

Introduction au modèle des bosons en interaction

D. Goutte

▶ **To cite this version:**

D. Goutte. Introduction au modèle des bosons en interaction. École thématique. Ecole Joliot Curie "Symétries et physique nucléaire", Bombannes, (France), du 15-19 septembre 1986 : 5ème session, 1986. cel-00644035

HAL Id: cel-00644035
https://cel.hal.science/cel-00644035

Submitted on 23 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INTRODUCTION AU MODELE DES BOSONS EN INTERACTION

D. GOUTTE

Service de Physique Nucléaire à Haute Energie, CEN Saclay

AVERTISSEMENT

Ce cours est divisé en deux parties d'une heure environ chacune. La première consistera en une présentation très simple du modèle des bosons en interaction. Il s'agira de la vision d'un expérimentateur et nous nous contenterons de montrer les idées qui sont à la base du modèle pour nous intéresser plus aux résultats qu'aux justifications microscopiques de cette approche.

La seconde partie sera consacrée à une application particulière du modèle : la reproduction des extensions radiales des fonctions nucléaires. Nous montrerons tout d'abord comment la diffusion inélastique d'électrons permet de mesurer des observables liées à ces fonctions radiales, les densités de charge de transition, puis nous verrons sur un certain nombre d'exemples, comment le modèle permet de les reproduire.

Il n'apparait aucune référence dans le texte mais la bibliographie succinte donnée en fin de cours doit permettre au lecteur d'approfondir les points restés obscurs.

PREMIERE PARTIE : PRESENTATION DU MODELE

INTRODUCTION

Comme tous les modèles, celui qui fait l'objet de ce cours a un champ d'application limité. Nous allons, en effet, nous intéresser ici uniquement aux noyaux déformés, lourds ou de masse moyenne (A~100) et pour ces noyaux exclusivement aux propriétés collectives de basse énergie (quelques MeV d'excitation). De plus, dans un premier temps au moins, nous nous limiterons aux noyaux pair-pair.

A ces faibles énergies d'excitation les propriétés des noyaux de cette région sont très largement dominées par des effets collectifs. Pour les reproduire on peut traiter individuellement chaque nucléon (modèle à particules indépendantes), mais on se heurte immédiatement à un problème considérable. Prenons, en effet, les 12 protons et les 10 neutrons de valence du ^{154}Sm ; I.Talmi prétend qu'il y a avec ces nucléons 4165419351679 façons différentes de bâtir un 0^+. Cette approche nécessiterait donc une quantité de calculs énorme et de plus le résultat si on parvenait à en obtenir un, serait difficilement interprétable. Il semble donc indispensable pour reproduire ces excitations collectives de basse énergie de considérer, non pas les degrés de liberté individuels de chaque nucléon mais bien des degrés de liberté collectifs propres au noyau.

L'idée n'est pas nouvelle et le modèle collectif de Rainwater, Bohr et Mottelson faisant appel à la notion de "goutte liquide" en est une parfaite illustration. Dans ce modèle on peut toujours garder présent à l'esprit l'image géométrique d'une surface nucléaire se déformant.

Tout au contraire, dans sa version originale, le modèle des bosons en interaction ne fait référence à aucune image physique. Deux degrés de liberté (bosons s et d) totalement abstraits permettent de construire un groupe (U(6)) dans lequel on fait apparaitre des symétries dynamiques qui s'avèrent représenter chacune - presque par hasard - une situation physique bien déterminée. Cette version originale du modèle (IBM-1) a été introduite il y a maintenant un dizaine d'années par F. Iachello et A. Arima.

Le succès de cette approche fut tel que, rapidement, on a voulu voir dans ces deux bosons autre chose que des entités mathématiques. Pour leur donner une réalité concrète, on les a assimilé à des paires de fermions. Il s'est alors avéré indispensable de faire la distinction explicite entre bosons-protons et -neutrons. I. Talmi a largement contribué à cette évolution du modèle connue sous le nom d'IBM-2.

IBM offre ainsi, non seulement un outil pour reproduire nombre d'observables dans les noyaux déformés mais il constitue également un lien entre les degrés de liberté individuels et collectifs, ce qui n'est, en principe, pas le cas des approches géométriques.

I IBM-1

Il y a bien sûr quantité de façons d'introduire ce modèle. J'ai choisi ici une voie très simple -sinon simpliste- qui n'a aucun rapport avec le processus historique et dont la rigueur n'est pas le souci premier. J'espère, avec cette approche d'expérimentateur, pouvoir en arriver rapidement aux applications qui font le succès du modèle sans m'appesantir sur le formalisme exact.

Nous allons tout d'abord montrer qu'il semble raisonnable de restreindre sa base de travail à un espace très limité.

1° BASE RESTREINTE AUX DEGRES DE LIBERTE MONOPOLAIRES ET QUADRUPOLAIRES

On a observé, depuis longtemps déjà, que, dans la très grande majorité des cas, il apparaissait dans le spectre d'excitation des noyaux deux états très collectifs : un 2^+ et un 3^-. On a alors pensé que les degrés de liberté associés à ces états (quadrupolaires et octupolaires) jouaient un rôle prépondérant dans les excitations collectives de basse énergie et on a essayé de construire des modèles ayant pour composantes ces deux seuls degrés de liberté.

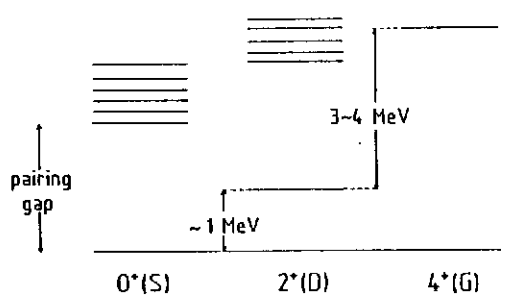


Figure 1 : Etats cohérents de deux nucléons appariés.

Si on laisse de côté pour l'instant les états de parité négative on devrait pouvoir se borner aux degrés de liberté quadrupolaires. Plus précisément, si on considère deux nucléons dans un puits de potentiel et que l'on calcule l'énergie des premiers niveaux, on voit apparaitre (voir figure 1) un état 0^+ de basse énergie et toute une quantité d'autres 0^+ à plus haute énergie. On voit également un état 2^+ à environ 1 MeV d'excitation et, comme dans le cas du 0^+, un grand nombre de ces états à plus haute énergie d'excitation. De même pour les 4^+. Pour chacun de ces spins il y a donc un état qui apparait à une énergie

nettement plus basse. Il s'agit d'un état de superposition cohérente (cf. paires de Cooper). Si on ne s'intéresse qu'aux propriétés apparaissant à des énergies d'excitation inférieures à 3 MeV, il ne semble pas abusif de considérer que seuls ces états cohérents (0^+, 2^+ et éventuellement 4^+) contribuent aux excitations collectives. On peut donc tenter de restreindre la représentation du noyau, pour ces propriétés bien précises, aux paires de fermions couplées à 0, 2 ou 4 et noter ces éléments S, D et G. De là à considérer ces paires de nucléons comme des bosons (notés cette fois s d et g) il n'y a qu'un pas que nous franchirons allègrement. Notons bien que ces bosons, qui forment la base du modèle ne sont pas simplement des couples de nucléons mais bien des superpositions cohérentes de paires de fermions.

Donc, de l'espace complet des nucléons constituant le noyau nous ne conserverons que les degrés de liberté de deux (ou trois) bosons. Il est clair que cette projection (schématisée figure 2) n'a rien de trivial du point de vue théorique. De nombreux théoriciens travaillent ce point mais les bases microscopiques de IBM ne semblent pas encore clairement établies et sont même le sujet de vives polémiques.

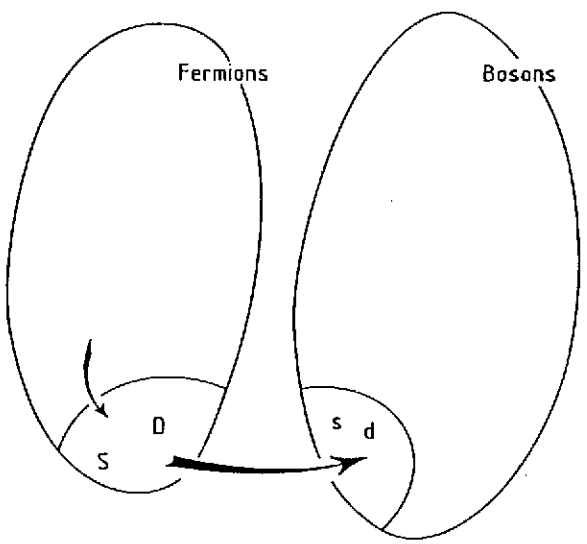


Figure 2 : Limitation de l'espace des fermions

2° Le groupe U(6)

Si nous admettons comme acquis qu'il est possible de représenter les excitations collectives de basse énergie auxquelles nous nous

intéressons par les seuls degrés de liberté d'un boson s et d'un boson d (laissons de coté le boson g pour l'instant), voyons la structure que possède l'espace ainsi formé. Il s'agit d'un espace à six dimensions dont un vecteur peut s'écrire :

$$\alpha_1 |s\ \rangle$$
$$\alpha_2 |d_{-2}\rangle$$
$$\alpha_3 |d_{-1}\rangle$$
$$\alpha_4 |d_0\rangle$$
$$\alpha_5 |d_1\rangle$$
$$\alpha_6 |d_2\rangle$$

Si nous imposons que le nombre total N de bosons (qu'ils soient de type s ou d) soit conservé, on a la relation : $\sum |\alpha_i|^2 = N$. On définit ainsi une sphère de dimension six.

Dans le formalisme de la seconde quantification, on peut considérer les opérateurs de création et d'anihilation correspondants à ces deux bosons:

$$s^\dagger,\ s,\ d^\dagger \text{et } d$$

et construire ainsi les opérateurs (en se limitant aux opérateurs à un corps) qui vont nous permettre de nous "déplacer" sur cette sphère.

$s^\dagger s$	1 opérateur	
$d_\mu^\dagger s$	5 opérateurs	μ=-2,-1,0,1,2
$s d_\mu^\dagger$	5 opérateurs	
$d_\mu^\dagger d_\mu$	25 opérateurs	
	36 opérateurs	

On voit qu'il est possible de former 36 opérateurs avec ces deux bosons. Il s'avère que ces opérateurs constituent les générateurs du groupe U(6) *(un groupe Unitaire d'ordre N a N^2 générateurs)*.

3° L'HAMILTONIEN DE U(6)

Avec ces opérateurs de création et d'anihilation nous pouvons maintenant écrire l'Hamiltonien le plus général du système:

$$H = \epsilon_s \hat{n}_s + \epsilon_d \hat{n}_d + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2}(2L+1)^{\frac{1}{2}} C_L \left[(d^\dagger d^\dagger)^{(L)} x (\tilde{d}\,\tilde{d})^{(L)}\right]^{(0)}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{V}_2 \left[(d^\dagger d^\dagger)^{(2)} x (\tilde{d}s)^{(2)} + (d^\dagger s^\dagger)^{(2)} x (\tilde{d}\,\tilde{d})^{(2)}\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \hat{V}_0 \left[(d^\dagger d^\dagger)^{(0)} x (ss)^{(0)} + (s^\dagger s^\dagger)^{(0)} x (\tilde{d}\,\tilde{d})^{(0)}\right]$$

$$+ U_2 \left[(d^\dagger s^\dagger)^{(2)} x (\tilde{d}s)^{(2)}\right]^{(0)} + \frac{1}{2} U_0 \left[(s^\dagger s^\dagger)^{(0)} x (ss)^{(0)}\right]^{(0)}$$

On note $\tilde{d}_\mu = (-1)^\mu d_{-\mu}$ *et* $(d^\dagger d^\dagger)^{(L)}_M = [d^\dagger x d^\dagger]^{(L)}_M = \sum_{\mu\mu'} (2\mu 2\mu' | LM) d^\dagger_\mu d^\dagger_{\mu'}$.

Cet Hamiltonien contient 9 paramètres; 2 pour les opérateurs à un corps et 7 pour les opérateurs à deux corps. Mais le nombre total de bosons étant conservé on a : $\hat{n}_s + \hat{n}_d = \hat{N}$. On peut alors réécrire l'Hamiltonien sous la forme :

$$H = \epsilon N + \frac{1}{2} U_0 N(N-1) + \epsilon \hat{n}_d + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2}\sqrt{2(L+1)}\, C'_L \left[(d^\dagger d^\dagger)^{(2)} x (\tilde{d}\,\tilde{d})^{(2)}\right]^{(0)}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{V}_2 \left[(d^\dagger d^\dagger)^{(2)} x (\tilde{d}s)^{(2)} + (d^\dagger s^\dagger)^{(2)} x (\tilde{d}\,\tilde{d})^{(2)}\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \hat{V}_0 \left[(d^\dagger d^\dagger)^{(0)} x (ss)^{(0)} + (s^\dagger s^\dagger)^{(0)} x (\tilde{d}\,\tilde{d})^{(0)}\right]$$

Dans cette expression, les deux premiers termes ne contribuent qu'à l'énergie de liaison du noyau. Il reste finalement 6 paramètres libres pour décrire la dynamique du système. On peut bien sûr écrire un code qui nous permete d'ajuster ces paramètres de manière à reproduire le spectre d'excitation d'un noyau donné mais nous allons voir que la structure du groupe U(6) autorise une approche analytique très simple qui fait toute la beauté du modèle.

Pour cela il nous faut introduire la notion de symétrie dynamique.

4° LA NOTION DE SYMETRIE DYNAMIQUE ET LES "CHAINES" DE IBM

Cette notion n'est pas facile à appréhender. On peut en donner la définition suivante:

"si les lois de transformation d'un système ont la structure d'un groupe de symétrie et si l'Hamiltonien fait spécifiquement usage de ce groupe on dit que cet Hamiltonien possède une symétrie dynamique".
Il faut bien comprendre que ce n'est pas l'objet qui possède la symétrie en question mais bien son mouvement. Le fait que formes et mouvements soient en général intimement liés ajoute à la confusion. Prenons l'exemple du groupe O(3) des rotations dans l'espace. Si un système

possède la symétrie de rotation il s'agit d'une sphère alors que s'il possède la symétrie dynamique correspondant à O(3) cela signifie simplement qu'il tourne, quelque soit sa forme.

Le fait que l'Hamiltonien d'un système possède une symétrie dynamique est particulièrement intéressant. On peut en effet montrer que, dans ce cas, il s'exprime en fonction des opérateurs de Casimir du groupe de symétrie en question.

Note sur les opérateurs de Casimir:

Il s'agit d'opérateurs formés des générateurs de ce groupe et commutant avec chacun d'entre eux.

Considérons par exemple le groupe O(3) des rotations dans l'espace à trois dimensions et l'opérateur $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

Il commute avec les générateurs $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ et $\hat{L}_z$. *C'est l'opérateur de Casimir associé à O(3). Donc si l'Hamiltonien H à la symétrie dynamique correspondant à O(3) on peut l'écrire sous la forme:*

$$H = \alpha \hat{L}^2$$

Dans certains cas il est possible de briser la symétrie U(6) du système et de faire apparaitre ainsi d'autres symétries dynamiques correspondant maintenant à des sous-groupes de U(6). L'Hamiltonien s'exprimera alors en fonction des opérateurs de Casimir de ces sous-groupes.

Pour reprendre notre exemple de O(3), si maintenant on suppose que la symétrie O(3) est brisée, dans une dimension et on va pouvoir écrire l'Hamiltonien H en fonction des opérateurs de Casimir de la chaine $O(3) \supset O(2)$. *Le seul opérateur de Casimir de O(2) étant* $\hat{L}_z$ *on a*

$$H = \alpha \hat{L}^2 + \beta \hat{L}_z$$

Nous allons donc tout d'abord rechercher tous les sous-groupes possibles de U(6).

5° LES SOUS-GROUPES DE U(6)

On peut extraire des 36 générateurs de U(6) des sous-ensembles générant des sous-groupes de U(6). Considérons, par exemple les 25 opérateurs suivants obtenus en éliminant le boson s:

$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(0)}_{\mu}$	μ=0	1 opérateur
$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}_{\mu}$	μ=-1,0,1	3 opérateurs
$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(2)}_{\mu}$	μ=-2,-1,0,1,2	3 opérateurs
$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(3)}_{\mu}$	μ=-3 ... 3	7 opérateurs
$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(4)}_{\mu}$	μ=-4 ... 4	9 opérateurs
		25 opérateurs

Ils forment une base de U(5).

