



Symétrie chirale

P.A.M. Guichon

► **To cite this version:**

P.A.M. Guichon. Symétrie chirale. École thématique. Ecole Joliot Curie "Symétries et physique nucléaire", Maubuisson, (France), du 15-19 septembre 1986 : 5ème session, 1986. <cel-00644028>

HAL Id: cel-00644028

<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00644028>

Submitted on 23 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SYMETRIE CHIRALE

P.A.M. GUICHON

Service de Physique Théorique, IPN Lyon

Résumé :

La symétrie chirale est d'abord expliquée par des considérations portant sur les quarks et la Chromodynamique Quantique. Ensuite on montre comment la symétrie a été suggérée par la phénoménologie des interactions faibles et on formule les hypothèses, c'est-à-dire la conservation et l'algèbre des courants. Après un commentaire sur la réalisation dans le mode de Goldstone, on calcule à titre d'illustration, l'amplitude d'électroproduction de pion au seuil. Finalement on explique comment construire un Lagrangien qui possède la symétrie chirale et on explique la façon de l'utiliser.

Abstract :

Chiral symmetry is first explained by considerations about quarks and Quantum Chromodynamics. Then it is shown how the symmetry has been suggested by the weak interactions phenomenology. The hypothesis, current conservation and current algebra, are formulated. After a comment about the Goldstone realization one derives, as an illustration, the threshold pion electroproduction amplitude. Finally one explains how to build a chiral invariant Lagrangian and the rules for use.

I. INTRODUCTION

La symétrie chirale est née en 1958 dans un article¹ de S. Treiman et M. Golberger où pour la première fois a été établie une relation entre l'interaction forte et l'interaction faible. Bien que la dérivation proposée contienne des approximations difficiles à justifier, ce travail a déclenché un gigantesque effort théorique et expérimental qui a permis d'établir que l'interaction forte avait une symétrie plus grande que celle relative à l'isospin. En fait le groupe d'invariance est constitué de deux groupes d'isospin agissant indépendamment sur les composantes droites et gauches des particules de spin 1/2. Cette invariance est fondamentale à la fois pour la physique des particules et la physique nucléaire car elle contrôle la physique du pion à basse énergie. On peut même aller plus loin en disant que le pion existe uniquement pour que la symétrie chirale ne soit pas violée. Au niveau pratique cette symétrie se manifeste par les théorèmes de pions mous ou théorèmes de basse énergie qui généralement relient un élément de matrice contenant n pions mous à un autre contenant $(n-1)$ pions mous, c'est-à-dire d'impulsion nulle et de masse nulle. Le pion a une masse d'environ 140 Mev, ce qui donne une idée de la qualité des approximations. Typiquement les théorèmes de basse énergie marchent à $5 \div 10\%$, sauf accident, ce qui fait de la symétrie chirale la meilleure des symétries de l'interaction forte après celle d'isospin.

Un aspect très important de la symétrie chirale est sa réalisation dans le mode dit de Goldstone, c'est-à-dire que l'état fondamental de l'Hamiltonien des interactions fortes n'est pas invariant sous toutes les opérations du groupe. On appelle ce phénomène la brisure spontanée de la symétrie et il est à l'origine de l'existence du pion. Ce phénomène est très général et était connu de longue date, mais c'est à propos de la symétrie chirale qu'il est intervenu pour la première fois en physique des particules. C'est lui qui a déclenché l'aventure des Théories de Jauge locales spontanément brisées.

Ce cours est une introduction à la symétrie chirale et il est conçu pour des physiciens qui ne sont pas toujours familiers avec les concepts théoriques le plus souvent utilisés dans ce domaine. Il devrait permettre au lecteur d'aborder plus facilement l'abondante littérature relative à la symétrie chirale. Comme références on peut citer :

- Currents in Hadron Physics²,
- Current Algebra³,
- Chiral Dynamics⁴.

Les compléments de cours sur l'équation de Dirac, le théorème de Noether et quelques développements autour de ces sujets ne sont pas reproduits ici car on peut les trouver intégralement dans le Tome II du Bjorken and Drell⁵.

Le plan du cours est le suivant :

Le Chapitre II introduit la notion de chiralité, de transformation chirale et explique l'origine de cette symétrie des interactions fortes à partir de la chromodynamique quantique. Le Chapitre III est une approche phénoménologique de la symétrie à partir de l'étude des interactions faibles. Il se termine par la démonstration du théorème de basse énergie qui permet de relier l'amplitude d'électroproduction de pion au seuil aux constantes de couplage faibles du nucléon. Le Chapitre IV contient la construction artisanale d'un modèle Lagrangien qui possède la symétrie chirale et le Chapitre V explique comment l'utiliser dans l'approximation en arbre et traite l'exemple de la diffusion pion-nucléon.

II. NOTION DE SYMETRIE CHIRALE

1) Hélicité, chiralité

En mécanique relativiste le moment angulaire orbital \vec{L} et le spin \vec{s} ne commutent pas avec le Hamiltonien. Par conséquent la projection de \vec{s} sur un axe quelconque n'est en général pas une constante du mouvement. Il y a deux exceptions :

a) si on se place dans le repère où la particule est au repos puisque dans ce cas le moment angulaire total \vec{j} est égal à \vec{s} . C'est implicitement le choix que l'on fait en mécanique non relativiste.

b) si on choisit l'axe parallèle à l'impulsion car $\vec{j} \cdot \hat{p} = \vec{s} \cdot \hat{p}$

Pour une particule de masse nulle il n'existe pas de repère de repos. Donc on décrit l'état de spin par l'hélicité $h = \vec{j} \cdot \hat{p}$. Rappelons qu'une particule de masse nulle n'a pas de degrés de liberté longitudinaux (ils sont complètement contractés puisque la vitesse est égale à 1) de sorte que l'hélicité a dans ce cas au plus deux valeurs $h = \pm j$. Utilisons comme guide le neutrino. On sait qu'il n'existe que dans l'état $h = -1/2$ et l'antineutrino dans l'état $h = +1/2$. Comme tous deux font partie de la même entité (en théorie relativiste la particule et l'antiparticule sont décrites par le même champ) on a intérêt à définir la chiralité χ :

$$\chi = 2h \quad \text{pour la particule}$$

$$\chi = -2h \quad \text{pour l'antiparticule}$$

de sorte que le neutrino ou l'antineutrino n'existent que dans l'état de chiralité $\chi = -1$. Evidemment l'hélicité et la chiralité sont des descriptions équivalentes, mais la dernière est plus commode car elle a une représentation indépendante de \hat{p} . En effet considérons une particule de spin 1/2 et de masse nulle. Elle est décrite par un spineur de Dirac⁵ qui vérifie l'équation :

$$i \gamma \cdot \partial \Psi = 0 \quad (\text{II.1})$$

Pour un état libre d'impulsion (p^0, \vec{p})

$$\Psi(x) = e^{-i p \cdot x} \Psi(0) \quad (\text{II.2})$$

l'équation (II.1) peut se réécrire sous la forme :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Psi(0) = \gamma^5 p^0 \Psi(0) \quad (\text{II.3})$$

où $\vec{\sigma}$ est la matrice (4 x 4) :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

avec $\vec{\sigma}$ les matrices de Pauli (2 x 2). Comme $p^0 = |\vec{p}|$ pour la particule et $p^0 = -|\vec{p}|$ pour l'antiparticule on voit que l'opérateur de chiralité est simplement la matrice γ^5

2) Transformations chirales

Si la particule considérée a deux degrés de liberté internes d'isospin (u et d pour les quarks, p et n pour le nucléon), le spineur Ψ aura, en plus de l'indice matriciel correspondant aux matrices de Dirac, un indice d'isospin $i = 1, 2$ et on pourra définir des transformations (infinitésimales) d'isospin par ($\vec{\epsilon} \equiv \vec{\sigma}$):

$$\Psi \longrightarrow \Psi + i \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\tau}}{2} \Psi \quad (\text{II.4})$$

c'est-à-dire explicitement, et pour la dernière fois :

$$\Psi_{\mu i} \longrightarrow \Psi_{\mu i} + i \sum_{\alpha j} \frac{\epsilon^\alpha}{2} \tau_{ij}^\alpha \Psi_{\mu j}$$

où μ est l'indice de Dirac et ϵ^α ($\alpha = 1, 2, 3$) les paramètres de la rotation d'isospin. On sait que l'interaction forte est invariante sous ces transformations, les violations de la symétrie étant attribuées soit à des effets électrofaibles, soit à la différence de masse des quarks u et d (dont l'origine est aussi électrofaible).

Pour une particule de masse non nulle on peut toujours utiliser l'opérateur γ^5 pour définir des états propres de la chiralité :

$$\gamma^5 \Psi = \chi \Psi \quad (\text{II.5})$$

En général on définit les composantes droites (R) et gauche (L) par

$$\begin{aligned} \Psi_R &= \frac{1 + \gamma^5}{2} \Psi \\ \Psi_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

qui correspondent à $\chi = \pm 1$. Les transformations chirales sont des transformations d'isospin indépendantes sur Ψ_R et Ψ_L :

$$\begin{aligned} \Psi_R &\longrightarrow \Psi_R + i \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\tau}}{2} \Psi_R \\ \Psi_L &\longrightarrow \Psi_L + i \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\tau}}{2} \Psi_L \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Le groupe de transformation est donc $SU(2) \times SU(2)$ et le sous-groupe correspondant à $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}'$ est le groupe d'isospin ordinaire. En combinant les équations (II.6) et (II.7) on peut écrire les transformations chirales pour Ψ :

$$\Psi \longrightarrow \Psi + i \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{2} \Psi - i \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}}{2} \gamma^5 \Psi \quad (\text{II.7})$$

où on a défini les nouveaux paramètres :

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}'}{2} \quad \vec{\beta} = \frac{-\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}'}{2} \quad (\text{II.8})$$

Le paramètre $\vec{\alpha}$ correspond aux transformations d'isospin et le paramètre $\vec{\beta}$ aux transformations d'isospin axiales.

3) Symétrie chirale et Q.C.D.

L'intérêt des transformations définies par l'équation (II.8) tient au fait qu'elles laissent inchangées les équations du mouvement de la chromodynamique quantique, si les masses des quarks u et d sont nulles. En effet le Lagrangien de Q.C.D. a la forme suivante (dans le cas de deux saveurs)⁶ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + g \bar{\Psi} \gamma^\mu G_\mu^a \lambda_a \Psi \\ & + \frac{m_u + m_d}{2} \bar{\Psi} \Psi + \frac{m_u - m_d}{2} \bar{\Psi} \tau_3 \Psi \\ & + \mathcal{L}(\text{gluons}) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

où on a écrit le terme de masse :

$$m_u \bar{\Psi}_u \Psi_u + m_d \bar{\Psi}_d \Psi_d$$

sous la forme :

$$\frac{m_u + m_d}{2} \bar{\Psi} \Psi + \frac{m_u - m_d}{2} \bar{\Psi} \tau_3 \Psi \quad (\text{II.11})$$

avec $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_u \\ \Psi_d \end{pmatrix}$ et τ_3 la matrice de Pauli. Les matrices de Gell-Mann agissent sur les degrés de liberté de couleur. Sous la forme (II.10), il est clair que si $m_u = m_d$, \mathcal{L}_{QCD} est invariant sous les transformations d'isospin, une propriété que l'on attend d'une théorie des interactions fortes. Si de plus on a $m_u = m_d = 0$ (expérimentalement $m_{u,d} \sim 0 \div 20 \text{ MeV}$) alors \mathcal{L}_{QCD} est aussi invariant sous les transformations axiales, c'est-à-dire sous tout le groupe chirale $SU(2) \times SU(2)$. Il faut bien noter que cette invariance concerne la théorie classique (avant quantification). A priori les fluctuations quantiques peuvent altérer la

symétrie. C'est le problème des anomalies. Le lecteur courageux trouvera un exposé complet du problème dans la revue de G.A. Christos⁷. Pour ce qui nous concerne nous admettrons que la symétrie $SU(2) \times SU(2)$ est réalisée sans problème au niveau quantique, comme cela est suggéré par la phénoménologie.

