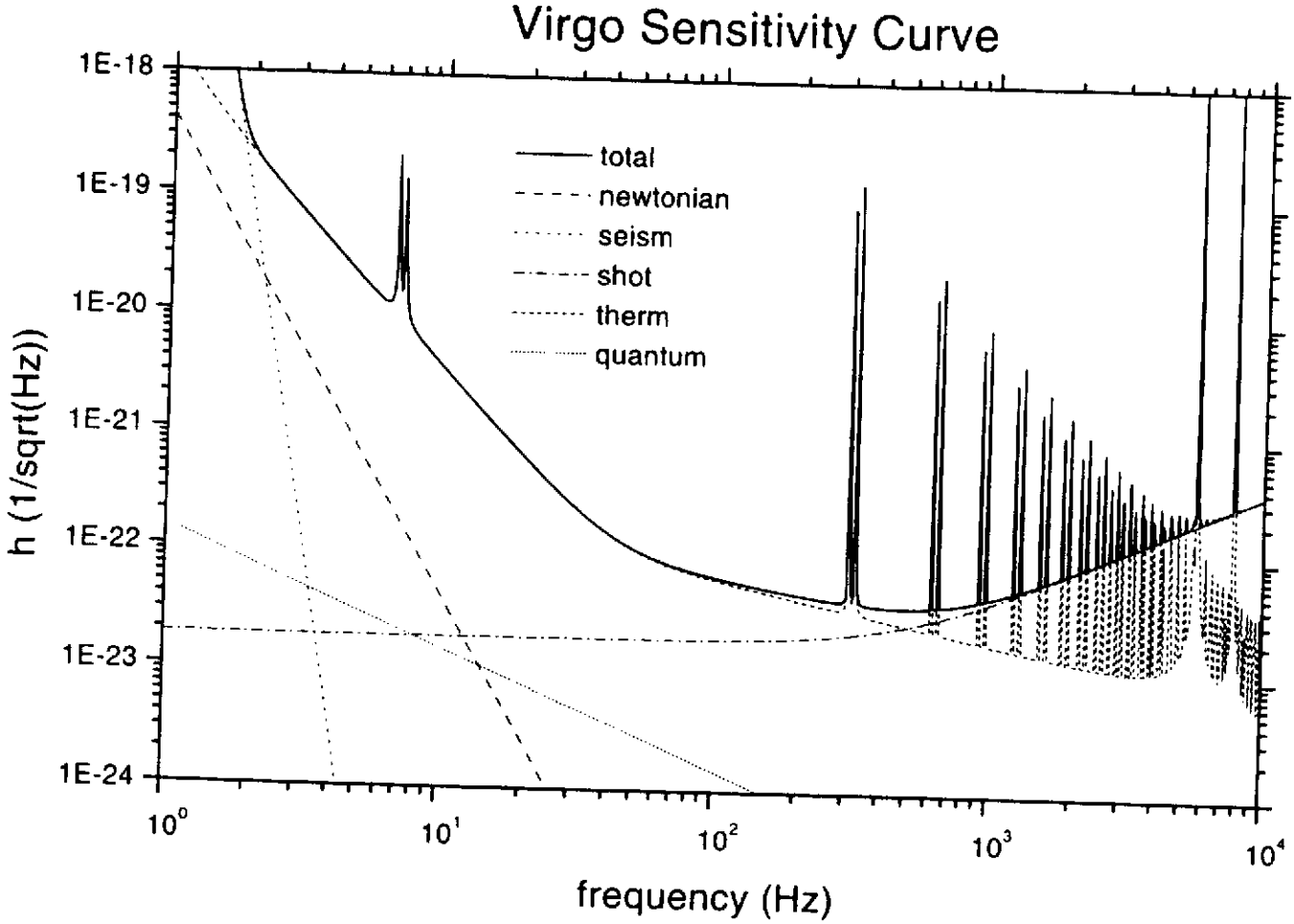


Figure 15: Sensibilité prévue pour VIRGO. On note que les bruits thermiques dominent la sensibilité jusqu'à quelques centaines de Hz et qu'au dela c'est le bruit de photons ('shot') qui domine.

