

SYSTEMES DYNAMIQUES APPLICATIONS EN GEOMETRIE ET THEORIE DES NOMBRES

Jerome Buzzi

▶ **To cite this version:**

Jerome Buzzi. SYSTEMES DYNAMIQUES APPLICATIONS EN GEOMETRIE ET THEORIE DES NOMBRES. 3rd cycle. Ecole polytechnique, 2011, pp.174. cel-00628094

HAL Id: cel-00628094
https://cel.hal.science/cel-00628094

Submitted on 30 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Jérôme Buzzi

SYSTÈMES DYNAMIQUES

APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE ET THÉORIE DES NOMBRES

VERSION 2.1 DU 29/08/2011

J. Buzzi
Laboratoire de Mathématique d'Orsay, Bât. 425, Université Paris-Sud,
91405 Orsay, France.
E-mail : jerome.buzzi@math.u-psud.fr
Url : jbuzzi.wordpress.com

Le code de la propriété intellectuelle autorise "les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" (article L.122-4). Il autorise également les courtes citations dans effectuées dans un but d'exemple et d'illustration. En revanche, "toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droits, est illicite" (article L.122-4). Elle constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© Jérôme Buzzi, 2011.

SYSTÈMES DYNAMIQUES

APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE ET THÉORIE DES NOMBRES

VERSION 2.1 DU 29/08/2011

Jérôme Buzzi

Résumé. — Ce cours de niveau M1/M2 vise à introduire les notions fondamentales de dynamique topologique et surtout ergodique puis à appliquer ces concepts à des problèmes non-triviaux de géométrie hyperbolique et de théorie des nombres.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

Partie I. Notions dynamiques fondamentales 5

1. Exemples 7
1.1. Systèmes d'origine différentielle 7
1.2. Dynamiques en théorie des nombres 12
1.3. Dynamique symbolique 16
1.4. Exercices complémentaires 19

2. Généralités 21
2.1. Qu'est-ce qu'un système dynamique ? 21
2.2. Notions d'isomorphisme et de facteur 22
2.3. Quelques constructions 24
2.4. Exercices complémentaires 28

3. Dynamique Topologique 31
3.1. Ensembles Limites 31
3.2. Minimalité 32
3.3. Récurrence 34
3.4. Transitivité 36
3.5. Construction d'une structure probabiliste 38
3.6. Dynamique symbolique 39
3.7. Entropie topologique 40
3.8. Exercices complémentaires 42

4. Théorie ergodique 47
4.1. Récurrence 47
4.2. Définition de l'ergodicité 48
4.3. Ergodicité et constructions 51

4.4. Théorème ergodique moyen ... 53
4.5. Théorème ergodique ponctuel ... 56
4.6. Unique ergodicité ... 59
4.7. Exercices ... 60

Partie II. Géométrie hyperbolique ... 63

5. Le plan hyperbolique ... 65
5.1. Structures riemaniennes sur un ouvert ... 65
5.2. Action du groupe linéaire sur $\mathbb{H}$ ... 69
5.3. Propriétés géométriques des transformations de Möbius ... 72
5.4. Fibré unitaire tangent ... 75
5.5. Géodésiques ... 76
5.6. Exercices ... 79

6. Surface modulaire ... 83
6.1. Espace quotient ... 83
6.2. Topologie quotient de l'espace modulaire ... 85
6.3. Structure métrique locale de $\mathbb{M}$ ... 86
6.4. Domaine fondamental de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ ... 87
6.5. Exercices ... 91

Partie III. Dynamiques hyperboliques ... 95

7. Géodésiques et dynamiques associées ... 97
7.1. Flot géodésique ... 97
7.2. Flot horicyclique ... 100
7.3. Flot horicyclique dual ... 102
7.4. Exercices ... 104

8. Dynamique du flot géodésique ... 107
8.1. Introduction ... 107
8.2. Horicycles et flot géodésique ... 107
8.3. Mesure de Liouville ... 110
8.4. Passage à la surface modulaire ... 113
8.5. Ergodicité du flot géodésique ... 115
8.6. Construction de géodésiques périodiques ... 120
8.7. Exercices ... 120

9. Dynamique horicyclique ... 123
9.1. Transitivité topologique ... 123
9.2. Preuve de l'ergodicité de la mesure de Liouville ... 125
9.3. Preuve du théorème ... 127
9.4. Exercices ... 128

A. Pour aller plus loin ... 129

B. Liens avec la théorie des nombres 131
B.1. Multiplication par N et développement en base N 131
B.2. Rotation et approximation rationnelle 132
B.3. Transformation de Gauss et développement en fraction continue 133

C. Outils 137
C.1. Vocabulaire algébrique 137
C.2. Topologie 138
C.3. Théorie de la mesure 142
C.4. Variétés différentiables 146
C.5. Analyse fonctionnelle 148

D. Problèmes 151
D.1. Devoir de novembre 2010 151
D.2. Devoir de décembre 2010 154

E. Notations 159

Index 161

Bibliographie 165

INTRODUCTION

Ce cours est une introduction à la théorie des systèmes dynamiques telle qu'elle s'est développée depuis les travaux d'Henri Poincaré sur le problème des trois corps [**21, 2**]. Typiquement, cette théorie considère les évolutions $(\phi_t(x))_{t\in\mathbb{R}}$ de tous les états $x \in X$ d'un certain système. Cette évolution globale se définit par un flot $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$, chaque restriction $\phi_t : X \to X$ donnée par l'évolution des états au cours d'un temps t. Un exemple fondateur est fournit par le flot de l'équation différentielle ordinaire autonome [**27**] décrivant le modèle newtonien du système solaire. L'analyste a obtenu (sous certaines conditions) l'existence et l'unicité des solutions ainsi que des développements en série ou des schémas d'approximation sur des temps fixés. Ces préliminaires étant accomplis, le travail du dynamicien commence : établir les *propriétés qualitatives à long terme* comme :

- l'existence de comportements asymptotiques simples ou complexes, leur éventuelle indépendance par rapport aux conditions initiales ;
- l'imprévisibilité potentielle en présence de petites erreurs de mesure, de calcul ou de modélisation ;
- la récurrence (ou non) d'un état initial ;
- les propriétés statistiques des évolutions.

En effet, les incertitudes peuvent s'accumuler, sous la forme d'erreurs numériques ou bien de problèmes de convergence, empêchant de trancher ces questions par le calcul direct et créant de nouveaux phénomènes. Nous verrons quelques outils fournis par la théorie des systèmes dynamiques pour contourner cet obstacle en se plaçant à divers points de vue, notamment :

- topologiques (récurrence, invariants, représentations symboliques) ;
- ou probabilistes (théorèmes ergodiques).

Comme le montre l'exemple de Poincaré, les questions de dynamique sont en partie motivées par les applications à d'autres sciences ou à d'autres domaines mathématiques. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons choisi comme fil directeur l'étude de dynamiques issues de problèmes de théorie des nombres et de géométrie :

- rotations et équidistribution des valeurs de polynômes aux entiers ;
- approximation rationnelle et transformation de Gauss ;
- surfaces hyperboliques et flots géodésiques et horicycliques.

Nous espérons ainsi entretenir la curiosité du lecteur, montrer comment ces liens se tissent, indiquer des liens vers des recherches actuelles et contribuer plus largement à sa découverte du monde mathématique.

Ce cours, enseigné sur une trentaine d'heures, se veut accessible à tout étudiant motivé de quatrième ou cinquième année universitaire ayant quelques notions en topologie, théorie de la mesure, analyse fonctionnelle. Nous avons essayé de rappeler systématiquement (quoique succintement) toutes les définitions et les énoncés dépassant le niveau de la deuxième année (voir l'appendice C).

Ce texte se divise en trois parties :

La première, *notions dynamiques fondamentales,* commence par donner quelques exemples et définir les objets et les constructions de base de la théorie. Le deuxième chapitre est consacré à quelques éléments de dynamique topologique : récurrence, transitivité, mais aussi dynamique symbolique et entropie. Le troisième chapitre pose les bases de la théorie ergodique, dégage les notions d'ergodicité et prouve les théorèmes ergodiques de von Neumann et de Birkhoff. Enfin nous faisons le lien entre ces deux contextes, ergodiques et topologiques.

La seconde partie, *géométrie hyperbolique,* définit et étudie cette géométrie non-euclidienne en dimension 2. Nous nous plaçons sur le demi-plan de Poincaré vu comme une variété riemannienne que nous étudions par le moyen de ses isométries : les transformations de Möbius et leur correspondance avec un quotient du groupe linéaire $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Nous construisons l'espace des vecteurs tangents comme $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de déterminant 1 à multiplication par ± 1 près. Enfin nous introduisons la surface modulaire comme quotient du demi-plan de Poincaré et étudions sa structure locale et globale, par identification au quotient $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ et la construction d'un domaine fondamental.

La troisième partie, *dynamique hyperbolique,* définit les flots géodésiques et horicycliques d'abord sur le plan puis sur la surface modulaire. Ensuite, l'argument de Hopf est expliqué et appliqué au flot géodésique pour montrer son ergodicité. Puis, après avoir établi le caractère transitif du flot horicyclique, on prouve son unique ergodicité.

L'appendice contient un récapitulatif des notations, une liste d'ouvrages dont la lecture peut compléter ou étendre l'étude de ces notes, des rappels, des énoncés de problèmes, un index et une bibliographie.

PARTIE I

NOTIONS DYNAMIQUES FONDAMENTALES

CHAPITRE 1

EXEMPLES

Nous commençons par quelques exemples de systèmes dynamiques, en temps discret ou continu, d'origines diverses (mécanique classique, théorie des nombres), donnés par une équation différentielle autonome ou périodique ou encore définis par l'itération d'une formule explicite. Nous formulons à leur propos quelques questions typiques de la théorie des systèmes dynamiques et donnons quelques constructions. Nous concluons ce chapitre sur les définitions correspondantes et des exercices complémentaires à ceux intégrés au texte.

1.1. Systèmes d'origine différentielle

1.1.1. Définitions et théorème de Picard. — La théorie des équations différentielles a fournit historiquement les premiers exemples de systèmes dynamiques.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (ou plus généralement d'une variété, voir l'appendice C.4) et I un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $F : U \times I \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs sur U dépendant éventuellement du temps $t \in I$. L'*équation différentielle* associée est :

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t). \tag{1}$$

On dit que U ci-dessus est l'*espace des phases*.

Exemple 1.1. — Le mouvement d'un pendule forcé périodiquement est caractérisé par l'équation :

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = \epsilon \sin \omega t$$

(ϵ et ω sont des paramètres). Mise sous la forme standard (1), cette équation correspond au champ de vecteurs : $F_1(x,t) = (x_2, -\sin x_1 + \epsilon \sin 2\pi t)$ sur $U_1 = \mathbb{R}^2$.

Exemple 1.2. — Le mouvement de trois points matériels soumis à la gravitation et de masses égales est donné par $x^1, x^2, x^3 : I \to \mathbb{R}^3$ dont les dérivées secondes vérifient :

$$\ddot{x}^1 = \frac{x^2 - x^1}{\|x^2 - x^1\|^3} + \frac{x^3 - x^1}{\|x^3 - x^1\|^3}$$
$$\ddot{x}^2 = \frac{x^1 - x^2}{\|x^1 - x^2\|^3} + \frac{x^3 - x^2}{\|x^3 - x^2\|^3}$$
$$\ddot{x}^3 = \frac{x^2 - x^3}{\|x^2 - x^3\|^3} + \frac{x^2 - x^3}{\|x^2 - x^3\|^3}.$$

Mise sous la forme standard (1), cette équation correspond au champ de vecteurs (en posant $y := (y_1, \dots, y_{18}) := (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \in \mathbb{R}^{18}$) :

$$\begin{aligned} F(y,t) =& (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, (y_4 - y_1)/\|x^2 - x^1\|^3 + (y_7 - y_1)/\|x^3 - x^1\|^3, \\ & (y_5 - y_2)/\|x^2 - x^1\|^3 + (y_8 - y_2)/\|x^3 - x^1\|^3, \\ & (y_6 - y_3)/\|x^2 - x^1\|^3 + (y_9 - y_3)/\|x^3 - x^1\|^3, \\ & (y_1 - y_4)/\|x^1 - x^2\|^3 + (y_7 - y_4)/\|x^3 - x^2\|^3, \dots) \end{aligned}$$

sur $U := \{y \in \mathbb{R}^{18} : \|x_1 - x_2\| \cdot \|x_1 - x_3\| \cdot \|x_3 - x_2\| \neq 0\}$.

Exemple 1.3. — L'interaction entre deux molécules séparées par un vecteur $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est donnée, dans le modèle de Lennard-Jones, par le potentiel :

$$V(r) := r^{-12} - 2r^{-6} \text{ où } r := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \text{ et } (x_1, \dots, x_6) := x$$

l'équation différentielle se déduisant du potentiel selon $\ddot{x} = -\operatorname{grad} V(x)$. Ceci correspond, sous la forme standard, au champ de vecteurs

$$F_2(x,t) = (x_4, x_5, x_6, -\partial_1 V(r), -\partial_2 V(r), -\partial_3 V(r))$$

sur l'ouvert $U_2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$.

Une solution de (1) est une fonction dérivable $x : J \to U$ définie sur un intervalle ouvert $J \subset I$ et vérifiant $x'(t) = F(x(t), t)$ pour tout $t \in J$. Cette solution est dite *maximale,* si elle n'admet pas de prolongement strict qui soit encore une solution.

Le théorème de Picard affirme que, si F est continue d'une part, Lipschitz par rapport à sa première variable d'autre part, alors pour tout $(x_0, t_0) \in U \times I$, il existe une unique solution maximale x satisfaisant la *condition de Cauchy* : $x(t_0) = x_0$.

Exercice 1.1. — Montrer que, dans les trois exemples précédents, le théorème de Picard s'applique. Pour chacun de ces systèmes, toutes les solutions maximales sont-elles définies sur $\mathbb{R}$?

On voit dès l'exemple 1.1 qu'il peut être plus naturel de travailler sur une variété plutôt que sur un ouvert. En effet, la périodicité de F_1 en x_1 "permet" de remplacer l'ouvert $U_1 = \mathbb{R}^2$ par le cylindre $\tilde{U}_1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (où $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est le cercle

unité de longueur 2π), une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. La justification de ce remplacement et un exemple de son intérêt sont donnés dans l'exercice 1.2.

Exercice 1.2. — En utilisant les quelques notions de géométrie différentielle rappelées dans l'appendice C.4, expliciter l'équation du pendule sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et vérifier que les ensembles des solutions de l'équation vue sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ se déduisent l'un de l'autre d'une façon que l'on précisera.

On suppose $\epsilon = 0$. Montrer qu'il existe un ouvert dense du cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ de points x_0 tels que la solution maximale au problème de Cauchy $(\theta(0), \theta'(0)) = x_0$ pour l'équation du pendule soit périodique. Montrer que c'est faux sur $\mathbb{R}^2$.

1.1.2. Flots. — La théorie des systèmes dynamiques met l'accent sur l'*ensemble des solutions* plutôt qu'une solution donnée. On suppose que toutes les solutions maximales sont définies au moins sur un même intervalle, qu'on suppose égal à I. On peut alors définir le *flot* associé $\Phi : U \times I \times I \to U$ par

$$\Phi_{t_0}^{t_1}(x_0) = x(t_1) \text{ si } x \text{ est la solution maximale du problème de Cauchy } x(t_0) = x_0.$$

Une analogie physique est fournie par les particules d'un fluide se déplaçant selon un champ de vitesse $F(x,t)$ dans un volume U. $\Phi_{t_0}^{t_1} : U \to U$ est le mouvement du fluide entre les deux instants t_0 et t_1. On vérifie facilement que, pour tous $t_0, t_1, t_2 \in I$,

$$\Phi_{t_1}^{t_2} \circ \Phi_{t_0}^{t_1} = \Phi_{t_0}^{t_2}.$$

Autrement dit, le mouvement de t_0 à t_2 peut s'obtenir en composant celui de t_0 à t_1 avec celui de t_1 à t_2.

La théorie des systèmes dynamiques s'intéressant principalement aux propriétés asymptotiques de ces évolutions, on se placera la plupart du temps dans des cas où $I = \mathbb{R}$.

Exercice 1.3. — Painlevé a démontré en 1897 que qu'une solution maximale du problème des trois corps (exemple 1.2) n'est limitée que par une collision, i.e., l'annulation d'une des trois distances entre les trois corps.[(1)] En déduire que le flot du problème des trois corps peut se définir Lebesgue presque partout : il existe une partie X de $\mathbb{R}^{18}$ dont le complémentaire est de mesure de Lebesgue nulle telle que le flot $\Phi^t : X \to X$ est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.1.3. Flot autonome. — La plupart des résultats de systèmes dynamiques ont besoin d'une hypothèse de *stationnarité*. Celle-ci peut s'obtenir notamment en demandant que l'évolution globale Φ_s^{s+t} ne dépende pas du temps $s \in \mathbb{R}$. Ceci revient à supposer l'équation différentielle *autonome*, c'est-à-dire que $F(x,t)$ ne dépend pas de sa seconde variable t. En notant $\Phi^t := \Phi_0^t$, la relation précédente devient donc :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}\ \Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{s+t}. \tag{2}$$

(1) Ce n'est plus vrai avec cinq corps ou plus [**19, 28**].

On dit que $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe de transformations à un paramètre agissant sur U.

Donnons une première illustration du point de vue "système dynamique" sur l'exemple 1.3.

Exercice 1.4. — Montrer que le flot défini par F_2 *préserve le volume*[(2)] : pour tout ouvert $V \subset U_2$, tous les ensembles $\Phi^t(V)$ ont le même volume. *Indication :* On pourra calculer la divergence du champ F_2.

Soit $E(x) := 2V(r) + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$, l'énergie mécanique. Montrer que cette énergie est préservée par le flot : $E \circ \Phi^t = E$.

Montrer que pour tout $e < 0$, l'ensemble $E^{-1}(e) := \{x \in U_2 : E(x) = e\}$ est un invariant : $\Phi^t(E^{-1}(e)) = E^{-1}(e)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déduire du théorème de récurrence de Birkhoff (théorème 3.1) qu'il existe au moins un état inital $x \in E^{-1}(e)$ dont l'évolution, si elle n'est peut-être pas périodique, se répète indéfiniment dans le sens suivant :

$$\liminf_{t\to\infty} d(\Phi^t(x), x) = 0. \tag{3}$$

Déduire du théorème de récurrence de Poincaré (théorème 4.1) qu'en fait, presque tout point $x \in U_2$ vérifiant $E(x) < 0$ est récurrent ("presque tout" signifie que l'ensemble des exceptions est de mesure de Lebesgue nulle). Que peut-on dire pour les points de l'ensemble $E^{-1}(e)$ pour presque tout $e < 0$? Pour tout $e < 0$?

On dit que l'orbite d'un point x vérifiant (3) est *récurrente*. Remarquons que c'est une propriété beaucoup plus faible que la *périodicité* (l'existence d'un $T > 0$ tel que $\Phi^T(x) = x$) mais beaucoup plus générale et donc fondamentale, comme nous le verrons dans la suite de ce cours.

Remarque 1.4. — Notons le contraste avec la démarche classique de résolution explicite du problème de Cauchy. On ne dit *rien* sur le comportement d'une orbite particulière. Mais, une fois établie la préservation du volume par le flot, un argument collectif obtient la récurrence presque sans calcul.

L'étude des systèmes dynamiques préservant une mesure est appelé *théorie ergodique* et le théorème de récurrence de Poincaré cité ci-dessus est son résultat fondateur.

1.1.4. Flot périodique. — On peut obtenir un système dynamique sous des hypothèses plus faibles que l'autonomie. Un exemple fondamental est celui d'un flot périodique en temps,

$$\forall s, t \in \mathbb{R}\ \Phi_s^t = \Phi_{s+\tau}^{t+\tau} \tag{4}$$

(2) Dans l'interprétation physique précédente, cette préservation du volume correspond à "l'incompressibilité" de l'écoulement.

($\tau > 0$ est une période). Ceci est vérifié par exemple pour le flot d'une équation différentielle définie par un champ de vecteurs F périodique en temps : $F(x,t) = F(x,t+\tau)$ pour tout $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$. Normalisons $\tau = 1$.

Remarquons que la périodicité en temps du flot est entièrement indépendante de la question de l'existence de solutions périodiques, i.e., de $x_1 \in U$ et $t_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi_{t_1}^{t_1+t}(x_1)$ soit une fonction périodique de t.

Plusieurs constructions d'un système dynamique sont possibles à partir d'un tel système. La première consiste à restreindre le flot aux temps multiples de la période (après choix d'une origine des temps t_0). En effet, en restreignant $\Phi^t := \Phi_{t_0}^{t_0+t}$ aux temps t entiers (en général : multiples de τ), on retrouve la relation de groupe (pour $\mathbb{Z}$ et non plus $\mathbb{R}$) :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}\ \Phi^n \circ \Phi^m = \Phi^{m+n}.$$

Cette restriction apporte une certaine simplification : le groupe de transformation $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est engendré par une seule transformation, $\phi := \Phi^1 = \Phi_{t_0}^{t_0+1}$. La donnée de l'espace U et de la transformation ϕ, est qualifié de système dynamique en **temps discret**.

Exercice 1.5. — Exhiber la correspondance naturelle entre les *orbites* de ϕ, i.e., les suites $(\phi^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $x \in U$ et les orbites du flot initial Φ, $(\Phi_s^{t+s}(x))_{t\in\mathbb{R}}$ pour $x \in U$ et $s \in \mathbb{R}$, i.e., les solutions maximales de l'équation différentielle.

Une deuxième approche consiste à intégrer le temps dans l'espace des phases. Soit $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (le tore de dimension 1, ou simplement le cercle unité paramétré selon $s \mapsto e^{2i\pi s}$, $s \in [0,1[$, autrement dit le quotient du temps $\mathbb{R}$ par le sous-groupe engendré par la période On remplace l'espace des phases U par $V := U \times \mathbb{T}^1$ et le flot $\Phi : \mathbb{R} \times V \to V$ par

$$\Psi^t(x,s) := (\Phi_s^{s+t}(x), s+t \mod 1).$$

Le flot est maintenant autonome sur l'espace V ! L'exercice 1.15 explique le rôle exact de la périodicité du flot dans cette construction.

Il est facile de vérifier que si Φ est le flot d'un champ de vecteurs $F : U \times \mathbb{R} \to U$ de période 1, alors Ψ est le flot du champ de vecteurs $G : V \times \mathbb{R} \to V$ défini par $G(x,s) = (F(x,s), 1)$.

Exercice 1.6. — Exhiber une correspondance naturelle entre les orbites sur U et sur V. Est-ce une bijection ?

Les deux constructions, restriction aux multiples de la période et intégration de celle-ci dans l'espace des phases sont bien sûr étroitement reliées, comme l'exercice 2.8 invite à le montrer.

Donnons pour finir un exemple de résultat obtenu en considérant un système mécanique avec forçage périodique du point de vue dynamique.

Exemple 1.5. — Pour le pendule forcé de l'exemple 1.1, la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques chaotiques d'Anosov et de Smale permet de montrer, pour tout $\omega \neq 0$ et tout ϵ, non-nul mais assez petit, l'existence d'une grande diversité de mouvements : on peut trouver des orbites périodiques accomplissant un nombre fixé de tours dans le sens positif ou négatif et dans un ordre fixé.

1.2. Dynamiques en théorie des nombres

Les systèmes dynamiques interviennent dans plusieurs aspects de théorie des nombres, notamment autour de l'approximation diophantienne et de questions de la forme suivante :

- comment les nombres d'une certaine famille se répartissent-ils ?
- à quelle vitesse peuvent-ils approcher un nombre donné ?

La répartition d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut se décrire en établissant qu'elle "remplit" un certain ensemble X. Si l'ensemble X n'est pas dénombrable, ce remplissage ne peut avoir lieu dans le sens "naïf" où on aurait l'égalité : $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Topologiquement, on se demande si la suite est *dense*[3] dans X. De façon plus quantitative, on se demande si la suite est **équidistribuée** par rapport à une mesure de probabilité borélienne μ : c'est-à-dire si, pour toute fonction continue $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(x_k) = \int \phi(t)\, \mu(dt).$$

La suite est dite *uniformément distribuée* sur un espace métrique X si elle est équidistribuée par rapport à une mesure de probabilité invariante par les isométries de X.[4] On verra que la théorie des systèmes dynamiques permet d'établir l'équidistribution de certaines suites à partir de la considération d'un système dynamique préservant une mesure.

Exercice 1.7. — Une suite uniformément distribuée de $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue est-elle nécessairement dense ? Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équidistribuée sur $[0,1]$. La suite permutée $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle alors nécessairement équidistribuée ? Inversement, est-il possible de rendre équidistribuée une suite quelconque ? Sinon caractériser les suites pour lesquelles cela est possible.

Donner un exemple d'une suite dense mais non équidistribuée sur $[0,1]$. Donner un exemple d'une suite équidistribuée.

---

[3] Une partie d'un espace topologie X est dense dans celui-ci si elle rencontre tout voisinage de tout point de X.

[4] Cette notion est moins intéressante sur les espaces n'ayant qu'une seule isométrie.

1.2.1. Parties fractionnaires des multiples d'un nombre donné. — Il s'agit d'étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la répartition des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ de la forme $x_n := n\alpha \mod 1$. Ces suites s'obtiennent directement à partir des orbites du système dynamique suivant :

Exemple 1.6. — La **rotation** d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ (compté en tours) est définie par $R_\alpha : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ avec $R_\alpha(x) = x + \alpha \mod 1$. On peut aussi la voir sur cercle $\mathbb{S}^1$ comme $R_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z$.

Les rotations sont les prototypes des systèmes dynamiques dits *elliptiques*. Il s'agit, avec l'hyperbolicité chaotique d'une des deux "grandes" catégories de comportements dynamiques illustrées sur la figure 1. L'exercice 2.11 donne un autre indice de l'importance de ces dynamiques en montrant comment les rotations apparaissent dans l'analyse d'un flot dit quasipériodique à deux fréquences. Nous verrons au chapitre 3 que la classe des rotations peut également être considérablement généralisée, pour obtenir par exemple la répartition des valeurs $(P(n) \mod 1)_{n\geq 0}$ d'un polynôme P quelconque.

Exercice 1.8. — Montrer les équivalences suivantes :

1. α est rationnel ssi il existe un entier $q \geq 1$ tel que $R_\alpha^q = \mathrm{Id}_{\mathbb{T}^1}$;
2. la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$ ssi $(R_\alpha^n(0))_{n\geq 0}$ est dense dans $\mathbb{T}^1$;
3. la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équidistribuée sur $[0,1]$ ssi $(R_\alpha^n(0))_{n\geq 0}$ est équidistribuée sur $\mathbb{T}^1$.

Montrer également :

4. l'invariance par R_α de la mesure de Lebesgue $m_{\mathbb{T}^1}$ sur $\mathbb{T}^1$ définie par : $m_{\mathbb{T}^1}(f) = \int_0^1 f(\pi(t))\,dt$ pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$.

Nous montrerons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense et même équidistribuée dès qu'elle ne prend pas qu'un nombre fini de valeurs. Nous obtiendrons ces résultats dans le cadre de la dynamique topologique (pour la densité) et ergodique (pour l'équidistribution). Ce dernier point résultera immédiatement du théorème ergodique ponctuel de Birkhoff (théorème 4.22) une fois que nous saurons que la mesure de Lebesgue est non seulement invariante, selon le point 4 de l'exercice précédent, mais aussi ergodique (Déf. 4.3). L'ergodicité est une propriété fondamentale d'indécomposabilité que nous étudierons longuement.

1.2.2. Développement décimal. — La suite des chiffres du développement d'un nombre $x \in [0,1[$ en base entière $N \geq 2$ ($N = 10$ pour le développement décimal) admet également une description par la dynamique.

Exemple 1.7. — Soit $N \geq 2$, un entier. La **multiplication** par N, $T_N : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ définie par $T_N(x) = Nx \mod 1$.

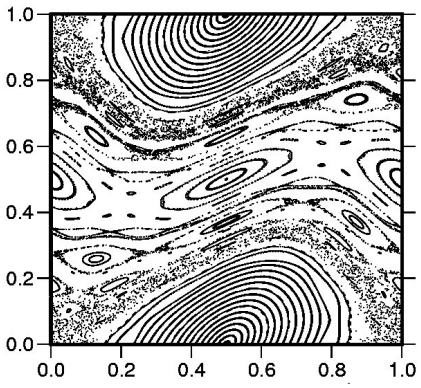


FIGURE 1. Coexistence de dynamique elliptique (les courbes fermées concentriques sur chacune desquelles on a une rotation déformée) et chaotique, probablement hyperbolique (zones "poussiéreuses") pour une application de la famille dite standard : $f(x,y) = (x + 0.15464 \sin 2\pi y, y + x)$ sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Cette coexistence dans une même transformation pose encore de sérieux problèmes aux mathématiciens.

On pose ensuite $c(x) := k \iff x \in \pi([k/N, (k+1)/N[)$ ($\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ étant la projection canonique) et $c_n := c(T_N^n x)$, pour tout $n \geq 0$. On a alors $x = \pi\left(\sum_{n\geq 0} c_n N^{-n-1}\right)$. Autrement dit, dans le cas $N = 10$, $(c_n)_{n\geq 0}$ est le développement décimal de x (ou plus exactement de $y \in [0,1[$ tel que $\pi(y) = x$).

Cette représentation dynamique permet d'étudier les propriétés statistiques de ce développement, en particulier pour les nombres *tirés au hasard*.

Exercice 1.9. — On fixe la base $N \geq 2$. A chaque nombre $x \in [0,1[$ correspond le point $\pi(x) \in \mathbb{T}^1$ et la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ ci-dessus. Montrer les propriétés suivantes :

1. l'orbite de $\pi(x)$ est dense dans $\mathbb{T}^1$ si et seulement si tous les blocs de chiffres de toutes les longueurs apparaissent dans le développement du nombre x ;
2. l'orbite de $\pi(x)$ est uniformément distribuée dans $\mathbb{T}^1$ si et seulement si tout bloc de k chiffres apparaît avec la même fréquence N^{-k} dans le développement décimal de x. On dit que x est *normal* au sens de Borel en base N ;
3. T_N préserve la mesure de Lebesgue dt : pour toute fonction mesurable bornée $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$, $\int_0^1 \phi(t)\, dt = \int_0^1 \phi \circ T_N(t)\, dt$. On pourra considérer le cas particulier des fonctions caractéristiques des intervalles.

Comme pour la suite $(n\alpha \mod 1)_{n\geq 0}$, le théorème ergodique de Birkhoff (théorème 4.22) nous montrera que l'invariance de la mesure de Lebesgue établie dans l'exercice

précédent suffit (encore une fois avec l'ergodicité) à entraîner que Lebesgue presque tout nombre est normal dans toutes les bases.[5]

1.2.3. Approximations rationnelles. — L'approximation par les rationnels est encore plus classique et fondamentale que celle par les décimaux. Les rationnels étant denses, on peut donc trouver un rationnel arbitrairement proche de tout nombre réel. La question ici est la taille du dénominateur nécessaire pour réaliser une approximation donnée. On peut montrer (voir l'appendice B.3) que les meilleures approximations dans ce sens sont énumérées par le procédé suivant.

Le **développement en fraction continue** d'un nombre irrationnel $x \in [0,1[\setminus\mathbb{Q}$ est :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} := \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} \text{ avec } \frac{p_n}{q_n} := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

où les entiers $a_n \geq 1$ (appelés *quotients partiels*) sont donnés par $a_n = E(1/G^n x)$ ($E(x)$ désigne la *partie entière* de x, c'est-à-dire le plus grand entier $n \leq x$) et p_n et q_n sont premiers entre eux. Les *convergents* p_n/q_n fournissent les approximations rationnelles optimales évoquées : si x est irrationnel et si p/q en est une approximation rationnelle quelconque (p, q sont deux entiers, $q > 0$), alors $q < q_n$ implique : $|p_n/q_n - x| < |p/q - x|$.

Ce développement est engendré par la dynamique suivante.

Exemple 1.8. — La **transformation de Gauss** est l'application $G : [0,1] \to [0,1]$, $G(x) = 1/x - E(1/x)$ si $x \neq 0$, $G(0) = 0$.

Exercice 1.10. — Exprimer la suite des quotients partiels $a_0, a_1, \ldots$ d'un nombre $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ en fonction des itérés $G^n(x)$, $n \geq 0$, et d'une fonction à préciser (de façon analogue à la génération du développement décimal par T_{10} et c ci-dessus).

Une question naturelle est celle de la vitesse de décroissance des "écarts" $|p_n/q_n - x|$. Un calcul élémentaire montre que $|p_n/q_n - x| \leq 1/(q_n q_{n+1})$. A nouveau, l'approche dynamique nous fournira aisément l'asymptotique pour Lebesgue presque tout x de cette borne $1/q_n q_{n+1}$. Le point de départ sera le fait vérifié par l'exercice suivant.

Exercice 1.11. — Montrer que la mesure de Gauss $\mu_G = 1_{[0,1]}(\log 2)^{-1}(1+x)^{-1}\,dx$ est préservée par la transformation de Gauss G. *Indication :* On pourra calculer $\mu_G(f \circ G)$ pour $f \in L^1(\mu_G)$ en se servant de la formule du changement de variable sur chaque intervalle $[1/(n+1), 1/n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

---

[5] Il est important de remarquer que cet énoncé portant sur un ensemble de mesure 1, ne nous dit rien *a priori* sur un nombre donné. De fait, si on soupçonne la plupart des irrationnels usuels (π, e, $\sqrt{2}$,...) d'être normaux, on ne sait le prouver pour aucun d'entre eux !

1.2.4. Formes quadratiques sur les entiers. — Donnons pour finir cette liste d'exemples issus de la théorie des nombres une construction plus sophistiquée et nous l'espérons, intriguante. Soit $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}x_ix_j$ une forme quadratique à coefficients a_{ij} réels et à d variables $x_1, \ldots, x_d$. Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs prises sur les points à coordonnées entières ? Par exemple, 0 est-il un point d'accumulation non-trivial, i.e.,

$$0 \in \overline{\{Q(n) \neq 0 : n \in \mathbb{Z}^d\}}.$$

Il y a des obstructions évidentes : si Q est définie positive ou négative ou si Q est à valeurs entières. Le théorème suivant montre que les conditions nécessaires obtenues par cette brève réflexion sont en fait suffisantes.

***Théorème 1.1* (Margulis).** — *Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Supposons que Q ne soit ni définie positive, ni définie négative, ni multiple d'une forme à coefficients entiers. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^d$ tel que :*

$$0 < |Q(n)| < \epsilon.$$

Cet énoncé a été conjecturé par Oppenheim en 1929 (sous une forme plus faible) mais n'a été démontré qu'en 1987 par Margulis. La preuve a été obtenue par un changement total de point de vue par rapport aux résultats partiels de théoriciens des nombres, à savoir une approche dynamique suggérée par Ragunathan dans les années 1970. Ce mathématicien a en effet observé que la conjecture d'Oppenheim est équivalente à certaines propriétés topologiques des orbites d'un système dynamique matriciel. Ce système dynamique est défini, non par un flot (c'est-à-dire une action du groupe $\mathbb{R}$) mais par l'action d'un certain groupe des matriciel sur le quotient $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{PSL}(3,\mathbb{Z})$ des matrices réelles à déterminant 1 par le sous-groupe de celles à coefficients entiers.

Nous n'étudierons pas ce théorème difficile (le lecteur intéressé pourra consulter notamment [**9**]). Par contre nous analyserons le cas plus simple du quotient $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Nous verrons qu'il s'identifie naturellement à l'espace des vecteurs tangents à une certain surface dite *surface modulaire*. Cette surface est porteuse d'une géométrie non-euclidienne, dite hyperbolique, et de deux dynamiques définies par cette géométrie : les flots géodésiques et horicycliques, dont nous établirons les propriétés fondamentales dans la troisième partie de ce cours.

1.3. Dynamique symbolique

La représentation d'un réel $x \in [0,1[$ par son développement décimal $x = \sum_{n\geq 0} c_n 10^{-n-1}$ s'interprète comme suit du point de vue dynamique : le chiffre c_n vaut $c(T_{10}^n(x))$ où $c(y) = k$ si $y \in [k/10, (k+1)/10[$. En particulier, on passe du développement de x à celui de $T_{10}(x)$ très simplement en "effaçant" le premier chiffre

c_0 et en décalant le reste. On formalise cette construction par les notions suivantes qui seront généralisées au chapitre 3.

Définition 1.9. — Le **décalage unilatère** sur un alphabet $\mathcal{A}$ (un ensemble fini) se définit comme l'espace de suite

$$\Sigma_+(\mathcal{A}) := \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

muni de la transformation $\sigma : \Sigma_+(\mathcal{A}) \to \Sigma_+(\mathcal{A})$ défini par $\sigma(\alpha) = (\alpha_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On équipe $\Sigma_+(\mathcal{A})$ de la distance[6] $d(x,y) = \sum_{n\geq 0} \delta_{x_n - y_n} \cdot 3^{-n}$.

Le **décalage bilatère** sur un alphabet $\mathcal{A}$ se définit similairement par $\Sigma(\mathcal{A}) := \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et $\sigma : \Sigma(\mathcal{A}) \to \Sigma(\mathcal{A})$ selon $\sigma(\alpha) = (\alpha_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. La distance sur $\Sigma(\mathcal{A})$ est $d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{x_n - y_n} \cdot 3^{-|n|}$

Un **codage** d'un système dynamique à temps discret (X,ϕ) par un alphabet $\mathcal{A}$ est une application $\gamma : X \to \mathcal{A}$.

Remarque 1.10. — Une des origines de la dynamique symbolique est la physique statistique sur réseau : un point de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^3}$ représente l'état d'un cristal tridimensionnel de maille cubique dont chaque site peut se trouver dans un état parmi deux. La dynamique naturelle est alors le *décalage tridimensionnel*, c'est-à-dire l'action naturelle du groupe $\mathbb{Z}^3$ par translation : $\sigma^k(x) = (x_{n+k})_{n\in\mathbb{Z}^3}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^3$. Cette dynamique permet alors d'exprimer l'homogénéité dans le cadre de diverses questions de mécanique statistique.

Proposition 1.11. — *$\Sigma_+(\mathcal{A})$ est un espace de Cantor[7] et $\sigma : \Sigma_+(\mathcal{A}) \to \Sigma_+(\mathcal{A})$ est continue et surjective, mais non injective. Similairement, $\Sigma(\mathcal{A})$ est un espace de Cantor sur lequel σ est un homéomorphisme.*

Démonstration. — $\Sigma_+(\mathcal{A})$ est un produit d'espaces finis donc compacts. $\Sigma_+(\mathcal{A})$ est donc lui aussi compact par le théorème de Schauder-Tychonoff (voir appendice C.1).

Tout $x \in \Sigma_+(\mathcal{A})$ est limite d'une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: il suffit de modifier une coordonnée de x d'indice tendant vers ∞. $\Sigma_+(\mathcal{A})$ n'a donc pas de point isolé.

Exhibons pour tout $x \in \Sigma_+(\mathcal{A})$ une base de voisinages à la fois ouverts et fermés, ceci impliquera que la composante connexe de x est réduite à $\{x\}$, et donc que $\Sigma_+(\mathcal{A})$ est totalement discontinu. Pour tout $n \geq 1$, on pose $C_n := \{y \in \Sigma_+(\mathcal{A}) : \forall 0 \leq i < n\ y_i = x_i\}$. Les expressions suivantes pour C_n montrent qu'il est ouvert et fermé :

$$C_n = \{y \in \Sigma_+(\mathcal{A}) : d(x,y) < (2/3)\cdot 3^{-n+1}\} = \{y \in \Sigma_+(\mathcal{A}) : d(x,y) \leq (1/2)\cdot 3^{-n+1}\}.$$

$\Sigma_+(\mathcal{A})$ est donc bien un espace de Cantor. Enfin $x \in C_n$ et $\mathrm{diam}(C_n) \leq 3^{-n}$.

---

[6] δ_n est le symbole de Kronecker valant 1 si $n = 0$, 0 sinon.

[7] Un espace de Cantor est un espace métrique compact, sans point isolé, totalement discontinu. De façon équivalente, c'est un espace métrique homéomorphe au Cantor usuel.

σ est continue car $(\sigma(x))_n = x_{n+1}$, or la continuité de σ est équivalente au fait que chaque coordonnée $(\sigma(x))_n$ de l'image est déterminée par un nombre fini de coordonnées.

σ est surjective et non-surjective car tout $x \in \Sigma_+(\mathcal{A})$ admet exactement $\#\mathcal{A}$ antécédents : les y tel que $y_{n+1} := x_n$ pour tout $n \geq 0$ et $y_0 \in \mathcal{A}$.

L'analyse de $(\Sigma(\mathcal{A}), \sigma)$ est entièrement similaire et laissée au lecteur. □

Pour le dynamicien, l'importance de la dynamique symbolique provient d'une part de son adaptation à l'analyse de la dynamique et de la combinatoire : le type de chaque orbite se lit sur son point initial (voir l'exercice 1.12), d'autre part de sa capacité à "représenter" d'autres dynamiques, comme T_N dans notre exemple (voir l'exercice 1.13. Ce dernier point sera largement généralisé au chapitre 3.

L'exercice suivant exploite la "combinatoire libre" du décalage.

Exercice 1.12. — Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $(\Sigma(\mathcal{A}), \sigma)$ possède exactement $\#\mathcal{A}^n$ points *n-périodiques*, c'est-à-dire des points x tels que $\sigma^n(x) = x$.

Montrer que le décalage $(\Sigma(\mathcal{A}), \sigma)$ admet une orbite dense, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \Sigma(\mathcal{A})$ tel que $\{\sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ est dense.