III. LA SYMETRIE CHIRALE : UNE SYMETRIE DE L'INTERACTION FORTE REVELEE PAR L'INTERACTION FAIBLE

Le paragraphe précédent a présenté la notion de transformation chirale ainsi que l'origine microscopique de l'invariance de l'interaction forte sous ces transformations. En fait cette symétrie a été découverte bien avant la naissance de QCD grâce à l'étude de l'interaction faible. C'est l'objet de ce chapitre.

Pour des raisons pédagogiques- ou plutôt pour ne pas rebuter d'emblée les auditeurs non familiers avec l'équation de Dirac et toutes ces choses relativistes- j'ai adopté une présentation semi-relativiste qui est valable à des termes en v^2 près où v est la vitesse du nucléon. Le seul véritable inconvénient est que le nombre d'équations est le double de celui de la présentation covariante puisqu'il faut distinguer la composante de temps et les composantes d'espace des quadrivecteurs.

Pour introduire les notions relatives aux courants qui sont les quantités dynamiques mesurées dans l'interaction faible, le plus naturel est de commencer avec l'interaction électromagnétique.

1) Le courant électromagnétique

L'interaction entre le champ électromagnétique A^ν et le courant V_ν^{em} ($\nu = 0, 1, 2, 3$, indices de Lorentz) porté par les particules est :

$$W = e \int d\vec{x} V_\nu^{em} A^\nu \quad (\text{III.1})$$

La charge électrique $e = \sqrt{4\pi/137}$ est factorisée de sorte que le courant est normalisé à 1. Le courant porté par les particules qui subissent l'interaction forte ne peut pas avoir une structure simple. Par exemple le courant du proton est porté par les quarks et par le nuage de mésons virtuels et donc dépend directement de la structure forte. On peut par contre définir et mesurer les éléments de matrice de ce courant. Nous allons nous intéresser à l'élément de matrice de V_ν^{em} entre états contenant un nucléon. On peut choisir des états d'impulsion \vec{p} et de spin m_σ notés :

$$|\vec{p} \ m_\sigma \ (\text{proton ou neutron})\rangle$$

normalisés selon :

$$\langle \vec{p}' \ m'_\sigma | \vec{p} \ m_\sigma \rangle = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \delta(m'_\sigma - m_\sigma) \quad (\text{III.2})$$

Dans ce cas la dépendance en (\vec{x}, t) du courant est triviale ($k_\nu = p'_\nu - p_\nu$) :

$$\langle \vec{p}' | V_\nu^{em}(\vec{x}, t) | \vec{p} \rangle = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \langle \vec{p}' | V_\nu^{em}(0) | \vec{p} \rangle \quad (\text{III.3})$$

Dans l'approximation semi-relativiste définie plus haut, on a pour le proton :
(on note $V_\nu^{em} = V_\nu^{em}(0)$, $k = |\vec{k}|$)

$$\langle \vec{p}' m'_r(p) | V_0^{em} | \vec{p} m_r(p) \rangle = (2\pi)^{-3} \chi_{(m'_r)}^\dagger G_E^p(k) \chi_{(m_r)}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' m'_r(p) | \vec{V}^{em} | \vec{p} m_r(p) \rangle = (2\pi)^{-3} \chi_{(m'_r)}^\dagger \left[G_E^p(k) \frac{\vec{p} + \vec{p}'}{2M} \right. \\ \left. + i G_M^p(k) \frac{\vec{\sigma} \times \vec{k}}{2M} \right] \chi_{(m_r)} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

où $\chi_{(m_r)}$ est le spineur normalisé à deux composantes qui décrit l'état de spin :

$$\frac{\sigma_3}{2} \chi_{(m_r)} = m_r \chi_{(m_r)} \quad (\text{III.5})$$

$$\chi_{(m'_r)}^\dagger \chi_{(m_r)} = \delta(m_r, m'_r) \quad (\text{III.6})$$

et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les matrices de Pauli. Dans la suite les spineurs et les indices de spin seront sous-entendus. A priori les facteurs de forme dépendent de l'invariant :

$$k_r k_r = k_0^2 - \vec{k}^2$$

mais k_0^2 est d'ordre σ^2 . Le facteur $(2\pi)^{-3}$ est là pour que l'on ait $G_E^p(0) = 1$. La partie d'espace du courant contient le courant de convection (dû à la vitesse) et le courant de magnétisation (dû au spin). La valeur de $G_M^p(0)$ est déterminée à partir du moment magnétique du proton. On trouve $\mu_p = G_M^p(0) \frac{e}{2M}$ et donc $G_M^p(0) = 2.79$

La dépendance sur k des facteurs de forme est grosso-modo la même pour G_E^p et G_M^p . On la paramétrise souvent par :

$$\frac{G_E^p(k)}{G_E^p(0)} \sim \frac{G_M^p(k)}{G_M^p(0)} \sim \left(1 + \frac{k^2}{M_v^2} \right)^{-2} \quad (\text{III.7})$$

avec $M_v \sim 850 M_{ev}$

Le courant du neutron a la même forme que celui du proton avec G_E^p, G_M^p remplacés par G_E^n, G_M^n . Evidemment on a $G_E^n(0) = 0$ et d'après le moment magnétique du neutron : $G_M^n(0) = -1.91$

Il est commode de traiter le proton et le nucléon en utilisant le formalisme d'isospin. On introduit les isospineurs $\chi_{(m_\tau)}$ vérifiant :

$$\frac{\tau_3}{2} \chi_{(m_\tau)} = m_\tau \chi_{(m_\tau)}$$

$$\chi_{(m'_\tau)}^\dagger \chi_{(m_\tau)} = \delta(m_\tau, m'_\tau) \quad (\text{III.8})$$

et on assigne $m_\tau = 1/2$ au proton, $m_\tau = -1/2$ au neutron (en Physique Nucléaire on adopte

souvent le choix inverse !) En utilisant les projecteurs $\frac{1+\tau_3}{2}$ et $\frac{1-\tau_3}{2}$ on peut réécrire le courant du nucléon sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' m'_z | V_0^{em} | \vec{p} m_z \rangle &= (2\pi)^3 \chi^\dagger(m'_z) \left[(G_E^p + G_E^n) \frac{1}{2} + (G_E^p - G_E^n) \frac{\tau_3}{2} \right] \chi(m_z) \\ \langle \vec{p}' m'_z | \vec{V}^{em} | \vec{p} m_z \rangle &= (2\pi)^3 \chi^\dagger(m'_z) \left\{ \left[(G_E^p + G_E^n) \frac{\vec{p} + \vec{p}'}{2M} + i (G_M^p + G_M^n) \frac{\vec{\sigma} \times \vec{k}}{2M} \right] \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left[(G_E^p - G_E^n) \frac{\vec{p} + \vec{p}'}{2M} + i (G_M^p - G_M^n) \frac{\vec{\sigma} \times \vec{k}}{2M} \right] \frac{\tau_3}{2} \right\} \chi(m_z) \end{aligned} \quad (\text{III. 9})$$

Par la suite les isospineurs et les indices d'isospin seront sous-entendus. La partie du courant qui contient la matrice τ_3 est dite isovectorielle, l'autre est isoscalaire. Cette décomposition correspond au fait que la charge électrique est

$$Q = T + (B + S)/2$$

avec B le nombre baryonique, T l'isospin et S l'étrangeté. On utilise les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{isovecteur : } G_V &= G_E^p - G_E^n & G_M &= G_M^p - G_M^n \\ \text{isoscalaire : } G_V' &= G_E^p + G_E^n & G_M' &= G_M^p + G_M^n \end{aligned}$$

Comme le courant électromagnétique est conservé on doit avoir :

$$\vec{k} \cdot \langle \vec{p}' | V_0^{em} | \vec{p}' \rangle - \vec{k} \cdot \langle \vec{p} | \vec{V}^{em} | \vec{p} \rangle = 0 \quad (\text{III. 10})$$

ce qui est bien le cas puisque dans l'approximation non relativiste :

$$\vec{k} \cdot \vec{p} = (p'^2 - p^2)/2M$$

2) L'interaction faible

Il n'est pas question d'étudier en détail l'interaction faible, il y a d'excellents livres sur le sujet⁸, simplement nous allons en rappeler les traits qui sont essentiels pour mettre la symétrie chirale en évidence. Lorsque les énergies mises en jeu sont petites devant la masse du boson intermédiaire ($M_W \sim 80 \text{ GeV}$) l'interaction faible est bien décrite par la théorie de Fermi qui suppose que l'interaction est de la forme (on considère seulement le secteur non étrange)

$$W = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x J_\mu^\dagger J^\mu \quad (\text{III. 11})$$

où J_μ est le courant faible porté par toutes les particules. W est analogue à l'interaction entre deux courants électromagnétiques dans l'approximation d'échange d'un photon où on aurait remplacé le propagateur du photon par celui d'un boson infiniment lourd. La forme (III.11) décrit une interaction à courant chargé comme la désintégration β ou la capture de muons.

La principale caractéristique de l'interaction faible est qu'elle viole la conservation de la parité. On en rend compte en écrivant le courant sous la forme :

$$J_\mu = V_\mu - A_\mu$$

où V_μ est un vecteur ($V'_\mu(-\vec{x},t) = V_\mu(\vec{x},t)$) et A_μ un pseudo-vecteur ($A'_\mu(-\vec{x},t) = -A_\mu(\vec{x},t)$). C'est la théorie dite $V-A$. Elle permet de décrire un très grand nombre de réactions qui peuvent être :

- purement leptoniques, exemple : $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
- purement hadroniques, exemple : $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$
- semi-leptoniques, exemple : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

Les réactions purement leptoniques ont permis d'établir la forme du courant correspondant ainsi que la valeur de la constante de couplage. Pour l'étude de la symétrie chirale ce sont les réactions semi-leptoniques qui sont importantes car elles ont permis d'étudier le courant faible hadronique (qui contient l'information sur la structure forte) au moyen d'une sonde considérée comme connue, le courant leptonique. Dans la suite ce dernier n'interviendra plus de sorte que J_μ désignera seulement le courant hadronique, même si cela n'est pas précisé.

Les règles de sélection de la désintégration β :

$$|\Delta T| \leq 1 \quad |\Delta T_3| = 1$$

montrent que le courant hadronique conservant l'étrangeté est un opérateur isovectoriel. Si on définit les opérateurs hermitiques J_1 et J_2 par :

$$J_1^\dagger = J_1 + i J_2 \quad J_2^\dagger = J_2 - i J_1 \quad (\text{III.12})$$

on peut compléter le triplet avec un troisième courant J_3 de façon à avoir :

$$[T_\alpha, J_\beta^\dagger] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma^\dagger \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \quad (\text{III.13})$$

comme il se doit pour un isovecteur si T_α est l'opérateur d'isospin total. Dans la théorie de Fermi seules les composantes (1,2) interviennent, mais il est commode de travailler avec les composantes cartésiennes ($\alpha = 1, 2, 3$) sans préciser α . Après ces préliminaires passons à l'étude du courant faible porté par le nucléon.

