

Physique nucléaire relativiste et effets de quarks dans les noyaux

Jean-Francois Mathiot

▶ **To cite this version:**

Jean-Francois Mathiot. Physique nucléaire relativiste et effets de quarks dans les noyaux. École thématique. Ecole Joliot Curie "La matière nucléaire dans tout ses états", Bombannes, (France), du 16-20 septembre 1985 : 4ème session, 1985. cel-00643991

HAL Id: cel-00643991
https://cel.hal.science/cel-00643991

Submitted on 23 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE RELATIVISTE ET EFFETS DE QUARKS DANS LES NOYAUX

J.F. MATHIOT

Division de Physique Théorique, IPN Orsay

Abstract

A new approach of nuclear structure and nuclear reactions will be presented in these lectures. In a relativistic quantum field description of the nucleon and meson degrees of freedom, the nucleon wave function (in an independant particle model) is no longer solution of a Schrödinger equation but rather of a Dirac equation. In the simplest approximation the interaction potential is constructed from meson exchange. We shall also discuss the modifications of the nucleon structure which are expected in the nuclear medium when its sub-structure (in terms of quarks and gluons) is explicitly taken into account.

Résumé

Une nouvelle approche de la structure nucléaire, ainsi que des réactions nucléon-noyau, sera développée dans ce cours. Cette approche est fondée sur un formalisme relativiste où la fonction d'onde des nucléons (dans un modèle de particules indépendantes) est solution non plus d'une équation de Schrödinger mais d'une équation de Dirac dont les potentiels d'interaction sont construits à partir de l'échange de mésons. Nous verrons ensuite comment ces notions peuvent être utilisées dans la perspective où la structure interne des nucléons (quarks et gluons) est explicitement introduite, et quelles en sont les conséquences.

Il est un problème auquel chaque physicien ne cesse d'être confronté lorsqu'il utilise un modèle théorique particulier pour interpréter telle ou telle partie de la réalité physique : il s'agit de connaître les limites exactes de validité de celui-ci. De ce point de vue, il est important de bien comprendre les différents liens qui existent entre une description non relativiste de la structure nucléaire et une nouvelle approche fondée sur un formalisme relativiste[1]. En dehors de corrections relativistes "cinématiques" qui, comme nous le verrons, ne sont pas complètement négligeables malgré la masse élevée du nucléon, nous nous intéresserons plus particulièrement à mettre en évidence les aspects et interprétations nouvelles que cette approche révèle.

Dans une première partie nous développerons les bases nécessaires à la bonne compréhension du fondement de cette approche et aussi pour bien contrôler les différentes approximations que l'on sera amené à faire et qui, toutes, seront d'une manière ou d'une autre une réduction d'un formalisme de théorie quantique relativiste des champs à un modèle plus proche de ce que les physiciens nucléaires ont l'habitude de manipuler. Toutes ces approximations sont, a priori, surmontables mais au prix d'une complication certaine. Nous essayerons dans la mesure du possible de les justifier dans le cadre que nous considérons ici. Nous traiterons, pour illustrer cette démarche, le calcul de la matière nucléaire symétrique et infinie et discuterons en détail le méchanisme de la saturation.

La deuxième partie de ce cours sera consacrée à l'étude de plusieurs applications. En particulier nous détaillerons le calcul de la structure des noyaux finis dans l'approximation Hartree-Fock. Nous montrerons à cette occasion comment on peut en déduire une interaction effective (dépendante de la densité) utilisable dans un formalisme non-relativiste. Une deuxième application importante concerne le couplage électromagnétique aux nucléons, tels qu'ils sont décrits dans ce formalisme relativiste. Il conviendra d'étudier ici les deux aspects des corrections "relativistes" que l'on peut attendre, à savoir correction sur les fonctions d'onde nucléaires et correction sur les opérateurs électromagnétiques eux-mêmes. Nous verrons à propos du moment magnétique de certains noyaux que ces corrections peuvent être importantes. La troisième application que nous envisagerons, et qui est très étudiée actuellement, concerne la construction du potentiel optique proton-noyau dans un large domaine d'énergie. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la dépendance en énergie du potentiel optique telle qu'elle apparaît dans l'approximation d'impulsion relativiste. Tous ces résultats seront illustrés sur la section efficace de diffusion proton-^{40}Ca ainsi que sur les observables de spin : pouvoir analyseur et fonction de rotation de spin.

*Laboratoire associé au C.N.R.S.

Dans la mesure où les nucléons ne sont pas ponctuels mais possèdent une sous-structure définie à partir de quarks et gluons il est important de savoir dans quelle mesure celle-ci peut être modifiée -polarisée- dans le milieu nucléaire. Nous traiterons dans la troisième partie ces aspects d'un point de vue plus qualitatif. Nous rappellerons tout d'abord quelques notions et résultats simples de la Chromodynamique Quantique et montrerons en particulier comment dans la limite des très hauts moments de transfert on peut obtenir certains résultats exacts concernant par exemple la diffusion d'électrons polarisés. En ce qui concerne le comportement du nucléon dans le noyau, il est nécessaire de construire des modèles pour simuler les effets non perturbatifs des interactions quark-gluon et gluon -gluon . Dans ce cas il est important de cerner le plus près possible les résultats expérimentaux. Nous nous attacherons surtout à connecter le comportement du nucléon dans le milieu nucléaire , et en particuler la variation de sa masse propre et de son rayon, à la position des excitations du nucléon et plus précisément de la première excitation radiale (résonance Roper). Dans un langage plus familier au physicien nucléaire on pourra parler alors de la valeur du paramètre d'incompressibilité du nucléon. Nous verrons enfin si expérimentalement de telles modifications sont aussi observées.

1. POTENTIEL NUCLEON-NUCLEON ET STRUCTURE NUCLEAIRE

1.1. Le noyau est-il un système relativiste ?

1.1a - Vitesse moyenne du nucléon

Dans une description classique le caractère relativiste d'une particule est déterminé par la valeur de sa vitesse, mesurée par rapport à la vitesse de la lumière. Il est intéressant, pour se fixer les idées, d'avoir une estimation de la vitesse moyenne d'un nucléon dans la matière nucléaire. D'une manière systématique on pourra définir la vitesse d'un nucléon comme :

$$v(p) = \frac{\partial E(p)}{\partial p} \quad , \qquad \text{où E(p) est l'énergie d'un nucléon} \qquad (1.1)$$

de moment p. Pour des particules libres $E(p) = \sqrt{p^2 + M^2}$ et $v(p) = p/E(p)$ ce qui dans la limite non relativiste ($p \ll M$) redonne bien $v(p) = p/M$.

Dans une description non relativiste de la matière nucléaire basée sur une force effective de type Skyrme, les nucléons acquièrent une masse effective M^*, constante et inférieure à la masse nue. Dans ce cas :

$$E(p) = \frac{p^2}{2M^*} \quad , \qquad (1.2)$$

et $v(p) = 1/\rho_B \int_0^{p_f} 4\pi p^2 dp \; p/M^*$ où ρ_B représente la densité baryonique de la matière nucléaire. D'où

$$\langle v/c \rangle = \frac{3}{4} \frac{p_f}{M^*} = 0,28 \quad , \qquad (1.3)$$

pour une valeur standard $M^*/M = 0,75$ et $p_f = 1,34$ fm. Nous verrons plus loin que dans une approche relativiste où les nucléons sont soumis à une interaction due à l'échange de mésons, la valeur de la vitesse moyenne calculée par (1.1) peut aller jusqu'à $\langle v/c \rangle = 0,43$. Les valeurs que l'on obtient ne sont pas particulièrement faibles et dépendent bien entendu de l'interaction utilisée. La correction sur $\gamma = \sqrt{1-v^2/c^2}$ peut varier alors de 2 à 10 %. Ceci n'est pas du tout négligeable dans la mesure où les énergies mises en jeu sont de l'ordre d'une centaine de MeV (énergie potentielle due à l'échange d'un σ ou ω par exemple) et sachant que l'énergie de liaison totale sera, elle, de l'ordre de - 16 MeV.

1.1b - Potentiel NN dû à l'échange d'un pion

D'un autre point de vue les physiciens nucléaires sont déjà habitués à manipuler la composante "relativiste" de la fonction d'onde du nucléon[2]. En effet le potentiel d'échange d'un pion tel qu'il est écrit habituellement :

$$V(\vec{q}) = \frac{g^2}{4M^2} \frac{\vec{\sigma_1}\cdot\vec{q}\ \vec{\sigma_2}\cdot\vec{q}}{m_\pi^2 + \vec{q}^2}\ \underset{\sim}{\tau_1}\cdot\underset{\sim}{\tau_2}\ , \qquad (1.4)$$

provient du couplage entre la grande composante (non nulle lorsque $p \to 0$) et la petite composante (relativiste, voir plus loin) de la fonction d'onde du nucléon libre que l'on écrit , au premier ordre en P/M :

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2M} \end{pmatrix} . \qquad (1.5)$$

Les règles de Feynman appliquées au diagramme d'échange d'un pion de la figure 1 s'écrivent alors :

$$V(\vec{q}) = \bar{u}(\vec{p}_2^{\,f})\gamma_5 u(\vec{p}_2^{\,i})\frac{g^2}{m_\pi^2+\vec{q}^2}\bar{u}(\vec{p}_1^{\,f})\gamma_5 u(\vec{p}_1^{\,i}) \text{ avec } \vec{q} = \vec{p}_2^{\,f} - \vec{p}_2^{\,i} .$$

ce qui se réduit à (1.4) compte tenu de (1.5) et en ne considérant que les termes en 1/M. L'approche relativiste de la structure nucléaire permet de généraliser cette description au cas du problème à N corps (nucléons en interaction forte) et à l'échange des autres mésons (σ , ω et ρ).

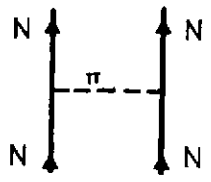


Fig.1 - Diagramme d'échange d'un pion entre deux nucléons.

1.1c - Excitations NN̄

Il est enfin connu que les excitations nucléon -antinucléon peuvent jouer un rôle important en physique nucléaire. Les contributions des courants d'échange mésoniques[2] illustrées sur la figure 2 sont en effet nécessaires, dans le cas particulier des transitions isovectorielles, pour assurer la conservation du courant électromagnétique et sont signées expérimentalement de manière très nette par la section efficace différentielle de l'électrodésintégration du deutéron près du seuil.

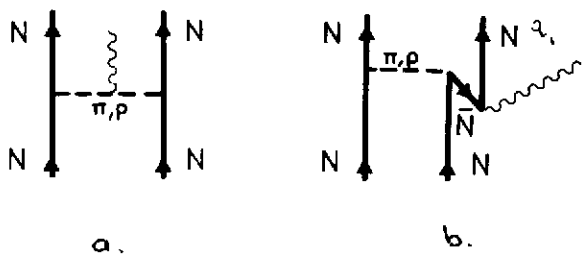


Fig.2 - Courants d'échange mésoniques dominants pour une transition isovectorielle.

Toutes ces différentes remarques montrent bien que, déjà, on ne peut échapper à la nécessité d'introduire de façon plus ou moins phénoménologique dans notre description de la structure nucléaire certains aspects de la réalité relativiste sous-jacente. Ces corrections se font en général sur le potentiel d'interaction que que l'on introduit dans une équation de Schrödinger pour obtenir la fonction d'onde non relativiste du nucléon. La dépendance en p^2 de certains potentiels nucléon-nucléon en est une illustration.

L'intérêt premier d'une approche relativiste, fondée sur un formalisme de théorie quantique des champs, est de pouvoir traiter de manière consistante les propriétés des nucléons en interaction forte et ceci en faisant intervenir les mêmes degrés de liberté que le potentiel nucléon-nucléon libre. Il s'agit dans ce cas, outre du nucléon lui-même, des degrés de liberté associés aux mésons les plus légers : mésons π (pion), ρ (rho), ω (omega), σ (sigma) et qui se couplent très fortement au nucléon. Les caractéristiques intrinsèques de ces mésons sont rassemblées dans le tableau 1. Remarquons enfin que, à strictement parler, le méson σ n'est pas une particule observée mais est plutôt introduit pour simuler l'échange de deux pions corrélés dans un état relatif S. Sa masse n'est donc pas aussi précisément fixée que celle des autres mésons mais peut être estimée à m_σ = 500 MeV ± 100 MeV.

	σ	ω	π	ρ
Spin J	0	1	0	1
Isospin T	0	0	1	1
Parité P	+	-	-	-
m (MeV)	/	783	138	770

- Tableau 1 -

Caractéristiques générales des mésons contribuant au potentiel nucléon-nucléon

1.2. Quelques éléments de théorie des champs

Nous détaillerons simplement ici les éléments nécessaires à la compréhension de la suite de ce cours. Pour plus de détails (et plus de rigueur aussi) il sera indispensable de consulter les différents livres de référence[3]. Les notations et conventions sont résumées en appendice 1. On supposera aussi par la suite $\hbar = c = 1$.

1.2a - Champs physiques

En chaque point de l'espace et à chaque instant on associera à chaque degré de liberté un champ (opérateur dans le cas d'une théorie quantique) contenant toute l'information relative à la particule représentative de ces degrés de liberté. Ces champs se comportent différemment, par transformation de Lorentz, suivant le spin de chaque particule. Pour un boson de spin 0 (mésons σ et π) le champ doit se comporter comme un scalaire et on le notera :

$$\begin{aligned} &\sigma(\vec{x}, t) && \text{pour le méson } \sigma, \\ &\underset{\sim}{\pi}(\vec{x}, t) && \text{pour le méson } \pi, \end{aligned} \qquad (1.6)$$

et où l'on a indiqué par un tilda le caractère isovectoriel de cette particule (T = 1, vecteur dans l'espace d'isospin, le produit scalaire sera noté dans cet espace par $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b}$). Pour un boson de spin 1 (mésons ω et ρ, photon) le champ se comportera comme un vecteur par une transformation de Lorentz et sera noté :

$$\begin{aligned} &V_\mu(\vec{x}, t) && \text{pour le méson } \omega, \\ &\underset{\sim}{\rho}_\mu(\vec{x}, t) && \text{pour le méson } \rho, \end{aligned} \qquad (1.7)$$

et A_μ sera associé, comme en électrodynamique quantique, au photon.

Pour les nucléons de spin 1/2 (particules de Dirac), on aura besoin par la suite de connaître sa structure quantique plus précisément. Si l'on recherche un état stationnaire, on pourra décomposer le champ de nucléon comme suit :

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_\alpha \left[\varphi_\alpha(\vec{x}) e^{-iE_\alpha t} b_\alpha + \eta_\alpha(\vec{x}) e^{iE_\alpha t} d_\alpha^+ \right] , \qquad (1.8)$$

b_α et d_α^+ représentent les opérateurs de destruction (création) d'un nucléon (antinucléon) dans l'état α. Les opérateurs adjoints b_α^+ et d_α représenteront quant à eux les opérateurs de création (destruction) d'un nucléon (antinucléon). Dans ce formalisme de seconde quantification le système formé de un nucléon dans l'état α sera représenté par $|\alpha\rangle = b_\alpha^+ |0\rangle$ où $|0\rangle$ est le vide physique (densité baryonique nulle) et de même pour un état composé d'un antinucléon. Si l'on applique une deuxième fois l'opérateur b_α^+ sur $|\alpha\rangle$ alors : $b_\alpha^+ |\alpha\rangle = 0$ par le principe de Pauli. De manière systématique toutes les propriétés relatives à un fermion (principe de Pauli, antisymétrie de la fonction d'onde) sont contenues dans les relations d'anticommutation suivantes :

$$\left\{ b_\alpha, b_{\alpha'}^+ \right\} = \delta_{\alpha\alpha'} ,$$
$$\left\{ d_\alpha, d_{\alpha'}^+ \right\} = \delta_{\alpha\alpha'} . \qquad (1.9)$$

et tous les autres anticommutateurs possibles sont nuls.

Enfin $\varphi_\alpha(\vec{x})$ ($\eta_\alpha(\vec{x})$) dans l'expression (1.8) représentent les fonctions d'onde du nucléon (antinucléon), à quatre composantes, que l'on représentera, pour $\varphi_\alpha(\vec{x})$ par exemple :

$$\varphi_\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_>(\vec{x})\, \chi_s \\ \varphi_<(\vec{x})\, \chi_s \end{pmatrix} \xi_\tau . \qquad (1.10)$$

$\varphi_>(\vec{x})$ représente la grande composante (qui dans la limite non relativiste sera la fonction d'onde de Schrödinger) et $\varphi_<(\vec{x})$ est la petite composante (nulle dans la limite des petits moments) ; χ_s est une matrice à deux composantes

$$\chi_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad (1.11)$$

suivant le spin (en haut ou en bas) du nucléon ; ξ_τ représente quant à lui la fonction d'onde d'isospin.

1.2b - Lagrangien du système

L'état du système considéré -matière nucléaire ou noyaux finis ici- est enfin entièrement déterminé par la donnée du lagrangien du système. Celui-ci est construit de manière à respecter d'une part les différentes propriétés de symétrie liées aux degrés de liberté considérés, il doit ensuite évidemment être invariant par transformation de Lorentz. On le décompose ici en trois parties :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = \mathcal{L}_0^N + \mathcal{L}_0^M + \mathcal{L}_I , \qquad (1.12)$$

$\mathcal{L}_o^N$ représente le lagrangien libre décrivant la propagation d'un nucléon libre (terme cinétique et terme de masse) de même pour $\mathcal{L}_o^M$ qui décrit le mouvement des mésons. Enfin $\mathcal{L}_I$ représente les termes d'interactions entre méson et nucléon ou entre mésons eux-mêmes. Il faut faire ici appel aux résultats expérimentaux (si possible) pour déterminer quels sont les couplages dominants que l'on doit prendre en compte dans $\mathcal{L}_I$ et en particulier pour déterminer les constantes de couplage méson-nucléon d'une part et les différentes constantes de couplage méson -méson . Nous considérerons ici les termes les plus importants. Ces différents lagrangiens s'expriment alors de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_o^N(x) = \bar{\Psi}(x)\left[i\gamma_\mu\partial^\mu - M\right]\Psi(x) \ ,$$

$$\mathcal{L}_o^M(x) = \tfrac{1}{2}\left[\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma\right] + \tfrac{1}{2}\left[\partial_\mu \underset{\sim}{\pi}\partial^\mu \underset{\sim}{\pi} - m_\pi^2\, \underset{\sim}{\pi}\cdot\underset{\sim}{\pi}\right] \qquad (1.13)$$

$$- \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m_\omega^2 V_\mu V^\mu\right] - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{G}_{\mu\nu}\underset{\sim}{G}^{\mu\nu} - m_\rho^2\, \underset{\sim}{\rho}_\mu\cdot\underset{\sim}{\rho}^\mu\right] ,$$

avec les notations standard : $$F_{\mu\nu} = \partial_\nu V_\mu - \partial_\mu V_\nu \ ,$$

$$\underset{\sim}{G}_{\mu\nu} = \partial_\nu \underset{\sim}{\rho}_\mu - \partial_\mu \underset{\sim}{\rho}_\nu \ ,$$

et les termes d'interaction sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I(x) = &- g_\sigma\, \bar{\Psi}(x)\,\sigma(x)\,\Psi(x) \\ &- g_\omega\, \bar{\Psi}(x)\,\gamma_\mu V^\mu(x)\,\Psi(x) \\ &- i\, g_\pi\, \bar{\Psi}(x)\,\gamma_5\, \underset{\sim}{\pi}(x)\cdot\underset{\sim}{\tau}\,\Psi(x) \\ &- g_\rho\, \bar{\Psi}(x)\left[\gamma_\mu - \frac{\kappa}{2M}\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu\right] \underset{\sim}{\rho}^\mu(x)\cdot\underset{\sim}{\tau}\,\Psi(x) \ ,\end{aligned} \qquad (1.14)$$

$\underset{\sim}{\tau}$ représente ici les matrices de Pauli habituelles dans l'espace d'isospin.

Nous avons omis, par simplicité, le lagrangien associé au champ coulombien. Celui-ci est similaire à celui du ω (avec un terme de masse nulle). On peut remarquer que la forme des termes d'interaction n'est pas unique a priori et en particulier pour le couplage pion-nucléon on peut aussi concevoir un couplage de la forme

$$-\, f_\pi/m_\pi\, \bar{\Psi}(x)\,\gamma_5\,\gamma_\mu\partial^\mu\Psi(x) \qquad \text{(couplage pseudo-vectoriel)} \ , \qquad (1.15)$$

à la place du couplage pseudo-scalaire indiqué en (1.14). Ces deux couplages seront comparés par la suite. Ils ont la particularité d'avoir la même limite non relativiste (et conduit ainsi au potentiel unique d'échange d'un pion que l'on a déjà discuté) si les constantes de couplage vérifient la relation d'équivalence :

$$\frac{g_\pi}{2M} = \frac{f_\pi}{m_\pi} \quad , \tag{1.16}$$

par contre ils donnent des contributions très différentes dans un formalisme relativiste[4].