Il est possible d'extraire encore de ces 25 générateurs des ensembles formant des sous-groupes de U(5).

$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}_{\mu}$	μ=-1,0,1	3 opérateurs
$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(3)}_{\mu}$	μ=-3 .. 3	7 opérateurs
		10 opérateurs

Ces 10 opérateurs génèrent cette fois O(5)*(un groupe Orthogonal d'ordre N a* $\frac{N(N-1)}{2}$ *générateurs)*.

$(s^{\dagger}s)^{(0)} + \sqrt{5}\ (d^{\dagger}\tilde{d})^{(0)}$	1 opérateur
$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}$	3 opérateurs
$(d^{\dagger}s + s^{\dagger}\tilde{d})^{(2)}_{\mu} - \frac{1}{2}\sqrt{7}(d^{\dagger}\tilde{d})^{(2)}_{\mu}$	5 opérateurs
	9 opérateurs

Ces 9 opérateurs sont les générateurs de U(3)

$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}_{\mu}$	μ=-1,0,1	3 opérateurs
$(d^{\dagger}\tilde{d})^{(3)}_{\mu}$	μ=-3 ... 3	7 opérateurs
$(d^{\dagger}s + s^{\dagger}\tilde{d})^{(2)}_{\mu}$		5 opérateurs
		15 opérateurs

Ces 15 opérateurs génèrent O(6)

Enfin avec l'opérateur $(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}_{\mu}$ on génère O(3).

On sait qu'à chaque symétrie du système correspond un nombre quantique, or nous savons que L^2 est un bon nombre quantique et que O(3) est la symétrie correspondante. Il faut donc que toute chaine de sous-groupes représentant le système contienne O(3). On peut ainsi former trois -et trois seulement- chaines de sous-groupes qui mènent, par

brisures successives, de U(6) à O(3):

$$\begin{array}{lll} & & U(5)\supset O(5)\supset O(3) \\ & \nearrow & \\ U(6) & \rightarrow & U(3)\supset O(3) \\ & \searrow & \\ & & O(6)\supset O(5)\supset O(3) \end{array}$$

A chacune de ces chaines, on peut donc associer un Hamiltonien particulier formé des opérateurs de Casimir de chacun des sous-groupes qui la compose. Chacun d'entre eux est adapté à un type particulier de noyau que l'on désigne par le premier sous-groupe de la chaine. On a ainsi des noyaux "U(5)", "U(3)" ou "O(6)". On peut également écrire l'Hamiltonien le plus général de U(6) en fonction des opérateurs de Casimir associés aux différents sous-groupes des chaines ci-dessus:

$$H = \epsilon\ C^{(1)}_{U(5)} + \alpha\ C^{(2)}_{U(5)} + \beta\ C^{(2)}_{O(5)} + \gamma\ C^{(2)}_{O(3)} + \delta\ C^{(2)}_{SU(3)} + \eta\ C^{(2)}_{O(6)}$$

les indices supérieurs indiquent qu'il s'agit d'un opérateur à un ou deux corps. On peut remarquer, qu'ici encore, l'Hamiltonien du système dépend de 6 paramètres.
L'expression de chacun de ces opérateurs de Casimir est la suivante :

$$C^{(1)}_{U(5)} = \sqrt{5}(d^{\dagger}\tilde{d})^{(0)} \equiv \hat{n}_d$$

$$C^{(2)}_{U(5)} = \sqrt{5}\left[\sqrt{5}(d^{\dagger}\tilde{d})^{(0)}.(d^{\dagger}\tilde{d})^{(0)} + 4\ (d^{\dagger}\tilde{d})^{(0)}\right] \equiv \hat{n}_d(\hat{n}_d+4)$$

$$C^{(2)}_{O(5)} = 4\left[(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}.(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)} + (d^{\dagger}\tilde{d})^{(3)}.(d^{\dagger}\tilde{d})^{(3)}\right]$$

$$C^{(2)}_{O(3)} = 2\left[10(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}.(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}\right]$$

$$C^{(2)}_{U(3)} = \frac{2}{3}\left[2\left[(d^{\dagger}s+s^{\dagger}\tilde{d})^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}(d^{\dagger}\tilde{d})^{(2)}\right].\left[(d^{\dagger}s+s^{\dagger}\tilde{d})^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}(d^{\dagger}\tilde{d})^{(2)}\right] + \frac{15}{2}\left[(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}.(d^{\dagger}\tilde{d})^{(1)}\right]\right]$$

$$C^{(2)}_{O(6)} = Z\ \hat{N}(\hat{N}+4) - 2(d^{\dagger}d^{\dagger} - s^{\dagger}s^{\dagger}).(\tilde{d}\ \tilde{d} - ss)$$

6° CAS PARTICULIER DES VIBRATEURS

Si on considère une chaine particulière, U(5) par exemple, l'Hamiltonien peut se réduire à :

$$H=\epsilon\ C^{(1)}_{U(5)} + \alpha\ C^{(2)}_{U(5)} + \beta\ C^{(2)}_{O(5)} + \gamma\ C^{(2)}_{O(3)}$$

On peut alors définir chaque état par un jeu de nombres quantiques définis par les opérateurs de Casimir correspondants

N	le nombre total de bosons	(provenant de U(6))
n_d	le nombre de bosons d	(..... U(5))
V	le nombre de bosons d non couplés à 0 (d-boson seniority)	(..... O(5))
L	le moment angulaire	(..... O(3))

Il s'avère que les états définis par ces quatre nombres quantiques sont dégénérés. Il faut ajouter un nombre quantique supplémentaire pour lever cette dégénérescence et former ainsi une base. On choisit n_Δ qui représente le nombre de triplets de bosons d couplés à 0. Un état peut alors s'écrire $|N,n_d,V,n_\Delta,L\rangle$

On peut également déterminer les règles de sélection régissant ces nombres quantiques. Elles sont résumées dans le tableau suivant :

n_d	V	n_Δ	L
0	0	0	0
1	1	0	2
2	2	0	4,2
	0	0	0
3	3	0	6,4,3
	3	1	0
	1	0	2
4	4	0	8,6,5,4
	4	1	2
	2	0	4,2
	0	0	0

On peut alors écrire les valeurs propres du système :

$$E(n_d, V, L) = \epsilon n_d + \alpha n_d(n_d+4) + 2\beta V(V+3) + 2\gamma L(L+1)$$

Si nous choisissons par exemple $\alpha=\beta=\gamma=0$ le spectre en énergie aura l'allure bien connue suivante:

---------- 0^+ 2^+ 3^+ 4^+ 6^+	$\|s^{n-3}, d^3; L=0,2,3,4,6\rangle$
---------- 0^+ 2^+ 4^+	$\|s^{n-2}, d^2; L=0,2,4\rangle$
---------- 2^+	$\|s^{n-1}, d^1; L=2\rangle$
---------- 0^+	$\|s^n; L=0\rangle$

c'est le spectre d'un vibrateur harmonique. La figure 3 montre le spectre complet d'un noyau de type U(5).

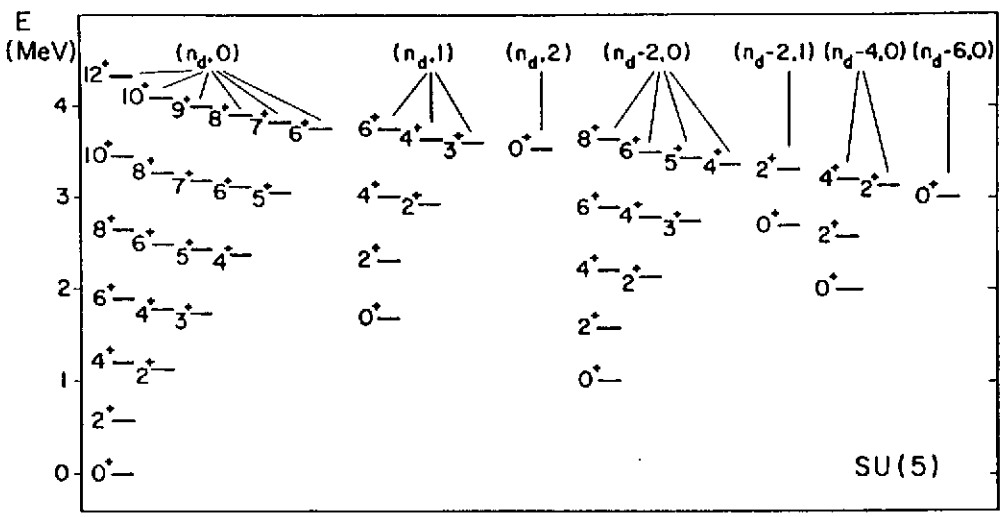


Figure 3 : Spectre U(5) typique calculé pour N=6 avec, entre parenthèses, les valeurs de V et n_Δ.

On peut écrire de la même manière l'Hamiltonien et les valeurs propres dans le cas des deux autres chaines. Les figures 4 et 5 représentent les spectres correspondants.

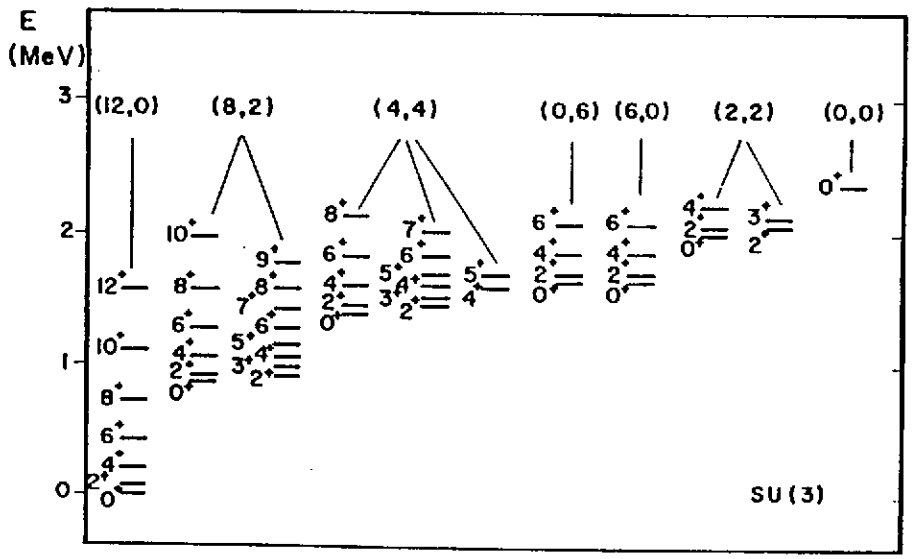


Figure 4 : Spectre typique U(3)

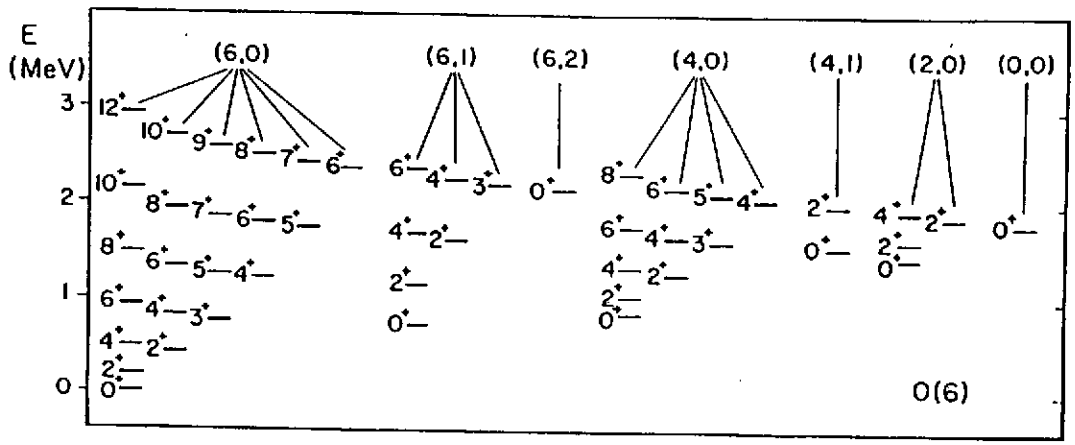


Figure 5 : Spectre typique O(6)

Toute la beauté de cette approche du modèle des bosons en interaction réside dans le fait que ces trois types de noyaux se rencontrent réellement dans la nature: les U(5) sont des vibrateurs comme le ^{110}Cd par exemple, les U(3) sont des rotateurs comme le ^{156}Gd et les O(6) sont des noyaux γ-instables dont le ^{196}Pt est un représentant typique. La figure 6 montre les spectres expérimentaux et calculés pour ces trois noyaux.

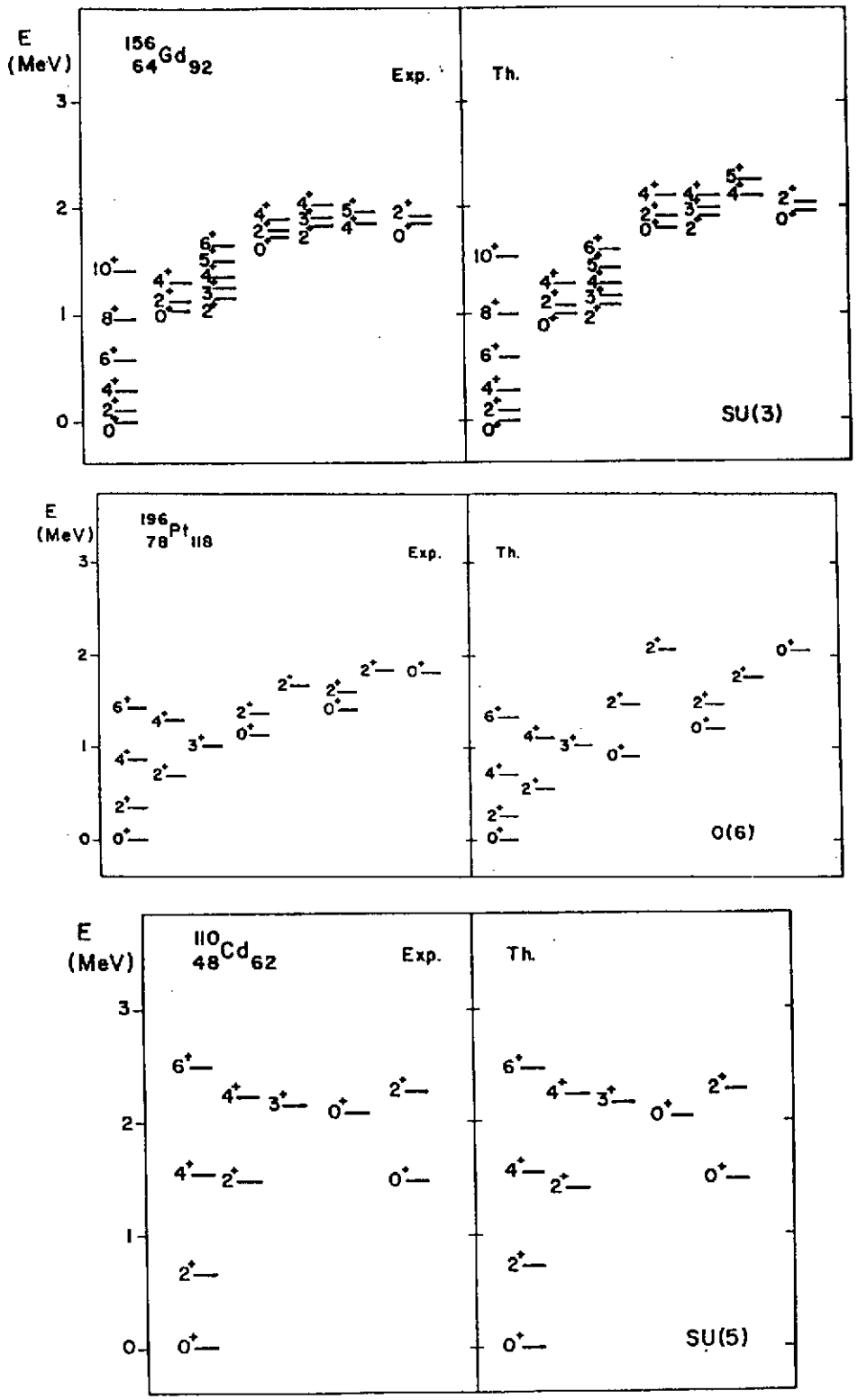


Figure 6 : Comparaison des trois cas limites de IBM avec l'expérience.