3) Le courant vectoriel et l'hypothèse isotriplet

L'élément de matrice du courant vectoriel est :

$$\langle \vec{p}' | V_0^* | \vec{p} \rangle = (2\pi)^{-3} \tilde{G}_V(k) \frac{E^*}{2}$$

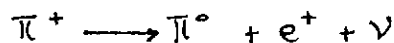
$$\langle \vec{p}' | \vec{V}^* | \vec{p} \rangle = (2\pi)^{-3} \left[\tilde{G}_V(k) \frac{\vec{p} + \vec{p}'}{2M} + i \tilde{G}_M(k) \frac{\vec{\sigma} \times \vec{k}}{2M} \right] \frac{E^*}{2} \quad (\text{III.14})$$

Les combinaisons $V^1 \pm iV^2$ donnent les opérateurs τ^+ et τ^- qui induisent les transitions β^+ et β^- . La constante $\tilde{G}_V(0)$ a été mesurée dans la désintégration de $^{14}\text{O}^9$ et on a trouvé $\tilde{G}_V(0) \sim 1$. (En fait $\tilde{G}_V(0) = 0.97$, mais la différence avec 1 provient de l'angle de Cabibbo¹⁰ que l'on peut inclure dans la constante G). Cette coïncidence entre $\tilde{G}_V(0)$ et $G_V(0)$ était a priori plutôt surprenante puisque $G_V(0)$ concerne l'interaction électromagnétique. L'interprétation de ce résultat est contenue dans l'hypothèse isotriplet : "Le courant électromagnétique isovectorel et le courant faible sont les trois composantes d'un triplet d'isospin. On passe d'une composante à l'autre par la relation (III.13)".

Insistons sur le fait que cette hypothèse est très forte car elle porte sur l'opérateur courant et non pas sur l'élément de matrice particulier qui l'a suggérée. Elle a donc des conséquences toutes les fois que le courant vectoriel est en jeu. En particulier elle impose :

$$\tilde{G}_M(0) = G_M(0) = 4.7$$

ce qui a été vérifié expérimentalement¹¹. Un autre exemple est la désintégration faible du π^+ :



dont le taux peut être calculé grâce à l'hypothèse isotriplet à partir du courant électromagnétique du pion. La théorie prédit 0.39 sec^{-1} à comparer à la valeur expérimentale¹¹ $0.38 \pm 0.04 \text{ sec}^{-1}$. Une fois que l'on a admis cette hypothèse il est normal de noter V_r^3 la partie isovectorelle du courant électromagnétique. Evidemment la conservation de ce dernier entraîne celle de ses partenaires, c'est-à-dire :

$$\partial^\mu V_r^\mu = 0 \quad (\text{II.15})$$

C'est pourquoi, de façon assez trompeuse, l'hypothèse isotriplet est aussi appelée hypothèse C.V.C. (Conserved Vector Current).

Comme le courant est conservé, on peut définir des charges $Q^*(t)$:

$$Q^*(t) = \int d\vec{x} V_0^*(\vec{x}, t) \quad (\text{III.16})$$

qui sont en fait indépendantes de t (il suffit d'appliquer le théorème de Green) et donc commutent avec le Hamiltonien des interactions fortes. On peut se demander ce que représentent ces opérateurs. Si on considère le cas particulier du nucléon, on a :

$$\langle \vec{p}' | Q^{\alpha} | \vec{p} \rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}') \frac{\tau^{\alpha}}{2} \quad (\text{III.17})$$

ce qui suggère que les charges Q^{α} ne sont rien d'autre que les composantes de l'opérateur d'isospin :

$$Q^{\alpha} \equiv T^{\alpha} \quad (\text{III.18})$$

On peut alors conclure que la conservation du courant vectoriel n'est rien d'autre qu'une conséquence de l'invariance des interactions fortes sous les transformations d'isospin. Cette identification de Q^{α} avec T^{α} fait partie de l'hypothèse de l'Algèbre des Courants. En effet la nature isovectorielle du courant (III.18) implique les relations de commutation de Gell-Mann¹² :

$$[Q^{\alpha}, V_{\mu}^{\beta}] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_{\mu}^{\gamma}$$

$$[Q^{\alpha}, A_{\mu}^{\beta}] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\mu}^{\gamma} \quad (\text{III.19})$$

4) Le courant axial, la relation de Goldberger-Treiman et l'hypothèse P.C.A.C.

Abordons à nouveau le problème en partant de l'élément de matrice pour le nucléon. Il s'écrit :

$$\langle \vec{p}' | A_0^{\alpha} | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 G_A(k) \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')}{2M} \frac{\tau^{\alpha}}{2}$$

$$\langle \vec{p}' | \vec{A}^{\alpha} | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 \left[G_A(k) \vec{\sigma} - G_P(k) \vec{k} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{2M} \right] \frac{\tau^{\alpha}}{2} \quad (\text{III.20})$$

La désintégration du neutron¹³ permet de déterminer $G_A(0) = 1.26$. Le terme en G_P , dit pseudo-scalaire, est pratiquement inaccessible en désintégration β car le transfert est trop petit. On peut par contre le mesurer dans la capture de muons par l'hydrogène :



et on trouve¹⁴ : $\frac{m_{\mu} G_P}{G_A} \approx 7.2$ au transfert $k = 0.94 m_{\mu}$, m_{μ} étant la masse du muon. ($m_{\mu} = 105.65 \text{ Mev}$)

Le fait que $G_A(0)$ soit voisin de 1 a suggéré qu'il y avait peut-être une conservation approchée du courant axial. En fait cet argument est faux car la conservation d'un courant n'implique en elle-même rien sur la valeur de facteurs de forme. Cependant l'idée n'était pas si mauvaise et c'est elle qui a permis de découvrir la symétrie chirale.

Quelles seraient les conséquences de la conservation du courant axial ? Pour le nucléon elle implique (à des termes en σ^2 près) :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \left[G_A(k) - G_P(k) \frac{k^2}{2M} \right] = 0 \quad (\text{III.21})$$

Le facteur de forme $G_P(k)$ doit donc avoir un pôle à $k = 0$, ce qui veut dire que le terme en $\vec{k} \cdot \vec{k}$ est associé à la propagation d'une particule de masse nulle. Comme elle doit être pseudo-scalaire et l'isospin 1, il est normal de penser au pion qui est de loin le plus léger des hadrons, $m_\pi \sim 140 \text{ Mev}$. Essayons de préciser cette idée. Supposons que le terme en $\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \vec{k}$ provient uniquement du nuage de pion virtuel qui entoure le nucléon et calculons le courant correspondant. Pour cela il faut déterminer le courant faible porté par le pion et le champ de pion virtuel créé par le nucléon.

Soit $\varphi^\alpha(\vec{x}, t)$ le champ de pion ($\alpha = 1, 2, 3$). La façon la plus simple de construire un courant axial à partir de φ^α est d'en prendre le gradient :

$$A_\mu^\alpha = \int d\pi \partial_\mu \varphi^\alpha \quad (\text{III.22})$$

ce qui définit la constante $\int d\pi$. A partir de la désintégration du pion chargé on détermine $\int d\pi = 93 \text{ Mev}$.

L'équation qui détermine le champ de pion virtuel doit être analogue à l'équation de Poisson pour le potentiel électrique, le nucléon jouant le rôle de source. Si on néglige le recul de celui-ci lors de l'émission du pion, la source est statique et φ^α aussi. On écrit donc l'équation sous la forme :

$$\nabla^2 \varphi^\alpha - m_\pi^2 \varphi^\alpha = j_\pi^\alpha(x) \quad (\text{III.23})$$

La source $j_\pi^\alpha(x)$ dépend de la position du nucléon, de son spin et de son isospin. Comme il faut construire un opérateur pseudoscalaire et d'isospin 1 on doit choisir :

$$j_\pi^\alpha(\vec{x}) = \frac{g_\pi}{2M} \vec{\nabla}_x \cdot \vec{\sigma} \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \tau^\alpha \quad (\text{III.24})$$

La constante de couplage g_π peut être déterminée, par exemple, à partir des déphasages élevés de la diffusion nucléon-nucléon, ce qui donne $g_\pi \sim 13.5$. La résolution de (III.23) est triviale par transformation de Fourier et on obtient :

$$\vec{A}^\alpha = -\vec{\nabla} \varphi^\alpha = -\frac{\int d\pi g_\pi}{2M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{q^2 + m_\pi^2} \tau^\alpha \quad (\text{III.25})$$

dont l'élément de matrice entre états de nucléon vaut :

$$\langle \vec{p}' | \vec{A}^\alpha | \vec{p} \rangle = -\frac{\int d\pi g_\pi}{2M} (2\pi)^{-3} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p^2 + m_\pi^2} \tau^\alpha \quad (\text{III.26})$$

En comparant avec (III.20) on voit que ce calcul conduit à :

$$G_P(k) = \frac{2 \int_0^1 g_N}{k^2 + m_\pi^2}$$

de sorte que la conservation du courant axial demande :

$$0 = G_A - k^2 \frac{G_P}{2M} = G_A - \frac{\int_0^1 g_N}{M} \frac{k^2}{k^2 + m_\pi^2} \quad (\text{III.27})$$

Comme dans le calcul de Ψ^4 nous avons considéré le nucléon comme ponctuel il n'y a pas lieu de tenir compte de la dépendance en k de G_A . Si on réécrit l'équation (III.27) sous la forme :

$$k^2 \left(1 - \frac{\int_0^1 g_N}{M G_A} \right) = - m_\pi^2 \quad (\text{III.28})$$

on réalise que la conservation du courant axial implique :

a) $m_\pi^2 = 0$

b) $\int_0^1 g_N = M G_A \quad (\text{III.29})$

Si on prend la masse du nucléon comme échelle de masse typique des hadrons on a $\frac{m_\pi^2}{M^2} \sim 0.02$, ce qui est raisonnable (mais très qualitatif). Le point b) est la relation de Goldberger-Treiman. En mettant les valeurs physiques des constantes on trouve :

$$1 - \frac{\int_0^1 g_N}{M G_A} = - 0.07$$

Comme sous-produit du calcul on a aussi une détermination de G_P :

$$G_P(k) = \frac{2M G_A}{k^2 + m_\pi^2}$$

au transfert de la capture de muons dans l'hydrogène, ceci donne :

$$\frac{m_p G_P(k)}{G_A} = 6.8$$

Ainsi l'hypothèse de conservation du courant axial a une conséquence inattendue, mais plutôt bien vérifiée expérimentalement : elle impose que la masse du pion soit négligeable et en même temps relie la constante de couplage forte g_N à $\int_0^1 g_N$ et G_A qui sont des constantes de couplage faibles ! (Par contre elle ne dit rien sur la valeur de G_A !) Cette relation curieuse entre l'interaction pion-nucléon et l'interaction faible est la source des théorèmes de basse énergie, la relation de G.T. étant le plus simple. Comme pour le courant vectoriel les considérations précédentes ne concernent que les éléments de matrice du nucléon et la généralisation à l'opérateur courant axial est une hypothèse non triviale. C'est l'hypothèse