5 Perspectives pour l'Astronomie Gravitationnelle

Il est vraisemblable de voir trois détecteurs interférométriques à base kilométrique en service à l'aube du troisième millénaire : VIRGO et les deux interféromètres de 4 km construits par la collaboration américaine LIGO. C'est le minimum pour reconstruire l'intégralité d'un signal gravitationnel (amplitude, polarisation et direction). Il faut donc voir VIRGO et LIGO non pas comme des concurrents mais plutôt comme des détecteurs faisant partie d'un vaste réseau mondial (même si la course -amicale- s'engagera sans doute pour la première détection...). A ce réseau, il faut ajouter les barres de Weber de troisième génération, dont la sensibilité commence à être intéressante, et les "petits" interféromètres GEO-600 (de 600 m), construit en Allemagne et TAMA-300 (300 m) construit au Japon.

A côté des détecteurs d'OG, des coincidences avec d'autres types de détecteurs sont prévues : télescopes optiques, détecteurs γ et X embarqués ou même détecteurs de neutrinos avec le détecteur Superkamiokande au Japon. Le bénéfice de telles coincidences est bien sûr d'augmenter la signification statistique des détections d'OG, mais aussi de produire des tests sur les caractéristiques des OG, et donc sur la Relativité Générale. Par exemple, l'observation d'une supernova dans le domaine optique et dans le domaine gravitationnel permettrait de comparer la célérité des OG c_{OG} à celle de la lumière c; pour une supernova dans l'amas de la Vierge (à 10 Mpc), et un retard entre la réception du signal OG et du signal lumineux de 10 jours (les photons peuvent être piégés aussi longtemps dans les couches supérieures de la supernova avant de pouvoir s'échapper), on trouve $(c_{OG}-c)/c \sim 5\times10^{-10}$.

Mais, finalement, ce n'est pas la confirmation d'une prédiction de la Relativité Générale qui peut sembler le plus important, mais plutôt la naissance d'une nouvelle branche de l'astronomie, dans un domaine radicalement différent du domaine électro-magnétique (seule source d'informations sur ce que nous savons de notre univers aujourd'hui). On se souvient qu'à chaque fois que les astronomes ont ouvert une nouvelle fenêtre (télescopes, radio-télescopes, satellites X, γ ou infra-rouge ....) sur l'Univers, la vision qu'ils en avaient a été au moins modifiée, sinon bouleversée. Avec l'ouverture de la nouvelle fenêtre gravitationnelle, il faut s'attendre à tout ...

Appendice 1 : notion de bruit thermique

Commençons par rappeler que le mouvement brownien d'une particule de masse m, subissant une force de frottement visqueux ($= -\alpha v$) est décrit par l'équation de Langevin[25] :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} = F_{th},$$

où F_{th} est une force stochastique, appelée force de Langevin, moteur de l'agitation thermique. Dans le cas du mouvement brownien, la densité spectrale $\tilde{F}_{th}$ de la force de Langevin est reliée au coefficient de frottement α par $\tilde{F}_{th}^2(\omega) = 4kT\alpha$, où k est la constante de Boltzmann et T la température, et est donc indépendante de la fréquence.

De manière générale, la force de Langevin s'exerçant sur un système (le mode pendule des miroirs suspendus de VIRGO par exemple) est reliée aux termes de pertes de ce système, en vertu du théorème "fluctuation-dissipation"[26] :

$$\tilde{F}_{th}^2(\omega) = 4kTR(\omega),$$

où $R(\omega)$ est la partie réelle de l'impédance mécanique du système :

$$R(\omega) = \Re(\tilde{Z}(\omega)) = \Re(\tilde{F}/\tilde{v}),$$

avec F=force extérieure s'exerçant sur le système (force de rappel du pendule formé par un miroir de VIRGO par exemple) et v=vitesse.

Si le système obéit à une équation d'oscillateur harmonique amorti :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + Kx = F_{th},$$

on obtient, d'après le théorème "fluctuation-dissipation", $R(\omega) = \alpha$ d'où $\tilde{F}_{th}^2(\omega) = 4kT\alpha$ sans surprise, comme dans le cas du mouvement brownien. En prenant la transformée de Fourier de l'équation de l'oscillateur harmonique, on obtient la fonction de transfert entre les fluctuations $\tilde{F}_{th}(\omega)$ et les fluctuations de position $\tilde{x}(\omega)$:

$$|\tilde{x}(\omega)|^2 = \frac{4kT\omega_0}{mQ}\,\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega_0^2\omega^2/Q^2},$$

où $\omega_0^2 = K/m$ et le facteur de qualité Q est défini par $Q = m\omega_0/\alpha$.