7° LES TRANSITIONS ELECTROMAGNETIQUES

En plus des énergies d'excitations, obtenues directement en diagonalisant l'Hamiltonien, on peut calculer d'autres observables; il suffit pour cela de définir les opérateurs correspondants. Voici, par exemple les opérateurs de transition electromagnétiques définis par des opérateurs à un corps:

$$T^{(E0)} = \gamma_0 (s^\dagger s)^{(0)}_0 + \beta_0 (d^\dagger \tilde{d})^{(0)}_0$$

$$T^{(M1)} = \beta_1 (d^\dagger \tilde{d})^{(1)}_\mu$$

$$T^{(E2)} = \alpha_2 (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\mu + \beta_2 (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\mu$$

$$T^{(M3)} = \beta_3 (d^\dagger \tilde{d})^{(3)}_\mu$$

$$T^{(E4)} = \beta_4 (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\mu$$

Avec les fonctions d'onde $|J\rangle$, valeurs propres de l'Hamiltonien, on peut maintenant évaluer les probabilités de transition réduites. Les B(E2), par exemple, s'expriment par :

$$B(E2; J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \langle J_f | T^{(E2)} | J_i \rangle \right|$$

On peut noter que l'opérateur $T^{(M1)}$ est proportionel à L ($L=\sqrt{10}\ (d^\dagger \tilde{d})^{(1)}$)

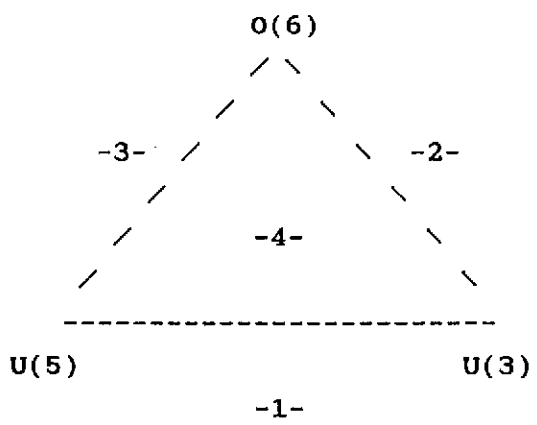
qui est diagonal. Il n'y a donc pas de transition M1 possible dans ce modèle !

On peut également définir un moment quadrupolaire par :

$$Q_L = \langle L, M=L | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} T^{(E2)} | L, M=L \rangle$$

8° LES NOYAUX DE TRANSITION

Le très grand avantage de l'approche IBM c'est que, non seulement elle permet de décrire de manière unifiée les trois types de noyaux que l'on rencontre dans la nature mais de plus, elle rend compte des situations intermédiaires. Si on classe l'ensemble des noyaux déformés suivant le schéma suivant :



on voit que l'on peut distinguer quatre régions de transition différentes.

La région -1-

Il s'agit là de la transition entre les vibrateurs et les rotateurs. Les isotopes du samarium sont typiques de cette transition. L'Hamiltonien de IBM peut ici s'exprimer en fonction des opérateurs de Casimir des chaines U(5) et U(3) :

$$H_{-1-} = \epsilon\, C^{(1)}_{U(5)} + \alpha\, C^{(2)}_{U(5)} + \beta\, C^{(2)}_{O(5)} + \gamma\, C^{(2)}_{O(3)} + \delta\, C^{(2)}_{SU(3)}$$

Les figures 7 et 8 montrent les énergies d'excitation et les rapports de branchements calculés avec un tel Hamiltonien et comparés avec l'expérience dans le cas des isotopes du samarium.

La région -2-

C'est la région de transition entre les rotateurs et les γ-instables; les isotopes de l'osmium sont typiques de cette région de transition. L'Hamiltonien peut alors se réduire à :

$$H_{-2-} = \beta\, C^{(2)}_{O(5)} + \gamma\, C^{(2)}_{O(3)} + \delta\, C^{(2)}_{SU(3)} + \eta\, C^{(2)}_{O(6)}$$

Les figures 9 et 10 montrent un certain nombre d'observables calculées avec cet Hamiltonien.

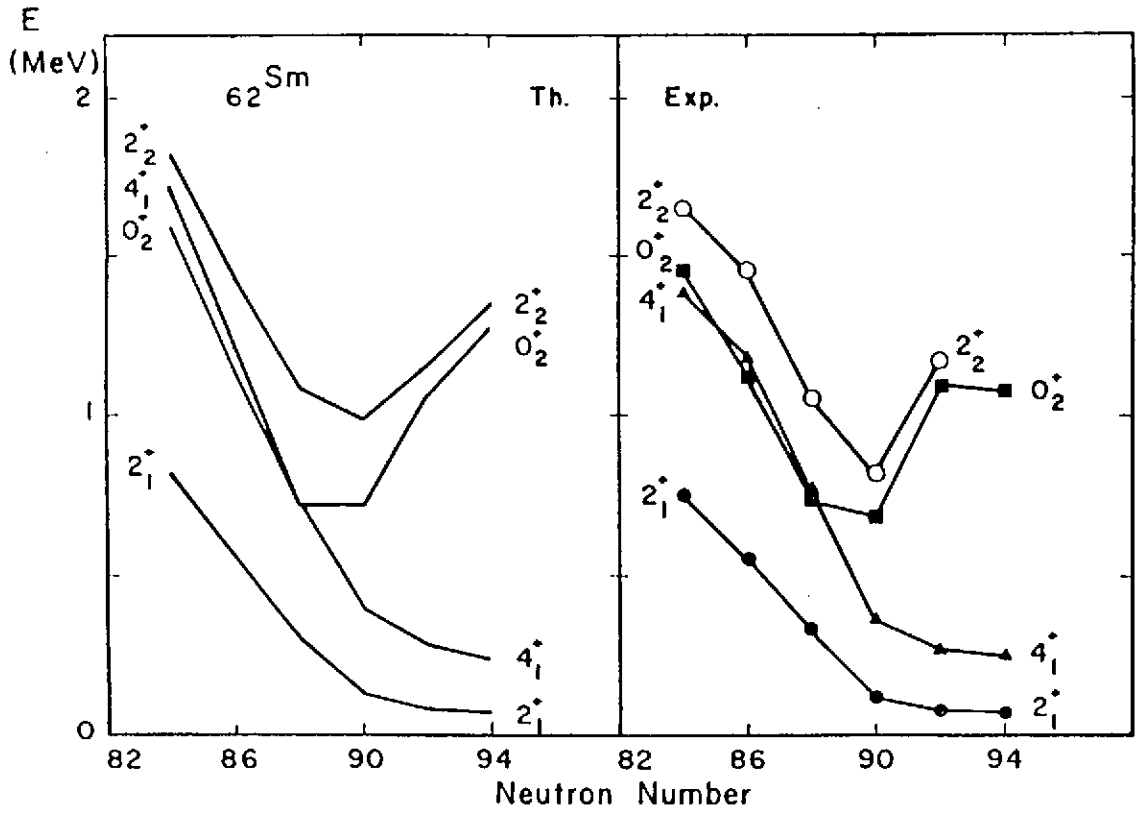


Figure 7 : Spectres d'excitation expérimentaux et calculés dans le cas de la transition U(3)---> U(5).

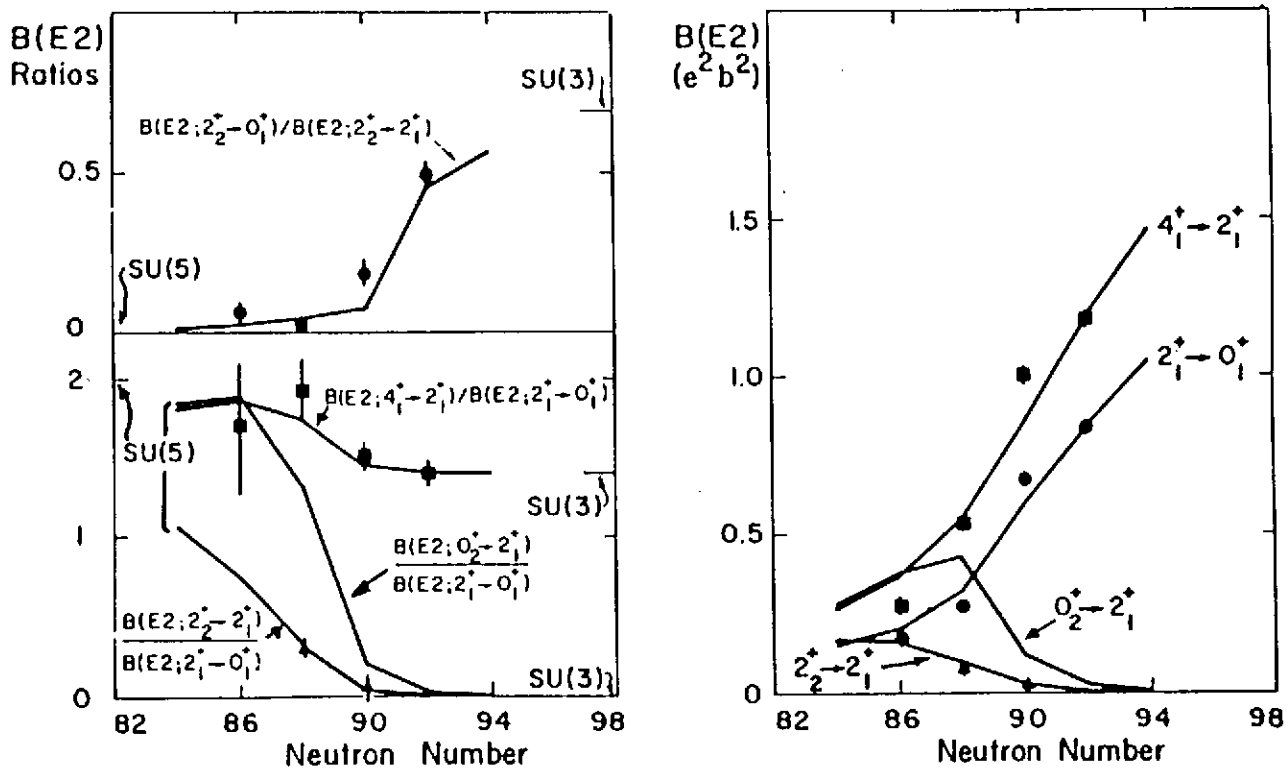


Figure 8 : Rapports de branchements expérimentaux et calculés dans le cas de la transition U(3)--->U(5).

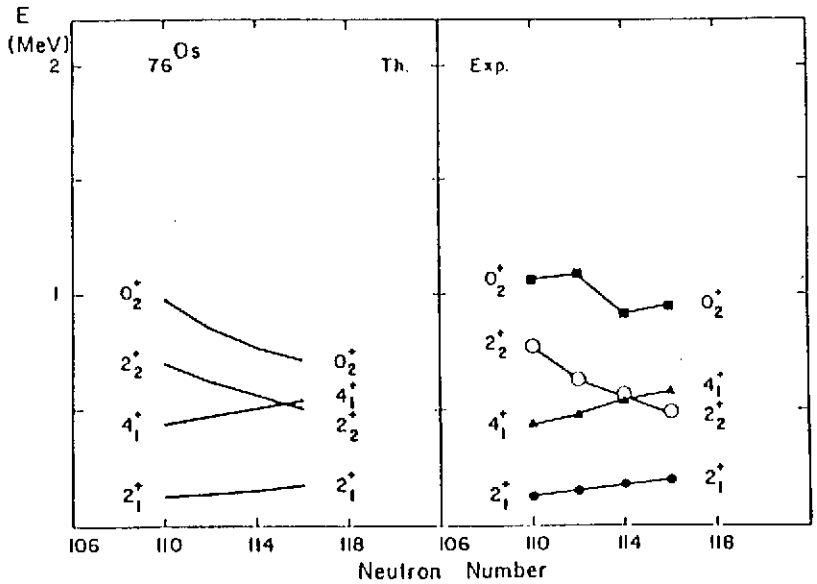


Figure 9 : Schémas de niveaux pour des noyaux de transition du type U(3)-->O(6)

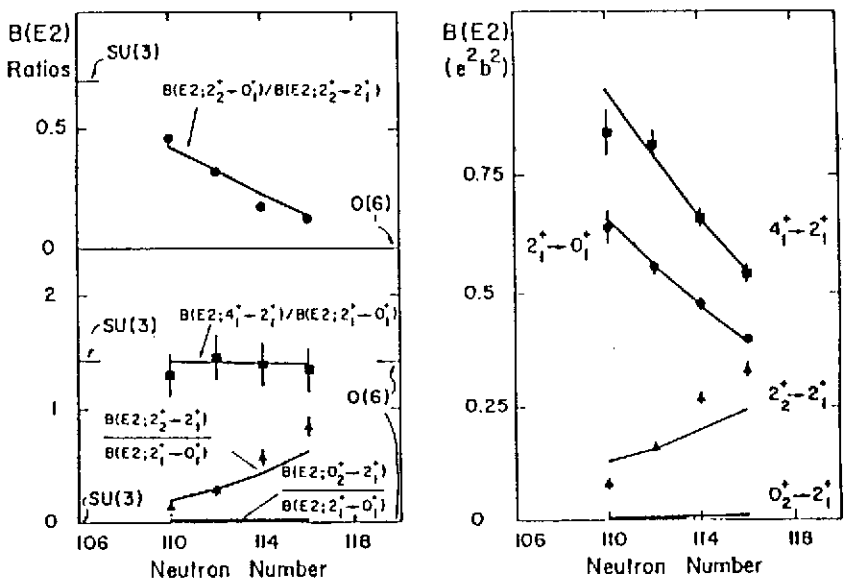


Figure 10 : Rapports de branchements pour des noyaux de la transition U(3)-->O(6)

La région -3-

C'est la région de transition entre les noyaux de type γ-instable et vibrateur; les isotopes du xénon sont de ce type. L'Hamiltonien se réduit, dans ce cas, à :

$$H_{-3-} = \epsilon\, C^{(1)}_{U(5)} + \alpha\, C^{(2)}_{U(5)} + \beta\, C^{(2)}_{O(5)} + \gamma\, C^{(2)}_{O(3)} + \eta\, C^{(2)}_{O(6)}$$

La région -4-

Dans cette région les trois symétries sont mélangées et c'est l'Hamiltonien de U(6) complet qu'il faut utiliser :

$$H_{-4-} = \epsilon\, C^{(1)}_{U(5)} + \alpha\, C^{(2)}_{U(5)} + \beta\, C^{(2)}_{O(5)} + \gamma\, C^{(2)}_{O(3)} + \delta\, C^{(2)}_{SU(3)} + \eta\, C^{(2)}_{O(6)}$$

9° LES LIMITATIONS DE IBM-1

Cette première version du modèle ne fait pas la distinction entre protons et neutrons; on ne peut donc reproduire que la partie symétrique, dans l'échange proton-neutron, des fonctions d'ondes nucléaires; or il existe de nombreux états excités où la composante non-symétrique est très importante. Nous avons déjà vu que les transitions M1 sont interdites dans cette approche et nous savons, non seulement qu'elles existent, mais qu'elles peuvent même avoir un caractère collectif. La figure 12 représente deux spectres d'électrons diffusés par le ^{156}Gd et le ^{158}Gd et observés à Darmstadt par A.Richter et al. On voit très nettement un pic à une énergie d'excitation d'environ 3 MeV. La mesure du facteur de forme correspondant à très bas transfert permet d'identifier sans ambigüité ces états : il s'agit de 1^+. Or la mesure montre que ces états sont de caractère nettement collectif ce qui exclut une transition du type spin-flip. Ces états semblent être dûs à un mode de scission où protons et neutrons oscillent en opposition de phase comme cela est schématisé sur la figure 12. Le modèle IBM-1 ne contient pas les degrés de liberté nécessaires à la formation de tels modes et la distinction π-ν est indispensable.