P.C.A.C. (Partially Conserved Axial Current) : "Le courant axial est conservé dans la limite où la masse du pion tend vers zéro". En fait, d'après l'équation (III.28) on doit avoir :

$$\partial_\mu A^{\mu\alpha} \sim m_\pi^2$$

5) L'algèbre des courants et la symétrie chirale

Si on construit la charge axiale :

$$\bar{Q}^\alpha(t) = \int d\vec{x} A_\alpha^\alpha(\vec{x}, t)$$

on sait que cet opérateur devient indépendant du temps lorsque la masse du pion tend vers zéro, et donc commute avec le Hamiltonien. L'opérateur $\bar{Q}^\alpha(t)$ génère donc des transformations du système qui laissent les équations du mouvement inchangées. Ce sont les transformations d'isospin axiales. La symétrie chirale des interactions fortes est l'invariance du Hamiltonien sous l'ensemble des transformations engendrées par Q^α et \bar{Q}^α . Cet ensemble de transformations a une structure algébrique qui est spécifiée par l'hypothèse d'algèbre des courants. On se souvient que l'identification de Q^α avec l'opérateur d'isospin conduit aux relations de commutation :

$$[Q^\alpha, V_r^\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_r^\gamma$$

$$[Q^\alpha, A_r^\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_r^\gamma$$

On les complète avec les relations suivantes :

$$[\bar{Q}^\alpha, V_r^\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_r^\gamma$$

$$[\bar{Q}^\alpha, A_r^\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_r^\gamma \tag{III.30}$$

Lorsque $m_\pi \neq 0$ les charges axiales ne sont pas constantes. Il faut alors préciser que ces relations de commutations sont à temps égal pour les deux opérateurs impliqués dans l'opération. Si on fait $\mu = 0$ et que l'on intègre sur \vec{x} les relations (III.19) et (III.30), on obtient immédiatement :

$$[Q^\alpha, Q^\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma$$

$$[Q^\alpha, \bar{Q}^\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{Q}^\gamma$$

$$[\bar{Q}^\alpha, \bar{Q}^\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma \tag{III.31}$$

qui sont les relations de commutation de $SU(2) \times SU(2)$ comme on peut s'en persuader en définissant les charges droites et gauches :

$$Q_R^\alpha = Q^\alpha + \bar{Q}^\alpha \quad Q_L^\alpha = Q^\alpha - \bar{Q}^\alpha \tag{III.32}$$

On trouve bien deux algèbres SU(2) indépendantes :

$$\begin{aligned} [Q_R^{\alpha}, Q_R^{\beta}] &= i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_R^{\gamma} \\ [Q_L^{\alpha}, Q_L^{\beta}] &= i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_L^{\gamma} \\ [Q_R^{\alpha}, Q_L^{\beta}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

6) Le pion comme mode de Goldstone

Lorsque l'on a une symétrie une question naturelle est de chercher les "bons nombres quantiques" correspondants. Pour les transformations vectorielles c'est l'isospin, mais pour les transformations axiales ? La réponse est qu'il n'y en pas au sens habituel d'un opérateur qui peut être diagonalisé dans la même base que le Hamiltonien. Ce sont les théorèmes de basse énergie qui remplacent les "bons nombres quantiques". Leur origine est dans la façon dont la nature a réalisé la symétrie chirale : on a vu que la conservation du courant axial peut se comprendre dans la mesure où le pion est couplé au nucléon et s'il a une masse négligeable. On peut aller plus loin et dire que le pion a une masse négligeable et est couplé au nucléon uniquement pour que la symétrie chirale ne soit pas violée. Mais violée par quoi ? Pour le comprendre il est plus commode d'utiliser un formalisme covariant dans lequel le courant axial du nucléon s'écrit (avec la normalisation III.2) :

$$\langle \vec{p}' | A_{\nu}^{\alpha} | \vec{p} \rangle = (2\pi)^{-3} \sqrt{\frac{M^2}{p^{\nu} p'^{\nu}}} \bar{U}(\vec{p}') \left[G_A(k^1) \gamma_{\nu} \gamma_5 + G_P(k^1) \frac{k_{\nu}^1}{k^1} \gamma_5 \right] \frac{\tau^{\alpha}}{2} U(\vec{p}) \quad (\text{III.34})$$

où cette fois $k^2 = k^{\nu} k_{\nu}$. On peut vérifier facilement qu'en développant (III.34) à l'ordre \vec{p}/M on retrouve bien les équations (III.20).

En utilisant l'équation de Dirac⁵ :

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot p - M) U(p) &= 0 \\ \bar{U} (\gamma \cdot p - M) &= 0 \end{aligned}$$

on voit que la conservation du courant axial impose :

$$0 = 2M G_A(k^1) + k^2 G_P(k^1)$$

Il y a donc une autre possibilité de conservation : $M=0$ et $G_P(k^1)=0$. Si la masse du nucléon était nulle, on n'aurait pas besoin du pion pour conserver le courant axial. Dans ce cas on aurait la réalisation habituelle, dite "à la Wigner", d'une symétrie, c'est-à-dire que "l'isospin axial" serait un bon nombre quantique. La dynamique de QCD est telle que dans les conditions normales de pression et de température le nucléon a une masse (les quarks sont confinés) et que celle-ci viole la symétrie chirale. Il faut alors une nouvelle particule de masse nulle pour restaurer la symétrie. Ce mode de réalisation d'une symétrie est dit "à la

Goldstone" par opposition à la réalisation "à la Wigner". On peut rendre cette discussion plus précise (au moins formellement) en utilisant le théorème de Goldstone¹⁵. Supposons qu'on ait une symétrie continue et soit G^i ($i=1, \dots, N$) les opérateurs qui engendrent les transformations. Soit $| \rangle$ l'état fondamental (ou vide) du système. On a deux cas possibles :

a) $G^i | \rangle = 0 \quad \forall i$

alors on a la réalisation à la Wigner.

b) $G^i | \rangle \neq 0$ pour au moins une valeur de i (On dit que G^i est brisé par le vide). C'est la réalisation à la Goldstone et à chaque G^i correspond une particule, dite mode de Goldstone, de masse nulle. La symétrie chirale est réalisée dans ce mode car $\bar{Q}^i | \rangle \neq 0$ et les pions sont les modes de Goldstone correspondants.

Remarque : On dit aussi que la symétrie est spontanément brisée par l'état fondamental, mais le terme est trompeur puisque les équations du mouvement restent symétriques. Simplement la symétrie n'est pas manifeste dans le spectre d'énergie.

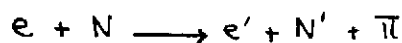
7) Exemple de théorème de basse énergie : l'électroproduction de pion au seuil

Les théorèmes de basse énergie sont les conséquences de la symétrie chirale, c'est-à-dire :

- La conservation des courants vectoriels et du courant axial quand $m_\pi \rightarrow 0$
- La réalisation dans le mode de Goldstone.
- L'algèbre des courants.

La dérivation de ces théorèmes est souvent un art subtil et il n'est pas évident de les démontrer en utilisant des méthodes élémentaires. C'est d'ailleurs ce qui a motivé la construction de Lagrangiens effectifs qui produisent automatiquement les théorèmes par un calcul en approximation de Born. Cependant il est souhaitable de comprendre le mécanisme qui permet d'exploiter la symétrie chirale, ne serait-ce que pour réaliser que les résultats obtenus sont vraiment exacts dans la limite où $m_\pi = 0$. L'électroproduction de pions au seuil est un exemple intéressant car on n'a pas besoin de méthodes élaborées pour calculer l'amplitude à partir des hypothèses de la symétrie chirale. Pour les applications plus compliquées (c'est-à-dire impliquant plus d'un pion) le lecteur trouvera les développements dans la Référence 2.

La réaction d'électroproduction de pions :



est contrôlée du côté hadronique par l'élément de matrice du courant électromagnétique :

$$\langle \pi N | V_\mu^{em}(\vec{x}, t) | N \rangle$$

et c'est cet objet que nous allons calculer dans le cas où le pion est émis avec une impulsion nulle. (Ce qui ne veut pas dire que l'impulsion du photon virtuel est nulle : Elle peut être arbitraire) Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le centre de masse du système pion-nucléon. Il faut donc calculer

$$\langle \pi^*(\vec{0}) N(\vec{0}) | V_p^{em}(\vec{x}, t) | N(\vec{p}') \rangle$$

où $\vec{p}' = -$ (impulsion du photon virtuel). Comme d'habitude les indices de spin et d'isospin du nucléon seront sous-entendus.

Par la conservation du courant on peut éliminer la composante de temps V_0^{em} et se contenter de calculer :

$$T = \langle \pi^*(\vec{0}) N(\vec{0}) | \vec{V}^{em}(\vec{x}, t) | N(\vec{p}') \rangle \quad (\text{III.35})$$

Pour cela considérons les éléments de matrice entre états de nucléon :

$$C = \langle N(\vec{0}) | [\bar{Q}^*(t), \vec{V}^{em}(\vec{x}, t)] | N(\vec{p}') \rangle \quad (\text{II.36})$$

$$C' = \langle N(\vec{0}) | [\dot{\bar{Q}}^*(t), \vec{V}^{em}(\vec{x}, t)] | N(\vec{p}') \rangle \quad (\text{III.37})$$

Pour l'instant on garde $m_\pi \neq 0$. C'est pourquoi \bar{Q}^* dépend de t . La limite $m_\pi \rightarrow 0$ doit être effectuée à la fin du calcul seulement. (Dans ce qui suit on fait $\vec{x}, t = 0$ puisqu'on connaît la dépendance de T sur ces variables en fonction des énergies et impulsion des états $|N(\vec{p}') \rangle$ et $|\pi^*(\vec{0}) N(\vec{0}) \rangle$).

Le principe du calcul est de développer C en insérant des états intermédiaires de la façon suivante (t.c. désigne le second terme du commutateur) :

$$\begin{aligned} C &= \int d\vec{q} (\langle N(\vec{0}) | \bar{Q}^* | N(\vec{q}) \rangle \langle N(\vec{q}) | \vec{V}^{em} | N(\vec{p}') \rangle - \text{t.c.}) \\ &+ \int d\vec{q}' d\vec{q}'' (\langle N(\vec{0}) | N(\vec{q}') \rangle \langle \bar{Q}^* | \pi^*(\vec{q}') \rangle \langle \pi^*(\vec{q}') N(\vec{q}'') | \vec{V}^{em} | N(\vec{p}') \rangle - \text{t.c.}) \\ &+ \sum_x (\langle N(\vec{0}) | \bar{Q}^* | x \rangle \langle x | \vec{V}^{em} | N(\vec{p}') \rangle - \text{t.c.}) \\ &= C(\text{nucléon}) + C(\text{pion}) + C(x) \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Le terme $C(\text{pion})$ est dit "déconnecté" car le pion est créé directement par la charge axiale à partir du vide $| \rangle$ (la réalisation dans le mode de Goldstone est donc essentielle). Pour $C(\text{nucléon})$ et $C(x)$ l'intégration sur les impulsions intermédiaires est triviale puisque :

$$\langle \vec{P}_f | \bar{Q} | \vec{P}_i \rangle \sim \delta(\vec{P}_f - \vec{P}_i)$$

$$\langle N(\vec{q}') | N(\vec{q}) \rangle = \delta(\vec{q}' - \vec{q}) \quad (\text{III.39})$$

Le terme $C(x)$ rassemble tous les autres états intermédiaires du type $\bar{K}N, 2\pi N$, etc..., pour lesquels il reste au moins une intégration sur les impulsions intermédiaires après la prise en compte du (III.39). On dit que $C(x)$ est le terme connecté.

