

Corrélations d'appariement dans des conditions extrêmes

P.-H. Heenen

► **To cite this version:**

P.-H. Heenen. Corrélations d'appariement dans des conditions extrêmes. École thématique. Ecole Joliot Curie "Structure nucléaire : un nouvel horizon", Maubuisson, (France), du 8-13 septembre 1997 : 16ème session, 1997. cel-00652711

HAL Id: cel-00652711

<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00652711>

Submitted on 16 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Corrélations d'appariement dans des conditions extrêmes

P.-H. Heenen*

Service de Physique Nucléaire Théorique,
U.L.B.-C.P.229, B-1050 Brussels, Belgium

Abstract

In these lecture notes, we will present the problems related to the treatment of pairing correlations in two different extreme regimes. First, we will discuss how to treat pairing correlations when the energy of the Fermi level is close to 0, as in nuclei close to the drip lines. Bound and continuum states are then connected by pairing. We will show how localized densities are obtained when one uses the Hartree-Fock-Bogoliubov method, while a spurious gas is generated if the BCS approximation is introduced. The second regime concerns weak pairing correlations and in particular the transition between a strong and a weak pairing regime, as along a rotational band. Then, one has to introduce correlations beyond the mean-field approximation, by a restoration of the particle number symmetry. We will discuss the approximate methods that are currently used for this symmetry restoration.

Dans ce cours, nous aborderons le problème du traitement des corrélations d'appariement dans deux régimes extrêmes. Le premier cas concerne les noyaux éloignés de la stabilité. L'énergie du niveau de Fermi étant dans ce cas proche de 0, l'appariement connecte des états liés à des états du continu. Nous montrerons que des densités localisées sont obtenues

*Directeur de Recherches FNRS.

si on utilise l'approximation de Hartree-Fock-Bogoliubov mais que le noyau est entouré d'un gaz spurieux de particules si on introduit l'approximation BCS. Le second régime concerne les corrélations d'appariement faibles, et en particulier la transition entre un régime de pairing fort et faible, comme le long d'une bande rotationnelle. Il est nécessaire dans ce cas d'introduire des corrélations au delà de l'approximation de champ moyen par une restauration de la symétrie nombre de particules. Nous discuterons les méthodes approchées qui sont couramment utilisées aujourd'hui pour effectuer cette restauration de symétrie.

I. INTRODUCTION

Les évidences expérimentales montrant l'importance des corrélations d'appariement en physique nucléaire sont nombreuses et connues depuis longtemps (tous les livres de base de physique nucléaire ont au moins un chapitre consacré à ce problème; dans le livre de Ring et Schuck [1], on trouvera des références sur de très nombreux points abordés dans ce cours). Les plus importantes concernent probablement les effets pair-impair dans les énergies de liaison des noyaux, indiquant une liaison plus grande pour les noyaux à nombre pair de neutrons et de protons que pour ceux à nombre impair. Ce phénomène s'explique par la brisure d'une paire de nucléons appariés dans les noyaux impairs. Une autre manifestation importante de ces corrélations est reliée au comportement des moments d'inertie de bandes rotationnelles en fonction du spin. A bas spin, ce moment d'inertie est inférieur à celui d'un noyau assimilé à un corps rigide en rotation. Il augmente en fonction du spin, pour atteindre à haut moment angulaire la valeur corps rigide en rotation. Ce comportement est interprété dans le cadre du modèle du cranking comment étant dû à une atténuation des corrélations d'appariement par la rotation. L'effet de celle-ci est en effet de briser les paires de nucléons appariés, qui ayant des spins opposés subissent de façon inverse les effets de la rotation (effet Mottelson-Valatin [2]). Il en résulte une

dilatation du spectre à bas moment angulaire et donc une diminution du moment d'inertie qui s'atténue avec le spin.

La méthode "classique" de traitement des corrélations d'appariement est l'approximation BCS. Les premières applications de la méthode BCS ont été effectuées dans une couche d'oscillateur, ce qui justifiait l'utilisation d'une interaction entre paire constante (interaction de séniorité). Par la suite, cette force de séniorité a été abondamment utilisée dans des espaces variationnels restreints, limités à une tranche d'énergie autour du niveau de Fermi. Des forces plus générales ont été introduites déjà dans les années 70. Une première famille est constituée de forces de portée nulle (interaction delta) comportant éventuellement une dépendance en densité. Ce type d'interaction nécessite, comme l'interaction de séniorité, une limitation de l'espace variationnel, les éléments de matrice d'un opérateur à deux corps de portée nulle ne comportant pas de coupure en fonction de l'énergie. Une deuxième famille est constituée par des interactions de portée finie, non nulle, dont un exemple abondamment testé est l'interaction de Gogny (voir par exemple le cours de J-F Berger en 1991 [3] ou [4]). Dans ce cas, une coupure dans l'espace des phases existe naturellement et l'énergie d'appariement ne diverge pas en fonction de la taille de la base utilisée.

L'étude de noyaux à très haut moment angulaire ou de noyaux éloignés de la stabilité a révélé trois faiblesses principales des traitements de l'appariement à l'approximation BCS. Les deux premières requièrent de remplacer l'approximation BCS par une méthode qui la généralise: la méthode de Hartree-Fock Bogoliubov. La troisième demande d'introduire des corrélations au delà de la méthode du champ moyen.

Dans les noyaux en rotation, est utilisé un hamiltonien contenant une contrainte sur une des projections du moment angulaire. Dans ce cas, l'état obtenu par la méthode du champ moyen brise la symétrie par renversement du sens du temps. L'approximation BCS dans laquelle on suppose que les états appariés sont dégénérés en énergie et reliés entre eux par l'opération de renversement du sens du temps n'est donc plus valable.

Dans le cas des noyaux éloignés de la ligne de stabilité, par définition, le niveau de Fermi s'approche de zéro. L'approximation BCS n'est alors plus correcte parce que les corrélations d'appariement connectent des états liés à des états situés dans le continu. On peut montrer qu'à cette approximation, on crée ainsi un nuage de particules entourant de façon non physique le noyau. Nous verrons dans ce cours que la méthode HFB ne possède pas ce défaut.

La troisième insuffisance des traitements classiques de l'appariement concerne le régime des corrélations faibles. Le cas le plus typique est celui d'un noyau en rotation pour lequel l'énergie d'appariement décroît avec le spin. A l'approximation BCS ou HFB, ces corrélations disparaissent pour une fréquence de rotation de l'ordre de 300keV, autour de laquelle elles s'annulent brusquement. Cette disparition est en général assimilée à une transition entre une phase superfluide et une phase normale du noyau. Elle induit des discontinuités dans le moment d'inertie dynamique du noyau, qui ne sont pas vérifiées expérimentalement. Nous verrons dans la deuxième partie du cours que ces transitions de phase sont spurieuses et disparaissent dans des méthodes plus générales que les méthodes de champ moyen.

Dans la première partie du cours, nous allons partir de l'approximation BCS pour indiquer en quoi la méthode HFB la généralise. Nous dériverons ensuite la forme asymptotique des équations HFB, pour démontrer que le couplage entre les états HF liés et du continu n'entraîne pas la création d'un nuage spurieux de particules entourant le noyau. Dans la deuxième partie du cours, nous introduirons les méthodes de variation après restauration de symétrie et nous montrerons qu'elles permettent d'introduire des corrélations au-delà du champ moyen qui suffisent à éliminer les transitions de phase liées aux symétries brisées.

II. LES NOYAUX ÉLOIGNÉS DE LA STABILITÉ

A. L'approximation BCS

Un état BCS $|BCS\rangle$ est défini à partir du vide $|0\rangle$ par:

$$|BCS\rangle = \prod_{i>0} (u_i + v_i a_i^\dagger a_{\bar{i}}^\dagger) |0\rangle, \quad (2.1)$$

où les orbitales \bar{i} et i sont reliées par une opération de renversement du sens du temps. et a_i^\dagger est l'opérateur de création d'un nucléon dans l'orbitale i . La notation $i > 0$ indique que le produit court seulement sur un membre pour chaque paire BCS. L'état $|BCS\rangle$ est le vide des quasiparticules α_i et $\alpha_{\bar{i}}$ définies par:

$$\begin{aligned} b_i &= u_i a_i - v_i a_{\bar{i}}^\dagger, \\ b_{\bar{i}} &= u_i a_{\bar{i}} + v_i a_i^\dagger. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Rappelons qu'un état BCS n'est pas état propre de l'opérateur nombre de particules $\hat{N} = \sum_i a_i^\dagger a_i$.