Exercice 1.13. — Soit $\Sigma_+ := \Sigma_+(\{0, 1, \ldots, 9\}$. Soit $\pi : \Sigma_+ \to \mathbb{S}^1$ défini par $\pi(\alpha) = \exp\left(2i\pi \sum_{n\geq 0} \alpha_n 10^{-n-1}\right)$ avec $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer les assertions suivantes :

1. Le codage $c : [0, 1[\to \{0, 1, \ldots, 9\}$ vérifie :
$$\overline{\{\gamma(x) : x \in [0, 1[\}} = \Sigma_+ \text{ où } \gamma(x) := (c(T_N^n x))_{n\in\mathbb{N}}$$
et $\pi \circ \gamma = \mathrm{Id}_{[0,1[}$.
2. π est continue et surjective, mais non injective. On précisera l'ensemble des $z \in \mathbb{S}^1$ tels que $\pi^{-1}(z)$ contient plus d'un élément ;
3. $\pi(\sigma(\alpha)) = T_{10}(\pi(\alpha))$ pour tout $\alpha \in \Sigma_+$. On dit que (Σ_+, σ) est une *extension* de $([0, 1], T_N)$;
4. Si α est périodique, i.e., si $\sigma^n\alpha = \alpha$ pour un certain $n \geq 1$, alors $T_{10}^n(\pi(\alpha)) = \pi(\alpha))$. La réciproque est-elle vraie ? $T_{10}^n(\pi(\alpha)) = \pi(\alpha)$ implique-t-il que $\sigma^n\alpha = \alpha$?

Il est souvant opportun d'aller au-delà de la structure purement topologique analysée précédemment. Le décalage laisse invariant de nombreuses mesures de probabilité comme le suggère l'exercice suivant.

Exercice 1.14. — Soit ϕ le décalage sur $\Sigma := \{1, \ldots, N\}^{\mathbb{Z}}$. Un *cylindre*de Σ est une partie de la forme :
$$[y] := \{x \in \Sigma : x|S = y\}$$
où $y \in \{1, \ldots, N\}^S$, S une partie finie de $\mathbb{Z}$. Montrer que les cylindres sont à la fois ouverts et compacts et qu'ils engendrent la topologie.

Soit $p \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$ un vecteur de probabilité, i.e., vérifiant $\sum_{t\in\mathbb{Z}} p_t = 1$. La *mesure de Bernoulli* μ_p définie par P est l'unique mesure de probabilité borélienne telle que :

$$\mu_p([y]) = \prod_{t\in S} p_t.$$

Vérifier que μ_p est une mesure de probabilité invariante par le décalage. Le système probabiliste (X, ϕ, μ_p) est appelé *schéma de Bernoulli*.

Donner un exemple de mesure de probabilité invariante par le décalage qui ne soit pas de cette forme.

1.4. Exercices complémentaires

Exercice 1.15. — Montrer que tout flot $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U \to U$ peut être rendu autonome en se plaçant sur l'espace des phases $U \times \mathbb{R}$. Le nouveau système peut-il posséder des orbites périodiques ou même simplement récurrentes ? Caractériser les orbites périodiques dans U dont la correspondance dans $V := U \times \mathbb{T}^1$ est encore périodique. Soit $(x_1, t_1) \in U \times \mathbb{R}$ définissant une orbite récurrente pour Φ, i.e., si $\liminf_{t\to\infty} d(x_1, \Phi^t_{t_1}(x_1)) = 0$. Montrer qu'on peut lui associer une orbite récurrente dans V, i.e., $y \in V$ tel que $\liminf_{t\to\infty} d(y, \Phi^t(y)) = 0$.

Exercice 1.16. — On considère le cercle $\mathbb{S}^1$ muni de la mesure m et des dynamiques R_α et T_N (exemples 1.6, 1.7). Etant donné un arc de cercle $[\alpha,\beta] := \{e^{2i\pi t} : \alpha \le t \le \beta\}$ avec $0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi$, calculer $R_\alpha^{-1}([\alpha,\beta])$ et $T_N^{-1}([\alpha,\beta])$. Montrer que l'ensemble des mesurables dont la mesure est égale à celle de leur image réciproque par une transformation mesurable fixée est une σ-algèbre. En déduire que la mesure m est invariante par R_α et T_N.

Exercice 1.17. — Soit $d \ge 1$, un entier. Soit $A \in M(d,\mathbb{C})$, i.e., une matrice $d \times d$ à coefficients complexe. Soit $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ défini par $\phi(t,x) = \exp(tA).x$ où $\exp(B) = \sum_{n\ge 0} B^n/n!$ est l'exponentielle d'une matrice. Montrer que ϕ est le flot engendré par le champ de vecteur $x \mapsto Ax$ sur $\mathbb{C}^d$.

Exercice 1.18. — Soit F et G les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ définis par $F(x_1,x_2) = (x_2, -x_1)$ et $G(x_1,x_2) = (x_2, -\sin x_1)$. Montrer que les orbites des flots correspondants sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. On pourra introduire une fonction constante le long des orbites et tendant vers l'infini à l'infini. Esquisser leur portrait de phase. On pourra consulter [**27**] pour se rafraîchir la mémoire.

Exercice 1.19. — Considérer une équation différentielle ordinaire $dy/dt = F(y,t)$ définie sur une variété compacte X. Expliquer l'intérêt d'introduire l'équation $dz/dt = G(z)$ avec $z = (y,u)$ et $G((y,u)) = (F(y,u),1)$ sur $X \times \mathbb{R}$. Supposons maintenant $F(y,t+1) = F(y,t)$ pour tout $(y,t) \in X \times \mathbb{R}$. Montrer alors comment représenter le flot par un système dynamique en temps continu sur $X \times \mathbb{T}$, puis par un système

dynamique en temps discret sur X. Les systèmes en temps discret obtenus sont-ils canoniques ? conjugués ?

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS

Après les exemples du chapitre précédent, nous pouvons définir formellement ce que sont les systèmes dynamiques et comment on peut les classifier et combiner.

2.1. Qu'est-ce qu'un système dynamique ?

Définition 2.1. — Un **système dynamique** est la donnée de (X, T, ϕ) avec :

- un *espace* X : un ensemble muni d'une structure (par exemple une topologie) ;
- un *temps* T : un groupe (typiquement $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$) ou un semi-groupe[(1)] (typiquement $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$). T est muni d'une structure compatible avec celle de X (par exemple une topologie) ;
- une *action* du semi-groupe T sur l'espace X, i.e., $\phi : T \times X \to X$ tel que, en notant $\oplus$ la loi interne de T :

$$\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s \oplus t, x) \text{ et } \phi(0, x) = x$$

pour tous $x \in X$, $s, t \in T$, ϕ préservant la structure de X (par exemple ϕ est continue).

On note le système dynamique (X, T, ϕ) ou parfois simplement ϕ.

La T**-orbite** d'un point $x \in X$ sous l'action ϕ est la famille $\mathcal{O}^T(x) := (\phi(t, x))_{t \in T}$. On confondra parfois l'orbite et la **trajectoire**, qui est l'ensemble $\{\phi(t, x) : t \in T\}$. Si T est a un ordre total, $\mathcal{O}^+(x) := \{\phi_t(x) : t \in T,\ t \geq 0\}$.

Un système dynamique (X, ϕ, T) est dit **inversible** si T est un groupe. Il est dit en *temps discret* si $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ et en *temps continu* si $T = \mathbb{R}$.

Remarque 2.2. — Un système dynamique inversible est donc la même chose qu'une action de groupe. On verra que ce sont les *questions posées* qui diffèrent de l'étude algébrique de ces actions.

---

(1) Un semi-groupe T est un ensemble muni d'une loi interne associative, admettant un élément neutre et vérifiant $x \oplus y = x \oplus z \implies y = z$ ('$\oplus$' dénotant la loi interne).

Remarque 2.3. — Comme on l'a vu, si $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, une transformation $f : X \to X$ détermine une action de T par $\phi^t = f^t$, $t \in T$, tandis que si $T = \mathbb{R}$ un champ de vecteurs v Lipschitz détermine une action de $\mathbb{R}$ par son flot. Dans ces situations, on identifiera le plus souvent le générateur et le système, i.e., on parlera du système (X, f), des orbites de v, etc.

Exercice 2.1. — Formuler et prouver une réciproque de la remarque précédente. On considèrera soigneusement les hypothèses de régularité.

L'exercice 2.6 explique pourquoi on doit imposer une structure, classiquement parmi les suivantes :

Définition 2.4. — Un système dynamique (X, T, ϕ) est dit :

- **topologique (classique)**[2] si X est un espace métrisable compact et $\phi : T \times X \to X$ est continue (T étant lui-même supposé un espace métrisable localement compact) ;
- **différentiable de classe** C^r si X est une variété de classe C^r [3] et si $\phi : T \times X \to X$ est une application différentiable classe C^r (T étant lui-même supposé une variété C^r) ;
- **mesurable** si X est un espace mesurable et $\phi : T \times X \to X$ est mesurable (T étant lui-même supposé un espace mesurable) ;
- **mesuré** si X est un espace mesurable muni d'une mesure σ-finie m, $\phi : T \times X \to X$ est mesurable et ϕ préserve la mesure, i.e., $(\phi_t)_*(m) = m$ pour tout $t \in T$, (T étant lui-même supposé un espace mesurable) ;
- **probabiliste** s'il est mesuré par rapport à une mesure m de masse totale égale à 1, i.e., vérifiant $m(X) = 1$, (T étant lui-même supposé un espace mesurable).

Remarque 2.5. — On a souvent intérêt à considérer une même action dans plusieurs de ces catégories. Certains liens sont évidents : tout système dynamique différentiable et compact est aussi topologique, tout système topologique induit un système mesurable si on munit l'espace de la tribu des boréliens (voir C.3.1). On verra dans le chapitre 3 (théorème 3.22) que tout système topologique induit un système probabiliste (non uniquement déterminé en général).

2.2. Notions d'isomorphisme et de facteur

Toute théorie mathématique qui se respecte vise à classifier (autant que possible...) les objets qu'elle étudie. Une classification se formalise par la donnée d'une notion de morphisme (et donc d'isomorphisme).

---

[2] Un terme entre parenthèses signifie que celui-ci est sous-entendu si omis.

[3] cf. Appendice C.4. Penser à $X = \mathbb{R}^n$, $[0, 1]$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{T}^n$, i.e., l'espace euclidien, l'intervalle unité, le cercle, la sphère ou le tore.

Définition 2.6. — Un morphisme $h : (X, \phi, T) \to (Y, \psi, T)$ entre deux systèmes dynamiques en temps T et munis du même type de structure est un morphisme $h : X \to Y$ entre les espaces et vérifiant la relation de *semi-conjugaison* :

$$\forall t \in T \qquad h \circ \phi^t = \psi^t \circ h.$$

Si $h(X) = Y$, alors on dit que h est une **semi-conjugaison**, que (X, ϕ, T) est une **extension** et (Y, ψ, T) un **facteur**.

Exercice 2.2. — Montrer que la relation de semi-conjugaison est équivalente à ce que le morphisme envoie toute ϕ-orbite sur une ψ-orbite en respectant le temps.

Définition 2.7. — Deux systèmes dynamiques (X, ϕ, T) et (Y, ψ, T) sont **conjugués** s'ils admettent un isomorphisme h. La bijection h s'appelle la **conjugaison**.

Remarque 2.8. — Comme son nom l'indique, l'extension est un "plus gros" système que le facteur. On peut montrer qu'il existe des paires de systèmes topologiques qui sont mutuellement facteurs topologiques l'un de l'autre, qui ne sont pourtant pas topologiquement conjugués [**18**].

Remarque 2.9. — Dans la catégorie des systèmes dynamiques mesurés, il est commode d'identifier les systèmes ne différant que sur un ensemble de mesure nulle et de considérer comme surjective une application $h : X \to Y$ telle que $Y \setminus h(X)$ soit de mesure nulle.

Remarque 2.10. — Des relations d'équivalence plus faibles sont naturelles, par exemple, dans l'étude des flots on est généralement amené à tolérer un changement du temps.

Exercice 2.3. — Soit $\Sigma_+ := \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ le décalage sur N symboles en temps $\mathbb{N}$ et T_N la multiplication par N. Ces deux systèmes peuvent-ils être topologiquement conjugués ? l'un est-il une extension topologique de l'autre ? sont-ils conjugués de façon probabiliste si on munit T_N de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et Σ_+ de la mesure de Bernoulli uniforme (voir exercice 1.14).

Remarquons que le (non)isomorphisme de deux systèmes est une propriété abstraite en ce qu'elle suppose l'(in)existence d'une certaine application. La plupart des démarches de classification reposent donc sur la notion générale suivante.

Définition 2.11. — Un **invariant** de conjugaison d'un certain type pour un ensemble donné $\mathcal{E}$ de systèmes dynamiques est une application $i : \mathcal{E} \to \mathcal{I}$ telle que :

$$\forall S, T \in \mathcal{E} \quad S \text{ et } T \text{ conjugués } \implies i(S) = i(T).$$

L'invariant est dit **complet** si l'implication précédente est une équivalence.

Voici un exemple simple de classification dynamique reposant sur un invariant dit spectral.

Exercice 2.4. — Pour tout système dynamique probabiliste en temps discret $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$, l'*opérateur de Koopman* est $U_T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $U_T(f) = f \circ T$. Montrer que U_T est une isométrie, i.e., un isomorphisme linéaire préservant la norme $L^2(\mu)$. Le *spectre ponctuel* $\sigma_p(U_T)$ est l'ensemble des valeurs propres, i.e., l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $f \in L^2(m_{\mathbb{S}^1})$ vérifiant $f \neq 0$, $U_T(f) = \lambda f$. Montrer que $\sigma_p(U_T)$ est un invariant pour la conjugaison parmi les systèmes dynamiques probabilistes.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère $(\mathbb{S}^1, m_{\mathbb{S}^1}, \mathbb{Z}, R_\alpha)$ le système dynamique probabiliste défini par la rotation d'angle $2\pi\alpha$. Montrer que deux tels systèmes R_α, R_β coïncident si et seulement si $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ et en déduire l'espace paramétrisant naturellement cette famille. Calculer $\sigma_p(U_{R_\alpha})$. En déduire que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, R_α et R_β sont conjugués de façon mesurée si et seulement si $\alpha - \beta$ ou $\alpha + \beta$ est un entier.

Donner une classification complète des rotations du cercle en tant que systèmes probabilistes. Le spectre ponctuel est-il un invariant complet parmi l'ensemble des rotations ?

2.3. Quelques constructions

Il existe différents procédés permettant de construire de nouveaux systèmes dynamiques. Ces procédés sont utilisés notamment pour construire de nouvelles dynamiques et étendre des classes de systèmes bien compris.

2.3.1. A temps fixé. —

Produit, images et facteurs. — Deux systèmes peuvent être combinés de façon indépendante.[4]

Définition 2.12. — Le **produit** de deux systèmes dynamiques de même temps T, (X, ϕ) et (Y, ψ), est le système dynamique $\phi \times \psi$ d'espace $X \times Y$, de temps T, donné par $\phi \times \psi(t, (x, y)) = (\phi(t, x), \psi(t, y))$ pour tous $(x, y) \in X \times Y$ et $t \in T$.

Exemple 2.13. — Le produit de deux rotations $R_\alpha, R_\beta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est la translation $\tau = \tau_{\alpha,\beta}$ sur le tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ définie par $\tau(\pi(v)) = \pi(v + (\alpha, \beta))$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ avec $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ définie par $\pi(s, t) = (e^{2i\pi s}, e^{2i\pi t})$.

Remarquons qu'un produit est une extension de chacun de ses facteurs. Réciproquement, on peut construire un facteur à partir d'une relation d'équivalence (voir l'appendice C.1) compatible avec la dynamique comme suit. On note $[x]$ la classe d'équivalence de x.

[4] Il est également possible (et utile) de définir des produits relatifs à un facteur commun, voir [**25**].

Définition 2.14. — Soit (X, ϕ) un système dynamique de temps T. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X supposée *ϕ-invariante*, i.e., pour tous $x, y \in X$,

$$x \sim y \implies \forall t \in T\ \phi(t, x) \sim \phi(t, y).$$

Le **quotient** par $\sim$ de (X, ϕ) est $(X/\sim, \phi)$ défini par $(\phi)(t, [x]) = [\phi(t, x)]$ pour tous $x \in X$, $t \in T$. La surjection canonique $\pi : (X, \phi) \to (X/\sim, \phi)$ défini un facteur pourvu que $X/\sim$ ait la structure requise. Dans ce cas, on dit aussi que $(X/\sim, \phi)$ est l'**image** par π de (X, ϕ).

Remarque 2.15. — La structure du quotient $X/\sim$ doit être vérifiée au cas par cas.

Réciproquement, tout facteur peut être vu comme le quotient par une certaine relation d'équivalence.

Exemple 2.16. — La translation τ de l'exemple 2.13 est donc une extension des deux rotations R_α, R_β. C'est aussi un facteur de $\hat{\tau} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $\hat{\tau}(v) = v + (\alpha, \beta)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

Sous-systèmes. —

Définition 2.17. — Soit (X, T, ϕ) un système dynamique. Une partie $Y \subset X$ est **invariante** pour ϕ si $\phi_t(Y) \subset Y$ pour tout $t \in T$. Si Y est un sous-espace, i.e., une partie de X possédant la même structure (e.g., une partie compacte dans le cas d'un système dynamique topologique), la **restriction** $\phi : T \times Y \to Y$ définit alors un **sous-système dynamique**.

Exemple 2.18. — Σ_M est un sous-système de Σ_N si et seulement si $M \leq N$.

2.3.2. Changements de temps. —

Sections et suspensions. — On peut passer du temps continu au temps discret, soit simplement par restriction de l'action à un sous-groupe discret (passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Z}$), soit en considérant les visites successives dans une partie bien choisie de l'espace des phases. Notons que ces deux constructions peuvent s'appliquer à un système déjà en temps discret. Donnons les définitions.

Exemple 2.19. — Soit $v \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Le flot $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ défini par $\tau_t(x) = x + tv$ admet pour temps $\tau > 0$ la rotation $R : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $R(x) = x + \tau v$.

Définition 2.20. — Soit (X, ϕ) un système dynamique de temps $T = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Le **temps de retour** dans une partie $\Sigma \subset X$ est :

$$\tau_\Sigma(x) := \inf\{t > 0 : \phi_t(x) \in \Sigma\}.$$

Selon la convention habituelle, $\tau_\Sigma(x) = +\infty$ si x ne revient pas dans Σ,.

$\Sigma \subset X$ est une **section de Poincaré** si $t_\Sigma(x) \in (0,\infty)$ pour tout $x \in \Sigma$. L'**application de premier retour** sur Σ définit le système dynamique Φ_Σ de temps $\mathbb{N}$ et d'espace $\Sigma' := \{x \in \Sigma : \exists s_k, t_k \to \infty \text{ t.q. } \phi_{s_k}(x), \phi_{-t_k}(x) \in \Sigma\}$, [5] selon :

$$\forall x \in \Sigma' \ \phi_\Sigma(x) := \phi_{t_\Sigma(x)}(x)$$

où on définit $\phi_\infty(x)$ arbitrairement.

Remarque 2.21. — La section de Poincaré n'est définie qu'en les points $x \in \Sigma$ ayant un retour dans Σ. C'est pour disposer d'un système bien défini qu'on se restreint à Σ', i.e., aux points admettant des temps de retours dans Σ tendant vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Exemple 2.22. — Soit $(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}, \phi, \mathbb{R})$ le système dynamique définit par l'équation du pendule $\ddot{x} + \sin x = 0$. Soit $\Sigma := \{(x,v) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} : x = 0\}$. Le temps de retour $\tau_\Sigma(0,v)$ est la période minimale de la solution passant par $(0,v)$ (sauf pour trois points exceptionnels : $(0,0)$, $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$). On vérifie que les points de Σ en lesquels l'application de premier retour ϕ_Σ est définie, sont de période minimale 1 ou 2.

L'exercice 2.15 montre un autre exemple important d'une telle construction. Le procédé suivant construit à l'inverse un nouveau système dont l'ancien est une section.

Définition 2.23. — Etant donné un système dynamique (X,ϕ) en temps $\mathbb{Z}$, la **suspension** en temps $T = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ et sous une fonction $\tau : X \to T \cap]0,\infty[$ est le système dynamique (Y,ψ,T) défini de la façon suivante. On considère l'espace $X \times T$ et le flot trivial $\phi_t(x,s) = (x, s+t)$ pour $t \in T$. (Y,ψ) est alors le quotient de $(X \times \mathbb{R}, \phi)$ par la relation sur $X \times \mathbb{R}$: $(x,s) \sim (y,t)$ s'il existe (x_k,t_k), $k = 1,\dots,N$, tels que $(x_0,t_0) = (x,s)$, $(x_N,t_N) = (y,t)$ et $(x_{k+1},t_{k+1}) = (\phi(x_k), t_k + \tau(x_k))$.

L'exercice 2.19 identifie la suspension d'une rotation par une fonction constante.

Remarque 2.24. — Soit (Y,ψ) une suspension d'un système (X,ϕ) par une fonction τ. Soit X_0 l'image de $X \times \{0\}$ dans Y. L'application de premier retour de ϕ dans X_0 s'identifie naturellement à ϕ.

Exercice 2.5. — Soit $(X,\phi,\mathbb{R})$ un système dynamique C^r muni d'une section Σ. Soit τ_Σ et ϕ_Σ le temps de retour et l'application de premier retour associés. On suppose que $0 < \tau_\Sigma(x) < \infty$ pour tout $x \in \Sigma$. Montrer que la suspension de $(\Sigma, \phi_\Sigma, \mathbb{Z})$ en temps $\mathbb{R}$ sous la fonction τ_Σ est C^r conjuguée au système initial $(X,\phi,\mathbb{R})$.

[5] Dans le cas $T = \mathbb{N}$, $\Sigma' := \{x \in \Sigma : \exists s_k \to \infty \text{ t.q. } \phi_{s_k}(x) \in \Sigma\}$.

2.3.3. Passage au cas inversible. — Il existe une façon canonique de rendre un système dynamique inversible. L'exercice 2.12 rappelle comment on plonge un semi-groupe T dans le groupe $\bar{T}$ engendré par T en reproduisant la construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$.

Définition 2.25. — Soit ϕ un système dynamique en temps T sur un espace X. Soit $\bar{T}$ le groupe engendré par le semi-groupe T. $\pi : (\bar{X}, \bar{T}, \bar{\phi}) \to (X, T, \phi)$ est une **extension naturelle** de ϕ si :

(1) $(\bar{X}, \bar{T}, \bar{\phi})$ est un système dynamique (dans la même catégorie que (X, T, ϕ)) ;
(2) $\bar{\pi} : (\bar{X}, T, \bar{\phi}) \to (X, T, \phi)$ est une extension de la catégorie considérée ;
(3) si $p : (\bar{Y}, \bar{T}, \bar{\psi}) \to (X, T, \phi)$ est une autre extension inversible, alors il existe une unique semi-conjugaison $q : (\bar{Y}, \bar{T}, \bar{\psi}) \to (\bar{X}, \bar{T}, \bar{\phi})$ et $p = \bar{\pi} \circ q$.

L'extension naturelle est unique si elle existe :

Lemme 2.26. — *Deux extensions naturelles du même système sont conjuguées. En particulier, si le système ϕ est inversible, alors il coïncide à conjugaison près avec son extension naturelle.*

Démonstration. — Soient $(\bar{X}_i, \bar{T}, \bar{\phi}_i)$, $i = 1, 2$, deux extensions naturelles. D'après (2), il existe $q_2 : (\bar{X}_2, \bar{T}, \bar{\phi}_2) \to (\bar{X}_1, \bar{T}, \bar{\phi}_1)$ telle que $\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_1 \circ q_2$. De même, il existe $q_1 : (\bar{X}_1, \bar{T}, \bar{\phi}_1) \to (\bar{X}_1, \bar{T}, \bar{\phi}_1)$ telle que $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 \circ q_1$. On voit donc que $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_1 \circ (q_2 \circ q_1)$. Mais l'unicité de la propriété (2) appliqué à la paire d'extension $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_1)$ implique $q_2 \circ q_1 = \mathrm{Id}$, d'où la conjugaison. □

Dans la catégorie topologique, l'extension existe toujours :

Lemme 2.27. — *Soit ϕ un système dynamique topologique en temps T sur un espace X. Supposons $\phi_t(X) = X$ pour tout $t \in T$. Soit $\bar{T}$ le groupe engendré par le semi-groupe T. Soit $\bar{X}$ l'ensemble des orbites complètes muni de la topologie induite par la topologie produit sur $X^{\bar{T}}$:*

$$\bar{X} := \{(x_t)_{t \in \bar{T}} : \forall t \in \bar{T} \forall s \in T \ \phi(s, x_t) = x_{t+s}\}.$$

$\bar{\phi} : \bar{T} \times \bar{X} \to \bar{X}$ définie par :

$$\bar{\phi}(t, (x_u)_{u \in \bar{T}}) = (x_{u+t})_{u \in \bar{T}}$$

avec $\bar{\pi}((x_t)_{t \in \bar{T}}) := x_0$ est l'extension naturelle de (X, T, ϕ).

Démonstration. — $\bar{\pi} : (\bar{X}, T, \bar{\phi}) \to (X, T, \phi)$ est bien une extension topologique : la surjectivité de $\bar{\pi}$ venant de celle de ϕ_t, $t \in T$. La propriété (1) est démontrée.

Soit $(\bar{Y}, \bar{T}, \bar{\psi})$ définissant une extension p de (X, T, ϕ). Si $q : (\bar{Y}, \bar{\psi}) \to (\bar{X}, \bar{\phi})$ est une extension vérifiant (2) : $p = \bar{\pi} \circ q$, alors, par définition de $\bar{\pi}$, on a : $q(\bar{y}) := (p(\bar{\phi}_t(\bar{y})))_{t \in \bar{T}}$ et donc unicité. Réciproquement cette formule définit bien une extension topologique, sa surjectivité venant encore de la surjectivité de ϕ et de la compacité de $\bar{Y}$. □

Remarque 2.28. — Même si ϕ est un système différentiable, la construction précédente ne donne pas nécessairement une extension différentiable (voir l'exercice 2.16).

L'exercice 2.17 identifie l'extension naturelle du décalage de temps $T = \mathbb{N}$.

De même dans la catégorie probabiliste :

Lemme 2.29. — *Tout système dynamique probabiliste admet une extension naturelle*

Démonstration. — Soit (X, μ, T, ϕ) le système dynamique probabiliste. On définit $\bar{X}$ et $\bar{T}$ comme dans la preuve du lemme 2.27. On munit $\bar{X}$ de la tribu $\bar{\mathcal{X}}$ définie comme $\bigvee_{n\geq 0} \phi^{-n}(\pi^{-1}(\mathcal{X}))$, où $\mathcal{X}$ est la tribu donnée sur X. On définit $\bar{\mu}$ par $\bar{\mu}(\phi^n A) = \mu(A)$ pour tout $n \in \bar{T}$, $A \in \mathcal{X}$. On vérifie facilement que $\bar{\mu}$ est σ-additive sur $\bigcup_{n\geq 0} \phi^{-n}(\pi^{-1}(\mathcal{X}))$. Le théorème d'extension de Hahn-Kolmogorov implique que $\bar{\mu}$ s'étend en une mesure sur $\overline{\mathcal{X}}$. Clairement $\pi_*(\bar{\mu}) = \mu$ et $\bar{\phi}_*(\bar{\mu}) = \bar{\mu}$. On a donc bien une extension inversible du système initial. L'unicité se démontre comme précédemment. □

2.4. Exercices complémentaires

Exercice 2.6. — On considère la classe des systèmes dynamiques *ensemblistes* en temps $T = \mathbb{Z}$, i.e., engendrés par une bijection $\phi : X \to X$ où X est un ensemble (sans structure supplémentaire –pas de topologie et donc pas de continuité par exemple). Pour $1 \leq n \leq \infty$, on note $\kappa(\phi, n)$ l'ensemble des orbites ϕ de cardinal n ($n = \infty$ représentant le cas infini dénombrable).

Montrer que deux systèmes dynamiques ϕ, ψ de cette classe sont conjugués si et seulement si, pour tout $1 \leq n \leq \infty$, $\kappa(\phi, n)$ et $\kappa(\psi, n)$ sont en bijection. En déduire que deux rotations irrationnelles quelconques sont toujours conjuguées d'un point de vue ensembliste. Généraliser et commenter.

Exercice 2.7. — Soit $(U, \mathbb{R}, \phi)$ et $(V, \mathbb{R}, \psi)$ où ϕ et ψ sont les flots engendrés par des champs de vecteurs $X : U \to \mathbb{R}^d$, $Y : V \to \mathbb{R}^d$ avec U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Soit un difféomo $h : U \to V$. Montrer que h conjugue les dynamiques si et seulement une certaine relation, que l'on explicitera, a lieu entre X, Y et la différentielle de h.

Exercice 2.8. — Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \to U$, un flot de période 1 ($\Phi_s^t = \Phi_{s+1}^{t+1}$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$). On note encore Φ sa restriction aux temps entiers et $\Psi : \mathbb{R} \times V \to V$ le flot autonome sur $V := U \times \mathbb{T}^1$ définit par $\Psi^t(x, s) := (\Phi_s^{t+s}(x, s + t \mod 1)$.

Soit $\Sigma := \{(x, s) \in V : s = 0\}$. Remarquons que toute orbite rencontre Σ au moins une fois dans son futur : on dit que Σ est une *section globale* du flot G. On lui associe le *temps de retour* défini par $\tau(x) := \inf\{t > 0 : \Psi^t(x) \in \Sigma\}$ et l'*application de premier retour* $g(x) = \Psi^{\tau(x)}(x)$.

Montrer que $g|\Sigma$ coincide, à l'identification $U \times \{0\} \equiv U$ près, avec Φ^1.

Exercice 2.9. — Montrer que le produit de deux transformations de multiplication de l'angle $T_N \times T_M$ munies de la mesure de Lebesgue est conjugué de façon probabiliste à une troisieme multiplication de l'angle T_{NM}.

Exercice 2.10. — Soient $N, M \geq 1$, entiers et T_N, T_M sur $(\mathbb{S}^1, m)$ les systèmes dynamiques probabilistes associés (cf. exemple 1.7). On suppose que $M = kN$ pour un certain entier k. Trouver une semi-conjugaison mesurée $\pi : (\mathbb{S}^1, T_M) \to (\mathbb{S}^1, T_N)$.

Exercice 2.11. — Soit $\mathbb{T}^2$ le tore bidimensionnel considéré comme le quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par les translations entières $\mathbb{Z}^2$: on identifie les points dont les coordonnées ne diffèrent que par des entiers. On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ la surjection canonique. Nous renvoyons à C.2.3 pour la définition de la topologie et de la structure différentiable induites sur $\mathbb{T}^2$.

On considère le flot uniforme de vitesse $v := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{T}^2 \qquad \Phi^t(x) = x + tv$$

Autrement dit, si $\pi(y) = x$, alors $\Phi^t(x) = \pi(y + tv)$.

1. Vérifier que $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ est bien défini, différentiable et que c'est un flot.
2. Soit $Z := \pi(\mathbb{R} \times \{0\})$. Montrer que Z est une section de Poincaré globale sous une condition sur v_2 que l'on spécifiera et que l'on supposera remplie dans la suite.
3. Soit $f : Z \to Z$ l'application de premier retour correspondante. Montrer que f est un homéomorphisme.
4. Montrer que $h : \mathbb{T}^1 \to Z$ défini par $h(\pi(t)) = \pi(t, 0)$ (π désignant les deux projections canoniques) est un homéomorphisme et que $h^{-1} \circ f \circ h = R_\alpha$ pour un angle α que l'on déterminera. On dit que h est une conjugaison topologique. Son existence permet de réduire l'étude de la dynamique de f à celle de R_α.

Exercice 2.12. — Soit T un semi-groupe. Vérifier que T^2 est encore un semi-groupe pour la loi produit, i.e., $(s, t) + (s', t') = (s + s', t + t')$. Montrer que le quotient $\bar{T}$ du semi-groupe T^2 par la relation d'équivalence $(s, t) \sim (s', t') \iff s + t' = s' + t$ est un groupe. Montrer que T^2 contient un semi-groupe isomorphe à T. Montrer que tout groupe contenant un semi-groupe isomorphe à T contient un groupe isomorphe à $\bar{T}$. Vérifier que $\bar{\mathbb{N}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et que $\bar{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 2.13. — Soit (X, ϕ) un système en temps continu. Donner une condition sur une partie $Y \subset X$ pour que la suspension de l'application de premier retour sur Y par le temps de premier retour soit conjuguée à ϕ.

Exercice 2.14. — On considère les dynamiques topologiques suivantes : (1) $\hat{R}_\alpha(x) := x + \alpha - E(x + \alpha)$, où $E(\cdot)$ est la partie entière, sur $[0, 1]$; (2) $\tau_\alpha(x) := x + \alpha$

sur $\mathbb{R}$; (iii) $\hat{R}_\alpha(z) := e^{2i\pi\alpha}z$ sur $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On considère les relations d'équivalence suivantes : (i) $x \sim y \iff |x-y| = 0$ ou 1 ; (ii) $x \equiv y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $([0,1], \mathbb{N}, \hat{R}_\alpha)/\sim$ et $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, \tau_\alpha)/\equiv$ munis de leurs topologies quotients (voir section C.2) sont des systèmes dynamiques topologiques et qu'ils sont tout deux topologiquement conjugués à $(\mathbb{S}^1, \mathbb{N}, R_\alpha)$.

Exercice 2.15. — Soit $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ défini par $T(0) = 0$, $T(x) = 1/x$ si $x \in]0,1[$, $T(x) = x - 1$ si $x \in [1, \infty[$. Soit $X := [0,1]$. Calculer l'application de premier retour de T sur X.

Exercice 2.16. — Soit $T_N : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ la multiplication par N et $\bar{T} : \bar{X} \to \bar{X}$ son extension naturelle. Montrer que tout point de $\bar{X}$ admet un voisinage homéomorphe au produit de $\mathbb{R}$ par l'ensemble de Cantor. En déduire que $\bar{X}$ n'admet pas de structure de variété.

Exercice 2.17. — Soit σ_N le décalage sur N symboles en temps $\mathbb{N}$ et $\hat{\sigma}_N$ ce décalage en temps $\mathbb{Z}$. Montrer que l'extension naturelle de σ_N est topologiquement conjuguée à $\hat{\sigma}_N$.

Exercice 2.18. — Soit $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une rotation. Soit T_α sa suspension par la fonction constante valant 1. Soit $\tilde{\tau}_{(u,v)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(t,x,y) \mapsto (x + tu, y + tv)$. Montrer que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \tilde{\tau}_{(u,v)})$ passe au quotient par la relation $(x,y) \sim (x',y) \iff x' - x, y' - y \in \mathbb{Z}$ et que le système obtenu, noté $(X, \mathbb{R}, \tau_{(u,v)})$, est un système dynamique topologique. Montrer que ce système est topologiquement conjugué à T_α pour un choix qu'on précisera de $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2.19. — Soit $R : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ une rotation de vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^d$: $R(x) = x + \alpha$. La suspension de R par la fonction $\tau = 1$ constante est topologiquement conjuguée à $\hat{R} : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{T}^{d+1}$, $\hat{R}_t(u,x) = (t + u, x + t\alpha)$.

Exercice 2.20. — Soit (X, T, ϕ) un système dynamique topologique et $(\bar{X}, \bar{T}, \bar{\phi})$ son extension naturelle.

Montrer que tout système topologique $(Y, \bar{T}, \psi)$ dont la restriction au temps T définit une extension topologique de (X, T, ϕ) est une extension topologique de $(\bar{X}, \bar{T}, \bar{\phi})$. En déduire une caractérisation de l'extension naturelle (à conjugaison topologique près).

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE

La dynamique topologique étudie les propriétés invariantes par *conjugaison topologique*. Nous nous intéresserons particulièrement à la façon dont les orbites d'un système s'accumulent les unes sur les autres. C'est le thème fondamental de la *récurrence.*

Nous expliquerons plus rapidement comment on peut étudier la *combinatoire des orbites,* que ce soit en mesurant sa complexité ou en la représentant par un système symbolique.

Faute de temps, nous ignorerons volontairement bien des aspects de la dynamique topologique[(1)]. Nous nous restreindrons aux systèmes dynamiques topologiques classiques (i.e., aux actions continues sur des espaces métriques compacts) en temps $T = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Rappelons, comme cela a été évoqué dans le chapitre 1, que l'action de groupes plus riches est non seulement pertinente pour les applications mais provoque l'émergence de nouveaux phénomènes dynamiques tout à fait fascinants.

Notations. Dans tout ce chapitre, (X, ϕ) dénotera, sauf mention contraire, un système dynamique en temps $T = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. On pose $T_+^* := \{t \in T : t > 0\}$.

3.1. Ensembles Limites

L'étude asymptotique des orbites commence par la question de leur lieu d'accumulation en temps long.

Définition 3.1. — Soit (X, ϕ) un système dynamique topologique en temps $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. L'**ensemble ω-limite** d'un point $x \in X$ est défini comme

$$\omega(\phi, x) := \{y \in X : \exists t_n \to +\infty \ \phi_{t_n}(x) \to y\}.$$

(1) Pour jeter quelques mots au hasard : propriétés "chaotiques" [**26**], existence de points périodiques[], transformation du cercle et de l'intervalle [**20**], théorèmes de structure, problèmes de stabilité, propriétés génériques...

Dans le cas inversible, on définit aussi l'ensemble α**-limite** $\alpha(\phi, x) := \omega(\phi^{-1}, x)$. L'**ensemble limite** est :

$$L_+(\phi) := \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(\phi, x)}$$

ou, dans le cas inversible, $L(\phi) := \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(\phi, x) \cup \alpha(\phi, x)}$.

L'exercice suivant démontre le rôle du passage à la fermeture.

Exercice 3.1. — Soit $X = [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ et ϕ le flot du champ de vecteur $v(s, z) = (0, (|z - 1|^2 + s^2)iz)$. Déterminer les ensembles limites $\omega(\phi, x)$ pour chaque $x \in X$. Leur union est-elle compacte ?

Le lemme suivant est immédiat (l'exercice 3.13 invite à écrire sa preuve) :

Lemme 3.2. — *Soit (X, ϕ) un système dynamique topologique. Alors chaque ensemble ω-limite $K = \omega(x)$ est un compact non-vide* **strictement invariant** *: $\phi_t(K) = K$ pour tout $t \in T$.*

Remarque 3.3. — Il n'est pas toujours vrai qu'un ensemble limite soit **totalement invariant**, i.e., on n'a pas toujours l'égalité $(\phi_t)^{-1}(\omega(\phi, x)) = \omega(\phi, x)$ dans le cas non-inversible (voir l'exercice 3.9).

Si on est prêt à négliger un régime transitoire, alors il "suffit" d'étudier le sous-système $L(\phi)$ dans le sens suivant : pour tout $x \in X$, tout $\epsilon > 0$ et tout $T > 0$, il existe $t_0 < \infty$ tel que pour $t > t_0$, il existe $y \in \omega(\phi, x)$ vérifiant :

$$\forall 0 \leq s < T \; d(\phi_{t+s}(x), \phi_s(y)) < \epsilon.$$

L'exercice suivant montre qu'on ne peut pas en général prendre $T = \infty$ ci-dessus : la dynamique asymptotique de x peut être plus riche que celle de n'importe lequel de ses points limites. Par ailleurs, comme le montre l'exercice 3.8, une conjugaison entre les restrictions aux ensembles limites respectifs n'implique pas une conjugaison globale.

Exercice 3.2. — Soit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité paramétrée par la colatitude $\theta \in [0, \pi]$ et la longitude $\phi \in [0, 2\pi]$ selon $(x, y, z) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Soit ϕ le flot défini par le champ de vecteur $\dot{\theta} = (\pi/2 - \theta)^3$, $\dot{\phi} = (\pi/2 - \theta)^p$ avec $p > 0$ un paramètre. Pour quelles valeurs de p a-t-on la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{S}^2$, il existe $T < \infty$ et $y \in \omega(x)$ tels que $d(\phi^t(x), \phi^t(y)) < \epsilon$ pour tout $t > T$.

3.2. Minimalité

La notion d'irréductibilité suivante est très forte mais s'avère techniquement importante.

Définition 3.4. — Un système dynamique topologique (X, ϕ) est dit **minimal** s'il ne possède aucun sous-système topologique non-trivial, i.e., aucun compact K, invariant ($\forall t > 0\ \phi_t(K) \subset K$) et $K \neq \emptyset, X$.

Remarque 3.5. — Un système dynamique topologique contenant une orbite périodique est minimal si et seulement s'il est réduit à cette orbite. Il est donc facile de construire des systèmes non-minimaux.

La définition ci-dessus semble impliquer deux choix techniques : l'invariance dans le futur plutôt que dans le passé ou pour tout temps ; l'exclusion de fermés invariants plutôt que strictement invariants. Le lemme ci-dessous montre que ce concept ne dépend pas de ces choix.

Lemme 3.6. — *La minimalité d'un système dynamique topologique (X, ϕ) est équivalente à n'importe laquelle des propriétés suivantes :*

1. *ses seules parties fermées et invariantes ($\forall t > 0\ \phi_t(K) \subset K$) sont $\emptyset$ et X ;*
2. *ses seules parties fermées et strictement invariantes ($\forall t > 0\ \phi_t(K) = K$) sont $\emptyset$ et X ;*
3. *pour tout $x \in X$, $\omega(x) = X$;*
4. *pour tout $x \in X$, $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$;*[(2)]
5. *pour tout $x \in X$, $\overline{\mathcal{O}^T(x)} = X$.*

Remarque 3.7. — Si le système est inversible, la symétrie de la définition de la minimalité (la propriété (2) ci-dessus) montre qu'on peut remplacer respectivement : l'invariance stricte, $\omega(x)$ et $\mathcal{O}^+(x)$ par : l'invariance totale, $\alpha(x)$ et $\{\phi_t(x) : t \leq 0\}$ dans les propriétés (2), (3) et (4) ci-dessus et encore obtenir des propriétés équivalentes. L'exercice 3.9 montre que ceci n'est pas le cas parmi les systèmes non-inversibles.