On fait la même chose pour C'

$$C' = C'(\text{nucleon}) + C'(\text{pion}) + C'(x)$$

Le terme de nucléon est nul car, d'après (III.20), on a

$$\langle \vec{p}' | \bar{Q}(t) | \vec{p} \rangle = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) G_A(0) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M} \frac{\tau^a}{2} \quad (\text{III.40})$$

qui est indépendant du temps. Le terme de pion donne :

$$C'(\text{pion}) = -i \int d\vec{q} d\vec{q}' \langle N(\vec{q}) | N(\vec{q}') \rangle \omega(\vec{q}') \langle | \bar{Q}^a | \pi^b(\vec{q}') \rangle \langle \pi^b(\vec{q}') | N(\vec{q}) \rangle | \vec{V}^{ca} | N(\vec{q}) \rangle + t.c.$$

car on a $(\omega(\vec{q}) = \sqrt{\vec{q}^2 + m_\pi^2})$

$$\langle | \bar{Q}^a | \pi^b(\vec{q}') \rangle = -i \omega(\vec{q}') \langle | \bar{Q}^a | \pi^b(\vec{q}') \rangle$$

$$\langle \pi^b(\vec{q}') | \bar{Q}^a | \rangle = i \omega(\vec{q}') \langle \pi^b(\vec{q}') | \bar{Q}^a | \rangle \quad (\text{III.41})$$

d'où le changement de signe relatif pour le terme croisé. Finalement on écrit le terme connecté $C'(x)$ comme $C(x)$ en remplaçant \bar{Q}^a par \bar{Q}^a .

L'élément de matrice de la charge axiale entre le vide et l'état à un pion est (avec la normalisation adoptée dans ce cours) :

$$\langle \pi^b(\vec{q}') | \bar{Q}^a | \rangle = \frac{i}{2} \int_{\pi} \sqrt{2m_\pi(2\pi)^3} \delta(\vec{q}') \delta_{(a,b)} \quad (\text{III.42})$$

(Le plus simple pour s'en convaincre est de partir de (III.22) et de développer le champ en opérateurs de création et d'annihilation⁵).

Si on reporte maintenant (III.39, III.40, III.42) dans les expressions pour C et C' on voit qu'on peut en déduire l'élément de matrice qui nous intéresse. On trouve :

$$T = \frac{i}{g_{\pi}} [2m_{\pi}(2\pi)^3]^{-1/2} \left\{ C + \langle N(\vec{0}) | \vec{V}^{em} | N(\vec{p}) \rangle G_A(\vec{0}) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M} \frac{\tau^x}{2} + \frac{i}{m_{\pi}} C' - C(x) - \frac{i}{m_{\pi}} C'(x) \right\} \quad (\text{III.43})$$

Il faut bien noter que cette expression est exacte. Pour l'instant nous n'avons fait qu'écrire les commutateurs d'une façon particulière. (Au passage on voit que l'on aurait des ennuis si on faisait $m_{\pi} = 0$ dès le départ) Maintenant laissons tendre m_{π} vers zéro et cherchons les termes dominants :

- Le terme C est donné par l'algèbre des courants (voir plus loin), il n'est pas nul dans la limite $m_{\pi} \rightarrow 0$. De même pour le terme de nucléon.

- C' et $C(x)$ contiennent \vec{Q}^x qui s'annule comme m_{π}^2 , donc ces termes s'annulent par rapport aux deux premiers.

- Par construction $C(x)$ contient des éléments de matrice du type

$$\langle N(\vec{0}) | \vec{Q}^x | X \rangle \quad \text{ou} \quad \langle X | \vec{Q}^x | N(\vec{p}) \rangle$$

tels que l'énergie de X est différente de celle de $N(\vec{0})$ ou $N(\vec{p})$ car on a déjà extrait les termes pour lesquels la différence d'énergie est nulle. Lorsque m_{π} tend vers zéro la charge axiale devient indépendante du temps. Par conséquent elle ne peut relier des états d'énergies différentes et donc le terme $C(x)$ est nul dans cette limite.

Dans la limite chirale T s'exprime donc en fonction du commutateur et du terme de nucléon qui sont connus. En effet en écrivant :

$$\vec{V}^{em} = \vec{V}^3 + \vec{V}(\text{isoscalaire})$$

on obtient, à partir de (III.30) :

$$C = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle N(\vec{0}) | \vec{A}^x | N(\vec{p}) \rangle \quad (\text{III.44})$$

(car $[\vec{Q}^x, \vec{V}(\text{isoscalaire})] = 0$, ce qui est en général sous-entendu dans l'hypothèse d'algèbre des courants).

Il suffit alors d'utiliser les équations (III.9) et (III.20) pour obtenir l'amplitude d'électroproduction au seuil dans la limite chirale :

$$\begin{aligned} \langle N(\vec{0}) | \pi^x(\vec{0}) | \vec{V}^{em} | N(\vec{p}) \rangle &= \frac{i}{g_{\pi}} (2\pi)^3 [2m_{\pi}(2\pi)^3]^{1/2} \times \\ &\left\{ i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left[G_A(p) \vec{\sigma} - G_P(p) \frac{\vec{p} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2M} \right] \frac{\tau^x}{2} + \left[G_E(p) \frac{\vec{p}}{2M} - i G_M(p) \frac{\vec{\sigma} \times \vec{p}}{2M} \right] \frac{1}{2} \right. \\ &\left. + \left[\left(G'_E(p) \frac{\vec{p}}{2M} - i G'_M(p) \frac{\vec{\sigma} \times \vec{p}}{2M} \right) \frac{1}{2} + \left(G_E(p) \frac{\vec{p}}{2M} - i G_M(p) \frac{\vec{\sigma} \times \vec{p}}{2M} \right) \frac{\tau^3}{2} \right] G_A \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2M} \frac{\tau^x}{2} \right\} \quad (\text{III.45}) \end{aligned}$$

On peut figoler un peu le calcul en effectuant les produits de matrice $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$, etc..., mais cela n'a pas d'intérêt dans le cadre de ce cours. L'important est d'avoir démonté le mécanisme qui permet d'obtenir les théorèmes de basse énergie. Remarquons que l'amplitude T contient un facteur $1/g_\pi$ qui provient du terme $C(\pi\pi)$. De façon générale il y aura un facteur $1/g_\pi$ pour chaque pion mou (c'est-à-dire d'impulsion nulle et de masse tendant vers zéro). Ne pas oublier que l'expression (III.45) a été obtenue avec des expressions non relativistes. Si on s'intéresse à de grandes valeurs de \vec{p} il faut évidemment refaire le calcul de façon relativiste, ce qui ne pose aucun problème¹⁶.

IV. MODELES LAGRANGIENS

1) Motivation

On a vu dans le chapitre précédent comment obtenir un théorème de basse énergie en partant des hypothèses de la symétrie chirale. Il existe de nombreuses variantes de cette démonstration et le lien entre elles n'est pas toujours évident. Celle qui a été présentée a l'avantage de ne pas faire appel à d'autres notions que celles de la mécanique quantique ordinaire. La façon dont apparaît l'amplitude recherchée lors de la saturation des commutateurs montre que lorsque le nombre de pions mous va augmenter, la dérivation va devenir de plus en plus complexe. C'est pourquoi Weinberg¹⁷ a proposé d'utiliser des modèles Lagrangiens qui possèdent la symétrie chirale et dans l'approximation en arbre (essentiellement l'approximation de Born) reproduisent automatiquement les théorèmes de basse énergie. Ces modèles Lagrangiens, considérés au départ comme un simple raccourci sont revenus en force au cours des dix dernières années avec un statut plus noble. D'une part, dans les modèles de quarks ils sont utilisés pour habiller le nucléon de son nuage de pion et en général les prédictions théoriques en sont améliorées¹⁸. En particulier, il est possible d'obtenir une description très séduisante de la diffusion $\pi\text{-N}$ dans la voie P_{33} qui est évidemment de première importance en Physique nucléaire. D'autre part, ces Lagrangiens sont aussi la base des modèles de type Skyrme¹⁹ qui sont à l'heure actuelle très populaires. Il est donc important de savoir comment on bâtit un modèle qui a la symétrie chirale. Le principe de la construction est le suivant : on part d'un modèle décrivant un fermion (nucléon ou quark) libre qui a deux degrés de liberté d'isospin. Tant que la masse du fermion est nulle, la symétrie chirale n'est pas violée. Pour introduire la masse (ou le potentiel confinant si on parle des quarks) on ajoute un terme d'interaction, invariant chirale qui dépend d'un champ de mésons (σ, π^a) . On élimine le champ σ qui n'a pas d'interprétation physique en imposant une contrainte invariante et après un changement de variable on se retrouve avec le Lagrangien d'un fermion massif couplé au pion d'une manière bien déterminée.

2) Préliminaires

Soit Ψ le champ de fermions. Les transformations chirales sont définies (de façon infinitésimales) par :

$$\Psi \longrightarrow \Psi + i \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\tau}}{2} \Psi \quad (\text{IV.1})$$

$$\Psi \longrightarrow \Psi - i \frac{\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\tau}}{2} \gamma^5 \Psi \quad (\text{IV.2})$$

Le signe (-) est conventionnel et $(\vec{\epsilon}, \vec{\epsilon}')$ sont les paramètres de la transformation (notés $\vec{\alpha}$ et β dans le Chapitre I !). L'équation de Dirac pour un fermion de masse m est (on suppose que m est la même pour les deux saveurs) :

$$i \gamma \cdot \partial \Psi - m \Psi = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Elle dérive du Lagrangien :

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \gamma \cdot \partial \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \quad (\text{IV.4})$$

Par le théorème de Noether⁵ on construit les courants vectoriels et axiaux induits par les transformations (IV.1) et (IV.2). Si on écrit le courant total sous la forme :

$$J_r^\alpha = V_r^\alpha - A_r^\alpha \quad (\text{IV.5})$$

on trouve :

$$V_r^\alpha = \bar{\Psi} \gamma_r \frac{\tau^\alpha}{2} \Psi, \quad A_r^\alpha = \bar{\Psi} \gamma_r \gamma_5 \frac{\tau^\alpha}{2} \Psi \quad (\text{IV.6})$$

En utilisant l'équation du mouvement il est facile de calculer les divergences de ces courants :

$$\partial^\nu V_r^\alpha = 0, \quad \partial^\nu A_r^\alpha = 2i m \bar{\Psi} \gamma_5 \frac{\tau^\alpha}{2} \Psi \quad (\text{IV.7})$$

Donc, comme prévu, le courant axial n'est conservé que si $m = 0$. Si on construit les charges :

$$Q^\alpha = \int d\vec{x} \Psi^\dagger \frac{\tau^\alpha}{2} \Psi, \quad \bar{Q}^\alpha = \int d\vec{x} \Psi^\dagger \gamma_5 \frac{\tau^\alpha}{2} \Psi \quad (\text{IV.8})$$

en utilisant les relations d'anticommuation canonique :

$$\{\Psi_a(\vec{x}, t), \Psi_b(\vec{x}, t)\} = 0, \quad \{\Psi_a(\vec{x}, t), \Psi_b^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\text{IV.9})$$

où $\{, \}$ désigne l'anticommutateur et a, b désignent les degrés de liberté d'isospin et les indices de Dirac, on peut vérifier que l'algèbre des courants est satisfaite (même si $m \neq 0$). Par exemple :

$$[\bar{Q}^\alpha(t), \bar{\Psi} \gamma_r \gamma_5 \frac{\tau^\beta}{2} \Psi] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\Psi} \gamma_r \frac{\tau^\gamma}{2} \Psi \quad (\text{IV.10})$$

qui a bien la forme (II.30).