1.2c - Equations du mouvement

Une fois le lagrangien du système défini, les équations du mouvement sont obtenues par le principe de moindre action. Celui-ci consiste à minimiser l'action :

$$S = \int_\Gamma \mathcal{L}(x)\, d^4x \quad ,$$

suivant un chemin quelconque. La trajectoire effectivement suivie sera celle pour laquelle l'action est minimale. On arrive ainsi aux équations suivantes, valables pour tout champ physique ϕ et ses dérivées intervenant dans le lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial^\mu \phi]} = 0 \quad . \tag{1.17}$$

Cette équation s'applique aussi aux champs conjugués $\bar{\phi}$. Dans le cas du champ scalaire par exemple, en appliquant (1.17), on obtient l'équation de Klein Gordon suivante :

$$\left(\Box + m_\sigma^2\right) \sigma(x) = - g_\sigma \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \quad . \tag{1.18}$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\sigma(x) = - g_\sigma \int d^4y\, D_\sigma(x-y)\, \bar{\Psi}(y) \Psi(y) \quad . \tag{1.19}$$

où $D_\sigma(x-y)$ est la fonction de Green de l'équation de Klein Gordon. Il faut comprendre cette solution de la façon suivante : la valeur moyenne du champ σ dans un noyau représenté par un état $|\phi_0\rangle$ sera alors

$$\langle \sigma(x) \rangle = - g_\sigma \int d^4y\, D_\sigma(x-y) \langle \phi_0 | \bar{\Psi}(x) \Psi(x) | \phi_0 \rangle \quad . \tag{1.20}$$

Remarquons tout de suite que seules les valeurs moyennes du champ scalaire σ et vecteur V_μ (pour la composante temporelle uniquement) sont non nulles dans un noyau à couches fermées en spin et isospin.

De façon analogue pour le champ vectoriel associé au méson ω on obtient l'équation suivante (équation de Proca) :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) + m_\omega^2 V_\mu(x) = g_\omega \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) \quad . \tag{1.21}$$

Cette équation pourra se réduire à une équation de Klein Gordon dans la mesure où le courant baryonique

$$J^\mu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) \tag{1.22}$$

est conservé c'est-à-dire $\partial_\mu J^\mu = 0$. Dans ce cas on peut réduire l'équation (1.21) à :

$$\left(\Box + m_\omega^2 \right) V_\mu (x) = g_\omega \, \bar{\Psi}(x) \, \gamma_\mu \, \Psi(x) \, . \qquad (1.23)$$

En ce qui concerne le champ du nucléon son évolution est déterminée par l'équation de Dirac suivante, obtenue en appliquant (1.17) pour le champ $\bar{\Psi}$:

$$\left[-i \gamma_\mu \partial^\mu + M \right] \Psi(x) = - g_\sigma \sigma(x) \Psi(x) - g_\omega V_\mu (x) \gamma^\mu \Psi(x) + \ldots \qquad (1.24)$$

Si maintenant les champs mésoniques sont remplacés par leur expression (1.19) et les solutions analogues pour les champs de oméga, pion et rho, cela conduit à une équation ne faisant plus intervenir que les degrés de liberté fermioniques (nucléons). On dit alors que les degrés de liberté mésoniques ont été éliminés au profit d'un potentiel d'interaction (que l'on construira explicitement en 1.3).

1.2d - Solution pour des particules libres

Il est indispensable, avant d'aller plus loin, de connaître les solutions de l'équation de Dirac (1.24) pour des particules libres. On cherchera tout d'abord une solution (onde plane) de la forme :

$$\Psi_\alpha (\vec{x}) = e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \, u^\circ (\vec{p}, s, \tau) \, , \qquad (1.25)$$

et $u^\circ(p,s,\tau)$ doit alors être solution de l'équation suivante :

$$\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \gamma_\circ M \right) u^\circ (\vec{p}, s, \tau) = E(p) \, u^\circ (\vec{p}, s, \tau) \, . \qquad (1.26)$$

Si l'on applique à chaque membre de cette équation l'opérateur $\vec{\alpha}.\vec{p} + \gamma_0 M$ et compte tenu des propriétés des matrices de Dirac (voir appendice 1) on en déduit immédiatement :

$$E^2(p) = \vec{p}^{\,2} + M^2 \qquad \text{soit} \qquad E(p) = \pm \sqrt{\vec{p}^{\,2} + M^2} \equiv \pm E_p \, , \qquad (1.27)$$

et l'on peut vérifier que les fonctions propres associées à chacune de ces énergies sont :

$$u^\circ (\vec{p}, s, \tau) = \sqrt{\frac{E_p + M}{2 E_p}} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + M} \end{pmatrix} \chi_s \xi_\tau \, , \qquad (1.28a)$$

pour la solution d'énergie positive (nucléon)

$$v^\circ (\vec{p}, s, \tau) = \sqrt{\frac{E_p + M}{2 E_p}} \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + M} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s \xi_\tau \, , \qquad (1.28b)$$

pour la solution d'énergie négative (antinucléon). Dans ce dernier cas $v^\circ(-\vec{p},s,\tau)$ est solution de (1.26) avec $E(p) = -E_p$ et la solution de (1.24) sera $\Psi(x) = e^{i E_p t} \, e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \, v^\circ (\vec{p}, s, \tau) \, d_\alpha^+$.

Les spineurs $u^\circ(\vec{p},s,\tau)$ et $v^\circ(\vec{p},s,\tau)$ sont ici normalisés à 1 :

$$u^{\circ +} (\vec{p}, s, \tau) \, u^\circ (\vec{p}, s, \tau) = v^{\circ +} (\vec{p}, s, \tau) \, v^\circ (\vec{p}, s, \tau) = 1 \, . \qquad (1.29)$$

1.2e - Hamiltonien du système

De la même manière qu'en mécanique classique, la valeur moyenne du hamiltonien du système nous permettra de calculer son énergie. Celui-ci se déduit de manière canonique par une transformation de Legendre à partir du lagrangien général $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ où ϕ_i représente chaque champ physique (σ, ω, π et ρ) :

$$H = \int d^3x \left[\sum_i \Pi_i(\vec{x}, t) \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \mathcal{L} \right] . \tag{1.30}$$

Dans cette expression $\Pi_i(\vec{x},t)$ est le moment conjugué du champ $\phi_i(\vec{x},t)$:

$$\Pi_i(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right]} . \tag{1.31}$$

On utilisera plutôt par la suite la densité hamiltonienne $\mathcal{H}$ telle que :

$$H = \int d^3x \, \mathcal{H}(\vec{x}, t) . \tag{1.32}$$

Pour des particules libres on obtient facilement :

$$\mathcal{H}(x) = \Psi^+(x) \left[-i \vec{\alpha} . \vec{\nabla} + \gamma_0 M \right] \Psi(x) . \tag{1.33}$$

1.3. Approximation de champ moyen relativiste[5]

1.3a - Energie du système

La fonction d'onde nucléaire est représentée ici par un déterminant de Slater, familier au physicien nucléaire. Il conviendra bien sûr de vérifier, dans la mesure du possible, si cette approximation est justifiée dans le cadre de la théorie que nous envisageons ici. Elle a l'avantage, d'une part d'avoir été développée et étudiée soigneusement dans la limite non relativiste, d'autre part de nous permettre de mener à bien les calculs de structure nucléaire (matière nucléaire et noyaux finis). L'état fondamental de la matière nucléaire est donc construit de la façon suivante :

$$|\phi_0\rangle = \prod_\alpha b_\alpha^+ |0\rangle , \tag{1.34}$$

où chaque état α est défini par son moment $\vec{p}$, son spin s et son isospin τ et l'on remplit ces états jusqu'à un moment p_f -moment de Fermi- de manière à avoir une densité baryonique fixe :

$$\rho_B = \sum_{s,\tau} \int_0^{p_f} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} = \frac{2 p_f^3}{3\pi^2} . \tag{1.35}$$

L'énergie du système sera alors calculée par la valeur moyenne du hamiltonien (1.32) dans l'état fondamental $|\phi_0\rangle$. Suivant les résultats du paragraphe 1.2c le hamiltonien du système ne dépend

plus que du champ de fermion $\psi(\vec{x},t)$ défini par (1.8), une fois les champs mésoniques éliminés à l'aide de leur équation du mouvement (1.18) (et analogues pour les autres mésons). Dans l'approximation de champ moyen nous allons d'autre part conserver seulement la partie à énergie positive du développement (1.8) du champ c'est-à-dire que l'on prendra :

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\vec{x})\, e^{-iE_{\alpha}t}\, b_{\alpha} \quad , \tag{1.36}$$

avec $\varphi_{\alpha}(\vec{x}) = e^{i\vec{p}.\vec{x}}\, u(\alpha)$.

La seconde partie de ce développement fait intervenir la possibilité d'exciter, par l'intermédiaire de l'échange de mésons, des paires nucléon-antinucléon et correspond à ce que l'on appelle la polarisation du vide. Elle peut être estimée dans certaines conditions. Nous mentionnerons seulement en 1.4 certains résultats caractéristiques.

On peut réécrire le hamiltonien du système sous la forme plus familière :

$\int \mathcal{H}\, d^3x = T + \sum_i V_i$ avec les expressions générales :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha_1,\alpha_2} u^{+}(\alpha_1)\left[\vec{\alpha}.\vec{p} + \gamma_0 M\right] u(\alpha_2)\; b^{+}_{\alpha_1}\, b_{\alpha_2} \quad , \\ V_i &= \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \alpha'_1,\alpha'_2}} u^{+}(\alpha'_2)\, u^{+}(\alpha'_1)\, \Gamma_i(q)\, u(\alpha_1)\, u(\alpha_2)\, b^{+}_{\alpha'_2}\, b^{+}_{\alpha'_1}\, b_{\alpha_1}\, b_{\alpha_2} \quad , \end{aligned} \tag{1.37}$$

où l'indice i représente les différentes contributions de σ, ω, π et ρ .

Nous allons détailler plus particulièrement comment on peut déterminer le potentiel d'interaction V_i dans le cas simple de l'échange d'un méson σ . Les autres mésons s'en déduisent par un calcul absolument analogue.

Dans l'espace des moments l'équation de Klein Gordon (1.18) s'écrit :

$$\left(\vec{q}^{\,2} - q_0^2 + m_\sigma^2\right)\sigma = -g_\sigma\, \bar{\psi}(\vec{x},t)\, \psi(\vec{x},t) \quad , \tag{1.38}$$

c'est-à-dire

$$\sigma(x) = -\frac{g_\sigma}{\vec{q}^{\,2} - q_0^2 + m_\sigma^2}\; \bar{\psi}(\vec{x},t)\, \psi(\vec{x},t) \quad ,$$

et l'énergie potentielle est donc

$$\begin{aligned} \int d^3x\, \bar{\psi}(x)\, g_\sigma\, \sigma(x)\, \psi(x) = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \alpha'_1,\alpha'_2}} & u^{+}(\alpha'_2)\, u^{+}(\alpha'_1)\, \gamma_0(2)\, \gamma_0(1) \\ & \left[-\frac{g_\sigma^2}{\vec{q}^{\,2} - q_0^2 + m_\sigma^2}\right] u(\alpha_1)\, u(\alpha_2)\, b^{+}_{\alpha'_2}\, b^{+}_{\alpha'_1}\, b_{\alpha_1}\, b_{\alpha_2} \end{aligned} \tag{1.39}$$

(Les indices 1 et 2 se réfèrent à la particule 1 et 2).

Sa valeur moyenne dans le fondamental $|\phi_0\rangle$ est ainsi :

$$\langle V_\pi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1 \tau_1} \int_{S_F} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma_2 \tau_2} \int_{S_F} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \left[- \frac{g_\pi^2}{\vec{q}^2 - q_0^2 + m_\pi^2} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[u^+(\alpha_1') \gamma_0(1) u(\alpha_1) \right] \left[u^+(\alpha_2') \gamma_0(2) u(\alpha_2) \right] \langle \phi_0 | b^+_{\alpha_2'} b^+_{\alpha_1'} b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} | \phi_0 \rangle \qquad (1.40)$$

avec $\vec{q} = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \vec{p}_1'$ et $q_0 = E_2' - E_2 = E_1 - E_1'$.

Le théorème de Wick nous permet enfin de calculer la valeur moyenne de l'opérateur $b^+_{\alpha_2'} b^+_{\alpha_1'} b_{\alpha_1} b_{\alpha_2}$ dans le fondamental $|\phi_0\rangle$ soit :

$$\langle \phi_0 | b^+_{\alpha_2'} b^+_{\alpha_1'} b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} | \phi_0 \rangle = \delta_{\alpha_1' \alpha_2'} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} - \delta_{\alpha_1' \alpha_2} \delta_{\alpha_2' \alpha_1} . \qquad (1.41)$$

Le premier terme correspond au terme direct de l'interaction nucléon-nucléon (ou encore terme de Hartree) et le second terme est le terme d'échange (ou terme de Fock). Ces deux termes sont représentés graphiquement sur les figures 3.a et 3.b respectivement. Il sera commode par la suite de



a. b.

Fig.3 - Contribution du terme direct (a. Hartree) et d'échange (b. Fock) à l'énergie

faire une approximation supplémentaire pour le calcul des termes de Fock, à savoir de négliger le terme q_0 dans le propagateur des mésons. Cette approximation n'est justifiée que dans la mesure où les transferts d'énergie $E_2'-E_2$ sont faibles devant la masse des mésons échangés, ce qui est le cas dans les applications que nous considérons ici. L'échange de mésons entre nucléons est ainsi supposé instantané, ce qui revient encore à négliger la dépendance en temps des champs mésoniques (1.6) et (1.7).

1.3b - Fonction d'onde des nucléons dans la matière nucléaire

Dans la matière nucléaire, après intégration sur les distributions angulaires et sommation sur les spins, l'équation de Dirac doit s'écrire, a priori, de la manière suivante :

$$\left[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \gamma_0 M + \gamma_0 \Sigma^*(\vec{p}) \right] u(\alpha) = \varepsilon(p)\, u(\alpha) , \qquad (1.42)$$

où $\Sigma^*(\vec{p})$ est la self-énergie d'interaction due à l'échange des mésons σ, ω, π et ρ. Elle peut se décomposer sur les matrices γ_μ de Dirac :

$$\Sigma(\vec{p}) = \Sigma_s(p) + \gamma_0 \Sigma_0(p) + \vec{\gamma}.\hat{p}\,\Sigma_v(p) \quad . \tag{1.43}$$

$\Sigma_s(p)$ représente la partie scalaire de la self-énergie (projection sur la matrice unité) ; $\Sigma_0(p)$ représente la partie vectorielle -composante temporelle- (projection sur la matrice γ_0) et $\Sigma_v(p)$ est la projection sur la composante spatiale des matrices de Dirac γ_μ. Dans l'approximation de champ moyen seule la projection suivant $\hat{p}$ intervient et toutes les autres composantes (tensorielles en particulier, de la forme $\gamma_0 \vec{\gamma}.\hat{p}$) sont nulles après sommation sur les spins. La décomposition (1.43) est très importante en ce sens qu'elle permet de regrouper ces différentes contributions avec, respectivement, la masse du nucléon, son impulsion et son énergie. Si l'on définit les caractéristiques du nucléon "habillé" dans la matière nucléaire comme suit :

$$\begin{aligned} M^*(p) &= M + \Sigma_s(p) \quad , \\ \vec{p}^{\,*}(p) &= \left(p + \Sigma_v(p)\right)\hat{p} \quad , \\ \varepsilon^*(p) &= \varepsilon(p) - \Sigma_0(p) \quad , \end{aligned} \tag{1.44}$$

alors l'équation de Dirac s'écrit :

$$\left[\vec{\alpha}.\vec{p}^{\,*}(p) + \gamma_0 M^*(p)\right] u(\alpha) = \varepsilon^*(p)\, u(\alpha) \quad , \tag{1.45}$$

et la solution générale de cette équation est évidemment (compte tenu de la forme de la solution de l'équation libre (1.28)) :

$$u(\alpha) \equiv u(\vec{p}, s, \tau) = \sqrt{\frac{\varepsilon^*(p) + M^*(p)}{2\,\varepsilon^*(p)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}^{\,*}(p)}{\varepsilon^*(p) + M^*(p)} \end{pmatrix} \chi_s \xi_\tau \, , \tag{1.46}$$

avec les propriétés importantes

$$\varepsilon^*(p) = \sqrt{p^{*2}(p) + M^{*2}(p)} \quad , \quad u^+(\alpha)\, u(\alpha) = 1 \quad . \tag{1.47}$$

Une fois définie la fonction d'onde des nucléons il est possible alors de calculer explicitement la valeur moyenne du Hamiltonien (1.30) en fonction de $\varepsilon^*(p)$, $M^*(p)$, $\vec{p}^{\,*}(p)$ ou plus précisément de $\hat{M}(p)$ et $\hat{P}(p)$ définis par :

$$\begin{aligned} \hat{M}(p) &= \frac{M^*(p)}{\varepsilon^*(p)} \quad , \\ \hat{P}(p) &= \frac{p^*(p)}{\varepsilon^*(p)} \quad . \end{aligned} \tag{1.48}$$

Ce calcul est détaillé dans l'appendice 2 pour l'énergie cinétique et le potentiel d'échange du σ et ω pour la partie directe et d'échange.

1.3c - Principe variationnel

Comme on vient de le voir le hamiltonien du système ne dépend que de $\hat{M}(p)$ et $\hat{P}(p)$ avec (1.47) soit encore il ne dépend que d'une seule fonction f(p) telle que

$$\hat{M}(p) = \cos\left[f(p)\right] \quad , \quad \hat{P}(p) = \sin\left[f(p)\right] \quad . \tag{1.49}$$

Celle-ci sera déterminée de telle manière qu'elle minimise l'énergie totale du système c'est-à-dire la valeur moyenne du hamiltonien (1.30) :

$$E = \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle \, . \tag{1.50}$$

La variation de E par rapport à f(p) doit alors être nulle et l'on arrive facilement à l'équation self-consistante suivante :

$$0 = -p\hat{M}(p) + M\hat{P}(p) - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\frac{2}{\pi^2}\hat{P}(p)\int_0^{p_F} p'^2 dp' \, \hat{M}(p') \tag{1.51}$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{p}\int_0^{p_F} p' dp' \left\{ B(p,p')\hat{P}(p)\hat{M}(p') - C(p,p')\hat{M}(p)\hat{P}(p') - \frac{1}{2}D(p,p')\left[\hat{M}(p)\hat{M}(p') - \hat{P}(p)\hat{P}(p')\right]\right\} .$$

où l'on a utilisé les notations (A.16) pour les termes de Fock et la première intégrale sur p' provient du terme directe de l'échange du σ (voir appendice 2). Cette équation représente alors l'équation Hartree-Fock "relativiste" dans la matière nucléaire.

1.3d - Quelques résultats

Les paramètres du modèle développé ici sont les différentes constantes de couplage méson-nucléon ainsi que les masses de ces mésons. Celles-ci cependant ne sont pas toutes inconnues et l'on adoptera le principe suivant : les masses et les constantes de couplage qui sont déterminées expérimentalement avec suffisamment de précision sont fixées à ces valeurs. Les masses ont déjà été indiquées dans le tableau I et l'on prendra $g^2/4\pi = 14{,}5$ pour le pion et $g^2/4\pi = 0{,}55$ pour le rho avec K = 3,7 où 6,6 (couplage faible ou fort pour la partie dérivative de l'interaction rho-nucléon[2]).

Il reste alors trois paramètres libres qui sont les constantes de couplage sigma-nucléon, omega-nucléon et la masse du méson σ qui sera quant à elle choisie toujours entre 400 et 600 MeV. Cette masse ne joue pas un grand rôle dans la matière nucléaire et nous l'avons fixée ici à $m_\sigma = 520$ MeV pour être compatible avec ce qui est généralement considéré dans la littérature[6]. Par contre les constantes de couplage $g_\sigma^2/4\pi$ et $g_\omega^2/4\pi$ sont ajustées de manière à obtenir le point de saturation de la matière nucléaire symétrique et infinie à :

$$\mathring{E}/A = -15{,}75 \text{ MeV et } p_f^\circ = 1{,}30 \text{ fm}^{-1} \quad .$$

En plus de la valeur moyenne des énergies potentielle et cinétique définies par :

$$E/A = \langle T/A \rangle + \langle V/A \rangle - M \, ,$$

il est aussi intéressant d'avoir la valeur du paramètre d'incompressibilité au point de saturation :

$$K_{NM} = \rho_f^2 \left. \frac{\partial^2 E/A}{\partial \rho_f^2} \right|_{\rho_f = \rho_f^0} , \qquad (1.52)$$

ainsi que le coefficient d'asymétrie a_4 défini par la formule de masse :

$$E/A = E^*/A - a_s A^{-1/3} - a_c Z^2 A^{-4/3} - a_4 (N-Z)^2 A^{-2} . \qquad (1.53)$$

Tous ces résultats sont rassemblés dans le tableau 2. Afin de bien cerner la contribution de chaque méson nous avons présenté cinq situations différentes en réajustant à chaque fois les constantes de couplage σN et ωN pour obtenir le même point de saturation. Nous pouvons faire, à propos de ces résultats, les remarques suivantes[7] :

- Dans l'approximation Hartree les contributions non nulles sont celles de l'échange du σ et ω (composante temporelle) (voir (I.20)).

- La valeur du paramètre d'incompressibilité est très élevée dans le cas où seul l'échange de σ et ω est considéré. La valeur empirique communément admise est de l'ordre de 210 MeV. La contribution des mésons isovectoriels π et ρ permettent de la réduire quelque peu et plus particulièrement la contribution de la partie dérivative du couplage ρ-N.

- La valeur empirique du coefficient d'asymétrie est de l'ordre de 31 MeV et l'on peut noter que dès que les termes de Fock sont pris en compte celle-ci est bien reproduite dans ces modèles.

- La répartition de l'énergie potentielle totale entre tous les mésons est certainement plus satisfaisante pour les modèles (d) et (e) que dans le modèle (a). Dans ce dernier, l'énergie potentielle totale, de l'ordre de -25 MeV est le résultat de l'annulation de deux termes de 200 et 175 MeV. Il en résulte que l'énergie totale est très sensible à de faibles variations des constantes de couplage. Une modification de 1 % de $g_\sigma^2/4\pi$ par exemple entraîne une variation de l'énergie de liaison de l'ordre de 2 MeV soit une variation relative de plus de 10 % !