Démonstration. — Soit (X, ϕ) un système topologique. (2) est la définition de la minimalité.
(1) $\Longrightarrow$ (2) : clair.
(2) $\Longrightarrow$ (3) : $\omega(x)$ est un compact strictement invariant et non-vide vu le lemme 3.2, donc $\omega(x) = X$.
(3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) : $\overline{\mathcal{O}^T(x)} \supset \overline{\mathcal{O}^+(x)} \supset \omega(x) = X$.
(5) $\Longrightarrow$ (1) : Soit $K \subset X$, un compact invariant non-vide. Il existe donc $x \in K$ et, automatiquement, $\omega(x) \subset K$. Mais $\omega(x)$ est strictement invariant, donc contient $X = \overline{\mathcal{O}^T(y)}$ pour tout $y \in \omega(x)$. Dans chaque cas $T = \mathbb{N}$ et $T = \mathbb{Z}$, on obtient $K = X$. □

Exemple 3.8. — Soit $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une rotation du cercle d'angle α irrationnel. Soit $x \in \mathbb{S}^1$ et $\epsilon > 0$. Posons $x_n := R_\alpha^n(x)$. Les points x_n, $n \geq N$, étant deux à deux distincts, il doit exister $0 \leq n < m$ tels que $0 < d(x_n, x_m) < \epsilon$. Donc $\{R_\alpha^{k(m-n)}x : k \in$

(2) On rappelle : $\mathcal{O}^+(x) := \{\phi_t(x) : t \geq 0\}$.

$\mathbb{N}\}$ est **ϵ-dense** : tout point de $\mathbb{S}^1$ est à distance au plus ϵ de cet ensemble. $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{S}^1$ sont arbitraires, donc R_α est minimale.

Ceci est une preuve dynamique du résultat classique : si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors la suite des parties fractionnaires de $n\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, est dense dans $[0, 1]$.

Le lemme suivant explique l'utilité de la minimalité :

Lemme 3.9. — *Tout système dynamique topologique contient au moins un sous-système minimal non-vide.*

La preuve de ce lemme repose sur le lemme de Zorn (voir l'appendice C.1).

Démonstration. — Soit $\mathcal{K}$, l'ensemble des compacts invariants et non-vides de X. $\mathcal{K}$ contient au moins X lui-même. L'inclusion fournit un ordre partiel sur $\mathcal{K}$. Si C est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{K}$ alors $\mathcal{K}$ contient un minorant de C. En effet, $K_0 := \bigcap_{K\in C} K$ est compact comme intersection de compacts, invariant vu $\phi_t(\bigcap_{K\in C} K) \subset \bigcap_{K\in C} K$ et $K_0 \neq \emptyset$: sinon, il existerait C' une partie finie telle d'intersection vide. Mais $C' \subset C$ est totalement ordonnée, donc contient un élément minimal K_1, et l'intersection doit alors coincider avec K_1, non vide.

Le lemme de Zorn implique l'existence d'un élément minimal K_* de $\mathcal{K}$. Donc $K_* \neq \emptyset$ et $K_* \subset K$, pour tout $K \in \mathcal{K}$. Donc le sous-système (K, T, ϕ) est minimal. □

Remarque 3.10. — Il n'est pas vrai en général qu'un système dynamique topologique soit l'union de sous-systèmes minimaux.

3.3. Récurrence

La propriété de récurrence la plus forte est la périodicité :

Définition 3.11. — Soit $\tau \in T^+$. Un point $x \in X$ est **τ-périodique** (ou simplement périodique) si $\phi_\tau(x) = x$. Tout $t \in T^+$ tel que $\phi_t(x) = x$ est une **période**. Si $\phi_t(x) = x$ pour tout $t \in T$, alors x est appelé **point fixe**. Si $T = \mathbb{R}$, on parle aussi de **point singulier**.

On note $\mathrm{Per}_\tau(\phi)$ l'ensemble des points périodiques de période minimale τ (par convention on note $\mathrm{Per}_0(\phi)$ l'ensemble des points singuliers). On note $\mathrm{Fix}_\tau(\phi)$ l'ensemble des points fixés par ϕ_τ, i.e., admettant la période τ. On note $\mathrm{Per}(\phi) = \bigcup_{t\in T_+^*} \mathrm{Per}_\tau(\phi) = \bigcup_{t\in T_+^*} \mathrm{Fix}_\tau(\phi)$. On note $\mathrm{P}(\phi) := \{t \in T_*^+ : \mathrm{Per}_\tau(\phi) \neq \emptyset\}$, l'ensemble des périodes.

Remarque 3.12. — Considérons un point fixe. Si $T = \mathbb{R}$, il n'a pas de période minimale. Si $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, sa période minimale est 1.

Remarque 3.13. — L'ensemble des périodes est un invariant de conjugaison topologique. Dans le cas unidimensionnel, cet invariant est très contraint et contient beaucoup d'information sur la dynamique (voir l'exercice 3.14).

Si $\mathrm{Fix}_t(\phi)$ pour $t \in T_+^*$ fixé est évidemment compact, ce n'est pas nécessairement le cas de $\mathrm{Per}(\phi)$ comme le montre l'exemple de la multiplication de l'angle, considéré dans l'exercice 3.11.

L'ensemble des points périodiques peut être "gros", mais il peut être vide :

Exemple 3.14. — Soit $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, la rotation du cercle d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $\mathrm{Per}(R_\alpha) = S^1$ et plus exactement $\mathrm{Per}_q(R_\alpha) = S^1$ si $\alpha = p/q$, avec p, q premiers entre eux. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors $\mathrm{Per}(R_\alpha) = \emptyset$. En particulier, pour toute dynamique topologique $f : X \to X$, le système $f \times R_{\sqrt{2}} : X \times \mathbb{S}^1 \to X \times \mathbb{S}^1$ est dépourvu de point périodique.

Remarque 3.15. — Ici, nous passons sous silence une partie importante de la dynamique topologique. En effet, on étudie avec profit des conditions suffisantes[(3)] pour l'existence de points périodiques ainsi que des conséquences de l'existence ou de l'inexistence de tels points[(4)].

Des formes de récurrence plus faibles se produisent automatiquement dans notre cadre compact :

Définition 3.16. — Un point est **récurrent** s'il existe une suite $t_k \in T$, tendant vers l'infini[(5)] tel que $\lim_{k\to\infty} \phi_{t_k}(x) = x$. On note $\mathrm{Rec}(\phi)$ la fermeture de l'ensemble des points récurrents de ϕ.

L'exercice 3.15 montre que l'ensemble des points récurrents n'est pas nécessairement un compact, d'où le passage à la fermeture dans la définition ci-dessus.

Il est clair que tout point périodique est *a fortiori* récurrent mais que la réciproque est fausse en général.

Exemple 3.17. — Soit $R_\alpha : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ une rotation d'angle α irrationnel. On a vu (exemple 3.8) que ce système est minimal : pour tout $x \in \mathbb{T}^1$, $\omega(\phi, x) = \mathbb{T}^1$ contient donc x. Tout point de $\mathbb{T}^1$ est donc récurrent sans être périodique.

Comme promis, nous avons le

Théorème 3.1 **(Birkhoff)**. — *Soit* (X, ϕ) *un système dynamique topologique.* $\mathrm{Rec}(\phi)$ *est un compact invariant non-vide.*

---

(3) Ces conditions peuvent être très variées, par exemple liée à la topologie dans le cadre des théories de l'indice ou plus dynamiques comme pour le dernier théorème de Poincaré (prouvé par... Birkhoff), ou encore combinatoires.

(4) Par exemple, un important résultat de Brouwer montre qu'un homéomorphisme du plan f tel que $\mathrm{Fix}(f^2) = \emptyset$ est dynamiquement trivial.

(5) Pour $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, le sens de ceci est clair.

Démonstration. — Soit (X, ϕ) un système dynamique topologique. La compacité et l'invariance de $\mathrm{Rec}(\phi)$ sont évidentes. Montrons la non-vacuité. Vu le lemme 3.9, X contient un sous-système minimal Y. Soit $y_0 \in Y$. $\omega(y_0)$ est un compact invariant d'après le lemme 3.2, donc $\omega(y_0) = Y$ et $y_0 \in \omega(y_0)$: tout point de Y est récurrent. □

Exercice 3.3. — Montrer que le système dynamique topologique $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$, défini par $\phi(x) = x^2$, n'a qu'un seul point récurrent. Inversement, soit $\phi : X \to X$ une isométrie d'un espace métrique compact. Montrer que tout point de X est récurrent.

3.4. Transitivité

C'est une notion d'irréductibilité plus générale (donc plus faible) que la minimalité.

Définition 3.18. — Un système dynamique topologique est **topologiquement transitif** s'il admet *une* orbite dense.

Le lemme suivant clarifie la définition de la transitivité sur deux points. D'abord, on peut demander qu'une orbite *future* soit à elle seule dense sans changer la notion. D'autre part, la définition ne demande qu'une seule orbite dense mais sauf dans des cas dégénérés, il y a alors automatiquement *beaucoup* d'orbites denses. L'appendice C.2 rappelle la notion de G_δ-dense (ensemble de deuxième catégorie ou gras au sens de Baire ou encore ensemble résiduel).

Lemme 3.19. — *Supposons la condition suivante :*

(*) toute orbite est d'intérieur vide dans X.

Alors la transitivité topologique est caractérisée par n'importe laquelle des assertions suivantes :

(1) il existe $x \in X$ tel que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$;
(2) il existe un G_δ dense de points de X tels que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$;
(3) il existe $x \in X$ tel que $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$;
(4) il existe un G_δ dense de points de X tels que $x \in \omega(\phi, x)$ et $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$;
(5) pour toute paire d'ouverts non-vides U, V de X, il existe $t \in T^+$ arbitrairement grand tel que $U \cap \phi_t^{-1}(V) \neq \emptyset$.

De plus, $x \in \omega(\phi, x) \implies \omega(\phi, x) = \overline{\mathcal{O}^+(X)}$.

Démonstration. — Clairement, (4) $\implies$ (3) $\implies$ (1).

(1) $\implies$ (5) : c'est l'implication clé. Soit x comme dans (1). Soit U, V comme dans (5) et $0 < T_0 < \infty$ et cherchons $t \in T^+$, $t > T_0$, tel que $U \cap \phi_t^{-1}(V) \neq \emptyset$. D'après (1), il existe $t_1 \in T$ tel que $\phi_{t_1}(x) \in U$.

Supposons d'abord le système non-inversible. Il existe donc $t_2 \in T$ tel que $\phi_{t_2}(x) \in V \setminus \phi_{[0,t_1+T_0]}(x)$ (ce dernier ouvert est non-vide vu (*)). $t = t_2 - t_1 > T_0$ convient et établit (5) dans ce premier cas.

Supposons maintenant le système inversible. Il existe de même $t_2 \in T$ tel que $\phi_{t_2}(x) \in V \setminus \phi_{[t_1-T_0,t_1+T_0]}(x)$. Si $t_2 > t_1 + T_0$, on conclut comme ci-dessus. Si $t_2 < t_1 - T_0$, fixons $\epsilon > 0$ tel que $d(y, \phi_{t_2}(x)) < \epsilon \implies \phi_{t_1-t_2}(y) \in U$. Il existe $t_3 \in T$ tel que $\phi_{t_3}(x) \in B(\phi_{t_2}(x), \epsilon) \cap V \setminus \phi_{[2t_2-t_1-T_0,t_1+T_0]}(x)$. Si $t_3 < 2t_2 - t_1 - T_0$, alors $\phi_{t_3+(t_1-t_2)}(x) \in U$ et $\phi_{t_2}(x) \in V$ donc $t = 2t_2 - t_3 - t_1 > T_0$ convient. Sinon, $t_3 > t_1 + T_0$ et $\phi_{t_3}(x) \in V$ et $\phi_{t_1}(x) \in U$ et $t = t_3 - t_1 > T_0$ convient et établit (5) dans tous les cas.

(5) $\implies$ (4). Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une base dénombrable de la topologie (voir C.2). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, considérons l'ouvert $X_n := \{x \in X : \mathcal{O}^+(x) \cap U_n \neq \emptyset\}$. Il suffit de montrer que ces ouverts sont tous denses, pour obtenir que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est un G_δ-dense de points d'orbite positive dense. D'après (5), pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_m \cap \phi_t^{-1}(U_n) \neq \emptyset$ pour un certain $t \in T^+$, i.e., $U_m \cap X_n \neq \emptyset$: X_n est donc dense dans X. Pour prouver (4), fixons $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et vérifions que $\omega(\phi, x) = \overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$ pour ces points.

En considérant $x_n \to x$, $x_n \neq x$ (possible vu (*)), et les ouverts $B(x_n, \epsilon_n)$ avec $\epsilon_{n+1} := \min(\epsilon_n/2, d(x, \phi_{[0,n]}(x)))$, $\epsilon_0 := 1$, on obtient l'existence de $t_n \nearrow \infty$ tels que $\phi_{t_n}(x) \to x$. On a bien $x \in \omega(\phi, x)$: (4) est établie.

On a donc montré l'équivalence des propriétés (1),(3),(4),(5). Maintenant, (2) $\implies$ (1) et (4) $\implies$ (2) sont claires, la propriété (2) est donc équivalente aux propriétés précédentes.

Montrons que $x \in \omega(\phi, x)$ implique $\omega(\phi, x) = \overline{\mathcal{O}^+(x)}$. On peut supposer x ni périodique, ni fixe, ces cas étant triviaux. Il existe donc $t_n \nearrow \infty$ tels que $\phi_{t_n}(x) \to x$.

Soit $y \in \overline{\mathcal{O}^+(x)}$ et $\epsilon > 0$. Il existe donc $t_* \in T^+$ tel que $\phi_{t_*}(x) \in B(y, \epsilon/2)$. Par continuité, $\phi_{t_*}(B(x, \delta)) \subset B(y, \epsilon)$ pour $\delta > 0$ assez petit. Il vient $\phi_{t_*+t_n}(x) \in B(y, \epsilon)$ pour n assez grand. En faisant $\epsilon \searrow 0$, on obtient $y \in \omega(\phi, x)$, soit $\overline{\mathcal{O}^+(x)} \subset \omega(\phi, x)$. L'inclusion réciproque est claire. □

On a vu que tout système dynamique topologique admet un point récurrent. Le lemme précédent renforce cela :

Corollaire 3.20. — *Considérons un système dynamique topologique satisfaisant la condition (*). Si le système est topologiquement transitif, alors les points récurrents forment un ensemble gras au sens de Baire.*

Remarque 3.21. — Il a récemment été montré que "la plupart" [(6)] des difféomorphismes de classe C^1 préservant le volume d'une variété compacte sont topologiquement transitifs [**5**] et non minimaux (du fait de l'existence d'orbites périodiques).

Lorsqu'on ne suppose pas la conservation du volume, on peut espérer que l'ensemble limite se décompose en sous-systèmes topologiquement transitifs et disjoints (une telle décomposition est appelée *décomposition spectrale*). C'est le cas pour de

(6) Ici, la plupart signifie que l'ensemble des difféomorphismes ayant cette propriétés est gras au sens de Baire.

larges classes de dynamiques : systèmes dits hyperboliques, systèmes définis par une application continue de l'intervalle dans lui-même. Mais l'exercice 3.16 montre qu'une telle décomposition n'existe pas toujours. On conjecture néammoins que l'existence a lieu dans la plupart des cas (dans le même sens que précédemment).

3.5. Construction d'une structure probabiliste

Etant donné un système dynamique topologique, peut-on le munir d'une structure probabiliste ? Le théorème suivant répond affirmativement.

***Théorème 3.22* (Krylov-Bogolioubov).** — *Soit (X, ϕ) un système dynamique topologique. Il existe au moins une mesure de probabilité borélienne ϕ-invariante.*

Remarque 3.23. — Le théorème de Krylov-Bogolioubov dit que $\mathrm{Prob}(\phi) \neq \emptyset$ mais n'affirme rien quant à une éventuelle unicité ou même quant à l'existence d'une mesure distinguée. Par exemple $\mathrm{Prob}(\sigma_N)$ est infini (non dénombrable) et contient des mesures très variées (voir l'exercice 3.23).

Définition 3.24. — On note $\mathrm{Prob}(X)$ et $\mathrm{Prob}(\phi)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X, respectivement : sur X et invariantes par ϕ ($(\phi_t)_*\mu = \mu$ pour tout $t \in T$). On munit $\mathrm{Prob}(X)$ de la topologie *-faible (voir ci-dessous).

Lemme 3.25. — $\mathrm{Prob}(X)$ *est un espace métrisable et compact.*

Preuve du lemme. — Tout mesure borélienne finie s'identifie à une forme linéaire continue sur $C^0(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur X muni de la norme uniforme : $\|f\|_{C^0} := \sup_{x\in X} |f(x)|$. Autrement dit, $\mathrm{Prob}(X)$ s'identifie à une partie C de $C^0(X)'$, le dual topologique de $C^0(X)$.

L'analyse fonctionnelle définit la topologie *-faible sur le dual $C^0(X)'$ de l'espace vectoriel topologique $C^0(X)$ comme la topologie engendrée par les ouverts :

$$V(f, U) := \{\Phi \in C^0(X)' : \Phi(f) \in U\} \qquad (f \in C^0(X), U \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}})$$

et montre que

$$B := \{\Phi \in C^0(X)' : \forall f \in B_{C^0(X)}(0, 1)\ |\Phi(f)| \leq 1\}$$

est, pour cette topologie un espace compact et métrisable. La restriction

$$B^+ := \{\Phi \in B : \forall f \in C^0(X)\ f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0 \text{ et } \Phi(1) = 1\}$$

est une partie fermée de B, donc encore compacte et métrisable. Le théorème de représentation de Riesz (voir théorème C.37) identifie B et $\mathrm{Prob}(X)$ selon $\mu \equiv (f \mapsto \mu(f))$. Nous avons enfin notre topologie (l'exercice 3.24 propose une construction directe de cette topologie ainsi qu'une distance compatible). □

Preuve du théorème. — X n'étant pas vide, il admet une mesure de probabilité borélienne μ_0 (par exemple la mesure de Dirac en un point quelconque). On en déduit une mesure invariante par le procédé de moyennisation suivant, pour $t \to \infty$, $t \in T$:

$$\mu_t := \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1}(\phi_k)_*\mu_0 \text{ (si } T = \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}) \text{ ou } \mu_t := \frac{1}{t}\int_0^s (\phi_s)_*\mu_0\, ds \text{ (si } T = \mathbb{R}),$$

(la dernière formule est à prendre dans le sens suivant : $\mu_t(f) := \frac{1}{t}\int_0^s (\phi_s)_*\mu_0(f)\, ds$ pour toute fonction f continue).

$\mathrm{Prob}(X)$ étant séquentiellement compact, il existe $\mu \in \mathrm{Prob}(X)$ et $t_n \in T$, $t_n \to \infty$, tels que $\mu_{t_n} \to \mu$ dans la topologie précédemment définie. Vérifions l'invariance de μ. Pour $t \in T = \mathbb{N}$, (les cas $T = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ sont presque identiques et laissés au lecteur) :

$$\begin{aligned}(\phi_t)_*(\mu) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\sum_{k=0}^{t_n-1}(\phi_t)_*(\phi_k)_*\mu_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\sum_{j=t}^{t+t_n-1}(\phi_j)_*\mu_0 \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\sum_{j=0}^{t_n-1}(\phi_j)_*\mu_0 - \frac{1}{t_n}\sum_{j=0}^{t-1}(\phi_j)_*\mu_0 + \frac{1}{t_n}\sum_{j=t_n}^{t_n+t-1}(\phi_j)_*\mu_0\end{aligned}$$

Appliquées à une fonction $f \in C^0(X)$, les deux dernières sommes sont majorées en valeur absolue par $(2t/t_n)\|f\|_{C^0} \to 0$, tandis que la première somme converge vers $\mu(f)$. Autrement dit, la limite précédente, dans la topologie *-faible, est bien μ. L'invariance est démontrée. □

Remarque 3.26. — On peut démontrer le théorème précédent, sans parler de topologie *-faible, simplement utilisant le procédé diagonal de Cantor.

Exercice 3.4. — Examiner la construction de la preuve précédente si on l'applique à une rotation R_α du cercle $\mathbb{T}^1$ et une mesure de probabilité borélienne μ_0 quelconque sur $\mathbb{T}^1$. On pourra préciser notamment la convergence des itérés $(\phi_n)_*\mu_0$ et des moyennes et l'unicité du point d'accumulation.

3.6. Dynamique symbolique

La **dynamique symbolique** consiste en l'étude des **sous-décalages**, i.e., des sous-systèmes des décalages complets Σ_N et Σ_N^+, $N \geq 1$. Les décalages complets sont en effet très particuliers tandis que ces sous-décalages constitue une classe trop diverse pour la plupart des analyses. La considération de la classe suivante s'avère fructueuse.

Exemple 3.27. — Soit I un ensemble fini et $A : I \times I \to \mathbb{N}$ une matrice à entrées entières et positives. A définit un sous-décalage Σ_A de la façon suivante. Soit $S := \{(i,j,k) \in I \times I \times \mathbb{N} : 1 \leq k \leq A(i,j)\}$. On pose :

$$\Sigma_A := \{x \in S^{\mathbb{Z}} : \forall n \in \mathbb{Z}\ x_n = (i,j,k) \text{ et } x_{n+1} = (i',j',k') \implies j = i'\}$$

munit de la restriction du décalage σ. On qualifie (Σ_A, σ) de sous-décalage de type fini. $\pi(\Sigma_A)$ avec $\pi(x) = (x_n)_{n\geq 0}$ est un sous-décalage unilatère et est également qualifié de sous-décalage de type fini.

Exercice 3.5. — Soit Σ_A un sous-décalage de type fini. Montrer que

1. le nombre d'orbites périodiques se calcule selon la formule :
$$\#\{x \in \Sigma_A : \sigma^n x = x\} = \mathrm{tr}(A^n)$$
où A^n désigne la puissance n au sens matriciel et tr est la trace de la matrice considérée.
2. le nombre de mots : $\#\{x_0 \dots x_{n-1} : x \in \Sigma_A\}$, $n \geq 0$, admet une formule similaire à celle du (1).
3. la série formelle suivante (appelée fonction zêta d'Artin-Mazur) :
$$\zeta(z) := \exp \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \#\{x \in \Sigma_A : \sigma^n x = x\}$$
coincide sur son domaine de convergence avec une fraction rationnelle faisant intervenir un déterminant.

Une des motivations de la dynamique symbolique est d'utiliser ces systèmes pour la *représentation* d'autres systèmes. Nous avons vu (exercices 1.13, 2.3) en quel sens Σ_N^+ représente T_N et comment l'on peut transférer certaines propriétés entre ces deux systèmes. L'exercice 3.18 ci-dessous propose une généralisation de cette construction.

Remarque 3.28. — On peut se demander quels systèmes admettent une "bonne représentation symbolique". Il a été découvert depuis une vingtaine d'années que ceci peut se caractériser en fonction de certaines entropies [**10**].

3.7. Entropie topologique

L'entropie topologique est un invariant de conjugaison topologique qui reflète la complexité de la combinatoire de la dynamique. Il joue un grand rôle dans la description et la classification de maints type de dynamiques topologiques et apparaît comme un invariant complet dans plusieurs classes. La définition que nous présenterons manifestera son caractère fondamental : il s'agit simplement d'un *comptage* des orbites.

Remarque 3.29. — Nous ne ferons ici qu'effleurer ce sujet fondamental. Nous renvoyons à [**14, 16**] pour plus d'informations.

La définition suivante est due à Bowen[(7)] Sa complexité relative reflète la nécessité de produire des nombres non-triviaux. On se restreint au cas $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ par simplicité.

[(7)] Rufus Bowen (194 ?-197 ?).

Définition 3.30. — Soit (X, T, f) un système dynamique topologique en temps $T = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$. Son **entropie topologique** est le nombre suivant :

$$h_{\text{top}}(f) := \lim_{\epsilon \to 0} h_{\text{top}}(f, \epsilon) \text{ avec } h_{\text{top}}(f, \epsilon) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_f(\epsilon, n)$$

où $r_f(\epsilon, n)$ est le cardinal minimal d'un recouvrement par (ϵ, n)-boules, i.e., par des parties de la forme :

$$B_f(x, \epsilon, n) := \{y \in X : \forall 0 \leq k < n \; d(f^k y, f^k x) < \epsilon\}.$$

Proposition 3.31. — *L'entropie topologique est un invariant de conjugaison topologique parmi les systèmes dynamiques topologiques. Plus précisément, si (X, ϕ) est un facteur topologique de (Y, ψ) alors $h_{\text{top}}(\phi) \leq h_{\text{top}}(\psi)$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer la dernière assertion. Par continuité uniforme de l'application facteur, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute (δ, n)-boule de (Y, ψ) a son image par celle-ci contenue dans une (ϵ, n)-boule de (X, ϕ). Il s'ensuit que $r_\phi(\epsilon, n) \leq r_\psi(\delta, n)$. En prenant les limites comme dans la définition, on obtient l'inégalité annoncée. □

Exercice 3.6. — Considérons un système dynamique topologique défini par une isométrie $\phi : X \to X$ sur un espace métrique compact X (par exemple : une rotation sur le cercle). Montrer que son entropie topologique est nulle.

Exercice 3.7. — Pour tout entier $N \geq 1$, $h_{\text{top}}(\Sigma_N) = \log N$. On pourra d'abord établir que

$$h_{\text{top}}(\Sigma_N) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S(n)$$

où $S(n) := \#\{x_0 \dots x_{n-1} : x \in \Sigma_N\}$.

Voici quelques propriétés montrant comment l'entropie se comporte par rapport aux différentes constructions envisagées dans le chapitre 2 (f et g désignent des systèmes dynamiques topologiques) :

- $h_{\text{top}}(f \times g) = h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g)$;
- Si $n \geq 0$ est un entier, $h_{\text{top}}(f^n) = n h_{\text{top}}(f)$;
- Si f est un homéomorphisme, $h_{\text{top}}(f^{-1}) = h_{\text{top}}(f)$;
- Si f admet une constante de Lipschitz L et X est une variété de dimension d, $h_{\text{top}}(f) \leq d \log^+ L$. En particulier, l'entropie topologique de tout système dynamique différentiable sur une variété compacte est finie.

La démonstration de ces propriétés est directe et constitue une suite d'intéressants exercices. Citons un résultat beaucoup plus profond qui montre une autre facette de l'entropie topologique :

***Théorème 3.32* (Newhouse, Yomdin).** — *Si f est de classe C^∞ et X est une variété compacte, alors $h_{\mathrm{top}}(f) = \sup_\phi \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log v(\phi \circ f^n | [0,1]^k)$ où ϕ parcourt les applications C^∞ de $\mathbb{R}^k$ dans X et $v(\cdot)$ désigne le volume de l'image, compté avec multiplicité*[8].

3.8. Exercices complémentaires

Exercice 3.8. — Soit ϕ le flot sur $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ du champ de vecteur $v(z) := (Imz)^2 e(z)$, où $e(z)$ est le vecteur unitaire tangent à $\mathbb{S}^1$ orienté dans le sens positif. Soit ψ le flot sur $\mathbb{S}^1$ du champ $w(z) = (Imz)e(z)$. Montrez que ces deux flots ont le même ensemble limite et qu'ils coicindent sur celui-ci. Montrez que les flots sur $\mathbb{S}^1$ ne sont pas topologiquement conjugués. Commentez.

Exercice 3.9. — Soit T une rotation irrationnelle sur le cercle $C := \mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $\mathbb{R}^3$ telle que (1) $x_n \notin C$; (2) l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est le cercle C. On étend T à $X := C \cup \{x_0, x_1, \ldots\}$ en posant $T(x_{n+1}) = x_n$ pour $n \geq 0$ et $T(x_0) = (1,0,0) \in C$. Vérifier que (X,T) est encore un système dynamique topologique. Enumérer (1) les compacts invariants ; (2) les compacts strictement invariants ; (3) les compacts totalement invariants. En déduire que remplacer l'invariance stricte par l'invariance totale changerait la notion de minimalité.

Exercice 3.10. — On fixe un compact quelconque $K \subset [0,1]$ contenant les deux points 0, 1. On veut montrer qu'il existe un difféomorphisme $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^∞ tel que $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}_1(f) = K$.

Soit $0 < a < b < 1$. Montrer qu'il existe un système dynamique $([0,1], (h_t)_{t\in\mathbb{R}})$ de classe C^∞ tel que $h_t|[0,1]\backslash]a,b[= \mathrm{Id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]a,b[$ vérifie $\lim_{t\to\infty} h_t(x) = b$.

Construire un système dynamique $([0,1], (g_t)_{t\in\mathbb{R}})$ de classe C^∞ tel que (i) tous les points de K sont fixes ; (ii) tout point du cercle tend vers un point de K, i.e., $\lim_{t\to\pm\infty} d(g_t(x), K) = 0$. En déduire que K est exactement l'ensemble des points singuliers de g. Construire le difféomorphisme demandé.

Exercice 3.11. — Soit $T_N : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, la multiplication de l'angle par un entier $N \geq 2$. Montrer que tout point de la forme $e^{2i\pi p/q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, est un point périodique. En déduire que $\mathrm{Per}(T_N)$ est dense dans le cercle. Montrer que $\mathrm{Per}(T_N)$ est d'intérieur vide pour des raisons de cardinalité.

---

[8] $v(\phi|Q) = \int_Q Jac(\phi)\, dx$ avec $Jac(\phi)$ le jacobien de ϕ, i.e., la valeur absolue du déterminant de la différentielle calculée en prenant une base orthonormale de $\mathbb{R}^k \supset Q$ et en chaque point de l'espace tangent à X.

Exercice 3.12. — Trouver un système dynamique de temps $\mathbb{Z}$, non réduit à une orbite périodique et admettant une unique orbite dense. Comparer avec le lemme 3.19.

Exercice 3.13. — Démontrer le lemme 3.2 : l'ensemble ω-limite d'un point quelconque d'un système dynamique topologique est strictement invariant.

Exercice 3.14. — On va montrer un cas particulier du théorème de Sharkovskii sur l'ensemble des périodes $\mathrm{P}(f)$ d'un système dynamique défini par une application continue $f : [0,1] \to [0,1]$: (*) si $3 \in \mathrm{P}(f)$ alors $\mathrm{P}(f) = \mathbb{N}^*$. On suppose donc l'existence d'une orbite de période 3, i.e., $a < b < c$ tels que $f(\{a,b,c,\}) = \{a,b,c\}$.

Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue vérifiant $g([0,1]) \supset [0,1]$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = x$. Montrer qu'il existe un sous-intervalle dont l'image est exactement $[0,1]$.

En considérant les images des trois points a, b, c et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe deux intervalles compacts $I, J \subset [0,1]$ tels que $I \cap J$ est réduit à un point et $f(I) \supset I \cup J$, $f(J) \supset I$. En déduire que pour toute suite $(K_n)_{n=0,\dots,N}$ avec $K_n \in \{I, J\}$, $K_N = K_0$, et $K_{n+1} = I$ si $K_n = J$ et $0 \leq n < N$, il existe un point périodique x vérifiant $f^n(x) \in \overline{K_n}$ pour tout $n \geq 0$.

En déduire l'assertion (*) ci-dessus en considérant des suites bien choisies $(K_n)_{n=0,\dots,N}$ de longueur N arbitraire. On prendra garde au fait que les intervalles I, J ne sont pas disjoints.

Cette propriété a-t-elle encore lieu pour les applications continues du cercle dans lui-même ?

Exercice 3.15. — Pour $x \in \Sigma_N$, on pose $\mathcal{L}(x) := \{a_0 a_1 \dots a_{n-1} : \exists p \in \mathbb{Z}\ a_0 \dots a_{n-1} = x_p \dots x_{p+n-1}\}$. Caractériser en fonction de $\mathcal{L}(x)$ la densité de $\mathcal{O}^T(x)$. Construire $x \in \Sigma_N$ tel que $\omega(\sigma_N, x) = \Sigma_N$. Montrer (sans utiliser le lemme 3.19) l'existence d'un G_δ-dense de points d'orbite dense. Montrer que l'ensemble des points récurrents et son complémentaire sont tous les deux denses.

Exercice 3.16. — Soit S la partie de Σ_4 définie comme l'ensemble des suites $x \in \Sigma_4$ vérifiant : si $n < m$, $x_n \in \{2,3\} \implies x_m \in \{2,3\}$. Montrer que S définit un sous-système du décalage. S est-il topologiquement transitif ? Déterminer les sous-systèmes $X \subset S$ topologiquement transitifs maximaux pour l'inclusion. On prendra garde à ce que les parties considérées ne satisfont pas nécessairement à la condition (*) du lemme 3.19.

Mêmes questions pour la partie S' définie par la condition : $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \not\supset \{0,1\}$.

Exercice 3.17. — Soit $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ une semi-conjugaison topologique entre deux sous-décalages bilatères d'alphabets respectifs $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et $H : \mathcal{A}_1^{2r+1} \to \mathcal{A}_2$ tels que $h(x) = (H(x_{n-r}, \dots, x_{n+r}))_{n \in \mathbb{Z}}$. Formuler et prouver une version lorsque les sous-décalages sont unilatères.

Caractériser les sous-décalages topologiquement conjugués à un sous-décalage de type fini.

Exercice 3.18. — Soit $\phi : [0,1] \to [0,1]$ une application continue telle qu'il existe une partition de $[0,1]$ en sous-intervalles $I_1, \dots, I_N$, pour un certain $N \in \mathbb{N}$, vérifiant : $f|I_i$ est C^1, $|f'(x)| \geq \lambda > 1$ et $\sup I_i = \inf I_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, N-1$. Montrer que $\phi_a(x) = \frac{a}{2}(1 - |1 - 2x|)$ vérifie ces propriétés pour tout $a \in]1,2]$.

Soit $c : [0,1] \to \{1, \dots, N\}$ définie par $c(x) = i$ si $x \in I_i$ et $\gamma(x) := (c(\phi^n x))_{n \in \mathbb{N}}$. On pose :

$$\Sigma := \overline{\{\gamma(x) : x \in \bigcap_{n \geq 0} \phi^{-n}(\operatorname{int} I_1 \cup \dots \cup \operatorname{int} I_N)\}}$$

où la fermeture est prise dans le compact $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. Vérifier que c'est un sous-décalage unilatère. Montrer que pour tout $\alpha \in \Sigma_+$, $\bigcap_{n \geq 0} \phi^{-n}(\overline{I_{\alpha_n}})$ est un singleton. On définit $\pi(\alpha)$ comme l'unique élément de cette intersection. Montrer que $\pi : (\Sigma, \sigma) \to ([0,1], \phi)$ est une extension topologique. Montrer que la restriction $\pi : \mathrm{Per}(\Sigma) \to \mathrm{Per}(\phi)$ est une surjection, et que $\pi^{-1}(x)$ est un singleton sauf pour un ensemble fini de $x \in \mathrm{Per}(\phi)$.

On suppose que $1/2$ est éventuellement périodique : $\phi^{n+p}(1/2) = \phi^n(1/2)$ pour certains $n \geq 0$ et $p \geq 1$. Montrer que Σ est alors un sous-décalage de type fini.

Exercice 3.19. — Pour $a > 1$, considérer $\phi_a : [0,1] \to [0,1]$ définie par $\phi_a(x) = \frac{a}{2}(1 - 2|x|)$. Montrer que $h_{\mathrm{top}}(\phi_a) = \log a$. *Indication pour l'inégalité* $h_{\mathrm{top}}(\phi_a) \geq \log a$ *:* On pourra considérer séparément $B(x, \epsilon, n) \cap]-1, x]$ et $B(x, \epsilon, n) \cap [x, 1[$ pour $\epsilon > 0$ assez petit et traiter d'abord le cas où 0 n'est pas récurrent.

En déduire que, pour tous $a, b > 1$, ϕ_a et ϕ_b sont topologiquement conjuguées si et seulement si $a = b$.

En utilisant l'exercice 3.18, montrer que la dynamique symbolique Σ n'est un sous-décalage de type fini que pour un ensemble au plus dénombrables de valeurs du paramètre $a > 1$.

Exercice 3.20. — Soit un système dynamique topologique inversible $\phi : X \to X$. Montrer qu'il est topologiquement conjugué à un système défini par une isométrie si et seulement si les itérés $\{\phi^n : n \in \mathbb{Z}\}$ forment une famille uniformément continue (on dit que (X, ϕ) est équicontinu).

Supposons que (X, ϕ) est équicontinu et minimal. On va montrer qu'il est topologiquement conjugué à un système de Kronecker (G, R_g) où G est un groupe abélien compact, $R_g(x) := x + g$ avec $g \in G$.

1. Montrer que $\mathcal{G} := \overline{\{\phi^n : n \in \mathbb{Z}\}}$, muni de la composition et de la norme uniforme, constitue un groupe topologique abélien.
2. Soit $x_0 \in X$. Montrer que $\pi : \mathcal{G} \to X$, $f \mapsto f(x_0)$ définit un application facteur topologique de $(\mathcal{G}, g_0)$ sur (X, ϕ) pour un $g_0 \in \mathcal{G}$ bien choisi.
3. Montrer que $\mathcal{H} := \{g \in \mathcal{G} : g(x_0) = x_0\}$ est un sous-groupe compact de $\mathcal{G}$.

4. Conclure.

En déduire que pour tout $x \in X$, il existe une suite d'entiers n_j tendant vers l'infini tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \lim_{j\to\infty} \phi^{kn_j} x = x$$

Exercice 3.21. — Calculer l'entropie topologique d'un sous-décalage de type fini Σ_A (voir l'exemple 3.27). *Indication :* On pourra considérer le rayon spectral de la matrice A.

Exercice 3.22. — Soit $D \geq 2$, un entier. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $F(0) = 0$, $F(x+1) = x + D$ et $F'(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(e^{2i\pi x}) = e^{2i\pi F(x)}$. Montrer que f est bien définie et continue. Posons $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = Dx$.

Supposons qu'il existe $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un homéomorphisme croissant vérifiant $H(0) = 0$, $H(x+1) = H(x) + 1$ et tel que $F \circ H = H \circ T$. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$H = \mathcal{F}(H) \text{ où } \mathcal{F}(H) := (x \mapsto F^{-1}(H(Dx)).$$

En déduire une construction d'un homéomorphisme H comme ci-dessus. *Indication :* on pourra utiliser un théorème de point fixe sur l'ensemble des fonctions continues $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $h(0) = 0$, $h(x+1) = h(x)$ pour tout x, muni de la norme $\|h\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$.

Que peut-on en déduire sur les applications $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ C^1-proches de l'application T_D ?

Exercice 3.23. — Soit $N \geq 2$, un entier. Montrer que $\mathrm{Prob}(\sigma_N)$ contient une infinité de mesures périodiques, i.e., de la forme $(1/p)\sum_{i=1}^{p} \delta_{\sigma_N^i x}$ pour un $x \in \Sigma_N$ avec $\sigma_N^p x = x$. Montrer qu'il contient une collection $\mathcal{C}$ non-dénombrable de mesures de probabilité invariantes et deux-à-deux étrangères : pour toute paire μ, ν de mesures de $\mathcal{C}$ distinctes, il existe une partition de Σ_N en deux mesurables A et B tels que $\mu(A) = 0$, $\nu(B) = 0$.

Exercice 3.24. — On construit directement la topologie sur $\mathrm{Prob}(X)$ utilisée par le théorème de Krylov-Bogolioubov (théorème 3.22). Il est à noter que cet argument direct est essentiellement celui utilisé par la preuve originale.

Montrer que X étant compact, il existe une suite de fonctions continues f_n sur X qui est dense dans la boule unité de $C^0(X)$ pour la norme $\|\cdot\|_{C^0}$. Montrer que la formule suivante définie une distance sur $\mathrm{Prob}(X)$:

$$d(\mu, \nu) := \sum_{n\geq 1} 2^{-n} |\mu(f_n) - \nu(f_n)|.$$

En utilisant l'argument diagonal de Cantor, montrer que $\mathrm{Prob}(X)$ muni de cette distance est compact : toute suite $\mu_n \in \mathrm{Prob}(X)$ admet une sous-suite convergente.

CHAPITRE 4

THÉORIE ERGODIQUE

Nous abordons maintenant le cœur de notre sujet : la théorie ergodique, c'est-à-dire l'étude des dynamiques préservant une mesure. Pour nous, il s'agira le plus souvent de systèmes topologiques préservant une mesure de probabilité borélienne. Nous verrons comment cette structure additionnelle permet d'obtenir toute une panoplie d'informations supplémentaires depuis l'abondance des points récurrents jusqu'à une description statistique de la plupart, voire de toutes les orbites.

Rappelons qu'un système dynamique probabiliste est défini (voir la définition 2.4) par un espace de probabilité $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et une action $\phi : T \times X \to X$ préservant cette probabilité : $(\phi_t)_*\mu := \mu \circ \phi_t^{-1} = \mu$. On utilise les notions correspondantes de facteur et d'isomorphisme, en négligeant les ensembles de mesure nullr. Comme précédemment, on se restreint aux temps $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Dans le cas du temps discret, on note $\phi := \phi_1 : X \to X$, le générateur.

4.1. Récurrence

La première conséquence (dans l'ordre historique et logique) de l'invariance d'une mesure de probabilité est l'existence de points récurrents.

***Théorème 4.1* (Poincaré).** — *Soit (X, μ, ϕ) un système dynamique probabiliste. Pour tout ensemble mesurable $E \subset X$, μ-presque tout point $x \in E$ revient indéfiniment dans E, i.e., il existe des temps $t \to \infty$ tels que $\phi_t(x) \in E$.*

Si X est muni des boréliens pour une topologie admettant une base dénombrable[(1)]*, μ-presque tout $x \in E$ est récurrent.*

***Remarque 4.1*.** — Si E est de mesure nulle, une assertion sur presque tout point est vide ! Si μ est une mesure de Dirac concentrée en un point x_0, une telle assertion ne porte que sur ce point.