Examinant la structure de la transformation BCS2.2, on voit qu'il s'agit d'une transformation de base très particulière. Elle mélange les opérateurs de création et d'annihilation, ainsi que des opérateurs reliés par une transformation par renversement du sens du temps. Elle est limitée au mélange d'un seul couple (i, \bar{i}) , défini précisément par l'opération renversement du sens du temps. La transformation de Bogoliubov généralise la transformation BCS en levant ces deux particularités. D'une part, le lien simple entre les états BCS partenaires est relâché. D'autre part, la transformation de base mélange tous les états $a_{\bar{i}}$ et a_i et non plus seulement deux d'entre eux.

B. La transformation de Bogoliubov

La transformation de Bogoliubov est une transformation unitaire générale qui relie les opérateurs de création et d'annihilation $\{a_i^\dagger, a_i\}$ aux opérateurs de quasiparticules

$\{b_i^+, b_i\}$, tout en préservant les propriétés fermioniques d'anticommutation. La matrice de transformation \mathcal{W} est définie par:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} U & V^* \\ V & U^* \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} b_i^+ \\ b_i \end{pmatrix} = \mathcal{W}^+ \begin{pmatrix} a_i^+ \\ a_i \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

On montre de façon très générale (théorème de Bloch-Messiah [5]) que cette transformation se décompose en le produit de trois transformations plus simples,

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{V} \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix} . \quad (2.4)$$

La première et la troisième transformations ne mélangent pas les opérateurs de création et d'annihilation. La deuxième a la même structure qu'une transformation BCS classique: elle se décompose en transformations ne mélangeant qu'une seule paire (pour un noyau pair-pair). La différence essentielle entre cette transformation et une transformation BCS habituelle est que le choix des orbitales partenaires n'est pas postulé à priori mais est défini par la première transformation.

La base intermédiaire de la transformation de Bogoliubov possède des propriétés très particulières. Elle porte le nom de base canonique ou de base naturelle.

C. Les équations HFB

Partant d'un hamiltonien \hat{H} qui s'écrit dans une base à particules indépendantes $\{a_i^+, a_i, (i = 1, \dots, N)\}$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{T} + \hat{V} \quad , \\ \hat{T} &= \sum_{ij} T_{ij} a_i^+ a_j \quad , \\ \hat{V} &= \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^+ a_j^+ a_l a_k \quad , \end{aligned} \quad (2.5)$$

la méthode HFB détermine le vide de quasiparticule $|\Psi\rangle$ qui minimise l'énergie

$$\mathcal{E} = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \quad (2.6)$$

avec la contrainte: $\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle = N_0$. La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules \hat{N} est donc contrainte au nombre voulu de nucléons N_0 (séparément pour les neutrons et les protons).

La minimisation du routhian total \mathcal{E}^λ ,

$$\mathcal{E}^\lambda = \mathcal{E} - \lambda \langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle \quad (2.7)$$

conduit aux équations HFB aux valeurs propres: pour la matrice $2N \times 2N$:

$$\begin{pmatrix} h & \Delta \\ -\Delta^* & -h^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} E \quad , \quad (2.8)$$

qui donnent $N \times N$ matrices U et V comme vecteurs propres et la matrice diagonale E de N valeurs propres qui sont les énergies de quasiparticules, $E_{ij} = \delta_{ij} E_i$. Le spectre HFB complet est composé de paires de valeurs propres opposées [1]. Dans l'Eq. (2.8), une seule valeur propre pour chaque paire doit être retenue (sinon les relations de commutation de fermions ne peuvent être satisfaites). Le hamiltonien de Hartree-Fock h et le potentiel d'appariement Δ sont construits à partir de la matrice densité ρ et du tenseur d'appariement κ :

$$\begin{aligned} \rho &= V^* V^T \quad , \\ \kappa &= V^* U^T \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

suivant

$$\begin{aligned} h_{ij} &= T_{ij} + \sum_{kl} V_{ikjl} \rho_{lk} - \lambda \delta_{ij} \quad , \\ \Delta_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{kl} V_{ijkl} \kappa_{kl} \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Les opérateurs b sont les opérateurs de destruction associés au vide de quasiparticules $|\Psi\rangle$ ($b_i |\Psi\rangle = 0$, $i = 1, \dots, N$).

D. La base canonique

La base canonique possède des propriétés très particulières. On montre facilement à partir des équations 2.9 et de la forme de la transformation de Bloch-Messiah que la

matrice densité y est diagonale et le tenseur d'appariement y est sous sa forme canonique. L'un et l'autre y ont donc des formes similaires à celles de l'approximation BCS. Il faut cependant noter que le hamiltonien de Hartree-Fock (matrice h) n'est pas diagonal dans cette base. Pour cette raison, la notion d'énergie de particules individuelles n'a plus de signification exacte à l'approximation HFB. Seules les énergies de quasiparticules ont un sens bien précis.

E. L'espace des coordonnées

Les formules données jusqu'à présent correspondent à une résolution des équations HFB par développement sur une base (par exemple d'oscillateurs). Les opérateurs de création a_i^+ sont repérés par un indice discret i qui labelle les états de la base. Une représentation équivalente (à la convergence!) consiste à utiliser une représentation de coordonnées spatiales. C'est ce qui est fait en général lorsque l'on considère des systèmes à symétrie sphérique: les équations HFB radiales sont discrétisées entre l'origine et une valeur du rayon pour laquelle on annule toutes les fonctions d'onde [6,7]. Une méthode similaire est utilisée lorsque l'on discrétise les équations du champ moyen sur un réseau cubique à 3 dimensions [8,9].

Les coordonnées sphériques sont particulièrement bien adaptées à la discussion des propriétés spatiales des fonctions d'onde et en particulier de leur forme asymptotique et du couplage au continu. Les opérateurs de création dans l'espace des coordonnées sont liés aux opérateurs de création sur une base par une transformation simple. L'opérateur de création d'une particule dans l'espace au point \mathbf{r} et ayant la projection de spin $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ est donné par:

$$a_{\mathbf{r}\sigma}^+ = \sum_i \psi_i^*(\mathbf{r}\sigma) a_i^+, \quad (2.11)$$

où $\psi_i(\mathbf{r}\sigma)$ est la fonction d'onde du i -ième état de particule individuelle.

La relation inverse à (2.11) est donnée par:

$$a_i^+ = \int d^3\mathbf{r} \sum_{\sigma} \psi_i(\mathbf{r}\sigma) a_{\mathbf{r}\sigma}^+ \quad (2.12)$$

Ces équations (2.11) and (2.12) supposent que les fonctions d'onde $\psi_i(\mathbf{r}\sigma)$ forment un ensemble orthonormal complet.

On définit des densités de particules et d'appariement dans l'espace \mathbf{r} de la même façon que dans une base:

$$\rho(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = \langle \Psi | a_{\mathbf{r}'\sigma'}^+ a_{\mathbf{r}\sigma} | \Psi \rangle, \quad (2.13a)$$

$$\kappa(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = \langle \Psi | a_{\mathbf{r}'\sigma'} a_{\mathbf{r}\sigma} | \Psi \rangle. \quad (2.13b)$$

Notons que plutôt que κ , qui est une fonction antisymétrique des arguments de spin et d'espace, certains auteurs préfèrent introduire une matrice paire par renversement du sens du temps et hermitique, $\tilde{\rho}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma')$ qui est reliée à κ par:

$$\kappa(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = 2\sigma\sigma' \tilde{\rho}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') \quad (2.14)$$

On a alors les propriétés:

$$\rho(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = 4\sigma\sigma' \rho(\mathbf{r}-\sigma, \mathbf{r}'-\sigma')^*, \quad (2.15a)$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = 4\sigma\sigma' \tilde{\rho}(\mathbf{r}-\sigma, \mathbf{r}'-\sigma')^*. \quad (2.15b)$$

Dans la suite, nous utiliserons $\tilde{\rho}(\mathbf{r}-\sigma, \mathbf{r}'-\sigma')$ plutôt que κ , de façon à nous conformer aux notations des ref [6,7].

Les densités HFB locales (pour $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$) ont des interprétations physiques simples: ρ mesure le nombre de particules dans un volume infinitésimal autours de \mathbf{r} ayant le spin σ ; $\tilde{\rho}$ mesure la probabilité d'avoir une paire de fermions de projections de spin opposées dans un volume infinitésimal autours de \mathbf{r} .