Cas	$g_\sigma^2/4\pi$	$g_\omega^2/4\pi$	$M^*(p_f^0)/M$	K_{NM} (MeV)	a_4(MeV)	$\langle T/A \rangle - M$	$\langle V^D/A \rangle$		$\langle V^E/A \rangle$			
							σ	ω	σ	ω	π	ρ
a	8,75	15,15	0,54	540	19	8	-200	175				
b	7,75	12,00	0,51	600	33	6	-175	140	38	-22		
c	8,25	11,45	0,51	550	32	7	-190	130	40	-22	14	
d	7,50	9,80	0,55	480	31	9	-170	115	36	-19	15	2
e	7,05	8,25	0,60	400	29	11	-165	95	35	-17	15	9

- Tableau 2 -

Propriétés de la matière nucléaire dans différents modèles : dans l'approximation Hartree : (a) $\sigma + \omega$; dans l'approximation Hartree-Fock : (b) $\sigma + \omega$, (c) $\sigma + \omega + \pi$, (d) $\sigma + \omega + \pi + \rho$ avec K = 3,7, (e) $\sigma + \omega + \pi + \rho$ avec K = 6,6. Les constantes de couplage σN et ωN sont ajustées pour avoir le point de saturation à E^*/A = - 15,75 MeV et p_f^0 = 1,30fm. La masse du méson σ est fixée ici à m_σ = 520 MeV. Toutes les énergies sont exprimées en MeV.

- Nous avons considéré seulement dans ce tableau le couplage pseudo-vectoriel (1.5) pour l'échange du pion. Dans l'approximation de champ moyen relativiste que nous avons utilisé ici on peut montrer que ce couplage est le plus réaliste[4]. Nous reviendrons au §.1.4 sur la contribution du pion à l'énergie potentielle. Celle-là est ici répulsive, en apparente contradiction avec les résultats connus dans un formalisme non-relativiste.

- Les self-énergies d'interaction $\Sigma^*_s(p)$, $\Sigma^*_0(p)$ sont pratiquement constantes et valent, dans le cas du modèle (e) :

$$\Sigma^*_s(p_f^\circ) = -380 \text{ MeV} ,$$
$$\Sigma^*_0(p_f^\circ) = 300 \text{ MeV} .$$

La partie vectorielle $\Sigma^*_v(p)$ de l'interaction est plus faible et varie pratiquement comme p, avec :

$$\Sigma^*_v(p_f^\circ).M/p_f^\circ = 35 \text{ MeV}.$$

1.3e - Mécanisme de saturation

Pour comprendre le mécanisme de saturation de la matière nucléaire dans cette approche de champ moyen relativiste il est intéressant de discuter en détail le cas du modèle (a). Les résultats sont tout à fait analogues pour les schémas les plus complets (d,e). L'équation self-consistante se réduit dans ce cas à :

$$\Sigma^*_s \equiv M^* - M = -\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\left[\frac{2}{\pi^2}\int_0^{p_f} p^2 dp \frac{M^*}{\sqrt{p^2+M^{*2}}}\right] \equiv -\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\rho_s(p_f), \quad (1.54)$$

et l'énergie de liaison est :

$$E/A = \frac{3}{p_f^3}\int_0^{p_f} p^2 dp \frac{p^2+MM^*}{\sqrt{p^2+M^{*2}}} + \frac{1}{2}\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\rho_B - \frac{1}{2}\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\rho_s/\rho_B - M \quad (1.55)$$

Remarquons tout d'abord que dans ce modèle la masse effective M^* ne dépend pas du moment p du nucléon mais seulement du moment de Fermi p_f.

Nous avons représenté sur la figure 4 la courbe de saturation correspondante (trait plein). Le comportement est déterminé à bas moment par l'énergie cinétique, à haut moment par la contribution de l'échange du ω et au niveau de la saturation par le bilan entre échange du sigma (attractif) et du oméga (répulsif). Il faut noter aussi par l'équation (1.54) que, lorsque le moment de Fermi tend vers l'infini, la masse effective M^* tend vers 0 et que la densité scalaire ρ_s tend vers une constante, au contraire de la densité baryonique ρ_B, et donc de la contribution du ω, qui tendent vers l'infini. Pour aller encore un peu plus loin il est intéressant de considérer plusieurs approximations successives à ce mécanisme de saturation. Il faut tout d'abord remarquer que la fonction d'onde du nucléon habillé (1.46) peut se décomposer sur une base de spineurs libres (1.28a) et (1.28b), bien que la contribution des nucléons de la mer de Dirac ne soit pas prise en compte explicitement dans (1.36). Cette décomposition s'écrit : [5,8]

$$u(\vec{p},s,\tau) = \left(\frac{\varepsilon^*_{(p)}\, M}{M^*\, \varepsilon_{(p)}}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+a^2(p)}} \left[u^0(\vec{p},s,\tau) + \sum_{s'} \langle s'|\vec{\sigma}.\hat{p}|s\rangle\, v^0(-\vec{p},s',\tau)\, a(\vec{p}) \right], \quad (1.56)$$

avec $a(p) \simeq \dfrac{p\,\Sigma'_s}{2MM^*}$ c'est-à-dire de l'ordre de 10 %.

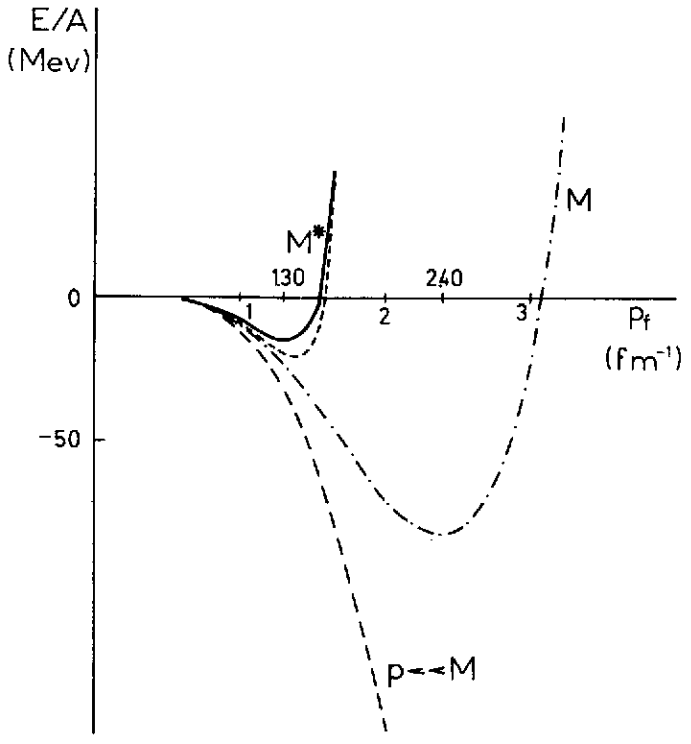


Fig.4 - Courbe de saturation dans la matière nucléaire symétrique et infinie.

Une première approximation à l'énergie de liaison (1.55) consiste donc à supposer a(p) négligeable et donc à prendre des spineurs libres $u^0(\alpha)$ pour évaluer l'énergie. On aura dans ce cas à remplacer M^* par M dans l'expression de l'énergie. La courbe de saturation est alors représentée par le trait mixte sur la figure 4. Cela confirme de façon très claire la nécessité de considérer ces composantes d'énergie négative dans le développement, et plus particulièrement pour des densités au-delà de la densité de saturation. A la saturation la correction à l'énergie due à cette composante est répulsive et de l'ordre de 8 MeV. Il faut aussi remarquer que cette correction d'énergie peut, dans une certaine mesure, être calculée en théorie des perturbations au premier ordre en a(p). La contribution résultante est indiquée par un tireté fin sur la figure 4. Cette correction est suffisante pour des densités plus grandes que la densité de saturation mais ne donne qu'une répulsion de 4 MeV à la saturation. Enfin la limite strictement non relativiste

consiste non seulement à prendre $M^* = M$ mais aussi à ne retenir que le terme dominant dans un développement en 1/M. Dans cette limite la densité scalaire ρ_s est alors égale à la densité baryonique ρ_B et la courbe de l'énergie en fonction du moment de Fermi est représentée par le trait mixte sur la figure 4. Dans ce cas il n'y a même plus de saturation ! Le terme d'énergie relativiste $\sqrt{p^2 + M^2}$ dans (1.54) et (1.55) est donc essentiel pour obtenir la saturation de la matière nucléaire. A $p = p_f^0$ cette correction "cinématique" (différence entre la courbe en tireté et en trait mixte sur la figure 4) est de l'ordre de 8 MeV. Toutes ces courbes sont bien sûr relatives aux mêmes constantes de couplages σN et ωN.

1.4. Au-delà du champ moyen

Beaucoup de corrections sont évidemment à considérer si l'on veut pouvoir fixer avec une certaine confiance la valeur "théorique" des constantes de couplage que l'on a traitées ici comme paramètres et pouvoir les comparer aux valeurs "expérimentales" déduites des observables nucléon-nucléon[6]. Nous ne détaillerons ici que le cas des corrélations à courte portée telles qu'elles sont prises en compte dans un formalisme de type Brueckner[9]. Les corrélations à longue portée de type R.P.A.[5], la contribution des forces à trois corps[10], ou encore la polarisation de la Mer de Dirac sont aussi à prendre en compte et ont été considérées, avec certaines approximations, dans la littérature. En particulier citons les résultats relatifs à la polarisation de la Mer de Dirac[11], traitée dans l'approximation Hartree (échange de σ et ω seulement). Dans ce cas le paramètre d'incompressibilité de la matière nucléaire est abaissée d'une centaine de MeV et la masse effective M^* (égale ici à 0,54 M) augmente jusqu'à environ 0,75 M. Toutes ces variations sont compatibles avec les résultats empiriques.

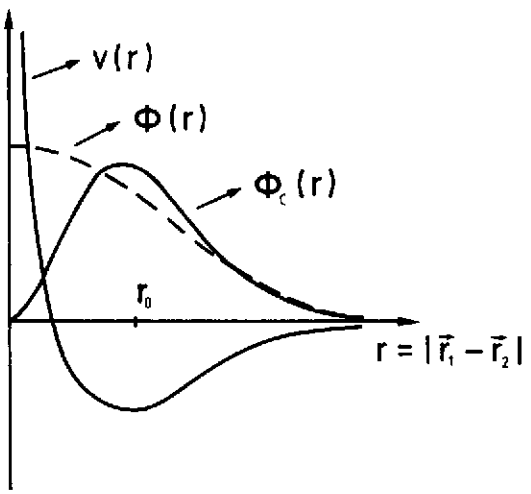


Fig.5 - Potentiel nucléon-nucléon V(r) et fonctions d'onde relatives non corrélées ϕ (r) et corrélées ϕ_c(r).

En ce qui concerne les corrélations à courte portée, la situation est résumée par la figure 5. En fonction de la variable r représentant la distance relative de deux nucléons le potentiel nucléon-nucléon a alors l'allure indiquée sur cette figure (pour un état relatif $^1S_0$ par exemple). La répulsion à courte portée est engendrée par l'échange d'un méson ω. Dans l'approximation de champ moyen (relativiste ou non relativiste d'ailleurs) la fonction d'onde de deux nucléons est indiquée par ϕ(r) (nous avons considéré, par simplicité, la fonction d'onde non relativiste). Un calcul exact, d'autre part, aurait généré, à partir du potentiel V(r), la fonction d'onde "corrélée" indiquée par ϕ_c(r) sur la figure 3. Celle-ci tend vers 0 à l'origine par suite de la forte répulsion à courte portée du potentiel NN. Il résulterait alors du choix de ϕ_c(r) au lieu de ϕ(r) que toutes les contributions à très courte portée relative, dans l'énergie par exemple, seraient complètement annulées. De telles contributions existent précisément dans l'énergie potentielle due à l'échange d'un pion et d'un rho. Dans la limite non relativiste le potentiel d'échange d'un pion a déjà été indiqué en (1.4). On peut le décomposer en deux parties :

$$V(q) = V_T(q) + V_C(q) = \frac{1}{12\pi}\,\frac{g^2}{4M^2}\,\frac{1}{m_\pi^2 + \vec{q}^2}\left\{\left[3\,\vec{\sigma}_1\cdot\vec{q}\;\vec{\sigma}_2\cdot\vec{q} - \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\,\vec{q}^2\right] + \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\,\vec{q}^2\right\}. \qquad (1.57)$$

$V_T(r)$ représente la partie tenseur de l'interaction (celle-ci donne une contribution nulle à l'énergie dans l'approximation de Hartree-Fock) et $V_c(r)$ est la partie centrale. Cette dernière peut se décomposer aussi en deux termes :

$$V_c(q) = \frac{1}{12\pi}\frac{q^2}{4M^2}\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_\pi^2+\vec{q}^2}\right). \qquad (1.58)$$

Dans l'espace des coordonnées le second terme correspond à la fonction de Yukawa bien connue $e^{-m_\pi r}/r$ et donne une contribution attractive à l'énergie totale. Par contre le premier terme correspond à une fonction $\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$. Celle-ci est totalement sans effet dans un calcul réaliste du fait des corrélations à courtes portées que nous venons de mentionner. Dans un calcul Hartree-Fock cependant celle-ci contribue de manière appréciable à l'énergie et correspond à une répulsion. C'est pourquoi, dans cette approximation, la valeur de l'énergie potentielle due à l'échange d'un méson π et ρ indiquée dans le tableau 2 est répulsive. Une manière simple de simuler, à moindre frais, l'effet des corrélations sur l'échange d'un π et ρ consiste à enlever -à la main- la partie du potentiel d'interaction correspondant à cette fonction delta. Cela se fait dans l'approximation non relativiste et l'on peut étendre très facilement cette manipulation au formalisme relativiste. Dans ce cas, les nouvelles contributions à l'énergie sont rassemblées dans le tableau 3. Il faut toujours, bien entendu, réajuster les constantes de couplage σN et ωN pour avoir le même point de saturation. Ce tableau est à comparer au modèle (d) du tableau 2. Comme l'on s'y attendait la contribution de l'échange d'un π et ρ est alors attractive.

Cas	$g_\sigma^2/4\pi$	$g_\omega^2/4\pi$	$M^*(p^\circ_f)/M$	K_{NM}	a_4(MeV)	$\langle T/A\rangle - M$	$\langle V^D/A\rangle$		$\langle V^E/A\rangle$			
							σ	ω	σ	ω	π	ρ
f	5,80	10,95	0,56	450	32	10	-135	130	28	-22	-7	-19

- Tableau 3 -

Propriétés de la matière nucléaire dans le modèle où la partie delta (voir (I.58)) du potentiel d'échange d'un pion et d'un rho a été enlevée. On a choisi ici K = 3,7 pour le couplage dérivatif ρ- N .

Il conviendrait, enfin, d'estimer la contribution des termes du second ordre à l'énergie (figure 6) pour avoir une idée plus précise de la contribution exacte du π et ρ dans la matière nucléaire. A cet ordre en effet la partie tenseur de leur interaction (1.57) doit être importante. Dans un calcul non relativiste celle-ci est estimée à environ - 5 MeV.

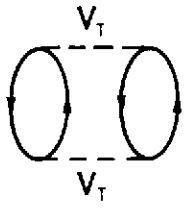


Fig.6 - Contributions du second ordre à l'énergie, dues à la partie tenseur de l'interaction nucléon-nucléon.

2. APPLICATIONS

Les applications que nous allons détailler dans cette partie seront toutes développées dans le formalisme relativiste étudié en détail dans le premier chapitre. Partant d'un lagrangien effectif contenant les degrés de liberté nucléoniques et mésoniques et leurs couplages les plus importants, nous avons pu éliminer les champs mésoniques au profit d'un potentiel nucléon-nucléon. Ces champs mésoniques sont traités ici dans l'approximation statique c'est-à-dire que l'on néglige les effets de retard dans l'interaction NN. Les champs mésoniques définis par (1.6) et (1.7) sont alors indépendants du temps. La deuxième approximation qui est faite consiste à ne pas considérer la polarisation de la mer de Dirac due aux nucléons de la mer de Fermi (calcul à l'ordre zéro). Tous ces effets sont représentés phénoménologiquement, dans cette approche, par les constantes de couplage $g_\sigma^2/4\pi$ et $g_\omega^2/4\pi$ traitées ici comme paramètres libres. De même le noyau sera décrit par un déterminant de Slater et le modèle résolu dans l'approximation de Hartree-Fock. Les corrélations à courte portée devront elles aussi renormaliser ces constantes de couplage.

Le point important est que, une fois défini le point de saturation de la matière nucléaire, on peut traiter, dans ces mêmes approximations et avec la même interaction microscopique nucléon-nucléon, la structure des noyaux finis. En particulier, nous calculerons leur spectre à une particule, densité de charge, énergie de liaison, rayon de charge, etc.., avec un seul nouveau paramètre qui est la masse du méson sigma. Comme nous l'avons vu dans le chapitre I celle-ci ne peut en effet être fixée précisément dans la matière nucléaire.

2.1. Structure des noyaux finis

2.1a - Equation de Dirac pour la fonction d'onde des nucléons

L'état d'un nucléon sera ici entièrement déterminé par ses nombres quantiques $\alpha = n, \ell, j, m, \tau$ et le champ fermionique est développé suivant (1.36). La partie radiale de la fonction d'onde dépend quant à elle de $a = n, \ell, j, \tau$. On écrira la fonction d'onde générale, dans l'espace des coordonnées, sous la forme :

$$\varphi_\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} i\, G_a(r)/r \\ F_a(r)/r\ \vec{\sigma}\cdot\hat{r} \end{pmatrix} \mathcal{Y}_{\ell,j,m}(\Omega) \Big\}_\tau \,. \qquad (2.1)$$

La partie angulaire $\mathcal{Y}_{\ell,j,m}(\Omega)$ se décompose ensuite suivant les harmoniques sphériques :

$$\mathcal{Y}_{\ell,j,m}(\Omega) = \sum_{m_\ell,\mu} \sqrt{2\ell+1} \begin{pmatrix} \ell & 1/2 & j \\ m_\ell & \mu & -m \end{pmatrix} Y_\ell^{m_\ell}(\Omega)\, \chi_\mu \,, \qquad (2.2)$$

avec la normalisation suivante pour les parties radiales :

$$\int_0^\infty \left[G_a^2(r) + F_a^2(r) \right] dr = 1 \qquad \text{pour tout a} \,. \qquad (2.3)$$

L'équation de Dirac pour la fonction d'onde des nucléons s'obtient alors en minimisant la

valeur moyenne du Hamiltonien (1.30) dans le déterminant de Slater (1.34). La partie cinétique et potentielle est alors identique à (1.37) aux fonctions d'onde près[12,13] et avec la correspondance $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$. La valeur moyenne de l'énergie potentielle se décompose de la même manière en terme direct (figure 3.a) et d'échange (figure 3.b). Dans un noyau à couches fermées en spin, seules les contributions provenant de l'échange du σ et ω (composante temporelle) ainsi que du ρ (composante temporelle et pour des noyaux N≠Z seulement) sont non nulles/Par contre tous les mésons contribuent au terme de Fock. Le principe variationnel s'écrit alors :

$$\delta\left[\langle \phi_0 | H | \phi_0 \rangle - \epsilon \langle \phi_0 | N | \phi_0 \rangle \right] \equiv \delta I = 0 , \tag{2.4}$$

où l'on a introduit sous forme de multiplicateur de Lagrange la condition de normalisation des fonctions d'onde avec :

$$N = \int d^3x \, \Psi^+(x) \, \Psi(x) .$$

Les variations se font sur la grande composante - $G_a(r)$ - et la petite composante - $F_a(r)$ - de la fonction d'onde radiale :

$$\delta I = \sum_a \left[\frac{\partial I}{\partial G_a} \delta G_a + \frac{\partial I}{\partial F_a} \delta F_a \right] , \tag{2.5}$$

et donc la condition de minimisation s'écrit sous la forme d'un système de deux équations différentielles couplées du premier ordre pour chaque orbite a :

$$\frac{\partial I}{\partial G_a} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial F_a} = 0 . \tag{2.6}$$

Avec les expressions générales (1.37) ce système s'écrit explicitement[12,13] :

$$\begin{cases} \dfrac{dG_a}{dr} + \dfrac{\kappa}{r} G_a = -\varepsilon_a W^{\rho_T}(r) \, G_a + \left[M + E_a + W^{\sigma}(r) - W^{\omega}(r) - W^{\rho_V}(r) \right] F_a \\ \qquad\qquad - U_a\left[G, F, r\right] \\ \dfrac{dF_a}{dr} - \dfrac{\kappa}{r} F_a = \varepsilon_a W^{\rho_T}(r) \, F_a + \left[M - E_a + W^{\sigma}(r) + W^{\omega}(r) + W^{\rho_V}(r) \right] G_a \\ \qquad\qquad + V_a\left[G, F, r\right] \end{cases} \tag{2.7}$$

Les potentiels $W^{\sigma, \omega, \rho_V, \rho_T}(r)$ représentent ici les termes de Hartree pour l'échange de σ, ω et $\rho_{V,T}$ (partie vectorielle et dérivative du couplage ρ-N (1.14)) ; les termes non locaux $U_a(G,F,r)$ et $V_a(G,F,r)$ proviennent des contributions de Fock[12,13], enfin κ fait intervenir le couplage spin-orbite :

$$\kappa = \pm \left(j + 1/2 \right) \qquad \text{pour } j = \ell \mp 1/2 \quad . \tag{2.8}$$

E_a représente l'énergie à une particule que l'on pourra décomposer en $E_a = \mathcal{E}_a + M$, $\mathcal{E}_a$ étant l'énergie Hartree-Fock de l'orbite considérée.