(1) C'est le cas si X est métrique et séparable.

Démonstration. — Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit E_N l'ensemble des points de E tels que $\phi_t(x) \notin E$ pour tout $t \geq N$. Il suffit de montrer que chacun de ces ensembles est de mesure nulle, de sorte que ce soit aussi le cas de leur union, ce qui entraînera la première assertion du théorème.

Par définition, $E_N \cap \phi_N^{-k}(E_N) = \emptyset$ et donc $\phi_N^{-n}(E_N) \cap \phi_N^{-k-n}(E_N) = \phi_N^{-n}(E_N \cap \phi_N^{-k}) = \emptyset$ pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$: les ensembles $\phi_N^{-n}(E_N)$, $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints. Par invariance de μ, ils sont de mesure égale. Si cette mesure n'était pas nulle, leur union serait de mesure infinie, ce qui est absurde. Presque tout point admet donc un temps de retour $t = kN \geq N$. L'intersection sur tous les $N \in \mathbb{N}^*$ achève la preuve du premier point.

Pour montrer le deuxième point, il est commode de considérer une base dénombrable de la topologie : $\{U_0, U_1, \ldots\}$. Le premier point appliqué à chaque $U_n \cap E$ donne une partie R_n de mesure totale dans $U_n \cap E$. Donc $E' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(E \setminus U_n) \cup R_n$ est égal à E à un ensemble de mesure nulle près. Mais pour tout $x \in E'$ et tout voisinage V de x, $x \in U_n \subset V$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $x \in R_n$ revient une infinité de fois dans V. □

Remarque 4.2. — Le point subtil de cette preuve est de savoir si l'on peut bien parler de la mesure (ou du volume) de l'ensemble des points revenant une infinité de fois, la mesure devant être définie de façon σ-additive pour obtenir la récurrence infinie. Ceci est illustré par le paradoxe suivant : soit un système dynamique probabiliste (X, ϕ) en temps $\mathbb{Z}$ (par simplicité) dont les points périodiques constituent un ensemble de mesure nulle et soit s une section obtenue en prenant exactement un point de chaque orbite. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \phi^{-n}(s)$ est une partition modulo les orbites périodiques. Si leur union est de mesure nulle, cette décomposition montre que s ne peut être mesurable : $\mu(X) < \infty$ implique que $\mu(s) = 0$ et $\mu(X) > 0$ implique $\mu(s) > 0$!

4.2. Définition de l'ergodicité

Toute partie mesurable $Y \subset X$ invariante de mesure $0 < \mu(Y) < 1$ permet de définir un sous-système probabiliste $(Y, \phi|Y, \mu|Y)$ en posant $(\mu|Y)(\cdot) = \mu(\cdot)/\mu(Y)$. La notion d'indécomposabilité naturelle en théorie ergodique est donc la suivante :

Définition 4.3. — Une partie mesurable $Y \subset X$ est **invariante modulo** μ si $\mu(\phi_t^{-1}(Y)\Delta Y) = 0$, pour tout $t \in T$. Y est dite **triviale modulo** μ si $\mu(Y) = 0$ ou 1. L'ensemble des parties mesurables invariantes modulo μ est appelé la **tribu des invariants** de (ϕ, μ) et est noté $\mathcal{I}(\phi, \mu)$.

(X, μ, ϕ) est **ergodique** si les seules parties invariantes modulo μ sont les parties triviales modulo μ.

Observons que l'ergodicité est un invariant de conjugaison mesurée : si deux systèmes dynamiques probabilistes sont conjugués en mesure, ils sont simultanément ergodiques ou non.

Remarque 4.4. — Le vocable *ergodique* est dû à Boltzmann dans le cadre de ses recherches sur les fondements microscopiques de la thermodynamique (voir la remarque 4.24). Dans le cas d'un espace X fini, l'ergodicité veut simplement dire que la mesure est portée par une orbite périodique, qui conformément à l'intuition du physicien, remplit tout l'espace X (à un ensemble de mesure nulle près !).

L'ergodicité peut se formuler également en termes fonctionnels.

Définition 4.5. — Une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ (ou $X \to \mathbb{C}$) est **invariante modulo** μ (ou invariante presque partout) si, pour tout $t \in T$, $f(x) = f \circ \phi_t(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$. Une fonction mesurable est **constante modulo** μ (ou constante presque partout) si $X \setminus f^{-1}(c)$ est de mesure nulle pour une certaine valeur c.

Il est commode d'étendre la notation $L^p(\mu)$, $0 < p \leq \infty$, des espaces de Lebesgue au cas $p = 0$: $L^0(\mu)$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables finies presque partout, modulo l'identification usuelle des fonctions égales presque partout.

Proposition 4.6. — *Pour tout $p \in [0, \infty]$, on a l'équivalence suivante :*
(μ, ϕ) est ergodique si et seulement si les seules fonctions $f \in L^p(\mu)$ invariantes modulo μ sont les fonctions constantes modulo μ.

Remarque 4.7. — On peut reformuler la proposition précédente en disant que (μ, ϕ) est ergodique si et seulement si 1 est une valeur propre *simple*[(2)] de l'*opérateur de Koopman* $U : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $U(f) = f \circ \phi$.

Démonstration. — Si (μ, ϕ) n'est pas ergodique, il existe une partie mesurable A, invariante modulo μ, avec $0 < \mu(A) < 1$. La fonction caractéristique 1_A est alors invariante modulo μ, est non-constante presque partout et appartient à $L^p(\mu)$, pour tout p.

Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction $f \in L^p(\mu) \subset L^0(\mu)$ invariante modulo μ. Montrons que le système est non-ergodique ou bien que f est constante presque partout. Supposons f à valeurs réelles, le cas complexe s'y réduisant par la considération de $\Re(f)$ et $\Im(f)$. Chaque $A_s := f^{-1}(]-\infty, s])$ est un mesurable invariant. S'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \mu(A_{s_0}) < 1$, le système n'est pas ergodique. Sinon, comme $\lim_{s \to -\infty} \mu(A_s) = 0$ et $\lim_{s \to \infty} \mu(A_s) = 1$ par σ-additivité, il existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(A_s) = 0$ ou 1 selon que $s < s_0$ ou $s \geq s_0$. Mais ceci implique que $f(x) = s_0$ presque partout. □

(2) Ceci veut dire que $\{f \in L^2(\mu) : f = U(f)\}$ est une droite.

4.2.1. Exemples. — Nous allons montrer l'ergodicité de deux exemples non-triviaux. Dans ces deux cas, nous considèrerons une fonction invariante p.p. de carré intégrable (en utilisant la caractérisation (4) pour $p = 2$ de la proposition 4.6) et sa série de Fourier pour en déduire sa constance.

Proposition 4.8. — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La rotation R_α agissant sur le cercle $\mathbb{S}^1$ muni de la mesure de Lebesgue normalisée m est ergodique si et seulement si l'angle α est irrationnel.*

Démonstration. — Si $\alpha = p/q$ est rationnel, alors $\mathbb{S}^1$ se partitionne en orbites q-périodiques (si p et q sont premiers entre eux) et la partition en orbites est donnée par l'application de $\pi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ définie par $z \mapsto z^q$. Toute fonction de la forme $f(\pi(x))$ avec $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ mesurable est une fonction mesurable invariante. $\mathbb{S}^1$ n'étant pas réduit à une orbite, $R_{p/q}$ n'est pas ergodique.

Considérons maintenant le cas $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $f \in L^2(m)$ une fonction invariante p.p. Dans $L^2(m)$, les fonctions sont données par leurs séries de Fourier : $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$. L'invariance modulo m donne, toujours dans $L^2(m)$, $f = f \circ R_\alpha$ soit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n(x+\alpha)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n\alpha} e^{2i\pi nx}.$$

L'unicité des coefficients de Fourier donne : $c_n(1 - e^{2i\pi n\alpha}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. α étant irrationnel, $1 - e^{2i\pi n\alpha} = 0$ si et seulement si $n = 0$. Donc $c_n = 0$ pour tout $n \neq 0$: f est constante dans $L^2(m)$ et la proposition 4.6 permet de conclure. □

Proposition 4.9. — *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La multiplication T_N agissant sur le cercle $\mathbb{S}^1$ muni de la mesure de Lebesgue normalisée m est ergodique si et seulement si le multiplicateur est $N \geq 2$.*

Démonstration. — Si $N = 1$, T_1 est l'identité sur $\mathbb{S}^1$ et donc non ergodique : toute fonction est invariante. Supposons $N \geq 2$ et $f \in L^2(m)$ invariante : $f = f \circ T_N$ p.p. Il vient :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi Nn}$$

donc $c_{Nn} = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En itérant, on obtient : $c_{N^k n} = c_n$ pour tout $k \geq 0$. Or, pour tout $n \neq 0$, $k \mapsto N^k n$ est injective d'où :

$$\sum_{k\geq 0} |c_{N^k n}|^2 \leq \|f\|_{L^2} < \infty.$$

On en déduit $c_n = 0$ pour tout $n \neq 0$ donc $f = c_0$ dans $L^2(m)$ et donc presque partout. □

Le devoir reproduit dans l'appendice D.1 développe une approche plus géométrique pour montrer l'ergodicité de la transformation de Gauss, $G(x) := \{1/x\}$.

4.3. Ergodicité et constructions

Proposition 4.10. — *(1) Pour tout temps $t_0 \in T \setminus \{0\}$, si (ν, ϕ^{t_0}) est ergodique alors (μ, ϕ) est ergodique. La réciproque est vraie en temps continu, fausse en temps discret.*
(2) Tout facteur d'un système ergodique est encore ergodique. Mais le produit de deux systèmes ergodiques n'est pas nécessairement ergodique.
(3) L'extension naturelle est ergodique si et seulement si le système originel l'est.

Démonstration. — Prouvons chacun des points.
(1) La première implication découle de ce que l'invariance sous ϕ implique celle sous ϕ^{t_0}. En temps continu, $(\phi^{t_0})_{t/t_0} = \phi^t$ montre que les parties invariantes doivent être les mêmes, d'où l'équivalence.

En temps discret, la réciproque peut tomber en défaut. Si $X = \{0, 1\}$, $\mu(A) := \#A/2$ et $\tau(x) := 1 - x$, (μ, τ) est ergodique alors que (μ, τ^2) ne l'est pas.

(2) Considérons un facteur $\pi : (\mu, \phi) \to (\nu, \psi)$. Si (ν, ψ) n'est pas ergodique, il existe une partie invariante A modulo ν avec $0 < \nu(A) < 1$. Mais $\pi^{-1}(A)$ montre alors que (μ, ϕ) n'est pas ergodique.

Fixons un entier $N \geq 2$. Soit $\tau : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ défini par $\tau(x) = x + 1$. τ laisse invariante la mesure $\mu := (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} \delta_i$. (μ, τ) est ergodique. Mais $(\mu \otimes \mu, \tau \times \tau)$ n'est pas ergodique comme le montre l'invariance de $\{(k, k) : k = 0, \ldots, N - 1\}$ de mesure $1/N$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

(3) Si le système originel (μ, ϕ) n'est pas ergodique, alors le point précédent montre que l'extension naturelle n'est pas ergodique. Supposons maintenant l'extension naturelle $\hat{\pi} : (\hat{\mu}, \hat{\phi}) \to (\mu, \phi)$ non ergodique : il existe donc $\hat{A}$ invariante et non-triviale modulo $\hat{\mu}$. Il faut montrer que $\hat{A} \in \mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_0 := \hat{\pi}^{-1}(\mathcal{X})$, ce qui exclura l'ergodicité de (μ, ϕ).

Par définition de l'extension naturelle, $\widehat{\mathcal{X}} = \bigvee_{n \geq 0} \hat{\phi}^n(\widehat{\mathcal{X}}_0)$. Le théorème de Doob (théorème C.48) fournit $\hat{A}_n \in \widehat{\mathcal{X}}_0$ avec $\hat{\mu}(\hat{\phi}^n(\hat{A}_n) \Delta \hat{A}) \to 0$. Par invariance de $\hat{A}$, $\hat{\mu}(\hat{A}_n \Delta \hat{A}) \to 0$ et donc $\hat{A} \in \widehat{\mathcal{X}}_0$, ce qui prouve la non-ergodicité de (μ, ϕ). □

L'ergodicité est préservée par la suspension dont nous donnons maintenant la version mesurée :

Définition 4.11. — Soit (X, μ, ϕ) un système dynamique probabiliste en temps $\mathbb{Z}$. Soit $\tau : X \to]0, \infty[$ intégrable. La suspension de (μ, ϕ) par τ en temps continu est le système (Y, ν, ψ) en temps $\mathbb{R}$ défini par :

$$\begin{aligned} Y &:= \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t < \tau(x)\} \\ \nu &:= \mu \otimes m_{\mathbb{R}} | Y \qquad \text{(restriction normalisée)} \\ \psi_s &: (x, t) \mapsto (\phi^{r(s+t)}(x), s + t - r(s + t)) \end{aligned}$$

avec $r(s)$ le plus grand des entiers r tels que $\tau(x) + \tau(\phi(x)) + \cdots + \tau(\phi^r(x)) \leq s$ (pour $s < 0$, on pose $\psi_s = (\psi_{|s|})^{-1}$ avec la définition ci-dessus).

L'exercice 4.7 invite à vérifier que (ν, ψ) est un système dynamique probabiliste en temps $\mathbb{R}$.

Proposition 4.12. — *La suspension ψ en temps $\mathbb{R}$ d'un système ϕ en temps $\mathbb{Z}$ est ergodique si et seulement si ϕ est ergodique.*

Démonstration. — Si (μ, ϕ) n'est pas ergodique, alors il existe une partie $A \subset X$ invariante modulo μ et non-triviale. La partie $\{(x,t) \in Y : x \in A\}$ est alors ψ-invariante modulo ν et non-triviale : (ν, ψ) n'est donc pas ergodique.

Réciproquement, soit $A \subset Y$ une partie mesurable et invariante modulo μ. D'après le théorème de Fubini (théorème C.40) $A_x := A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ est une partie mesurable de $\mathbb{R}$ pour μ-presque tout x, $x \mapsto m_{\mathbb{R}}(A_x)$ est mesurable et μ-intégrable et :

$$\nu(A) = \int_X m_{\mathbb{R}}(A_x)\, d\mu.$$

On en déduit[3] que l'invariance modulo ν de A par chaque ψ_s implique que, modulo ν,

$$A = \{(x,t) \in Y : x \in B\} \text{ avec } B := \{x \in X : m(A_x) > 0\}.$$

De plus, B est mesurable, ϕ-invariante. Finalement la mesure de B ne peut être 0 ou 1 que si c'est le cas pour A : la non-ergodicité de (ν, ψ) implique donc celle de (μ, ϕ). □

4.3.1. Reconstitution. — Le théorème suivant permet de se restreindre, pour bien des problèmes importants, au cas ergodique.

***Théorème 4.13* (Décomposition ergodique).** — *Soit $(X, \mathcal{X}, \mu, \phi)$ un système dynamique probabiliste défini sur $(X, \mathcal{X})$ un espace de probabilité standard[4]. Il existe une application $z \mapsto \mu_z$ définie sur $(X, \mathcal{X})$ et à valeurs dans les mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{X})$ telle que, pour μ-presque tout $z \in Z$:*

- *μ_z est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{X})$;*
- *μ_z est invariante et ergodique pour ϕ ;*
- *pour tout $f \in L^1(\mu)$, l'intégrale $\int_X \left(\int_X f\, d\mu_z\right) d\mu$ est bien définie et coincide avec $\int_X f\, d\mu$.*

Remarque 4.14. — La famille de mesures $(\mu_z)_{z \in X}$ donne une famille d'espérance conditionnelle simultanément pour toutes les fonctions intégrables. Plus précisément, pour toute fonction $f \in L^1(\mu)$, μ-presque tout $z \in X$:

$$\int_X f\, d\mu_z = \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{I})(z)$$

[3] Ceci requiert une justification qui peut s'obtenir en considérant $\bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \phi_t(A)$ et que presque tout point de A est un point de densité de A_x pour $m_{\mathbb{R}}$.

[4] C'est-à-dire un espace topologique admettant une métrique pour laquelle il est complet et séparable équipé d'une mesure de probabilité borélienne.

où $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\phi, \mu)$ est la tribu des invariants.

Définition 4.15. — L'application $z \mapsto \mu_z$ ci-dessus est appelée **décomposition ergodique** de (X, μ, ϕ).

4.4. Théorème ergodique moyen

Nous allons maintenant énoncer puis démontrer deux théorèmes ergodiques, i.e., reliant moyennes temporelles et moyennes spatiales. Dans cette section, nous expliquons le premier résultat de ce type, obtenu par von Neumann.

L'espace fonctionnel pertinent est ici $L^2(\mu)$, un *espace de Hilbert*, c'est-à-dire que sa norme vient d'un produit sequilinéaire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall f, g \in L^2(\mu) \quad (\alpha f + \beta g) \cdot h = \bar{\alpha} f \cdot h + \bar{\beta} g \cdot h \text{ et } g \cdot f = \overline{f \circ g}$$

et $f \cdot f = \|f\|_{L^2}$. Etant donné n'importe quel sous-espace V fermé, la *projection orthogonale* sur V est l'application définie par : $x = \Pi_V(x) + (\mathrm{Id} - \Pi_V)(x)$ avec $\Pi_V(x) \in V$ et $(\mathrm{Id} - \Pi_V) \in V^\perp := \{f \in L^2(\mu) : \forall g \in V\ f \cdot g = 0\}$.

Théorème 4.16 **(von Neumann)**. — *Soit (X, μ, ϕ) un système dynamique probabiliste. Soit $I = I(\phi)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\mu)$ invariantes modulo μ pour tout ϕ_t, $t \in T$. Pour tout $t \in T_*^+$, on définit la moyenne ergodique (ou temporelle) $M_t f := (1/t) \sum_{k=0}^{t-1} f \circ \phi^k$ si ϕ est à temps discret ou $M_t f := (1/t) \int_0^t f \circ \phi_t(x)\, dt$ sinon.*

Pour toute fonction $f \in L^2(\mu)$, on a la convergence suivante dans $L^2(\mu)$ quand $t \to \infty$, $t \in T$:

$$M_t f \to \Pi_I(f).$$

En particulier, si (μ, ϕ) est ergodique, alors

$$M_t f \to \int_X f\, d\mu.$$

4.4.1. Preuve. — La preuve consiste en la décomposition de $L^2(\mu)$ en deux sous-espaces fermés, invariants et supplémentaires sur chacun desquels le théorème a lieu pour une raison différente :

- $I := \{f \in L^2(\mu) : f = U(f)\}$: les fonctions invariantes pour lesquelles la convergence est triviale ;
- $C := \overline{\{g - U(g) : g \in L^2(\mu)\}}$: les fonctions "variations" auxquelles un argument télescopique s'applique.

Dans cette preuve, H et $\|\cdot\|$ désignent l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$ et sa norme $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$.

Lemme 4.17. — $\lim_{t\to\infty} \|M_t f\| = 0$ *pour tout $f \in C$.*

Démonstration. — Si $f = g - U(g)$ pour un certain $g \in H$, la convergence vers 0 résulte d'un argument télescopique :

$$M_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k(g - U(g)) = \frac{1}{n}(g - U^n(g))$$

or $\|U(g)\| = \|g\|$, donc $\|M_n(f)\| \leq 2\|g\|/n \to 0$.

Déduisons-en le cas général. Etant donné $f \in C$, on fixe $g \in H$ tel que $\|f - (g - U(g))\| < \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ arbitraire. On remarque ensuite que $\|M_n\| \leq \|U\| = 1$, donc $\|M_n(f)\| < \epsilon + \|M_n(g - U(g))\| < 2\epsilon$ pour n assez grand. □

Démonstration du théorème 4.16. — Il suffit de montrer que l'orthogonal de C :

$$C^\perp := \{x \in H : \forall y \in C \quad y \cdot x = 0\}$$

coïncide avec I. En effet, on aura alors, pour tout $f \in H$, la décomposition $f = f_0 + \Pi_I(f)$ avec $f_0 \in C$ et $\Pi_I(f) \in I$, d'où par linéarité,

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f) = \lim_{n\to\infty} M_n(f_0) + \lim_{n\to\infty} M_n(\Pi_I(f)) = \Pi_I(f).$$

Montrons d'abord l'inclusion $C \subset I^\perp$. Pour tout $g, h \in H$:

$$(g - U(g)) \cdot h = g \cdot h - U(g) \cdot h = g \cdot h - g \cdot U^*(h) = g \cdot (h - U^*(h)) \tag{5}$$

Mais, si $h = U(h)$,

$$\begin{aligned} \|h - U^*(h)\|^2 &= \|h\|^2 + \|U^*(h)\|^2 - 2\Re(h \cdot U^*(h)) \\ &= \|h\|^2 + \|U^*(h)\|^2 - 2\Re(U(h) \cdot h) \\ &= \|U^*(h)\|^2 - \|h\|^2 \end{aligned} \tag{6}$$

or, pour tout $x \in H$

$$\|U^*(x)\|^2 = U^*(x) \cdot U^*(x) = x \cdot UU^*(x) \leq \|x\| \cdot \|U\| \cdot \|U^*(x)\|$$

soit $\|U^*\| \leq \|U\| = 1$. L'équation (6) donne alors : $\|h - U^*(h)\| = 0$, toute fonction invariante par U est invariante par U^*. L'équation (5) donne finalement $(g - U(g)) \cdot h = 0$ pour tout $h \in I$: pour tout $g \in H$, $g - U(g) \in I^\perp$. $I^\perp$ étant fermé, $C \subset I^\perp$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $h \in C^\perp$: pour tout $g \in H$, $h \cdot (g - U(g)) = 0$. L'équation (5) donne alors $g \cdot (h - U^*(h)) = 0$ pour tout $g \in H$. Il vient $h = U^*(h)$ et donc :

$$\|h - U(h)\|^2 = \|h\|^2 + \|U(h)\|^2 - 2\Re(U^*(h) \cdot h) \leq 0,$$

d'où : $h = U(h)$. On a montré $C^\perp \subset I$, d'où $C \supset I^\perp$ (car $V^{\perp\perp} = V$ si V est un sous-espace fermé) et finalement l'égalité désirée. □

Remarque 4.18. — Comme le montre la démonstration utilisée, le théorème de von Neumann s'applique à toutes les contractions continues d'un espace de Hilbert dans lui-même (i.e., $\|U\| \leq 1$). L'exercice 4.8 montre que U n'est pas forcément inversible mais que, le cas échéant, la preuve ci-dessus peut se simplifier.

4.4.2. Applications. —

Proposition 4.19. — *(μ, ϕ) est ergodique si et seulement si :*

$$\forall A, B \in \mathcal{X} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \phi^{-k} B) = \mu(A)\mu(B).$$

L'exercice 4.9 montre qu'il n'est pas toujours vrai que $\mu(A \cap \phi^{-k}B) \to \mu(A)\mu(B)$ pour tout système ergodique. L'utilisation de la convergence au sens de Cesaro est bien nécessaire.

Démonstration. — Si (μ, ϕ) n'est pas ergodique, alors il existe S_0 invariant modulo μ et non-trivial modulo μ. En prenant $A = B = S_0$, $\mu(A \cap \phi^{-k}B) = \mu(S_0) > \mu(S_0)^2$.

Réciproquement, supposons le système ergodique. I se réduit à la droite des fonctions constantes. Pour tout mesurable B, le théorème de von Neumann appliqué à $f = 1_B$ donne $M_n 1_B \to \Pi_I(1_B) =< 1_B, 1 > 1 = \mu(B)$ dans $L^2(\mu)$. Il vient

$$\mu(A)\mu(B) = 1_A \cdot \Pi_I(1_B) = \lim_{n\to\infty} 1_A \cdot (M_n 1_B) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \phi^{-k} B).$$

Mais c'est la caractérisation proposée. □

Exercice 4.1. — On dit qu'un système dynamique probabiliste est *mélangeant* si, pour tout couple de mesurables A, B, on a la convergence : $\mu(A \cap \phi_t^{-1}(B)) \to \mu(A)\mu(B)$ quand $t \to \infty$. Montrer que le mélange implique l'ergodicité. En déduire une preuve de l'ergodicité des schémas de Bernoulli $(\Sigma_2, \sigma, \mu_p)$ avec $0 \leq p \leq 1$.

La décomposition de Radon-Nikodym (théorème C.45) possède le corollaire dynamique suivant :

Proposition 4.20. — *Soit $\mu \in \mathrm{Prob}(\phi)$. μ n'est pas ϕ-ergodique si et seulement s'il existe $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{Prob}(X)$, $\nu_1 \neq \nu_2$ et $0 < t < 1$ tels que : $\mu = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$.*

On peut exprimer ceci en disant qu'une mesure de probabilité invariante est ergodique si et seulement si c'est un *point extrémal* de $\mathrm{Prob}(\phi)$.

La démonstration va utiliser le fait suivant. Rappelons que deux mesures μ et m sont *étrangères* s'il existe un mesurable A tel que $\mu(A) = m(A^c) = 0$. On écrit alors $\mu \perp m$. Inversement, on note $\mu << m$ si μ est *absolument continue* par rapport à m ($m(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$ pour tout mesurable A) et $\mu \sim m$ s'il y a *équivalence* ($m(A) = 0 \iff \mu(A) = 0$).

Lemme 4.21. — *Si μ et m sont deux mesures de probabilité ϕ-invariantes et boréliennes et si m est ergodique alors $\mu = tm + (1-t)\nu$ où $\mu \in \mathrm{Prob}(\phi)$, $\nu \perp m$ et $0 \leq t \leq 1$. En particulier, deux mesures de probabilité ergodiques et invariantes distinctes sont étrangères.*

Démonstration. — Le théorème de Radon-Nikodym entraîne que $\mu = \tilde{m} + \nu_0$ où $\tilde{m} = \tilde{h} \cdot m$ avec $\tilde{h} \in L^1(m)$ et $\nu_0 \perp m$. Si $\nu_0 = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $t := \tilde{m}(X) < 1$ et posons $\nu := \nu_0/(1-t)$. Montrons l'invariance de ν (et donc de $\tilde{m}$).

Par définition de l'étrangeté, il existe une partie mesurable $A \subset X$ telle que $\nu(A) = 1$ et $m(A) = 0$. Vu l'invariance de μ et de m, $m(\phi_t^{-1}A) = 0$, $\mu(\phi_t^{-1}(A)) = \mu(A) = \nu_0(X)$ et donc $\nu(\phi^{-1}(A)) = 1$. On en déduit que A est invariante modulo ν et modulo m. L'invariance de ν et de $\tilde{m}$ en découle.

$\tilde{h}^{-1}(0)$ fournit une partie invariante modulo m donc de mesure 0 ou 1 par ergodicité. Si $\tilde{h} = 0$ m-p.p., alors $\mu = m$ et le lemme suit. Dans le cas contraire, on obtient $\tilde{m} \sim m$. L'ergodicité de m entraîne celle de $\tilde{m}$.

On applique le théorème de von Neuman à une même fonction $f \in L^2(m) = L^2(\tilde{m})$. On obtient la convergence $M_n f \to m(f)$ dans $L^2(m)$ et $M_n f \to \tilde{m}(f)$ dans $L^2(\tilde{m})$. La convergence L^2 implique la convergence presque partout pour une sous suite. En utilisant à nouveau l'équivalence des deux mesures on obtient $m(f) = \tilde{m}(f)$ pour tout $f \in L^2(m)$ et donc $m = \tilde{m}$. □

Exercice 4.2. — Retrouver plus simplement dans le cas inversible que deux mesures de probabilité invariantes et ergodiques μ et m sont égales ou étrangères. *Indication :* on pourra considérer la dérivée de Radon-Nikodym $d\mu/dm$.

Démonstration de la proposition. — Si (μ, ϕ) n'est pas ergodique alors il existe A invariant modulo μ et non-trivial modulo μ. Il suffit de poser : $\nu_1 = \mu|A$, $\nu_2 = \mu|X \setminus A$ et $t = \mu(A)$.

Supposons maintenant μ ergodique et $\mu = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$ comme dans l'énoncé. D'après le lemme 4.21, on peut écrire $\nu_i = s_i\mu + (1-s_i)m_i$ avec $0 \leq s_i \leq 1$ et $m_i \perp \mu$ $(i = 1, 2)$. Il vient : $\mu = (ts_1 + (1-t)s_2)\mu + t(1-s_1)\nu_1 + (1-t)(1-s_2)\nu_2$. Vu $\nu_1 \neq \nu_2$, $s_1 < 1$ ou $s_2 < 1$, on a donc : $\mu = \alpha\mu + (1-\alpha)\nu$ avec $0 \leq \alpha < 1$. Ceci contredit $\mu \perp \nu$. □

4.5. Théorème ergodique ponctuel

Le théorème de von Neumann fournit une convergence L^2, c'est-à-dire, d'un point de vue probabiliste une *convergence en moyenne :* si on observe pendant longtemps beaucoup de systèmes, leur comportement moyen est décrit par μ. G. Birkhoff a obtenu un théorème ergodique *ponctuel*, c'est-à-dire décrivant la moyenne temporelle pour presque toute condition initiale : on dispose ainsi d'une prévision avec probabilité 1.

Birkhoff suppose l'hypothèse d'intégrabilité minimale, ie, ce qu'il faut pour pouvoir définir les moyennes, i.e., l'intégrabilité. On doit donc remplacer la projection orthogonale par une notion plus générale : l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Y})$ d'une fonction

$f \in L^1(\mu)$. On renvoie à l'appendice C.3.4 pour quelques rappels. On considèrera ici la sous-tribu $\mathcal{I}(\phi)$ des ensembles mesurables ϕ_t-invariants modulo μ pour chaque $t \in T$ (voir la définition 4.3).

***Théorème 4.22* (Birkhoff).** — *Soit (X, μ, ϕ) un système dynamique probabiliste. Soit $f \in L^p(\mu)$ avec $1 \leq p < \infty$. Pour $t \to \infty$, $t \in T^+$, la convergence suivante a lieu :*

$$M_t f \to \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{I}(\phi)) \ \mu\text{-presque partout et dans } L^p(\mu).$$

Remarque 4.23. — Ce théorème implique immédiatement le théorème ergodique précédent. On peut noter que, contrairement à ce que suggèrent les dates de publication des articles originaux, le résultat de von Neumann est antérieur à et a constitué une des motivations du théorème de Birkhoff.

Remarque 4.24. — On voit que l'ergodicité garantit l'égalité entre les moyennes observées et les moyennes sur l'espace des phases : c'est le contenu de l'*hypothèse ergodique* de Boltzmann. La formulation de celle-ci a posé de grandes difficultés conceptuelles. Boltzmann a proposé l'existence d'une seule orbite parcourant tous les points de l'espace des phases. Il a été rapidement remarqué que cette formulation était bien trop forte, en fait impossible à satisfaire pour une courbe de classe C^1. Puis il a été suggéré de la formaliser par la transitivité topologique avant que cela ne soit démontré être au contraire insuffisant (voir exercice 4.6).

Démonstration. — Soit $f \in L^1(\mu)$. Posons : $g := f - E_\mu(f|\mathcal{I})$. $E_\mu(f|\mathcal{I})$ étant invariant et intégrable, g est intégrable et sa convergence presque partout vers 0 est équivalente à celle de $M_n g$ vers 0.

Nous montrons d'abord que

$$\limsup_{n\to\infty} M_n g \leq 0. \tag{7}$$

On procède par l'absurde en supposant l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\limsup_{n\to\infty} M_n g > \alpha$ sur un ensemble invariant B de mesure non-nulle. Considérons la fonction $N : B \to \mathbb{N}$:

$$N(x) := \min\{n \geq 1 : M_n g(x) > \alpha\}.$$

Elle est mesurable et finie p.p. Il existe donc $K < \infty$ tel que $C := \{x \in B : N(x) > K\}$ est de mesure inférieure à $\mu(B)/4$. Quitte à augmenter K, on peut supposer que $\int_C |g| \, d\mu < \alpha\mu(B)/4$ d'après le théorème de convergence dominée.

Calculons la *somme ergodique* $S_n f(x) := f(x) + f(\phi(x)) + \cdots + f(\phi^{n-1}x)$ pour un entier arbitraire $n \geq 1$ en découpant l'intervalle entier $[0, n[$ de la façon suivante. On pose $b_0 := 0$ et on définit par récurrence, pour $j \geq 0$:

$$a_{j+1} := \min\{k \geq b_j : T^k x \notin C\} \text{ et } b_{j+1} := a_{j+1} + N(T^{a_{j+1}}x).$$

On pose $r := \min\{n \geq 0 : b_{n+1} \geq n\}$. Considérons maintenant :

$$[0, n[= \bigcup_{i=1}^{r+1} K_i \cup L_i,$$

où

- $L_i := [\min(a_i, n), \min(b_i, n)[$ (de sorte que $\sum_{k=a_i}^{b_i-1} f(T^k x) \geq (b_i - a_i)\alpha$ si $i \leq r$ et $|L_{r+1}| \leq K$) ;
- $K_i := [b_{i-1}, \min(a_i, n)[$ (de sorte que $T^k x \in C$ pour $k \in L_i$).

Nous obtenons, pour $x \in B$:

$$\begin{aligned} S_n g(x) &\geq \alpha \sum_{i=1}^{r} |b_i - a_i| - S_n(|g|1_C)(x) - S_{(n-a_{r+1})^+}|g|(T^{a_{r+1}}x) \\ &\geq \alpha n - S_n((|g| + \alpha)1_C)(x) - S_K(|g| + \alpha)(T^{n-K}x) \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à μ sur B et en divisant par $n\mu(B)$, il vient :

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B f - \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{I})\, d\mu = 0 \geq \alpha - \alpha/4 - \alpha\delta - \frac{K}{n}\left(\frac{\|g\|_{L^1}}{\mu(B)} + \alpha\right)$$

vu $\int_C |g|\, d\mu \leq \alpha\mu(B)/4$et $\int_B |g|\, d\mu \leq \|g\|_{L^1}$.

Lorsque $n \to \infty$, on obtient $\alpha \leq 0$, une contradiction qui prouve (7). Cette inégalité appliquée à $-f$ donne la convergence vers 0 des $M_n g$. En revenant à f, on voit :

$$\lim_{n\to\infty} M_n f(x) = E_\mu(f|\mathcal{I}) \quad \mu - \text{p.p.}$$

La convergence presque partout des moyennes ergodiques est donc établie.

On considère maintenant la convergence dans L^p pour $p \in [1, \infty[$ dans le cas où $f \in L^p(\mu)$. Observons d'abord que, dans le cas d'une fonction f bornée, les moyennes $M_n f$, $n \geq 1$, sont uniformément bornées et donc leur convergence dans L^p découle de leur convergence presque partout par le théorème de convergence dominée.

Ensuite, remarquons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction bornée h avec $\|h - f\|_{L^p} \leq \epsilon$, d'après la densité de L^∞ dans L^p. Mais ceci donne :

$$\|M_n h - M_n f\|_{L^p} = \|M_n(h - f)\|_{L^p} \leq \|h - f\|_{L^p} \leq \epsilon$$

pour tout $n \geq 1$. La remarque précédente s'applique et donne $M_n h \to E_\mu(h|\mathcal{I})$ dans $L^p(\mu)$. Mais $\|E_\mu(f|\mathcal{I}) - E_\mu(h|\mathcal{I})\|_{L^p} \leq \|h - f\|_{L^p} \leq \epsilon$. Par conséquent,

$$\|M_n f - E_\mu(f|\mathcal{I})\|_{L^p} \leq \|M_n f - M_n h\|_{L^p} + \|M_n h - E_\mu(h|\mathcal{I})\|_{L^p} + \|E_\mu(h|\mathcal{I}) - E_\mu(f|\mathcal{I})\|_{L^p} \leq 3\epsilon$$

pour tout n assez grand. Finalement $\epsilon > 0$ était arbitrairement petit : la convergence dans L^p est démontrée. □

Exercice 4.3. — Soit (Σ_N, σ, m) le décalage sur N symboles muni de la mesure de Bernoulli uniforme. Montrer que la convergence des moyennes ergodiques n'a pas lieu au sens de la norme $L^\infty(m)$. *Indication :* On pourra considérer l'influence d'un point fixe pourtant de mesure nulle.

4.6. Unique ergodicité

Considérons un système dynamique topologique (X, ϕ). Le théorème 3.22 de Krylov-Bogolioubov montre que $\mathrm{Prob}(\phi) \neq \emptyset$. Il se peut que $\mathrm{Prob}(\phi)$ soit un très gros ensemble : c'est le cas pour (Σ_N, σ_N), pour tout $N \geq 2$ pour lequel l'ensemble des mesures ergodiques et invariantes est non-dénombrable. Il existe toutefois des systèmes intéressants pour lesquels $\mathrm{Prob}(\phi)$ est réduit à un point.

Définition 4.25. — Un système dynamique topologique est dit **uniquement ergodique** s'il possède une unique mesure de probabilité borélienne et invariante.

Il s'agit d'une propriété très forte mais vérifiée par nombre de systèmes naturels, en particulier d'origine algébrique.

Proposition 4.26. — *Toute rotation $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) ergodique pour la mesure de Lebesgue est uniquement ergodique.*

Première démonstration. — La mesure de Lebesgue m sur $\mathbb{S}^1$ est invariante et ergodique. Le théorème de Birkhoff implique que, pour tout $f \in C(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} M_n f(x) = m(f) \tag{8}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{S}^1$. Soit $y \in \mathbb{S}^1$ et $\epsilon > 0$. f est uniformément continue, il existe donc $\delta > 0$ tel que $d(u,v) < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \epsilon$. La rotation étant une isométrie : $d(x,y) < \delta \implies |M_n f(x) - M_n f(y)| < \epsilon$. En prenant un point $x \in B(y, \delta)$ satisfaisant (8), on obtient :

$$m(f) - \epsilon \leq \liminf_{n\to\infty} M_n f(y) \leq \limsup_{n\to\infty} M_n f(y) \leq m(f) + \epsilon$$

d'où (8) pour y. □

La preuve ci-dessus montre que toute isométrie pour laquelle il existe une mesure de probabilité invariante, ergodique et de support total est uniquement ergodique.

Deuxième démonstration. — Soit $\nu \in \mathrm{Prob}(R_\alpha)$. On considère la mesure $\mu := \int_{\mathbb{S}^1} (R_x)_* \nu \, m(dx)$, i.e.,

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{S}^1} (R_x)_* \nu(A) \, m(dx)$$

pour tout mesurable A. On vérifie aisément que μ est bien une mesure de probabilité invariante par R_α. On vérifie tout aussi facilement que μ est invariante par toute rotation. Ceci implique que $\nu = m$ (théorème C.38). Mais la formule ci-dessus implique que m n'est pas extrémale (on peut considérer une partition de $\mathbb{S}^1$ en deux demi-cercles D_1 et D_2 et poser $\nu_i = \int_{D_i} (R_x)_* \nu \, m(dx)$, pour $i = 1, 2$). Mais ceci contredit l'ergodicité de m d'après la proposition 4.20. □

Exercice 4.4. — Montrer qu'un système dynamique topologique défini par une isométrie est uniquement ergodique dès qu'il est topologiquement transitif. La réciproque est-elle vraie ?

L'unicité de la mesure de invariante implique une forte régularité des comportements.

Théorème 4.27. — *Soit (X, ϕ) un système dynamique topologique. Si ϕ est uniquement ergodique alors, pour tout $f \in C(X)$,*

$$\lim_{t\to\infty} M_t f = \int_X f \, d\mu \text{ uniformément.} \tag{9}$$

Réciproquement, si, pour tout $f \in C(X)$, $M_n f$ converge simplement vers une constante, alors ϕ est uniquement ergodique.

Remarque 4.28. — Seule la réciproque utilise le théorème ergodique ponctuel. L'établissement de la convergence uniforme repose sur les techniques entièrement différentes du théorème de Krylov-Bogolioubov.

Démonstration. — La preuve du théorème de Krylov-Bogolioubov montre le fait suivant : si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures de probabilité boréliennes sur X et si $n_k \to \infty$, alors toute valeur d'adhérence pour la topologie * faible de la suite

$$M_{n_k}\mu_k := (1/n_k) \sum_{j=0}^{n_k-1} \phi_*^j(\mu_k)$$

appartient à $\mathrm{Prob}(\phi)$.

Supposons maintenant ϕ uniquement ergodique : $\mathrm{Prob}(\phi) = \{\mu\}$. Si (9) n'a pas lieu pour un certain $f \in C(X)$, c'est qu'il existe $\epsilon_0 > 0$, $n_k \to \infty$ et $x_k \in X$ tels que :

$$|M_{n_k} f(x_k) - \mu(f)| > \epsilon_0.$$

Comme $M_n f(x) = (M_n \delta_x)(f)$, ceci implique que la suite $M_{n_k}\delta_{x_k}$ n'admet pas μ comme valeur d'adhérence. Or $\mathrm{Prob}(X)$ est un espace compact métrisable donc la suite précédente doit admettre une valeur d'adhérence, distincte de μ. Ceci contredit l'unique ergodicité d'après la remarque formulée au début de cette preuve.

Pour la réciproque, il suffit d'observer que, d'après le théorème ergodique ponctuel, pour toute mesure $\mu \in \mathrm{Prob}(\phi)$, il existe un point $x \in X$ tel que $M_n f(x)$ converge vers $\mu(f)$, pour tout $f \in C(X)$. L'hypothèse selon laquelle $M_n f(x)$ a une limite indépendante de x, implique que $\mu(f)$ est également indépendante de $\mu \in \mathrm{Prob}(\phi)$. Ceci ayant lui pour tout $f \in C(X)$, on obtient l'unique ergodicité. □

4.7. Exercices

Exercice 4.5. — Montrer que le flot identité n'est ergodique que dans un seul cas (à isomorphisme près).