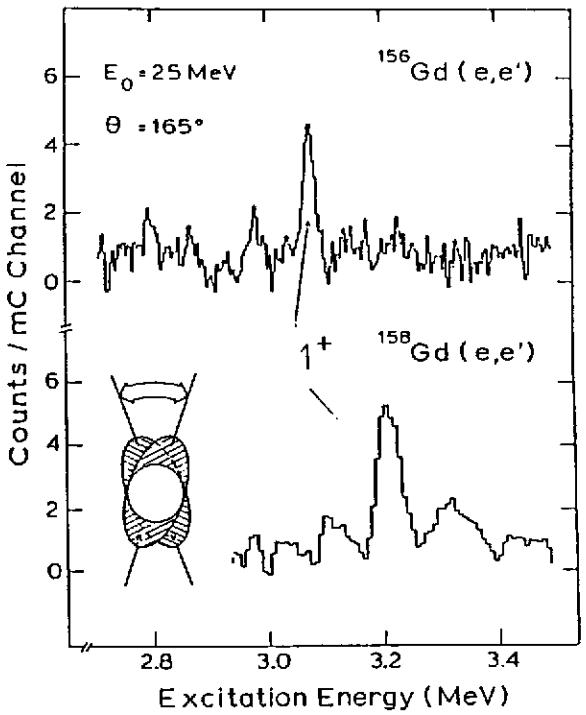


Figure 12 : Transitions M1 mises en évidence à Darmstadt par diffusion inélastique d'élect

II IBM-2

1° La distinction explicite entre bosons-proton et bosons-neutron, connection au modèle en couches.

Il est établi que l'interaction entre neutrons et protons joue un rôle essentiel dans le noyau. En fait c'est elle qui est responsable de sa déformation. Il semble donc indispensable de distinguer les protons des neutrons.

D'autre part il a été montré que IBM-1 permettait de décrire une grande quantité d'observables tout au long de la table; pour comprendre pourquoi cette approche phénoménologique rencontre autant de succès il faut la justifier par une approche microscopique. Pour cela la distinction explicite entre protons et neutrons doit également être faite. Nous allons donc maintenant considérer quatre bosons différents:

$$s_\pi \quad s_\nu \quad d_\pi \quad d_\nu$$

Cette nouvelle forme du modèle est connue sous le nom de IBM-2.

2° Apparition de nouvelles symétries.

La structure de groupe de IBM-2 est $U(6)_\pi \times U(6)_\nu$. Il est donc possible de constituer maintenant bien plus de trois chaines comme dans IBM-1. Il n'est plus possible de distinguer des "limites" simples comme dans le cas précédent. Toutefois un certain nombre de cas particuliers ont été étudiés en détail comme, par exemple, la symètrie $SU^*(3)$ qui correspond à $SU(3)_\pi \times SU(3)_\nu$ mais avec une déformation prolate pour un type de nucléon et oblate pour l'autre (un cigare dans un cendrier). Il s'agit donc là de noyaux triaxiaux.

3° L'Hamiltonien général.

L'Hamiltonien IBM-2 peut s'écrire:

$$H_{IBM2} = H_{\pi\pi} + H_{\nu\nu} + H_{\pi\nu}$$

si on ne considère que les termes qui contribuent au spectre d'excitation on a :

$$H_{\rho\rho} = \epsilon \tilde{n}_{d_\rho} + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2}\sqrt{2L+1}\; C_L^\rho \left[(d_\rho^\dagger d_\rho^\dagger)^{(L)} \times (\tilde{d}_\rho\; \tilde{d}_\rho)^{(L)} \right] \qquad \rho = \pi, \nu$$

$$H_{\pi\nu} = \sum_L \left[T_\pi^{(L)} + T_\nu^{(L)} \right]^{(0)}$$

où T_π et T_ν sont des opérateurs à un corps si $H_{\pi\nu}$ est une interaction à deux corps

$$T_\rho^{(0)} = \alpha_\rho^0 (s_\rho^\dagger s_\rho) + \beta_\rho^0 (d_\rho^\dagger \tilde{d}_\rho)^{(0)}$$

$$T_\rho^{(1)} = \beta_\rho^1 (d_\rho^\dagger \tilde{d}_\rho)^{(1)}$$

$$T_\rho^{(2)} = \alpha_\rho^2 (s_\rho^\dagger \tilde{d}_\rho + d_\rho^\dagger s_\rho)^{(2)} + \beta_\rho^2 (d_\rho^\dagger \tilde{d}_\rho)^{(2)}$$

$$T_\rho^{(3)} = \beta_\rho^3 (d_\rho^\dagger \tilde{d}_\rho)^{(3)}$$

$$T_\rho^{(4)} = \beta_\rho^4 (d_\rho^\dagger \tilde{d}_\rho)^{(4)}$$

La seule de ces interactions qui ne conserve pas le nombre de bosons d est l'opérateur quadrupolaire $\left[T_\pi^{(2)} + T_\nu^{(2)} \right]^{(0)}$ qui doit donc être dominant dans $H_{\pi\nu}$. Cela n'a rien de surprenant si on se souvient que l'Hamiltonien effectif dans l'espace de fermions est dominé par des propriétés du type "pairing plus quadrupole".

On peut réécrire cet Hamiltonien en faisant apparaitre les termes principaux:

$$H = \epsilon \hat{n}_d + \kappa \, Q_\pi . Q_\nu + M_{\pi\nu} + V_{\pi\pi} + V_{\nu\nu}$$

où Q_ρ est l'opérateur quadrupolaire:

$$Q_\rho = (s^\dagger d + d^\dagger s)_\rho^{(2)} + \chi \, (d^\dagger d)_\rho^{(2)} \qquad \rho = \pi, \nu$$

$M_{\pi\nu}$ le terme de Majorana n'affectant que les états non-symétriques dans l'échange boson-proton/boson-neutron:

$$\hat{M}_{\pi,\nu} = \xi_1 \left[(s_\nu^\dagger \tilde{d}_\pi^\dagger + s_\pi^\dagger d_\nu^\dagger)^{(2)} \times (s_\nu \tilde{d}_\pi - s_\pi \tilde{d}_\nu)^{(2)} \right]^{(0)} +$$

$$\sum_{K=1,3} \xi_K \left[(d_\pi^\dagger \, d_\nu^\dagger)^{(K)} \times (\tilde{d}_\pi \, \tilde{d}_\nu)^{(K)} \right]^{(0)}$$

$$\hat{V}_{\rho\rho} = \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2}\sqrt{2L+1}\, C_L^{\rho} \left((d_\rho^\dagger d_\rho^\dagger)^{(L)} (\tilde{d}_\rho \tilde{d}_\rho)^{(L)} \right)^{(0)}$$

$$+ \frac{1}{2} V_0^{\rho} \left(\left[(d_\rho^\dagger d_\rho^\dagger)^{(0)} (s^\rho s^\rho)^{(0)} \right]^{(0)} + \text{h.c.} \right)$$

$$+ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} V_2^{\rho} \left(\left[(d_\rho^\dagger d_\rho^\dagger)^{(2)} (\tilde{d}_\rho s_\rho)^{(2)} \right]^{(0)} + \text{h.c.} \right)$$

$$+ \kappa_{\rho\rho} Q_\rho^{(2)} Q_\rho^{(2)}$$

Ces deux derniers termes ($M_{\pi\nu}$ et $V_{\rho\rho}$) peuvent souvent être négligés, en particulier si on ne s'intéresse qu'aux niveaux symétriques. On peut alors se contenter d'utiliser l'Hamiltonien simplifié:

$$H = \epsilon\, \hat{n}_d + \kappa\, Q_\pi . Q_\nu$$

ce qui fait qu'il n'y a alors que quatre paramètres libres:

$$\epsilon \quad \kappa \quad \chi_\pi \text{ et } \chi_\nu$$

Dans la pratique, quand on veut reproduire le spectre d'excitation d'un noyau donné, il faut tout d'abord fixer le nombre de bosons du système : la moitié des nucléons (ou des trous suivant la fermeture de couche la plus proche) de valence. Il faut ensuite choisir certaines valeurs pour ces quatre paramètres, utiliser un code capable de diagonaliser l'Hamiltonien ainsi formé et ajuster ces paramètres jusqu'à obtenir un bon accord avec le spectre expérimental. Pour guider le choix des paramètres de départ il faut se souvenir que ϵ représente l'énergie d'un boson d. Dans la limite vibrationelle ϵ est donc directement donné par l'énergie d'excitation du premier 2^+. Ensuite on peut appliquer les "recettes" suivantes:

* les noyaux de type U(5) se rencontrent près des couches magiques (N_π ou N_ν petits) On a alors : $\langle \epsilon \hat{n}_d \rangle >> (Q_\pi . Q_\nu)$
* au contraire les noyaux seront de type U(3) en milieu de couche (N_π et N_ν petits) et alors : $\langle \epsilon \hat{n}_d \rangle << (Q_\pi . Q_\nu)$ de plus χ_π et χ_ν seront grands et négatifs.
* enfin les O(6) apparaitrons quand $N_\pi \approx N_\nu$. On a alors $\langle \epsilon \hat{n}_d \rangle << (Q_\pi . Q_\nu)$ et $\chi_\pi = -\chi_\nu$.

Une fois ces paramètres ajustés au mieux on peut calculer d'autres observables en utilisant les fonctions d'ondes générées par l'Hamiltonien ainsi défini.

On peut, par exemple calculer les probabilités de transition

réduites $B(E_\lambda)$. Pour une transition E2, par exemple, on utilisera le même opérateur quadrupolaire que dans l'Hamiltonien :

$$T^{(E2)} = e_\pi \left[(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)}_\pi + \chi_\pi (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\pi \right] + e_\nu \left[(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)}_\nu + \chi_\nu (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\nu \right]$$

La probabilité de transition réduite s'écrira alors:

$$B(E2) = \left| \langle 2^+ | T^{(E2)} | 0^+ \rangle \right|^2$$

on définit également le moment quadrupolaire du premier état 2^+ qui est considéré comme une mesure de la déformation du noyau :

$$Q_2^+ = \langle 2^+ | T^{(E2)} | 2^+ \rangle$$

e_π et e_ν représentent des charges effectives pour les bosons-proton et -neutron respectivement. Il s'agit là de deux paramètres supplémentaires qui devront aussi être ajustés sur les données. En fait on choisit le rapport de charges effectives e_π/e_ν qui fixe la variation relative des B(E2) le long d'une chaine isotopique et on ajuste un facteur de normalisation global sur l'une des données expérimentales. Pour s'affranchir de ce paramètre de normalisation absolue on calcule souvent des rapports de branchement plutôt que des B(E2).
La valeur des paramètres χ_π et χ_ν sera choisie, à priori identique à celle utilisée dans l'Hamiltonien. Dans le cas d'une transition hexadécapolaire, il peut être indispensable d'introduire un boson g (ce point est encore contreversé) mais si on se contente de bosons s et d on peut utiliser:

$$T^{(E4)} = e_\pi (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\pi + e_\nu (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\nu$$

avec un boson g il faudrait ajouter des termes du type:

$$(s^\dagger g + g^\dagger s)^{(4)} \quad (g^\dagger d + d^\dagger g)^{(4)} \quad (g^\dagger g)^{(4)}$$

En fait, pour les schémas de niveau comme pour ces probabilités de transition réduites il faut toujours considérer une série de noyaux de manière à minimiser le nombre de degrés de liberté. En effet, dans ce cas un certain nombre de paramètres doivent rester constants tout au long de la chaine (on a, par exemple $\chi_\pi = C^{te}$ pour une série d'isotopes) les autres devant varier "lentement" d'un noyau à l'autre.

4° Applications

On peut trouver, dans les publications récentes, quantité d'ajustements IBM reproduisant les propriétés de divers types de noyaux déformés. Nous allons nous contenter de prendre ici un exemple : la région des osmium-platine sur laquelle nous reviendrons dans la seconde partie de ce cours. L'Hamiltonien utilisé par R. Bijker pour reproduire les propriétés de cette région a la forme décrite plus haut avec les paramètres présentés dans le tableau suivant:

Nucleus	ε	κ	χ_ν	χ_π	$C_{0\nu}$	$C_{2\nu}$	$C_{4\nu}$	ξ_2	$\xi_1 = \xi_3$
^{196}Pt	0.58	−0.18	1.05	−0.80	0.60	0.02	0.00	0.04	−0.10
^{194}Pt	0.58	−0.18	0.95		0.55	0.04			
^{192}Pt	0.58	−0.18	0.80		0.45	0.00			
^{190}Pt	0.58	−0.18	0.45		0.00	−0.09			
^{188}Pt	0.58	−0.16	0.00		−0.25	−0.13			
^{186}Pt	0.62	−0.145	−0.50		−0.25	−0.16			
^{194}Os	0.45	−0.15	1.05	−1.30	0.60	0.02	0.00	0.04	−0.10
^{192}Os	0.45	−0.15	0.95		0.55	0.04			
^{190}Os	0.45	−0.15	0.80		0.45	0.00			
^{188}Os	0.45	−0.15	0.45		0.00	−0.09			
^{186}Os	0.45	−0.14	0.00		−0.25	−0.13			
^{184}Os	0.50	−0.135	−0.50		−0.25	−0.16			

L'accord obtenu avec les schémas de niveaux est présenté figure 14 et les divers rapports de branchements ainsi que les moments quadrupolaires dans les figures 15 et 16.

Les courbes A et B apparaissant dans la figure 16 correspondent à des options différentes pour les charges effectives e_π et e_ν. Pour la courbe A, $e_\pi = e_\nu = 0.17$ e.b alors que pour la courbe B les charges effectives sont supposées égales pour le ^{194}Pt mais varient comme $\kappa_\pi(\kappa_\nu)$ avec $N_\pi(N_\nu)$.

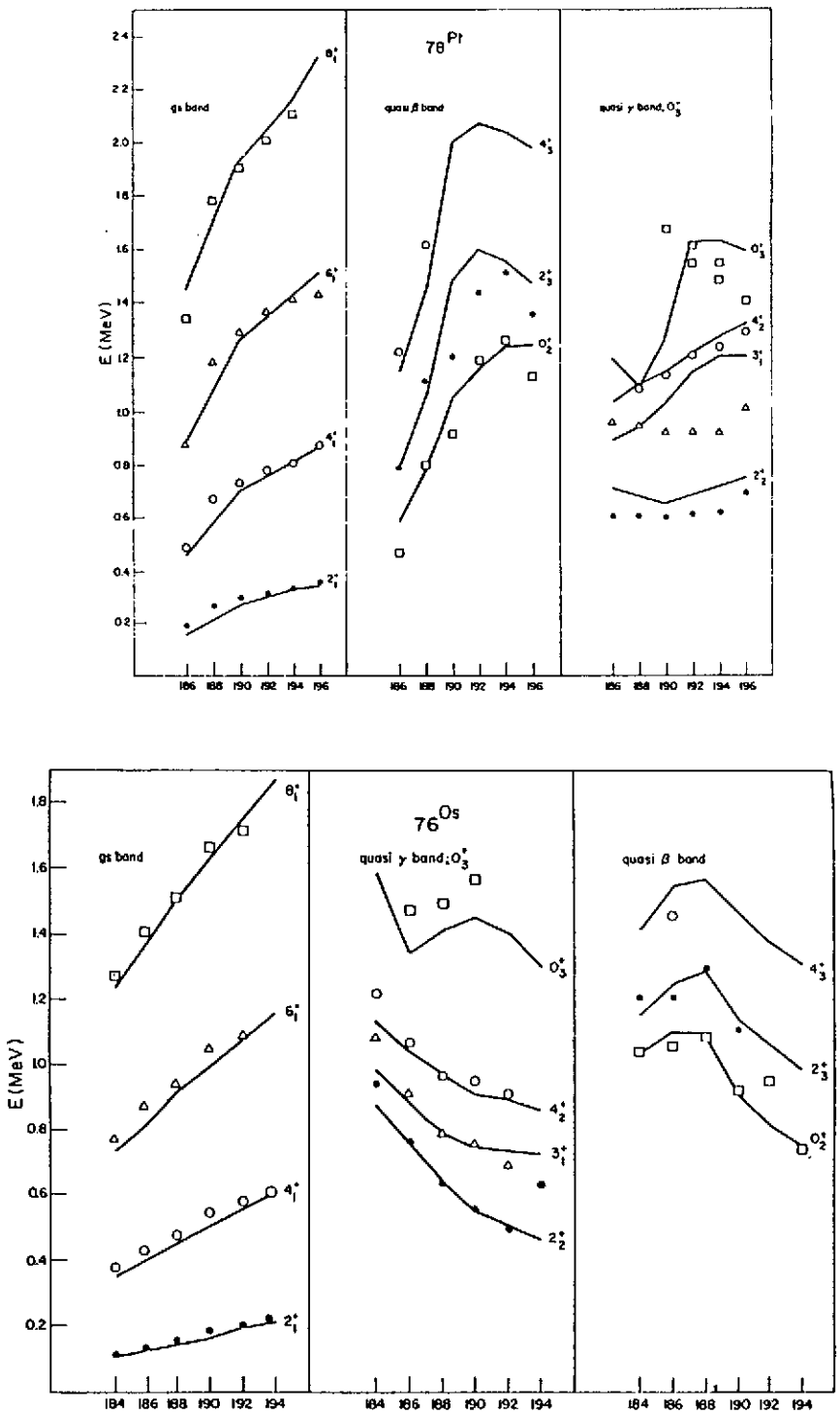


Figure 14 : Ajustement IBM-2 des niveaux d'énergie des isotopes de l'osmium et du platine.