L'équation HFB dans l'espace des coordonnées [1,6], s'écrit de façon similaire à l'équation dans l'espace des configurations:

$$\int d^3\mathbf{r}' \sum_{\sigma'} \begin{pmatrix} h(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') & \bar{h}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') \\ \tilde{h}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') & -h(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(E, \mathbf{r}'\sigma') \\ \phi_2(E, \mathbf{r}'\sigma') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + \lambda & 0 \\ 0 & E - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(E, \mathbf{r}\sigma) \\ \phi_2(E, \mathbf{r}\sigma) \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

où $\phi_1(E, r\sigma)$ and $\phi_2(E, r\sigma)$ sont les composantes haute et basse des fonctions d'onde individuelles HFB de quasiparticules et λ l'énergie de Fermi.

L'équation HFB prend une forme proche de l'équation HF habituelle si on introduit une matrice densité généralisée:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \rho & \bar{\rho} \\ \bar{\rho} & \delta - \rho \end{pmatrix} ; \quad (2.17)$$

Cette matrice commute avec le hamiltonien HFB:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h - \lambda & \bar{h} \\ \bar{h} & -(h - \lambda) \end{pmatrix} ; \quad (2.18)$$

de la même façon que la matrice densité habituelle commute avec le hamiltonien HF. La matrice \mathcal{R} se développe en fonction des états propres de \mathcal{W} , avec ses valeurs propres comme coefficients.

Les propriétés de ρ et κ permettent de montrer que ces valeurs propres de \mathcal{R} sont égales à 0 ou 1. Cette matrice s'exprime donc en fonction des vecteurs propres de \mathcal{W} comme une somme sur les états occupés (valeur propre 1). L'analogie avec la matrice densité de la méthode de Hartree-Fock pure est donc évidente.

Il nous reste maintenant à examiner les propriétés asymptotiques des solutions de l'équation HFB. La matrice densité et le tenseur d'appariement sont localisés sur le noyau. Les termes d'interaction de $h(r\sigma, r'\sigma')$ et $\bar{h}(r\sigma, r'\sigma')$ tendent donc vers 0 asymptotiquement. Ne subsistent que l'énergie cinétique et le terme en λ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_1(E, r'\sigma') = (\lambda + E)\phi_1(E, r'\sigma') \quad (2.19)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_2(E, r'\sigma') = (\lambda - E)\phi_2(E, r'\sigma') \quad (2.20)$$

Les formes asymptotiques de ϕ_1 et ϕ_2 dépendent respectivement des signes de $\lambda + E$ et $\lambda - E$. On a pour $\phi_1(E, r'\sigma')$ une forme asymptotique en onde plane si $\lambda + E > 0$ et en exponentielle décroissante si $\lambda + E < 0$. Pour $\phi_2(E, r'\sigma')$, l'onde plane est obtenue pour $\lambda - E > 0$ et l'exponentielle décroissante pour $\lambda - E < 0$.

Pour $\lambda > 0$, l'ensemble du spectre est continu, tandis que pour $\lambda < 0$, il est soit discret ($|E| < -\lambda$), soit continu ($|E| > -\lambda$). Comme pour $E > 0$ et $\lambda < 0$ les composantes basses $\phi_2(E, \mathbf{r}\sigma)$ sont des fonctions localisées de \mathbf{r} , les matrices densités:

$$\rho(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = \sum_{0 < E_n < -\lambda} \phi_2(E_n, \mathbf{r}\sigma) \phi_2^*(E_n, \mathbf{r}'\sigma') + \int_{-\lambda}^{\infty} dn(E) \phi_2(E, \mathbf{r}\sigma) \phi_2^*(E, \mathbf{r}'\sigma'), \quad (2.21a)$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = - \sum_{0 < E_n < -\lambda} \phi_2(E_n, \mathbf{r}\sigma) \phi_1^*(E_n, \mathbf{r}'\sigma') - \int_{-\lambda}^{\infty} dn(E) \phi_2(E, \mathbf{r}\sigma) \phi_1^*(E, \mathbf{r}'\sigma'), \quad (2.21b)$$

sont toujours localisées. L'état HFB est défini en occupant tous les états d'énergie négative, les états de quasiparticules d'énergie positive définissant les excitations du système.

En pratique, le spectre continu est discrétisé. L'intégrale sur l'énergie se réduit alors à une somme discrète.

L'approximation BCS revient à négliger les éléments de matrice non diagonaux de l'appariement: la matrice $\tilde{h}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma')$ est nulle pour $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ et constante sur la diagonale $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Les conditions asymptotiques de la méthode HFB sont donc perdues puisque Δ ne s'annule pas asymptotiquement. Les densités définies à l'approximation BCS ne sont pas localisées lorsque le niveau de Fermi se rapproche de 0.

Les figures 1 à 3, tirées de la référence [7], illustrent le comportement asymptotique des fonctions d'onde obtenues dans différentes bases. On voit sur la figure 1 qu'une des deux composantes de la fonction HFB est toujours localisées (la composante basse), tandis que l'autre ne l'est pas, sauf pour la fonction la plus proche du niveau de Fermi ($n=1$) pour laquelle $|E| < -\lambda$, localisée. Notons que les états n'ont pas été classés suivant leur énergie de qp mais suivant leur nombre de noeuds. En effet, les états ayant les énergies les plus basses sont ceux qui sont le plus proche du niveau de Fermi et non ceux correspondant (à l'approximation HF) aux états les plus profonds du champ moyen.

La figure 2 reprend les états de la base canonique, construit à partir des composantes HFB basses. Ils sont tout clairement localisés à l'intérieur du noyau. Sur la figure 3 sont dessinés les états HF+BCS obtenus en négligeant dans la matrice HFB les éléments non diagonaux de Δ . L'effet sur les composantes basses est dramatique: seules les plus

profondes sont localisées. Dès que l'on se rapproche du niveau de Fermi, le couplage avec le continu devient important et perturbe fortement le comportement des états HF+BCS.

Figure 1

Fonctions d'onde radiales $r\phi_i(E_n, r)$ des neutrons $s_{1/2}$ du ^{120}Sn , obtenues à l'approximation HFB avec l'interaction de Skyrme SkP. Les trois composantes basses $n=2,3$ et 4 ont été multipliées par un facteur 25.