Exercice 4.6. — On suppose que l'évolution d'un gaz est donné par une équation différentielle ordinaire $x'(t) = F(x(t))$ avec $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1. Montrer qu'il est impossible que $\mathbb{R}^N$ se réduise à une seule trajectoire, comme Boltzmann le proposait dans une première tentative de définition de l'ergodicité.

Exercice 4.7. — Montrer que la définition 4.11 détermine bien un système dynamique (Y, ν, ψ) probabiliste en temps $\mathbb{R}$. On pourra commencer par montrer que $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est bien un flot.

Exercice 4.8. — Montrer que pour $\phi(x) = \{2x\}$ sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue normalisée, U est injective mais non bijective. Montrer que $U^*(f)(x) = (f(x/2) + f((x + 1)/2)/2$ et calculer U^*U et UU^*.

Montrer que si ϕ est inversible, d'inverse mesurable, U est inversible avec $U^{-1} = U^*$ et donner une preuve simplifiée d théorème ergodique de von Neumann.

Exercice 4.9. — Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On rappelle que $R_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z$ est une transformation topologiquent minimale sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Montrer qu'il existe $n_k \to \infty$ tels que $\|R_{n_k} - \mathrm{Id}\| \to 0$. En déduire que $(m_{\mathbb{S}^1}, R_\alpha)$ n'est pas mélangeante : il existe deux parties mesurables $A, B \in \mathcal{X}$ telles que $\mu(A \cap \phi^{-k}B) \not\to \mu(A)\mu(B)$.

Exercice 4.10. — Montrer que si un système dynamique probabiliste possède une mesure de probabilité invariante et ergodique de support total (i.e., tout ouvert non-vide est de mesure non-nulle), alors le système est topologiquement transitif.

Exercice 4.11. — Montrer que le théorème ergodique de Birkhoff ne s'étend pas à $L^\infty(\mu)$: l'hypothèse $f \in L^\infty(\mu)$ ne suffit pas à garantir la convergence au sens $L^\infty(\mu)$ des moyennes ergodiques $M_n f$.

Exercice 4.12. — Montrer qu'un système dynamique topologique uniquement ergodique ayant une unique mesure invariante de support total est minimal.

Exercice 4.13. — Trouver une fonction constante par morceaux $f : [0, 1] \to \{0, \dots, 9\}$ et un nombre α tels que $f(\{n\alpha\})$ soit le n-ième chiffre de 2^n. Appliquer un théorème ergodique bien choisi pour analyser la quantité suivante dont on veillera à la définition et l'existence pour calculer la proportion asymptotique d'entiers n tels que l'écriture en base 10 de l'entier 2^n commence par 7. Généraliser.

Exercice 4.14. — Déduire du théorème de Birkhoff la loi forte des grands nombres de la théorie des probabilités : si $X_0, X_1, \dots$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées vérifiant $\mathbb{E}(X_0) < \infty$, alors avec probabilité 1 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}) = \mathbb{E}(X_0).$$

Indication : on pourra considérer le produit infini dénombrable $(\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mu_X)^{\mathbb{N}}$ avec μ_X la loi de X_0 muni du décalage $\sigma((X_n)_{n\geq 0}) = (X_{n+1})_{n\geq 0}$ et montrer l'ergodicité de ce système.

Exercice 4.15. — Montrer que $S : (x, y) \mapsto (x+\alpha, x+y)$ est uniquement ergodique. En déduire une caractérisation des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que, pour tout intervalle J,

$$\frac{1}{n}\#\{0 \leq k < n : P(n) \in J\} \to |J|.$$

(on dit la suite des valeurs $P(n)$ *équidistribuée*).

PARTIE II

GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Cette partie est une introduction à la géométrie hyperbolique en dimension 2. Nous définirons d'abord le plan hyperbolique et son espace tangent. Nous verrons que les isométries de cet espace sont données par une action d'un groupe matriciel dont nous étudierons quelques propriétés. Puis nous définirons les flots géodésiques et horicycliques sur ce plan. Nous verrons enfin comment on peut construire à partir de ce plan une autre surface hyperbolique, cette fois d'aire finie : la surface modulaire.

Notre présentation se limite au contexte nécessaire pour l'étude dynamique et nous renvoyons à d'autres ouvrages pour des développements complémentaires comme [**4**] ou plus approfondis comme [**9**] sur les espaces modulaires et leurs applications en arithmétique ou [**3**] sur les liens entre surfaces hyperboliques et sous-groupes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

CHAPITRE 5

LE PLAN HYPERBOLIQUE

Nous donnons une construction explicite et différentielle du plan hyperbolique en utilisant (une version simplifiée de) la notion de structure riemiannienne[1][2]. Nous définirons ainsi une notion de longueur des courbes, puis une distance basée sur la recherche de la courbe la plus courte joignant deux points, ce qui amènera la notion-clé de géodésique. Nous montrerons enfin comment le plan hyperbolique est lié à un groupe matriciel. Cette algébrisation permettra par la suite des calculs explicites. Nous ne suivons donc pas du tout le développement historique inspiré par des questions d'axiomatique.[3]

5.1. Structures riemaniennes sur un ouvert

Nous allons définir le plan hyperbolique comme une "déformation" de l'espace eucliden. Cette déformation se traduit par le formalisme suivant où la longueur d'un vecteur peut dépendre de son point d'attache :

Définition 5.1. — Une **structure riemannienne** sur un ouvert U d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ réel ou complexe de dimension $d < \infty$ est la donnée en chaque point $p \in U$ d'une norme sur E, $\|v\|_p$, définie par un produit scalaire ou hermitien défini positif sur E dépendant de façon C^1 de p : pour tout $p \in U$, il existe

---

[1] Bernhard Riemann (1826-1866).

[2] Le lecteur intéressé par cette approche de la géométrie, aujourd'hui fondamentale en mathématique, pourra se reporter à [**6, 11, 7**]).

[3] Cette géométrie non-euclidienne a en effet été découverte vers 1825, indépendamment par Nicolaï Lobatchevksi (1792–1856) et János Bolyai (1802-1860) au cours de leurs investigations du cinquième postulat d'Euclide : par un point extérieur à une droite passe exactement une droite n'intersectant pas la droite donnée. La version hyperbolique du cinquième postulat est : par tout point extérieur à une droite donnée passent au moins deux droites n'intersectant pas la droite donnée. C'est Eugenio Beltrami (1835-1900) qui a fait le lien avec la géométrie riemannienne en 1868.

un voisinage V de p dans U et une application de classe C^1, vérifiant $\phi : V \times E \to \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$), $\phi_p : E \to E$ est un isomorphisme linéaire et $\|u\|_p = \|\phi_x(u)\|_E$.

On dira aussi que $U \subset E$ est un *ouvert riemannien*, en sous-entendant l'espace vectoriel normé E et la famille de normes $(\|\cdot\|_p)_{p\in U}$.

Remarque 5.2. — Le cadre naturel de ces notions est celui des *variétés riemanniennes* dont les ouverts de $\mathbb{R}^d$ ne sont que des cas un peu trop particuliers du point de vue du géomètre (voir l'appendice C.4).

Pour en déduire une notion de distance, on va considérer des chemins ou courbes. Rappelons donc la définition de ce concept de géométrie différentielle.

Définition 5.3. — Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Une **courbe paramétrée (régulière)**[(4)] sur U est une application $\gamma : I \to U$ de classe C^1 sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas. Deux courbes paramétrées $\gamma_i : I_i \to U$, $i = 1, 2$, sont géométriquement équivalentes s'il existe un difféomorphisme croissant $h : I_1 \to I_2$ tel que $\gamma_2 \circ h = \gamma_1$. Une **courbe (orientée)** sur U est une courbe paramétrée à équivalence géométrique près. La *trace* d'une courbe est l'ensemble $\gamma(I) \subset U$.

Un **segment d'une courbe paramétrée** $\gamma : I \to U$ est une restriction $\gamma|J$ à un sous-intervalle quelconque, non-trivial, de I. On définit de même un segment de courbe.

Remarque 5.4. — L'exercice 5.2 explique pourquoi on ne permet pas l'annulation du vecteur dérivée $\gamma'(t)$ d'une courbe paramétrée.

On peut maintenant définir la longueur d'une courbe puis la distance entre deux points.

Définition 5.5. — Soit U un ouvert riemannien. La **longueur d'une courbe** $\gamma : I \to U$ est :

$$\ell_U(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt \in [0, \infty].$$

Dans le reste de cette section, U, E et $\|\cdot\|_p$, $p \in U$, sont comme ci-dessus.

Lemme 5.6. — *La longueur d'une courbe sur un ouvert riemannien est bien définie et indépendante de sa paramétrisation.*

Démonstration. — Tout d'abord, $t \mapsto \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$ est une fonction continue et positive, l'intégrale définissant la longueur est donc bien définie (peut-être infinie). Il reste à montrer l'invariance : c'est une conséquence directe de la formule du changement de

(4) Rappelons que ces parenthèses signifient que, sauf mention contraire, l'expression *courbe paramétrée* désigne dans ce cours une courbe paramétrée *régulière*.

variable. Si $h : I \to J$ est un difféomorphisme entre deux intervalles et $\gamma : J \to U$ est une courbe paramétrée, alors, en posant $s = h(t)$:

$$\begin{aligned}\ell(\gamma \circ h) &= \int_I \|(\gamma \circ h)'(t)\|_{\gamma\circ h(t)}\, dt = \int_I |\gamma'(h(t))\|_{\gamma(h(t))}|h'(t)|\, dt \\ &= \int_J \|\gamma'(s)|\|_{\gamma(s)}\, ds = \ell(\gamma).\end{aligned}$$

□

Définition 5.7. — La **distance géodésique** sur un ouvert riemannien U est définie par :

$$d_U(p,q) = \inf\{\ell_U(\gamma) : \gamma : [0,1] \to U \text{ tel que } \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\}.$$

Lemme 5.8. — *Soit $U \subset E$ un ouvert riemannien. Supposons U convexe. Alors la fonction $d_U : U \times U \to [0,\infty)$ est une distance. Cette distance est compatible avec la topologie de U.*

Démonstration. — Vu la continuité des normes $\|\cdot\|_p$ par rapport à $p \in U$, il existe alors deux fonctions continues $\phi_-, \phi_+ : U \to]0,\infty[$ telles que $\phi_-(p)\|u\| \leq \|u\|_p \leq \phi_+(p)\|u\|$.

Soit $x, y \in U$ et $[x,y]$ l'intervalle paramétré joignant x à y. $[x,y]$ est une partie compacte de U, vu l'hypothèse de convexité, donc ϕ_+ y est borné et $d_U(x,y) \leq \ell_U([x,y]) < \infty$. Comme $\phi_-(z) > 1/2\phi_-(z_0) > 0$ sur un voisinage de tout $z_0 \in U$, $d_U(x,y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$. Finalement l'inégalité triangulaire entre $x_1, x_2, x_3 \in U$ s'obtient en prenant pour tout $\epsilon > 0$, deux courbes γ_1, γ_2 sur U avec $\ell_U(\gamma_i) < d_U(x_i, x_{i+1}) + \epsilon$, $i = 1, 2$, et en considérant une courbe paramétrée $\gamma : [0,1] \to U$ avec $\gamma|[0,1/3] \equiv \gamma_1$, $\gamma|[2/3,1] \equiv \gamma_2$, et $\ell(\gamma|[1/3,2/3]) < \epsilon$. On a en effet : $\gamma : d_U(x_1,x_3) \leq \ell_U(\gamma) < d_U(x_1,x_2) + d_U(x_2,x_3) + 3\epsilon$. On conclut la preuve du premier point en faisant $\epsilon \to 0$.

La compatibilité avec la topologie se vérifie en observant que tout point $x \in U$ admet un voisinage V et une constante $K < \infty$ tels que $K^{-1}\|x-y\| \leq d_U(x,y) \leq K\|x-y\|$ pour tout $y \in V$. En effet ceci implique $B_E(x, K^{-1}\epsilon) \subset B_U(x,\epsilon)$ et $B_U(x, K^{-1}\epsilon) \subset B_E(x,\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, i.e., les deux distances induisent la même topologie. □

Etant donnée une catégorie d'objets, on définit lesquels sont "les mêmes" pour la notion considérée :

Définition 5.9. — Une **isométrie (riemannienne)** est un difféomorphisme $\phi : U \to V$ de classe C^1 entre deux ouverts riemanniens U et V tel que $\|\phi'(x).v\|_{\phi(x)} = \|v\|_x$ pour tous $x \in U$, $v \in E$. Les ouverts sont alors dits *isométriques*.

Lemme 5.10. — *Soit $\phi : U \to V$ une application C^1 et surjective entre deux ouverts riemanniens $U \subset E$, $V \subset F$. ϕ est une isométrie si et seulement si $d_U(x,y) = d_V(\phi(x),\phi(y))$ pour tous $x \in U$, $y \in V$.*

Démonstration. — Si ϕ est une isométrie, alors, pour toute courbe γ, $\ell_V(\phi \circ \gamma) = \ell_U(\gamma)$, ce qui entraîne la préservation de la distance.

Réciproquement, supposons $\phi : U \to V$ préservant la distance. Remarquons que $\lim_{y\to x} d_U(x,y)/\ell_U([x,y]) = 1$ et $\lim_{y\to x} \|y-x\|_x/\ell_U([x,y]) = 1$ par continuité de la structure riemannienne. Donc $\lim_{y\to x} d_U(x,y)/\|y-x\|_x = 1$ et $\|v\|_x = \lim_{t\to 0} d_U(x, x+tv)/|t|$. ϕ étant différentiable, on obtient

$$\begin{aligned}\|\phi'(z).v\|_{\phi(x)} &= \lim_{t\to 0} d_V(\phi(x), x + t\phi'(x).v)/|t| = \lim_{t\to 0} d_V(\phi(x), \phi(x+tv))/|t| \\ &= \lim_{t\to 0} d_U(x, x+tv)/|t| = \|v\|_x.\end{aligned}$$

En particulier, $\phi'(x) : E \to F$ est une application linéaire inversible. Le théorème de la fonction inverse donne que ϕ est localement inversible, d'inverse C^1. Globalement, ϕ est surjective par hypothèse, injective car elle préserve les distances. ϕ est bien une isométrie. □

Définition 5.11. — Une **géodésique** de U est une courbe $\gamma : I \to U$ vérifiant la propriété suivante : pour tout sous-intervalle compact $[a,b] \subset I$, la longueur $\ell_U(\gamma|[a,b])$ coincide avec la distance entre ses extrémités, $d_U(\gamma(a), \gamma(b))$. Elle est dite **complète** si

$$\lim_{t\to \sup I} d_U(\gamma(t), 0) = \lim_{t\to \inf I} d_U(\gamma(t), 0) = \infty$$

avec 0 un point quelconque de U.

Remarque 5.12. — L'exercice 5.3 constate en quel sens la notion de géodésique généralise la notion de droite ou de segment de droite et montre que l'hypothèse de convexité peut être remplacée par la connexité dans le lemme 5.8 et ses applications. L'exercice 5.6 montre que deux points d'un ouvert riemannien ne sont pas nécessairement joints par une géodésique.

On définit une **géométrie** comme une classe d'équivalence, à isométrie près, d'ouverts riemanniens. Chacun de ces ouverts est une *réalisation* de cette géométrie. La géométrie euclidienne en dimension n est ainsi l'ensemble des ouverts isométriques à $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique : $\|(x_1,\dots,x_n)\|_z^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $z \in \mathbb{R}^n$.

Nous pouvons enfin définir la géométrie du le plan hyperbolique,. Nous travaillerons avec l'une de ses réalisations, due à Beltrami[5] (mais nommée d'après Poincaré[6] !).

Définition 5.13. — Le **demi-plan de Poincaré** est l'ouvert $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ de $\mathbb{C}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$) muni de la structure riemannienne définie par la famille de normes :

$$|u|_z := |u|/\Im(z) \text{ pour tout vecteur } u \in \mathbb{C}, \text{ tout point } z \in \mathbb{H}.$$

[5] Eugenio Beltrami (1835-1900).
[6] Henri Poincaré (1854-1912).

Les notions de longueur de courbe, de distance et de géodésiques définies par cette structure riemannienne sont qualifiées d'hyperboliques.

Remarque 5.14. — L'exercice 5.7 examine d'autres réalisations utiles du plan hyperbolique. Choisir une réalisation c'est essentiellement choisir des coordonnées : les propriétés géométriques n'en dépendent pas, mais les calculs peuvent y être plus ou moins agréables !

5.2. Action du groupe linéaire sur $\mathbb{H}$

Les isométries sont un outil privilégié pour étudier une géométrie. Dans cette section, nous allons déterminer le groupe des isométries de $\mathbb{H}$ en suivant une approche algébrique. Nous partirons de transformations du demi-plan de Poincaré définies par une formule très simple, étudierons le groupe qu'elles forment en le reliant à des groupes matriciels et finalement montrerons que ce sont les seules isométries à renversement de l'orientation près. Le formalisme des actions de groupe permettra de donner une description matricielle de $\mathbb{H}$.

Rappelons qu'une *action d'un groupe* G sur un ensemble X est la donnée d'une application $\rho : G \to \mathrm{Bij}(X)$ où Bij(X) est l'ensemble des bijections de X et telle que $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$.[(7)]

Définition 5.15. — Le **groupe linéaire** (en dimension 2) est l'ensemble des matrices 2×2 réelles et inversibles muni du produit matriciel :

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc \neq 0 \right\}$$

où $ad - bc$ est bien sûr le déterminant $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Définition 5.16. — Le **groupe linéaire spécial** (en dimension 2) est le sous-groupe : $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$. Le **groupe linéaire special projectif** (en dimension 2) est l'ensemble de ces matrices de déterminant 1 à un facteur réel non-nul près. Formellement, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) := \{[A] : A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\}$, où $[A] := \{A, -A\}$ est la classe d'équivalence de A dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, muni du produit induit : $[A].[B] = [AB]$. On vérifie que c'est encore un groupe.

Le **groupe (linéaire) spécial orthogonal** $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ est formé des matrices réelles 2×2 de déterminant 1 et préservant la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Le **groupe (linéaire) spécial orthogonal projectif** $\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R})$ est formé des classes d'équivalence projective de ces matrices.

---

(7) Dans le cours [**8**], vous avez pu considérer le cas des *représentations linéaires* : X est un espace vectoriel et où ρ est à valeurs dans $\mathrm{GL}(X)$, l'ensemble des automorphismes linéaires de X. Voir aussi le chapitre 2.

Proposition 5.17. — *Le groupe linéaire spécial projectif* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *agit sur* $\mathbb{H}$ *selon la formule :*

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right].z = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{10}$$

De plus cette action est

1. *fidèle, i.e., si* $z \mapsto [A].z$ *est l'identité sur* $\mathbb{H}$ *alors* $[A] = [\mathrm{Id}]$ *;*
2. *isométrique, i.e., toutes les transformations* $z \mapsto [A].z$ *sont des isométries de* $\mathbb{H}$ *;*
3. *transitive, i.e.,* $\mathbb{H}$ *est une seule orbite :* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}).i := \{[A].i : [A] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\} = \mathbb{H}$ *;*
4. *de stabilisateur* $\mathrm{Stab}(i) = \mathrm{PSO}(2,\mathbb{R}) := \{[R_\theta] : 0 \leq \theta < \pi\}$ *avec* $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Remarque 5.18. — Les stabilisateurs d'une une action transitive sont deux-à-deux conjugués.

On écrira aussi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = (az+b)/(cz+d)$ pour une matrice quelconque de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

Les transformations de $\mathbb{H}$ apparaissant ci-dessus méritent un nom :

Définition 5.19. — L'ensemble des **transformations de Möbius (de** $\mathbb{H}$**)**[8] est :

$$\mathcal{M}(\mathbb{H}) := \left\{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : \exists a,b,c,d \in \mathbb{R}\ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ et } ad-bc = 1 \right\}.$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que la formule $(az+b)/(cz+d)$ est bien définie sur $\mathbb{H}$, son pôle éventuel étant nécessairement sur l'axe réel. Ensuite la transformation $z \mapsto A.z$ sur $\mathbb{H}$ ne dépend que de la classe d'équivalence de A, i.e., $A.z = (\lambda A).z$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Vérifions ensuite que toute transformation de Möbius f préserve $\mathbb{H}$. On calcule :

$$f(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{[ac|z|^2 + (ad+bc)\Re(z) + bd] + i(ad-bc)\Im(z)}{|cz+d|^2}\Im(z), \tag{11}$$

d'où

$$\Im(f(z)) = \frac{1}{|cz+d|^2}\Im(z), \tag{12}$$

et $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$.

[8] August Ferdinand Möbius (1790-1868).

La propriété de morphisme exigée d'une action de groupe se vérifie également par un calcul direct :

(13)
$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z \right) = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} = \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) .z.$$

Dès lors, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .z = z$ suffit à montrer que chaque transformation $z \mapsto [A].z$ est une bijection de $\mathbb{H}$. On a donc bien une action.

Pour vérifier que toutes les transformations de Möbius f sont des isométries, il suffit de montrer que, pour toute courbe $\gamma : I \to \mathbb{H}$:

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = \ell_{\mathbb{H}}(f \circ \gamma).$$

En se servant de (12) et de

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}, \tag{14}$$

on obtient

$$|f'(z)v|_{f(z)} = |f'(z)| \frac{|v|}{\Im(f(z))} = \frac{1}{|cz + d|^2} |v| \frac{|cz + d|^2}{\Im(z)} = |v|_z \tag{15}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}}(f \circ \gamma) &= \int_I |(f \circ \gamma)'(t)|_{f \circ \gamma(t)} \, dt = \int_I |\gamma'(t)|_{\gamma(t)} \, dt \\ &= \ell_{\mathbb{H}}(\gamma), \end{aligned}$$

comme requis.

La transitivité découle de la formule suivante : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{y}} \begin{pmatrix} x & -y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] .i = x + iy.$$

Le stabilisateur de i est par définition $\mathrm{Stab}(i) := \{[A] \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) : [A].i = i\}$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il vient :

$$i = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Vu $ad - bc = 1$,

$$[A] \in \mathrm{Stab}(i) \iff c^2 + d^2 = 1 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \; (a, b) = \lambda(d, -c).$$

Mais $\det A = \lambda(d^2 + c^2)$ donc $\lambda = 1$. D'où $c = \epsilon \sin\theta$ et $d = \epsilon \cos\theta$ pour un $\theta \in [0, \pi[$ et $\epsilon = \pm 1$. La réciproque est claire. On obtient donc $\mathrm{Stab}(i) = \{[R_\theta] : \theta \in [0, \pi[\}$, comme annoncé.

Il reste à vérifier la fidélité : soit $[A] \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ avec $[A].z = z$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. Le cas $z = i$ donne : $[A] = [R_\theta]$ avec $\theta \in [0, \pi[$. On doit avoir $([A].z)' = 1$, mais (14) donne $([A].z)' = 1/(\sin\theta z + \cos\theta)^2$. On obtient donc $\theta = 0$ et $[A] = [\mathrm{Id}]$. □

Corollaire 5.20. — *L'action* (10) *de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{H}$ *permet d'identifier* $\mathbb{H}$ *à* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R}) \equiv \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$*, une fois choisi un point de base* $p_0 \in \mathbb{H}$*. Pour le choix usuel* $p_0 := i \in \mathbb{H}$*, l'identification est fournie par :*

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R}) \mapsto \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right].p_0 = \frac{ai+b}{ci+d} \in \mathbb{H}.$$

Démonstration. — $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R})$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ par l'intermédiaire de $\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R}).\{+A,-A\} = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}).\{A\}$.

Si $[O] \in \mathrm{PSO}(2,\mathbb{R})$ alors $[O].q_0 = q_0$ et donc $[AO].q_0 = a.q_0$ pour tout $[A] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. La formule $a.q_0$ est donc bien définie pour $a \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R})$. Cette application est surjective car $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit transitivement. Elle est injective car $[A].q_0 = [B].q_0$ implique $[B^{-1}A].q_0 = q_0$ donc $[B^{-1}A] \in \mathrm{Stab}(q_0) = \mathrm{PSO}(2,\mathbb{R})$. □

5.3. Propriétés géométriques des transformations de Möbius

L'angle (orienté) entre deux courbes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ se définit sans difficulté :

Définition 5.21. — Une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ **préserve l'orientation** si elle respecte l'orientation de toute base[(9)] sa matrice dans la base $(1,i)$ est de déterminant strictement positif. Elle est **conforme** si c'est une similitude[(10)]

Une application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ de classe C^1 préserve l'orientation, resp. est conforme, si sa différentielle satisfait cette propriété en tout point.

Lemme 5.22. — *Les transformations de Möbius sont des transformations conformes préservant l'orientation. Elles coincident avec les compositions de translations réelles, de dilatations en l'origine et d'inversion* $i : z \mapsto -1/z$*.*

Démonstration. — Par définition, toute transformation de Möbius f est de la forme $f(z) := (az+b)/(cz+d)$ avec a,b,c,d réels, $ad-bc \neq 0$. f est holomorphe, sans point critique donc conforme.

On distingue deux cas. Si $c \neq 0$,

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2 z + cd} = \tau \circ H \circ i \circ \tau'(z)$$

avec τ, τ' des translations réelles, H une homothétie de facteur $1/c^2$ et de centre 0 et $i(z) = -1/z$, une inversion de centre 0 préservant $\mathbb{H}$. Si $c = 0$, $ad \neq 0$ et $f(z) = (a/d)z + (b/d) = \tau \circ H$ avec H une homothétie de facteur a/d et τ une translation par b/d. □

(9) Une application linéaire préserve l'orientation si et seulement si
(10) C'est-à-dire une isométrie euclidienne à un facteur près.

Proposition 5.23. — *Toute isométrie du plan hyperbolique est une transformations de Möbius ou bien la composition d'une transformation de Möbius et de la réflexion $z \mapsto -\bar{z}$. En particulier, l'ensemble des isométries du plan hyperbolique préservant l'orientation coincide avec l'ensemble des transformations de Möbius.*

On rappelle le lemme de Schwarz[(11)]

Théorème 5.24 **(Schwarz)**. — *Soit $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une bijection. Si h est holomorphe alors*

$$h(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

L'exercice 5.9 en indique une démonstration, reprise de la feuille 8 du cours [**13**]. Il s'agit d'un exercice sur les fonctions holomorphes, dont le résultat peut être admis, sans gêne pour la compréhension de ce cours.

Démonstration de la proposition. — On sait qu'une transformation de Möbius est une isométrie préservant l'orientation. Il faut maintenant montrer la réciproque.

Observons d'abord que $\phi(z) := \frac{z-i}{z+i}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, d'inverse $\psi(w) := i\frac{1+w}{1-w}$ holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. On a : $\phi(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$ car $\Im(z) > 0$ implique $|z-i| < |z+i|$. On a aussi $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$ car $\Im(\psi(\mathbb{D})) = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} > 0$. Donc $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ est une bijection.

Soit $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ une isométrie. Elle est de classe C^1 par définition. Sa différentielle préserve la structure riemannienne : $|D_z h.v|_{h(z)} = |v|_z$, i.e., $|D_z h.v|/\Im(h(z)) = |v|/\Im(z)$, pour tous $z \in \mathbb{H}$, $v \in \mathbb{C}$. Il s'ensuit que $D_z h$ est une similitude de $\mathbb{C}$ en tout $z \in \mathbb{H}$: h est dérivable au sens complexe en tout point de $\mathbb{H}$. h est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ (i.e., de classe C^1 au sens complexe). Le même raisonnement s'applique à h^{-1} : h est biholomorphe.

Maintenant $g := \phi \circ h \circ \phi^{-1}$ est une bijection biholomorphe de $\mathbb{D}$ sur lui-même. On peut lui appliquer le lemme de Schwarz : $g(z) = \frac{\alpha z+\bar{\beta}}{\beta z+\bar{\alpha}}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2$. On a donc : $h(z) = \phi^{-1} \circ g \circ \phi(z) = [C].z$ avec $C \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, l'une des deux matrices vérifiant

$$[C] = \left[\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \right].$$

Les déterminants des trois matrices dans le membre de droite sont : $2i$, 1, et $2i$. On peut donc prendre

$$C = \begin{pmatrix} \Re(\alpha+\beta) & \Im(\alpha+\beta) \\ -\Im(\alpha-\beta) & \Re(\alpha-\beta) \end{pmatrix}.$$

(11) Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921).

Le déterminant de la matrice entre crochets à droite vaut $\det \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. On peut donc prendre $C = \begin{pmatrix} \Re(\alpha+\beta) & \Im(\alpha+\beta) \\ -\Im(\alpha-\beta) & \Re(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$ avec $C \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}, 2)$. Donc g est bien une transformation de Möbius.

Pour traiter le cas où l'orientation n'est pas préservée, on introduit $s : z \mapsto -\bar{z}$, la réflexion par rapport à la droite $\Re(z) = 0$. C'est une involution de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ inversant l'orientation. D'une part, toute composition d'une transformation de Möbius et de s est une isométrie inversant l'orientation. D'autre part, si g est une isométrie de $\mathbb{H}$ ne préservant pas l'orientation alors $g \circ s$ la préserve et doit donc être une transformation de Möbius mais $g = (g \circ s) \circ s$. □

Contrairement aux isométries euclidiennes, les transformations de Möbius ne préservent pas la classe des droites mais une classe plus large.

Définition 5.25. — Un **cercle généralisé** de $\mathbb{H}$ est l'intersection d'un cercle euclidien ou d'une droite euclidienne avec $\mathbb{H}$.

Proposition 5.26. — *Les transformations de Möbius préservent la classe des cercles généralisés.*

Ceci se montre par un calcul et une discussion élémentaire, à faire dans l'exercice 5.8.

Lemme 5.27. — *Pour tout point $z \in \mathbb{H}$, il existe une famille de transformations de Möbius $(f_t)_{t \in \mathbb{S}^1}$ fixant z et telle que, pour tout point w assez proche de z, $f_t(w)$ décrit une courbe entourant z et disjointe de z.*

Démonstration. — Il suffit d'obtenir une telle famille f_t pour $z = i$: la transitivité de l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ donne une transformation de Möbius h telle que $h(z) = i$ et on considère la famille $h^{-1} \circ f_t \circ h$.

Chaque $k_\theta(z) := \frac{\cos\theta z - \sin\theta}{\sin\theta z + \cos\theta}$ est une transformation de Möbius. Elle fixe i. On a : $k'_\theta(z) = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(\sin\theta z + \cos\theta)^2}$ donc $k'_\theta(i) = e^{-2i\theta}$. Pour $|\epsilon| > 0$ assez petit, quand θ parcourt $[0, \pi[$, $k_\theta(i+\epsilon)$ parcourt une courbe fermée autour de i et évitant i. □

Pour énoncer commodément le lemme suivant, on étend les transformations de Möbius en des bijections de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur lui-même de la façon (standard) suivante. Soit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$. On pose :

$$\begin{cases} f(-d/c) = \infty \text{ et } f(\infty) = a/c & \text{si } c \neq 0 \\ f(\infty) = \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 5.28. — $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *agit sur* $\Delta^2 := \{(x, x') \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2 : x \neq x'\}$ *selon :*

$$[A].(x, x') = ([A].x, [A].x')$$

et cette action est transitive.

La preuve est un simple calcul constituant l'exercice 5.10.

5.4. Fibré unitaire tangent

On a vu que $\mathbb{H}$ s'identifie au quotient de groupes $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R})$ (qui n'est pas un groupe). Autrement dit, il "manque" un cercle à $\mathbb{H}$ pour pouvoir l'identifier au groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Ceci fournit une motivation algébrique à la définition suivante, par ailleurs totalement naturelle du point de vue géométrique :

Définition 5.29. — Le **fibré unitaire tangent**[12] $T^1\mathbb{H}$ est :

$$T^1\mathbb{H} := \{(z,v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C} : |v|_z = 1\}.$$

On munit $T^1\mathbb{H}$ de la distance :

$$d((x,v),(y,w))^2 := d_{\mathbb{H}}(x,y)^2 + \inf_{e^{i\theta}=v, e^{i\vartheta}=w} |\theta - \vartheta|^2.$$

Remarque 5.30. — Prenons le temps de la réflexion pour cette définition simple mais fondamentale.

(i) On doit penser à chaque élément $(z,v) \in T^1\mathbb{H}$ comme étant un vecteur unitaire v au-dessus d'un point bien défini z (de même que la structure riemannienne définit une norme dépendant de ce point z). En géométrie différentielle, le fibré tangent (unitaire) d'une variété M est précisément une variété formée des vecteurs tangents (unitaires) en chaque point de M. $T^1\mathbb{H}$ coïncide bien avec cette notion générale.

(ii) La définition ci-dessus fait de $T^1\mathbb{H}$ une *sous-variété*[13] de dimension 3 de l'espace $\mathbb{H} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$. En particulier, il existe une notion de différentiabilité des applications définies sur $T^1\mathbb{H}$ ou à valeurs dans $T^1\mathbb{H}$ (voir l'appendice).

(iii) La distance choisie correspond à la vision de $T^1\mathbb{H}$ comme l'image de $\mathbb{H}\times\mathbb{R}$ selon $(z,\theta) \mapsto (z, e^{i\theta})$. Ceci donne des coordonnées "locales" et permet de définir la **différentiabilité** des fonctions définies sur $T^1\mathbb{H}$ et/ou à valeurs dans $T^1\mathbb{H}$. Ceux qui éprouvent le besoin d'une définition précise pourront consulter l'appendice.

Proposition 5.31. — *Le groupe linéaire spécial projectif* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *agit sur* $T^1\mathbb{H}$ *selon la formule :*

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right].(z,v) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{1}{(cz+d)^2}v\right). \tag{16}$$

Cette action est

1. *transitive ;*
2. *libre, i.e.,* $\mathrm{Stab}(z,v) = \{[\mathrm{Id}]\}$ *pour tout* $(z,v) \in T^1\mathbb{H}$.

[12] En géométrie différentielle, un *fibré tangent* est une variété définie à partir de l'union des espaces tangents en chaque point d'une première variété (voir par exemple [**6**]).
[13] Voir par exemple [**27**].

Démonstration. — On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Pour montrer qu'on a bien une action, il suffit de compléter la proposition 5.17 en vérifiant :
(1) $|1/(cz+d)^2 v|_{A.z} = |v|_z = 1$: ceci découle de (15) et montre que l'action envoie bien $T^1\mathbb{H}$ dans lui-même.
(2) la propriété de morphisme se vérifie en calculant la dérivée de $z \mapsto [A'A].z$ d'une part comme dérivée d'une composition, d'autre part en utilisant la formule (13). L'égalité des deux donne, en écrivant $A'A =: \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}[A'].([A].(z,v)) &= ([A'].([A].z), 1/(c'z+d')^2.1/(cz+d)^2 v)) \\ &= ([A'A].z, 1/(c''z+d'')^2 v) = [A'A].(z,v).\end{aligned}$$

(3) Enfin : $[\mathrm{Id}].(z,v) = (z,v)$.

On a donc bien une action sur $T^1\mathbb{H}$.

L'action est libre si et seulement si le stabilisateur $\mathrm{Stab}(q_0)$ d'un point quelconque est trivial. Prenons $q = (i,i)$. C'est l'ensemble des $[A] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tels que : $[A].q = q$. D'après la proposition 5.17, $[A].i = A$ implique $[A] = [R_\theta]$. Mais $R'_\theta(i) = e^{-2i\theta}$ avec $\theta \in [0,\pi[$ donc $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ d'où $[A] = [\mathrm{Id}]$.

Pour vérifier la transitivité, on fixe $q_0 := (i,i)$ et on montre que tout $(z,w) \in T^1\mathbb{H}$ s'obtient comme $[A].q$ pour un $[A] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ bien choisi. D'après la proposition 5.17, il existe $B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tel que $[B].i = z$ donc $[B].q_0 = (z, e^{i\alpha}w)$ pour un certain $\alpha \in [0,\pi[$ et donc :

$$[BR_{\alpha/2}].q_0 = [B].(i, e^{-i\alpha}) = (z,w).$$

□

Corollaire 5.32. — *L'action libre de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *sur* $T^1\mathbb{H}$ *permet d'identifier ces deux espaces modulo le choix d'un point de base, par exemple* $q_0 := (i,i)$ *selon*

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \mapsto \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right].q_0 = \left(\frac{ai+b}{ci+d}, \frac{i}{(ci+d)^2}\right).$$

5.5. Géodésiques

On note Δ^+ la demi-droite définie par $t \in \mathbb{R} \mapsto ie^t \in \mathbb{H}$, i.e., la demi-droite imaginaire orientée "vers le haut". On va montrer par un calcul simple que Δ^+ est une géodésique et satisfait plusieurs propriétés d'unicité de plus en plus fortes, puis, en utilisant les isométries hyperboliques, on en déduit une description de toutes les géodésiques du plan.

Lemme 5.33. — Δ^+ *et tous ses segments compacts* $[ix,iy]$ *(*$x,y \in \mathbb{R}_+$*) sont des géodésiques de* $\mathbb{H}$*. De plus* $[ix,iy]$ *est la seule géodésique joignant* ix *à* iy*.*

Démonstration. — Soit $0 < x < y < \infty$ (le cas $0 < y < x < \infty$ est similaire) et $\gamma_0(t) = (1-t)x+ty$ pour $t \in [0,1]$, une paramétrisation de $[ix, iy]$. Posons $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}$ une courbe quelconque joignant ix à iy. On calcule, en posant $\gamma(t) =: (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$:

$$\begin{aligned}\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)|_{\gamma(t)}\, dt = \int_0^d \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2}}{\gamma_2(t)}\, dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt = \log(y/x) \\ &= \ell_{\mathbb{H}}(\gamma^0).\end{aligned}$$

Si γ est une géodésique, alors $\gamma_1'(t) \equiv 0$ et $\gamma_2'(t)$ doit être positif. γ coincide donc avec γ^0 à reparamétrisation près. Ceci appliqué à tout sous-segment montre que $[ix, iy]$ est une géodésique. Ceci prouve aussi l'unicité de la géodésique joignant ix à iy et enfin le caractère géodésique de Δ^+. □

Lemme 5.34. — *Si γ est une géodésique, alors $t \mapsto \Re(\gamma(t))$ est monotone.*

Démonstration. — Si $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \Delta^+$ avec $t_1 \neq t_2$ alors on a deux cas (i) $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ et γ doit être constante sur $[t_1, t_2]$ par définition des géodésiques ; (ii) le sous-intervalle $\gamma([t_1, t_2])$ est une géodésique joignant deux points distincts de Δ^+, donc coincide encore avec $[\gamma(a), \gamma(b)]$ d'après le lemme 5.33 . La partie réelle est donc nulle sur tout intervalle entre deux de ses zéros. Toute translation réelle $z \mapsto z-c$ étant une isométrie, on en déduit que la pré-image de tout réel par $t \mapsto \Re(\gamma(t))$ est un intervalle et donc la monotonie annoncée. □

Lemme 5.35. — *Si γ est une géodésique coupant Δ^+ en deux points distincts alors la courbe γ est un segment (éventuellement infini) de la demi-droite Δ^+ ou de son opposé $-\Delta^+ : t \mapsto ie^{-it}$.*

Démonstration. — Posons $a := \inf\{t \in I : \gamma(t) \in \Delta^+\}$ et $b := \sup\{t \in I : \gamma(t) \in \Delta^+\}$. Par hypothèse, $a < b$ et donc $\gamma([a,b]) = [\gamma(a), \gamma(b)] \subset \Delta^+$. Montrons par l'absurde que $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Supposons par exemple que $a > \inf I$ et $\Re\gamma(\{t < a\}) > 0$. Fixons deux points $c, d \in I$ avec $c < a < d$. On procède comme dans la preuve du lemme 5.27 : on applique une petite "rotation" $\tilde{k}_{-\theta}$ centrée en $\gamma(d) \in \Delta^+$ et définie par une conjugaison évidente à partir de la rotation autour de i : $k_\theta(z) := [R_\theta].z$. On pourra se reporter à la figure 1. On obtient pour θ assez petit et de signe convenable : $\Re(k_{-\theta}(\gamma(c)) > 0$, $\Re(k_{-\theta}(\gamma(a)) < 0$ et $\Re(k_{-\theta}(\gamma(d)) < 0$ contredisant le lemme 5.34. Toute la courbe γ est donc incluse dans Δ^+. Par le lemme 5.34, γ est un segment de Δ^+. □

Lemme 5.36. — *Toute géodésique passant par i se prolonge en une géodésique complète. Celles-ci sont exactement les courbes deux-à-deux distinctes $\Gamma_{i,\theta} : t \in \mathbb{R} \mapsto k_\theta(ie^t)$, $\theta \in [0, \pi[$, où $k_\theta(z) := \frac{\cos\theta z - \sin\theta}{\sin\theta z + \cos\theta}$. Le vecteur tangent unitaire en $i = \Gamma_{i,\theta}(0)$ de $\Gamma_{i,\theta}$ est $\Gamma_{i,\theta}'(0) = e^{-2i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$.*

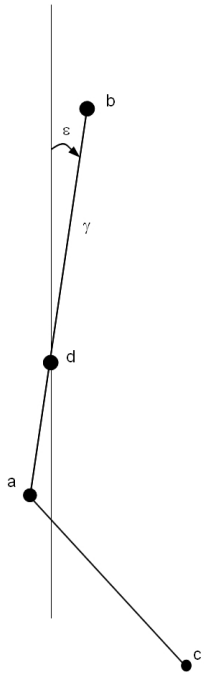


FIGURE 1. Géodésique γ comprenant un segment de droite vertical $[\gamma(a), \gamma(b)]$, après une rotation autour de $\gamma(d)$, d'angle ϵ petit laissant $\gamma(c)$ du même coté de Δ^+ et poussant $\gamma(a)$ de l'autre côté.

Démonstration. — Chaque $k_\theta(z)$ est une transformation de Möbius donc une isométrie. Elle fixe i. Δ^+ étant une géodésique complète, son image $\Gamma_{i,\theta}$ en est également une. Il reste à montrer qu'une géodésique arbitraire γ, passant par $i = \gamma(a)$, est nécessairement un segment de $\Gamma_{i,\theta}$. D'après le lemme 5.35, il suffit de montrer que, pour certain θ, $k_\theta^{-1} \circ \gamma$ rencontre Δ^+ en un autre point que $i = \gamma(a)$.