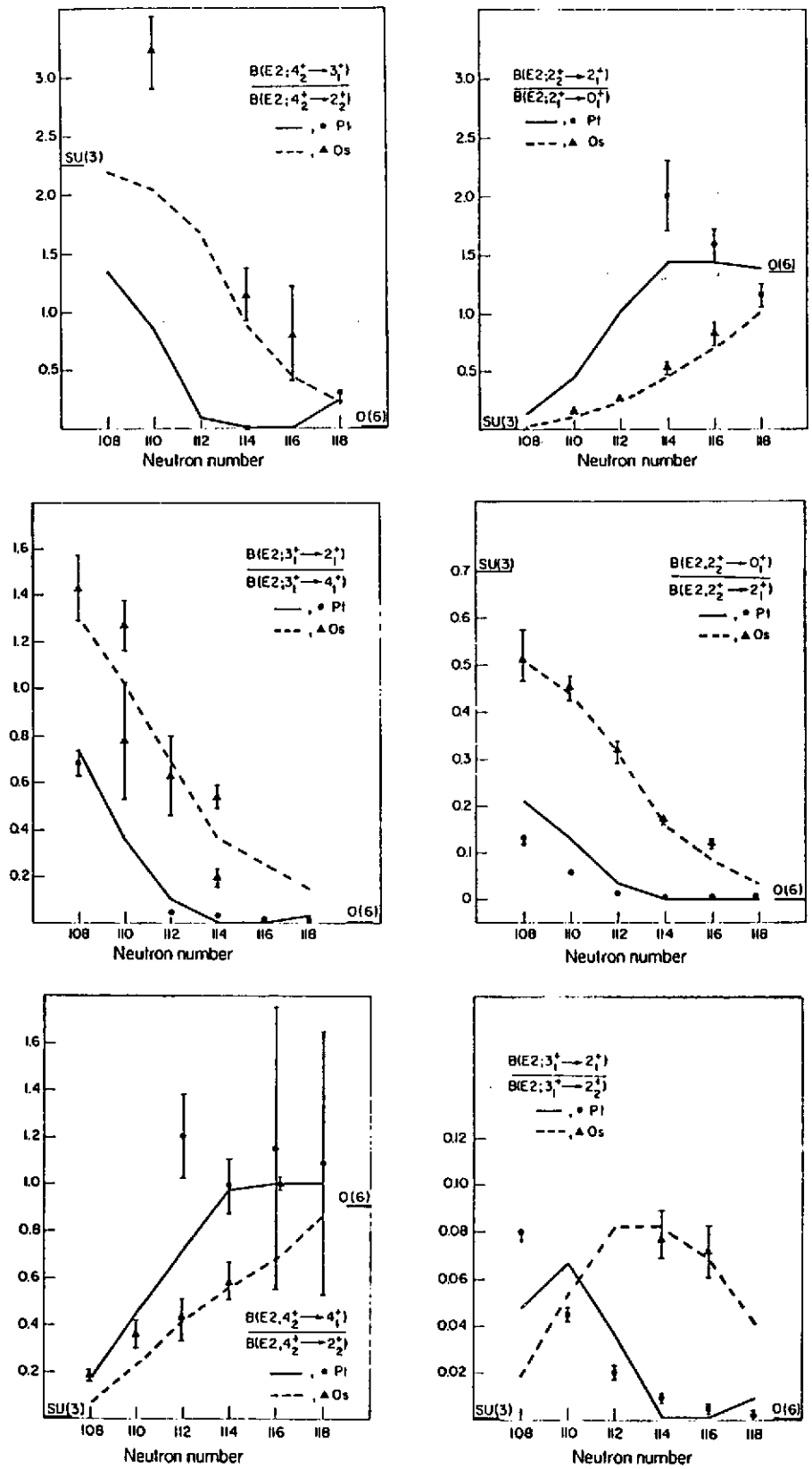


Figure 15 : Différents rapports de branchements calculés en IBM-2

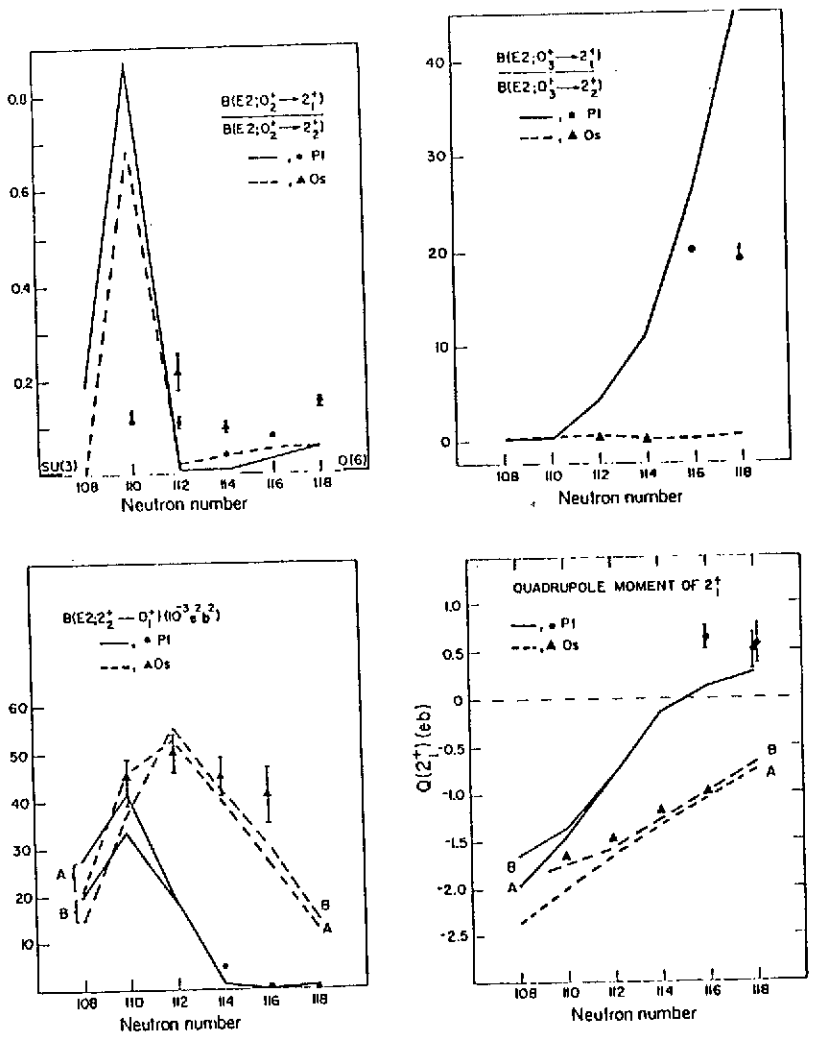


Figure 16 : Rapports de branchements, valeurs absolues de B(E2) et moments quadrupolaires calculés en IBM-2

Nous verrons dans le seconde partie de ce cours un autre exemple d'ajustement IBM-2 avec les isotopes du germanium.

III LES EXTENSIONS DU MODELE

Il s'avère que l'ensemble des états prédits par le modèle est observé expérimentalement. Par contre de nombreuses propriétés observées ne sont pas reproduites par IBM. Les états de parité négative, par exemple, ne peuvent être reproduits par les seuls bosons s et d alors qu'il apparait à basse énergie d'excitation, dans la plus part des

noyaux qui nous intéressent ici, des états 3^- très collectifs. Nous nous sommes également restreints aux noyaux pair-pair ; qu'en est-il des noyaux impairs ?

Il y a également le comportement radial des fonctions d'ondes nucléaires qui a été totalement ignoré. Ce point fera l'objet de la seconde partie de ce cours.

Nous allons voir que, pour un certain nombre de cas le modèle admet des extensions simples. Le but n'est pas ici de faire une étude exhaustive de toutes ces extensions ni même d'en décrire certaines dans le détail mais de montrer que IBM, ou tout du moins l'approche de la théorie des groupes, est un formalisme très souple.

1° Introduction de bosons supplémentaires.

Pour reproduire des niveaux impairs la première idée qui vient à l'esprit consiste à introduire un boson **f** *(un boson p ne correspondrait qu'à un déplacement du centre de masse)*. Mais l'ensemble formé par les bosons s, d et f n'offre plus la possibilité d'un traitement algébrique analogue à celui d'IBM-1 car le système ainsi formé ne présente pas de symétries dynamiques. On n'écrit alors un Hamiltonien général dont on ajuste les paramètres sur les données expérimentales. Très récemment J. Engel a mis en évidencele fait que l'introduction d'un boson p permettait d'avoir à nouveau des symétries dynamiques dans le système et donc d'écrire l'Hamiltonien très simplement en fonction d'opérateurs de Casimir. Ce quatrième boson n'avait, à l'origine, pas d'autre justification que celle de la structure mathématique de la base de travail mais déjà certains théoriciens, T. Otsuka par exemple, lui confèrent une réalité microscopique. Cette évolution n'est pas sans rappeler celle du boson s.

D'autre part, même en se limitant aux niveaux de parité positive on peut se demander si un boson **g** ne devient pas indispensable aussitôt qu'il s'agit de reproduire de hautes multipolarités ou des énergies d'excitation élevées. En fait, pour un certain nombre de noyaux il est indispensable d'introduire un tel boson, non pas en général pour reproduire les spectres d'excitation, mais pour reproduire les densités de charge de transition. Ce point sera également développé dans le seconde partie de ce cours.

2° Couplage de degrés de liberté fermioniques aux degrés de liberté bosoniques

Pour calculer des noyaux pair-impair on peut considérer le noyau pair-pair le plus proche (que l'on peut traiter dans le cadre de IBM) et

coupler ce "coeur" aux degrés de liberté d'un fermion. Ces derniers peuvent être représentés par un groupe U(2J+1) où J est l'orbite sur laquelle se trouve le fermion. On a alors une structure du type U(6)xU(2J+1).

3° Cluster α

Dans certains noyaux, les actinides légers en particulier (*Th, Ra ...*) on voit apparaitre dans le spectre des bandes d'excitation $K^{\pi}=0^{-}$ à très basse énergie (figure 17). Ces états (1^{-}, 3^{-}, ...) pourraient, bien sûr, être interprétés comme des excitations octupolaires mais certaines données expérimentales vont à l'encontre de cette hypothèse.

On a alors pensé que l'interaction proton-neutron pouvait être suffisament importante pour qu'il se forme des paires bosons-ν*bosons-π c'est-à-dire l'équivalent de cluster α. A ces cluster on va associer les degrés de liberté d'un boson s et d'un boson p, ce dernier représentant le mouvement relatif de la particule α et du coeur. A ces bosons s et p correspond la structure du groupe U(4). Ces noyaux sont alors décrits par U(6)xU(4). Une telle description permet de reproduire de manière très satisfaisante les spectres d'excitation de ces actinides légers (figure 18)

4° Coexistence de formes

Pour certains noyaux le modèle parvient à reproduire très correctement toute une partie du spectre d'excitation mais ignore totalement un certain nombre de niveaux. Ces "intruder states" sont, dans certains cas, attribués à des isomères de forme. Un second Hamiltonien, correspondant à une déformation différente, doit alors être introduit, nous examinerons en détail dans la seconde partie de ce cours le cas des isotopes du germanium qui illustrent parfaitement ce point.

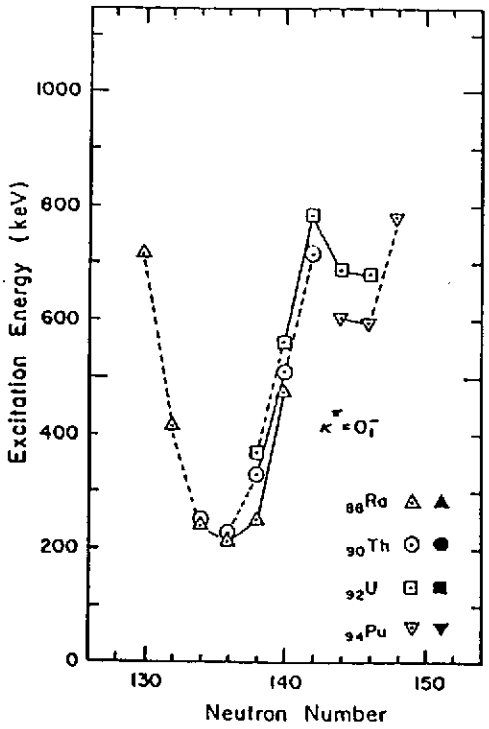


Figure 17 : Energie d'excitation de l'état 1^- dans les actinides.

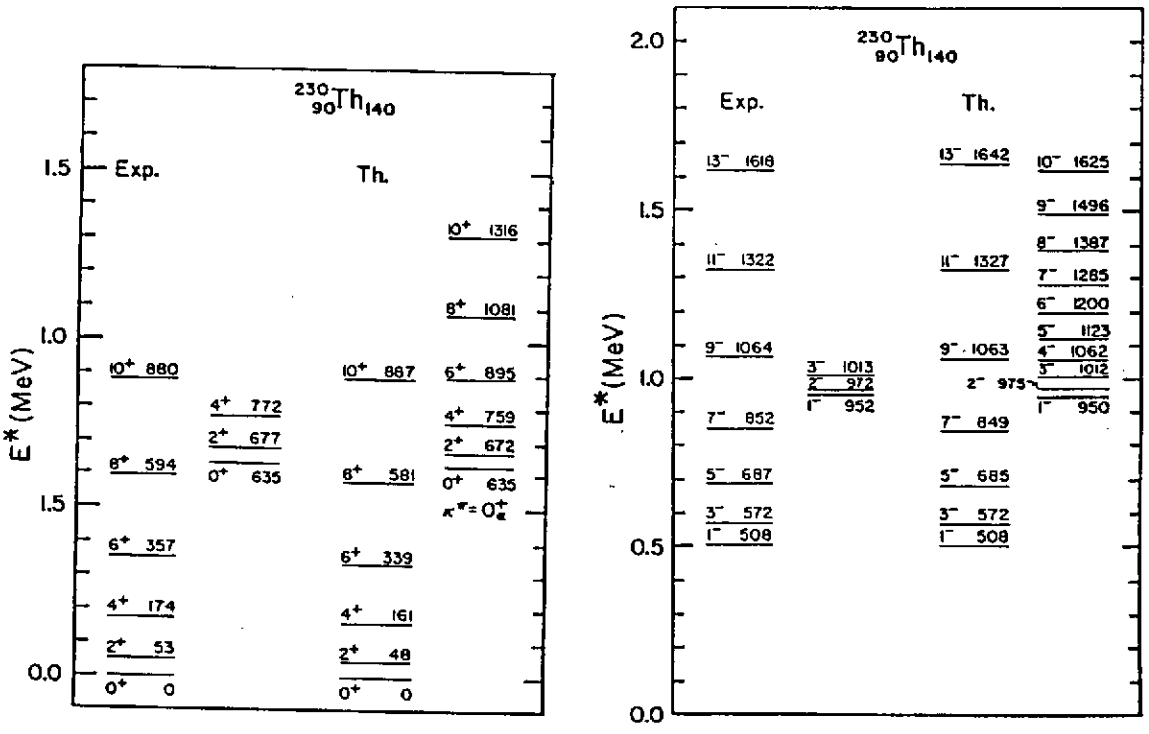


Figure 18 : Comparaison des spectres expérimentaux et théoriques dans le cas du ^{232}Th.

DEUXIEME PARTIE : EXTENSION DU MODELE AU CALCUL DES PROPRIETES RADIALES DES FONCTIONS D'ONDES NUCLEAIRES.

1° MESURE DE DENSITES DE CHARGE DE TRANSITION : DIFFUSION D'ELECTRONS

Pour décrire parfaitement un noyau il suffirait de pouvoir donner les fonctions d'ondes Ψ_i du système dans son état fondamental et dans ses différents états excités. Ces fonctions d'ondes ne sont pas des observables par contre des quantités du type $|\langle \Psi_f | O | \Psi_i \rangle|$ sont, elles, accessibles à la mesure. Si O est un opérateur connu, ces quantités constituent une information aussi proche que possible des fonctions d'ondes nucléaires.