Nous voulons maintenant introduire une masse sans violer la symétrie. Pour cela nous allons d'abord construire quelques invariants chiraux.

3) Invariants

Dans la suite on note $\vec{\tau} = \tau^\alpha$ pour alléger les notations. Définissons les quantités

$$S = \bar{\Psi} \Psi, \quad \vec{P} = i \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \quad (\text{IV.11})$$

Dans une transformation chirale vectorielle (IV) ou axiale (TA) il est facile de vérifier que S et \vec{P} subissent les variations suivantes (les produits scalaire et vectoriel sont dans les indices d'isospin) :

$$(TV) : S \rightarrow S, \quad \vec{P} \rightarrow \vec{P} - \vec{\epsilon} \times \vec{P} \quad (IV.12)$$

$$(TA) : S \rightarrow S - \vec{\epsilon}' \cdot \vec{P}, \quad \vec{P} \rightarrow \vec{P} + \vec{\epsilon}' S \quad (IV.13)$$

Définissons un ensemble de champs $(\sigma, \vec{\pi} = \pi^\alpha, \alpha=1,2,3)$ auxquels nous imposons de se transformer comme S et \vec{P} (donc σ est un scalaire et \vec{P} un pseudoscalaire) :

$$(TV) : \sigma \rightarrow \sigma, \quad \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} - \vec{\epsilon} \times \vec{\pi} \quad (IV.14)$$

$$(TA) : \sigma \rightarrow \sigma - \vec{\epsilon}' \cdot \vec{\pi}, \quad \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\epsilon}' \sigma \quad (IV.15)$$

Alors les quantités suivantes sont manifestement inchangées (au premier ordre en $\vec{\epsilon}, \vec{\epsilon}'$) dans une transformation chirale :

$$I_1 = \sigma^2 + \vec{\pi}^2 \quad (IV.16)$$

$$I_2 = \partial_\rho \sigma \partial^\rho \sigma + \partial_\rho \vec{\pi} \cdot \partial^\rho \vec{\pi} \quad (IV.17)$$

$$I_3 = \bar{\Psi} \Psi \sigma + i \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\epsilon} \Psi \cdot \vec{\pi} \quad (IV.18)$$

Nous pouvons ajouter n'importe lequel de ces invariants à \mathcal{L} sans briser la symétrie chirale. Par exemple le modèle de Nambu - Jona-Lasinio²⁰ s'obtient en ajoutant $-g I_3$ et en choisissant $\sigma = S, \vec{\pi} = \vec{P}$

Ce modèle est fascinant car la réalisation dans le mode de Goldstone apparaît de façon dynamique. Au-delà d'une constante de couplage critique g_c l'état fondamental n'est plus le vide trivial, mais un condensat de fermions-antifermions. Les excitations élémentaires sont alors des quasi-fermions de masse non nulle et l'interaction résiduelle entre ces quasi-particules produit un mode collectif d'énergie nulle, le pion. Pour comprendre comment marche le modèle le lecteur aura avantage à étudier les articles du groupe d'Orsay²¹ car ils ont utilisé un langage familier aux physiciens nucléaires.

4) Le modèle non linéaire²²

Le point de départ est le modèle linéaire dans lequel σ et $\vec{\pi}$ sont des variables indépendantes. Le Lagrangien doit être construit à partir des invariants (IV.16), (IV.17) et (IV.18) et la forme la plus simple est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \bar{\Psi} \gamma_5 \partial \Psi - g (\bar{\Psi} \Psi \sigma + i \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\epsilon} \Psi \cdot \vec{\pi}) \\ & + \frac{1}{2} \partial_\rho \sigma \partial^\rho \sigma + \frac{1}{2} \partial_\rho \vec{\pi} \cdot \partial^\rho \vec{\pi} - V(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \end{aligned} \quad (IV.19)$$

Les courants déduits de \mathcal{L} par le théorème de Noether sont :

$$\begin{aligned} \vec{V}_\rho &= \bar{\Psi} \gamma_\rho \frac{\vec{\epsilon}}{2} \Psi + \vec{\pi} \times \partial_\rho \vec{\pi} \\ \vec{A}_\rho &= \bar{\Psi} \gamma_\rho \gamma_5 \frac{\vec{\epsilon}}{2} \Psi + \sigma \partial_\rho \vec{\pi} - \vec{\pi} \partial_\rho \sigma \end{aligned} \quad (IV.20)$$

et comme \mathcal{L} est invariant, ils sont conservés : $\partial_\rho \vec{V}^\rho = \partial_\rho \vec{A}^\rho = 0$

comme on peut le vérifier directement à partir des équations du mouvement déduites de \mathcal{L} . De même si l'on quantifie les champs $(\sigma, \vec{\pi})$ de façon canonique on trouve que les relations de commutation de l'algèbre des courants sont bien satisfaites.

Le modèle défini par (IV.19) n'est pas satisfaisant car d'une part le fermion n'a pas de masse (ou plus exactement cette masse viendrait entièrement de la self-énergie créée par l'interaction et il dépend du champ σ qui n'a pas d'interprétation physique. En effet il n'existe pas de particule d'isospin 0 et de spin 0⁺ dans la région de masse du pion. On a donc intérêt à éliminer ce degré de liberté non physique dès le départ. Le principe est d'imaginer que le terme potentiel $V(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ possède un minimum en $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = C$ et que ce minimum soit suffisamment profond pour que l'on puisse négliger le mouvement au fond du trou. Ceci permet d'éliminer σ sans briser la symétrie chirale puisque $\sigma^2 + \vec{\pi}^2$ est un invariant. C'est ici que l'on force la symétrie à être réalisée dans le mode de Goldstone. Dans le modèle σ ce trait de la symétrie chirale est donc mis à la main contrairement au modèle NJL où il apparaît de façon dynamique.

Comme on pourra le vérifier dans la suite la constante C doit être égale à f_π^2 . Pour éliminer le champ σ on a intérêt à faire un changement de variable défini par :

$$\sigma = \int_{\pi} \cos(\Phi/f_\pi) \quad , \quad \vec{\pi} = \int_{\pi} \hat{\Phi} \sin(\Phi/f_\pi) \quad (IV.21)$$

avec comme nouvelle variable indépendante le champ $\vec{\Phi}$ qui sera notre champ de pion avec la notation :

$$\Phi = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2} \quad \hat{\Phi} = \vec{\Phi} / \Phi \quad (IV.22)$$

Insistons sur l'arbitraire du choix (IV.21). Si on remplaçait Φ par $g(\Phi)$ la contrainte $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2$ serait toujours satisfaite. Par exemple le choix original de Weinberg¹⁷ :

$$g(\Phi) = 2 \int_{\pi} \text{Arctg}(\Phi/f_\pi)$$

est aussi très souvent utilisé. Il correspond au changement de variable :

$$\sigma = \int_{\pi} (\Phi^2/4f_\pi^2 - 1) / (1 + \Phi^2/4f_\pi^2) \quad , \quad \vec{\pi} = \vec{\Phi} / (1 + \Phi^2/4f_\pi^2) \quad (IV.23)$$

J'ai choisi de travailler avec (IV.21) car c'est la définition qui a été utilisée dans les premiers modèles de sacs à symétrie chirale²³. Le lecteur pourra vérifier que l'on obtient les mêmes théorèmes de basse énergie en partant de (IV.23).

En fonction de $\vec{\Phi}$ le Lagrangien s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial^\mu \Psi - g \int_{\pi} \bar{\Psi} e^{i\gamma^5 \tau \cdot \vec{\Phi} / f_\pi} \Psi \\ & + \frac{f_\pi^2}{2} \left(\partial_\mu \cos(\Phi/f_\pi) \partial^\mu \cos(\Phi/f_\pi) + \partial_\mu \hat{\Phi} \sin(\Phi/f_\pi) \partial^\mu \hat{\Phi} \sin(\Phi/f_\pi) \right) \quad (IV.24) \end{aligned}$$

(Le terme $V(f_\pi^2)$ peut être ignoré puisqu'il est constant).

Maintenant si nous procédons à un nouveau changement de variable :

$$\Psi = e^{-i\gamma_5 \vec{c} \cdot \vec{\Phi} / 2f_\pi} \Psi_w \quad (\text{IV.25})$$

en posant :

$$g \int_\pi = M \quad (\text{IV.26})$$

nous obtenons le Lagrangien du modèle σ non linéaire :

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi}_w \gamma \cdot \mathcal{D} \Psi_w - M \bar{\Psi}_w \Psi_w + \frac{1}{2} \mathcal{D}_r \vec{\Phi} \mathcal{D}^r \vec{\Phi} + \frac{1}{2f_\pi} \bar{\Psi} \gamma^r \gamma^5 \vec{c} \cdot \Psi \mathcal{D}_r \vec{\Phi} \quad (\text{IV.27})$$

où on a défini les dérivées "covariantes" :

$$\mathcal{D}_r \vec{\Phi} = \hat{\Phi} \partial_r \Phi + f_\pi \sin(\Phi/f_\pi) \partial_r \hat{\Phi} \quad (\text{IV.28})$$

$$\mathcal{D}_r \Psi_w = \partial_r \Psi_w + \frac{i}{2f_\pi} \lg(\Phi/2f_\pi) \vec{c} \cdot \hat{\Phi} \times \mathcal{D}_r \vec{\Phi} \Psi_w \quad (\text{IV.29})$$

En fonction des champs Ψ_w et $\vec{\Phi}$ le Lagrangien a une forme plutôt compliquée, mais il a l'avantage d'autoriser une masse non nulle M pour Ψ_w tout en respectant la symétrie chirale. Evidemment la réalisation de celle-ci sur Ψ_w et $\vec{\Phi}$ est devenue non linéaire. Si les transformations vectorielles ont la même forme que (IV.1) et (IV.14) :

$$\Psi_w \longrightarrow \Psi_w + i \frac{\vec{\varepsilon} \cdot \vec{c}}{2} \Psi_w \quad (\text{IV.30})$$

$$\vec{\Phi} \longrightarrow \vec{\Phi} - \vec{\varepsilon} \times \vec{\Phi} \quad (\text{IV.31})$$

(heureusement d'ailleurs car il faut bien que Ψ_w et $\vec{\Phi}$ décrivent des particules d'isospin 1/2 et 1 !), par contre dans une transformation axiale on a :

$$\Psi_w \longrightarrow \Psi_w + \frac{i}{2} \lg(\Phi/2f_\pi) \vec{\varepsilon} \cdot \vec{c} \times \hat{\Phi} \Psi_w \quad (\text{IV.32})$$

$$\vec{\Phi} \longrightarrow \vec{\Phi} + \vec{\varepsilon} \cdot \frac{\vec{c}}{f_\pi} + \int_\pi (\vec{\varepsilon} \cdot \hat{\Phi}) \times \hat{\Phi} \left(1 - \frac{\Phi}{f_\pi} \omega \lg(\Phi/f_\pi)\right) \quad (\text{IV.33})$$

Notons à ce propos la loi de transformation des dérivées covariantes (transformations axiales) :

$$\mathcal{D}_r \Psi_w \longrightarrow \mathcal{D}_r \Psi_w + \frac{i}{2} \lg(\Phi/2f_\pi) \vec{\varepsilon} \cdot \vec{c} \times \hat{\Phi} \mathcal{D}_r \Psi_w \quad (\text{IV.34})$$

$$\mathcal{D}_r \vec{\Phi} \longrightarrow \mathcal{D}_r \vec{\Phi} + \lg(\Phi/2f_\pi) (\vec{\varepsilon} \cdot \hat{\Phi}) \times \mathcal{D}_r \vec{\Phi} \quad (\text{IV.35})$$

qui permet de vérifier facilement l'invariance de \mathcal{L} .