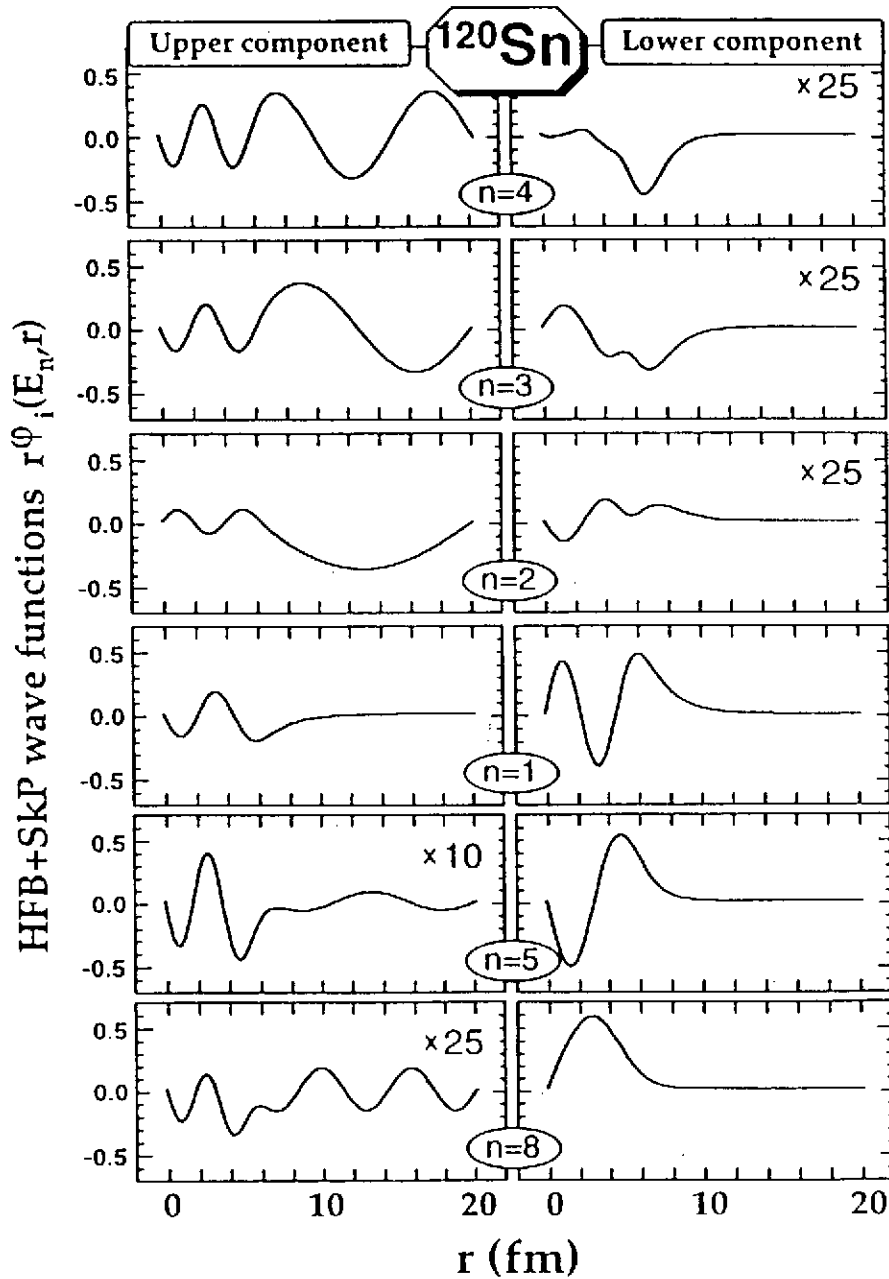


Figure 2

Fonctions d'onde radiales de la base canonique correspondant aux fonctions HFB de la figure 1 .

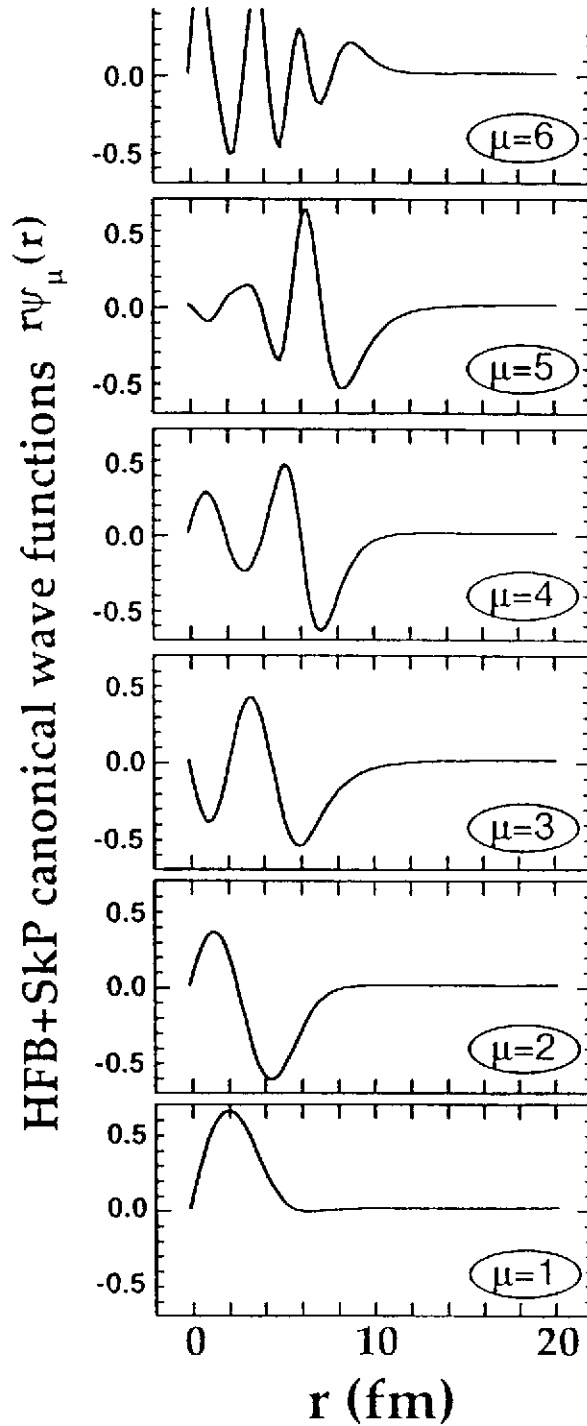
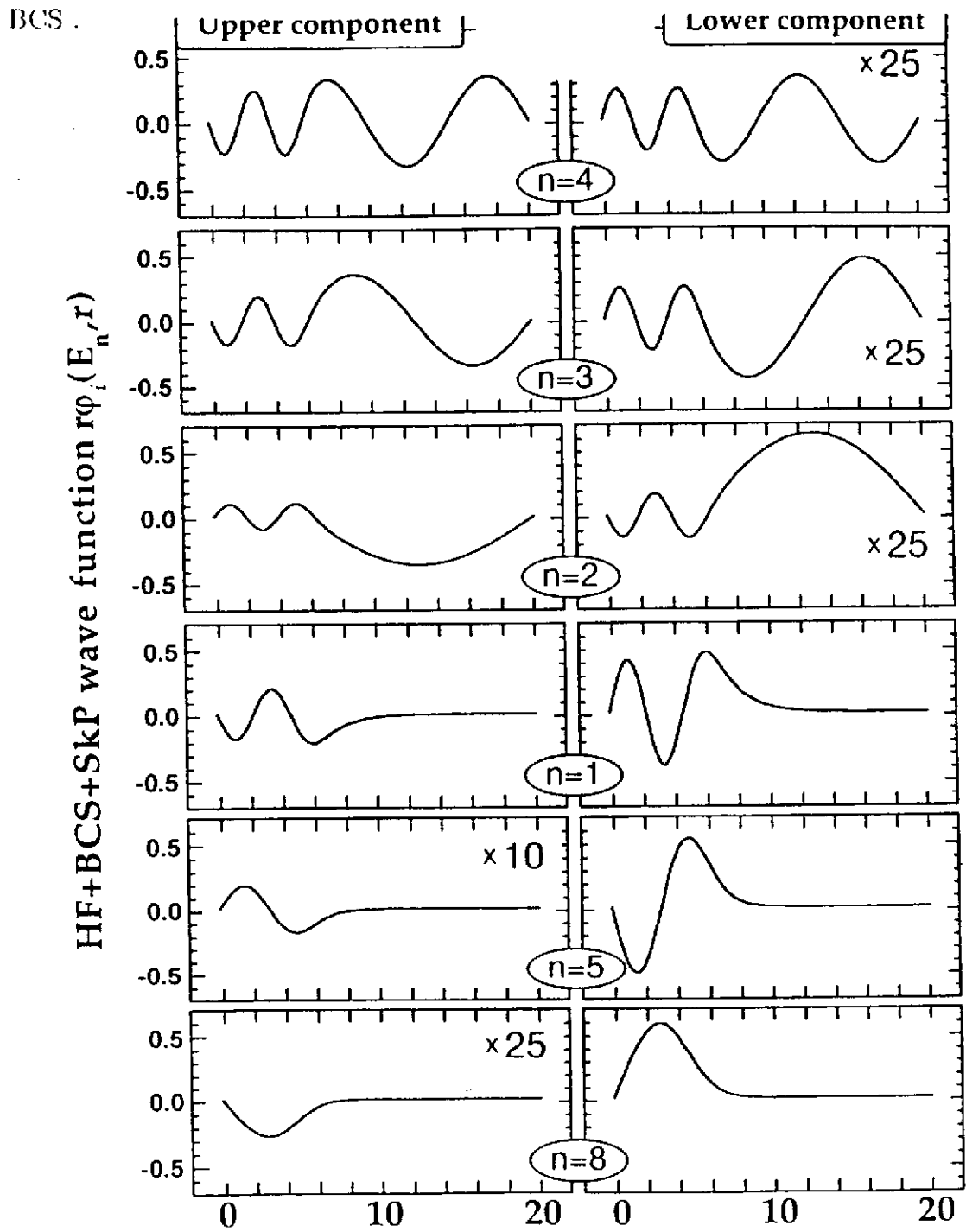


Figure 3

Même légende que la figure 1. pour des fonctions d'onde obtenues à l'approximation



III. LE RÉGIME DES CORRÉLATIONS D'APPARIEMENT FAIBLES

A. Position du problème

Les équations HFB ont les équations HF comme cas particulier. En fait, il n'est pas garanti que les solutions des équations HFB présentent des corrélations d'appariement et que la solution HF ne soit pas la plus favorable énergétiquement. Comme nous l'avons discuté dans l'introduction, c'est ce qui se produit à haut spin dans une bande de rotation.