Si O est l'opérateur électro-magnétique on peut ainsi définir, pour un noyau donné :

- la densité de charge $\rho(r) = |\langle \Psi_0 | O | \Psi_0 \rangle|$
- les densités de charge de transition $\rho_{tr}(r) = |\langle \Psi_f | O | \Psi_i \rangle|$

Ce sont précisément les quantités que mesure la diffusion d'électrons. Dans ces expériences la sonde intéragit avec le noyau par l'échange d'un photon virtuel et tout le processus peut être décrit par l'action de cet opérateur parfaitement connu.

Nous n'entrerons pas, ici, dans le détail de la diffusion d'électrons qui a été maintes fois décrite ; considérons simplement que l'expérience nous fournit une information très précise sur le comportement radial des fonctions d'ondes nucléaires sous la forme de densités de charge de transition et voyons comment le modèle des bosons en interaction peut en rendre compte.

2° INTRODUCTION DANS LE MODELE DE LA DEPENDANCE RADIALE

Jusqu'à présent il n'a jamais été question du comportement radial des fonctions d'ondes nucélaires. Dans le modèle IBM celles-ci sont en effet exprimées dans un espace de moment angulaire et il ne peut donc apparaitre aucune dépendance radiale.

On peut toutefois reproduire une telle dépendance radiale en introduisant, de manière phénoménologique, un certain nombre de densités radiales de bosons.

Prenons l'exemple d'une transition quadrupolaire: l'opérateur que nous avons utilisé pour calculer les probabilités de transition réduites B(E2) s'écrit:

$$T^{(E2)} = e_\pi \left[(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)}_\pi + \chi_\pi (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\pi \right] + e_\nu \left[(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)}_\nu + \chi_\nu (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\nu \right]$$

où $e_{\pi,\nu}$ sont les charges effectives des bosons-protons et neutrons respectivement. Si maintenant on considère les deux diagrammes de couplage du photon virtuel avec un boson s ou d :

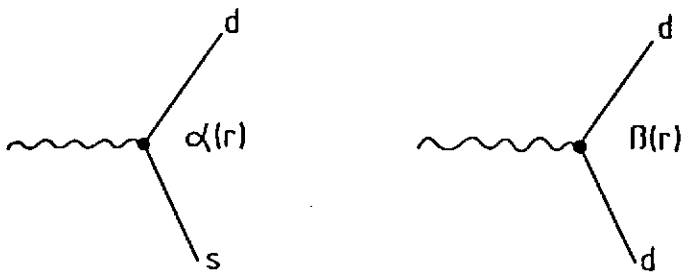


Fig. 19 : Schématisation des facteurs de forme $\alpha(r)$ et $\beta(r)$

on peut introduire les quatre fonctions de structure de bosons

$$\alpha_{\pi,\nu}(r) \text{ et } \beta_{\pi,\nu}(r)$$

et écrire un opérateur de transition quadrupolaire dépendant de r

$$T^{(E2)}(r) = e_\pi \left[\alpha_\pi(r).(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)}_\pi + \chi_\pi \beta_\pi(r).(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\pi \right] + e_\nu \left[\alpha_\nu(r).(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)}_\nu + \chi_\nu \beta_\nu(r).(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\nu \right]$$

La densité de charge de transition a alors l'expression :

$$\rho(r) = \sum_{2^+} \sum_{\rho=\pi,\nu} | \langle 2^+ | e_\rho \left[\alpha_\rho(r).(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)}_\rho + \chi_\rho \beta_\rho(r).(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\rho \right] | 0^+ \rangle |$$

$$\rho(r) = \sum_{2^+} \sum_{\rho=\pi,\nu} e_\rho [\alpha_\rho(r).A_\rho + \chi_\rho \beta_\rho(r).B_\rho]$$

avec: $A_\rho = |\langle 2^+ | (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)}_\rho | 0^+ \rangle|$

et: $B_\rho = |\langle 2^+ | (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}_\rho | 0^+ \rangle|$

A_ρ et B_ρ sont des éléments de matrice fixés par le choix de l'Hamiltonien. On voit qu'il suffit alors de mesurer un certain nombre de densités de charge de transition (quatre pour des états 2^+) pour déterminer ces fonctions de boson et pouvoir prédire n'importe quelle autre densité.

Notons que l'opérateur $T^{(E2)}(r)$ doit être choisi de telle manière que les B(E2) calculés à partir de l'opérateur $T^{(E2)}$ et ceux déduits des densités de charge de transition soient les mêmes. Il faut donc :

$$\left|\langle 2^+ | T^{(E2)} | 0^+ \rangle\right|^2 = \left| \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr \right|^2$$

$$\left| \sum_{\rho=\pi,\nu} e_\rho (A^\rho + B^\rho) \right|^2 = \left| \sum_{\rho=\pi,\nu} e_\rho \left(A^\rho \int_0^\infty \alpha(r) r^4 dr + B^\rho \int_0^\infty \beta(r) r^4 dr \right) \right|^2$$

pour que ces deux expressions soient équivalentes il suffit d'imposer :

$$\int_0^\infty \alpha(r) r^4 dr = \int_0^\infty \beta(r) r^4 dr = 1$$

La plupart du temps il s'avère que la distinction entre densité de boson-proton et boson-neutron n'est pas nécessaire. On peut alors ne considérer que deux densités de boson:

$$\alpha(r) = \alpha_\nu(r) = \alpha_\pi(r)$$
$$\text{et } \beta(r) = \beta_\nu(r) = \beta_\pi(r)$$

on a alors:

$$\rho(r) = [\, \alpha(r).(e_\pi A_\pi + e_\nu A_\nu) + \beta(r).(\chi_\pi e_\pi B_\pi + \chi_\nu e_\nu B_\nu)]$$
$$2^+$$

De même, si on se restreint à l'espace des bosons s et d, l'opérateur pour une transition hexadécapolaire s'écrit :

$$T^{(E4)} = e_\pi (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\pi + e_\nu (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\nu$$

On n'a, cette fois, que deux fonctions de structure à introduire:

$$T^{(E4)}(r) = e_\pi \gamma_\pi(r).(d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\pi + e_\nu \gamma_\nu(r).(d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\nu$$

et la densité de charge de transition s'exprime par :

$$\rho_{4^+}(r) = e_\pi \gamma_\pi(r). \left|\langle 4^+ | (d^+\tilde{d})^{(4)}_\pi | 0^+ \rangle\right| + e_\nu \gamma_\nu(r). \left|\langle 4^+ | (d^+\tilde{d})^{(4)}_\nu | 0^+ \rangle\right|$$

Quand on dispose d'un certain nombre de densités expérimentales on peut donc en choisir deux, extraire α et β puis calculer les autres densités et comparer. Il faut alors choisir un 2^+_1 et un 2^+_2 car les premiers 2^+ sont essentiellement sensibles à α alors que les seconds le sont également à β.

On peut également ajuster globalement α et β sur l'ensemble des données expérimentales. Le résultat est exactement le même si ce n'est que les désaccords entre modèle et expérience sont alors "moyennés".

Nous allons voir sur un certain nombre d'exemples si ces hypothèses simples sont justifiées.

3° APPLICATION AUX ISOTOPES DE L'OSMIUM ET DU PLATINE

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre de ce cours, le ^{196}Pt est un exemple typique de la symétrie O(6) (noyau γ-instable) alors que quand on va vers les isotopes légers de l'Os les noyaux deviennent de plus en plus de type "U(3)" (rotateurs). C'est donc la transition O(6)→U(3) que nous allons tester ici. Nous avons étudié à Saclay cinq isotopes dans cette région:

^{188}Os ^{190}Os ^{192}Os ^{194}Pt et ^{196}Pt

Nous avons déterminé les densités de charge ainsi que les densités de charge de transition des premiers états collectifs.

La figure 20 montre la comparaison entre cinq densités de charge de transition d'états 2^+_1 et 2^+_2 dans les isotopes de l'Osmium et du Platine avec le résultat d'un ajustement global des fonctions α et β sur les sept densités expérimentales.

On voit que l'accord est tout à fait excellent. On remarque également que les fonctions $\alpha_\pi(r)$ et $\alpha_\nu(r)$ d'une part et $\beta_\pi(r)$ et $\beta_\nu(r)$ d'autre part sont très similaires. L'approximation IBM-1 consistant à ne prendre que deux fonctions de bosons semble donc justifiée dans ce cas. La figure 21 montre le résultat de l'ajustement de ces deux fonctions sur les cinq densités de charge de transitions expérimentales; l'accord est, là encore, tout à fait acceptable.

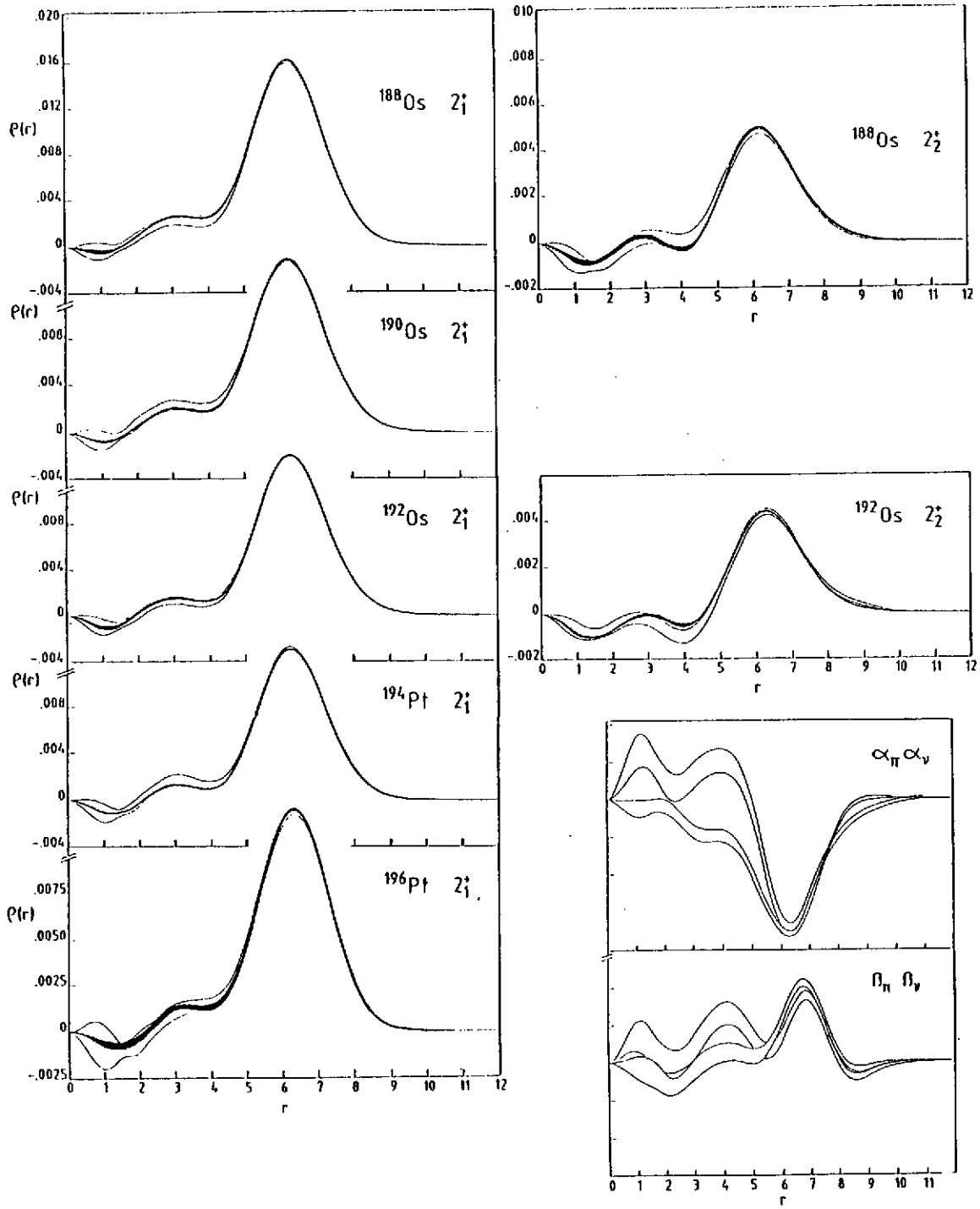


Figure 20 : Densités de transition des premiers 2^+ calculées en IBM-2 (trait épais) comparées à l'expérience (traits fins).

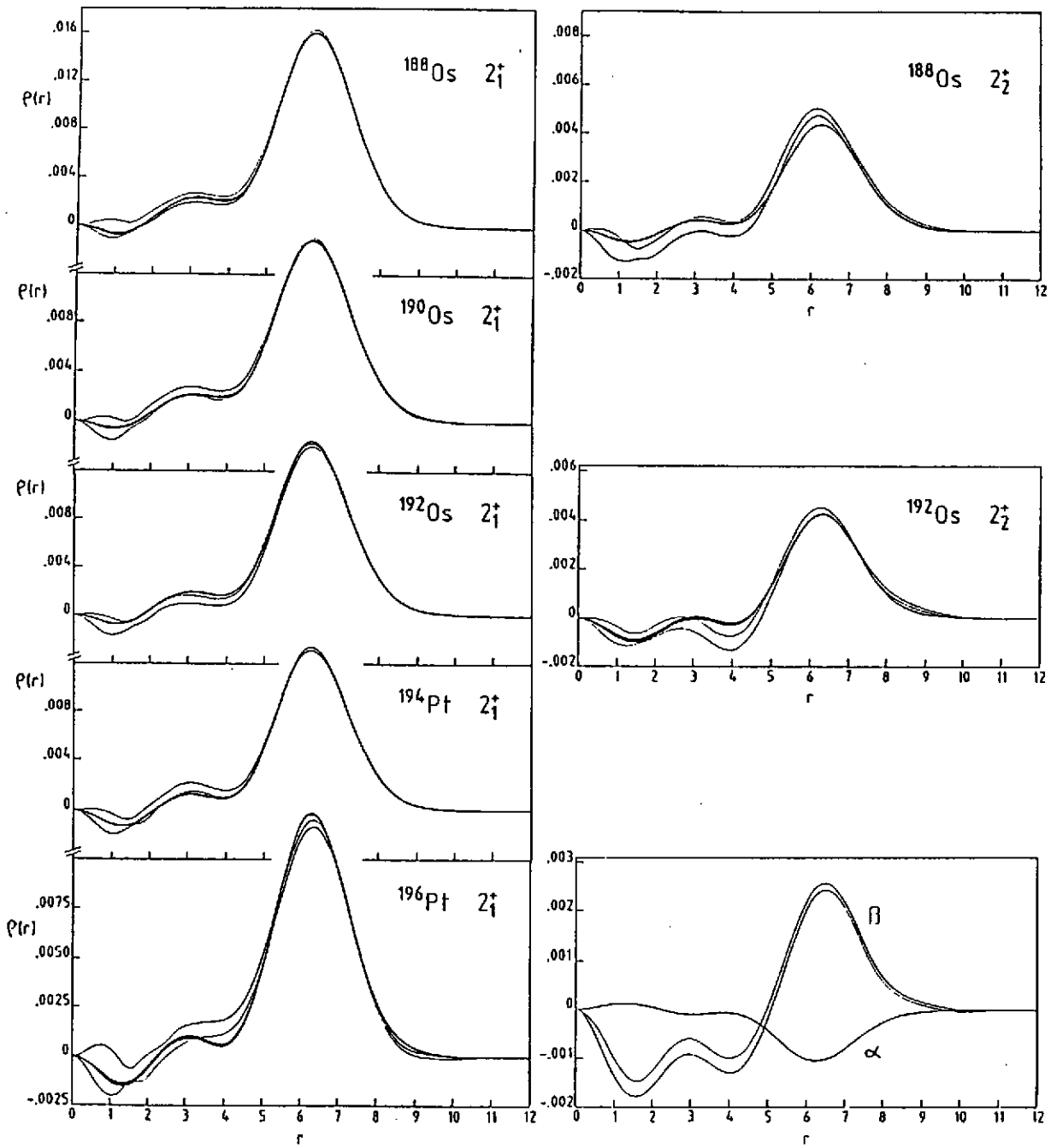


Figure 21 : Comparaison des densités de transition expérimentales (traits fins) avec un calcul IBM-1 (trait épais).