Un terme d'amortissement par frottement visqueux convient bien à un système freiné par l'air par exemple. Dans le cas d'un miroir suspendu dans le vide, les mécanismes de dissipation interne l'emportent largement sur le précédent, alors qu'ils sont le plus souvent négligeables à l'air libre. Une manière de considérer les mécanismes de dissipation interne consiste à incorporer un terme imaginaire dans la constante de raideur de l'oscillateur[27] : K

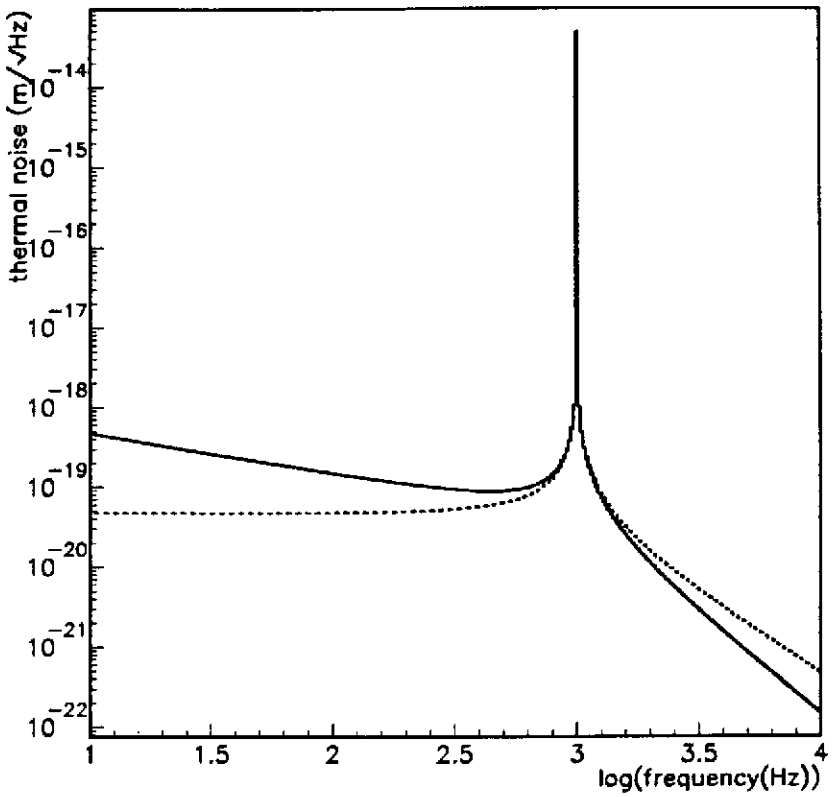


Figure 16: Densité spectrale d'amplitude de bruit thermique pour les deux mécanismes de dissipation. Trait uni : amortissement interne, trait pointillé : amortissement visqueux. Dans les deux cas on a pris $m = 30\,\mathrm{kg}$, $T = 300\,\mathrm{K}$, $\omega_0 = 2\pi \times 1\,\mathrm{kHz}$ et $Q = 10^6$.

devient $K(1+i\phi(\omega)$, où ϕ peut être assimilé à un angle de pertes. L'équation de l'oscillateur harmonique avec dissipation interne s'écrit alors :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + K(1+\phi)\,x = F_{th}.$$

Dans ce cas, on a $R(\omega) = K\phi(\omega)/\omega$ et la densité spectrale de la force de Langevin s'exprime comme :

$$\tilde{F}_{th}^2(\omega) = 4kT\frac{\omega_0^2\phi(\omega)}{m\omega},$$

et dépend donc maintenant de la fréquence. La densité spectrale des fluctuations de position dues aux bruit thermique est finalement :

$$|\tilde{x}(\omega)|^2 = \frac{4kT\omega_0}{mQ}\,\frac{\omega_0}{\omega}\,\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega_0^4/Q^2},$$

où on a choisi $\phi(\omega) = 1/Q$ =constante.