Nous ne mentionnerons ici que les contributions les plus simples :

$$W^{\sigma}(r) = - \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \sum_b (2j_b+1) \int_0^\infty dr' \frac{1}{m_\sigma \sqrt{rr'}} I_0(m_\sigma r_<) K_0(m_\sigma r_>) \left[G_b^2(r') - F_b^2(r') \right] \tag{2.9a}$$

$$W^{\omega}(r) = + \frac{g_\omega^2}{4\pi} \sum_b (2j_b+1) \int_0^\infty dr' \frac{1}{m_\omega \sqrt{rr'}} I_0(m_\omega r_<) K_0(m_\omega r_>) \left[G_b^2(r') + F_b^2(r') \right] \tag{2.9b}$$

$$W^{\rho_T}(r) = - \frac{g_\rho^2}{4M^2} \kappa^2 \frac{m_\rho^3}{4\pi} \sum_b (2j_b+1) \tau_b \int_0^\infty dr' I_1(m_\rho r_<) K_1(m_\rho r_>) \cdot \frac{1}{m_\rho \sqrt{rr'}} \cdot \left[2 G_b(r') F_b(r') \right] \tag{2.9c}$$

Il convient de remarquer que les potentiels $W^{\sigma}(r)$, $W^{\omega}(r)$ par exemple sont les analogues, dans les noyaux, des parties scalaire et vecteur (composante temporelle) de la self-énergie $\Sigma(p)$ dans la matière nucléaire (pour la partie provenant du terme de Hartree tout au moins). Au centre du noyau ces potentiels sont de l'ordre de :

$$W^{\sigma}(0) \simeq -400 \text{ MeV} \quad , \quad W^{\omega}(0) \simeq 350 \text{ MeV} \quad . \tag{2.10}$$

De même on pourra définir une masse effective, dans l'approximation Hartree toujours :

$$M^*(r) = M + W^{\sigma}(r) \qquad \text{avec } M^*(0)/M \simeq 0{,}55 \quad . \tag{2.11}$$

Il est important de noter que l'on peut construire trois densités différentes à partir des grande et petite composantes de la fonction d'onde du nucléon. Ces trois densités d'ailleurs interviennent dans les contributions (2.9.a,b,c) : il s'agit des densités baryoniques, scalaires (aussi présentes dans la matière nucléaire) et tensorielles définies par :

$$\rho_B(r) = \sum_b \frac{2j_b+1}{4\pi r^2} \left[G_b^2(r) + F_b^2(r) \right] , \tag{2.12a}$$

$$\rho_s(r) = \sum_b \frac{2j_b+1}{4\pi r^2} \left[G_b^2(r) - F_b^2(r) \right] , \tag{2.12b}$$

$$\rho_T(r) = \sum_b \frac{2j_b+1}{4\pi r^2} \left[2 G_b(r) F_b(r) \right] . \tag{2.12c}$$

Pour réécrire l'équation de Dirac (2.7) de manière plus condensée il faut transformer les

termes non locaux U_a et V_a en contributions locales. Cette transformation n'est bien sûr pas unique. On pourra choisir par exemple de décomposer ces termes de la façon suivante[13] :

$$U_a[G, F, r] = \left[\frac{G_a U_a}{G_a^2 + F_a^2}\right] G_a + \left[\frac{F_a U_a}{G_a^2 + F_a^2}\right] F_a , \qquad (2.13)$$

et de même pour V_a, ce qui conduit alors à l'équation de Dirac :

$$\left[-i\vec{\alpha}.\vec{\nabla} + \gamma_0 M + \gamma_0 \Sigma^a(r)\right] \varphi_\alpha(\vec{r}) = E_a \varphi_\alpha(\vec{r}) , \qquad (2.14)$$

avec la self-énergie $\Sigma^a(r)$, qui dépend de l'état -a- considéré :

$$\Sigma^a(r) = \Sigma_s^a(r) + \gamma_0 \Sigma_0^a(r) + i\vec{\gamma}.\hat{r}\,\Sigma_v^a(r) + i\gamma_0\vec{\gamma}.\hat{r}\,\Sigma_T^a(r) \qquad (2.15)$$

Remarquons que dans les noyaux et, contrairement à la matière nucléaire, la self-énergie comporte un terme tenseur non nul $\Sigma_t^a(r)$ (celui-ci se réduit à $W^{\rho_T}(r)$ dans l'approximation de Hartree).

2.1b - Quelques résultats

Comme nous venons de le rappeler, le seul nouveau paramètre important est la masse du méson σ qui doit être choisie entre 400 et 600 MeV environ. Il est facile de se rendre compte que la portée de l'échange du σ va conditionner fortement la valeur du rayon carré moyen, ou du rayon de charge des noyaux. C'est elle qui définit, dans un système fini, l'échelle des distances. Cette masse est ajustée ici pour reproduire le rayon de charge de ^{16}O : on obtient ainsi la valeur suivante :

$$m_\sigma = 440 \text{ MeV} .$$

Il est remarquable de constater alors que les rayons de charge obtenus dans ce cas pour tous les autres noyaux caractéristiques, et indiqués dans le tableau 4, sont parfaitement en accord, à mieux que 1% près avec les valeurs expérimentales déduites des expériences de diffusion d'électrons[14]. La densité de charge est obtenue quant à elle à partir de la densité de proton :

$$\rho_{B_p}(r) = \sum_{b:\,\text{protons}} \frac{2j_b+1}{4\pi r^2}\left[G_b^2(r) + F_b^2(r)\right] . \qquad (2.16)$$

Cette densité correspond à la répartition de particules ponctuelles chargées et, pour avoir la densité de charge globale, il convient de convoluer celle-ci avec la densité de charge du proton lui-même soit :

$$\rho_c(r) = \int \rho_{B_p}(r')\, g(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, d^3r' , \qquad \text{avec} \qquad (2.17)$$

$$g_p(|\vec{r}|) = \left(\frac{1}{r_0\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-r^2/r_0^2} \qquad \text{et} \quad r_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle r_p \rangle_{r.m.s.} \quad . \tag{2.18}$$

	^{16}O			^{40}Ca			^{48}Ca			^{90}Zr		^{208}Pb	
	E/A (MeV)	r_{ch} (fm)	$\ell.s_p$ (MeV)	E/A	r_{ch}	$\ell.s_p$	E/A	r_{ch}	$\ell.s_p$	E/A	r_{ch}	E/A	r_{ch}
Tous mésons	-5,6	2,73	6,3	-6,8	3,47	8,0	-7,1	3,47	4,1	-7,4	4,26	-6,7	5,47
Exp.	-7,4	2,73	6,3	-8,13	3,48	7,2	-8,5	3,47	4,3	-8,7	4,27	-7,8	5,50
(CM)	-0,6			-0,2			-0,2			-0,08		-0,02	

- Tableau 4 -

Propriétés importantes de quelques noyaux caractéristiques, dans l'approximation de Hartree-Fock. Les contributions indiquées par (CM) représentent les corrections (non relativistes) dues au mouvement du centre de masse et $\ell.s_p$ est le splitting spin-orbite de la dernière couche de protons 1p ou 1d.

La densité de charge du proton g(r) dépend du rayon carré moyen de charge de celui-ci. On choisira $\langle r_p \rangle_{r.m.s}$ = 0,8 fm, valeur expérimentale pour un nucléon libre. Pour tous les calculs numériques présentés par la suite nous avons choisi de considérer le modèle le plus complet tel qu'il a été résumé dans le tableau 3 du premier chapitre, c'est-à-dire où la contribution de tous les mésons a été prise en compte, avec K = 3,7 pour le couplage dérivatif ρ-N, et où la partie delta dans l'interaction due à l'échange d'un pion et d'un rho a été enlevée. Les constantes de couplages $g^2_\sigma/4\pi$ et $g^2_\omega/4\pi$ doivent cependant être réajustées compte tenu de la masse m_σ = 440 MeV qui a été choisie ici. Ces nouvelles constantes sont :

$$g^2_\sigma/4\pi = 4,2 \quad , \quad g^2_\sigma/4\pi = 11,2 \quad .$$

Les figures 7 représentent les densités de charge de ^{16}O, ^{40}Ca et ^{48}Ca obtenues dans ce modèle (trait pointillé). Le trait plein représente sur ces figures la densité de charge expérimentale avec les erreurs correspondantes. Il est important de remarquer que la surface de ces noyaux est particulièrement bien reproduite malgré la valeur quelque peu élevée ($\simeq$ 450 MeV) du paramètre d'incompressibilité dans la matière nucléaire.

Nous avons rassemblé dans le tableau 4 différents résultats importants : énergie de liaison par particule, rayon de charge et splitting spin-orbite des couches 1p pour ^{16}O et 1d pour ^{40}Ca et ^{48}Ca. Nous avons indiqué d'autre part les données expérimentales ainsi que les estimations des corrections dues au mouvement du centre de masse, estimations empruntées d'un calcul Hartree-Fock non relativiste[15]. L'énergie de liaison totale peut être calculée facilement par l'expression suivante, valable pour tout

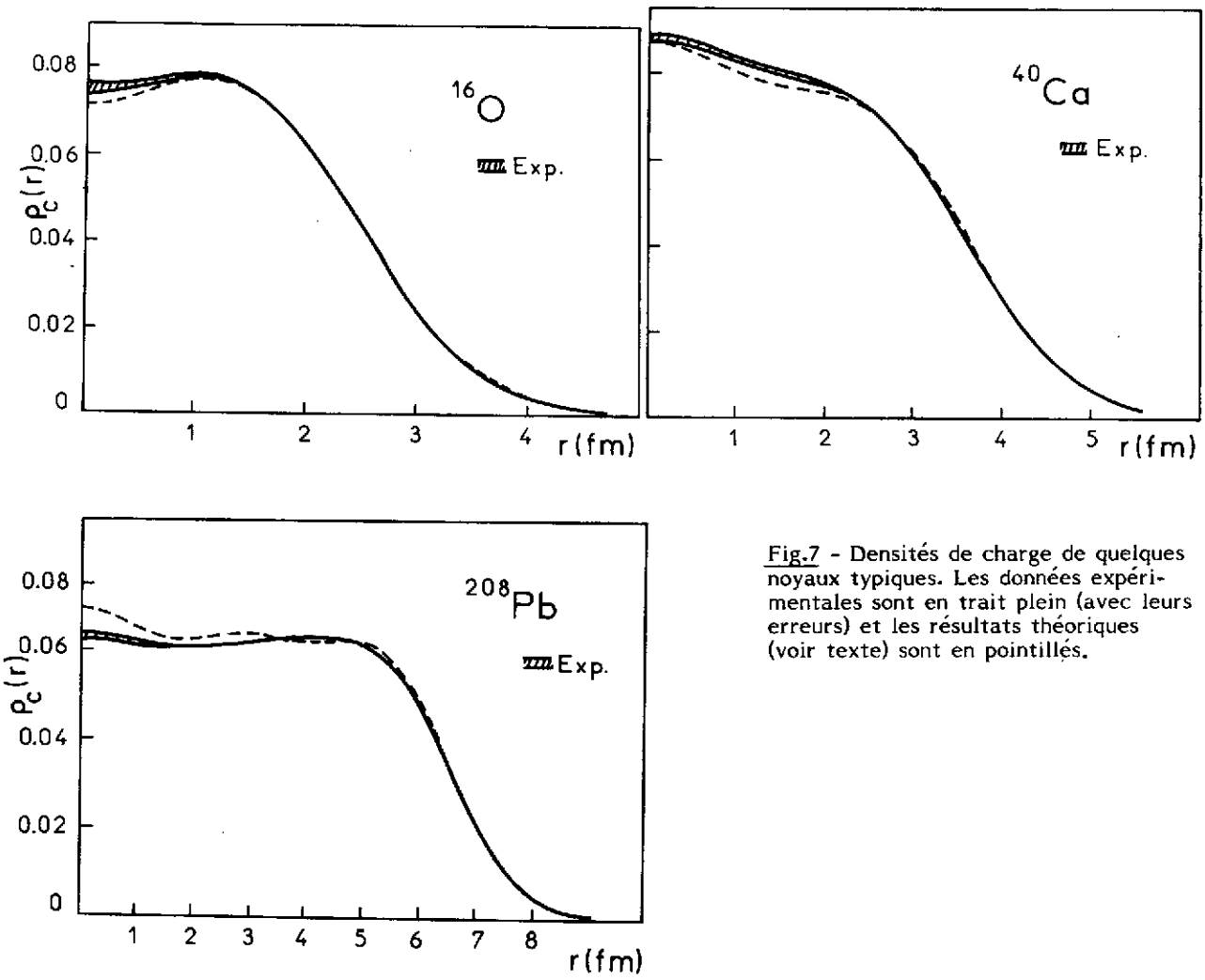


Fig.7 - Densités de charge de quelques noyaux typiques. Les données expérimentales sont en trait plein (avec leurs erreurs) et les résultats théoriques (voir texte) sont en pointillés.

modèle Hartree-Fock relativiste ou non :

$$E = \sum_a (T_a + E_a)/2 - A M \quad , \quad \text{où } T_a \text{ est l'énergie cinétique de l'orbite a .} \qquad (2.19)$$

Les valeurs indiquées dans le tableau 4 montrent que tous les noyaux sont ici sous liés d'environ 1,1 MeV par particule, si l'on inclut les corrections du mouvement du centre de masse. La dépendance en fonction du nombre de masse est par contre fort correcte. Enfin le splitting spin-orbite de la dernière couche des noyaux ^{16}O, ^{40}Ca et ^{48}Ca apparaît très naturellement dans cette approche relativiste et il est, de plus, en parfait accord avec les résultats empiriques. En particulier il n'est pas facile d'obtenir simultanément le bon splitting pour les noyaux ^{40}Ca et ^{48}Ca. Expérimentalement celui-ci passe en effet de 7,2 MeV à 4,3 MeV. Il ne peut être reproduit dans ces modèles que si les termes de Fock sont calculés et en particulier l'échange de mésons isovectoriels π et ρ . Dans un modèle ne comportant que l'échange de σ et ω le spin-orbite de ^{48}Ca est du même ordre de grandeur que celui de ^{40}Ca.

Pour compléter la discussion des propriétés générales des noyaux finis nous pouvons aussi

envisager d'étudier la distribution de moment de ces noyaux. Il s'agit de l'équivalent de la densité baryonique dans l'espace des impulsions. Les fonctions d'onde des nucléons se calculent par transformée de Fourier :

$$\tilde{\varphi}_\alpha(\vec{k}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}\, \varphi_\alpha(\vec{r}) , \tag{2.20}$$

c'est-à-dire en explicitant les deux composantes des spineurs :

$$\tilde{\varphi}_\alpha(\vec{k}) = \begin{pmatrix} i\,\tilde{G}_a(k) \\ \tilde{F}_a(k)\,\vec{\sigma}.\hat{k} \end{pmatrix} \mathcal{Y}_{\ell,j,m}(\Omega_k)\,\xi_\tau , \tag{2.21}$$

avec respectivement pour la grande et petite composante :

$$\begin{cases} \tilde{G}_a(k) = \dfrac{i^\ell}{2\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty r\,dr\; j_\ell(kr)\,G_a(r) , \\[2ex] \tilde{F}_a(k) = \dfrac{i^{\ell'}}{2\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty r\,dr\; j_{\ell'}(kr)\,F_a(r) , \end{cases} \tag{2.22}$$

où $\ell' = \ell \pm 1$ pour $j = \ell \mp 1/2$.

La distribution d'impulsion s'écrit alors :

$$n(k) = \sum_a \frac{2j_a+1}{4\pi}\left[\,|\tilde{G}_a(k)|^2 + |\tilde{F}_a(k)|^2\,\right] . \tag{2.23}$$

Celle-ci est normalisée de la manière suivante :

$$\int_0^\infty 4\pi k^2\,dk\; n(k) = A .$$

La comparaison de cette distribution d'impulsion, dans cette approche relativiste, avec celle obtenue dans un calcul non relativiste avec une interaction de Skyrme est instructive de deux points de vue[13]. D'une part la pente de cette distribution, au-delà de k = 100 MeV/c pour le noyau ^{16}O par exemple, est très sensible à la valeur du rayon de charge du noyau tel qu'il est obtenu dans ces modèles. D'autre part, lorsque les calculs théoriques relativiste et non relativiste sont ajustés de façon à avoir un rayon de charge identique, leur distribution d'impulsion correspondante sont pratiquement indiscernables jusqu'à un moment de l'ordre de 350 MeV/c. Il semblerait alors que la distribution d'impulsion calculée dans l'approximation de particule indépendante soit peu sensible à la description dynamique détaillée du système. Pour ce noyau la valeur moyenne de l'impulsion par particule est de l'ordre de 170 MeV/c.

2.1c - Dépendance en densité de l'interaction effective équivalente[16]

Nous nous placerons ici dans l'approximation Hartree de manière à pouvoir effectuer facilement les développements non relativistes. Les résultats obtenus sont bien sûr analogues pour le modèle le plus complet. Dans cette approximation l'équation de Dirac (2.7) se réécrit simplement :

$$\begin{cases} \dfrac{dG_a}{dr} + \dfrac{\kappa}{r} G_a = \left[M + E_a + W^{\sigma} - W^{\omega} \right] F_a , \\ \dfrac{dF_a}{dr} - \dfrac{\kappa}{r} F_a = \left[M - E_a + W^{\sigma} + W^{\omega} \right] G_a . \end{cases} \tag{2.24}$$

En éliminant la petite composante $F_a(r)$ entre ces deux équations on arrive alors immédiatement à une équation différentielle du second ordre pour $G_a(r)$ qui est de la forme :

$$\left[-\vec{\nabla} \frac{1}{\bar{M}(r)} \vec{\nabla} + V_c(r) + V_D(r) + V_{ls}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{\sigma} \right] G_a(r) = \varepsilon_a G_a(r) . \tag{2.25}$$

Cette équation est une équation de Schrödinger pour la grande composante, avec les potentiels central et spin-orbite suivants :

$$\begin{cases} V_c(r) = W^{\sigma}(r) + W^{\omega}(r) , \\ V_{ls}(r) = \dfrac{1}{r} \dfrac{d}{dr} \left[\dfrac{1}{2\bar{M}(r)} \right] . \end{cases} \tag{2.26}$$

Nous avons représenté par $\bar{M}(r)$ la nouvelle masse effective qui apparaît dans cette équation :

$$\bar{M}(r) = M + \frac{1}{2} \left[W^{\sigma}(r) - W^{\omega}(r) \right] . \tag{2.27}$$

L'énergie ε_a dans (2.25) est l'énergie de liaison Hartree-Fock $\varepsilon_a = E_a - M$. Enfin le potentiel $V_D(r)$ est le potentiel de Darwin et n'est pas très important numériquement. D'après les valeurs à l'origine des potentiels $W^{\sigma}(r)$ et $W^{\omega}(r)$, eq.(2.10), le potentiel central au centre du noyau sera alors de l'ordre de -50 MeV. Le potentiel spin-orbite quant à lui fait intervenir la différence de ces deux potentiels qui est de l'ordre de grandeur de la masse du nucléon. Remarquons aussi que la solution de l'équation de Schrödinger (2.25) ne doit pas être normalisée à 1, comme dans le cas non relativiste, car il ne s'agit que de la grande composante de la vraie fonction d'onde (2.1). Il convient de reconstruire la petite composante à l'aide d'une des deux équations (2.24) et ensuite seulement de normaliser le spineur selon (2.3).

Nous allons procéder maintenant à un développement non relativiste (en fonction de 1/M) de ces deux potentiels central et spin-orbite afin d'en déduire une interaction effective qui s'exprimera simplement en fonction de la densité baryonique non relativiste $\rho_0(r)$ que l'on définira. Dans l'approximation de Hartree les potentiels $W^{\sigma}(r)$ et $W^{\omega}(r)$ s'expriment directement en fonction de la valeur moyenne des champs de σ et ω (composante temporelle seulement), calculés selon (1.20). On a dans ce cas :

$$W^{\sigma}(r) = g_{\sigma} \sigma(r) \quad , \quad W^{\omega}(r) = g_{\omega} V^{0}(r) . \tag{2.28}$$

et l'équation de Klein Gordon pour les champs σ et ω s'écrira :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^2 \sigma(r) - m_\sigma^2 \sigma(r) = g_\sigma \rho_s(r) , \\ \vec{\nabla}^2 V^0(r) - m_\omega^2 V^0(r) = - g_\omega \rho_B(r) . \end{cases} \tag{2.29}$$

On peut résoudre ces équations différentielles par approximations successives, en négligeant au premier ordre le laplacien des champs, et l'on obtient ainsi les séries suivantes :

$$\begin{cases} \sigma(r) = - \dfrac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \left[\rho_s(r) + \dfrac{1}{m_\sigma^2} \vec{\nabla}^2 \rho_s(r) + \cdots \right] , \\ V^0(r) = \dfrac{g_\omega}{m_\omega^2} \left[\rho_B(r) + \dfrac{1}{m_\omega^2} \vec{\nabla}^2 \rho_B(r) + \cdots \right] . \end{cases} \tag{2.30}$$

Compte tenu de la masse relativement élevée des mésons σ et ω ces développements doivent converger rapidement et l'on s'arrêtera ici au deuxième ordre. Enfin il convient d'exprimer les densités scalaires $\rho_s(r)$ et baryoniques $\rho_B(r)$ en fonction de la densité de matière non relativiste $\rho_0(r)$. On définira celle-ci de la manière suivante :

$$\rho_B(r) \equiv \rho_0(r) . \tag{2.31}$$

Cette définition de $\rho_0(r)$ a l'avantage de conserver la condition de norme de la fonction d'onde.