Nous avons aussi mesuré un certain nombre de transitions héxadécapolaires dans cette série de noyaux : le premier état 4^+ dans $^{188\ 192}$Os et $^{194\ 196}$Pt et un second état 4^+ dans le ^{196}Pt.
Comme nous l'avons vu, pour ces transitions le problème se pose de savoir si une base constituée des seuls bosons s et d est suffisante ou s'il faut ajouter un boson g. En IBM-2, si on se limite aux bosons s et d une densité de charge de transition s'écrira :

$$\rho_4(r) = e_\pi \gamma_\pi(r) \langle 4^+ | (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\pi | 0^+ \rangle + e_\nu \gamma_\nu(r) \langle 4^+ | (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\nu | 0^+ \rangle$$

ou simplement :

$$\rho_4(r) = \gamma(r) \left[e_\pi \langle 4^+ | (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\pi | 0^+ \rangle + e_\nu \langle 4^+ | (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}_\nu | 0^+ \rangle \right]$$

en IBM-1.
Ajouter un boson g reviendrait à introduire six fonctions de boson supplémentaires correspondant aux termes $(s^\dagger g + g^\dagger s)^{(4)}$, $(d^\dagger g + g^\dagger s)^{(4)}$ et $(g^\dagger g)^{(4)}$. On a, en général -et c'est le cas ici- trop peu de densités expérimentales pour extraire ces huit fonctions de boson. Nous nous contenterons donc d'essayer de reproduire nos données avec les deux fonctions $\gamma(r)$ seulement. La figure 22 montre le résultat de cet essai. On voit que, si les quatre premiers 4^+ sont bien reproduits le 4^+_2 du ^{194}Pt ne l'est pas du tout. En fait, le rayon de transition de ce second 4^+ est nettement plus grand que celui des premiers 4^+ et le modèle ne parvient pas à reproduire, en même temps, l'évolution de l'amplitude des premiers 4^+ et la variation du rayon de transition quand on passe au 4^+_2. Clairement il nous faut ici un degré de liberté supplémentaire et le boson g semble être le candidat tout désigné.

Il est intéressant de noter que ces niveaux 4^+ ne nécessitaient pas de boson supplémentaire tant qu'il ne s'agissait que de reproduire leur énergie d'excitation (voir première partie) mais la base devient trop réduite dès que l'on s'intéresse au comportement radial des fonctions d'ondes. Cela vient du fait qu'il est toujours possible de compenser un éventuel manque dans l'énergie d'excitation dû au boson g par une sorte de renormalisation du boson d alors que cela n'est plus possible quand il s'agit de densités de boson différentes.

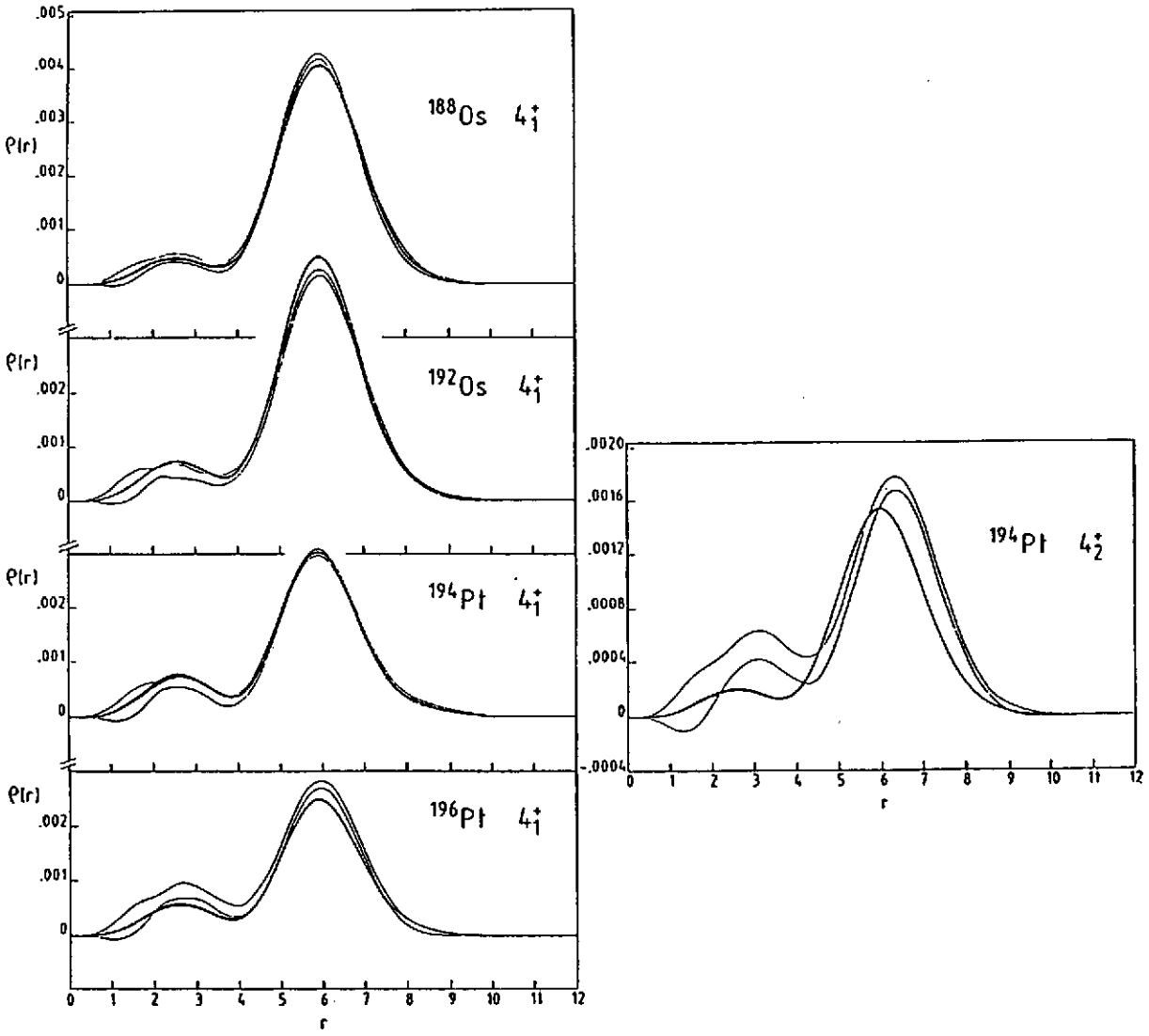


Figure 22 : Densités de charge de transition des états 4^+ calculées en IBM-2 comparés à l'expérience.

4° APPLICATION AUX ISOTOPES DU GERMANIUM

Le cas des isotopes du Germanium est très particulier. Ces noyaux ne correspondent à aucune des limites de IBM-1, de plus, A étant relativement faible (A≃70) protons et neutrons occupent la même couche principale et l'interaction entre bosons-proton et -neutron y est particulièrement importante. Expérimentalement on a pu mettre en évidence une coexistence de forme dans ces isotopes, c'est à dire que l'on peut considérer chaque isotope comme une superposition d'isomères de forme. En terme d'IBM on a pu prendre en compte cette coexistence par

une procédure de mélange de configurations mise au point par P. Duval et B. Barret. Cette méthode consiste en un traitement séparé de deux Hamiltoniens (avec des paramètres différents correspondant à une "forme" différente) ajustés chacun sur une partie du spectre puis mélangés par l'opérateur :

$$H_{Mix} = \alpha\ (s_\pi^\dagger s'_\pi + s'^\dagger_\pi s_\pi)^{(0)} + \beta(d_\pi^\dagger \tilde{d}'_\pi + d'^\dagger_\pi \tilde{d}_\pi)$$

ou les " ' " correspondent aux bosons de la configuration excitée.

Isotope	ϵ (MeV)	κ (MeV)	χ_ν	Δ (MeV)
$^{68}Ge_{36}$	1.4 (1.0)	−0.20 (−0.25)	1.0	2.2
$^{70}Ge_{38}$	1.4 (1.4)	−0.20 (−0.23)	1.2	1.2
$^{72}Ge_{40}$	1.2 (1.2)	−0.21 (−0.23)	1.1	0.3
$^{74}Ge_{42}$	1.2 (1.0)	−0.21 (−0.25)	1.0	−1.0
$^{76}Ge_{44}$	1.2 (0.9)	−0.21 (−0.25)	1.0	−2.1

Les paramètres suivants ont été maintenus constants pour tous les isotopes :

χ_π=-1.2(-1.4) $\xi_1=\xi_3$=0.05(0) ξ_2=0.05(0.1) $\alpha=\beta$=0.18 MeV

Paramètres de l'Hamiltonien utilisés pour les isotopes du germanium. Quand les paramètres de la seconde configuration diffèrent de ceux de la première, ils sont donnés entre parenthèses.

Aux paramètres des deux Hamiltoniens il faut maintenant ajouter δ et η apparaissant dans H_{Mix} et Δ, la différence d'énergie entre les deux configurations. Ce dernier paramètre doit varier linéairement avec le nombre de neutrons dans la mesure où, toutes choses restant égales par ailleurs, l'interaction neutron-proton qui est responsable de cette différence en énergie augmente avec le nombre de neutrons. On voit sur le tableau des paramètres que c'est bien le cas.

Nous avons ajusté les paramètres des deux Hamiltoniens IBM ainsi que ceux de H_{Mix} sur les niveaux, les probabilités de transitions réduites ainsi que les résultats des réactions de transfert (p,t) et (t,p). Les accords obtenus sont montrés sur les figures 23, 24 et 25 et les paramètres utilisés dans le tableau ci-dessus. Les résultats obtenus

sont tout à fait satisfaisants si on considère la simplicité des hypothèses faites.

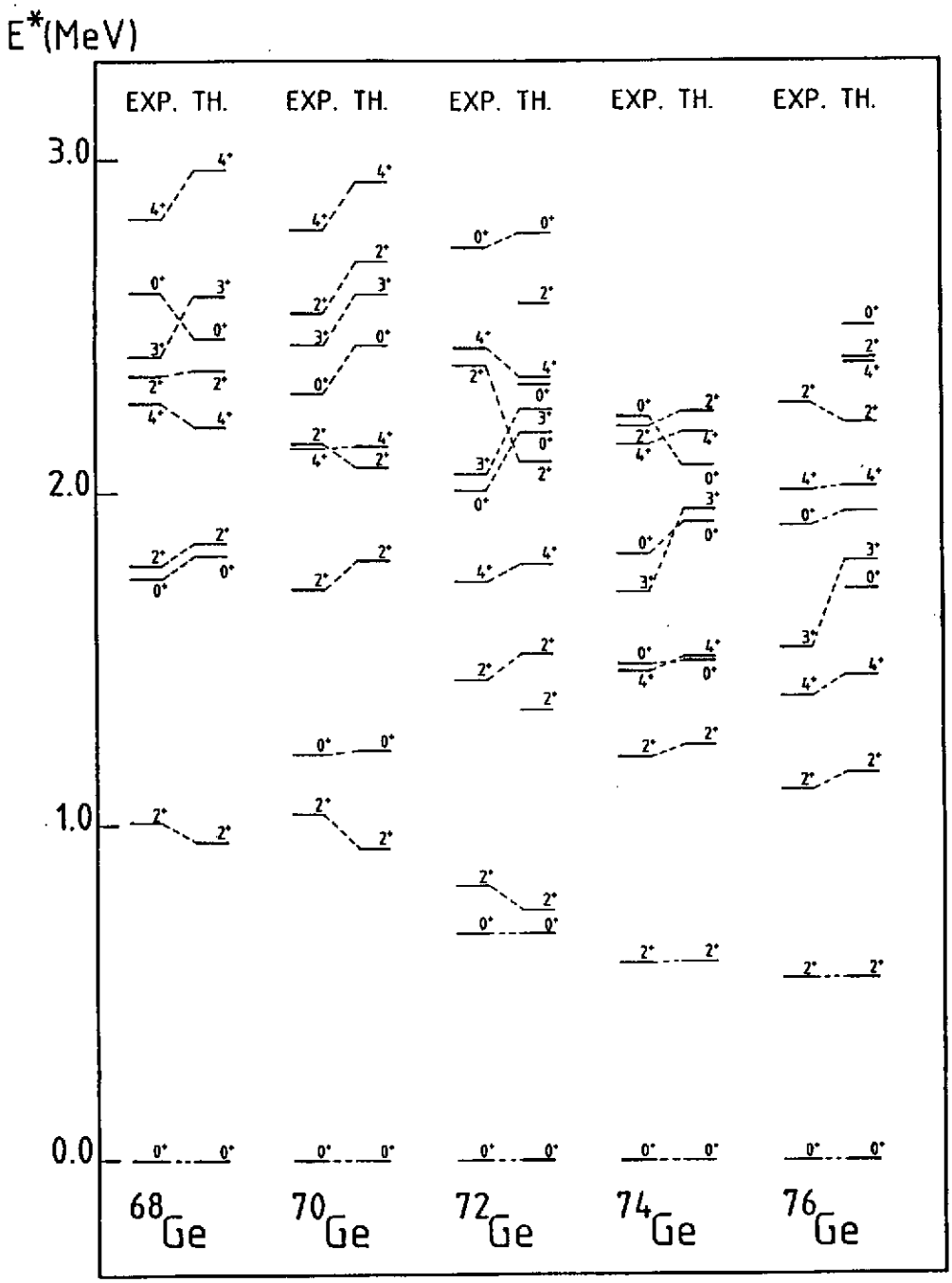


Figure 23 : Schémas de niveaux des isotopes du germanium
Comparaison de l'expérience avec les calculs IBM-2

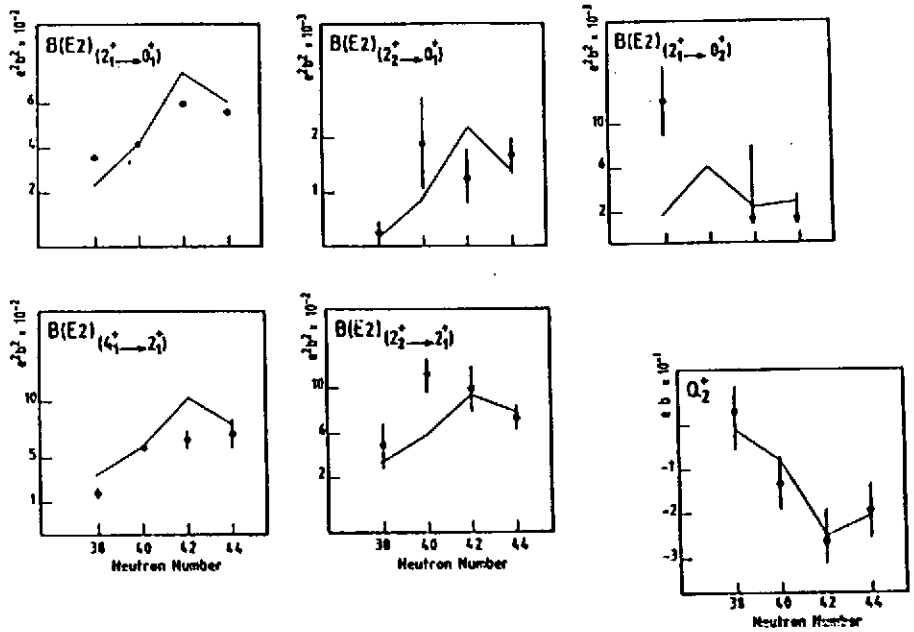


Figure 24 : Comparaison des probabilités de transition réduites expérimentales et calculées dans le formalisme IBM-2

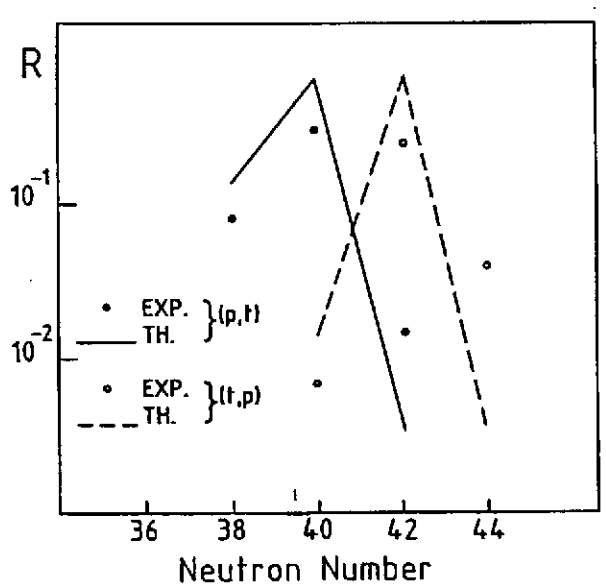


Figure 25 : Rappcrt R = $\sigma(0_2^+)/\sigma(0_1^+)$ mesuré par réaction de transfert (pt) et (tp) et calculé en IBM-2

Nous avons étudié à Saclay quatre isotopes du Germanium (^{70,72,74} ^{76}Ge) et mesuré, en particulier, les densités de charge de transition des deux premiers états 2^+.