D'après le lemme 5.27, $k_\theta(i+\epsilon)$ parcourt une courbe fermée autour de i et évitant i. Il existe donc θ tel que $k_{-\theta} \circ \gamma$ est une géodésique coupant Δ^+ en i et $i + \epsilon$. D'après le lemme 5.35, $k_{-\theta} \circ \gamma$ est un segment de Δ^+, avec égalité si la géodésique est complète. □

Proposition 5.37. — *Toute géodésique du plan hyperbolique se prolonge en une unique géodésique complète. Une géodésique complète est un cercle euclidien, resp. une droite verticale, perpendiculaire à l'axe réel en ses deux points limites distincts, resp. en son point limite.*

L'ensemble des géodésiques[14] *complètes* γ *passant par un point* $z \in \mathbb{H}$ *donné est en bijection avec* $\mathbb{S}^1$ *selon*

$$\gamma \mapsto \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \text{ si } \gamma(t) = z.$$

L'ensemble des géodésiques complètes pointées (i.e., munies du point distingué comme image de 0*),* $\gamma : I \to \mathbb{H}$ *avec* $0 \in I$*, est en bijection avec* $T^1\mathbb{H}$ *selon :*

$$\gamma \mapsto \left(\gamma(0), \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|_{\gamma(0)}}\right).$$

L'ensemble des géodésiques complètes $\gamma : I \to \mathbb{H}$ *de* $\mathbb{H}$ *est en bijection avec* Δ^2*, l'ensemble des couples de points distincts sur le bord de* $\mathbb{H}$ *défini dans le lemme 5.28 selon :*

$$\gamma \mapsto \left(\lim_{t \to \inf I} \gamma(t), \lim_{t \to \sup I} \gamma(t))\right),$$

les limites étant prises dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *selon la métrique euclidienne avec la convention qu'une suite de nombres complexes tend vers* ∞ *si et seulement la distance de ces nombres à* 0 *tend vers l'infini.*

Définition 5.38. — On note $\Gamma_{z,v} : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ le paramétrage selon la longueur de la géodésique complète orientée et pointée avec $\Gamma_{z,v}(0) = z$ et $\Gamma'_{z,v}(0) = v$ à un facteur réel, strictement positif près.

Démonstration. — Soit $[A] \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $[A].z = i$. L'action isométrique de $[A]$ sur $\mathbb{H}$ fait correspondre les géodésiques passant par z à celles passant par i. Le lemme 5.36 implique donc que toute géodésique passant par z est un segment d'un cercle généralisé qui se prolonge en une unique géodésique complète. Le même lemme montre que ces géodésiques complètes sont en bijection avec $\mathbb{S}^1$, ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{C}$.

Un calcul direct, objet de l'exercice 7.3, montre que les courbes $[A].\Delta^+$, $[A] \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sont bien les demi-cercles perpendiculaires en deux points à $\mathbb{R}$ (en plus des deux demi-droites orientées verticales passant par z). Ceci achève la preuve du premier point.

Le dernier point est également une conséquence du calcul de l'exercice 7.3. □

5.6. Exercices

Exercice 5.1. — Montrer qu'il existe sur $\mathbb{R}^2$ des normes ne dérivant pas d'un produit scalaire ou hermitien.

Vérifier que la propriété de régularité formulée dans la définition d'une structure riemannienne sur un ouvert $U \subset E$ est équivalente à l'existence pour tout point

[14] On rappelle qu'une géodésique est une courbe, i.e., est une classe d'équivalence à reparamétrisation près.

$p \in U$ d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et de fonctions C^1 $a_{ij} : V \to \mathbb{R}$ avec V un voisinage de p vérifiant : $\| \sum_{i,j=1}^n x_i e_i \|_q = \sum_{i=1}^n a_{ij}(q) x_i x_j$ pour tout $q \in V$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 5.2. — Soit $[0,1]$ le segment de $\mathbb{C}$. Montrer que toutes les courbes paramétrées $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ d'image $[0,1]$ et telles que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ sont géométriquement équivalentes. Exhiber un contre-exemple si on modifie la définition d'une courbe paramétrée pour y tolérer des annulations de la dérivée $\gamma'(t)$.

Exercice 5.3. — Montrer que l'ouvert riemannien $U = \mathbb{R}^2$ muni de $\|u\|_z := \|u\|$, une norme euclidienne fixée, alors $d_U(x,y)$ est la distance euclidienne et que les géodésiques complètes sont exactement les droites.

Montrer que le lemme 5.8 reste vrai si l'on remplace la convexité par la connexité. *Indication :* On sait que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe est connexe par arc. Vérifier que les arcs peuvent être supposés de classe C^1.

Exercice 5.4. — Soit $U =]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\subset \mathbb{R}^2$. On le munit de la structure riemannienne donnée par $\|(u,v)\|^2_{(x,y)} := \sin^2 y \cdot u^2 + v^2$. Montrer que $\gamma : t \in]-\pi, \pi[\mapsto (t,0) \in U$ est une géodésique. Vérifier que $F(x,y) = (\cos x \sin y, \sin x \sin y, \cos y)$ définit une isométrie de l'ouvert riemannien U sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ privée d'un méridien. Montrer que l'équateur de cette sphère est une géodésique complètedans un sens à préciser. Décrire toutes les géodésiques complètes de la sphère.

Exercice 5.5. — Soit $Q := \{z \in \mathbb{H} : 0 < \Re(z) < 2\pi \text{ et } 0 < \Im(z) < 1\}$. Soit $F : Q \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(z) = \left(\cos \Re(z)/\Im(z), \sin \Re(z)/\Im(z), \int_0^{-\log \Im(z)} \sqrt{1 - e^{-2s}}\, ds \right)$$

Montrer que l'image de F est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Montrer que F est une isométrie : la longueur hyperbolique de toute courbe sur Q coïncide avec la longueur euclidienne de son image par F.

Exercice 5.6. — Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ muni de la structure riemannienne $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|$, la norme euclidienne canonique. Montrer que d_U coincide avec la distance euclidienne habituelle. Montrer que deux points distincts $x, y \in U$ sont joints par une géodésique si et seulement si $0 \notin [x,y]$.

Construire un exemple d'ouvert riemannien $U \subset \mathbb{R}^2$ convexe ayant au moins deux points ne pouvant être joints par une géodésique.

Exercice 5.7. — Vérifier que le disque de Poincaré $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |c| < 1\}$ muni de $\|v\|_z = |v|/(1 - |z|^2)$ est isométrique au plan $\mathbb{H}$ selon la transformation : $\phi : z \in \mathbb{H} \mapsto (z - i)/(z + i) \in \mathbb{D}$.

Exercice 5.8. — Montrer que l'image d'un cercle généralisé par une transformation de Möbius est encore un cercle généralisé. *Indication :* On pourra se servir du lemme 5.22 et établir qu'une partie $C \subset \mathbb{C}$ est un cercle généralisé si et seulement s'il est l'ensemble des solutions d'une équation

$$A|z|^2 + \Re(Bz) + C = 0 \text{ où } A, C \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{C} \text{ avec } |B|^2 > 4AC.$$

Exercice 5.9. — Le but de cet exercice est de démontrer le lemme de Schwarz, énoncé dans ce cours comme le théorème 5.24. On se donne f une fonction holomorphe sur le disque $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ avec $f(0) = 0$. On pose $g(z) = f(z)/z$ pour $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

(1) Montrer, en utilisant le principe du maximum, que g se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ vérifiant $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ puis en déduire que $|f'(0)| \leq 1$.

(2) En utilisant le cas d'égalité de ce principe, montrer que, s'il existe un $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $|g(z_0)| = 1$ alors $f(z) = \alpha z$ pour un complexe α de module 1 et tout $z \in \mathbb{D}$: f est une rotation.

(3) Montrer que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est inversible alors $f(z) = \alpha z$ comme ci-dessus.

(4) Vérifier que, pour tout $a \in \mathbb{D}$, $\phi_a(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ est une bijection biholomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ vérifiant $\phi_a(a) = 0$. Calculer son inverse.

(5) Montrer que toute bijection biholomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ est de la forme $f(z) = (\alpha z + \bar{\beta})/(\beta z + \bar{\alpha})$ avec $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

Exercice 5.10. — Pour toute paire de réels distincts $x \neq x'$, montrer qu'il existe $[A] \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $[A].0 = x$ et $[A].1 = x'$. En déduire que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur $\Delta^2 := \{(x, x') \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2 : x \neq x'\}$.

Exercice 5.11. — Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note $\mathrm{GL}(V)$ le groupe linéaire associé formé des applications linéaires inversibles de V dans V. La projectivisation de V est l'ensemble des droites linéaires de cet espace : $PV := \{\mathbb{R}v : v \in V \setminus \{0\}\}$. Une transformation projective de $P(V)$ est une transformation $PL : \mathbb{R}.v \mapsto \mathbb{R}.L(v)$ avec $L \in \mathrm{GL}(V)$. On note $\mathrm{PGL}(V)$ l'ensemble de ces transformations.

(1) Vérifier que $PL : PV \to PV$ est bien définie, que $\mathrm{PGL}(V)$ est un groupe et que $P : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$ est un morphisme de groupe dont on calculera le noyau. Peut-on définir PL pour une application linéaire $L : V \to V$ quelconque ? Montrer que PV est le quotient de V par une relation d'équivalence à expliciter. On munit PV de la topologie quotient (voir la section C.2.3). PV est-elle compacte ?

(2) Soit $V = \mathbb{R}^n$ avec $e_i = (\delta_{ij})_{j=1,\ldots,n}$. On peut identifier $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, le groupe des matrices $n \times n$ à entrées réelles. On définit $\psi_i : \mathbb{R}^{i-1} \times \{1\} \times \mathbb{R}^{n-i} \to PV$ par $\psi_i(v) = \mathbb{R}.v$. Déterminer l'image de ψ_i pour $i = 1, \ldots, n$. Calculer $\psi_i^{-1} \circ PL \circ \psi_i \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(3) Déduire des ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, une structure de variété (voir section C.4) C^∞ pour PV. Vérifier que cette structure de variété est compatible avec la topologie quotient.

(3) Montrer que $P\mathbb{R}^2$ est difféomorphe au cercle mais que $P\mathbb{R}^3$ n'est pas difféomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^4$. *Indication : on pourra montrer que cette sphère est orientable*[15] *mais que* $P\mathbb{R}^3$ *ne l'est pas.*

[15] Une variété est *orientable* si elle admet un atlas dont tous les changements de carte sont de jacobien strictement positif.

CHAPITRE 6

SURFACE MODULAIRE

On peut définir par "repliement" à partir du plan hyperbolique des surfaces localement semblables à celui-ci mais plus petites, par exemple compactes ou d'aire finie et admettant des géodésiques bornées. On procède en passant à certains quotients par des groupes d'isométries, de la même façon qu'on peut construire des tores compacts à partir du plan euclidien.

Dans ce cours, nous ne traiterons que le cas de la surface modulaire : d'une part, c'est un cas particulièrement intéressant, notamment par son rôle en théorie des nombres, d'autre part, nous économiserons le temps nécessaire au développement des notions requises par le cas général. Nous espérons toutefois que la compréhension détaillée de cet exemple fondamental permettra au lecteur intéressé d'aborder avec toutes les facilités ledit cas général.

6.1. Espace quotient

Définition 6.1. — Le **groupe modulaire** $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est la partie de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ définie par les matrices à coefficients entiers. On le notera Γ.

L'exercice 6.1 rappelle pourquoi Γ est un sous-groupe non-distingué de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Γ hérite de l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ et de l'action dérivée sur $T^1\mathbb{H}$ et on peut considérer les espaces quotients, i.e., les ensembles des orbites de chacune de ces actions. Rappelons que si un groupe G agit sur un espace X, on note G/X l'espace quotient correspondant, i.e., l'ensemble des orbites des points de X sous l'action de G.

Définition 6.2. — La **surface modulaire** M est le quotient du plan hyperbolique par l'action du groupe modulaire $\Gamma := \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$:

$$\mathrm{M} := \mathbb{H}/\Gamma := \{\Gamma.z : z \in \mathbb{H}\}$$

tandis que l'**espace modulaire** $\mathbb{M}$ est le quotient du fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$ par l'action de même groupe :

$$\mathbb{M} := T^1\mathbb{H}/\Gamma := \{\Gamma.(z,v) : (z,v) \in T^1\mathbb{H}\}.$$

La description algébrique de $\mathbb{H}$ et $T^1\mathbb{H}$ obtenue au chapitre 5 s'étend à ces quotients.

Définition 6.3. — Si G est un groupe et H un sous-groupe alors G/H dénote le quotient de G par l'action par translation *à droite*, i.e., l'ensemble des classes d'équivalences gH, $g \in G$, tandis que $H\backslash G$ dénote le quotient par les translations *à gauche*, i.e., l'ensemble des classes Hg, $g \in G$.

Remarque 6.4. — $G/H = H\backslash G$ si et seulement si H est un sous-groupe distingué de G. Dans le cas contraire, les deux quotients sont distincts et n'héritent pas de façon canonique de la structure de groupe de G. Les structures d'espace topologique, métrique ou mesuré peuvent passer au quotient, en gardant plus ou moins de bonnes propriétés comme on le verra ci-dessous.

On ne confondra pas la notation $\mathbb{H}/\Gamma$ qui désigne l'espace quotient par l'*action sous-entendue* (par homographies) de Γ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ qui désigne l'espace quotient par l'*action par translation à droite,* ce qui n'a de sens que parce que Γ est un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Les identifications $\mathbb{H} \equiv \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/PSO(2,\mathbb{R})$ et $T^1\mathbb{H} \equiv \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ du chapitre 5 induisent les identifications suivantes :

Lemme 6.5. — *La surface modulaire et l'espace modulaire s'identifient respectivement aux quotients suivants :*

$$\mathbb{M} \equiv \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) := \{\Gamma A : A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\}$$

et

$$\mathrm{M} \equiv \Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R}) := \{\Gamma A\,\mathrm{PSO}(2,\mathbb{R}) : A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\}.$$

Remarque 6.6. — Comme la formule ci-dessus le met en évidence : $(H\backslash G)/K$ et $H\backslash(G/K)$ coïncident : ils sont tout deux l'ensemble des parties de la forme HgK pour $g \in G$. Ceci nous dispense de parenthéser la formule ci-dessus. Par ailleurs, comme l'exercice 6.2 invite à le vérifier, les quotients ci-dessus s'identifient canoniquement à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$.

On verra que l'espace modulaire est essentiellement le fibré unitaire tangent de la surface modulaire, i.e., une "variété de dimension 3" formée des "vecteurs unitaires" en chaque point de la surface.

6.2. Topologie quotient de l'espace modulaire

Remarque 6.7. — La topologie et la structure métrique de la surface modulaire ne seront pas directement exploitées dans la suite. Le lecteur pressé peut passer directement à la section 6.4.

Tout sous-groupe G de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ est muni de la *topologie induite* : ses ouverts sont exactement les intersections des ouverts de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ avec G. La topologie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est *discrète* : toute partie est ouverte, ce qui est équivaut à ce que tout point de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ admet un voisinage dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ ne rencontrant aucun autre point de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Par ailleurs $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est une partie fermée de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

On munit l'espace modulaire de la topologie quotient (voir la section C.2.3) en appliquant la construction suivante à l'action par translation à gauche de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$:

Définition 6.8. — Soit X un espace topologique et G un groupe agissant sur X. Soit X/G l'espace quotient et $\pi : X \to X/G$ la **surjection canonique** associant à tout point de X son orbite $G.x := \{g.x : g \in G\}$. La **topologie quotient** sur X/G est définie en prenant comme ouverts toutes les parties U de X/G telles que $\pi^{-1}(U)$ soit un ouvert de X.

Remarque 6.9. — La topologie quotient peut être définie comme la topologie $\mathcal{T}$ la plus fine telle que la surjection canonique soit continue : toute topologie ayant cette dernière propriété est incluse dans $\mathcal{T}$.

Lemme 6.10. — *La surjection canonique $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \Gamma\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est surjective, continue, et ouverte. Plus précisément, pour tout $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, il existe un voisinage U tel que $\pi(U)$ est un ouvert et $\pi : U \to \pi(U)$ est un homéomorphisme.*

La topologie quotient de $\mathbb{M}$ est séparée : deux points distincts quelconques admettent des voisinages disjoints.

Démonstration. — π est surjective par construction. Sa continuité découle de ce que, pour tout ouvert U de $\mathbb{M}$, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ par définition de la topologie quotient.

Soit U un ouvert de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. On a $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in\Gamma} gU$ qui est ouvert comme union d'ouverts. La définition de la topologie quotient implique que $\pi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{M}$: π est bien ouverte.

Soit $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe un voisinage V de A dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur lequel π est injective. $\phi : (u,v) \mapsto uv^{-1}$ est continue et Id est un point isolé de Γ. Donc il existe un voisinage W de Id dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tel que $WW^{-1} := \{uv^{-1} : u \in W,\ v \in W\}$ ne contienne pas d'autre élément de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Si $x, y \in W$ et $\pi(x) = \pi(y)$ alors $xy^{-1} \in \Gamma \cap WW^{-1}$ donc $x = y$: $\pi|W$ est injective. Il suffit maintenant de poser $V = WA$ vu $(xA)(yA)^{-1} = xy^{-1}$.

Finalement montrons que la topologie quotient est séparée. Soit $A_1, A_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tels que $\pi(A_1) \neq \pi(A_2)$, i.e., $\phi(A_1, A_2) \notin \Gamma$. ϕ est continue et Γ est un fermé de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ donc $\phi^{-1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \setminus \Gamma)$ est un voisinage de (A_1, A_2). Il contient donc $U_1 \times U_2$ avec U_i voisinage de A_i. $\pi(U_i)$ est un voisinage de $\pi(A_i)$ car π est ouverte et $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset$ par construction. □

Remarque 6.11. — On peut faire le même type d'analyse pour la topologie de M. Mais le groupe $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ n'est pas discret et la surjection canonique n'est pas un homéomorphisme local. L'exercice 6.4 détaille cette question.

6.3. Structure métrique locale de $\mathbb{M}$

Le quotient X/G d'un espace métrique X est canoniquement muni d'une *pseudo-distance*, c'est-à-dire d'une application continue $d : (X/G)^2 \to [0, \infty[$ vérifiant l'inégalité triangulaire et telle que $d(x,x) = 0$ pour tout $x \in X/G$ mais sans garantie que $d(x,y) = 0$ implique $x = y$.

Définition 6.12. — Le quotient X/G d'un espace métrique X muni d'une distance d hérite d'une *pseudo-distance quotient* définie par :

$$\forall x, y \in X \quad d_{X/G}(G.x, G.y) := \inf_{g,g' \in G} d(g.x, g'.y).$$

Lemme 6.13. — *La pseudo-distance $d_{\mathbb{M}}$ définie par passage au quotient de $d_{T^1\mathbb{H}}$ est une distance : $d_{\mathbb{M}}(x,y) = 0 \implies x = y$ pour tous $x, y \in \mathbb{M}$.*

Démonstration. — Soit $x, y \in \mathbb{M}$ tels que $d_{\mathbb{M}}(x,y) = 0$. Par définition de $d_{\mathbb{M}}$, il existe pour tout $n \geq 1$, $x_n, y_n \in T^1\mathbb{H}$ tels que $\pi(x_n) = x$, $\pi(y_n) = y$ et $d_{T^1\mathbb{H}}(x_n, y_n) < 1/n$. Γ agissant par isométrie, on peut supposer x_n fixé. D'après le lemme 6.10, il existe $r_1 > 0$ tel que $\pi | B(x_1, r_1)$ soit injective. Donc les y_n doivent tous coïncider pour n assez grand. Il existe donc N tel que $d_{T^1\mathbb{H}}(x_1, y_N) < 1/n$ pour tout N. Il s'ensuit que $y_N = x_1$ et donc $x = y$. □

Lemme 6.14. — *Pour tout $x \in \mathbb{M}$, il existre $r > 0$ tel que pour tout $x_0 \in \pi^{-1}(x)$, $\pi : B(x_0, r) \to B(\pi(x_0, r)$ est une isométrie et un homéomorphisme.*

Démonstration. — On a vu que, pour tout $x_0 \in \pi^{-1}(x)$, il existe $r_0 := r(x_0) > 0$ tel que $\pi | B(x_0, r)$ est un homéomorphisme. Ceci implique que pour tout $z_0 \in B(x_0, r_0)$ et tout $g \in \Gamma$, $g(z_0) \in B(x_0, r_0) \implies g(z_0) = z_0$.

Soit $y_0, z_0 \in B(x_0, r_0/4)$. Γ agissant par isométries,

$$d_{\mathbb{M}}(\pi(y_0), \pi(z_0)) := \inf_{g,g' \in \Gamma} d_{T^1\mathbb{H}}(gy_0, g'z_0) = d_{T^1\mathbb{H}}(y_0, \Gamma z_0)$$

Comme $d(y_0, z_0) < r_0/2$, on peut remplacer Γz_0 par son intersection avec $B(x_0, r_0)$: les points à l'extérieur de cette boule sont à une distance au moins $(3/4)r_0$ de y_0. On

a donc bien : $d_{\mathbb{M}}(\pi(y_0), \pi(z_0)) = d_{T^1\mathbb{H}}(y_0, z_0)$, i.e., $\pi : B(x_0, r) \to B(\pi(x_0), r)$ est une isométrie si $0 < r < r_0/4$.

$\pi|B(x_0, r_0)$ est une isométrie sur son image. Nécessairement, $\pi(B(x_0, r_0)) \subset B(\pi(x_0), r_0)$. Montrons l'égalité. Soit $y \in B(\pi(x_0), r_0)$. Par définition $y = \pi(y_0)$ avec $y_0 \in$ M et $d(x_0, \Gamma.y_0) < r_0$. On peut donc supposer $y_0 \in B(x_0, r_0)$, ce qu'il fallait démontrer.

Il reste à montrer qu'on peut utiliser le même rayon r, pour tout $x_1 \in \pi^{-1}(\pi(x_0))$, i.e., $x_1 = g_1(x_0)$ avec $g_1 \in \Gamma$. g_1 étant une isométrie de $T^1\mathbb{H}$ avec $\pi \circ g_1 = \pi$, c'est clair. □

Remarque 6.15. — La "géométrie locale" de $\mathbb{M}$ coïncide donc avec celle de $T^1\mathbb{H}$ et donc celle de $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$. La "géométrie locale" de M coïncide donc avec celle de $\mathbb{H}$. Voir l'exercice 6.4 pour quelques observations à ce sujet.

6.4. Domaine fondamental de PSL(2, ℤ) sur ℍ

On souhaite comprendre la surface modulaire de façon *globale*. Une voie usuelle pour comprendre un espace quotient est de le réaliser par un système de représentants, i.e., en choisissant un élément dans chaque classe. L'axiome du choix garantit l'existence d'un tel système comme ensemble, mais, dans cette généralité, le système des représentants peut n'avoir aucune structure supplémentaire (voir l'exercice 6.3). Nous allons voir que le quotient de $\mathbb{H}$ par l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ peut être représenté par un *polygone* de $\mathbb{H}$, c'est-à-dire un ensemble dont la frontière est constitué d'un nombre fini de segments de géodésiques.

Proposition 6.16. — *Soit*

$$\begin{aligned} E_0 &:= \{z \in \mathbb{H} : 1/2 < \Re(z) < 1/2 \text{ et } |z| > 1\} \\ e_1 &:= \{z \in \mathbb{H} : \Re(z) = 1/2 \text{ et } |z| > 1\} \\ e_2 &:= \{e^{i\theta} : \pi/3 < \theta < \pi/2\}. \end{aligned}$$

et $E := E_0 \cup e_1 \cup e_2$ *(voir la figure 1). On a la partition suivante de* $\mathbb{H}$ *:*

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma E \cup \Gamma i \cup \Gamma e^{i\pi/3}. \tag{17}$$

Dans cette démonstration $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ représentera une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et γ la transformation de Möbius associée. Nous utiliserons tout particulièrement les deux transformations suivantes de Γ : la translation $\tau(z) = z + 1$ et l'inversion $\iota(z) = -1/z$.

Etudions d'abord les deux points particuliers i et $e^{i\pi/3}$:

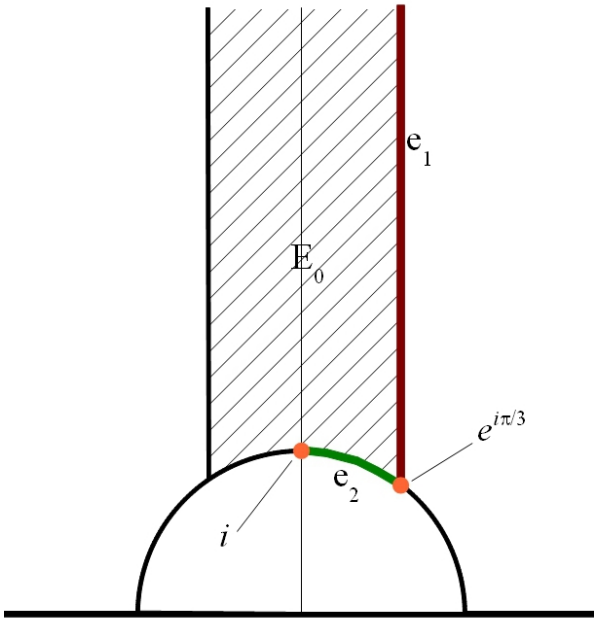


FIGURE 1. Le domaine $E := E_0 \cup e_1 \cup e_2$ de la proposition 6.16 borné par les deux droites $\Re(z) = \pm 1/2$ et le cercle unité ainsi que les deux points exceptionnels i et $e^{i\pi/3}$.

Lemme 6.17. — *Les orbites Γi, $\Gamma e^{i\pi/3}$ et ΓE sont deux-à-deux disjointes. Les stabilisateurs dans Γ des points i et $e^{i\pi/3}$ sont :*

$$\mathrm{Stab}_\Gamma(i) = \{\mathrm{Id}, \iota\} \text{ et } \mathrm{Stab}_\Gamma(e^{i\pi/3} = \{\mathrm{Id}, \tau \circ \iota, (\tau \circ \iota)^2\}.$$

Démonstration du lemme. — Pour montrer que les orbites de i et de $e^{i\pi/3}$ évitent E, on étudie la partie imaginaire de leurs images.

Le point de partie imaginaire minimum de $\bar{E}$ est $e^{i\pi/3}$ pour lequel $\Im(e^{i\pi/3}) = \sqrt{3}/2 = 0.86\cdots > 2/3$.

La formule pour $\gamma(z)$ séparant partie réelle et partie imaginaire (11) (page 70) donne pour $z = i$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.i = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{i}{c^2 + d^2}.$$

On voit que la partie imaginaire de tout point de l'orbite $\Gamma.i$ est inférieure à $1/2$, sauf si $c = \pm 1$ et $d = 0$ (ou $d = \pm 1$ et $c = 0$) auquel cas l'image de i est $i + ac$ (ou $i + ab$),

i.e., l'image de i par une translation entière. En particulier, Γi est disjointe de $e^{i\pi/3}$ et de E et donc de leurs orbites.

Par ailleurs, le stabilisateur de i dans Γ est, d'après le stabilisateur de ce même point dans le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tout entier :

$$\mathrm{Stab}_\Gamma(i) := \{g \in \Gamma : g.i = i\} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}(i) \cap \Gamma = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour étudier l'orbite de $z = e^{i\pi/3} = (1 + i\sqrt{3})/2$, on calcule, toujours à l'aide de (11) :

$$\Im\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . e^{i\pi/3} \right) = \frac{\Im(e^{i\pi/3})}{(c/2+d)^2 + (3/4)c^2}$$

On voit que $\Im(\gamma(e^{i\pi/3})) < \Im(e^{i\pi/3})$, sauf (i) si $c = 0$ et $d = \pm 1$ ou (ii) si $c = \pm 1$ et $d = 0$ ou $d = -c$. Ces cas correspondent à :

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . z = z+k, \quad \pm \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . z = -1/z+k, \quad \pm \begin{pmatrix} k & -1-k \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . z = -1/(z-1)+k,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ quelconque. Ces trois séries de transformations correspondent à $\tau^k(z)$, $\tau^{k-1}(\tau \circ \iota(z))$ et $\tau^k \circ (\tau \circ \iota)^2(z)$ et envoient $e^{i\pi/3}$ sur $e^{i\pi/3} + k$, $e^{2i\pi/3} + (k-1)$ et $e^{i\pi/3} + k$. En particulier $\Gamma e^{i\pi/3} \cap \bar{E} = \{e^{i\pi/3}, e^{i\pi/3} - 1\}$ et $\Gamma e^{i\pi/3}$ est bien disjoint de Γi et de ΓE.

Par ailleurs, le calcul précédent montre que :

$$\mathrm{Stab}_\Gamma(e^{i\pi/3}) = \left\{ \pm \mathrm{Id}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

□

Démonstration de la proposition. — Fixons $z \in \mathbb{H}$ et montrons d'abord qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(z) \in \tilde{E} := E_0 \cup e_1 \cup e_2 \cup \{i, e^{i\pi/3}\}$. On utilise encore la partie imaginaire : on va montrer que quand elle est maximale on est dans $E \cup \{i, e^{i\pi/3}\}$. Rappelons la formule

$$\Im(\gamma(z)) = \Im(z)/|cz+d|^2. \tag{18}$$

Remarquons que, z étant fixé, seul un nombre fini de couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ donnent des valeurs de $|cz+d|$ proches de $y_0 := \inf\{|cz+d| : (c,d) \in \mathbb{Z}^2\}$. En effet, $\Im(z) > 0$ donc $|cz+d| \geq |\Im(cz+d)| = |c|\Im(z)$ contraint c, puis $|cz+d| \geq |d| - |cz|$ contraint d.

y_0 est donc réalisé pour au moins un couple $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$. Cette minimalité implique que c et d sont premiers entre eux. D'après le lemme de Bezout,[1] il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ maximise la partie imaginaire de $\Im(\gamma(z))$. Quitte à remplacer z par $\gamma z + k$ pour un entier k approprié, on peut supposer que $\Im(z)$ est maximale sur son orbite et $-1/2 < \Re(z) \leq 1/2$.

[1] Etienne Bezout (1730-1783).

Si $|z| < 1$, $\iota(z) = -1/z$ est de partie imaginaire $\Im(z)/|z|^2 > \Im(z)$, une contradiction. On a donc $|z| \geq 1$.

Si $\Re(z) = 1/2$, $z \in e_1 \cup \{e^{i\pi/3}\}$. On suppose maintenant $-1/2 < \Re(z) < 1/2$.

Si $|z| > 1$, alors $z \in E_0$. Sinon, $|z| = 1$. Si $\Re(z) > 0$, alors $z \in e_2$. Si $\Re(z) < 0$, alors $z \in \iota(e_2)$ et donc $\iota(z) \in e_2$. Le seul cas restant est $z = i$. Ceci achève la preuve de (17).

Montrons maintenant que les termes du membre de droite de (17) sont deux-à-deux disjoints. Le lemme précédent dit que les orbites des deux points i et $e^{i\pi/3}$ sont disjointes et disjointes de E, et donc, par invariance, de son orbite. Il reste à montrer que $E \cap \gamma(E) = \emptyset$ pour $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \mathrm{Id}$.

On se donne $z \in E \cap \gamma(E)$ pour un $\gamma = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \in \Gamma$. Quitte à échanger z et $\gamma(z)$ (et donc à remplacer γ par γ^{-1}), on a $\Im(\gamma(z)) \geq \Im(z)$. Vu la formule (18), ceci implique $|cz + d| \leq 1$. Comme $z \in E$, $\Im(z) \geq \sqrt{3}/2 > 0.86$ et donc $|cz + d| \geq 0.86|c|$. La comparaison avec $|cz+d| \leq 1$ implique : $c = 0$ ou $c = +1$ (le cas $c = -1$ correspond aux mêmes transformations dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$).

Examinons d'abord le cas $c = 0$. Vu la condition de déterminant, $a = d = \pm 1$ et $\gamma(z) = z + bd$. Mais z et $\gamma(z)$ doivent être de parties réelles dans $]-1/2, 1/2]$. On a donc $b = 0$ et $\gamma = \mathrm{Id}$.

Supposons maintenant $c = 1$. $z \in E$ et $|z + d| \leq 1$. Si $d \neq 0$, on observe qu'aucun point de E n'est envoyé dans le disque unité (fermé) par la translation $z \mapsto z + d$: la contradiction implique $d = 0$. Ceci donne $|z| = |z+d| = 1$ donc $z \in e_2$ et $b = -c = -1$. On a donc $\gamma(z) = a - 1/z$. $z \in e_2$ et $\gamma(z) \in E$ donc $a = 1$ et $z = e^{i\pi/3} \notin E$. La contradiction montre que seul le cas $\gamma = \mathrm{Id}$ subsiste. □

Remarque 6.18. — L'exercice 6.6 montre comment on peut utiliser les *faits géométriques* déterminés ci-dessus pour en déduire des résultats purement *algébriques* sur le groupe Γ. C'est une illustration (très basique) de la démarche de *la théorie géométrique des groupes* [**17**].

Remarque 6.19. — Il est facile de voir que la surface modulaire M est homéomorphe au plan. Plus précisément, $\mathrm{M} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie naturelle est homéomorphe à une sphère. On peut montrer que l'espace $\mathbb{M}$ est homéomorphe au complémentaire du noeud de trèfle $t \mapsto (e^{2i\theta}, e^{3i\theta}) \in \mathbb{C}^4$ dans la sphère de dimension 3 : $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = 1\}$. On renvoit à [**9**] pour plus de détails et une démonstration.

Remarque 6.20. — La surface M possède des *singularités* en $\pi(i)$, $\pi(e^{i\pi/3})$. En ces points la surjection canonique n'induit pas un homéomorphisme local (a fortiori ces points n'ont pas de voisinage isométrique à un ouvert de $\mathbb{H}$). Ceci n'implique pas que $\mathbb{M}$ possède lui aussi des points singuliers (pourquoi ?).

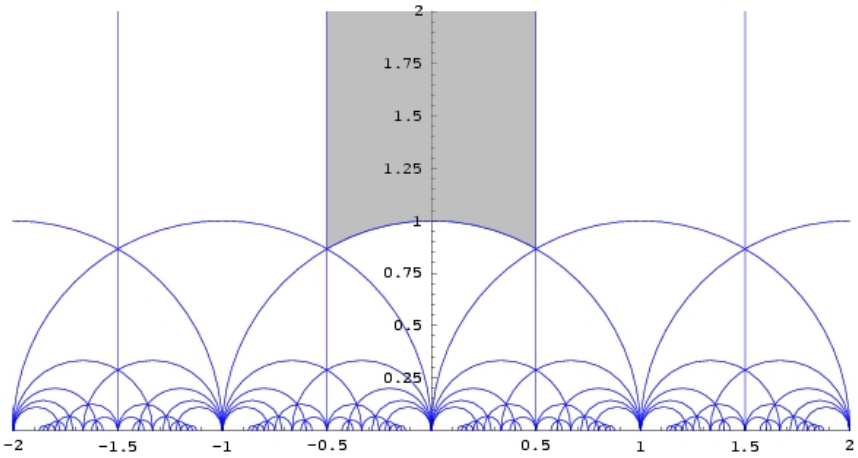


FIGURE 2. Partition du plan hyperbolique par l'orbite du domaine fondamental E. Ci-dessus $-2 \leq \Re(z) \leq 2$ et $0 < \Im(z) \leq 2$ et E en gris. Image de Patrick Fradin, logiciel TeXgraph : `http://texgraph.tuxfamily.org`.

6.5. Exercices

Exercice 6.1. — Rappeler la formule de Cramer pour l'inversion des matrices et en déduire qu'une matrice carrée est inversible parmi les matrices à coefficients entiers si et seulement si son déterminant est $+1$ ou -1. En déduire que l'ensemble des matrices à coefficients entiers de dimensions 2×2 ayant un inverse à coefficients entiers est le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et en déduire que $\Gamma := \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est un groupe. Montrer que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ n'est pas distingué dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$[(2)]

Exercice 6.2. — Soit G un groupe, $K \subset H \subset G$ des sous-groupes, K étant distingué dans G. Montrer que $\phi : G/H \to (G/K)/(H/K)$ défini par $\phi(gH) = (gK)\{hK : h \in H\}$ est une bijection. Montrer que si H est également distingué dans G, alors H/K l'est dans G/K et ϕ est un isomorphisme entre les groupes G/H et $(G/K)/(H/K)$. Expliciter ϕ dans le cas $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $H = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et $K = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$.

Exercice 6.3. — On considère sur le cercle $\mathbb{S}^1$ la relation déquivalence : $e^{2i\pi\alpha} \sim e^{2i\pi\beta} \iff \alpha - \beta \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $S \subset \mathbb{S}$ contenant exactement un point de chaque relation d'équivalence. Montrer que S ne peut pas être mesurable. *Indication :* On pourra considérer la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}^1$ et utiliser son invariance par translation.

Exercice 6.4. — Exhiber en chaque point de l'espace modulaire un voisinage isométrique (via la surjection canonique) à un ouvert de $T^1\mathbb{H}$. Déterminer les points

[(2)] Un sous-groupe H est distingué dans un groupe G si et seulement si $gHg^{-1} = H$ pour tout $g \in G$.

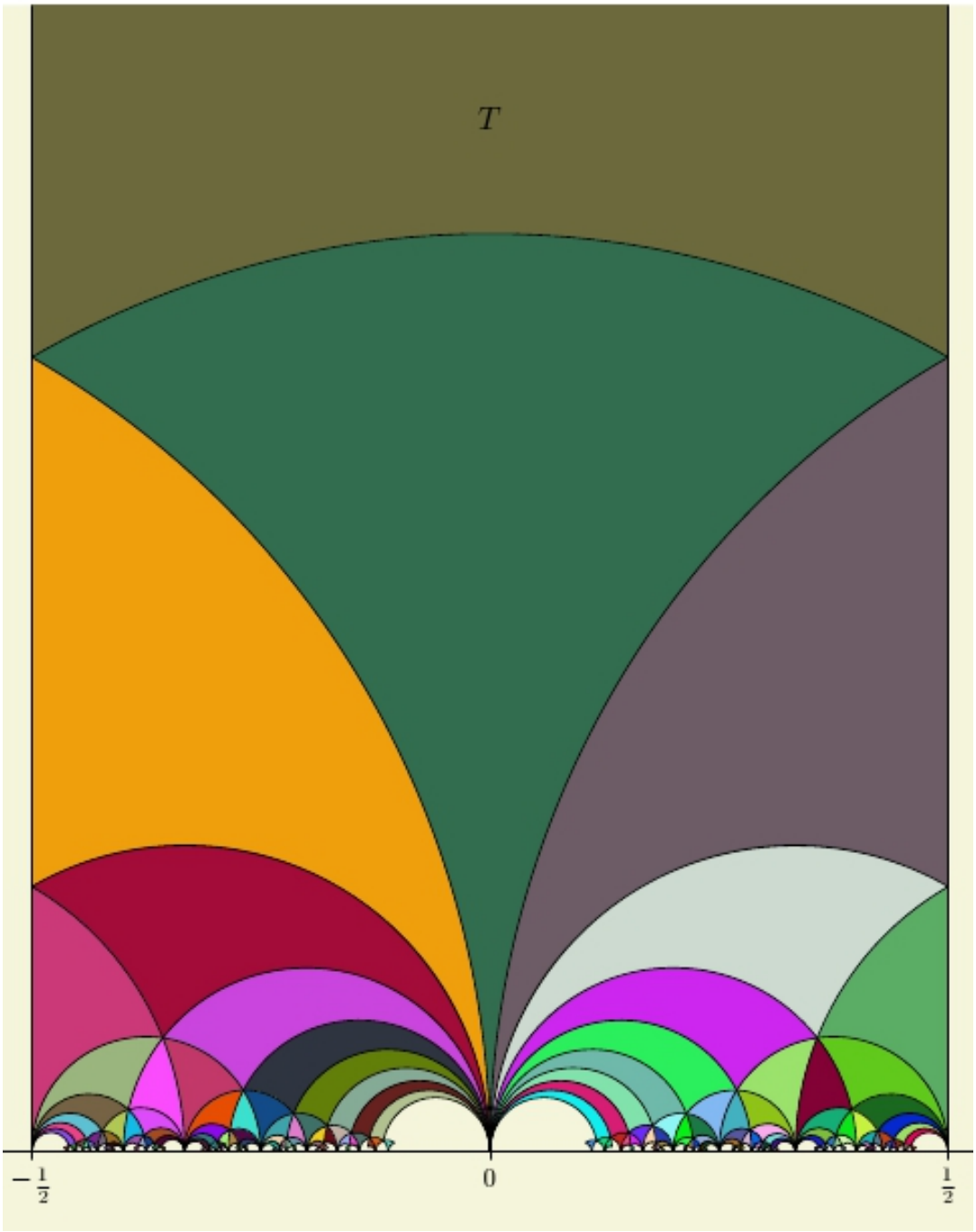


FIGURE 3. Partition du plan hyperbolique par l'orbite du domaine fondamental E. Chaque copie isométrique est d'une couleur distincte. Ci-dessus $-1/2 \leq \Re(z) \leq 1/2$ et $0 < \Im(z) \leq 1$. Les demi-disques blancs "posés" sur l'axe réel sont des artefacts numériques. Image de Patrick Fradin, logiciel TeXgraph : `http://texgraph.tuxfamily.org`.

de la surface modulaire admettant un voisinage isométrique à un ouvert de $\mathbb{H}$. Décrire la géométrie locale des autres points.