L'allure de la densité spectrale en amplitude $|\tilde{x}(\omega)|$ est représentée sur la fig.16. On note tout d'abord que les deux cas coincident au voisinage de la résonance. Ceci explique pourquoi on s'est contenté du modèle d'oscillateur harmonique amorti pour une barre de Weber, pourtant sous vide, car c'est un détecteur à bande étroite centrée sur sa fréquence de résonance, et peu importe le détail fin du bruit thermique hors résonance. En ce qui concerne le comportement hors résonance : si $\omega \ll \omega_0$ le spectre de bruit thermique est plat dans le cas de l'amortissement visqueux, alors qu'il se comporte en $1/\omega^{1/2}$ dans le cas de l'amortissement interne (ce qui donne un modèle moins favorable pour le bruit des modes de vibration des miroirs de VIRGO), et si $\omega \gg \omega_0$, on a $|\tilde{x}(\omega)| \propto 1/\omega^2$ pour l'amortissement visqueux, alors que $|\tilde{x}(\omega)| \propto 1/\omega^{5/2}$ pour l'amortissement interne (ce qui donne un modèle plus favorable pour le mode pendule des miroirs de VIRGO)

Appendice 2 : les cavités Fabry-Perot

Nous allons distinguer les deux aspects des cavités : aspect longitudinal ou couplage entre la longueur d'onde de la lumière et longueur de la cavité et aspect transversal ou couplage entre la géométrie du faisceau et géométrie de la cavité.

Aspect longitudinal

Considérons une cavité comme celle représentée sur la figure 17, éclairée par une onde d'amplitude ψ_{in}

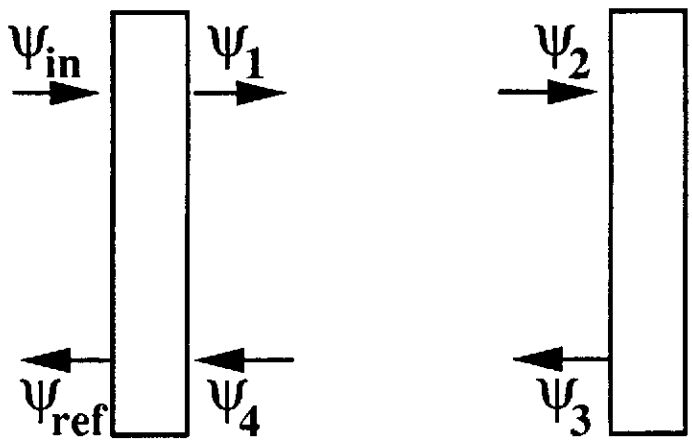


Figure 17: Schéma d'une cavité. Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du miroir d'entrée sont r_1 et t_1 et ceux du miroir de fond sont r_2 et t_2.

Les différentes amplitudes des champs circulant dans la cavité obéissent aux équations de raccordement :

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= t_1\psi_{in} + ir_1\psi_4 \\
\psi_2 &= \exp\left(\frac{2i\pi\nu L}{c}\right)\psi_1 \\
\psi_3 &= ir_2\psi_2 \\
\psi_4 &= \exp\left(\frac{2i\pi\nu L}{c}\right)\psi_3 \\
\psi_{ref} &= t_1\psi_4 + ir_1\psi_{in} \\
\psi_{tr} &= t_2\psi_2
\end{aligned}$$

où L est la longueur de la cavité. La solution stationnaire pour les champs stocké (ψ_1 par

exemple), réfléchi ψ_{ref} et transmis ψ_{tr} est :

$$\psi_1 = \frac{t_1}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\phi)} \psi_{in}$$
$$\psi_{ref} = i \frac{r_1 + (1 - p_1) r_2 \exp((2i\phi)}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\phi)} \psi_{in}$$
$$\psi_{tr} = \frac{t_1 t_2}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\phi)} \psi_{in}$$

où $\phi = 2\pi\nu L/c$ et $p_1 = 1 - r_1^2 - t_1^2$ représente les pertes du miroir d'entrée. A résonance, c'est à dire quand la longueur d'onde de la cavité est accordée sur la longueur d'onde de la lumière selon $2\phi = \pi$, on trouve qu'il y a un gain de puissance dans la cavité ($||\psi_1||^2$ est maximale) $G = \frac{t_1^2}{(1-r_1 r_2)^2}$, que la transmission de la cavité est maximale et que la réflexion est minimale. La première de ces propriétés est directement exploitée dans la technique de recyclage de puissance dans VIRGO et LIGO; la deuxième est bien connue en optique et sert de principe au filtre interférentiel (première utilisation historique du Fabry-Perot) : un Fabry-Perot est un discriminateur de fréquence (filtre passe bas). Un cas particulier est obtenu lorsque le gain G compense exactement les pertes p_1 et p_2 des miroirs, par un choix judicieux de r_1 par exemple; on assiste alors à un optimum : le gain obtenu est le maximum possible pour une cavité de pertes données, et la réflectivité globale de la cavité est nulle.