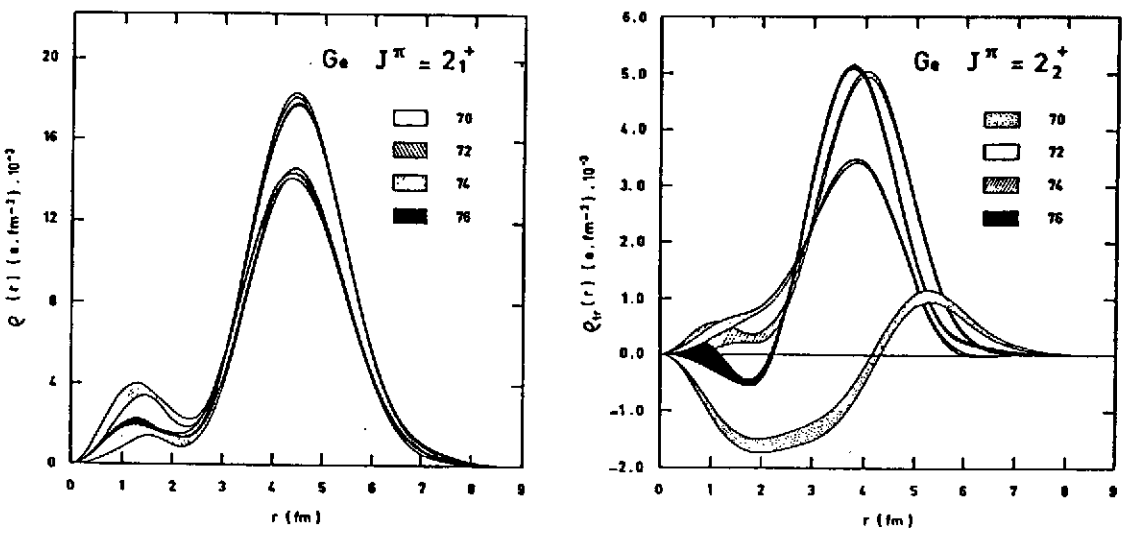


Figure 26 : Densités de charge de transition des deux premiers états 2^+ dans les isotopes du germanium

Ces densités expérimentales sont présentées figure 26. On voit que l'allure des quatre 2_1^+ est similaire. De même trois des 2_2^+ ont la forme classique de densités piquées à la surface du noyau, mais le 2_2^+ du ^{70}Ge a, lui, une forme très différente avec une importante contribution à la densité à l'intérieur du noyau. Pour tenter de reproduire ces densités de transition dans le cadre de IBM nous avons en toute rigueur huit densités de bosons à déterminer (α_π, α_ν, β_π et β_ν) pour chacune des deux configurations. Nous ne disposions que de huit densités expérimentales, il nous fallait donc faire des hypothèses supplémentaires. Nous avons choisi de considérer que les fonctions de structure associées aux bosons-protons et -neutrons avaient la même forme ; nous n'avions ainsi plus que 4 fonctions de structure à déterminer et 4 densités expérimentales supplémentaires pour tester la véracité de nos hypothèses.

Les quatre fonctions de bosons ont été ajustées sur les 2_1^+ et 2_2^+ des ^{72}Ge et ^{76} Ge et nous avons calculé les quatre autres densités. Notons bien qu'il n'y a plus de paramètre libre à ce niveau puisque les fonctions d'ondes de chacun des états (et donc les éléments de matrice A et B) sont déterminées par le choix des paramètres de l'Hamiltonien. Les quatre densités de départ sont évidemment parfaitement reproduites et la

figure 27 montre ce qu'il en est des quatre autres. L'accord entre calcul et expérience est excellent ; en particulier, le 2_2^+ du ^{70}Ge voit sa forme très "spéciale" bien reproduite par le modèle. Cela est particulièrement remarquable si on se souvient que les fonctions de bosons ont été déterminées à partir de densités toutes piquées à la surface.

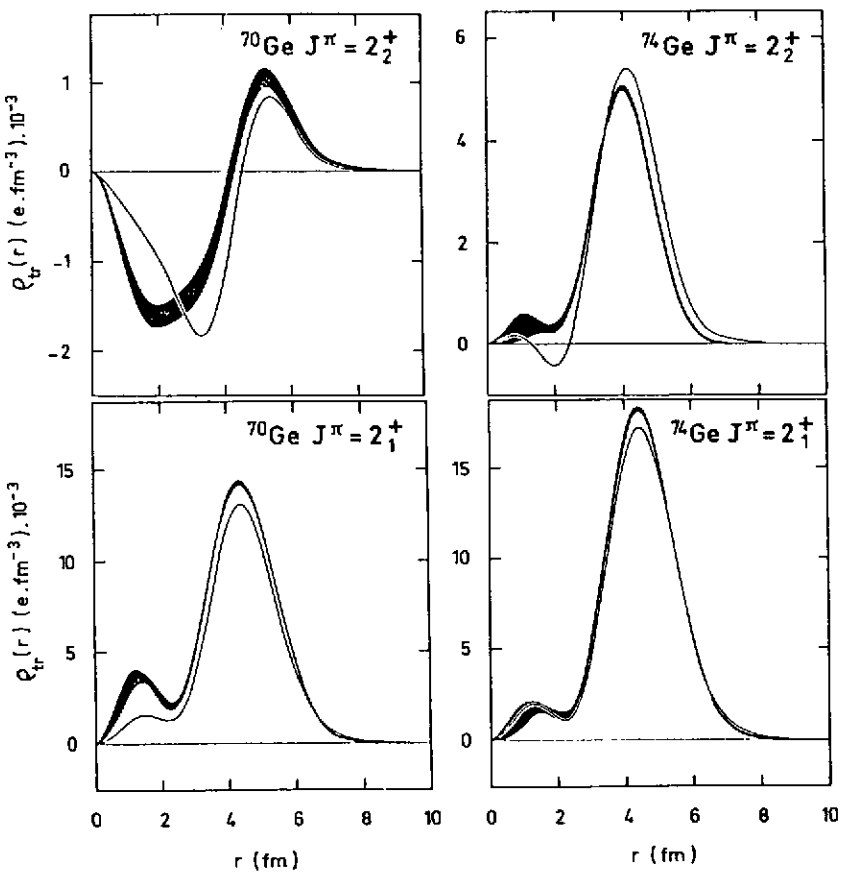


Figure 27 : Densités de charge de transition expérimentales comparées aux prévisions IBM.

La première conclusion qui s'impose est que les degrés de liberté introduits dans IBM semblent parfaitement adaptés à reproduire les effets collectifs dans les isotopes du Germanium.
Le résultat, à ce niveau est déjà assez remarquable mais il y a, à mon sens un point plus important. La question de savoir pourquoi ce second 2^+ a cette forme étrange ou plus exactement pourquoi ces seconds 2^+

présentent une telle discontinuité de forme reste entière. IBM avec la technique de mélange de configurations que nous avons utilisée ici apporte une réponse très simple : ces 2^+ ne sont pas les mêmes quand on passe du ^{70}Ge aux isotopes plus lourds. Dans ce premier isotope cet état appartient à une configuration "excitée" alors que dans les autres il appartient à la configuration "fondamentale". Le calcul montre d'ailleurs que dans le ^{72}Ge le troisième 2^+ a cette forme particulière du 2^+_2 du ^{70}Ge. Comme pour les 0^+ ces 2^+ montent en énergie quand le nombre de neutrons augmente. Il n'y a donc pas de changement brutal de forme entre les seconds 2^+ du ^{70} Ge et du ^{72}Ge, mais simplement une inversion dans l'ordre des niveaux.

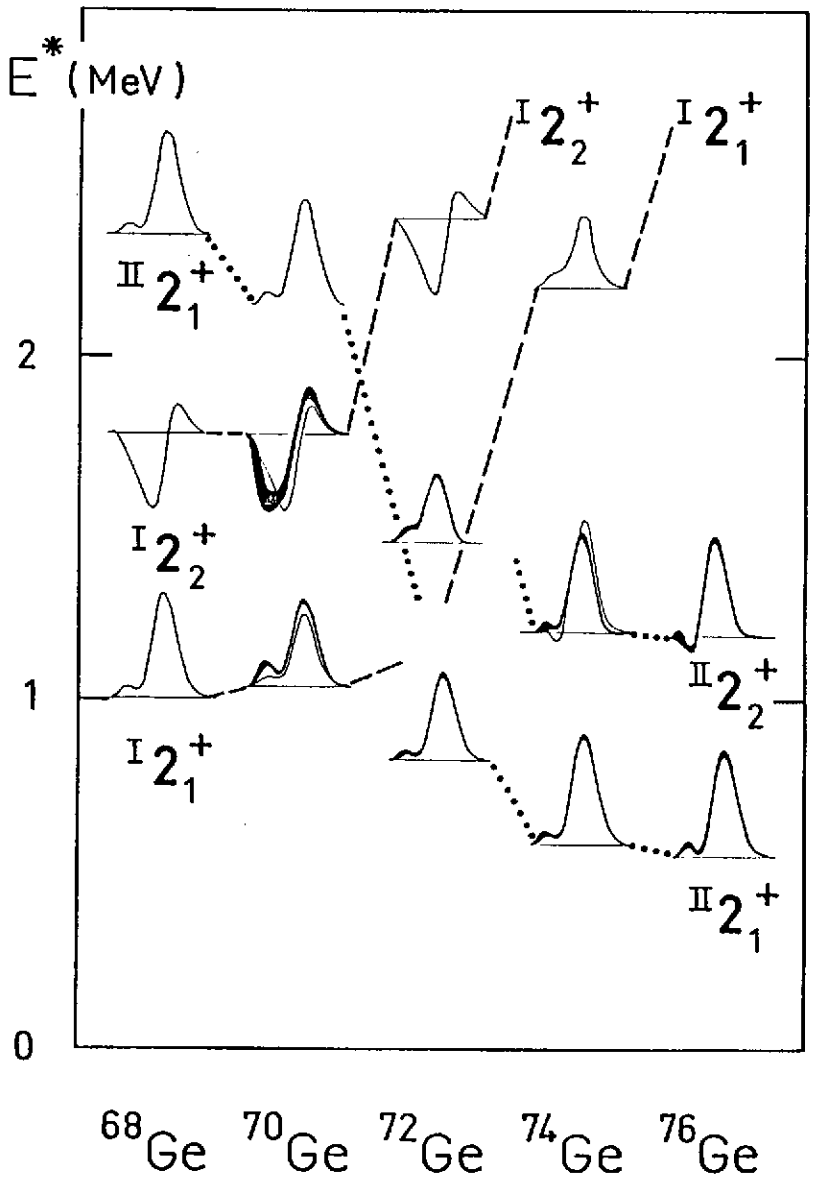


Figure 28 : Mélange de configurations illustré par l'évolution des densités de transition des états 2^+_1 et 2^+_2. Les traits fins sont le résultat du calcul IBM et les traits épais l'expérience.

CONCLUSION

Dans la première partie de ce cours nous avons montré qu'une approche très simple, basée sur la théorie des groupes, permettait de reproduire la plupart des observables liées aux propriétés collectives dans les noyaux déformés.

Ce premier modèle (IBM-1) a immédiatement rencontré un vif succès car il a permis à tous, théoriciens comme expérimentateurs de classer, cataloguer l'énorme quantité de données disponibles dans ce domaine. Il a ainsi suscité une intense activité, ce qui n'est pas le moindre de ces mérites.

Très rapidement est apparue une extension (IBM-2) où l'on fait la distinction explicite entre les bosons-protons et les bosons-neutrons.

On a ainsi perdu une grande partie de la beauté formelle du modèle original mais cette évolution a permis, non seulement d'étendre son domaine d'application mais aussi, et peut être surtout de créer un lien entre les modèles collectifs et la notion de particule indépendante.

Ces deux modèles permettent, avec une grande économie de paramètres, de reproduire une quantité impressionnante de données caractérisant les noyaux déformés. Leurs spectres d'excitations, bien sûr, mais également les probabilités de transition réduites, les moments quadrupolaires, les résultats d'expériences de transfert de deux nucléons etc...

Cette approche de la dynamique des noyaux par la théorie des groupes a également constitué un cadre qui permet de traiter très simplement divers cas particuliers comme celui des actinides légers par exemple. Elle offre aussi la possibilité d'extensions variées dont la plus importante d'entre elles : le traitement des noyaux pair-impair. Cette extension particulière connue sous le nom d'IBFM ainsi que le traitement sur un pied d'égalité des degrés de liberté fermioniques et bosoniques (super symétries) fait l'objet du cours de M. Vergnes.

Parmi les nombreux domaines vers lesquels le modèle a été étendu nous en avons examiné un en particulier, celui de l'introduction d'une

extension radiale des fonctions d'onde nucléaires par le biais de densités phénoménologiques de bosons. Nous avons montré que celles-ci peuvent être déduites de l'expérience puis utilisées pour prédire n'importe quelle densité de charge de transition dans les isotopes considérés. Dans le cas particulier des germaniums cette approche est la seule, pour l'instant, qui ait permis de donner une interprétation simple du comportement étrange de certains états.

Cet exemple me semble être parfaitement significatif de ce qu'estce modèle : un outil puissant pour la compréhension des phénomènes complexes liés aux degrés de liberté collectifs des noyaux déformés.

BIBLIOGRAPHIE

Cette bibliographie est volontairement très succinte. Pour une étude plus détaillée on se reportera aux références mentionnées dans les articles de revue cités ici.

REPERES HISTORIQUES

* premier article citant le terme d'IBM :
  H. Feshbach and F. Iachello, Phys. Lett. 45B(1973)7.
* IBM avec seulement un boson d :
  F. Iachello and A. Arima, Phys. Lett. 53B(1974)309.
* introduction du boson s :
  A. Arima and F. Iachello, Phys. Rev. Lett. 35(1975)1069
  Ann. Phys. (NY) 99(1976)253
  111(1978)201
  123(1979)468

ARTICLES DE REVUE

* VERS UNE DESCRIPTION UNIFIEE DE LA STRUCTURE NUCLEAIRE :
  MODELES IBM IBFM ET SUPERSYMETRIES
  par M. Vergnes et F. Iachello, Annales de PHYSIQUE, MASSON 1983
* THE INTERACTING BOSON MODEL FOR PEDESTRIANS par P. Duval
  Cours donné en novembre 1982 au DPh.N.HE du CEN SACLAY.

Proceedings des Ecoles d'ERICE

* INTERACTING BOSONS IN NUCLEAR PHYSICS
  Edited by F.Iachello, Plenum Press, New York (1979)
* INTERACTING BOSE-FERMI SYSTEMS IN NUCLEI
  Edited by F.Iachello, Plenum Press, New York (1981)

ALPHA-CLUSTER

* F.Iachello and A.D. Jackson, Phys. Lett. 105B(1982)151
* H. J. Daley and F. Iachello, Phys. Lett. 131B(1983)281

IBM ET MELANGE DE CONFIGURATIONS

* P.D. Duval and B.R. Barret, Phys. Lett. 100B(1981)223
* P.D. Duval, D. Goutte and M. Vergnes, Phys. Lett. 124B(1983)297
* J-P. Bazantay, Thése de troisième cycle, Orsay 1984

DIFFUSION D'ELECTRONS

Expériences

Théses d'Etat :	Ph. Leconte	Orsay 1976
	J-M. Cavedon	Orsay 1980
	D. Goutte	Orsay 1984

IBM

* A.E.L. Diepering et al., Phys. Lett. 76B(1978)135
* F. Iachello, Nucl. Phys. A358(1981)89c
* M.A. Moinester et al., Nucl.Phys. A383(1982)264
* INTERACTING BOSON-BOSON AND BOSON-FERMION SYSTEMS
  Gull Lake 1984
  Edited by O. Scholten, World Scientific 1984