D'autre part, en utilisant l'équation de Dirac (2.7a) on a :

$$\sum_a \frac{2j_a+1}{4\pi r^2} F_a^2(r) = \frac{1}{[2\bar{M}(r)]^2} \tau(r) , \tag{2.32}$$

où $\tau(r)$ représente la densité d'énergie cinétique :

$$\tau(r) = \sum_a \frac{2j_a+1}{4\pi} \left| \vec{\nabla} \frac{G_a(r)}{r} \right|^2 . \tag{2.33}$$

La densité scalaire s'écrit donc finalement :

$$\rho_s(r) = \rho_0(r) - \frac{1}{2\bar{M}^2(r)} \tau(r) . \tag{2.34}$$

Enfin la masse effective (2.27) pourra elle aussi se développer en fonction des quantités "non relativistes" $\rho_0(r)$ et $\tau(r)$ par l'intermédiaire de (2.28) et (2.30) :

$$\bar{M}(r) = M - \frac{1}{2}\left(\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} - \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\right)\rho_0(r) - \frac{1}{2}\left(\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^4} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^4}\right)\vec{\nabla}^2\rho_0 \qquad (2.35)$$

$$+ \frac{1}{4M^2}\left(\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\right)\left[\frac{M}{\bar{M}(r)}\right]^2 \tau(r) \ .$$

Si l'on rassemble toutes ces contributions au second ordre en 1/M on arrivera alors à écrire les potentiels central et spin-orbite en fonction de la densité baryonique $\rho_0(r)$, de la densité d'énergie cinétique $\tau(r)$ et de la densité de spin $\vec{J}(r)$, définie par :

$$\vec{J}(r) = -i\sum_a^1 \frac{2j_a+1}{4\pi r} G_a(r)\left[\vec{\nabla}\frac{G_a(r)}{r} \times \vec{\sigma}\right] \ . \qquad (2.36)$$

En reprenant les notations de la référence 17, on pourra alors définir une densité hamiltonienne "à la Skyrme" qui aura la forme générale suivante :

$$\mathcal{H} = \frac{\tau(r)}{2M} - \frac{1}{2}a\rho_0^2(r) + \frac{1}{2}b\left[\vec{\nabla}^2\rho_0(r)\right]^2 + \frac{c}{2M^2}\rho_0(r)\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(r) \qquad (2.37)$$

$$+ \frac{1}{3}d\,\rho_0^3(r) + e\,\rho_0(r)\,\tau(r) \ .$$

Celle-ci est tout à fait analogue à la paramétrisation des forces de Skyrme et de plus, quantitativement, les valeurs numériques des différents coefficients sont similaires à celles qui sont généralement considérées[16]. Il convient de remarquer que cette densité hamiltonienne comporte des termes en ρ_0^3 qui, dans l'approche non relativiste traditionnelle, correspond à une interaction à trois corps dont l'intensité est un paramètre. Dans ce formalisme relativiste cette dépendance intervient déjà au niveau des interactions à deux corps que nous avons considérées jusqu'ici et provient simplement du développement de la masse effective (2.35) en fonction de la densité de matière (2.31).

2.2. Interactions électromagnétiques

2.2a - Conservation du courant

Il est primordial, lorsque l'on s'intéresse à des transitions électromagnétiques (moments magnétiques, facteurs de forme élastique et inélastique..) de s'assurer que le courant électromagnétique est effectivement conservé. Dans le cadre d'une théorie non relativiste ce problème conduit tout naturellement aux contributions des courants d'échange[2]. Le raisonnement est le suivant : les fonctions d'onde individuelles des nucléons sont solutions d'une équation de Schrödinger

$H\Psi = E\Psi$ où $H = T + V$ est le Hamiltonien du système, T l'énergie cinétique et V est le

potentiel d'interaction à deux corps. Dans ce cas le courant électromagnétique à un corps $\vec{J}_0$ (approximation d'impulsion) vérifie l'équation de conservation suivante pour un nucléon libre :

$$\vec{\nabla}.\vec{J}_0 + i\left[T_3, \frac{1+\tau_3}{2}\right] = 0 \quad , \qquad \frac{1+\tau_3}{2}\, e \text{ représentant la charge du nucléon} \tag{2.38}$$

(supposé ponctuel ici).

Par contre le courant total $\vec{J}$ doit vérifier l'équation de conservation dans le milieu :

$$\vec{\nabla}.\vec{J} + \left[H, \frac{1+\tau_3}{2}\right] e = 0 \quad . \tag{2.39}$$

Lorsque le potentiel V(r) à une partie dépendant de l'isospin (échange d'un pi et rho par exemple) qui ne commute pas avec τ_3, alors l'équation (2.39) génère des composantes isovectorielles, longitudinales, dans le courant total $\vec{J}$. Celles-ci ne sont rien d'autre que les contributions des courants d'échange indiquées sur la figure 2 (courant pionique et de paire respectivement).

Ce raisonnement s'applique également dans un formalisme relativiste. Il est important non seulement de considérer les corrections provenant des fonctions d'onde relativistes -par l'intermédiaire des self-énergies d'interactions (2.15)- mais aussi de celles provenant de la modification de l'opérateur électromagnétique lui-même dans le milieu, représenté par une bulle sur la figure 8. Dans le <u>modèle à particules indépendantes</u> développé ici l'équivalent de l'équation (2.38) est précisément l'identité de Ward-Takahashi[18], introduite en électrodynamique quantique. Soit $\Gamma^\mu(p,p')$ cet opérateur électromagnétique dans le milieu. Dans la limite de densité nulle il se réduit évidemment à l'opérateur nu $\gamma^\mu(1+\tau_3)/2$ du couplage d'un photon sur un nucléon libre (et qui correspond dans la limite non relativiste au courant $\vec{J}_0$). On écrira alors :

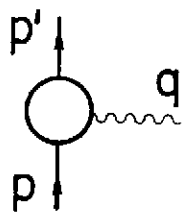


Fig.8 - Couplage électromagnétique photon-nucléon dans le milieu.

$$\Gamma^\mu(p,p') = \gamma^\mu \frac{1+\tau_3}{2} + \Lambda^\mu(p,p') \quad , \tag{2.40}$$

et l'identité de Ward-Takahashi s'écrit :

$$q_\mu \Lambda^\mu(p,p') = -\frac{1+\tau_3}{2}\left[\Sigma(p') - \Sigma(p)\right] \quad \text{avec } q = p' - p \quad . \tag{2.41}$$

Dans cette approche relativiste le courant à un corps $\vec{J}_0$ et le courant de paire (figure 2.b) dans le milieu nucléaire sont inclus automatiquement dans l'opérateur (2.40) et doivent vérifier (2.41). Il convient bien sûr de rajouter, dans ce formalisme, les contributions de courant à deux corps ("corrélations") comme par exemple le courant pionique (figure 2.a). Pour un transfert nul l'équation (2.41) conduit à la forme explicite suivante de l'opérateur électromagnétique :

$$\Lambda^\mu(p,p) = -\frac{1+\tau_3}{2}\,\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} \quad . \tag{2.42}$$

Cette expression permet en particulier de calculer les moments magnétiques[18].

2.2b - Moments magnétiques des noyaux

Nous allons détailler plus particulièrement dans ce paragraphe les corrections relativistes sur les fonctions d'onde[19], les plus faciles à comprendre dans une première approche. Nous choisirons donc de calculer les contributions provenant de l'opérateur libre γ^μ ou plutôt de sa généralisation au cas où l'on considère des particules non ponctuelles :

$$F_1(q^2)\,\gamma^\mu + i\,\frac{F_2(q^2)}{2M}\,\sigma^{\mu\nu}\,q_\nu \quad . \tag{2.43}$$

$F_2(0)$ représente ici la partie anormale du moment magnétique du nucléon et $F_1(0) = 1$ est sa charge.

Pour les noyaux comportant un proton en plus ou en moins par rapport à un noyau à couches fermées comme ^{16}O par exemple, et sans tenir compte des corrections du centre de masse, leur moment magnétique se décompose alors en deux contributions :

$$\mu = \mu_d + \mu_a \quad , \qquad \text{avec explicitement :} \tag{2.44}$$

$$\mu_d = \omega\,\frac{1+\tau_3}{2}\,\frac{2j+1}{j+1}\,M\int_0^\infty r\,F(r)\,G(r)\,dr \quad \text{pour} \quad j = \ell - \tfrac{1}{2}\,\omega \;, \tag{2.45a}$$

$$\mu_a = -\,\omega\,\mu_{p,n}\left[\frac{j}{j+1}\right]^{1/2}\left[\left(\frac{j}{j+1}\right)^{\omega/2}\int_0^\infty G^2(r)\,dr + \left(\frac{j}{j+1}\right)^{-\omega/2}\int_0^\infty F^2(r)\,dr\right] \quad . \tag{2.45b}$$

Dans ces expressions μ_d représente le moment magnétique de Dirac (ou partie orbitale) et μ_a est la partie provenant du moment anormal du nucléon ($\mu_{p,n}$). Dans un modèle à particule indépendante, les grande -G(r)- et petite composante -F(r)- sont celles de la fonction d'onde relativiste du proton (ou du trou) de moment angulaire total j non apparié. Les limites de Schmidt de ces moments sont obtenues simplement en prenant les valeurs de la fonction d'onde libre du nucléon à l'ordre 1/M, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty G^2(r)\,dr = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty F^2(r)\,dr = 0 \quad ,$$

et, en utilisant l'équation de Dirac libre :

$$M\int_0^\infty r\,F(r)\,G(r)\,dr = \frac{\omega}{2}\left(j+\tfrac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \quad . \tag{2.46}$$

Nous allons envisager les moments magnétiques des noyaux de ^{15}N et ^{17}F qui comportent respectivement un trou et une particule en plus du coeur de ^{16}O. Pour ceux-là la valeur expérimentale du moment magnétique (2.44) est pratiquement identique à leur valeur de Schmidt. Suivant l'expression (2.45b) la valeur anormale du moment magnétique doit être très peu modifiée par ces corrections relativistes,

celles-ci étant de l'ordre de $\int_0^\infty F^2(r)dr$ (quelques centièmes). Par contre la correction sur les moments de Dirac (2.45a) doit être a priori plus importante. Pour ces noyaux nous avons calculé ces corrections, rapportées à la valeur de Schmidt, pour deux modèles :

- Approximation de Hartree avec échange de σ et ω (modèle (a) du tableau 2) :

$$\mu_d / \mu_d^{sch.} \begin{cases} = 95\ \% \text{ pour } {}^{15}N \\ = 10\ \% \text{ pour } {}^{17}F \end{cases}$$

- Approximation de Hartree-Fock avec échange de σ, ω, π et ρ (modèle (d) du tableau 2) :

$$\mu_d / \mu_d^{sch.} \begin{cases} = 105\ \% \text{ pour } {}^{15}N \\ = 10\ \% \text{ pour } {}^{17}F \end{cases}$$

Ces valeurs numériques montrent d'une part que les corrections relativistes sur les fonctions d'onde à une particule peuvent être très importantes, et en apparente contradiction avec les résultats expérimentaux, et d'autre part que les effets de couche sont très importants : les déviations par rapport aux valeurs de Schmidt pour les moments magnétiques de Dirac sont beaucoup plus faibles pour les protons d'une couche j = l-1/2 (^{17}F) que pour ceux d'une couche j = l+1/2 (^{15}N).

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 2.2a il convient de tenir compte de la correction sur les opérateurs électromagnétiques $\Gamma^\mu(p,p')$ (corrections de vertex) pour pouvoir tirer une conclusion définitive quant à la valeur exacte des moments magnétiques dans cette approche.

2.3. Diffusion proton-noyau

Les principales observables accessibles expérimentalement pour la diffusion élastique de protons polarisés s'expriment en fonction de l'amplitude de diffusion proton-noyau $F(\Theta)$, définie pour chaque transfert d'impulsion q et chaque énergie E_p du proton incident. Celle-ci s'écrit pour un noyau à couches fermées :

$$F(\Theta) = f(\Theta) + i \sigma_n g(\Theta) \quad , \tag{2.47}$$

où σ_n est la polarisation du proton suivant un axe perpendiculaire au plan de la diffusion.

La section efficace de diffusion est alors :

$$\sigma = |f|^2 + |g|^2 . \tag{2.48}$$

Il est particulièrement intéressant de considérer des observables plus sensibles que la section efficace totale et en particulier le pouvoir d'analyse :

$$A_y = 2\, Re\left[f (ig)^* \right] / \sigma \quad , \tag{2.49}$$

et la quantité correspondante, la fonction de rotation de spin :

$$Q = 2\, Im\left[f (ig)^* \right] / \sigma \quad . \tag{2.50}$$

Remarquons que le pouvoir d'analyse peut s'écrire comme :

$$A_y = \frac{\sigma\uparrow - \sigma\downarrow}{\sigma\uparrow + \sigma\downarrow} \quad ,$$

où $\sigma\uparrow$ ($\sigma\downarrow$) est la section efficace de la diffusion d'un proton polarisé suivant la direction +n (-n).

D'un point de vue théorique la donnée du potentiel optique proton-noyau et surtout la connaissance de sa dépendance en énergie permet alors de calculer l'amplitude de diffusion $F(\Theta)$ pour toute énergie et donc toutes les observables (2.48-50).

2.3a - Définition du potentiel optique[20,21]

Il est instructif tout d'abord de comparer l'approche non-relativiste traditionnelle et le formalisme relativiste fondé sur les développements des chapitres précédents. Dans la première (modèle K.M.T[22]) l'amplitude de diffusion (2.47) est obtenue par solution d'une équation de Schrödinger, avec cependant une cinématique relativiste. Dans la seconde on est amené à résoudre une équation de Dirac, avec un potentiel optique relativiste.

L'élément essentiel reste, d'une manière ou d'une autre, l'amplitude de diffusion élémentaire (complexe) nucléon-nucléon. Dans un formalisme non-relativiste elle est paramétrisée sous la forme suivante:

$$f_{NN}(q) = A(q) + i\,C(q)\left(\sigma_{1n} + \sigma_{2n}\right) + \cdots \qquad (2.51)$$

où les termes non mentionnés ne contribueront pas à la diffusion sur un noyau à couches fermées. Par contre la paramétrisation relativiste de cette amplitude se fait sur les cinq invariants relativistes, c'est-à-dire en fait sur les 16 matrices indépendantes indiquées dans l'appendice 1. Dans ce cas l'amplitude relativiste $\hat{f}_{NN}$ s'écrit, pour chaque énergie :

$$\hat{f}_{NN}(q) = F_s(q) + \gamma^\mu(1)\,\gamma_\mu^{\,\mu}(2)\,F_v(q) + \sigma^{\mu\nu}(1)\,\sigma_{\mu\nu}(2)\,F_T(q)$$

$$+ \gamma^5(1)\,\gamma_5(2)\,F_A(q) + \gamma^\mu(1)\gamma^5(1)\,\gamma_\mu(2)\gamma_5(2)\,F_p(q) \qquad (2.52)$$

$$\equiv \sum_\beta F_\beta(q)\;\mathcal{O}_\beta(1)\,\mathcal{O}_\beta(2) \; .$$

Dans cette expression la sommation sur β se fait sur les cinq invariants relativistes (appendice 1) Scalaire (1), Vecteur (γ_μ), Tenseur ($\sigma_{\mu\nu}$), Axial (γ_5) et Pseudo-vecteur ($\gamma_5\,\gamma_\mu$) pour chaque nucléon 1 et 2. A partir de ce développement général, et après une réduction non relativiste appropriée (réduction de Pauli) des matrices de Dirac, on peut en déduire facilement les relations de correspondance entre ces deux amplitudes. Dans le cas de la diffusion vers l'avant, par exemple, on a :

$$\begin{cases} A(o) = F_s(o) + \frac{E_p}{M} F_v(o), \\ C(o) = \frac{P}{2M(E_p+M)} \left[F_s(o) - F_v(o) - 2\left(\frac{E_p}{M}+1\right) F_T(o) \right], \end{cases} \tag{2.53}$$

où P et E_p représentent respectivement l'impulsion et l'énergie du proton incident.

Dans l'approximation d'impulsion (relativiste) le potentiel optique est alors construit de la manière suivante[21] :

$$U_{opt}(q) = \sum_{\beta} \sum_{a=1}^{A} \langle \phi_o | T_{\beta,a}(q) | \phi_o \rangle . \tag{2.54}$$

$T_{\beta,a}(q)$ est la matrice T de la réaction définie par :

$$T_{\beta,a}(q) = -\frac{2\pi}{M} \frac{R(q)}{R(o)} \hat{P} F_\beta(q) \mathcal{O}_\beta(1) \mathcal{O}_\beta(a), \tag{2.55}$$

R(q) étant un facteur cinématique et l'indice (1) se réfère au proton incident.

En prenant pour $|\phi_o\rangle$ un déterminant de Slater afin de décrire le noyau cible, la réduction de (2.54), dans l'approximation de Hartree, est immédiate et très similaire au calcul des potentiels moyens (2.9). Cette approximation devrait être plus justifiée à haute énergie, dans un domaine où les termes d'échange sont faibles. On obtient alors la forme explicite suivante pour le potentiel optique relativiste proton-noyau :

$$U_{opt}(q) = -\frac{2\pi}{M} \frac{R(q)}{R(o)} \hat{P} \left[U_s(r) + \gamma_o(1) U_v(r) + i \gamma_o(1) \vec{\gamma}(1).\hat{r}\, U_T(r) \right]. \tag{2.56}$$

avec les différents potentiels de Dirac suivants (en séparant les contributions des protons et neutrons du noyau cible) :

$$U_s(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{i=p,n} \int d^3q\, e^{-i\vec{q}.\vec{r}}\, F_s^{(i)}(q)\, \tilde{\rho}_s^{(i)}(q) , \tag{2.57a}$$

$$U_v(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{i=p,n} \int d^3q\, e^{-i\vec{q}.\vec{r}}\, F_v^{(i)}(q)\, \tilde{\rho}_B^{(i)}(q) , \tag{2.57b}$$

$$U_T(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{i=p,n} \tau \int d^3q \; e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \; F_T^{(i)}(q) \; \rho_T^{(i)}(q) \; , \qquad (2.57c)$$

et les densités $\tilde{\rho}(q)$ dans l'espace des impulsions sont :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_S^{(i)}(q) = \int d^3r \; e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \; \rho_S^{(i)}(r) \; , & (2.58a) \\ \tilde{\rho}_B^{(i)}(q) = \int d^3r \; e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \; \rho_B^{(i)}(r) \; , & (2.58b) \\ \tilde{\rho}_T^{(i)}(q) = \int d^3r \; e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \; \rho_T^{(i)}(r)/r \; . & (2.58c) \end{cases}$$

Les densités baryonique $\rho_B^{(i)}(r)$, scalaire $\rho_S^{(i)}(r)$ et tensorielle $\rho_T^{(i)}(r)$ dans l'espace des coordonnées sont quant à elles calculées à partir des fonctions d'onde relativistes des nucléons du noyau cible, selon (2.12). L'équation de Dirac pour le nucléon incident, de moment P et d'énergie E_p est alors :

$$\left[-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \gamma_0 M + \gamma_0 U_{opt}(r) \right] \varphi_\ell(\vec{r}) = E_p \, \varphi_p(\vec{r}) \; , \qquad (2.59)$$

avec la fonction d'onde relativiste :

$$\varphi_p(\vec{r}) = \begin{pmatrix} i \, G_p(r)/r \\ F_p(r)/r \; \vec{r}\cdot\vec{P} \end{pmatrix} \mathcal{Y}_{\ell,j,m}(\Omega) \; \xi_\tau \; . \qquad (2.60)$$

Rappelons que le potentiel optique (2.56) construit à partir de l'amplitude de diffusion complexe (2.52) est aussi complexe. Sa partie réelle cependant devrait, par construction, être compatible avec les potentiels obtenus en (2.9) pour le calcul de la structure nucléaire, si toutefois les amplitudes de diffusion sont approximées à tout transfert par leur valeur vers l'avant (transfert nul).

2.3b - Dépendance en énergie du potentiel optique

Il est bien connu phénoménologiquement que la partie centrale du potentiel optique proton-noyau telle qu'elle est extraite des données expérimentales dépend fortement, et linéairement, de l'énergie du proton incident. Il est important de voir dans quelle mesure cette dépendance est correctement reproduite dans ce formalisme relativiste[5,20]. Pour cela il s'agit tout d'abord de réduire l'équation de Dirac (2.59) en équation de Schrödinger équivalente, comme cela a déjà été détaillée en (2.25). Si l'on réduit encore la partie cinétique $\vec{\nabla}\frac{1}{M(r)}\vec{\nabla}$ on arrive alors à l'équation suivante :

$$\left[-\frac{1}{2M}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2M}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \tilde{V}_c(r) + \tilde{V}_{ls}(r)\,\vec{\ell}\cdot\vec{\sigma} \right] \chi(r) = \tilde{E}_p \, \chi(r) \; , \qquad (2.61)$$

avec $\tilde{E}_p = E_p - M$,

et après avoir effectué le changement de variable $G_p(r) = \sqrt{\bar{M}(r)}\,\chi(r)$ pour éliminer le terme en dérivée première de $G_p(r)$. Les potentiels central et spin-orbite sont ici, en fonction de (2.57) :

$$\tilde{V}_c(r) = U_s(r) + U_v(r) + \frac{U_s^2(r) - U_v^2(r)}{2M} + \tilde{E}_p \frac{U_v(r)}{M} + \cdots \qquad (2.62a)$$

$$\tilde{V}_{ls}(r) = -\frac{1}{2M}\,\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\bar{M}(r)}\,\frac{d}{dr}\,\bar{M}(r) + 2U_T(r)\right], \qquad (2.62b)$$

où la masse effective $\bar{M}(r)$ s'écrit :

$$\bar{M}(r)/M = 1 + \frac{U_s(r) - U_v(r)}{\tilde{E}_p + 2M} \quad . \qquad (2.63)$$

On voit alors apparaître immédiatement la dépendance linéaire de $V_c(r)$ en fonction de l'énergie, et si l'on prend la valeur numérique, en r = 0, de $U_V(r)$ (pour la partie réelle tout au moins) compatible avec celle du potentiel de champ moyen (2.9b) soit + 350 MeV (ou même de la self-énergie Σ_o dans la matière nucléaire), on arrive ainsi à la dépendance en énergie suivante :

$$\mathrm{Re}[V(0)] \sim 0{,}3\,\tilde{E}_p$$

en accord quantitatif avec les données expérimentales.