Finalement il nous reste à tenir compte du caractère approché de la symétrie chirale. Cela doit se manifester dans le Lagrangien par un terme $\mathcal{L}_{S.B.}$ qui s'annule avec m_π et qui n'est pas invariant. La symétrie chirale n'impose aucune contrainte à ce terme supplémentaire, donc le plus simple est le meilleur. On choisit :

$$\mathcal{L}_{S.B.} = - m_\pi^2 \vec{\Phi}^2 / 2 \quad (\text{IV.36})$$

de sorte que m_π correspond bien à la masse (nue) du pion. Pour le voir il suffit d'examiner l'équation du mouvement libre pour $\vec{\Phi}$ que l'on peut dériver de $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{S.B.}$.

Pour terminer la définition du modèle il reste à dériver les courants vectoriel et axial générés par les transformations (IV.32) et (IV.33). Après un calcul abominable on trouve :

$$\begin{aligned} \vec{V}_r = & \bar{\Psi}_w \gamma_r \left(\cos(\phi/f_\pi) \frac{\vec{\tau}}{2} + \sin^2(\phi/2f_\pi) \vec{\tau} \cdot \hat{\phi} \hat{\phi} - \gamma_5 \sin(\phi/f_\pi) \vec{\tau} \times \hat{\phi} / 2 \right) \Psi_w \\ & + f_\pi^2 (\phi/f_\pi) \vec{\Phi} \times \partial_r \vec{\Phi} \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_r = & \bar{\Psi}_w \gamma_r \gamma_5 \left(\cos(\phi/f_\pi) \frac{\vec{\tau}}{2} + \sin^2(\phi/2f_\pi) \vec{\tau} \cdot \hat{\phi} \hat{\phi} - \gamma_5 \sin(\phi/f_\pi) \vec{\tau} \times \hat{\phi} / 2 \right) \Psi_w \\ & + \frac{f_\pi^2}{2} \sin(2\phi/f_\pi) \partial_r \hat{\phi} + f_\pi \hat{\phi} \partial_r \phi \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

et en utilisant les équations du mouvement complètes pour Ψ_w et $\vec{\Phi}$ on peut vérifier que les courants vérifient :

$$\partial_r \vec{V}_r = 0 \quad ; \quad \partial_r \vec{A}_r = - m_\pi^2 \int_\pi \vec{\Phi} \quad (\text{IV.39})$$

La divergence du courant axial s'annule donc bien avec m_π^2 . Le fait qu'elle soit proportionnelle à $\vec{\Phi}$ vient uniquement du choix (IV.36) pour $\mathcal{L}_{S.B.}$ et n'a rien à voir avec l'hypothèse PCAC qui stipule seulement que $\partial_r \vec{A}_r$ s'annule avec m_π^2 .

V. APPLICATIONS

1) L'approximation en arbre

Cette approximation revient à calculer les amplitudes à partir de \mathcal{L} en ne retenant que les diagrammes sans boucles, c'est-à-dire qui ne contiennent pas d'intégrations sur les impulsions. Cette approximation a l'avantage de respecter la symétrie chirale et donc de reproduire automatiquement ses conséquences, c'est-à-dire les théorèmes de basse énergie². Dans la pratique cela revient à développer \mathcal{L} en puissances de ϕ/p_π et à calculer les amplitudes en perturbation en s'arrêtant à l'ordre significatif le plus bas en $1/p_\pi$. Par exemple pour la photo-production c'est l'ordre $1/p_\pi$ tandis que pour la diffusion $\bar{K}-N$ ou $\bar{K}-\bar{K}$ c'est l'ordre $1/p_\pi^2$. Avant de passer aux applications il convient de faire une mise en garde : les théorèmes de basse énergie sont en général des relations entre des amplitudes contenant un nombre différent de pions. L'exemple de l'électroproduction traité dans le Chapitre III l'illustre bien. Le résultat apparaît sous la forme :

$$\text{Amplitude} = \frac{1}{p_\pi} [\text{courant axial} + \dots] \quad (\text{V.1})$$

On obtiendra le même résultat avec le Lagrangien effectif, mais avec, dans le membre de droite de (V.1), le courant axial du modèle. En particulier les valeurs des constantes de couplage $G_A, G_M \dots$ ne sont en général pas les valeurs mesurées car la symétrie chirale ne dit rien sur elles. Cela dépend essentiellement de l'interprétation que l'on donne au modèle. Si on considère que Ψ_w décrit le nucléon, alors on a $G_A(\psi) = 1, G_M(\psi) = 1$. Par contre on peut aussi considérer que Ψ_w décrit les quarks en remplaçant le terme de masse par un potentiel confinant. Le nucléon a alors une structure et les constantes ne sont plus les mêmes. On trouve par exemple $G_A(\psi) = 1.09$. Intuitivement il est plus logique d'opter pour l'interprétation en quarks et bon nombre de modèles^{18,23} ont développé cette idée, avec un succès honorable. Cependant cette approche n'est pas admise par tout le monde, en particulier les partisans du Skyrminion qui attribuent toute la structure du nucléon à des configurations compliquées du champ de pion²⁵. La polémique étant loin d'être terminée, il est naturel qu'un cours ne prenne pas parti pour l'une ou l'autre tendance. De plus, l'exposé des modèles de quarks avec symétrie chirale nous emmènerait beaucoup plus loin que le but de ce cours. Donc, tout en gardant à l'esprit les limitations exposées ci-dessus, nous considérerons Ψ_w comme le champ des nucléons. (Avec un peu d'expérience, il est assez facile de repérer à quel endroit il faut introduire les constantes de couplage physiques à la place de celles du modèle).

2) Diffusion pion-nucléon au seuil

Le but est de retrouver la formule de Weinberg-Tomozawa²⁶ qui est un des grands classiques de la symétrie chirale. Pour cela nous avons besoin du Lagrangien développé à l'ordre $1/p_\pi^2$. (A partir de maintenant Ψ_w est noté Ψ)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{II} \quad (\text{V.2})$$

$$\mathcal{L}_0 = i \bar{\Psi} \gamma_0 \partial_t \Psi - M \bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{m_\pi^2}{2} \vec{\phi}^2 \quad (\text{V.3})$$

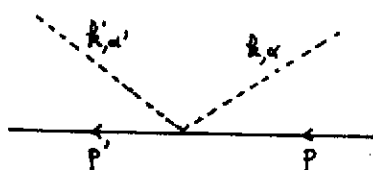
$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2f_\pi^2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \vec{e} \Psi \cdot \partial_\mu \vec{\Phi} \quad (\text{V.4})$$

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{4f_\pi^2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \vec{e} \Psi \cdot \vec{\Phi}_\mu \partial_\nu \vec{\Phi} + \frac{1}{6f_\pi^2} (\Phi^2 \partial_\mu \vec{\Phi} \partial^\mu \vec{\Phi} - \vec{\Phi} \cdot \partial_\mu \vec{\Phi} \vec{\Phi} \cdot \partial^\mu \vec{\Phi}) \quad (\text{V.5})$$

Le dernier terme dans \mathcal{L}_I donne la diffusion $\pi.\pi$, mais ne contribue pas à la diffusion $\pi.N$. dans l'approximation en arbre. On a donc deux termes d'interaction : \mathcal{L}_I qui ne contient qu'un seul champ de pion doit être itéré une fois pour contribuer à la diffusion tandis que \mathcal{L}_I contribue directement dans l'approximation de Born. En termes de graphes \mathcal{L}_I donne les termes de Born (sous la forme final \leftarrow initial)



tandis que \mathcal{L}_I donne le terme de "seagull" :



Si on écrit l'élément de matrice S pour la diffusion :

$$\pi^a(k) + N(p) \longrightarrow \pi^a(k') + N(p')$$

sous la forme habituelle :

$$\langle \pi^a(k') N(p') | S | \pi^a(k) N(p) \rangle =$$

$$\delta_{(a,a')} \delta^4(k-k') \delta^4(p-p') - (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T \quad (\text{V.6})$$

alors en posant :

$$N = (2\pi)^{-6} (M^2 / p^0 p'^0 2k^0 2k'^0)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{V.7})$$

le terme de Born donne la contribution suivante à \mathbb{T} : (Voir Réf. 5, Appendice B)

$$\mathbb{T}(\text{Born}) = \frac{N}{4p_{\pi}^2} \left[\bar{U}(p') \gamma^{\mu} (i k_{\mu}') \gamma^{\nu} \tau^{\alpha'} \frac{1}{\sigma(p+k) - M} \gamma^{\rho} (-i k_{\rho}) \gamma^{\sigma} \tau^{\alpha} U(p) \right. \\ \left. + \bar{U}(p') \gamma^{\mu} (-i k_{\mu}) \gamma^{\nu} \tau^{\alpha} \frac{1}{\sigma(p-k') - M} \gamma^{\rho} (-i k_{\rho}') \gamma^{\sigma} \tau^{\alpha'} U(p) \right] \quad (\text{V.8})$$

Si on définit les amplitudes symétrique \mathbb{T}^{+} et antisymétrique \mathbb{T}^{-} par :

$$\mathbb{T} = \delta_{\alpha'\alpha''} \mathbb{T}^{+} + i \varepsilon_{\alpha'\alpha''} \tau_{\alpha''} \mathbb{T}^{-} \quad (\text{V.9})$$

alors on obtient, au seuil :

$$\mathbb{T}^{+}(\text{Born}) = \frac{m_{\pi} N}{p_{\pi}^2} \frac{M m_{\pi}}{4M^2 - m_{\pi}^2} \quad (\text{V.10})$$

$$\mathbb{T}^{-}(\text{Born}) = - \frac{m_{\pi} N}{2p_{\pi}^2} \frac{m_{\pi}^2}{4M^2 - m_{\pi}^2} \quad (\text{V.11})$$

tandis que la contribution de α_{π}^{ν} donne simplement :

$$\mathbb{T}(\text{seag}) = \frac{N}{4p_{\pi}^2} \bar{U}(p') \gamma^{\mu} \varepsilon_{\alpha'\alpha''} \tau^{\alpha''} (-i k_{\mu}') (-i k_{\mu}) U(p)$$

et donc au seuil :

$$\mathbb{T}^{+}(\text{seag}) = 0 \quad (\text{V.12})$$

$$\mathbb{T}^{-}(\text{seag}) = - \frac{m_{\pi} N}{2p_{\pi}^2} \quad (\text{V.13})$$

On voit en comparant (V.10), (V.11) et (V.13) que le terme dominant lorsque $m_{\pi} \rightarrow 0$ est $\mathbb{T}^{-}(\text{seag})$. Les termes de Born s'annulent par rapport à ce dernier. Ceci est évidemment dû au couplage pseudo-vectorel qui lui-même est imposé par la symétrie chirale. Le fait que $\mathbb{T}^{+}/\mathbb{T}^{-}$ tende vers zéro dans la limite chirale est connu sous le nom de relation de consistance d'Adler²⁷ et provient directement de la conservation du courant axial. C'est une contrainte que doit respecter n'importe quel calcul consistant avec la symétrie chirale. Par exemple si on utilisait un couplage pseudo-scalaire pour calculer les termes de Born la relation de consistance d'Adler ne serait pas satisfaite. Ceci se comprend très facilement si on retourne au point de départ du modèle, éq. (IV.19) : le couplage pseudo-scalaire est accompagné d'un couplage au champ \mathbb{G} qui est indispensable pour maintenir la symétrie (voir éq. (IV.18)) et la

contribution de ce couplage vient exactement compenser celle des termes de Born P.S., lorsque m_π tend vers zéro.