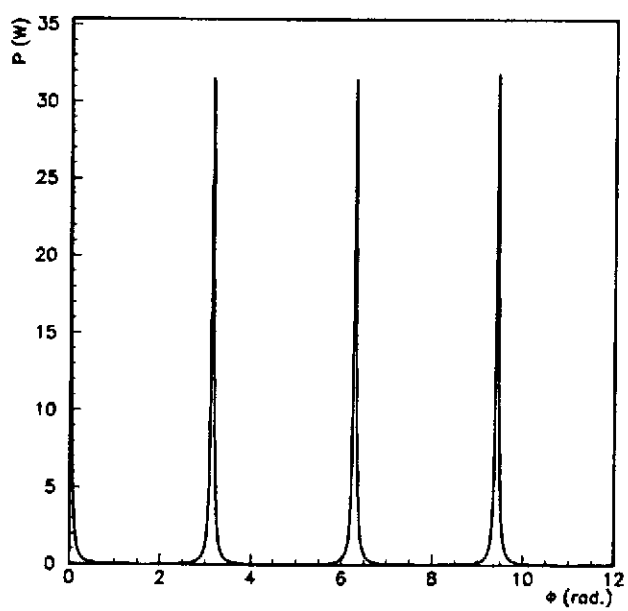


Figure 18: Fonction d'Airy représentant la puissance dans une cavité en fonction de l'accord de phase ϕ.

La figure 18 montre la puissance stockée en fonction de ϕ pour une cavité de finesse 50. L'écart entre deux résonances successives s'appelle l'intervalle spectral libre et le rapport entre celui-ci et la largeur à mi-hauteur d'un pic de résonance redonne la finesse; la finesse peut aussi s'écrire en fonction des réflectivités des miroirs comme :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}.$$

Aspect transversal, rudiments d'optique gaussienne

La cavité de géométrie plan-plan étudiée juste auparavant n'est pas une cavité stable au sens où ses modes propres (géométrie de faisceau accordée à la géométrie de la cavité) sont des ondes planes. Une cavité stable, telle que celle utilisée dans chacun des bras de VIRGO possède une géométrie différente pour laquelle au moins l'un des deux miroirs est courbe. Les modes propres d'une telle cavité, obtenus par résolution de l'équation d'Helmholtz, sont des modes gaussiens $\mathrm{TEM_{mn}}$ qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\psi_{mn}(x,y,z) = A\frac{w_0}{w(z)}H_m(X)H_n(Y)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w(z)} - ik\frac{x^2+y^2}{R(z)} + i\varphi_{mn} - ikz\right),$$

où $w(z)$ est l'extension transverse du faisceau, qui passe par un minimum à z=0 et vaut w_0 (appelé col ou waist du faisceau), $X = \sqrt{2}x/w(z)$, $Y = \sqrt{2}y/w(z)$, H_p est le polynôme d'Hermite d'ordre p, $R(z)$ est le rayon de courbure du faisceau et φ_{mn} est la phase de Guoy du mode $\mathrm{TEM_{mn}}$ (déphasage propre). Cette dernière montre que différents faisceaux gaussiens $\mathrm{TEM_{mn}}$ se propageant dans une cavité vont subir des déphasages de propagation différents, ce qui implique qu'il y a différentes conditions de résonance pour les modes $\mathrm{TEM_{mn}}$: une cavité stable est donc aussi un sélecteur de modes. C'est cette propriété qui est utilisée dans la cavité mode-cleaner placée en amont de l'interféromètre VIRGO, et qui est chargée de nettoyer le faisceau laser de tout ce qui n'est pas dans le bon mode (et qui ne se pourra pas se coupler aux cavités des bras). En ce qui concerne les cavités des bras, ce sont donc des cavités de longueur L =3 km, dont le miroir d'entrée est plan et le miroir de fond courbe. Pour une telle géométrie, le col des modes propres se trouve localisé sur le miroir d'entrée et ses dimensions sont données par $w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{(R-L)L}$, où $R \simeq 3.5$ km est le rayon de courbure du miroir de fond. Numériquement pour VIRGO on trouve $w_0 \simeq 2$cm, ce qui fait un gros faiceau laser. Bien entendu le laser source délivre un faisceau de col beaucoup plus petit, et des optiques d'adaptation sont nécessaires pour l'accorder à la géométrie du mode-cleaner puis à celle de l'interféromètre.