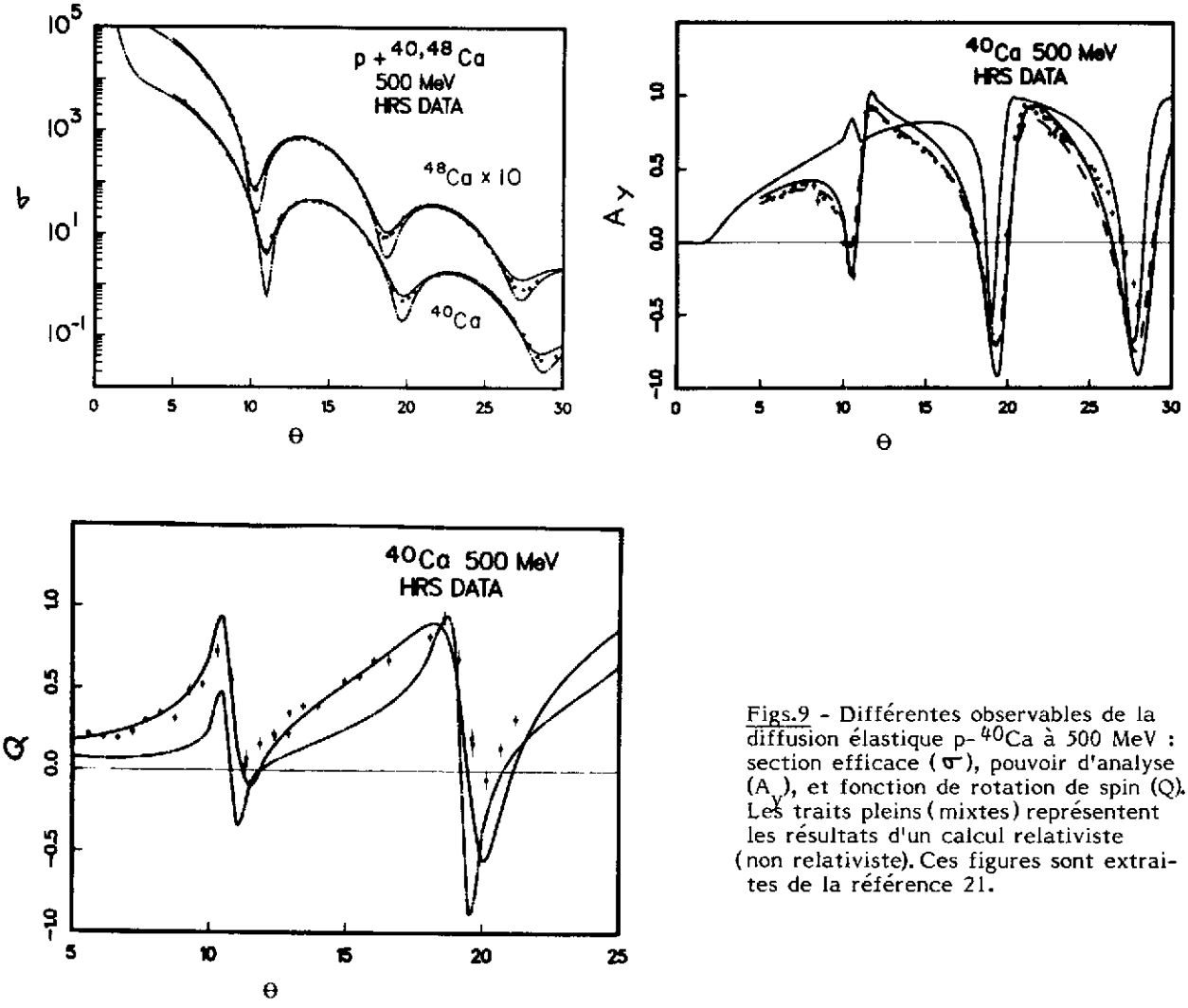
2.3 c - Quelques résultats

Au niveau du potentiel central (2.62a) on peut tout de suite remarquer que la dépendance en densité de celui-ci sera différente de ce qui apparaît dans un calcul strictement non relativiste. En effet on peut s'en convaincre aisément en suivant une démarche analogue à celle qui a été suivie dans le paragraphe 2.1.c et en partant des deux expressions suivantes, relativiste et non relativiste, de la partie centrale du potentiel optique :

$$\begin{cases} V_c^{NR}(r) \simeq \left[F_s(0) + F_v(0)\right]\rho_o(r) \quad , \\ \tilde{V}_c^{R}(r) \simeq \left[F_s(0)\,\rho_s(r) + F_v(0)\,\rho_B(r)\right] + \dfrac{U_s^2(r) - U_v^2(r)}{2M} + \cdots \end{cases} \qquad (2.64)$$

Dans le cas relativiste les amplitudes de diffusion scalaire et vectorielle (partie temporelle) ne correspondent pas à la même densité et cette différence est d'autant plus sensible que l'énergie du proton incident est plus basse (voir plus loin).

La figure 9 représente la section efficace totale (σ), le paramètre de rotation de spin (Q) et le pouvoir d'analyse (A_y) correspondant à la diffusion élastique de protons polarisés sur une cible de ^{40}Ca à une énergie du proton incident de 500 MeV. Des résultats plus complets sont discutés en détail



Figs.9 - Différentes observables de la diffusion élastique p-^{40}Ca à 500 MeV : section efficace (σ), pouvoir d'analyse (A_y), et fonction de rotation de spin (Q). Les traits pleins (mixtes) représentent les résultats d'un calcul relativiste (non relativiste). Ces figures sont extraites de la référence 21.

dans la référence 21. Il est certain au vu de ces résultats -et en particulier pour les observables de spin (2.49) et (2.50) plus sensibles que la section efficace totale (2.48)- que l'approche relativiste reproduit beaucoup mieux les données expérimentales. Il faut cependant être plus prudent quant aux conclusions que l'on peut tirer d'une telle comparaison. D'une part une étude plus systématique[23] des résultats obtenus dans cette approche relativiste, et pour des transitions inélastiques aussi, montrent que l'accord entre théorie et expérience n'est pas toujours aussi satisfaisant. Enfin, si il n'y a pas de doute qu'une approche relativiste doit, a priori, décrire de manière plus consistante les observables de spin, il ne faut tout de même pas oublier que tous ces résultats sont obtenus dans l'approximation d'impulsion. A basse énergie celle-ci n'est sans doute pas totalement justifiée, comme le montrent les calculs de corrélations effectués dans une approche non relativiste[23]. Ce point est d'ailleurs illustré très clairement par la figure 10 où l'on a indiqué la différence des rayons carré moyens de neutron et proton du ^{40}Ca tels qu'ils sont extraits

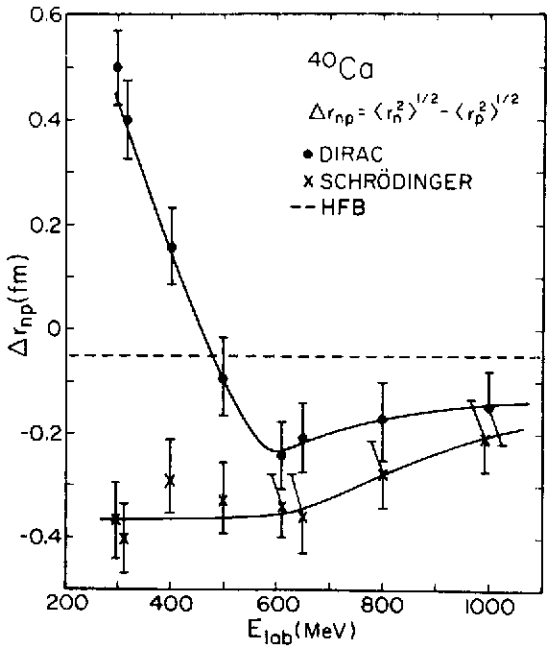


Fig.10 - Différence de rayons carré moyens de proton et neutron dans le ^{40}Ca telle qu'elle est extraite d'une analyse relativiste (points) ou non relativiste (croix) de la diffusion élastique p-^{40}Ca à plusieurs énergies. Cette figure est extraite de la référence 21.

de ces expériences. Suivant le formalisme utilisé, relativiste ou non relativiste, les densités baryoniques "expérimentales" seront différentes (voir eq.(2.64)) et donc aussi les rayons. Le trait pointillé représente la différence de rayons "théoriques" issus d'un calcul Hartree-Fock-Bogoliubov[24] (consistant d'autre part avec toutes les données de diffusion d'électrons). On peut alors remarquer que, à haute énergie $E \gtrsim 600$ MeV, ces deux approches coïncident pratiquement et tendent asymptotiquement vers la valeur théorique $\Delta r_{np} = -0,05$ fm. Cela semblerait donc indiquer que d'une part, l'approximation d'impulsion utilisée est justifiée dans ce domaine d'énergie, et que d'autre part, pour cette observable, les corrections relativistes sont peu importantes. Par contre, à plus basse énergie, ces deux analyses divergent complètement mais, dans ce cas, l'approximation d'impulsion n'est elle-même plus totalement justifiée, comme le montrent les déviations par rapport à la valeur théorique de Δr_{np}.

3. PHYSIQUE NUCLEAIRE ET STRUCTURE DU NUCLEON

Il est apparu, tout au long des chapitres précédents, qu'une caractéristique importante du nucléon avait été ignorée délibérément. Il s'agit de la structure interne de celui-ci qui se traduit simplement, au niveau macroscopique, par sa taille finie. D'un point de vue théorique il est nécessaire, lorsque l'on part d'une description en terme de théorie des champs locale, de considérer des particules ponctuelles dont l'évolution est entièrement déterminée par le lagrangien effectif (1.12-14). Tous les effets de taille finie du nucléon (et des mésons) sont censés être inclus dans les valeurs "phénoménologiques" des constantes de couplage méson-nucléon. Cette démarche est raisonnable, a priori, dans une description de la structure nucléaire à basse énergie. Il faut cependant noter plusieurs points importants que nous avons déjà eu l'occasion de mentionner. Les nucléons dans le milieu nucléaire sont soumis à des interactions fortes dont l'intensité peut être estimée par la valeur des self-énergies $\Sigma_s(p)$ et $\Sigma_0(p)$ dans la matière nucléaire, soit respectivement -380 MeV et 300 MeV au point de saturation. Ces valeurs sont loin d'être négligeables devant la masse du nucléon (M=938 MeV). On peut s'attendre alors à certaines modifications des caractéristiques du nucléon lui-même. Celles-ci se traduiront, essentiellement, par une modification de l'énergie propre (masse) du nucléon ainsi que par un changement de son rayon

(et rayon de charge). Ces deux quantités interviennent précisément dans la description de la structure nucléaire telle qu'elle a été décrite dans les chapitres 1 et 2, et en particulier pour obtenir la densité de charge (2.17). Nous allons, dans ce chapitre, présenter quelques résultats importants, plus qualitatifs que vraiment quantitatifs, pour illustrer ces quelques remarques.

3.1. Quelques rappels sur la Chromodynamique Quantique

3.1a - Degrés de liberté élémentaires

Les constituants élémentaires de la Chromodynamique Quantique[25] (QCD) sont d'une part les quarks, particules chargées et massives de spin 1/2 et leurs antiparticules, et d'autre part les gluons, bosons de spin 1 et de masse nulle. Il existe plusieurs familles de quark, six selon les théories actuelles. Celles-ci sont nécessaires pour interpréter le spectre complet des baryons et mésons. Dans les applications que nous considérerons ici, nous utiliserons seulement les premiers états du spectre baryonique et mésonique que nous construirons à partir des quarks u (up) et d (down) de charge électrique respective 2/3 et -1/3. Leur masse est très faible, de l'ordre de 5 à 10 MeV. En plus de leur charge électrique les quarks existent en trois états de couleur différente (que l'on notera par l'indice a,b,c). Cette charge de couleur est associée au boson de jauge, le gluon, de la même manière qu'en électrodynamique la charge électrique est associée au photon, boson de spin 1 et de masse nulle. A la différence du photon cependant le gluon emporte une charge de couleur et dépend d'un indice i variant de 1 à 8 (selon le nombre de générateurs de SU(3) c'est-à-dire 3^2-1). Les champs élémentaires associés à ces degrés de liberté seront ainsi notés :

$$\begin{aligned} &\text{quarks : } q^a(x),\ a = 1,2,3 \text{ ; avec } q = u,d,\ldots \\ &\text{gluons : } B_\mu^i(x),\ i = 1,8 \quad . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le lagrangien de QCD s'écrit alors :

$$\mathcal{L}^{QCD} = \bar{q}(x)\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i g B_\mu^i \frac{\lambda^i}{2}\right)\right] q(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu,i}, \tag{3.2}$$

avec

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\nu B_\mu^i - \partial_\mu B_\nu^i + g f^{ijk} B_\mu^j B_\nu^k \quad .$$

Dans ces expressions, λ^i sont 8 matrices 3 x 3 (générateurs de SU(3)) et f^{ijk} est un réel complètement antisymétrique en i,j,k[25].

Il convient de remarquer que, en plus du couplage traditionnel quark-gluon, le gluon a la possibilité de se coupler à lui-même étant donné qu'il est aussi chargé de couleur, contrairement au photon qui lui n'est pas chargé électriquement. Le lagrangien (3.2) génère entre autre des couplages à 3 et 4 photons. Cette particularité est ici très importante et confère à la QCD toute sa complexité.

Lorsque l'on essaie de résoudre cette théorie en utilisant par exemple les méthodes de calcul sur réseau, il apparaît rapidement que l'on peut distinguer deux limites importantes de QCD :

- A très haut moment de transfert la constante de couplage quark-gluon, que l'on note habituellement par

$$\alpha(Q) = g^2(Q)/4\pi \qquad \text{("running coupling constant")} \tag{3.3}$$

tend vers 0. On est alors dans le domaine de couplage faible et quarks et gluons sont ainsi pratiquement libres. C'est aussi, dans l'espace des coordonnées, le domaine des très courtes distances. Cette propriété (liberté asymptotique) est très intéressante, comme nous le verrons dans le chapitre 3.2, car elle permet de calculer explicitement beaucoup d'observables par un développement perturbatif.

- A bas moment de transfert par contre $\alpha(Q)$ est très grand devant 1 et aucun calcul perturbatif n'est valable. C'est précisément le domaine qui intéresse le plus le physicien nucléaire lorsqu'il étudie les propriétés de la structure nucléaire dans son état fondamental.

Une autre caractéristique importante qui nous concernera directement dans ce chapitre est le fait que des quarks libres n'ont pas été observés jusqu'à ce jour expérimentalement. Cette propriété de confinement commence seulement à être confirmée théoriquement par certains calculs de QCD sur réseau. Elle motive aussi la plupart des modèles phénoménologiques de quark pour la structure du nucléon, comme nous le verrons plus loin.

Il est facile maintenant d'en déduire la structure générale des mésons (de spin entier) et des baryons (de spin demi-entier) en remarquant que les hadrons ne comportent, au niveau macroscopique, aucune charge de couleur. Ils doivent donc former des états singulets de couleur de telle manière que leur fonction d'onde totale soit antisymétrique. La structure des hadrons sera alors, schématiquement:

$$\begin{aligned} &\text{mésons} \quad q^a \bar{q}^a \quad , \\ &\text{baryons} \quad \varepsilon^{abc} q^a q^b q^c \quad , \quad \text{avec } q = u,d,\ldots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour les baryons, l'état singulet de couleur a une fonction d'onde de couleur complètement antisymétrique et par conséquent les parties radiales, de spin et d'isospin sont quant à elles totalement symétriques.

3.1b - Rôle particulier du pion

Une symétrie importante du lagrangien de QCD, pour les quarks u et d tout au moins et lorsque l'on prend leur masse égale à zéro, est la symétrie chirale. Soit Ψ le vecteur à deux composantes formé des champs de quark u et d :

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} .$$

Le lagrangien (3.2) est alors invariant par la transformation d'isospin suivante :

$$\Psi \rightarrow e^{i\underset{\sim}{\theta}\cdot\underset{\sim}{\tau}} \Psi , \tag{3.5}$$

qui conduit au courant conservé isovectoriel habituel suivant :

$$\underset{\sim}{J}_\mu = \frac{1}{2} i \bar{\Psi} \gamma_\mu \underset{\sim}{\tau} \Psi . \tag{3.6}$$

Ce lagrangien est aussi invariant par une nouvelle transformation faisant intervenir la matrice γ_5 de Dirac et qui est définie par :

$$\Psi \longrightarrow e^{i \underset{\sim}{\theta} \cdot \underset{\sim}{\tau} \gamma_5} \Psi . \tag{3.7}$$

Cette transformation est la transformation chirale agissant sur les spineurs u et d. Le courant conservé associé à cette symétrie, et calculé par le théorème de Noether, est le courant axial qui s'exprime de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{A}_\mu = \frac{1}{2} i \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \underset{\sim}{\tau} \Psi , \tag{3.8}$$

avec la relation de conservation $\partial_\mu \underset{\sim}{A}_\mu = 0$. Dans la nature cependant cette symétrie n'est pas exacte et le courant axial n'est que partiellement conservé (PCAC). Cette brisure de la symétrie chirale peut se faire de deux manières : soit explicitement au niveau du lagrangien, par un terme de masse non nulle pour les fermions par exemple, soit spontanément par un mécanisme dynamique. Dans ce dernier cas, le plus intéressant, cette brisure de la symétrie chirale génère, d'après le théorème de Goldstone, un boson de spin zéro, de masse nulle, qui, dans le cas que nous avons considéré ici (quarks u et d), est assimilé au pion. Lorsque la symétrie chirale est de plus brisée explicitement par un terme de masse pour ces quarks ($m_u + m_d \simeq 15$ MeV) alors ce "boson de Goldstone" acquière une masse non nulle $m_\pi^2 \sim m_u + m_d$. Le rôle du pion, méson de plus faible masse du spectre, est ainsi très particulier puisqu'il est étroitement lié à une symétrie fondamentale du lagrangien de QCD[26]. Au niveau de sa structure interne en termes de quark et antiquark, cela se traduit par une fonction d'onde cohérente[27] formée d'états à $1q1\bar{q}$ mais aussi $3q3\bar{q}$, $5q5\bar{q}$,...

3.1c - Facteurs de forme

A l'échelle de la physique nucléaire aux énergies intermédiaires, la structure interne du nucléon transparaît au niveau des facteurs de forme électromagnétique (vertex photon-nucléon) et hadronique (vertex méson-nucléon). D'un point de vue qualitatif, ces facteurs de forme peuvent être schématisés selon les figures 11 et 12. Nous avons indiqué sur celles-ci tout d'abord la représentation habituelle en terme de nucléon, où le vertex est remplacé par un facteur phénoménologique dépendant du moment transféré par le photon ou par le méson selon les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} &1 \Big/ \left(1 + \vec{q}^2 / m_o^2\right)^2 && \text{pour le couplage } \gamma NN, \text{ avec } m_o = 850 \text{ MeV} , \\ &\left(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2\right) \Big/ \left(\Lambda_\pi^2 + \vec{q}^2\right) && \text{pour le couplage } \pi NN \text{ par exemple avec } \Lambda_\pi = 1{,}25 \text{ GeV}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ces figures illustrent ensuite une des contributions possibles au vertex γNN ou πNN dans un modèle où la structure en quarks est explicitement traitée. Bien évidemment, le nombre de telles contributions

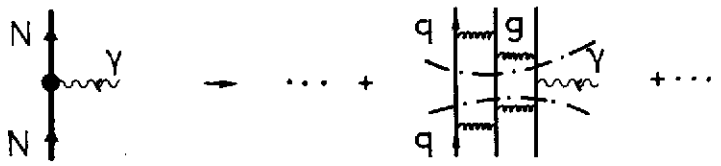


Fig.11 - Diagramme typique, mais pas nécessairement dominant, contribuant au facteur de forme électromagnétique du nucléon dans un modèle de quarks. Les états initial et final sont inclus dans la fonction d'onde du nucléon et g représente ici l'échange d'un gluon.

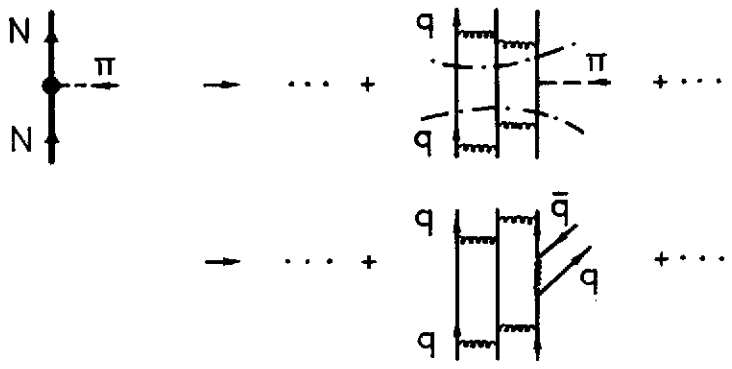


Fig.12 - Même légende que celle de la figure 11 mais pour le facteur de forme hadronique. Le pion peut être considéré soit comme une particule "élémentaire" (boson de Goldstone) soit comme un état collectif à plusieurs quarks-plusieurs antiquarks (le premier ordre est représenté ici).

peut être très grand, surtout à bas moment de transfert, c'est-à-dire dans le domaine non perturbatif des couplages quark-gluon et gluon-gluon.