Cette transition de phase apparente entre phases superfluide et normale n'est pas physique [10]. On montre qu'aux alentours de la valeur critique du paramètre de contrôle pour laquelle les corrélations disparaissent, le gap s'annule, mais ses fluctuations deviennent très grandes, conduisant par exemple à la divergence des équations de la RPA [11]. Prendre en compte ces fluctuations conduit à des corrections faibles dans le cas d'un système infini. Par contre, dans un système à nombre fini de particules comme le noyau, ces corrections sont beaucoup plus importantes et modifient profondément le comportement de certaines grandeurs physiques. Ces corrections existent pour toute brisure de symétrie du hamiltonien physique par le hamiltonien de la méthode du champ moyen. Elles sont particulièrement grandes dans le cas de l'appariement car le nombre de paires participant à ces corrélations est très faible (4 ou 5) [3], beaucoup plus faible que le nombre de nucléons participant à l'apparition de déformation quadrupolaire et responsable de la brisure de la symétrie de rotation.

La disparition brutale des corrélations d'appariement amène un comportement non physique et incompatible avec l'expérience de la dépendance des moments d'inertie dynamique en fonction de la fréquence de rotation dans les bandes superdéformées. Rappelons que ces deux grandeurs sont définies à partir de leur équivalent en mécanique rationnelle: la fréquence de rotation est la dérivée de l'énergie totale par rapport au moment angulaire et le moment d'inertie dynamique en est la dérivée seconde. Il s'agit donc d'une quantité extrêmement sensible aux irrégularités de l'énergie totale. Sur la figure 4

est dessiné le moment d'inertie dynamique du ^{192}Hg calculé à l'approximation HFB avec une interaction de séniorité dans la voie d'appariement. On voit que ce moment d'inertie présente deux pics, à des fréquences de rotation de l'ordre de 300keV. Au delà du deuxième pic, le moment d'inertie dynamique devient égal à la valeur obtenue à l'approximation HF. Sur la figure 5 sont reprises les énergies de pairing neutrons et protons. On voit qu'elles s'annulent, d'abord pour les protons et ensuite pour les neutrons aux deux fréquences pour lesquelles le moment d'inertie dynamique présente des pics. Ceux-ci ne sont pas présents pas dans les données expérimentales.

La façon de corriger ce problème est bien connue. La meilleure approche consiste à effectuer un calcul de variation après projection sur le bon nombre de particules (VAP).

Figure 4

Moment d'inertie dynamique du ^{192}Hg calculé à l'approximation HF, HFB et HFB+LN avec une interaction de séniorité dans la voie d'appariement et la force de Skyrme Skm^* dans la voie champ moyen (d'après la ref [12]).

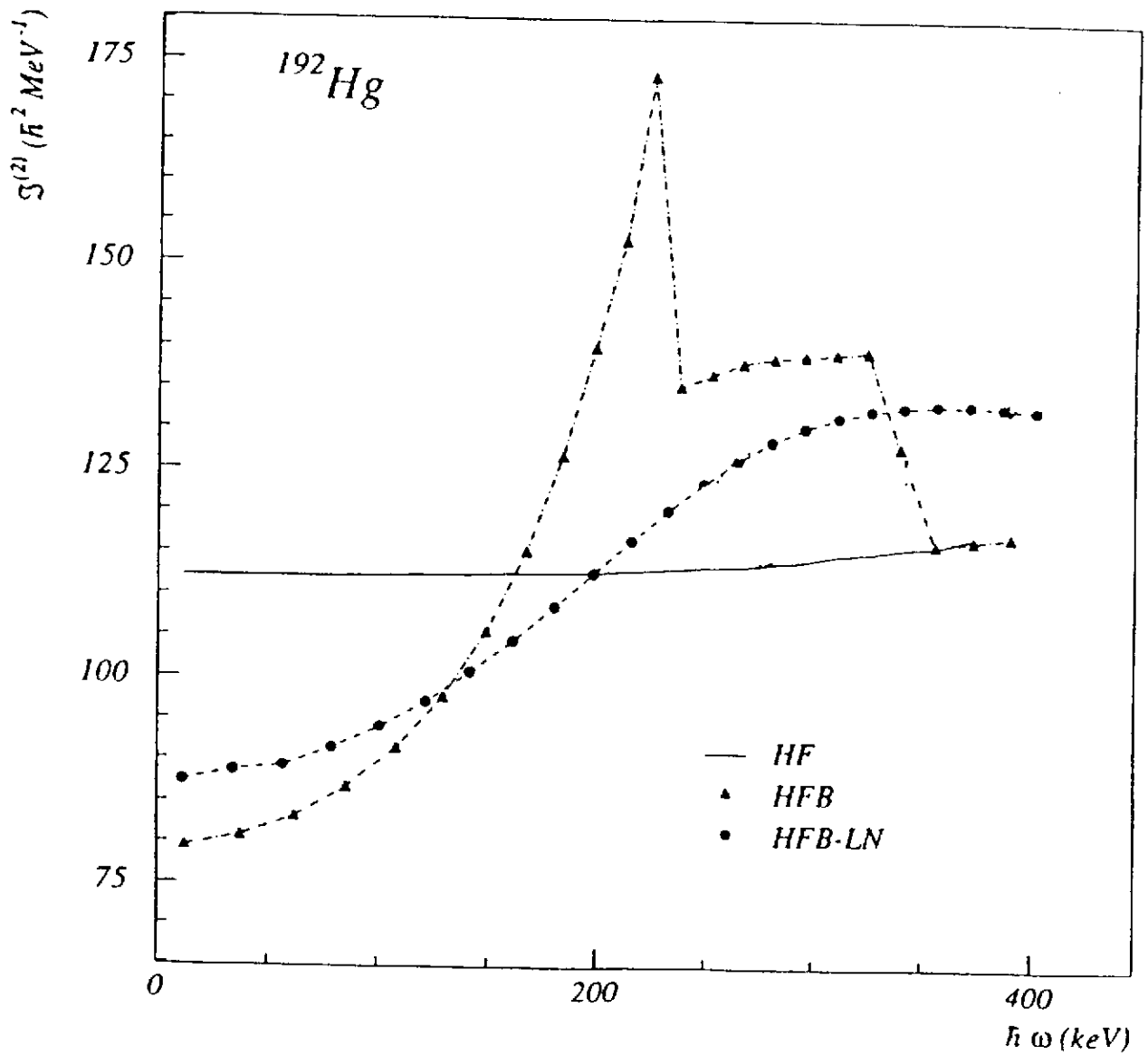
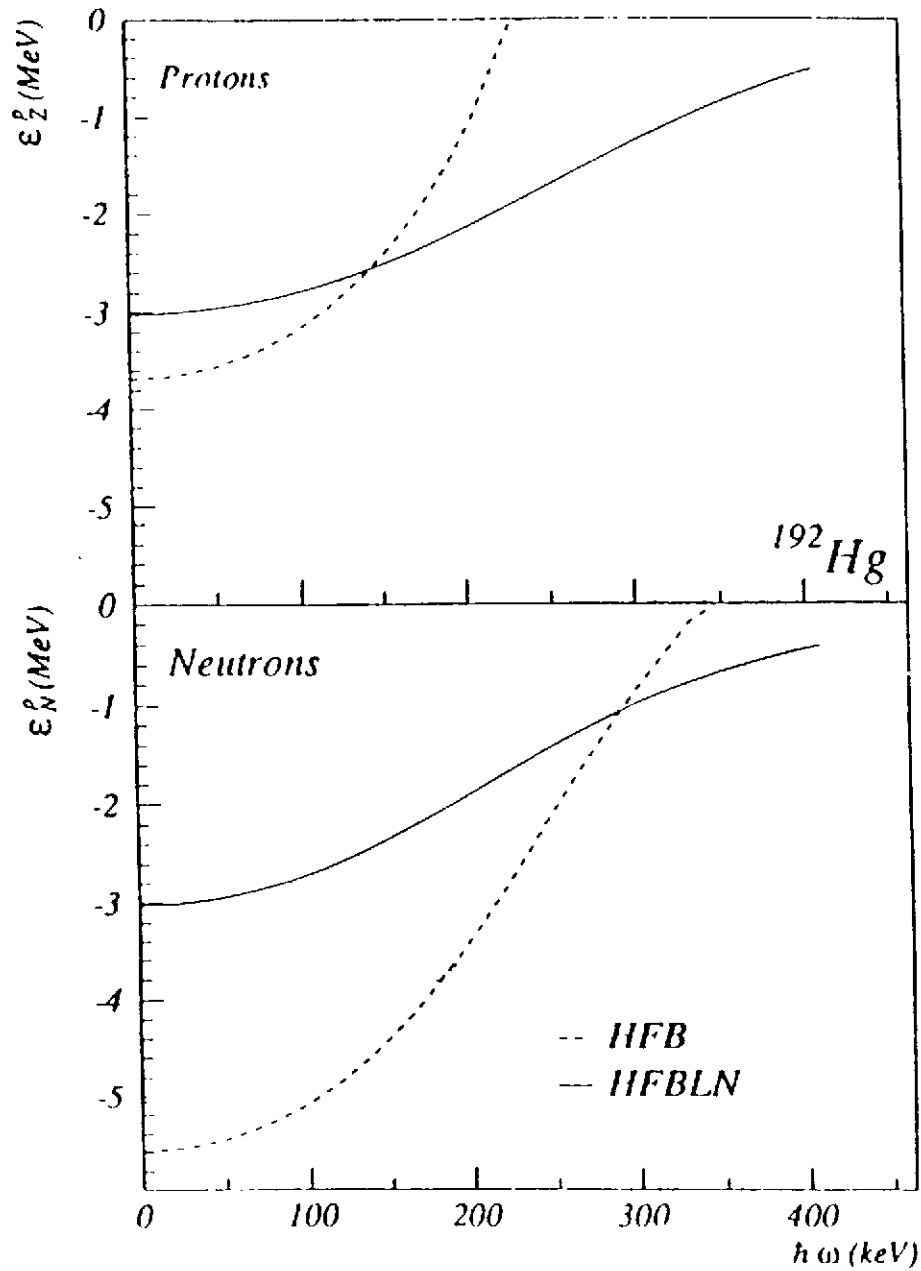