Le lecteur intéressé pourra trouver un approfondissement à toutes ces questions de physique des cavités dans le très pédagogique "Fundamentals of photonics" par B.E.A Saleh et M.C. Teich (Wiley Interscience, 1991).

Références

1) J. Weber cité par D. Blair dans "The detection of gravitational waves", Ed. D. Blair (Cambridge Univ. Press, 1991).

2) R. Mönchmeyer, G. Schäfer, E. Müllet and R.E. Kates, Astron. Astrophys. **246,** 417 (1991). S. Bonazzola and J.-A. Marck, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **45,** 655 (1994).

3) J.M. Cordes, R.W. Romani and S.C. Lundgren, Nature **362,** 133 (1993).

4) R.F. Stark and T. Piran, Phys. Rev. Lett. **55,** 891 (1985).

5) K.S. Thorne in "300 years of Gravitation" (Cambridge Univ. Press, 1987).

6) R. Narayan, T. Piran and A. Shemi, Ap.J. **379,** L17 (1991). E.S. Phinney, Ap.J. **380,** L17 (1991). A.V. Tutukov and L.R. Yungelson, MNRAS **260,** 675 (1993). S.J. Curran and D.R. Lorimer, MNRAS **276,** 347 (1995).

7) D. Blair et al., in "Gravitational Wave experiments", Eds. E. Coccia, G. Pizzella et F. Ronga (World Scientific, singapore, 1995) p. 144.

8) G.V. Pallatino and G. Pizzella, in "The detection of gravitational waves", Ed. D. Blair (Cambridge Univ. Press, 1991).

9) P.F. Michelson and R.C. Taber, Phys. Rev. D**29,** 2149 (1984).

10) P. Astone et al., in "Gravitational astronomy : instrument design and astrophyisical prospects", Eds. D. McClelland and H. Bachor (World Scientific, Singapore, 1991).

11) C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, "Mecanique Quantique" (Hermann, Paris, 1973) p.502.

12) W.G. Unruh, Phys. Rev. D**19,** 2888 (1979). V.B. Braginsky, Y.I. Vorontsov and K.S. Thorne, Science **209,** 547 (1980).

13) S.M Merkowitz and W.W. Johnson, Phys. Rev. D**51,** 2546 (1995).

14) M.E. Gertsenshtein and V.I. Pustovoit, Sov. Phys. JETP **16,** 433 (1963).

15) R. Weiss, Quart. Prog. Rep. Lab. Electron. MIT **105,** 54 (1972).

16) G.E. Moss, L.R. Miller and R.L. Forward, Appl. Opt. **10,** 2495 (1971).

17) J.-Y. Vinet, B.J. Meers, C.N. Man and A. Brillet, Phys. Rev. D**38,** 433 (1988).

18) R.W.P. Drever, in "Gravitational Radiation", Eds N. Deruelle and T. Piran (North Holland, Amsterdam, 1983).

19) F. Bondu and J.-Y. Vinet, Phys. Lett. A**198,** 74 (1995).

20) F. Bondu, P. Fritschel, C.N. Man and A. Brillet, Opt. Lett. **14,** 582 (1996).

21) F. Barone, E. Calloni, L. DiFiore, A. Grado, P. Hello, L. Milano and G. Russo, Phys. Lett. A**217,** 93 (1996).

22) A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, H. Billing and K. Maischberger,

Opt. Acta **28**, 641 (1981).

23) C.M. Caves, Phys .Rev. Lett. **45**, 75 (1980).

24) M.-T. Jaekel and S. Reynaud, EuroPhys. Lett. **13**, 301 (1990).

25) R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsime, "Statiscal physics II : nonequilibrium statistical mechanics" (Springer Verlag, Berlin, 1985).

26) H.B. Callen and T.A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).

27) P.R. Saulson, Phys. Rev. D**42**, 2437 (1990).

Bibliographie d'approfondissement

"The detection of gravitational waves", Ed. D. Blair (Cambridge Univ. Press, 1991).

K.S. Thorne in "300 years of Gravitation" (Cambridge Univ. Press, 1987).

P.R. Saulson, "Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors" (World Scientific, Singapore, 1994).

"Gravitational Wave Experiments", Eds. E. Coccia, G. Pizzella et F. Ronga (World Scientific, singapore, 1995)