Il n'est possible actuellement de calculer explicitement de telles contributions à partir du lagrangien de QCD que dans des cas très particuliers. Le plus intéressant est sans doute l'étude de ces facteurs de forme dans la limite des très hauts moments de transfert.

3.2.Exemple : étude à très haut moment de transfert

Une étude détaillée de cette partie de la Chromodynamique quantique ("QCD perturbative") est menée depuis plusieurs années avec beaucoup de succès[28]. Comme on l'a déjà vu dans le premier chapitre, la constante de couplage caractéristique $\alpha(Q)$ tend vers 0 lorsque le transfert devient très grand : c'est le domaine de la liberté asymptotique. L'échelle d'énergie, ou de transfert, est ici fixée par l'échelle de masse de QCD, notée Λ, et qui intervient, par exemple, dans l'expression de $\alpha(Q)$ en fonction de Q :

$$\alpha(Q) \sim 1/\log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) . \qquad (3.10)$$

Les calculs de QCD sur réseau permettent d'avoir une certaine idée sur cette valeur. Elle est généralement comprise entre 100 et 500 MeV.

Il est alors possible, dans cette limite, de calculer à l'ordre dominant en $\alpha_s(Q)$ beaucoup d'observables accessibles expérimentalement par diffusion d'électrons. En ce qui concerne le facteur de forme du deutéron, il apparaît de manière très claire que la limite asymptotique de QCD est effectivement atteinte, et confirmée expérimentalement, à des transferts variant de 2 $(GeV/c)^2$ à 4 $(GeV/c)^2$ selon la valeur de Λ ($\Lambda \sim 100$ à 500 MeV respectivement). L'amplitude de diffusion générale et un des processus élémentaires importants sont représentés sur les figures 13 et 14. Le moment transféré est, dans l'état final, équitablement réparti par l'intermédiaire de l'échange de gluons entre les six quarks de la fonction d'onde. Le calcul des facteurs de forme du deutéron : partie magnétique G_M,

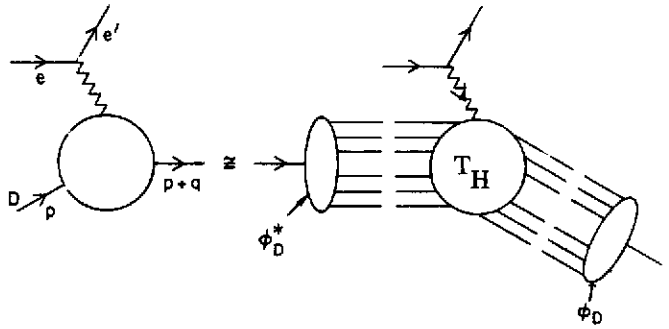


Fig.13 - Structure générale des facteurs de forme du deutéron (figure extraite de la référence 28)

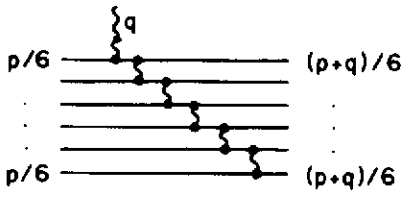


Fig.14 - Contribution dominante à très haut transfert, à l'amplitude de transition T_H de la figure 13 (figure extraite de la référence 29).

de charge G_C et quadrupolaire G_Q en est une application importante. Ces deux dernières parties interviennent simultanément dans le facteur de forme électrique $A(Q^2)$ du deutéron mais par contre elles peuvent être séparées, expérimentalement, à partir de la mesure de la polarisation de l'électron dans l'état final pour une diffusion d'électrons polarisés. En considérant la polarisation suivant x, p_x, et la

polarisation tensorielle P_{xz}, ou plus exactement leur rapport (pour éliminer dans une certaine mesure les corrections d'ordre supérieur), on arrive à l'expression suivante[29] :

$$\lim_{Q^2 \to \infty} \frac{P_x}{P_{xz}} = \frac{2}{9}\left(\frac{4 M_d^2 G_c(Q^2)}{Q^2 G_Q(Q^2)} + 1\right) = \frac{2}{3} \quad . \tag{3.11}$$

Cette valeur doit être comparée à celle qui est obtenue dans un modèle macroscopique où le deutéron est formé de deux nucléons interagissant par un potentiel d'échange de mésons. Ces calculs sont rassemblés dans la figure 15. Plusieurs potentiels nucléon-nucléon ont été envisagés dans ces calculs macroscopiques. Ils correspondent à un calcul soit non relativiste (RSC NR), soit relativiste. Il faut remarquer que pratiquement tous les calculs à l'échelle du nucléon donnent des valeurs identiques

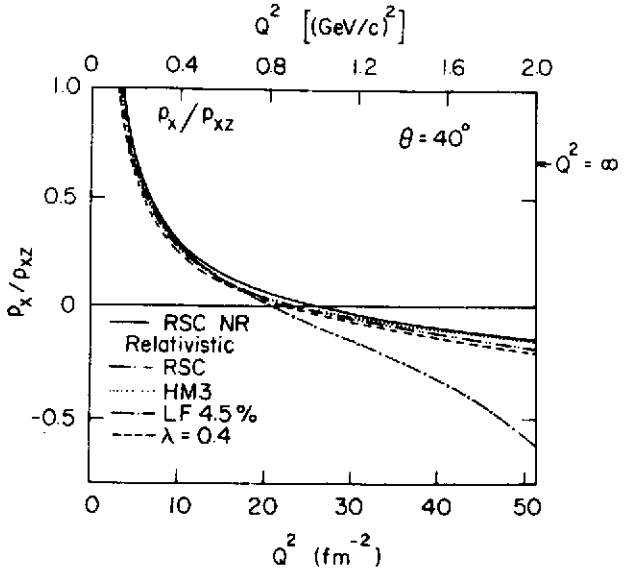


Fig.15 - Rapport de polarisation P_x/P_{xz} à $\theta = 40°$ calculé avec différentes fonctions d'onde nucléon-nucléon (relativiste et non relativiste) dans l'approximation d'impulsion. La valeur asymptotique prédite par la QCD est indiquée par $Q^2 = \infty$ (figure extraite de la référence 29).

pour ce rapport de polarisation, dans l'approximation d'impulsion. A partir d'un moment transféré de l'ordre de 1 $(GeV/c)^2$, celui-ci devient négatif et reste faible, environ -0,2, contrairement à la valeur prédite par QCD à très haut moment de transfert, + 0,66. Ces valeurs sont suffisamment incompatibles pour pouvoir tester expérimentalement avec assez de précision à partir de quel moment le domaine asymptotique de QCD est atteint ou à partir de quel moment la description macroscopique du deutéron en terme de nucléons et mésons n'est plus valable. De telles expériences seront possibles dans les années à venir.

3.3 Structure du nucléon dans le noyau

Il est naturel de penser que le nucléon, formé de trois quarks, devrait pouvoir se polariser dans le milieu nucléaire ou même lorsqu'il interagit avec un autre nucléon. Dans la diffusion de deux noyaux, la déformation de ceux-ci est un phénomène courant. Une fois admis ce concept, il convient

tout de même de s'interroger sur l'intensité de cette polarisation[30,31]. Nous allons essayer dans ce chapitre de répondre à cette question.

3.3a - La compressibilité du nucléon

Il est une notion très naturelle, intuitive même, qui sera utile par la suite pour mieux apprécier ces effets de polarisation : il s'agit de la compressibilité du nucléon, telle qu'elle est mesurée par le paramètre d'incompressibilité. Rappelons tout d'abord, dans un formalisme non relativiste, comment ce dernier peut être défini[32]. Le système (nucléon) est soumis à une contrainte monopolaire, la plus simple ici, correspondant à l'opérateur suivant :

$$\hat{Q} = \sum_{i,j} \langle i | r^2 | j \rangle \, b_i^+ \, b_j \quad . \tag{3.12}$$

Le hamiltonien du système sera ainsi $H + \lambda \hat{Q}$, où λ fixe l'intensité de la contrainte. Toutes les observables physiques, et en particulier le rayon carré moyen $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ dépendra alors de cette intensité. On définira le paramètre d'incompressibilité par contrainte de la manière suivante :

$$K_c = -4 \langle r^2 \rangle^2 \left[\frac{d \langle r^2 \rangle_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \right]^{-1} \quad . \tag{3.13}$$

Les différentes quantités intervenant dans cette expression sont calculées en $\lambda = 0$. Dans une approche non relativiste, ce paramètre peut être reliée par le théorème de Thouless au moment m_{-1} par l'équation suivante :

$$K_c = 2A \langle r^2 \rangle^2 / m_{-1} \qquad \text{avec A = 3 ici.} \tag{3.14}$$

En fonction de la variation d'énergie du système, on peut encore écrire :

$$m_{-1} = \frac{1}{2} \frac{d^2 E}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=0} \quad . \tag{3.15}$$

De même, toujours dans un formalisme non relativiste, le moment m_1 s'exprime facilement en fonction du rayon carré moyen :

$$m_1 = \frac{2A}{M} \langle r^2 \rangle \quad \text{où M est la masse des constituants,} \tag{3.16}$$

et l'énergie d'excitation monopolaire (excitation radiale) est simplement :

$$\Delta E^* = \sqrt{\frac{m_1}{m_{-1}}} = \sqrt{\frac{K_c}{M \langle r^2 \rangle}} \quad . \tag{3.17}$$

Cette énergie correspondra effectivement à un état physique excité (état collectif) seulement si elle sature la règle de somme pondérée en énergie :

$$m_1 = \sum_n E_n \, |\langle n | \hat{Q} | 0 \rangle|^2 \quad . \tag{3.18}$$

Afin d'avoir la structure de l'état de plus basse énergie, il faudra ensuite comparer cette énergie à celle de l'état correspondant à l'excitation d'une particule-un trou seulement, que l'on notera ΔE_{1p1h}. En ce qui concerne le nucléon, le premier état excité de même nombre quantique I = 1/2 et T = 1/2 est la résonance Roper, de masse M = 1420 MeV. L'énergie d'excitation "monopolaire" est ici de l'ordre de 500 MeV.

Il est important de s'intéresser non seulement à l'énergie d'excitation de la résonance Roper mais aussi aux largeurs de désintégration en πN et $\pi\Delta$. Ces largeurs nous renseignerons quant à elles sur la fonction d'onde de cet état excité du nucléon. Expérimentalement, elles ne sont pas encore déterminées avec beaucoup de précision et les différentes valeurs données dans les tables sont comprises entre les bornes suivantes :

$$\Gamma^{exp.}_{R \to \pi N} = 135 \pm 70 \text{ MeV} ,$$

$$\Gamma^{exp.}_{R \to \Delta N} = 60 \pm 30 \text{ MeV} . \qquad (3.19)$$

D'un point de vue théorique elles se calculent facilement à partir de la règle d'or de Fermi. On obtient alors l'expression générale suivante :

$$\Gamma_{B' \to B\pi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} 2\pi \delta(E_B + \omega_k - M_{B'}) \overline{\sum} |M|^2 , \qquad (3.20)$$

avec l'élément de matrice isovecteur $\underset{\sim}{M}$ défini par :

$$\underset{\sim}{M} = \int d^3r \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \langle B' | \underset{\sim}{J}_\pi | B \rangle , \qquad (3.21)$$

et le courant de source du pion est, en première approximation (couplage du pion aux quarks seulement) :

$$\underset{\sim}{J}_\pi = -i G \bar{q} \gamma_5 \underset{\sim}{\tau} q . \qquad (3.22)$$

La sommation $\overline{\sum}$ représente la somme sur les états finals et la moyenne sur les états initiaux. Nous verrons dans les paragraphes suivants comment ces notions peuvent être utilisées d'un point de vue plus quantitatif.

3.3b - Modèles simples du nucléon

Nous mentionnerons tout d'abord quelques résultats concernant le modèle de quark constituant. Dans ce modèle, le nucléon est formé de trois quarks de masse effective 315 MeV (masse "constituante") et interagissant par l'intermédiaire d'un potentiel non relativiste de la forme suivante :

$$V_{qq}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = c |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^\gamma + V_{OGE}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) . \qquad (3.23)$$

La première partie de (3.23) simule le confinement des quarks et le deuxième terme correspond au potentiel d'échange d'un gluon. Ce dernier est responsable, entre autre, du splitting entre la masse du nucléon et celle de la résonance delta. La fonction d'onde des quarks est alors solution d'une équation d'onde non relativiste (équation de Faddeev par exemple pour ce problème à trois corps) et bien sûr le mouvement du centre de masse est traité exactement. Dans l'état fondamental du nucléon, les trois quarks sont dans une orbite $^1s_{1/2}$. Dans ce modèle[33,34] les différentes quantités importantes que nous avons discutées dans le paragraphe précédent sont alors :

$$\begin{cases} \langle r^2 \rangle^{1/2} & = 0{,}45 \text{ fm} \\ K_c & = 1 \text{ GeV} \\ \Delta E^* & = 780 \text{ MeV} \end{cases} \qquad (3.24)$$

Enfin l'énergie d'excitation une particule-un trou (excitation d'un quark de l'état $^1s_{1/2}$ à l'état $^2s_{1/2}$) est[34] :

$$\Delta E_{1p1h} = 750 \text{ MeV}$$

Dans ce modèle non relativiste, l'énergie ΔE^* sature la règle de somme en énergie (3.18). On pourrait alors en conclure, aux vues des valeurs de ΔE^* et ΔE_{1p1h} que ce premier état excité n'est pas très collectif mais serait plutôt décrit par deux quarks dans l'état $^1s_{1/2}$ et un dans l'état $^2s_{1/2}$.

Afin d'aller plus loin dans la description du nucléon dans le milieu nucléaire, tel que celui-ci a été décrit dans les chapitres 1 et 2, il convient de construire un modèle du nucléon fondé d'une part sur un formalisme relativiste, et d'autre part construit à partir d'échange de mésons. Dans cet esprit, les interactions non perturbatives quark-gluon et gluon-gluon sont représentées par l'échange de mésons physiques. Le point de départ sera alors un lagrangien effectif, avec un terme de masse nulle pour les quarks (masse physique) et satisfaisant dans la mesure du possible les mêmes conditions de symétrie que le lagrangien de QCD, en particulier la symétrie chirale. Nous partirons donc du lagrangien du modèle σ linéaire, avec les champs scalaire (χ) et pseudoscalaire ($\underset{\sim}{\pi}$), et rajouterons le champ associé au méson oméga. Ces champs sont définis de telle manière qu'ils soient nuls à des grandes distances du nucléon. Le lagrangien d'interaction aura alors la forme suivante :

$$\mathcal{L}_I = -G\,\bar{q}\left(\chi + i\gamma_5\,\underset{\sim}{\pi}\cdot\underset{\sim}{\tau}\right)q - G\,\bar{q}\,\gamma_\mu V^\mu q\,. \qquad (3.25)$$

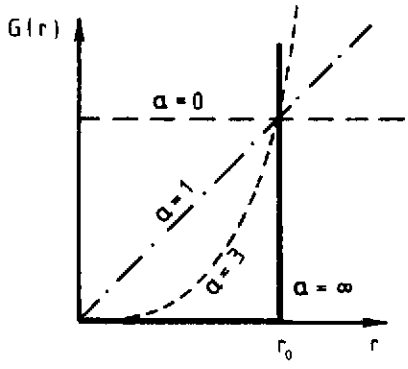
Les champs de quark -q(x)- et les champs mésoniques seront traités dans l'approximation de Hartree-Fock relativiste[35] décrite en détail dans les chapitres précédents. Le nucléon sera quant à lui décrit par trois quarks dans un état $^1s_{1/2}$. La constante de couplage quark-méson G est ici le paramètre fondamental du modèle. Afin de pouvoir comparer plusieurs conditions physiques différentes nous choisirons cette constante de couplage de la façon suivante :

$$G \equiv G(r) = \left(r/r_c\right)^a, \qquad (3.26)$$

et nous étudierons ce modèle pour différentes valeurs de a. La forme de la constante de couplage G(r) est indiquée sur la figure 16. La valeur de r_c sera choisie, pour chaque a, de manière à obtenir la masse physique du nucléon. Remarquons que ces différentes formes de la constante de couplage se recoupent toutes au même point défini par r_o = 0,8 fm et $G(r_o)$ = 3,5. La forme (3.26) a bien sûr été choisie pour assurer -à la main- la condition de liberté asymptotique et de confinement de QCD (pour $a \neq 0$ tout

au moins). La fonction d'onde d'un quark - $\varphi_0(\vec{r})$- sera alors solution de l'équation de Dirac self-consistante suivante :

$$\left[-i \vec{\alpha} . \vec{\nabla} + \gamma_0 \Sigma(r) \right] \varphi_0(\vec{r}) = \varepsilon_0 \varphi_0(\vec{r}) , \qquad (3.27)$$



avec la self-énergie d'interaction :

$$\Sigma(r) = \Sigma_{\chi}(r) + \gamma_0 \Sigma_{\omega_0}(r) + i \gamma_0 \vec{\gamma} . \hat{r} \left[\Sigma_{\pi}(r) + \Sigma_{\omega_j}(r) \right] . \qquad (3.28)$$

Les indices χ , ω_0, ω_j et π représentent respectivement la partie correspondante à la contribution du champ χ , ω (partie temporelle et spatiale) et π .

Fig.16 - Constante de couplage effective pour différentes valeurs de a, voir éq.(3.26).

Dans ce modèle relativiste, le lien entre le paramètre d'incompressibilité (3.13) et l'énergie d'excitation monopolaire(3.16) n'est pas aussi claire, ceci notamment à cause de la contribution des états d'énergie négative. Nous serons donc obligés d'adopter un point de vue plus pragmatique et nous calculerons simplement le "paramètre d'incompressibilité" défini par (3.13) sans le relier à une quelconque énergie d'excitation (3.16). Il gardera cependant sa signification première, à savoir de mesurer la plus ou moins grande facilité qu'aura un nucléon de se polariser (radialement ici) sous l'effet d'une contrainte extérieure monopolaire. Plus ce paramètre sera faible, plus le rayon carré moyen du nucléon sera sensible à toute contrainte externe. Nous pourrons par contre toujours calculer, dans ce modèle, l'énergie d'excitation 1p-1h notée ΔE_{1p1h}. Les valeurs du rayon carré moyen de la fonction d'onde des quarks, de K_c et de l'énergie d'excitation correspondant à la résonance Roper (pour un état $(^1s_{1/2})^2 {}^2s_{1/2}$) sont indiquées dans le tableau 5. Il est intéressant, dans ce tableau, de comparer les variations du rayon carré moyen avec celles du paramètre d'incompressibilité pour les différentes valeurs de a envisagées. Ainsi que l'on pouvait s'y attendre le nucléon sera d'autant plus polarisable que son rayon sera grand. D'autre part l'énergie d'excitation 1p-1h varie fortement avec K_c et suit qualitativement la loi (3.16). Les largeurs de désintégration que l'on peut estimer dans ce modèle sont compatibles avec les bornes inférieures des valeurs expérimentales (pour la partie $R \rightarrow \pi N$ tout au moins), dans la mesure où a est supérieur à 3.

Nous insistons particulièrement sur les valeurs relativement élevées des largeurs de désintégration (3.19) car elles sont très sensibles au caractère collectif ou non de la résonance Roper. Ainsi, dans un modèle de sac Chiral, cette résonance peut être interprétée comme un mode de vibration de la surface du sac ("breathing mode")[36]. La position en énergie de la résonance est reproduite très facilement mais par contre les largeurs de désintégration obtenues dans ce cas sont inférieures à 20 MeV. Cela tient en particulier au fait que les fonctions d'onde décrivant le mouvement de la surface du sac dans le cas de la résonance Roper, d'une part, et du nucléon et de la résonance delta, d'autre part, sont orthogonales.

a	K_c (MeV)	E_{1plh} (MeV)	r^2 1/2 (fm)	M - M (MeV)	μ_p
0	1,0	300	1,0	-	2,7
			1,3	0	3,7
1	1,5	450	0,8	-	2,5
			1,0	-20	3,6
3	3	650	0,7	-	2,3
			0,8	-40	3,5
20	10	750	0,64	-	2,2
			0,65	-70	3,2

- Tableau 5 -

Propriétés du nucléon dans la matière nucléaire (rayon carré moyen, masse, moment magnétique du proton) dans le modèle simple du nucléon décrit en 3.3. Pour chaque valeur de a, la première ligne est relative aux propriétés du nucléon libre. Les valeurs du paramètre d'incompressibilité (K_c) et de l'énergie d'excitation correspondant à l'état $(1s_{1/2})^2\ 2s_{1/2}$ (résonance Roper) sont aussi indiquées.

Remarquons enfin qu'il est important de comparer à la fois la valeur du paramètre d'incompressibilité et celle du rayon carré moyen. Dans les deux modèles de quarks présentés dans ce paragraphe (relativiste et non relativiste), on peut avoir la même valeur de ce paramètre mais une valeur très différente pour le rayon carré moyen du nucléon. Comme celui-ci intervient à la puissance 4 dans la définition (3.13) de K_c, ces modèles correspondront à des valeurs très différentes de m_{-1}.

Avant d'aller plus loin, nous résumerons quels sont les enseignements que l'on peut tirer d'une telle étude. La position de la résonance Roper permet d'avoir une estimation de la valeur de la compressibilité du nucléon, en suivant le tableau 5 par exemple. Dans cette démarche il est important de rester très près de tous les différents résultats expérimentaux concernant cet état. La valeur de ce paramètre d'incompressibilité, selon (3.13), indique alors la plus ou moins grande facilité qu'aura le nucléon de se polariser dans le milieu nucléaire. Nous envisagerons principalement dans ce cours les modifications de son rayon carré moyen et de sa masse.