Figure 5

Energie d'appariement du ^{192}Hg calculé à l'approximation HF et HFBLN avec une interaction de séniorité dans la voie d'appariement et la force de Skyrme Sku * dans la voie champ moyen (d'après la ref [12]).



B. Variation après projection

Des fonctions d'onde projetées sur le bon nombre de particules sont obtenues à partir de fonctions d'onde de type BCS ou Bogoliubov en utilisant un opérateur de projection sous forme intégrale:

$$\hat{P}_{NZ} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(i\phi_N(\hat{N} - N)) d\phi_N \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(i\phi_Z(\hat{Z} - Z)) d\phi_Z \quad (3.1)$$

Dans cette équation, N et Z sont les nombres de neutrons et de protons sur lesquels on projette, \hat{N} et \hat{Z} sont les opérateurs nombre de neutrons et de protons. On obtient une fonction d'onde ayant N neutrons et Z protons $|\Phi(N, Z)\rangle$ par l'action de ce projecteur sur une fonction HFB:

$$|\Phi(N, Z)\rangle = \hat{P}_{NZ}|\Psi\rangle \quad (3.2)$$

Les intégrales sur les angles de jauge $\phi_{N,Z}$ font intervenir de façon générale un domaine d'intégration compris entre 0 et 2π qui peut être réduit à un intervalle de 0 à π pour des noyaux à nombre pair de neutrons et de protons. Une réduction supplémentaire de 0 à $\pi/2$ pour l'une des deux intégrales est possible si les fonctions d'onde sont paires par renversement du sens du temps.

La forme de la projection sur le bon nombre de particules est similaire à l'introduction d'une fonction d'onde coordonnée génératrice. Dans la méthode de la coordonnée génératrice (GCM), partant d'une famille de fonctions d'onde à N -corps $|\Psi(q)\rangle$, dépendant d'une variable collective q , on détermine une meilleure approximation des états propres de l'hamiltonien \hat{H} sous la forme:

$$|\Phi_k\rangle = \int dq f_k(q) |\Psi(q)\rangle \quad (3.3)$$

Les fonctions poids f_k (k est l'indice des états propres) sont déterminées en demandant que la valeur moyenne de l'énergie E_k :

$$E_k = \frac{\langle \Phi_k | \hat{H} | \Phi_k \rangle}{\langle \Phi_k | \Phi_k \rangle} \quad (3.4)$$

soit stationnaire par rapport à des variations arbitraires δf_k .

La première différence entre la GCM et une projection sur une symétrie brisée est que la fonction poids est connue à priori dans ce dernier cas, à partir d'arguments simples. On vérifie que, dans le cas de la projection sur le nombre de particules, la fonction poids est constante en développant la fonction que l'on projette sur des états à bon nombre de particules $|\Phi(N)\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_N c_N |\Phi(N)\rangle \quad (3.5)$$

Comme on a:

$$\hat{N}|\Phi(N)\rangle = N|\Phi(N)\rangle \quad (3.6)$$

remplaçant $|\Psi\rangle$ dans l'équation (3.2) par son expression (3.5), on obtient une phase qui annule l'intégration sauf pour la composante de $|\Psi\rangle$ ayant le nombre de particules désiré.

La fonction poids étant fixée, une deuxième différence GCM/projection apparaît: telle quelle, la projection ne contient pas de paramètres variationnels. La fonction $|\Psi\rangle$ peut elle même résulter d'un calcul variationnel (comme une fonction HFB par exemple), mais elle n'est pas modifiée par la projection. Dans ce cas, la méthode utilisée est appelée une méthode de variation avant projection (PAV). Cette méthode n'est pas satisfaisante dans de nombreux cas, en particulier pour les noyaux en rotation, pour lesquelles les corrélations d'appariement disparaissent brutalement pour une certaine fréquence de rotation. En dessous de cette fréquence, la fonction d'onde brise la symétrie nombre de particules et est affectée par la projection. En particulier, la projection conduit à une meilleure énergie variationnelle. Au dessus de la fréquence critique, la fonction d'onde devient purement HF et est donc fonction propre de l'opérateur nombre de particules. L'énergie n'est alors pas modifiée par la projection et une méthode PAV aboutit ainsi à une discontinuité de l'énergie à la fréquence critique.

La solution à ce problème est de permettre une variation de la fonction $|\Psi\rangle$ après l'avoir projetée sur la symétrie à restaurer. Ceci peut se faire de deux manières. Une

variation limitée consiste à introduire un degré de liberté qui semble important pour la symétrie brisée et à le traiter par la GCM. Pour la symétrie nombre de particules, ce degré de liberté peut être le gap BCS: des fonctions de base sont générées par des calculs BCS en imposant une série de valeurs (constante) pour ce gap. Les fonctions BCS résultantes, projetées sur le bon nombre de particules, sont ensuite mélangées par la GCM, avec ce gap comme coordonnée génératrice et éventuellement une interaction plus réaliste pour l'interaction d'appariement. Ce type de méthode a été appliqué à l'étude des vibrations de pairing [13,14] avec cependant des fonctions non projetées sur le nombre de particules. La généralisation à des fonctions projetées ne poserait plus aujourd'hui de problèmes techniques. La fonction d'onde résultante est dans ce cas une superposition de fonctions BCS projetées sur le bon nombre de particules.

Une approche différente consiste à effectuer une variation complète de la fonction d'onde avant de la projeter. On détermine dans ce cas une fonction d'onde de type BCS unique qui donnera la meilleure énergie après projection parmi l'ensemble des fonctions d'onde BCS que l'on peut construire dans la base choisie. La fonction projetée a donc une structure de fonction BCS. D'un point de vue variationnel, elle est moins bonne que la solution BCS lorsqu'on se limite à cette approximation. C'est l'énergie projetée avec cette fonction qui est meilleure que l'énergie projetée obtenue à l'aide la solution BCS. Cette méthode est appelée une méthode de variation après projection (VAP).

C. L'approximation de Kamlah

L'implémentation d'une méthode VAP est relativement compliquée et n'a été faite qu'avec des interactions nucléon-nucléon schématique, du type quadrupole-quadrupole+seniorité [15]. Des approximations ont été dérivées, dont le but est de conserver des équations proches de celles des méthodes de champ moyen, tout en évitant une disparition brusque des corrélations d'appariement.