3) Longueurs de diffusion. Formule de Tomozawa-Weinberg

Si on définit les variables du centre de masse (dans l'approximation non relativiste) :

$$\vec{P} = \vec{p} + \vec{k} \quad \vec{q} = \frac{M}{M+m_\pi} \vec{k} - \frac{m_\pi}{M+m_\pi} \vec{p}$$

$$E = \frac{p^2}{2(M+m_\pi)} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m_\pi}$$

la matrice S (éq. (V.6)) s'écrit :

$$\langle S \rangle = \delta(\vec{P} - \vec{P}') \frac{\delta(q - q')}{q^t} \left(\delta(\hat{q} - \hat{q}') - i(2\pi)^4 \mu q \Gamma \right)$$

Le développement en onde partielle de l'expression entre parenthèse définit les déphasages. Dans l'onde $\ell = 0$ on a simplement :

$$\frac{1}{4\pi} e^{2i\delta^t} = \frac{1}{4\pi} - i(2\pi)^4 \mu q \frac{1}{4\pi} \int d\hat{q} \Gamma^t \quad (\text{V.14})$$

où t distingue les deux états d'isospin possibles

On en déduit les longueurs de diffusion :

$$a^t = -(2\pi)^5 \mu \Gamma^t(\vec{q}=0) \quad (\text{V.15})$$

On définit les longueurs de diffusion symétrique et antisymétrique :

$$a^\pm = -(2\pi)^5 \mu \Gamma^\pm(\vec{q}=0) \quad (\text{V.16})$$

La relation entre a^\pm et a^t est :

$$3a^+ = a' + 2a^s \quad 3a^- = a' - a^s \quad (\text{V.17})$$

et en combinant (V.10) ... (V.13) et (V.16) on obtient, en définissant la longueur L :

$$L = \frac{m_\pi}{8\pi \int_0^2} = 0.09 m_\pi^{-1} \quad (\text{V.18})$$

$$a^- = L \frac{1}{1 + m_\pi/M} \left(1 + \frac{m_\pi^2}{4M^2 - m_\pi^2} \right) \sim \frac{L}{1 + m_\pi/M} \quad (\text{V.19})$$

$$a^+ = -L \frac{1}{1 + m_\pi/M} \frac{2M m_\pi}{4M^2 - m_\pi^2} \sim - \frac{L}{1 + m_\pi/M} \frac{m_\pi}{2M} \quad (\text{V.20})$$

L'équation (V.19) est la formule de Weinberg-Tomozawa. Expérimentalement on a²⁸ :

$$a^- = 0.102 \pm 0.0071 m_\pi^{-1} \quad a^+/a^- = -0.01 \pm 0.03$$

ce qui montre qu'expérimentalement la relation de consistance d'Adler est bien vérifiée. A partir des équations (V.18), (V.19) on obtient :

$$a^- = 0.08 m_\pi^{-1} \quad a^+/a^- = -0.07$$

Insistons sur le fait que seuls les termes dominants lorsque m_π tend vers zéro sont réellement fixés par la symétrie chirale. Les corrections dépendent explicitement du modèle choisi. Par exemple dans un modèle à base de quarks, la contribution des états excités donnerait des corrections en $m_\pi/(M^2 - M)$ alors que dans le modèle à base de nucléons elles sont toujours de la forme m_π/M . Le fait qu'expérimentalement a^+/a^- soit très proche de zéro indique que la limite chirale est meilleure que ne le suggère l'estimation (V.20). En fait il est plausible que d'autres corrections, non prédites par ce modèle particulier, viennent compenser en grande partie l'équation (V.20). Dans ce problème la symétrie chirale ne nous dit rien et c'est la dynamique propre au modèle qui entre en jeu.

4) Commentaires

Il y a de nombreuses applications du Lagrangien effectif (IV.27) et des courants qui lui sont associés (IV.37,38). Le développement du paragraphe précédent devrait convaincre le lecteur qu'il ne s'agit finalement que d'appliquer la théorie des perturbations après avoir fait le développement en Φ/ρ_π . Un exercice particulièrement intéressant pour la physique nucléaire est de calculer les amplitudes de production d'un pion par un courant axial ou vectoriel puisque cela permet de construire les courants d'échange dans les noyaux. Il me semble superflu de traiter ce problème en détail car il est très semblable à celui de la diffusion $\bar{K}-N$. Cependant il est bon de faire quelques commentaires pour guider le lecteur désireux de faire le calcul.

Comme il y a un pion en jeu il faut développer le Lagrangien et les courants à l'ordre $1/\rho_\pi$. Dans le calcul de l'amplitude on aura des graphes de "seagull" provenant des termes du genre :

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \vec{z} \Psi \times \vec{\Phi} \quad , \quad \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \vec{z} \Psi \times \vec{\Phi}$$

et des graphes dits de "pôle de pion" parce que le courant est attaché au pion en vol. L'ensemble constitue le terme dit de pion mou et c'est le terme de seagull qui domine. Il y a aussi les termes de Born où le courant est attaché au nucléon, celui-ci émettant un pion par l'interaction :

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \vec{e} \Psi \cdot \partial_\mu \vec{\Phi}$$

Dans la limite des pions mous ces termes sont négligeables, comme dans la diffusion $\pi-N$. Lorsqu'on s'intéresse aux courants d'échange on peut les inclure puisque le pion échangé a une impulsion non nulle, mais ce sont des corrections. Bien que cela fasse partie du folklore des courants d'échange, il faut peut-être rappeler à ce propos que dans le terme de Born la partie d'énergie positive (c'est-à-dire avec un nucléon dans l'état intermédiaire au lieu d'un nucléon plus une paire nucléon-antinuécléon) doit être ignorée car elle est déjà contenue, à travers la fonction d'onde, dans l'approximation d'impulsion. Finalement, il ne faut pas oublier que le courant d'échange ainsi obtenu correspond à $G_A = G_M = 1$. Ceci n'est pas dramatique dans la mesure où on sait retrouver la trace des constantes. Par exemple l'élément de matrice de l'opérateur :

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \vec{e} \Psi$$

peut être identifiée avec le courant vectoriel du nucléon, ce qui permet d'introduire les constantes de couplage correctes. Bien que la manoeuvre ne soit pas très propre on pourrait la justifier à partir des modèles de quarks.

Pour finir, faisons une mise au point sur le problème du "terme de paire en couplage γ^5 ". Ceux qui s'intéressent aux courants d'échange le voient régulièrement présenté comme le terme dominant le courant d'échange vectoriel, alors que si on fait le calcul avec le Lagrangien chirale (IV.17) le terme de paire n'est qu'une correction puisque le couplage est de type $\gamma^\mu \gamma^5$. Cela engendre une certaine confusion et les non spécialistes ne savent plus à quel couplage se vouer. L'explication est pourtant simple : dans la limite de la symétrie chirale le terme de paire (c'est-à-dire nucléon + paire nucléon-antinuécléon dans l'état intermédiaire) en couplage γ^5 est égal au terme de seagull plus le terme de paire en couplage $\gamma^\mu \gamma^5$ (qui est une correction). Cette identité est un ACCIDENT et on peut trouver son origine en remontant au modèle σ -linéaire, éq. (IV.19). Dans ce modèle il y a un couplage γ^5 au pion et un couplage au champ σ , mais ce dernier n'intervient pas dans le courant vectoriel (éq. (IV.20)). Donc, dans ce cas particulier, tout se passe comme si non n'avait qu'un couplage γ^5 au pion et l'amplitude est donnée par le terme de paire correspondant. Mais en général, un simple couplage γ^5 donne un résultat FAUX (c'est-à-dire violant la symétrie chirale) s'il n'est pas accompagné par le couplage au champ σ . C'est ce qui se passe dans la diffusion de pions et dans la production de pion par la partie spatiale du courant axial. Dans ce cas le champ σ intervient et compense justement le terme de paire ! Ce qui reste est égal au terme de Seagull qui donne directement le bon résultat.

APPENDICE

Dans ce cours on utilise la convention d'Einstein et les notations sont les suivantes :

1) Unités : $\hbar = c = 1$

2) Indices : espace-temps $\mu = 0, \dots, 3$
 espace $i = 1, \dots, 3$

3) Métrique : $g^{00} = -g^{ii} = 1$

4) Vecteurs : $a^\mu = a^0, a^i$ $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \vec{\nabla}$

5) Produits scalaires : $a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b^i$

6) Matrices de Dirac : γ^μ $\mu = 0, \dots, 3$

$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, $\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $\gamma^0 \vec{\gamma} = \gamma^5 \vec{\sigma}$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_5 = \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix}$$

REFERENCES

1. M.L. Goldberger and S.M. Treiman, Phys. Rev. 111 (1958) 354.
2. Currents in Hadron Physics, V. de Alfaro et al., North-Holland P.C., Amsterdam (1973).
3. Current Algebras and Applications to Particle Physics, S.L. Adler and R.F. Dashen, W.A. Benjamin Inc., New York (1968).
4. Chiral Dynamics, B.W. Lee, Gordon and Breach Sc. Publishing, New York (1972).
5. Relativistic Quantum Fields, J.D. Bjorken and S.D. Drell, McGraw-Hill Book Company, New York (1965).
6. Par exemple : Quantum Chromodynamics, F.J. Yndurain, Springer Verlag, New York (1983).
7. G.A. Christos, Phys. Rep. 116 (1984) 251.
8. Par exemple : Weak Interactions, D. Bailin and Adam Hilger, Adam Hilger Ltd, Bristol BS1 6NX (1977).
Weak Interactions, E.D. Commins, McGraw-Hill Book Company, New York (1973).
9. D.H. Wilkinson, Nucl. Phys. A377 (1982) 474.
10. N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 531.
11. Y.K. Lee et al., Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 253.
W. Kaina et al., Phys. Lett. 70B (1977) 411.
P. Depommier et al., Nucl. Phys. B4 (1968) 189.
12. M. Gell-Mann, Physics 1 (1964) 63.
13. O. Dumbrajs et al., Nucl. Phys. B216 (1983) 277 et Réf. 9 .
14. G. Bardini et al., Nucl. Phys. A352 (1981) 365.
15. J. Goldstone, Nuov. Cim. 19 (1961) 154. Pour une discussion détaillée du problème voir :
Elements of Quantum Mechanics of Infinite Systems, F. Strocchi, World Scientific, Singapore (1985).
16. Pion Electroproduction, E. Amaldi et al., Springer Verlag, New York (1979).
17. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 188.
18. A.W. Thomas, Adv. Nucl. Phys. 13 (1984) 1.
19. T.H. Skyrme, Proc. Roy. Soc. London A260 (1961) 127.
20. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.
21. A. Le Yaouanq et al., Phys. Rev. D29 (1984) 1233.
22. M. Gell-Mann and M. Levy, Nuov. Cim. XVI (1960) 53.
23. A. Chodos and C.B. Thorn, Phys. Rev. D12 (1975) 2733,
T. Inone and T. Maskawa, Prog. Th. Phys. 54 (1975) 1833, voir aussi Réf. 18 .
24. A. Chodos et al., Phys. Rev. D10 (1974) 2599.
25. I. Zahed and G.E. Brown, Phys. Reports to be published.
26. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 616.
27. S.L. Adler, Phys. Rev. B139 (1965) 1638.
28. V.S. Zidell et al., Phys. Rev. D21 (1980) 1289.