3.3c - Polarisation du nucléon dans la matière nucléaire

Le principe du calcul est résumé schématiquement par la figure 17. Sur celle-ci les champs moyens de σ et ω sont générés par les nucléons de la matière nucléaire selon l'équation (1.20) et l'équation similaire pour la partie temporelle du ω. La fonction d'onde des quarks sera alors solution d'une équation de Dirac et ils seront soumis, en plus des termes d'interaction propres définis par (3.28), aux potentiels d'interaction externes suivants, calculés dans l'approximation de Hartree :

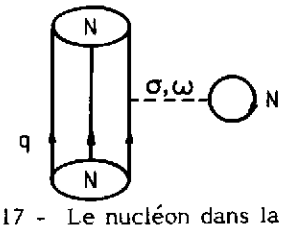


Fig.17 - Le nucléon dans la matière nucléaire : couplage des quarks aux champs moyens de σ et ω calculés dans la matière nucléaire d'après (1.20).

$$\tilde{\Sigma}(r) = G(r)\,\sigma + \gamma_0\, G(r)\, V^0 \,. \qquad (3.29)$$

Pour le modèle (a) de la matière nucléaire (tableau 2) les champs moyens ont les valeurs suivantes :

$$\sigma \simeq -40 \text{ MeV} \quad , \quad V_0 \simeq 25 \text{ MeV} \qquad (3.30)$$

L'équation définissant la fonction d'onde des quarks est alors :

$$\left[-i\,\vec{\alpha}.\vec{\nabla} + \gamma_0\,\Sigma(r) + \gamma_0\,\tilde{\Sigma}(r) \right] \tilde{\varphi}_0(\vec{r}) = \tilde{\varepsilon}_0\,\tilde{\varphi}_0(r) \,, \qquad (3.31)$$

d'où l'on en déduit immédiatement les valeurs du rayon carré moyen $-\langle \tilde{r}^2 \rangle^{1/2}-$ et de la masse $-\tilde{M}-$ du nucléon dans la matière nucléaire. Ces valeurs dépendront alors de la valeur a choisie pour la constante de couplage G(r) et donc de la valeur du paramètre d'incompressibilité, ainsi que cela est indiqué dans le tableau 5. Nous pouvons faire à ce sujet les remarques suivantes :

- Le rayon carré moyen de la fonction d'onde des quarks augmente dans la matière nucléaire et ce d'autant plus que le paramètre d'incompressibilité est faible, ainsi que nous l'avions déjà prévu. Ces variations peuvent atteindre 30 % dans le cas le plus défavorable. Par contre, pour des valeurs faibles du rayon carré moyen du nucléon libre, les variations sont beaucoup plus faibles (jusqu'à 3 % au minimum).

- L'énergie propre du nucléon par contre varie très peu pour des faibles valeurs de K_c et elle peut être réduite, au maximum, d'environ 10 %.

- Le moment magnétique du proton, calculé ici en tenant compte aussi de la contribution du champ pionique au couplage électromagnétique, est très fortement augmenté, quelle que soit la valeur de a. Il est certainement important de confirmer quantitativement de telles variations car elles pourraient avoir des conséquences quant au moment magnétique des noyaux.

Il faut bien réaliser que ces résultats ne sont pas totalement incompatibles avec les différentes approches, au niveau des degrés de liberté nucléonique et mésonique, que l'on est déjà habitué à prendre en compte[2]. En particulier pour les moments magnétiques, les corrections dues aux courants d'échange sont une certaine manière de représenter ces effets de polarisation du nucléon dans le milieu nucléaire. Il est certain qu'une étude plus poussée est nécessaire pour pouvoir répondre avec précision à toutes ces questions. En tout état de cause, il apparaît tout de même que les variations quantitatives attendues de la masse et du rayon carré moyen du nucléon dépendent de la valeur du paramètre d'incompressibilité de celui-ci. On l'a vu dans le cadre du modèle relativiste simple développé ici. Ces résultats devraient être plus généraux, tout au moins d'un point de vue qualitatif. Lorsque ce paramètre d'incompressibilité est déterminé de manière à ce que la position expérimentale de la résonance Roper ainsi que ses largeurs de désintégration soient correctement reproduites, alors ces variations sont relativement faibles, au plus de l'ordre de 10 %. Il n'est pas très facile, d'un point de vue expérimental, de séparer de tels effets de ceux, plus triviaux, correspondant à des processus purement nucléaires et cela d'autant plus qu'ils sont faibles. Citons tout de même quelques observables qui ont déjà été mentionnées dans la littérature[30,31] :

- Les densités de charge des noyaux dépendent directement, par les équations (2.17) et (2.18) du

rayon du nucléon. Au centre d'un noyau comme le ^{208}Pb, la densité de charge devrait être réduite quelque peu lorsque le rayon du nucléon augmente. Malheureusement, il apparaît que les corrections les plus importantes sont, dans ce cas, celles provenant des corrélations R.P.A.

- Les fonctions de structure longitudinale et transverse de la diffusion quasi-élastique (e,e',p) sont sensibles aux facteurs de forme électrique et magnétique du nucléon. Ceux-ci seront fortement modifiés, à haut transfert, par la variation du rayon du nucléon ainsi que de celles du moment magnétique du proton et du neutron. Ces variations permettraient, dans une certaine mesure, de reproduire les données expérimentales récentes. La situation n'est cependant pas aussi claire puisqu'il apparait que des corrections relativistes, dans un formalisme analogue à celui développé dans ces chapitres, peuvent être aussi dominantes.

- Enfin, à très haut moment de transfert dans la diffusion très inélastique de muon (effet E.M.C.), les différences entre les fonctions de structure de plusieurs noyaux peut s'expliquer par une augmentation du rayon de confinement des quarks. Cette explication n'est cependant, peut-être, qu'une certaine représentation des effets de corrélations dans le milieu nucléaire.

Les résultats les plus significatifs actuellement sont, semble-t-il, ceux relatifs à la diffusion d'électron sur l'^{3}He, lorsque l'on s'intéresse au scaling Y (voir la référence 37 pour plus de détails). Une borne supérieure pour la variation du rayon et de la masse du nucléon est estimée à 6 % dans ces expériences. Cette valeur est consistante avec l'analyse présentée dans ce chapitre.

Nous pensons avoir montré, dans ce cours, la richesse de cette nouvelle description de la structure nucléaire et des nombreuses conséquences que cela pouvait entraîner, pour les réactions proton-noyau par exemple. Ce sujet est loin d'être clos, comme on peut aisément s'en rendre compte par toutes les approximations que l'on a été obligé de faire, toujours au détriment d'une véritable covariance (invariance relativiste) des résultats. Il n'en reste pas moins que de nombreuses perspectives ont pu être ouvertes par cette approche pour une meilleure connaissance microscopique de la structure nucléaire, et des relations qui peuvent exister entre la structure du nucléon et la structure du noyau.

Appendices

1. Notations

1) Les coordonnées d'espace temps $(t,x,y,z)=(t,\vec{x})$ sont représentées par le quadrivecteur (contravariant) :

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \vec{x}) .$$

La norme du quadrivecteur x^μ est :

$$x^2 = x^\mu x_\mu = x^{0^2} - \vec{x}^2 ,$$

où x_μ est le quadrivecteur covariant défini par $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ et où l'on somme sur les indices répétés. $g_{\mu\nu}$ est une matrice 4 x 4 qui définit la métrique de l'espace-temps (métrique de Minkowsky) :

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} .$$

2) De la même manière le quadrivecteur impulsion énergie s'écrit :

$$p^\mu = (E, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, \vec{p}) ,$$

ou encore dans l'espace des coordonnées :

$$p^\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla} \right) \equiv i\partial^\mu ,$$

d'où

$$p^\mu p_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\Box = \vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} .$$

3) Toute matrice 4 x 4 peut être développée sur une base de 16 matrices particulières, indépendantes que l'on choisira ici comme suit (matrices de Dirac) :

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1} \end{array}\right) ,$$

(V)

$$\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\sigma} \\ \hline -\vec{\sigma} & 0 \end{array}\right) .$$

Chaque carré représente la réduction de la matrice dans un espace de dimension 2, $\vec{\sigma}$ sont les matrices de Pauli habituelles et $\mathbb{1}$ représente la matrice unité dans cet espace.

(A) $$\gamma^5 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} ,$$

(T) $$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \qquad \mu < \nu \ , \ \nu = 1-4 .$$

(P) $$\gamma^5 \gamma^\mu \qquad \mu = 1-4 ,$$

(S) $$I \ (\text{unité})$$

On utilisera d'autre part la notation suivante $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu$ pour représenter le produit scalaire d'un quadrivecteur a^μ avec les matrices γ_μ de Dirac et enfin $\bar{a} = a^+ \gamma_0$ où a^+ est l'adjoint de a.

2. Energies moyennes dans la matière nucléaire

Nous allons détailler ici le calcul de la valeur moyenne du hamiltonien (1.30) dans la matière nucléaire :

$$\langle \phi_0 | H | \phi_0 \rangle = \langle \phi_0 | T | \phi_0 \rangle + \langle \phi_0 | V | \phi_0 \rangle , \qquad (A.1)$$

dans le cas simple où V représente le potentiel d'échange d'un méson σ et d'un méson ω .

1. Energie cinétique

$$\langle \phi_0 | T | \phi_0 \rangle = \sum_{s,\tau} \int_{p \in S_f} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} u^+(\vec{p}, s, \tau)\left[\vec{\alpha}.\vec{p} + \gamma_0 M\right] u(\vec{p}, s, \tau) . \qquad (A.2)$$

La somme sur l'isospin (cas de la matière nucléaire symétrique) donne un facteur 2 et S_f représente la sphère de Fermi définie par $p \leq p_f$. Le spineur d'un nucléon dans la matière nucléaire est défini par (1.46).

La sommation sur le spin est une opération standard. Si l'on explicite les sommations sur les indices a, b correspondant à chaque composante du spineur :

$$\sum_s u^+(\vec{p}, s, \tau)\left[\vec{\alpha}.\vec{p} + \gamma_0 M\right] u(\vec{p}, s, \tau) = \sum_s u^+_a(\alpha)\left[\vec{\alpha}.\vec{p} + \gamma_0 M\right]_{ab} u_b(\alpha) , \qquad (A.3)$$

et en utilisant la relation caractéristique

$$\sum_s u_a(\vec{p},s,\tau)\,\bar{u}_b(\vec{p},s,\tau) = \frac{M^*}{\varepsilon^*}\left(\frac{\not{p}^*+M^*}{2M^*}\right)_{ba} \xi_\tau \xi_\tau^+ = \left(\frac{\not{p}^*+M^*}{2\varepsilon^*}\right)_{ba} \xi_\tau \xi_\tau^+ , \qquad (A.4)$$

pour des spineurs d'énergie positive, on obtient alors immédiatement :

$$\langle \phi_0 | T | \phi_0 \rangle = 2 \int_{p\in S_F} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, Tr\left[\frac{\not{p}^*+M^*}{2\varepsilon^*}\,(\vec{\gamma}.\vec{p}+M)\right], \qquad (A.5)$$

d'où en reprenant les calculs standard de traces[3] :

$$\langle \phi_0 | T | \phi_0 \rangle = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 dp \left[p\,\hat{I}(p) + M\,\hat{M}(p)\right], \qquad (A.6)$$

avec les définitions (1.48) pour $\hat{P}(p)$ et $\hat{M}(p)$.

2. Energie potentielle

En suivant une démarche analogue on obtient pour l'échange d'un méson σ et ω :

2.a) Partie directe

$$\langle \phi_0 | V_\sigma^D | \phi_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\substack{s_1,s_2\\ \tau_1,\tau_2}} \iint \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \left[\bar{u}(\vec{p}_1,s_1,\tau_1)\,u(\vec{p}_1,s_1,\tau_1)\right] \qquad (A.7)$$

$$\left[-\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\right]\left[\bar{u}(\vec{p}_2,s_2,\tau_2)\,u(\vec{p}_2,s_2,\tau_2)\right].$$

La sommation sur les isospins donne un facteur 4 et par réduction des sommations sur les spins au profit de calculs de traces, avec

$$\sum_{s_1} \bar{u}(\vec{p}_1,s_1,\tau_1)\,u(\vec{p}_1,\vec{s}_1,\vec{\tau}_1) = Tr\left[\frac{\not{p}_1^*+M_1^*}{2\varepsilon_1^*}\right] = 2\,\frac{M_1^*}{\varepsilon_1^*}, \qquad (A.8)$$

avec la notation abrégée : $a_1^* = a^*(p_1)$

on obtient alors :

$$\langle \phi_o | V_\sigma^D | \phi_o \rangle = -\frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[\frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_f} p^2 dp \, \hat{M}(p) \right]^2 \equiv -\frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \rho_s^2 . \qquad (A.9)$$

De même pour l'échange du ω :

$$\langle \phi_o | V_\omega^D | \phi_o \rangle = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \left[\frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_f} p^2 dp \right]^2 \equiv \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_B^2 . \qquad (A.10)$$

où l'on a utilisé la condition de normalisation des spineurs $U^+U = 1$.

2.b) Partie d'échange

$$\langle \phi_o | V_\sigma^E | \phi_o \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{s_1 s_2 \\ \tau_1 \tau_2}} \iint \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \left[\bar{u}(\vec{p}_2, s_2, \tau_2) u(\vec{p}_1, s_1, \tau_1) \right] \qquad (A.11)$$

$$\left[-\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2 + \vec{q}^2} \right] \left[\bar{u}(\vec{p}_1, s_1, \tau_1) \, u(\vec{p}_2, s_2, \tau_2) \right] ,$$

et $\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ représente le moment transféré par le méson σ (et l'on a négligé ici les effets de retard en prenant $q_o = 0$). La sommation sur les isospins donne un facteur 2 par la condition :

$$\xi^+_{\tau_1} \xi_{\tau_2} = \delta_{\tau_1 \tau_2} .$$

D'autre part :

$$\sum_{\substack{s_1 s_2 \\ \tau_1 \tau_2}} \left[\bar{u}(\vec{p}_2, s_2, \tau_2) u(\vec{p}_1, s_1, \tau_1) \right] \left[\bar{u}(\vec{p}_1, s_1, \tau_1) u(\vec{p}_2, s_2, \tau_2) \right] = \qquad (A.12)$$

$$2 \, Tr \left[\frac{\not{p}_2^* + M_2^*}{2E_2^*} \frac{\not{p}_1^* + M_1^*}{2E_1^*} \right] = 2 \left[1 - \hat{\vec{p}}(p_2) \hat{\vec{p}}(p_2) \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 + \hat{M}(p_1) \hat{M}(p_2) \right] .$$

Enfin l'intégrale sur la partie angulaire fait intervenir les contributions suivantes :

$$\iint d\Omega_1\, d\Omega_2 \; \frac{1}{m_\sigma^2 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2} = \frac{4\pi^2}{p_1 p_2} \ln\left[\frac{m_\sigma^2 + (p_1+p_2)^2}{m_\sigma^2 + (p_1-p_2)^2}\right] \equiv \frac{4\pi^2}{p_1 p_2}\, \Theta(p_1, p_2, m_\sigma)\,,$$

(A.13)

$$\iint d\Omega_1\, d\Omega_2 \; \frac{\cos\theta}{m_\sigma^2 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2} = \frac{8\pi^2}{p_1 p_2}\left[\frac{p_1^2 + p_2^2 + m_\sigma^2}{4 p_1 p_2}\, \Theta(p_1, p_2, m_\sigma) - 1\right]$$

$$\equiv \frac{8\pi^2}{p_1 p_2}\, \Phi(p_1, p_2, m_\sigma)\,,$$

avec $\cos(\theta) = \hat{p}_2 \cdot \hat{p}_1$, $\hat{p}$ représentant le vecteur unitaire suivant la direction de $\vec{p}$. Finalement

$$\langle \phi_0 | V_\sigma^E | \phi_0 \rangle = \frac{g_\sigma^2}{16\pi^4} \int p_1^2 dp_1 \int p_2^2 dp_2 \left\{ \left[1 + \hat{M}(p_1)\hat{M}(p_2)\right] \Theta(p_1, p_2, m_\sigma) \right.$$

(A.14)

$$\left. - 2\,\hat{p}(p_1)\,\hat{p}(p_2)\; \Phi(p_1, p_2, m_\sigma) \right\},$$

et de même pour l'échange du ω :

$$\langle \phi_0 | V_\omega^E | \phi_0 \rangle = -\frac{g_\omega^2}{16\pi^4} \int p_1^2 dp_1 \int p_2^2 dp_2 \left\{ \left[4\hat{M}(p_1)\hat{M}(p_2) - 2\right] \Theta(p_1, p_2, m_\omega) \right.$$

(A.15)

$$\left. + 4\,\hat{p}(p_1)\,\hat{p}(p_2)\; \Phi(p_1, p_2, m_\omega) \right\},$$

De manière plus générale on écrira les énergies potentielles d'échange sous la forme :

$$\langle \phi_0 | V^E | \phi_0 \rangle = \frac{1}{16\pi^4} \int p_1^2 dp_1 \int p_2^2 dp_2 \left\{ A(p_1, p_2) + B(p_1, p_2)\, \hat{M}(p_1)\hat{M}(p_2) \right.$$

$$\left. + C(p_1, p_2)\, \hat{p}(p_1)\, \hat{p}(p_2) + D(p_1, p_2)\, \hat{p}(p_1)\, \hat{M}(p_2) \right\} \qquad \text{(A.16)}$$

Références

1. J.D. Walecka, Annals of Physics **83** (1974) 491.
2. B. Desplanques, Cours de l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire 1984.
3. J.D. Bjorken et S.D.J. Drell, Relativistic quantum mechanics et Relativistic quantum fields (McGraw-Hill) ;
   C. Itzykson et J.B. Zuber, Quantum Field Theory (McGraw-Hill)
4. A. Bouyssy et al., Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1731.
5. B. Serot et J.D. Walecka, Advances in Nuclear Physics **16** (1985) eds. J.W. Negele et E. Vogt ; M.R. Anastasio et al., Physics Reports **100** (1983) 327.
6. M. Lacombe et al., Phys. Rev. **C21** (1980) 861 ;
   K. Holinde, Physics Reports **68** (1981) 121.
7. C.H. Horowitz et B. Serot, Nucl. Phys. **A399** (1983) 529 ;
   M. Jaminon, C. Mahaux et P. Rochus, Nucl. Phys. **A365** (1981) 371.
8. M. Bawin et M. Jaminon, Nucl. Phys. **A407** (1983) 515.
9. R. Brockmann et R. Machleidt, Phys. Lett. **149B** (1984) 283.
10. A. Bouyssy, S. Marcos et Pham van Thieu, Nucl. Phys. **A422** (1984) 541 ;
    J. Diaz Alonso, Phys. Rev. **D31** (1985) 1315.
11. S.A. Chin, Ann. Phys. (NY) **108** (1977) 301 ;
    C.J. Horowitz et B. Serot, Phys. Lett. **140B** (1984) 181.
12. R. Brockmann, Phys. Rev. **C18** (1978) 1510.
13. A. Bouyssy, S. Marcos, J.F. Mathiot et Nguyen van Giai, en préparation.
14. I. Sick et J.S. McCarthy, Nucl. Phys. **A150** (1970) 631 ;
    I. Sick et al., Phys. Lett. **88B** (1979) 245 ;
    B. Frois et al., Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 152.
15. X. Campi et D.W.L. Sprung, Nucl. Phys. **A194** (1972) 401.
16. A. Bouyssy et S. Marcos, Phys. Lett. **127B** (1983) 157.
17. D. Vautherin et D.M. Brink, Phys. Rev. **C5** (1972) 626 ;
    M. Beiner et al., Nucl. Phys. **A238** (1975) 29.
18. W. Bentz et al., Nucl. Phys. **A436** (1985) 593.
19. A. Bouyssy, S. Marcos et J.F. Mathiot, Nucl. Phys. **A415** (1984) 497.
20. M. Jaminon, C. Mahaux et P. Rochus, Phys. Rev. **C22** (1980) 2027.
21. L. Ray et G.W. Hoffmann, Phys. Rev. **C31** (1985) 538.
22. A.K. Kerman, H.J. McManus et R.H. Thaler, Ann. Phys. (NY) **8** (1959) 551.
23. L. Rikus et H.V. Van Geramb, Nucl. Phys. **A426** (1984) 496 ;
    G.W. Hoffmann et al., Phys. Rev. **C24** (1981) 541.
24. J. Dechargé et D. Gogny, Phys. Rev. **C21** (1980) 1568 ;
    J. Dechargé et al., Nucl. Phys. **A358** (1981) 203c.
25. G. Ripka, Cours de l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire, 1984 ;
    W. Marciano et H. Pagels, Physics Reports **36** (1978) 137.
26. M. Rho, Ann. Rev. of Nucl. and Part. Sciences **34** (1984) 531.
27. V. Bernard et al., Nucl. Phys. **A412** (1984) 349.
28. G. Lepage et S.J. Brodsky, Phys. Rev. **D22** (1980) 2157.
29. C.E. Carlson et F. Gross, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 127.
30. L.S. Celenza, A. Rosenthal et C. Shakin, Phys. Rev. **C31** (1984) 212, 232.
31. M. Rho, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 767.
32. J. Treiner et al., Nucl. Phys. **A371** (1981) 253.

33. R.K. Badhuri, J. Dey et M.A. Preston, Phys. Lett. **136B** (1984) 289.
34. B. Silvestre-Brac et C. Gignoux, Preprint ISN Grenoble (1984).
35. J.F. Mathiot, en préparation.
36. G.E. Brown, J.W. Durso et M. Johnson, Nucl. Phys. **A397** (1984) 447 ;
U.G. Meissner et J.D. Durso, Nucl. Phys. **A430** (1984) 670.
37. I. Sick, Nucl. Phys. **A434** (1985) 677c.