Le point de départ de ces approximations est une approximation des éléments de

matrice intervenant dans un calcul VAP: ce sont des éléments de matrice entre la fonction de départ et la fonction obtenue apres avoir fait tourner d'un angle ϕ la fonction de départ. Notons que dans le cas d'une fonction BCS, sa rotation d'un angle de jauge ϕ s'obtient en remplaçant dans l'équation 2.1 tous les v_k par $\exp i\phi v_k$. Ces éléments de matrice sont de la forme:

$$\mathcal{H}(\phi) = \langle \Psi | \hat{H} \exp i\phi \hat{N} | \Psi \rangle \quad , \quad \mathcal{I}(\phi) = \langle \Psi | \exp i\phi \hat{N} | \Psi \rangle \quad (3.7)$$

On approche d'abord $\mathcal{I}(\phi)$ par:

$$\mathcal{I}(\phi) \approx \exp(i\langle \hat{N} \rangle \phi - \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle \phi^2) \quad (3.8)$$

où $\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle$ est la dispersion de l'opérateur nombre de particules:

$$\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{N}^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle^2 \quad (3.9)$$

Cette approximation est similaire à l'approximation du recouvrement gaussien utilisée pour dériver un hamiltonien de Bohr à partir de la GCM.

Kamlah [16] a introduit un opérateur \hat{I} défini par:

$$\hat{I} = -\langle \hat{N} \rangle + i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.10)$$

et propose de développer $\mathcal{H}(\phi)$ à l'aide de cet opérateur:

$$\mathcal{H}(\phi) = \sum_{l=0}^L h_l \hat{I}^l \mathcal{I}(\phi) \quad (3.11)$$

Ce développement est limité à L termes. Les coefficients h_l sont déterminés en appliquant l'opérateur \hat{I} de 1 à L fois à $\mathcal{H}(\phi)$ donné par 3.11 et 3.7 et en égalant les valeurs pour $\phi=0$. On obtient ainsi un système d'équations dont les h_l sont solutions. Pour L=1, on obtient la contrainte habituelle sur le nombre de particules Pour L=2, on obtient une expression quadratique pour l'énergie totale.

D. La prescription de Lipkin-Nogami

La méthode proposée par Lipkin et Nogami [17-19] est très proche de la méthode de Kamlah, mais présente l'avantage de conduire à des équations semblables aux équations HFB habituelles et de pouvoir grâce à cela s'implémenter très facilement dans les codes de résolution des équations HFB.

La prescription de Lipkin-Nogami revient à modifier l'énergie \mathcal{E} en ajoutant la correction de Kamlah au second ordre.

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - \lambda_2 \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle \quad , \quad (3.12)$$

où $\langle \hat{O} \rangle$ représente la valeur moyenne $\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle$. Le coefficient λ_2 est donné par:

$$\lambda_2 = \frac{\langle \hat{H}(\Delta \hat{N}^2 - \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle) \rangle - \langle \hat{H} \Delta \hat{N} \rangle \langle \Delta \hat{N}^3 \rangle / \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle}{\langle \Delta \hat{N}^4 \rangle - \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle^2 - \langle \Delta \hat{N}^3 \rangle^2 / \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle} \quad . \quad (3.13)$$

pour un état HFB, on peut calculer explicitement les moments de l'opérateur $\Delta \hat{N} = \hat{N} - \langle \Delta \hat{N} \rangle$ qui apparaît dans la définition de λ_2 [20]:

$$\begin{cases} \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle = 2 \operatorname{tr} [\chi] \\ \langle \Delta \hat{N}^3 \rangle = 4 \operatorname{tr} [\gamma \chi] \\ \langle \Delta \hat{N}^4 \rangle = 3 \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle^2 + 8 \operatorname{tr} [\chi(1 - 6\chi)] \end{cases} ; \quad \begin{cases} \chi = \rho(1 - \rho) \\ \gamma = 1 - 2\rho \end{cases} \quad , \quad (3.14)$$

et

$$\begin{cases} \langle \hat{H} \Delta \hat{N} \rangle = 2 \operatorname{tr} [h\chi] - \Re \operatorname{tr} [\Delta \kappa^* \gamma] \\ \langle \hat{H}(\Delta \hat{N}^2 - \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle) \rangle = 4 \operatorname{tr} [(h\gamma + v_{HF}\{\chi\})\chi] - \Re \operatorname{tr} [\Delta \kappa^*(1 - 8\chi)] \\ \quad - \operatorname{tr} [v_P\{\gamma\kappa\}(\gamma\kappa)^*] \end{cases} \quad , \quad (3.15)$$

où le symbole $\operatorname{tr} [a]$ représente la trace de la matrice a et \Re correspond à la partie réelle. Les champs moyens $v_{HF}\{\chi\}$ et $v_P\{\gamma\kappa\}$ sont les potentiels de champ moyen et d'appariement respectivement, calculés avec les densités χ and $\gamma\kappa$:

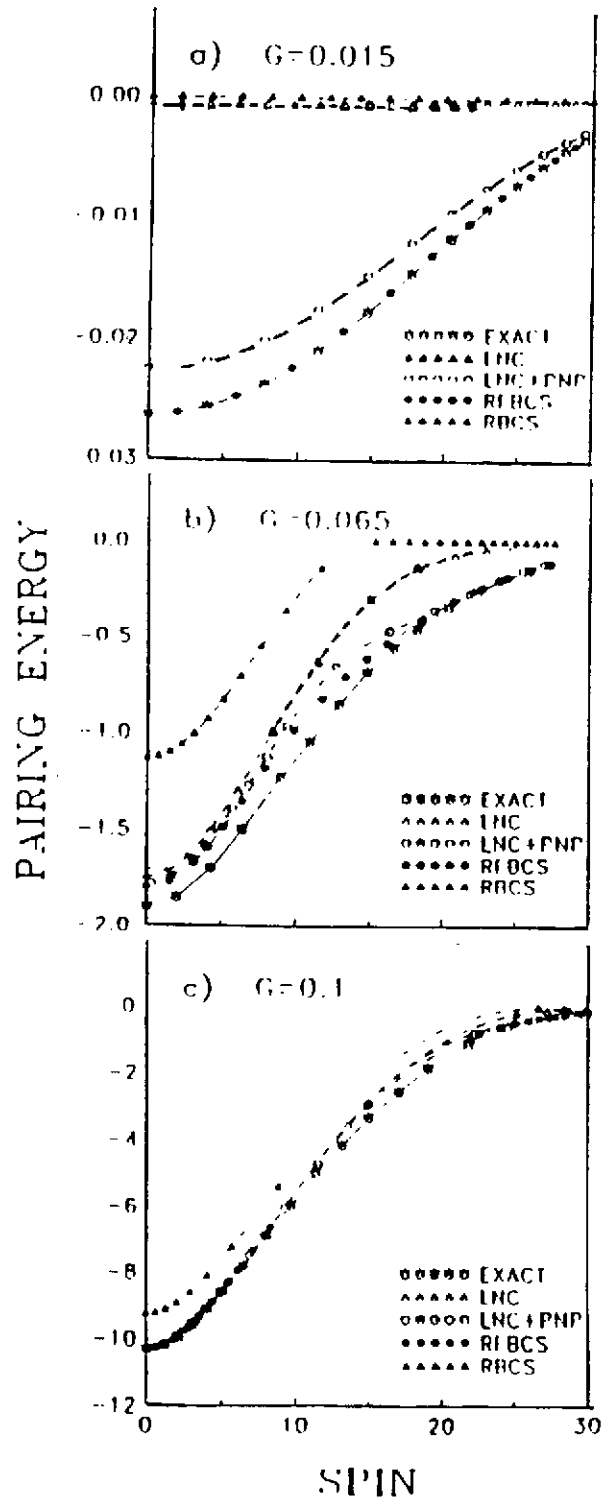
$$v_{HF}\{\chi\}_{ij} = \sum_{kl} V_{ikjl} \chi_{lk} \quad ; \quad v_P\{\gamma\kappa\}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{kl} V_{ijkl} (\gamma\kappa)_{kl} \quad . \quad (3.16)$$