Exercice 6.5. — Soit $\gamma : I \to \mathrm{M}$. Un *relèvement* de γ au voisinage de $t \in I$ est une application $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{H}$ de classe C^1 définie sur un voisinage J de t dans I telle que $\gamma|J = \pi \circ \tilde{\gamma}$. On dira que γ est *de classe* C^1 si elle admet au voisinage de tout point un relèvement de classe C^1 au sens classique. On dira que c'est une courbe paramétrée si de plus la dérivée du relèvement ne s'annule pas.

Montrer qu'une application $\gamma : I \to \mathrm{M}$ est continue en $t \in I$ pour la topologie quotient si et seulement si elle admet un relèvement local continu en ce même t.

On dira que deux courbes paramétrées $\gamma_i : I_i \to \mathrm{M}$, $i = 1, 2$, définissent la *même direction* en $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ si elles admettent chacune un relèvement au voisinage de 0, de classe C^1 et que les dérivées en 0 de ces relèvement coincident à un facteur réel strictement positif près. On appelle direction en p toute classe d'équivalence de la relation précédente parmi les courbes passant par p en 0.

Déterminer, pour chaque $p \in \mathrm{M}$, l'ensemble des directions en p.

Exercice 6.6. — Montrer que Γ est engendré comme groupe par les deux éléments ι et τ. Plus précisément montrer que le groupe Γ est isomorphe en tant que groupe au groupe quotient $< S, T | S^2 = (TS)^3 = 1 >$, le quotient du groupe libre à deux éléments a, b par le plus petit sous-groupe distingué contenant a^2 et $(ab)^3$.

PARTIE III

DYNAMIQUES HYPERBOLIQUES

Nous allons maintenant combiner géométrie hyperbolique et dynamique. Nous définirons d'abord les *flots géodésiques et horicycliques* sur le plan hyperbolique. Nous verrons leurs caractérisations géométriques, algébriques et dynamiques.

Sur le plan hyperbolique, ces flots s'avèrent dynamiquement triviaux. En particulier ils sont dépourvus de récurrence bien qu'il préservent chacun une mesure naturelle, la mesure de Liouville, mais celle-ci est infinie. Ces flots, étant invariants par les isométries, descendent sur l'espace modulaire, quotient du fibré unitaire tangent du plan hyperbolique par l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. La mesure de Liouville induisant une mesure finie sur cet espace :,les dynamiques obtenues sont non-triviales.

Nous montrerons en particulier que, pour cette mesure, le flot géodésique est ergodique tandis que le flot horicyclique est uniquement ergodique et nous esquisserons quelques conséquences géométriques de ces propriétés dynamiques.

CHAPITRE 7

GÉODÉSIQUES ET DYNAMIQUES ASSOCIÉES

Ce chapitre introduit les flots géodésiques, horicycliques et horicycliques duaux. Nous les définissons d'abord algébriquement, à travers l'identification $T^1\mathbb{H} \equiv \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Cette caractérisation est en effet particulièrement concise.

Nous donnons ensuite des caractérisations géométriques et dynamiques et établissons trois propriétés qualitatives fondamentales : la relation de commutation qui lie flots horicycliques et géodésiques, l'indépendance locale de ces trois flots, et la préservation de la mesure de Liouville sur $T^1\mathbb{H}$.

Nous remarquons finalement comment ces flots définissent des systèmes dynamiques probabilistes sur l'espace modulaire $T^1\mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ muni de la mesure de Liouville normalisée.

7.1. Flot géodésique

Dans cette section, on définit et caractérise le flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}$, le fibré unitaire tangent du plan hyperbolique.

$T^1\mathbb{H}$ s'identifiant à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ selon $[A] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \mapsto [A].q_0$, avec $q_0 := (i,i) \in T^1\mathbb{H}$ (corollaire 5.32). il est techniquement commode de définir ce flot par une formule algébrique puis de vérifier sa caractérisation géométrique.

Définition 7.1. — Le **flot géodésique** $g : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ est défini par :

$$g_t : [A].q_0 \mapsto [AG_t].q_0 \text{ où } G_t := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \text{ et } q_0 := (i,i) \in T^1\mathbb{H}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'exercice 7.6 invite à vérifier que c'est bien un flot, i.e., une action de $\mathbb{R}$ sur $T^1\mathbb{H}$ et que $g : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ est de classe C^∞. On y voit aussi de quelle manière ce flot dépend du choix du vecteur de référence q_0.

Les coordonnées suivantes "trivialisent" le flot géodésique. Rappelons que $\Delta^2 := \{(\xi,\eta) \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2 : \xi \neq \eta\}$.

Lemme 7.2. — *L'application suivante est une bijection de $\Delta^2 \times \mathbb{R}$ sur $T^1\mathbb{H}$:*

$$\Gamma : (\xi,\eta,t) \mapsto \begin{cases} \Gamma_{(\xi+\eta)/2+i|\xi-\eta|/2,\mathrm{signe}(\eta-\xi)}(t) & \text{si } \xi,\eta \neq \infty \\ \Gamma_{\eta+i,i}(t) & \text{si } \xi = \infty \\ \Gamma_{\xi+i,-i}(t) & \text{si } \eta = \infty \end{cases}$$

où $\Gamma_{z,v}$ désigne la géodésique complète passant par z, tangente et orienté par le vecteur v, paramétrée selon la longueur (voir 5.38). De plus, la restriction

$$\Gamma : \{(\xi,\eta,t) \in \mathbb{R}^3 : \xi \neq \eta\} \to \{(z,v) \in T^1\mathbb{H} : v \notin i\mathbb{R}\} \tag{19}$$

est un difféomorphisme.

La définition de Γ est illustrée dans la figure 1.

Démonstration. — ξ ou $\eta = \infty$ correspond aux géodésiques verticales, Γ s'y exprime par les formules $\Gamma(\infty,\eta,t) = \eta + ie^{-t}$ et $\Gamma(\xi,\infty,t) = \xi + ie^{t}$ qui sont des difféomorphismes sur leurs domaines de définition.

Considérons maintenant la restriction (19). Elle est bien définie.

Soit $f(z) = \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right| z + \frac{\xi+\eta}{2}$ et $k(z) = k_{\pi/4}(z)$ (si $\xi > \eta$) ou $k(z) = k_{-\pi/4}(z)$ sinon. Ce sont des applications de Möbius. $f \circ k(i) = f(k(i)) = f(i) = m$ (le point m est le sommet (euclidien) de la géodésique, voir la figure 1). Aussi, $(f \circ k)'(i) = -i|\xi - \eta|\,\mathrm{signe}(\eta - \xi)$ (au facteur de normalisation près). On en déduit que $g : T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ envoie $q_0 := (i,i)$ sur $(m, \mathrm{signe}(\eta-\xi))$ et donc la géodésique Δ^+ sur la géodésique passant par m et de vecteur unitaire tangent porté par $\mathrm{signe}(\eta-\xi) \in \mathbb{C}$. Il vient :

$$\Gamma(\xi,\eta,t) = g \circ g_t(q_0) = \left[\begin{pmatrix} \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right| & \frac{\xi+\eta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{signe}(\eta-\xi) \\ \mathrm{signe}(\eta-\xi) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \right] . q_0 .$$

L'exercice 7.4 montre que cette restriction est même un difféomorphisme. □

Nous pouvons maintenant énoncer précisément la caractérisation géométrique du flot géodésique :

Proposition 7.3. — *Pour tout $(\xi,\eta,s) \in \Delta^2 \times \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\Gamma \circ g_t \circ \Gamma^{-1} : (\xi,\eta,s) \mapsto (\xi,\eta,s+t), \tag{20}$$

i.e., le temps t du flot géodésique fait avancer chaque point de $T^1\mathbb{H}$ le long de la géodésique associée d'une longueur t (comptée positivement dans le sens du vecteur unitaire tangent, négativement sinon).

Démonstration. — Remarquons d'abord que, pour $t, s \in \mathbb{R}$, $g_t(ie^s) = g_t([G_s].q_0) = [G_s G_t].q_0 = (e^{t+s}i, e^{t+s}i)$. Pour $s \neq 0$, $[ie^t, ie^{t+s}]$ est un segment de géodésique de longueur $|s|$, orienté "vers le haut" (i.e., comme Δ^+) si $s > 0$, dans le sens opposé si $s < 0$. On a bien (20), pour $\xi = 0$, $\eta = +\infty$ et $s, t \in \mathbb{R}$, i.e., sur Δ^+.

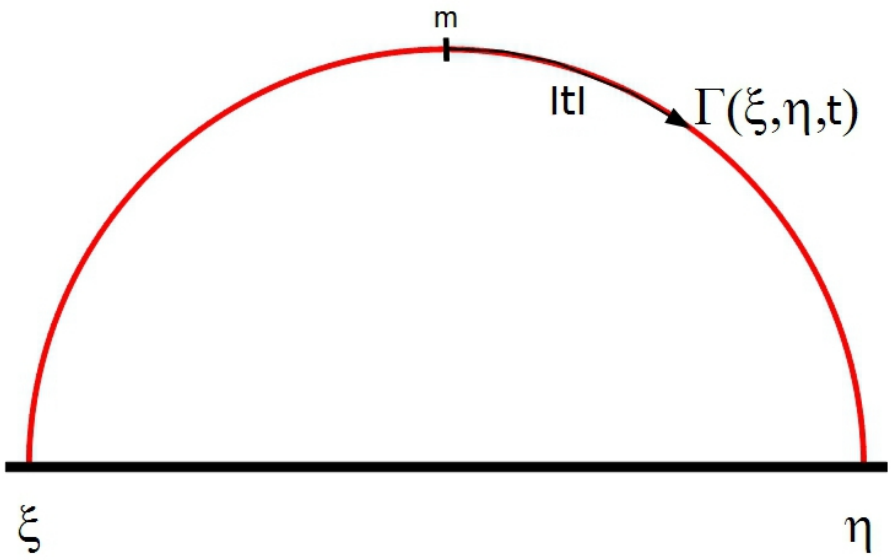


FIGURE 1. Définition de $\Gamma(\xi, \eta, t)$ et de m.

Maintenant tout $q = (x, v) \in T^1\mathbb{H}$ s'écrit $q = [A].q_0$ et donc : $g_t(q) = g_t([A].q_0) = [AG_t].q_0 = [A].([G_t].q_0)$. Autrement dit, $t \mapsto g_t(q)$ est l'image par l'isométrie $q \mapsto [A].q$ de la géodésique Δ^+. (20) en toute généralité découle finalement de ce que l'image d'une géodésique par une isométrie est encore une géodésique. □

La figure 2 présente la projection sur $\mathbb{H}$ de quelques orbites du flot géodésique (défini sur $T^1\mathbb{H}$).

Remarque 7.4. — La démonstration précédente a utilisé de façon essentielle le fait que le flot géodésique $g_t : [B].q_0 \mapsto [BG_t].q_0$ est une action par translation *à droite* dans le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et donc commute avec l'isométrie $[B].q_0 \mapsto [AB].q_0$, qui provient, elle, de l'action par translation *à gauche* dans ce même groupe. Voir l'exercice 7.5.

Ce changement de coordonnées montre la trivialité du flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}$:

Corollaire 7.5. — *Tout point part à l'infini, i.e., pour tout compact $K \subset T^1\mathbb{H}$ et tout $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$, il existe $M < \infty$ tel que $|t| > M$ implique $g_t(z, v) \notin K$. Il n'existe aucun point périodique ou récurrent ni aucune mesure de probabilité invariante.*

Ce corollaire est vrai pour tout système mesurablement conjugué à un système de la forme $\psi_t : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega \times \mathbb{R}$, $(\omega, s) \to (\omega, s + t)$ avec Ω un ensemble quelconque paramétrant l'espace des orbites.

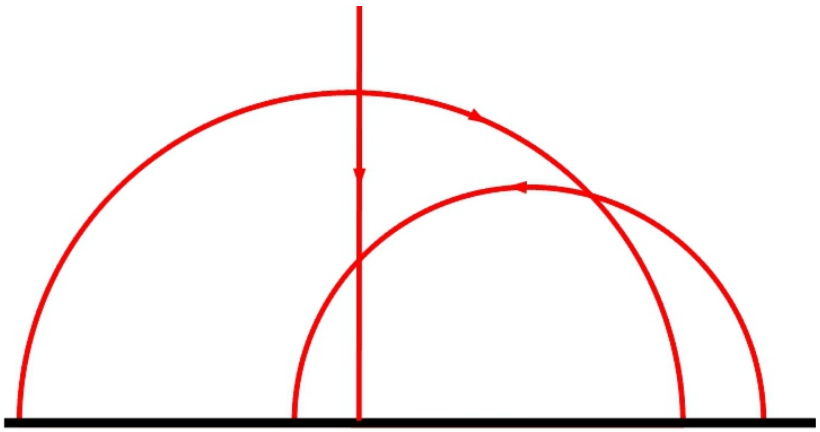


FIGURE 2. Quelques orbites du flot géodésique en projection sur $\mathbb{H}$.

Corollaire 7.6. — *Le flot géodésique* $g_t : T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ *est invariant par toute isométrie hyperbolique (préservant ou non l'orientation)* $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ *:*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g_t \circ T\gamma = T\gamma \circ g_t.$$

où $T\gamma(z, v) = (\gamma(z), \gamma'(z)v)$.

Démonstration. — Si $U : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est une isométrie, alors elle envoie la géodésique $\Gamma(\xi, \eta)$ sur la géodésique $\Gamma(U(\xi), U(\eta))$. U respectant la longueur et l'ordre linéaire sur la géodésique, $U(\Gamma(\xi, \eta, s+t)) = \Gamma(U(\xi), U(\eta), s+t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $U \circ g_t = g_t \circ U$. □

L'exercice 7.11 montre que le flot géodésique correspond à la dynamique d'un corps ponctuel glissant sans frottement sur le plan hyperbolique, dans le cadre de la mécanique classique.

7.2. Flot horicyclique

Algébriquement, ce flot se laisse définir d'une manière toute semblable au flot géodésique :

Définition 7.7. — Le **flot horicyclique**[1] $h : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ est défini par :

$$h_s : [A].q_0 \mapsto [AH_s].q_0 \text{ où } H_s := \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } q_0 := (i, i) \in T^1\mathbb{H}$$

[1] On dit parfois, sous l'influence de l'anglais : flot *horocyclique* mais nous suivrons l'usage introduit par Poincaré.

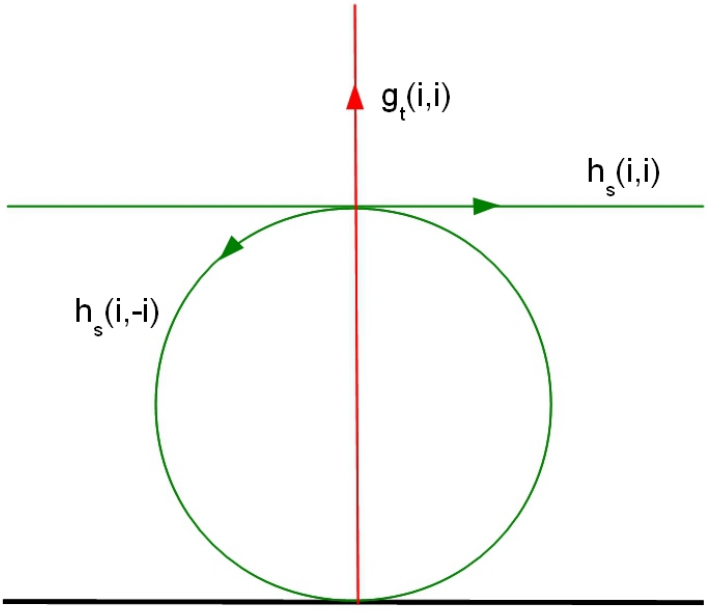


FIGURE 3. La projection sur $\mathbb{H}$ de des deux horicycles (et d'une géodésique) passant par i.

pour tout $s \in \mathbb{R}$. Toute orbite du flot horicyclique, i.e., toute courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto h_s(q)$ ($q \in T^1\mathbb{H}$), est appelée **horicycle**.

L'exercice 7.8 fait calculer deux horicycles représentés sur la figure 3. Donnons quelques conséquences immédiates mais importantes de cette définition :

Proposition 7.8. — *Les horicycles vérifient les propriétés suivantes :*

(i) Par tout point $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ passe un unique horicycle.

(ii) Le flot horicyclique est invariant par toute isométrie préservant l'orientation.

(iii) La projection sur $\mathbb{H}$ du flot horicyclique a vitesse 1 : $|(d/ds)\pi \circ h_s(q)|_{\pi h_s(q)} = 1$ pour tout $q \in T^1\mathbb{H}$, $s \in \mathbb{R}$;

(iv) Un horicycle $h : \mathbb{R} \to T^1\mathbb{H}$ est déterminé par sa projection $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$. Plus précisément, si γ est paramétrée normalement (i.e., $|\gamma'(s)|_{\gamma(s)} = 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$), alors $h(s) = (\gamma(s), i\gamma'(s))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

(v) Les projections sur $\mathbb{H}$ des horicycles sont exactement les cercles généralisés orientés positivement et tangents à $\mathbb{R}$ (on inclut les droite parallèles à $\mathbb{R}$ et orientées vers la droite).

(vi) La projection sur $\mathbb{H}$ de l'horicycle passant par $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ est le cercle généralisé tangent à et orienté par $-iv$ en z, tangent à $\mathbb{R}$ au point $\Gamma_{z,v}(+\infty)$. En particulier, son centre se trouve du côté de $z + i\mathbb{R}v$ où pointe v.

Démonstration. — Le point (i) est immédiat.

L'invariance (ii) découle de la formule : $[B].(h_s([A].q_0)) = [BAH_s].q_0 = h_s([BA].q_0)$.

La vitesse peut se calculer en $q = q_0$ et $s = 0$, on obtient $\pi \circ h_s(q_0) = i/(is+1)$ donc $d\pi \circ h_s(q_0) = 1/(si+1)^2 = 1$ pour $s = 0$. Mais $|1|_i = 1$, d'où (iii).

Par définition, $h_s([A].q_0) = (z, v)$ avec $v = (d/dz)([A].z)|_{z=i} i$ or le vecteur tangent à la projection est $w := (d/ds)h_s([A].i) = (d/ds)([AH_s].i) = (d/ds)[A].(i+s)|_{s=0} = [A]'.1$, soit $v = iw$. (iv) est démontré.

Considérons l'horicycle passant par $q_0 := (i, i)$. Par définition, c'est la courbe $h^0(s) = [H_s].(i, i) = (i + s, i)$, $s \in \mathbb{R}$, i.e., une droite horizontale. Par transitivité de l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$, l'ensemble des horicycles coincide avec l'ensemble des images de h^0 par les isométries. Ce sont donc des cercles généralisés, mais soyons plus précis.

Soit $[A] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Si $c = 0$, $[A].z = (a/d)z + (b/d)$, donc $[A].h^0$ est une droite horizontale de $T^1\mathbb{H}$. La réciproque est claire : on obtient dans ce cas toutes les droites horizontales et orientées vers la droite. Supposons $c \neq 0$. On a alors : $\lim_{t\to\pm\infty}[A].(i + t) = a/c$. Le cercle généralisé $[A].h^0$ est donc un cercle tangent à $\mathbb{R}$ en a/c. Ceci achève la preuve du point (v).

Pour le point (iv), il suffit d'écrire les définitions. L'horicycle passant par $[A].q_0$, $[A] \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, est $h(s) = [A].h^0(s) = [AH_s].(i, i)$ d'où $\pi h(s) = [AH_s]'.i$ et $(\pi h)'(s) = [AH_s]'.i$. Le point est démontré. □

7.3. Flot horicyclique dual

Contrairement au flot géodésique, le flot horicyclique n'est pas invariant par réflexion. Soit $\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\sigma(z) = -\bar{z}$, la réflexion par rapport à l'axe imaginaire pur. Son action sur $T^1\mathbb{H}$ est donnée par $\sigma(z, v) = (\sigma(z), \sigma(v))$ et donc :

$$h_s(\sigma(q_0)) = h_s(i, i) = (s + i, i) \text{ alors que } \sigma(h_s(q_0)) = \sigma(i + s) = (i - s, i).$$

Ce manque de symétrie peut se comprendre en remarquant que la description géométrique du flot horicyclique, contrairement à celle du flot géodésique, fait intervenir l'orientation : l'horicycle définit par (z, v) est tangent en z à $-iv$, c'est-à-dire v tourné de $-\pi/2$ radians.

L'image d'un horicycle par une isométrie renversant l'orientation n'est pas un horicycle, mais une orbite d'un flot semblable mais distinct :

Définition 7.9. — Le **flot horicyclique dual** $h^* : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ est défini par :

$$h^*_s : [A].q_0 \mapsto [AH^*_s].q_0 \text{ où } H^*_s := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \text{ et } q_0 := (i, i) \in T^1\mathbb{H}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

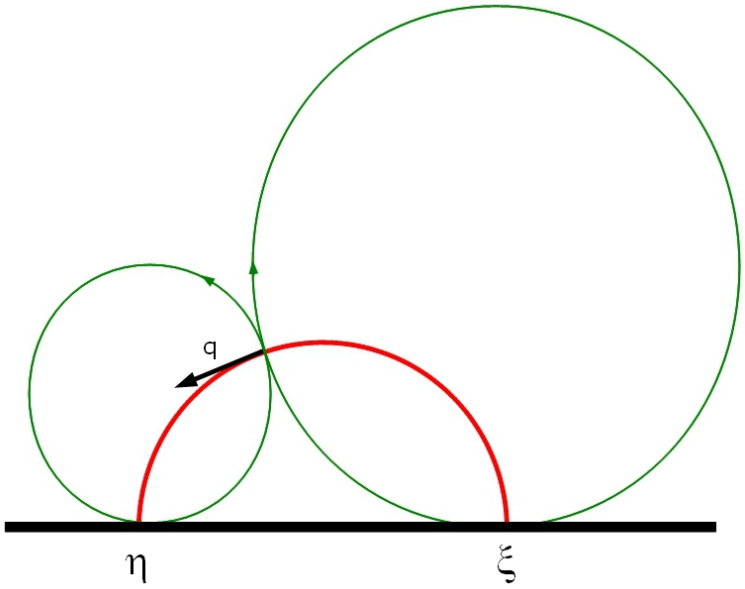


FIGURE 4. La projection sur $\mathbb{H}$ de la géodésique (en rouge) $\Gamma(\xi, \eta, \mathbb{R})$ et de l'horicycle (cercle vert à gauche) et de l'horicycle dual (cercle en vert à droite) définis par $q \in T^1\mathbb{H}$ (en noir).

Toute orbite du flot horicyclique dual, i.e., toute courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto h_s^*(q)$ $(q \in T^1\mathbb{H})$, est appelée **horicycle dual**.

L"exercice 7.12 invite à relier précisément les deux flots horicycliques par une symétrie et un changement de temps. Les propriétés du flot horicyclique dual correspondent étroitement à celles du flot horicyclique (et se prouvent exactement de la même manière) :

Proposition 7.10. — *Les horicycles vérifient les propriétés suivantes :*

(i) Par tout point de $T^1\mathbb{H}$ passe un unique horicycle dual.

(ii) L'image d'un horicycle dual par une isométrie préservant l'orientation est un horicycle dual.

(iii) Les projections sur $\mathbb{H}$ des horicycles duaux sont exactement : les droites horizontales orientées "vers la gauche" et les cercles tangents à un point de $\mathbb{R}$ orientés dans le sens négatif. Plus précisément, ce point est le point α-limite de n'importe quelle géodésique issue d'un point de l'horicycle dual.

(iv) Un horicycle dual $h : \mathbb{R} \to T^1\mathbb{H}$ est déterminé par sa projection $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$. Plus précisément, si γ est paramétrée normalement (i.e., $|\gamma'(s)|_{\gamma(s)} = 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$), alors $h(s) = (\gamma(s), i\gamma'(s))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

La figure 4 présente la géodésique, l'horicycle et l'horicycle dual définis par un même $q \in T^1\mathbb{H}$.

7.4. Exercices

Exercice 7.1. — Montrer que si U est l'ouvert riemannien "euclidien" de l'exercice 5.3 alors les géodésiques sont exactement les segments de droites et les géodésiques complètes les droites.

Exercice 7.2. — On reprend l'ouvert riemannien U et l'application $F : U \to \mathbb{R}^3$ étudiés dans l'exercice 5.4. Montrer que l'équateur de cette sphère est une géodésique dans un sens à préciser.

Exercice 7.3. — Soit $[A] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Vérifier, par un calcul direct, que $[A].\Delta^+$ est soit une demi-droite verticale, soit un demi-cercle dont les deux extrémités sont sur $\mathbb{R}$ et qu'en ces extrémités, le demi-cercle est à angle droit avec $\mathbb{R}$. Réciproquement, vérifier qu'étant donnés deux points distincts $(x_-, x_+) \in \mathbb{R}$, il existe une unique géodésique complète $\gamma : \mathbb{R} \to \infty$ vérifiant $\lim_{t\to\pm\infty} \gamma(t) = x_\pm$. Traiter les cas (x, ∞) et (∞, x) avec $x \in \mathbb{R}$. Conclure.

Exercice 7.4. — Montrer que l'application de $\mathbb{R}^* \times \Delta^2 \times \mathbb{R}$ sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ définie par :

$$(\lambda, \eta, \xi, t) \mapsto \lambda \begin{pmatrix} \frac{|\xi-\eta|}{2} & \frac{\xi+\eta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme local. En déduire que :

$$(\eta, \xi, t) \mapsto \left[\begin{pmatrix} \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right| & \frac{\xi+\eta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \right] .(i,i)$$

est un difféomorphisme entre l'ouvert $\Delta^2 \times \mathbb{R}$ et la sous-variété $T^1\mathbb{H}$.

Exercice 7.5. — Montrer que le groupe diagonal $\Delta \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, formé des (classes d'équivalence des) matrices diagonales de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit par translation à droite sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, i.e., $\delta_{[D]}([A]) = [AD]$ est une action de groupe. Cette formule définit-elle toujours une action de groupe, si on remplace Δ par un sous-groupe quelconque ?

Exercice 7.6. — Montrer que le flot géodésique est bien défini et qu'il est bien une action de $\mathbb{R}$ sur $T^1\mathbb{H}$. Montrer aussi que $g : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H}$ est de classe C^∞ et que chaque $g_t : T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ est un difféomorphisme.

Soit $q_1 \in T^1\mathbb{H}$. Trouver pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $[\tilde{G}_t] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tel que $g_t([A].q_1) = ([A\tilde{G}_t].q_1$. $\tilde{G}_t$ est-il unique ?

Exercice 7.7. — Examiner comment se modifie la définition algébrique si on remplace $q_0 := (i,i)$ par un autre point de base q_1. *Indication :* On pourra chercher $\tilde{G}_t$ tel que $g_t([A].q_1) = [A\tilde{G}_t].q_1$.

Exercice 7.8. — Calculer les horicycliques $h_{\mathbb{R}}(i,i)$ et $h_{\mathbb{R}}(i,-i)$ à partir de la définition algébrique. Comparer avec la figure 3

Exercice 7.9. — Montrer que le flot horicyclique dual défini comme $h^*_s([A].q_0) = [A\begin{pmatrix}1 & 0\\ s & 1\end{pmatrix}].q_0$ avec $q_0 := (i,i)$ est bien un flot dont les orbites coïncident avec les variétés instables.

Exercice 7.10. — La famille $z \mapsto [G_t].z$, $t \in \mathbb{R}$, définit-elle un flot agissant par isométrie ? Le flot géodésique agit-il par isométries ?

Exercice 7.11. — Pour une particule ponctuelle glissant sans frottement sur une variété M, le lagrangien $L : TM \to \mathbb{R}$ coincide avec l'énergie cinétique. Sur le plan hyperbolique $\mathbb{H}$, ce lagrangien est donc $L(z,v) = (1/2)|v|_z^2 = |v|^2/(2\Im z)$. Une courbe C^2 $\gamma : [0,T] \to \mathbb{H}$ est une solution du mouvement si et seulement si c'est un point critique de la fonctionnelle action définie par

$$S(\gamma) := \int_0^T |\gamma'(t)|^2_{\gamma(t)}\, dt$$

c'est-à-dire, que pout tout $\psi : [0,T] \to \mathbb{H}$ également C^2 avec $\psi(0) = \psi(T) = 0$, $(d/d\lambda)S(\gamma + \lambda\psi)|_{\lambda=0} = 0$. On montre que la condition précédente est équivalente à système d'équations différentielles ordinaires dites équations d'Euler-Lagrance.

Donner une interprétation dynamique (et même, mécanique) du flot géodésique.

Exercice 7.12. — On note $\sigma(z,v) := (z,-v)$. Montrer que $h^*_{\mathbb{R}}(q_0)$ et $h_{\mathbb{R}}(\sigma(q_0))$ coincident. Les flots $(h^*_s)_{s\in\mathbb{R}}$ et $(\tilde{h}_s)_{s\in\mathbb{R}}$ (défini par $\tilde{h}_s := h_{-s}$) sont-ils conjugué par une isométrie ?

CHAPITRE 8

DYNAMIQUE DU FLOT GÉODÉSIQUE

8.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous analysons la dynamique du flot géodésique sur la surface modulaire. Nous commençons par expliciter le lien dynamique avec les flots horicycliques et horicycliques duaux : ils paramètrent les ensembles de points ayant le même futur (ensemble stable) ou le même passé (ensemble instable) sous l'action du flot géodésique. Puis nous voyons comment la mesure de Liouville définie sur $T^1\mathbb{H}$ "descend" en une mesure finie sur la surface modulaire de sorte que les flots géodésiques et horicycliques y définissent des systèmes dynamiques probabilistes.

Le résultat principal de ce chapitre est l'ergodicité du flot géodésique sur la surface modulaire. La preuve suit l'*argument de Hopf*[1]. C'est la stratégie originale, datant de 1939. Elle repose entièrement sur l'existence des deux familles de courbes stables et instables évoquées plus haut. Cet argument purement dynamique s'est avéré d'une généralité considérable dès les années 1960 (extension aux systèmes hyperboliques généraux par Anosov) et connait aujourd'hui encore d'actifs développements.

La dernière section de ce chapitre aborde la dynamique topologique du flot géodésique par la construction d'une infinité de géodésiques périodiques.

8.2. Horicycles et flot géodésique

Le lien entre les deux flots s'exprime aussi bien géométriquement qu'algébriquement.

Proposition 8.1. — *Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$g_t \circ h_s = h_{e^{-t}s} \circ g_t.$$

[1] Eberhard Hopf (1902-1983).

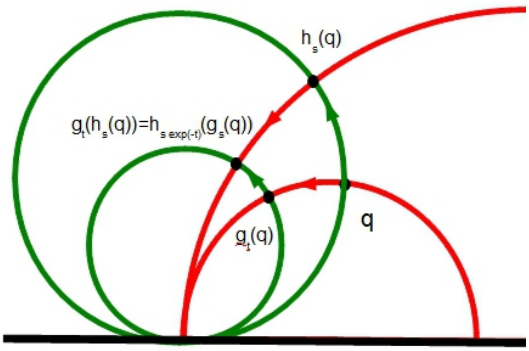


FIGURE 1. Le quadrilatère courbe ci-dessus illustre la relation $g_t \circ h_s(q) = h_{e^{-t}s} \circ g_t(q)$.

Démonstration. — Ceci se calcule directement. $g_t \circ h_s([A].q_0) = [AH_sG_t].q_0$, or :

$$H_sG_t = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & se^{-t/2} \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

De même, $h_{s'} \circ g_t([A].q_0) = [AG_tH_s].q_0$ et :

$$G_tH_s = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & s'e^{t/2} \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

On constate l'égalité pour $s' = se^{-t}$. □

La figure 1 illustre géométriquement cette relation de commutation. Cette relation s'exprime dynamiquement à l'aide de l'objet fondamental suivant :

Définition 8.2. — La **variété stable** d'un point $q \in T^1\mathbb{H}$ pour le flot géodésique est :

$$W^s(q, g_t) := \{p \in T^1\mathbb{H} : \lim_{t\to+\infty} d(g_t(p), g_t(q)) = 0\}.$$

Sa **variété instable** est

$$W^u(q, g_t) := \{p \in T^1\mathbb{H} : \lim_{t\to-\infty} d(g_t(p), g_t(q)) = 0\}.$$

Comme on ne considèrera ces ensembles que par rapport au flot géodésique, on abrègera ces notations en $W^s(q)$ et $W^u(q)$.

Proposition 8.3. — *L'horicycle d'un point $q \in T^1\mathbb{H}$ coïncide avec sa variété stable pour le flot géodésique. De plus, les points de $W^s(q, g_t)$ convergent exponentiellement les uns vers les autres :* $\lim_{t\to\infty}(1/n)\log d(g_t(p), g_t(q)) < 0$ *pour tout* $p \in W^s(q, g_t)$.

Démonstration. — Quitte à appliquer une isométrie préservant l'orientation, on peut supposer que $q = (i, i)$. On a $g_t(q) = (e^t i, e^t i)$. Par ailleurs, l'horicycle de q est la droite horizontale $s \mapsto (i + s, i)$ dans $T^1\mathbb{H}$.

Tout point $(i + s, i)$ de cet horicycle vérifie : $g_t(i + s, i) = [H_s G_t].(i, i) = [H_s].(e^t i, e^t i) = (e^t i + s, e^t i)$, d'où la convergence exponentielle :

$$d_{\mathbb{H}}(g_t(i + s, i), g_t(i, i)) = d_{\mathbb{H}}((e^t i, e^t i), (e^t i + s, e^t i) = e^{-t} s \to 0$$

et *a fortiori* l'appartenance à $W^s(q)$. Examinons la réciproque.

Soit $p \in T^1\mathbb{H}$. La géodésique définie par p est de l'un des types suivants :

- un demi-cercle ou une demi-droite pointant vers le bas : $\lim_{t\to+\infty} \Im(g_t(q)) = 0$, donc $\lim_{t\to+\infty} d(g_t(p), g_t(q)) = +\infty$. p n'appartient ni à $W^s(q)$, ni à l'horicycle de q ;
- une demi-droite pointant vers le haut : $p = (x+iy, i)$. Or $d_{\mathbb{H}}(g_t(x+i, i), q)$ tends exponentiellement vers zéro alors que $d_{\mathbb{H}}(g_t(x+iy, i), g_t(x+i, i)) = d_{\mathbb{H}}(x+iy, x+i) = |\log y|$. On a donc deux cas : si $y \neq 1$, p n'appartient ni à la variété stable ni à l'horicycle de q ; si $y = 1$, il appartient aux deux. On constate dans ce cas la convergence exponentielle des deux géodésiques.

□

L'exercice 7.9 invite à vérifier que les variétés instables du flot géodésique coincident avec les orbites du *flot horicyclique dual*, donné par :

$$h_s^* : [A].q_0 \mapsto [AH_s^*].q_0 \text{ avec } H_s^* := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce flot vérifie les propriétés analogues au flot horicyclique.

Finalement, la combinaison des trois flots nous permet de nous déplacer dans trois directions indépendantes dans $T^1\mathbb{H}$ et de définir des paramétrages locaux :

Proposition 8.4. — *Il existe un ouvert U de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *tel que, pour tout $q \in T^1\mathbb{H}$,*

$$(s, t, s^*) \mapsto h_s \circ g_t \circ h_{s^*}(q) \tag{21}$$

définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $U.q$ pour les coordonnées : [(2)]

$$(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & (1 + bc)/a \end{pmatrix}.q_0 \in T^1\mathbb{H}.$$

Remarque 8.5. — Un énoncé similaire a lieu pour $g_t \circ h_s \circ h_{s^*}^*$, etc.

Démonstration. — L'application (21), qu'on note ici f, s'écrit : $f(s^*, t, s) = [AF(s, t, s^*)].q_0$ si $q = [A].q_0$ et $F(s, t, s^*) = H_{s^*} G_t H_s$. On montre que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $U := \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) : a > 0\}$ où a désigne le coefficient

(2) On peut montrer que ceci coïncide avec la notion de différentiabilité pour une sous-variété.

supérieur gauche de A. Montrons d'abord que F est bien une bijection en calculant son inverse.

Etant donné $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ avec $a > 0$, cherchons (s^*, t, s) tel que $F(s^*, s, t) = A$.On doit avoir :

$$F(s,t,s^*) := \begin{pmatrix} e^{t/2} & e^{t/2}s \\ s^*e^{t/2} & ss^*e^{t/2} + e^{-t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On obtient quatre équations : (i) $e^{t/2} = a$ donc $t = 2\log a$; (ii) $e^{t/2}s = b$ donc $s = b/a$; (iii) $e^{t/2}s^* = c$ donc $s^* = c/a$; (iv) $e^{t/2}s^*s + e^{-t/2} = d$, mais cette équation est satisfaite par les choix précédents. On donc déterminer un inverse avec :

$$F^{-1}(a,b,c) = (2\log a, b/a, c/a)$$

F comme son inverse sont différentiables donc des difféomorphismes. □

8.3. Mesure de Liouville

La notion d'aire associée à la géométrie hyperbolique est la suivante.

Définition 8.6. — Soit m la **mesure de Liouville** sur $T^1\mathbb{H}$ définie par :

$$m(\phi) = \int_{T^1\mathbb{H}} f\, dm := \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[} f(z,v)\,\frac{dxdyd\theta}{2\pi y^2} \text{ où } z = x+iy,\ v/|v|_z = e^{i\theta}$$

pour toute fonction $f \in C_c(T^1\mathbb{H})$, i.e., $f : T^1\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ continue à support compact.

Théorème 8.7. — *La mesure de Liouville est infinie, finie sur les compacts.*

Cette mesure est invariante par toute isométrie ainsi que par les flots géodésiques et horicycliques

$$T\gamma_*(m) = (g_t)_*(m) = (h_s)_*(m) = m \qquad \forall \gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{H}), t, s \in \mathbb{R}$$

Remarque 8.8. — Un corollaire de ce théorème est l'existence d'une mesure positive localement finie sur le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et invariante par l'action par translations à gauche et à droite de ce même groupe. On dit que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un *groupe unimodulaire*. L'exercice 8.5 aborde cette question dans le cas des groupes de Lie compacts.

Pour démontrer ce théorème et plus généralement analyser la mesure de Liouville, il est commode d'utiliser les coordonnées géodésiques :

Lemme 8.9. — *Dans les coordonnées géodésiques du lemme 7.2, la mesure de Liouville s'exprime :*

$$m(\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\Gamma(\eta,\xi,t))\frac{2\,d\eta d\xi dt}{(\xi-\eta)^2}$$

pour tout $\phi \in C_c(T^1\mathbb{H})$.

Démonstration du lemme. — Le lemme 7.2 implique que Γ est un difféomorphisme à des ensembles de mesure nulle près $(\{\infty\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\cup\mathbb{R}\times\{\infty\}\times\mathbb{R}$ d'un côté, $\mathbb{H}\times\{i\}\cup\mathbb{H}\times\{-i\}$ de l'autre). Il est par ailleurs commode d'introduire la variante suivante de Γ, où la longueur hyperbolique est remplacée par l'angle au centre euclidien :

$$F(\eta,\xi,\alpha) := \left(\frac{\eta+\xi}{2} + \frac{|\xi-\eta|}{2} ie^{-i\alpha}, -\alpha\right) \in T^1\mathbb{H}.$$

Supposons par exemple que $\xi > \eta$ et donc $|\xi-\eta| = \xi-\eta$ (l'autre cas est parfaitement analogue). Il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(1 - ie^{-i\alpha}, 0\right) \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(1 + ie^{-i\alpha}, 0\right) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \left(\frac{1}{2}(\xi-\eta)e^{-i\alpha}, -1\right)$$

et

$$\det F'(\eta,\xi,\tau) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1-\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 1+\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ (\xi-\eta)\cos\alpha & -(\xi-\eta)\sin\alpha & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cos\alpha$$

Définissons $\alpha(\eta,\xi,t)$ par la relation $\Gamma(\eta,\xi,t) = F(\eta,\xi,\alpha)$. En dérivant par rapport à α, on obtient la norme suivante pour la structure riemannienne :

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right|_{\Gamma(\eta,\xi,t)} = \frac{|\xi-\eta|}{2}\left(\frac{|\xi-\eta|}{2}\cos\alpha\right)^{-1} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Le jacobien de $(\eta,\xi,t)\mapsto(\eta,\xi,\alpha)$ vaut donc $\cos\alpha$ et

$$\operatorname{Jac}\Gamma(\eta,\xi,t) = \operatorname{Jac}F(\eta,\xi,\alpha)\frac{\partial(\eta,\xi,\alpha)}{\partial(\eta,\xi,t)} = \frac{1}{2}\cos^2\alpha$$

La formule du changement de variable donne :

$$dm = \frac{dxdyd\theta}{y^2} = \operatorname{Jac}\Gamma(\eta,\xi,s)\frac{d\eta d\xi ds}{(\eta-\xi)^2\cos^2\alpha/4} = \frac{2\,d\eta d\xi ds}{(\eta-\xi)^2}.$$

□

Démonstration du théorème 8.7. — **Etape 0 :** Premières propriétés.

La formule ci-dessus définit sans difficultés une mesure positive. Sur tout compact inclus dans $T^1\mathbb{H}$, $\inf y > 0$ d'où la finitude sur les compacts. D'un autre côté, l'indépendance de la densité par rapport à x donne $m(T^1\mathbb{H}) = \infty$.

Etape 1 : invariance par les isométries.