Les équations auxquelles on arrive par cette prescription de Lipkin-Nogami sont semblables à celles de la méthode de Kamlah. Une simplification supplémentaire est introduite: la variation de $\lambda_2 \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle$ est limitée. On ne varie pas en effet λ_2 , ce qui apporte des simplifications importantes à la méthode mais brise le principe variationnel. Cependant, la valeur de λ_2 est calculée de façon self-consistante au moyen de l'équation (3.13). En se basant sur l'équation (3.14), ceci conduit [19] à la modification de l'hamiltonien HF, $h \rightarrow h - 2\lambda_2\gamma$, tandis que le potentiel d'appariement Δ est inchangé. Cependant, comme suggéré dans la référence [21], on peut utiliser une forme équivalente de $\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle = 2\text{tr}[\kappa^+\kappa]$, qui conduit à $\Delta \rightarrow \Delta - 4\lambda_2\kappa$ et h inchangé. Ce choix est en général plus stable numériquement [21]. En fait, toutes les combinaisons intermédiaires entre les deux prescriptions sont possibles. Ces choix différents conduisent à des énergies de quasi-particules différentes, ce qui peut sembler à première vue paradoxal. Le fait que ces énergies dépendent de ces choix se comprend aisément en prenant la forme BCS des énergies de qp: $\sqrt{(\epsilon_i - \lambda_\tau)^2 + \Delta_i^2}$. Cette expression n'est pas invariante si on fait passer un terme de ϵ_i à Δ_i . Ce résultat est une conséquence directe de ce que l'on a introduit des corrélations au-delà de la méthode du champ moyen et que n'ayant plus une approximation à quasi-particules indépendantes, la notion même de qp perd son sens. En pratique cependant, cette notion reste valable approximativement et l'analyse des propriétés des qp permet de comprendre qualitativement le comportement du noyau.

La méthode de Lipkin-Nogami fournit donc des équations très proches de celles de la méthode HFB. Au hamiltonien du système est ajouté en plus de la contrainte habituelle sur le nombre de particules un terme qui ressemble à une contrainte sur la dispersion sur le nombre de particules. Le paramètre λ_2 n'est cependant pas un multiplicateur de Lagrange mais est donné par l'équation 3.13. La résolution des équations modifiées fournit une fonction d'onde de type BCS, qui est une approximation de la fonction BCS que l'on obtiendrait par un calcul VAP. L'énergie que l'on obtiendrait dans un tel calcul est alors approchée par l'équation 3.12.

Figure 6

Energie d'appariement calculée avec une interaction de séniorité dans un modèle schématique. Différentes approximations sont comparées au calcul exact dans des conditions (de haut en bas) de pairing faible, moyen et fort (d'après la ref [24]).



Les équations de Lipkin-Nogami ont été testées à l'aide de modèles schématiques pour lesquels on peut dériver des solutions exactes (voir par exemple [22-24]). Elles fournissent une bonne approximation d'un calcul VAP dans des situations où les corrélations d'appariement s'annulent à l'approximation BCS ou HFB. La figure 6 est tirée de la référence [24]. Le modèle utilisé simule un noyau en rotation. En diminuant l'intensité de la force d'appariement, ce modèle permet de passer d'un régime d'appariement fort à un régime d'appariement faible. Sur cette figure, plusieurs approximations différentes sont comparées au calcul exact:

- la méthode BCS proprement dite
- la prescription de Lipkin-Nogami
- un calcul complet de variation après projection sur le bon nombre de particules
- le résultat obtenu en projetant sur le bon nombre de particules la fonction d'onde BCS obtenue par la méthode de Lipkin-Nogami.

Trois cas d'appariement sont repris; l'énergie d'appariement est dessinée en fonction du spin introduit dans ce modèle schématique. Dans le cas de corrélations d'appariement fortes, les résultats obtenus par toutes les méthodes sont proches du résultat exact. Pour des appariements intermédiaires, les corrélations d'appariement disparaissent à l'approximation BCS, alors qu'elles sont encore importantes dans les autres approximations. L'approximation LN évite ce collapse de l'appariement mais sousstime l'énergie à haut spin. Dans le cas d'un appariement très faible, ces corrélations ne s'enclenchent jamais à l'approximation BCS; elles sont très faibles mais non nulles à l'approximation LN. Dans tous les cas, la projection sur le bon nombre de particules de la fonction BCS-LN conduit à un résultat proche du calcul VAP et de la solution exacte. Ceci est vrai même dans le cas de corrélations faibles, pour lesquelles la méthode LN prédit une énergie d'appariement beaucoup trop faible. On peut tirer comme conclusion de ce calcul test que

- la prescription de LN permet d'éviter une disparition non physique des corrélations d'appariement:
- la fonction d'onde BCS calculée à l'approximation LN est une bonne approximation de la fonction d'onde VAP. La prescription de LN pour déterminer l'énergie projetée sans faire explicitement la projection est elle de nettement moins bonne qualité dans le cas des corrélations faibles;
- les régimes pour lesquels la prescription LN n'est pas bonne correspondent à des énergies d'appariement très faibles (cf les unités sur l'axe des ordonnées) pour lesquels les autres termes de l'énergie sont prédominants.

De ce travail, on peut conclure que la prescription de Lipkin-Nogami permet de corriger partiellement les défauts de l'approximation HFB. Elle fournit une fonction d'onde de type BCS qui est une bonne approximation de la meilleure fonction d'un calcul VAP. Cependant, la prescription de LN approchant l'énergie projetée n'est pas d'aussi bonne qualité dans le cas d'un appariement faible. Il semble que de meilleures prescriptions pourraient être construites. Des approximations basées sur des développements autres que celui de Kamlah ont été proposées récemment par Flocard et Onishi [20]. Il serait intéressant de les tester dans des cas réalistes.

Sur les figures 4 et 5, sont portées les énergies d'appariement et moment d'inertie dynamique déterminés à l'aide la prescription de LN. On voit que le collapse brutal de l'appariement observé à l'approximation HFB disparaît, conduisant à un nettement meilleur accord avec les données expérimentales.

REFERENCES

- [1] P. Ring et P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer, Berlin, 1980)
- [2] B. Mottelson et J.G. Valatin, *Phys. Rev. Lett* **5** (1960) 511
- [3] J.F. Berger, cours Maubuisson 1991.
- [4] J. Dechargé et D. Gogny, *Phys. Rev. C* **21** (1980) 1568
- [5] C. Bloch et A. Messiah *Nucl. Phys.* **39** (1984) 95
- [6] J. Dobaczewski, H. Flocard and J. Treiner, *Nucl. Phys.* **A422** (1984) 103
- [7] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, T. R. Werner, J. F. Berger, C. R. Chinn and J. Decharge, *Phys. Rev C* **53** (1996) 2809
- [8] P. Bonche, H. Flocard, P.-H. Heenen, S.J. Krieger and M.S. Weiss, *Nucl. Phys. A* **443** (1985) 39
- [9] J. Terasaki, H. Flocard, P.-H. Heenen, and P. Bonche *Nucl. Phys. A* **600** (1996) 371
- [10] H. Schmidt, *Varenna Lectures* **53** (1971) 144
- [11] D.R. Bés, R.A. Broglia, J. Dudek, W. Nazarewicz and Z. Szymański *Ann. Phys.* **182** (1988) 237
- [12] B. Gall, P. Bonche, J. Dobaczewski, H. Flocard and P.-H. Heenen, *Z. Phys.* **A348** (1994) 183
- [13] R. A. Sorensen *Phys. Lett.* **38B** (1972) 376
- [14] J. Meyer, P. Bonche, J. Dobaczewski, H. Flocard and P.-H. Heenen, *Nucl. Phys.* **A533** (1991) 307
- [15] L. Egido and P. Ring, *Nucl. Phys.* **A388** (1982) 19
- [16] A. Kamlah, *Z. Phys.* **216** (1968) 52

- [17] H.J. Lipkin, *Ann. Phys. (N.Y.)* **9** (1960) 272
- [18] Y. Nogami, *Phys. Rev.* **134** (1964) B313
- [19] H.C. Pradhan, Y. Nogami and J. Law, *Nucl. Phys.* **201** (1973) 357
- [20] H. Flocard and N. Onishi, *Ann. Phys. (N.Y.)* **254** (1996) 225
- [21] W. Satuła, R. Wyss and P. Magierski, *Nucl. Phys.* **A578** (1994) 45
- [22] D.C. Zheng, D.W.L. Sprung, and H. Flocard, *Phys. Rev.* **C46** (1992) 1355
- [23] J. Dobaczewski and W. Nazarewicz, *Phys. Rev.* **C47** (1993) 2418
- [24] P. Magierski, S. Ówiok, J. Dobaczewski and W. Nazarewicz, *Phys. Rev.* **C48** (1993) 1686