Soit donc $\gamma : \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ une isométrie. Supposons d'abord qu'elle préserve l'orientation : $\gamma(z) = [A].z$ pour un certain $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. En posant $z = x+iy$ et $\psi(z)$ une détermination de l'argument de $1/(cz+d)^2$, on a :

$$(d/dz)T\gamma(z,\theta) = (1/(cz+d)^2, d\psi) \text{ et } (d/d\theta)T\gamma(z,\theta) = (0,1)$$

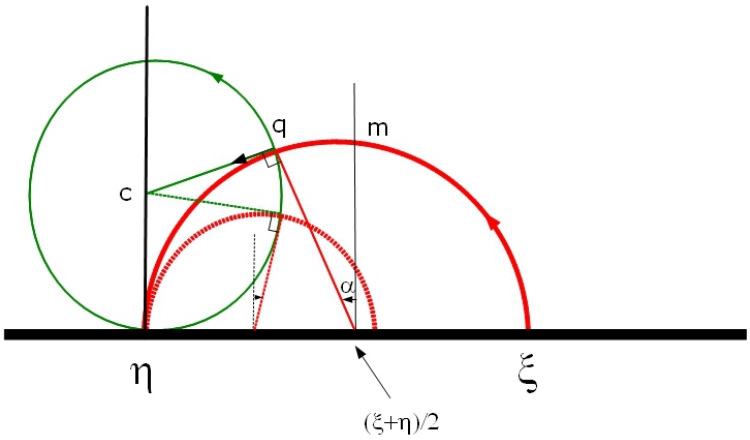


FIGURE 2. Description du flot horicyclique dans les coordonnées géodésiques.

Le jacobien $\mathrm{Jac}(T\gamma)(z,\theta)$ est donc $1/|cz+d|^4$. D'après la formule du changement de variable, vu $\Im([A].z) = |cz+d|^{-2}\Im(z)$ et en posant $\xi + i\eta := \gamma(z)$ et $\vartheta := \theta + \psi(z)$:

$$\begin{aligned} m(\phi\circ[A]) &= \int_{T^1\mathbb{H}} f\circ T\gamma(z,\theta))\,\frac{dxdyd\theta}{2\pi y^2} \\ &= \int_{T\gamma(T^1\mathbb{H})} \frac{f(w,\vartheta)}{2\pi y^2}\,\frac{d\xi d\eta d\vartheta}{\mathrm{Jac}(T\gamma)} \\ &= \int_{T^1\mathbb{H}} f(\xi+i\eta, e^{i\vartheta})\,\frac{1}{|cz+d|^{-4}}\,\frac{\eta^2}{y^2}\,\frac{d\xi d\eta d\vartheta}{2\pi\eta^2} = m(\phi). \end{aligned}$$

L'invariance par isométrie est démontrée.

Etape 2 : invariance par les flots.

L'invariance par le flot géodésique découle immédiatement de l'expression de la mesure dans les coordonnées géodésiques : la densité est invariante et le Jacobien de $(\xi,\eta,s)\mapsto(\xi,\eta,s+t)$ est égal à 1.

Passons maintenant au flot horicyclique. On utilise encore les coordonnées géodésiques et la formule suivante. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot sur U défini par un champ de vecteur $X = (X_1,\dots,X_d) : U \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1. Alors, pour toute fonction f de classe C^1 et à support compact dans U et toute fonction ρ de classe C^1,

$$\frac{d}{dt}\int_U f\circ F_t(x)\,\rho dx = -\int_U f\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho(x)X_i(x))\,dx. \tag{22}$$

Il suffit donc de montrer la nullité de la *divergence* par rapport à ρ, $\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho(x)X_i(x))$.

Appliquons cette remarque au champ défini par le flot horicyclique dans les coordonnées géodésiques $\Gamma(\xi,\eta,s)$, ou plus précisément la variante $F(\xi,\eta,\alpha)$, introduite ci-dessus. Pour calculer le champ correspondant X, on s'appuie sur la figure 2. L'orbite de $(z,v)=F(\xi,\eta,\alpha)$ sous le flot horicyclique se projette en un cercle tangent à $\mathbb{R}$ en η, passant par z et tangent à (et orienté comme) $-iv$. Notons c et $\rho>0$ le centre et le rayon de ce cercle. En exprimant $\Im(z)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}|\xi-\eta|\cos\alpha=\rho(1+\sin\alpha)$$

soit

$$2\rho=\operatorname{signe}(\xi-\eta)\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}(\xi-\eta).$$

En se plaçant sur l'horicycle, on a $\rho=\text{const}$, $\eta=\text{const}$ et $\alpha=\alpha(q,s)$ pour $s\in\mathbb{R}$, le paramétrage selon la longueur. En dérivant par rapport à s l'équation ci-dessus,

$$0=-\operatorname{signe}(\xi-\eta)\frac{-\sin\alpha-1}{(1+\sin\alpha)^2}(\xi-\eta)\alpha'(s)+\operatorname{signe}(\xi-\eta)\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\xi'(s)$$

Soit

$$\xi'(s)=-\frac{1}{\cos\alpha}(\xi-\eta)\alpha'(s)$$

Finalement, la vitesse unité du flot horicyclique donne :

$$1=\frac{\rho|\alpha'(s)|}{|\xi-\eta|\cos\alpha/2}=\frac{|\alpha'(s)|}{1+\sin\alpha}$$

Soit $\alpha'(s)=\sigma(1+\sin\alpha)$ avec $\sigma=\pm1$. Le champ de vecteur recherché est donc $X(\eta,\xi,\alpha)=(E,\Xi,A)$ avec :

$$E=0,\ A=\sigma(1+\sin\alpha),\ \Xi=\sigma\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}(\xi-\eta)$$

Calculons la divergence correspondante par rapport à la densité $\rho(\eta,\xi,\alpha)=2/(\xi-\eta)^2\cos\alpha$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\eta}(E\cdot\rho)+\frac{\partial}{\partial\xi}(\Xi\cdot\rho)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(A\cdot\rho)\\&\quad=0+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sigma\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{2}{(\xi-\eta)\cos\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sigma(1+\sin\alpha)\frac{2}{(\xi-\eta)^2\cos\alpha}\right)\\&\quad=\sigma\frac{1+\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{-2}{(\xi-\eta)^2}+\sigma\frac{\cos^2\alpha+(1+\sin\alpha)\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{2}{(\xi-\eta)^2}=0\end{aligned}$$

□

8.4. Passage à la surface modulaire

On montre comment les flots géodésiques et horicycliques ainsi que la mesure de Liouville passent de $T^1\mathbb{H}$ au quotient $\mathbb{M}=T^1\mathbb{H}/\Gamma$.

Définition 8.10. — Les flots géodésiques, horicycliques et horicycliques duaux sur $\mathbb{M}$ sont définis par :

$$g_t(\Gamma.q) = \Gamma.(g_t(q)),\ h_t(\Gamma.q) = \Gamma.(h_s(q)) \text{ et } h_t^*(\Gamma.q) = \Gamma.(h_s^*(q))$$

Remarque 8.11. — On vérifie facilement que les applications g_t, h_s et h_s^* sont bien définies et induisent des flots. Cela se déduit de leur préservation par les isométries.

On observe que la relation de commutation passe au quotient :

$$g_t \circ h_s = h_{se^{-t}} \circ g_t \tag{23}$$

Tout aussi important, la mesure de Liouville passe au quotient et en fait un espace de volume fini. Nous donnons une définition *ad hoc* de cette mesure quotient :

Définition 8.12. — La **mesure de Liouville** sur $\mathbb{M} := T^1\mathbb{H}/\Gamma$ est la mesure borélienne μ définie par la formule suivante :

$$\mu(A) = m(\pi^{-1}(A) \cap E \times \mathbb{S}^1)$$

où E est le domaine fondamental de la proposition 6.16.

Remarquons que la mesure de Liouville sur $\mathbb{M}$ n'est *pas l'image* de celle sur $T^1\mathbb{H}$: cette image est en effet infinie sur tout ouvert non-vide, même relativement compact.

Lemme 8.13. — *La mesure de Liouville sur $\mathbb{M}$ est finie, de support total et invariante par les flots géodésiques, horicycliques et horicycliques duaux.*

Démonstration. — La mesure totale se borne facilement à partir de $E \subset [-1 \times 1] \times [1/2, \infty[$:

$$m(\mathbb{M}) = m(E \times \mathbb{S}^1) = \int_E \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dxdyd\theta}{y^2} \leq 2\pi \times \int_{\sqrt{3}/2}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

On pose $\hat{E} := E_0 \times \mathbb{S}^1$. La proposition 6.16 implique que $\{\gamma\hat{E} : \gamma \in \Gamma\}$ est une partition de $T^1\mathbb{H}$.

Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{M}$, $m(U) = m(\pi^{-1}U \cap \hat{E})$ or cette dernière quantité est non-nulle, m étant de support total dans $T^1\mathbb{H}$.

Montrons maintenant l'invariance par le flot géodésique. En utilisant $\pi \circ g_t = g_t \circ \pi$, $\pi^{-1}(A) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(\pi^{-1}(A) \cap E)$, $m(\gamma\hat{E} \cap \gamma'\hat{E}) = 0$ pour $\gamma \neq \gamma'$ dans Γ, on obtient

cette invariance :

$$\begin{aligned} m(g_t^{-1}(A)) &= m(\pi^{-1}(g_t^{-1}(A)) \cap \hat{E}) = m(g_t^{-1}(\pi^{-1}(A)) \cap \hat{E}) \\ &= m\left(g_t^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}\left(\pi^{-1}(A) \cap \hat{E}\right)\right) \cap \hat{E}\right) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} m\left(\gamma^{-1} g_t^{-1}(\pi^{-1}(A) \cap \hat{E}) \cap \hat{E}\right) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} m\left(g_t^{-1}(\pi^{-1}(A) \cap E) \cap \gamma\hat{E}\right) \\ &= m\left(g_t^{-1}(\pi^{-1}(A) \cap \hat{E})\right) = m(A). \end{aligned}$$

Ce raisonnement s'applique tel quel aux deux flots horicycliques. □

Notons un corollaire géométrique immédiat de l'existence d'une mesure finie et invariante. Le théorème de récurrence de Poincaré donne en effet :

Corollaire 8.14. — *Pour Lesbegue-presque tout $q \in \mathbb{M}$, la géodésique $(g_t(q))_{t\in\mathbb{R}}$ est récurrente.*

Lemme 8.15. — *Une partie mesurable de $T^1\mathbb{H}$ est de mesure nulle si et seulement si son image par la surjection canonique $\pi : T^1\mathbb{H} \to \mathbb{M}$ est de mesure nulle.*

Démonstration. — Soit $A \subset T^1\mathbb{H}$ mesurable. $\pi : T^1\mathbb{H} \to \mathbb{M}$ est ouverte, elle envoie donc un borélien sur un borélien et donc un mesurable sur un mesurable : $\pi(A)$ est mesurable. On a : $m_{\mathbb{M}}(\pi(A)) = m_{T^1\mathbb{H}}(\pi^{-1}(\pi(A)) \cap E) = m_{T^1\mathbb{H}}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(A) \cap E)$. Si $m(A) = 0$, alors $m(\gamma A) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ par invariance. Γ étant dénombrable, on obtient $m_{\mathbb{M}}(\pi(A)) = 0$.

Réciproquement, supposons $m_{T^1\mathbb{H}}(A) > 0$. $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma\hat{E}$ étant une partition mesurable et dénombrable de $T^1\mathbb{H}$, $m_{T^1\mathbb{H}}(\gamma(A) \cap E) > 0$ pour un $\gamma \in \Gamma$. Mais ceci implique $m_{\mathbb{M}}(\pi(A)) > 0$. □

8.5. Ergodicité du flot géodésique

Nous pouvons maintenant formuler le théorème principal de ce chapitre.

***Théorème 8.16* (E. Hopf (1939))**. — *Le flot géodésique sur la surface modulaire munie de sa mesure de Liouville normalisée définit un système dynamique probabiliste et ergodique.*

Donnons en une conséquence géométrique :

Corollaire 8.17. — *Il existe une géodésique dense sur $\mathbb{M}$.*

Remarque 8.18. — Hopf avait obtenu en 1939 l'ergodicité pour toutes les variétés compactes de courbure constante et strictement négative. Le cas de la courbure strictement négative mais variable n'a été obtenu que dans les années 1960 grâce aux travaux de l'école soviétique et notamment d'Anosov (voir [**1, 22**]). L'argument introduit par Hopf (que nous allons expliquer ci-dessous) reste toujours d'actualité par sa généralité quoiqu'il existe des preuves plus "efficaces", telle la preuve algébrique expliquée dans l'exercice 8.6.

8.5.1. Deux conséquences du théorème ergodique. — Dans cette section, $(X, \mathcal{X}, \mu, (g_t)_{t\in\mathbb{R}})$ est un système dynamique probabiliste en temps $\mathbb{R}$[(3)] défini sur un espace métrique σ-compact et connexe (ce sera le flot géodésique sur la surface modulaire munie de la mesure de Liouville normalisée).

Pour toute fonction $f \in C_c(X) \subset L^1(\mu)$, on pose :

$$f^+(x) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(g_t(x))\,dt \text{ et } f^-(x) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(g_{-t}(x))\,dt$$

L'exercice suivant étend à tout $L^1(\mu)$ ces formules, qui n'ont *a priori* pas de sens pour une fonction définie seulement presque partout

Exercice 8.1. — Montrer que $\|f^+\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$ et en déduire une définition de f^+ et f^- pour $f \in L^1(\mu)$.

Remarquons d'abord la coincidence presque partout de ces fonctions :

Lemme 8.19. — *Soit $(X, \mathcal{X}, \mu, (g_t)_{t\in\mathbb{R}})$ un système dynamique probabiliste, non nécessairement ergodique. Pour toute fonction $f \in L^1(\mu)$, l'ensemble*

$$X_f := \{x \in X : f^+(x) = f^-(x)\} \text{ est de mesure } \mu(X_f) = 1.$$

Démonstration. — D'après le théorème ergodique ponctuel, les deux fonctions coincident (modulo μ) avec $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{I})$ si $\mathcal{I}$ est la tribu des invariants pour g ou g^{-1}, indifféremment. En effet, l'invariance par g d'une mesure ou d'une partie modulo μ est équivalente à l'invariance par l'inverse de g. L'assertion suit immédiatement. □

Cette symétrie est un phénomène purement ergodique et tombe en défaut sur un ensemble de mesure nulle comme le montre l'exemple suivant.

Exercice 8.2. — Montrer que, dans le cas d'un schéma de Bernoulli, l'exclusion d'un ensemble de mesure nulle est indispensable dans le résultat précédent.

Remarquons maintenant le critère d'ergodicité suivant :

(3) Les énoncés et les preuves sont similaires en temps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

Proposition 8.20. — *Soit $(X, \mathcal{X}, \mu, (g_t)_{t\in\mathbb{R}})$ un système dynamique probabiliste défini sur un espace métrique σ-compact et connexe. Supposons que le support de μ est X tout entier.*

$(X, \mathcal{X}, \mu, (g_t)_{t\in\mathbb{R}})$ est ergodique si et seulement s'il existe $R > 0$ tel que pour toute fonction continue à support compact $f \in C_c(X)$ et tout $x \in X$, f^+ est constante μ-presque partout sur $B(x, R) \subset X$.

Remarque 8.21. — On peut remplacer f^+ par f^- dans l'énoncé précédent, $(X, \mathcal{X}, \mu, (g_{-t})_{t\in\mathbb{R}})$ vérifiant les mêmes hypothèses et étant ergodique en même temps que le système initial.

Démonstration de la proposition. — $f^+ = \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{I})$ est une fonction presque partout constante si le système est ergodique. f^+ est donc *a fortiori* presque partout constante sur toute boule.[(4)] Montrons maintenant la réciproque.

Fixons $f \in L^1(\mu)$ et $x \in X$. Soit C l'union des boules $B(z, R)$ telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, $z_0, \dots, z_N \in X$ avec $z_0 = x$, $z_N = z$ et $B(z_i, R) \cap B(z_{i+1}, R) \neq \emptyset$. Si z$\in C$, alors $B(z, R) \subset C : C$ est ouvert. Si $z \notin C$, alors $B(z, R) \cap C = \emptyset : C$ est fermé. X étant connexe, $C = X$. Par ailleurs, $B(z_i, R) \cap B(z_{i+1}, R)$ étant un ouvert non vide est de mesure non-nulle, vu $\mathrm{supp}(\mu) = X$. Donc la valeur prise par f^+ μ-presque partout sur les deux boules coincide. f^+ est constante μ-presque partout sur $C = X$.

Observons qu'il suffit d'avoir la propriété pour $f \in C_c(X)$ pour l'obtenir pour tout $f \in L^1(\mu)$ par densité de $C_c(X)$ dans $L^1(\mu)$ (voir C.44) : pour tout $g \in L^1(\mu)$, il existe une suite de fonctions continues à support compact $g_n \to g$ dans $L^1(\mu)$. Par hypothèse les g_n^+ sont constantes μ-p.p. Or $\|g_n^+ - g^+\|_{L^1} \leq \|g_n - g\|_{L^1}$, i.e., $g_n^+ \to g^+ : g^+$ est également constante μ-p.p.

Pour conclure, on applique cela à $f = 1_A$ où A est une partie mesurable invariante. On a $1_A^+ = 1_A$. 1_A^+ devant être μ-p.p. constante, on a : $\mu(A) = 0$ ou 1 : le système est bien ergodique. □

8.5.2. Constance le long des feuilles. — Soit X un espace métrique et $g_t : X \to X$ un flot sur cet espace métrique (qui seront l'espace tangent de la surface modulaire et le flot géodésique). On rappelle la définition des ensembles stables et instables :

$$W^s(x, g) := \{y \in X : \lim_{t\to\infty} d(g_t(y), g_t(x)) = 0\}$$
$$W^u(x, g) := \{y \in X : \lim_{t\to\infty} d(g_{-t}(y), g_{-t}(x)) = 0\}.$$

Lemme 8.22. — *Pour tout $x \in X$, pour tout $f \in C_c(X)$, pour tous $y \in W^s(x, g)$ et $z \in W^u(x, g)$,*

$$f^+(x) = f^+(g_t(x)) = f^+(y) \text{ et } f^-(x) = f^-(g_t(x)) = f^-(z).$$

(4) On vérifierait, sans difficulté, que f^+ est g_t-invariante, ce qui donne une autre preuve de sa constance.

Démonstration. — L'égalité $f^+(x) = f^+(g_t(x))$ s'obtient en utilisant que f est bornée :

$$\begin{aligned} f^+(g_t(x)) &= \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(g_s(g_t x))\,ds \\ &= \limsup_{T\to\infty} \frac{T+t}{T}\frac{1}{T+t}\int_t^{T+t} f(g_s(x))\,ds = f^+(x). \end{aligned}$$

On sait que $d(g_t(x), g_t(y)) \to 0$ quand $t \to +\infty$. La continuité uniforme de f donne donc pour tout $\epsilon > 0$ et tout $y \in W^s(x, g)$, un $T_0 < \infty$ tel que pour tout $t > T_0$, $|f(g_t x) - f(g_t y)| < \epsilon$ et

$$|f^+(x) - f^+(y)| \le \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(2\sup|f|\cdot T_0 + \int_{T_0}^T \epsilon\,dt\right) \le \epsilon.$$

En passant à la limite $\epsilon \to 0$, on obtient $f^+(x) = f^+(y)$.

Le deuxième groupe d'inégalités se montre de la même façon. □

8.5.3. Utilisation de la structure produit. — L'idée est de propager la valeur de f^+ en un point q_0 bien choisi d'abord sur la surface de dimension 2 engendrée par un segment de la géodésique de q_0 et les courbes stables la traversant, puis d'étendre ceci dans la troisième dimension en passant à f^- grâce à la constance de cette dernière fonction le long des courbes instables.

Le point délicat est que l'égalité $f^+(q) = f^-(q)$ a lieu pour μ-presque partout et non pour tout q, comme le souligne l'exercice 8.2.

On rappelle que les applications suivantes, définies pour $q \in T^1\mathbb{H}$ arbitraires, sont des difféomorphismes sur leurs images (voir (21) p. 109) :

$$F_q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & T^1\mathbb{H} \\ (s,t,s') & \mapsto & h_s \circ g_t \circ h^*_{s'}(q) \end{array} \quad \text{et} \quad G_q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & T^1\mathbb{H} \\ (s',s,t) & \mapsto & h^*_{s'} \circ h_s \circ g_t(q). \end{array}$$

De plus leurs images contiennent $B(q, R)$ avec $R > 0$ indépendant de q.

Démonstration du théorème 8.16. — Soit $f \in C_c(\mathbb{M})$ et $f^+, f^- : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ les limites de Birkhoff. Soit R fixé comme ci-dessus. On va montrer que pour tout $x \in \mathbb{M}$, f^+ et f^- coincident m-presque partout sur toute boule de rayon R. La proposition 8.20 donnera alors l'ergodicité de (g_t, m).

Etape 0 : *Passage sur $T^1\mathbb{H}$*

On étend f, f^+, f^- en $\hat f, \hat f^+, \hat f^- : T^1\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ par $\hat f^\pm = f^\pm \circ \pi$, avec $\pi : T^1\mathbb{H} \to \mathbb{M}$ la surjection canonique. Les égalités du lemme 8.22 s'étendent à $T^1\mathbb{H}$ vu l'invariance par isométrie des flots g_t, h_s et $h^*_{s'}$. Soit $X_f \subset \mathbb{M}$, l'ensemble de mesure totale où $f^+ = f^-$. On note $\hat X_f$ son relevé $\pi^{-1}(X_f) = \{q \in T^1\mathbb{H} : \hat f^+(q) = \hat f^-(q)\}$.

Jusqu'à nouvel ordre, on se place exclusivement sur $T^1\mathbb{H}$ et on simplifie les notations $\hat X_f, \hat f, \ldots$ en $X_f, f, \ldots$. On se donne $q \in T^1\mathbb{H}$.

Etape 1 : *Abondance de X_f dans $F_q(\mathbb{R}^2 \times \{s'\})$ pour p.t. $s' \in \mathbb{R}$*

On introduit $I_K := [-K, K]$, pour $0 < K < \infty$, afin de se ramener ci-après à des ensembles de mesure finie. On calcule, en utilisant les théorèmes du changement de variable puis de Fubini :

$$\begin{aligned} m(X_f \cap F_q(I_K^3)) &= \int_{I_K^3} 1_{X_f} \circ F_q(s,t,s') \frac{\operatorname{Jac} F_q(s,t,s')}{y_q(s,t,s')^2}\, dsdtds' \\ &= \int_{I_K} \left(\int_{I_K^2} 1_{X_f} \circ F_q(s,t,s') \rho(s,t,s')\, dsdt \right) ds' \end{aligned}$$

avec $y_q(s,t,s') = \Im(z)$ si $F_q(s,t,s') = (z,v)$ et $\rho(s,t,s')$ une fonction strictement positive. De la même façon,

$$m(F_q(I_K^3)) = \int_{I_K} \left(\int_{I_K^2} 1_{X_f} \circ F_q(s,t,s') \rho(s,t,s')\, dsdt \right) ds'.$$

En utilisant (deux fois) l'implication $\int f = 0$ et $f \geq 0 \implies f = 0$ p.p., $m(X_f \cap F_q(I_K^3)) = m(F_q(I_K^3))$ pour tout $K \in \mathbb{N}$ donne, que pour Lebesgue-presque tout $s' \in \mathbb{R}$,

$$\text{pour Lebesgue-presque tout } (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad 1_{X_f} \circ F_q(s,t,s') = 1 \tag{24}$$

On peut donc trouver $|s'_0| < R/2$ tel que (24) ait lieu pour $s' = s'_0$. Posons $q_0 := F_q(0,0,s'_0) = h_{s'_0}(q)$. Notons que $d(q,q_0) \leq |s'_0| < R/2$.

Vu le lemme 8.22, on a $f^+(p) = f^+(q_0)$ pour tout $p \in F_q(\mathbb{R}^2 \times \{s'_0\})$. Vu le choix de q_0, on a : $f^-(p) = f^+(p)$ pour "presque tout" p dans $F_q(\mathbb{R}^2 \times \{s'_0\})$. Plus explicitement, pour Lebesgue-presque tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$f^-(p) = f^+(p) = f^+(q_0) \qquad \text{où } p := F_q(s,t,s'_0).$$

Etape 2 : *Constance p.p. dans $B(q_0, R/2)$*

Considérons maintenant $G(s',s,t) := G_{q_0}(s',s,t) = h_{s'} \circ h_s \circ g_t(q_0)$. On a $G(0,s,t) = F_q(s,t,s'_0)$ pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^2$. Donc, pour Lebesgue presque tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$f^-(G(0,s,t)) = f^+(G(0,s,t)) = f^+(q_0).$$

Vu le lemme 8.22, on a donc, pour tout $s' \in \mathbb{R}$, pour Lebesgue presque tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$f^-(G(s',s,t)) = f^-(G(0,s,t)) = f^+(G(0,s,t)) = f^+(q_0).$$

Finalement, pour Lebesgue presque tout $(s',t,s) \in \mathbb{R}^3$, $f^-(G(s',t,s)) = f^+(q_0)$. Comme l'image d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^3$ par une application C^1 est un ensemble de mesure de Liouville nulle dans $T^1\mathbb{H}$, on voit que f^- est m-p.p. constante sur $G(\mathbb{R}^3)$. On conclut en remarquant que $G(\mathbb{R}^3)$ contient $B(q_0,R) \supset B(q,R/2)$. □

8.6. Construction de géodésiques périodiques

Proposition 8.23. — *Il existe une infinité de géodésique périodiques sur* $\mathbb{M}$.

Démonstration. — Fixons n un entier positif suffisamment grand. Considérons la transformation de Moebius de $\mathbb{H}$: $\gamma(z) = -1/(z-n)$. Elle a deux points fixes distincts sur l'axe réel :

$$\xi = \frac{n - \sqrt{n^2-4}}{2} = \frac{2}{n} + o(1/n) \text{ et } \eta = \frac{n + \sqrt{n^2-4}}{2} = n - \frac{2}{n} + o(1/n).$$

Notons que $\xi \in]0, 1/2[$ et $\eta \in]n-1/2, n[$. Soit G la géodésique issue de ξ et aboutissant à η. γ étant une isométrie, elle envoie G sur la géodésique allant de $\gamma(\xi) = \xi$ à $\gamma(\eta) = \eta$, donc sur elle-même (et avec la même orientation).

Comme $\xi \in]n-1/2, n[$, il existe p_2, intersection de G avec le cercle unité centré en n. Pour n assez grand, $n - \Re(p_2) = \mathcal{O}(1/n)$ donc $n - 1/2 < \Re(p_2) < n$.

On en déduit que $p_2 - n$ se situe sur le cercle unité centré en 0 avec $-1/2 < \Re(p_2 - n) < 0$. Donc $p_1 := \gamma(p_2) = \iota(p_2 - n) \in e_2$. On en déduit qu'il existe $\tau > 0$ tel que $\gamma(p) = g_\tau(p)$ pour tout $p \in G$: la géodésique est périodique sur $\mathbb{M}$.

L'arc de la géodésique G situé entre p_1 et p_2 est donc contenu dans $E \cup (E+1) \cup \ldots (E+n)$.

Comme $\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, G se projette sur le quotient $\mathbb{M}$, en une géodésique G_n périodique : $g_\tau(\Gamma p_1) = \Gamma p_1$. L'analyse précédente montre que pour $0 \leq t < \tau$, $g_t(p_1)$ part de la projection de e_2 puis traverse exactement n fois la projection de e_1 avant de rejoindre p_1 sur la projection de e_2. Comme en un temps τ on ne coupe qu'une fois la projection de e_2, τ est la période minimale.

On en déduit que pour $n \geq n_0$ assez grand, les géodésiques périodiques G_n sont deux-à-deux distinctes, puisqu'on y "lit" la valeur de n en comptant le nombre de passage par e_1 entre deux passages consécutifs par e_2. □

8.7. Exercices

Exercice 8.3. — Démontrer l'identité (22). *Indication :* On pourra utiliser la formule de Stokes [**12**] : pour toute fonction C^1 sur $\mathbb{R}^d$ à support compact et tout compact K dont la frontière est une union finie d'hypersurfaces C^1 disjointes, $\int_K \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} f \, dx = \int_{\partial K} f \, d\sigma$ si $d\sigma$ est la mesure de surface.

Exercice 8.4. — L'enroulement de la géodésique définie par un vecteur $q \in \mathbb{M}$ au temps $t \in \mathbb{R}$ est : $e_q(t) := \int_0^t \Re(V(g_s(q)))\, ds$ où $V(\Gamma p) = v$ si $\Gamma p \cap \hat{E} = (z, v)$. Montrer que, pour Lebesgue-p.t. $q \in \mathbb{M}$, l'enroulement moyen est nul au sens suivant :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} e_q(t) = 0$$

Exercice 8.5. —

Exercice 8.6. — (1) Montrer que l'ensemble des matrices G_t, H_t, H_t^*, $t \in \mathbb{R}$, engendre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

(2) Soit $\phi \in L^2(m_{\mathbb{M}})$ tel que $\phi \circ g_t = \phi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\|\phi \circ h_s - \phi\|_{L^2} = 0$ en utilisant la relation de commutation entre h_s et g_t ainsi que la préservation de la mesure de Liouville par ces deux flots.

(3) En déduire que toute fonction invariante par le flot géodésique modulo 0 est invariante par l'action par translation à droite de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tout entier.

(4) Prouver enfin l'ergodicité du flot géodésique sur la surface modulaire

Exercice 8.7. — On considère le flot géodésique sur $\mathbb{M}$. Montrer que si, pour tout $f \in C_c(\mathbb{M})$, $f^+(q) = f^-(q)$ pour tout $q \in \mathbb{M}$, alors $f^- = f^+$ est une fonction partout constante. Que peut-on en déduire sur $(\mathbb{M}, g)$?

Exercice 8.8. — Montrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $q \in \mathbb{M}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $p \in B(q,\epsilon)$ tel que $\sup_{t\geq 0} d(g_t(p), g_t(q)) > \delta_0$. Expliquer en quoi ceci suggère que le flot géodésique est "imprévisible" ou "chaotique". On dit que le flot géodésique présente de la *sensibilité aux conditions initiales*.

CHAPITRE 9

DYNAMIQUE HORICYCLIQUE

Dans ce chapitre, nous utilisons les propriétés déjà établies de la dynamique géodésique pour étudier la dynamique horicyclique. Notre résultat principal est le théorème suivant découvert seulement en 1973 par Hillel Furstenberg[(1)] et Dani [(2)].

***Théorème 9.1* (Dani-Furstenberg).** — *Les mesures de probabilité boréliennes invariantes et ergodiques pour le flot horicyclique sur la surface modulaire sont exactement les mesures suivantes :*

- *la mesure de Liouville $m_{\mathbb{M}}$;*
- *les mesures périodiques, i.e., de la forme : $\pi_t(f) := \int_0^1 f(h_{e^{-t}u}(g_t(p_0)))\,du$ pour $t \in \mathbb{R}$.*

Cet énoncé l'ergodicité de la mesure de Liouville sous le flot horicyclique. Le flot horicyclique est "presque" uniquement ergodique.

9.1. Transitivité topologique

Proposition 9.2. — *Sur la surface modulaire $\mathrm{M} = \mathbb{H}/\Gamma$, le flot horicyclique est topologiquement transitif, c'est-à-dire admet une orbite dense sur $\mathbb{M} = T^1\mathbb{H}/\Gamma$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord qu' il suffit de montrer que, pour tout $p, q \in \mathbb{M}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $p' \in B(p, \epsilon)$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $h_s(p') \in B(q, \epsilon)$. L'exercice 9.1 invite à vérifier cette réduction.

Exprimons l'assertion précédente dans $T^1\mathbb{H}$: pour tout $p, q \in T^1\mathbb{H}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $p' \in B(p, \epsilon)$, $s \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $h_s(p') \in B(\gamma(q), \epsilon)$.

On part de la transitivité du flot géodésique : il existe un ensemble dense de p' dans $B(p, \epsilon)$ vérifiant $d_{T^1\mathbb{H}}(g_{t_0}(p), \gamma(-q)) < \epsilon^2$ (notation : $-(z, v) := (z, -v)$) pour t_0

(1) Hillel Furstenberg (né en 1935).
(2) S.G. Dani.

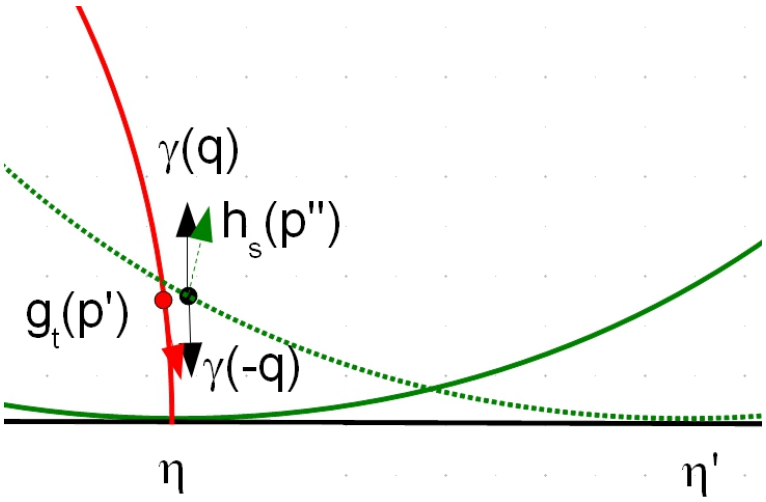


FIGURE 1. Construction de la connexion horicyclique. L'axe réel est horizontal, en noir. La géodésique définie par p' est en rouge, perpendiculaire à $\mathbb{R}$ en η. Elle porte $g_t(p')$ qui approche $\gamma(-q)$, ces deux vecteurs étant presque verticaux. Le trait continu vert est l'horicycle défini par p', tangent à $\mathbb{R}$ en η. Le trait discontinu vert est l'horicycle translaté pour passer par le point de base de $\gamma(q)$.

arbitrairement grand et $\gamma \in \Gamma$ (dépendant de t_0). On analyse maintenant la situation à l'aide d'un raisonnement géométrique élémentaire.

En perturbant p' et q, on peut supposer que ni l'un ni l'autre n'est vertical. On a donc la figure suivante (voir figure 1) :

- la géodésique définie par p' est un demi-cercle aboutissant en un certain point η de l'axe réel, perpendiculairement à celui-ci. On note ξ son autre point limite sur l'axe réel.
- l'horicycle issu de $p' = (z', v')$ est un cercle H passant par z', tangent en ce point à $-iv'$ et tangent à l'axe réel en η. Notons R le rayon de ce cercle.

Remarquons que R et $|\xi - \eta|$ sont majorés en fonction de p (en supposantϵ assez petit). On peut donc supposer $0 < \epsilon < \min(R^{-10}, |\xi - \eta|^{-10})$. t_0 pouvant être choisi arbitrairement grand, on peut aussi supposer : $|g_{t_0}(p') - \eta| < \epsilon^3$. $g_{t_0}(p')$ définit un vecteur faisant un angle au plus $4\Im(g_{t_0}(p'))/|\xi - \eta| < \epsilon^2$ avec la verticale. Par ailleurs, $y := \Im(\gamma(q)) = \Im(g_{t_0}(p'))e^{\pm d_{\mathbb{H}}(g_{t_0}(p'),\gamma(q))} \leq \epsilon^2$.

Il existe $x \approx \sqrt{Ry} - \Re(\gamma(q) - \eta)$ tel que la projection de l'horicycle translaté $H + x$ sur $\mathbb{H}$ passe par $\gamma(q)$. $|x| \leq \epsilon$, donc $p' + x \in B(p, \epsilon)$ fournit le point recherché. □

9.2. Preuve de l'ergodicité de la mesure de Liouville

$\mathbb{M}$ n'est pas compact. On aura donc besoin de la généralisation suivante du théorème d'Arzela-Ascoli :

Proposition 9.3. — *Soit X un espace métrique séparable. Soit une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$, uniformément continues et uniformément bornées. Alors il existe une fonction continue et bornée $f : X \to \mathbb{R}$ et une suite d'entiers $n_k \nearrow \infty$ telles que, pour tout compact $K \subset X$, $\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |f(x) - f_{n_k}(x)| = 0$.*

On considère les moyennes suivantes :

$$M_t f(x) := \int_0^1 f(g_{-\ln t} \circ h_w(x))\, dw$$

La relation de commutation donne $g_{-\ln t} \circ h_w \circ g_{\ln t} = h_{tw}$ et donc :

$$M_t f(g_{\ln t} x) = \frac{1}{t} \int_0^t f(h_s(x))\, ds =: H_t f(x)$$

où $H_t f(x)$ désigne la moyenne de Birkhoff selon le flot horicyclique.

La propriété centrale est la suivante :

Lemme 9.4. — *Soit $f \in C(\mathbb{M})$ une fonction uniformément continue et bornée. Alors les fonctions $M_t f$, $t > 1$, forment une famille uniformément continue et bornée.*

Démonstration. — Pour tout $t > 1$, $\|M_t f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$: c'est la borne uniforme. Voyons la continuité.

Soit $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{M}$. Il faut trouver $\eta > 0$, tel que $d(x, y) < \eta$ implique $|M_t f(x) - M_t f(y)| < \epsilon$ pour tout $t > 1$.

Par continuité uniforme, il existe $\delta > 0$ tel que $d(u, v) < 2\delta \implies |f(u) - f(v)| < \epsilon$. On pose

$$V_x := \{g_u \circ h_v^* \circ h_w(x) : (u, v, w) \in [-\delta, \delta]^2 \times [0, 1]\}$$

et

$$N_t f(x) := \frac{1}{m_{\mathbb{M}}(V_x)} \int_{V_x} f\, dm_{\mathbb{M}}.$$

On a, pour une certaine fonction C^∞ et strictement positive ρ,

$$\int_{V_x} f\, dm_{\mathbb{M}} = \int_0^1 \left(\int_{[-\delta,\delta]^2} f \circ g_{-\ln t}(g_u \circ h_v^* \circ h_w(x)) \rho(u, t, s)\, dvdw \right) du$$

L'invariance de la mesure $\rho\, dudvdw$ sous le flot horicyclique, $(u, v, w) \mapsto (u, v, w + s)$, implique que $\rho(u, v, w)$ ne dépend pas de w :

$$m_{\mathbb{M}}(V_x) \times M_t f(x) = \int_0^1 f(g_{-\ln t} \circ h_w(x)) \left(\int_{[-\delta,\delta]^2} \rho(u, v, w)\, dudv \right) dw$$

On a donc :

$$m_{\mathbb{M}}(V_x)(M_t f(x) - N_t f(x)) = \int_0^1 \left(\int_{[-\delta,\delta]^2} (f \circ g_{-\ln t}(h_w(x)) - f \circ g_{-\ln t}(g_u \circ h_v^* \circ h_w(x)))\rho(u,v,w)\, du dv \right) dw$$

Remarquons que $-\ln t < 0$ et que $h_v^*(y)$ est un point sur la variété instable de y, contracté dans le passé :

$$\begin{aligned} d(g_{-\ln t} h_w(x), & g_{-\ln t}(g_u \circ h_v^*(h_w(x)))) \\ &\leq d(g_{-\ln t} y, g_{-\ln t} h_v^*(y))) + d(g_{-\ln t} h^*(y)), g_u g_{-\ln t} h^*(y))) \\ &\leq d(y, h_v^*(y)) + d(z, g_u(z)) \leq 2\delta \end{aligned}$$

On a donc :

$$|M_t f(x) - N_t f(x)| \leq \frac{1}{m_{\mathbb{M}}(V_x)} \int_0^1 \int_{[-\delta,\delta]^2} \epsilon \rho(u,v,w)\, du dv dw \leq \epsilon$$

et

$$\begin{aligned} |M_t f(x) - M_t f(y)| &\leq 2\epsilon + \left| \frac{1}{m_{\mathbb{M}}(V_x)} \int_{V_x} f\, dm_{\mathbb{M}} - \frac{1}{m_{\mathbb{M}}(V_y)} \int_{V_y} f\, dm_{\mathbb{M}} \right| \\ &\leq 2\epsilon + \left\| \frac{1}{m_{\mathbb{M}}(V_x)} 1_{V_x} - \frac{1}{m_{\mathbb{M}}(V_y)} 1_{V_y} \right\|_{L^2} \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Comme $m_{\mathbb{M}}(\partial V_x) = 0$, $1_{V_x} \to 1_{V_y}$ dans L^1 et dans L^2. Donc le dernier terme ci-dessus tend vers zéro quand $x \to y$. L'uniforme continuité est démontrée. □

Démonstration de l'ergodicité. — Vu le lemme on peut appliquer le théorème d'Ascoli : il existe une fonction continue F sur $\mathbb{M}$ et une suite $t_k \nearrow \infty$ telle que $M_{t_k} f \to F$ uniformément sur tout compact. Ceci implique $\|M_{t_k} f - F\|_{L^2} \to 0$. Par invariance de la mesure sous le flot géodésique, on en déduit :

$$\|H_{t_k} f - F \circ g_{-\ln t_k}\|_{L^2} \to 0$$

Par ailleurs, le théorème ergodique de von Neumann appliqué au flot horicyclique donne une fonction $Pf \in L^2(\mathbb{M})$, invariante p.p. par ce flot, et telle que :

$$\|H_t f(x) - Pf\|_{L^2} \to 0$$

En comparant avec la convergence précédente, on obtient :

$$\|F - Pf \circ g_{\ln t_k}\|_{L^2} = \|F \circ g_{-\ln t_k} - Pf\|_{L^2} \to 0 \tag{25}$$

Or $Pf \circ g_{\ln t_k} \circ h_s = Pf \circ h_{s/t_k} \circ g_{\ln t_k} = Pf \circ g_{\ln t_k}$, donc $Pf \circ g_{\ln t_k}$ est également invariante p.p. par le flot horicyclique. On en déduit que c'est le cas de F.

Mais F est une fonction continue, l'invariance sur un ensemble dense implique donc l'invariance partout. Le flot horicyclique étant topologiquement transitif, F doit être constante.

L'équation (25) implique que Pf est constante p.p. f étant arbitraire dans une partie dense de $L^1(\mathbb{M})$, ceci montre l'ergodicité du flot horicyclique pour la mesure de Liouville. □

9.3. Preuve du théorème

Soit ν une mesure ergodique et invariante par le flot horicyclique sur $\mathbb{M}$.

Lemme 9.5. — *Soit $p \in T^1\mathbb{H}$ tel que $\Gamma p \in \mathbb{M}$ définisse une géodésique sans points d'accumulation futurs dans $\mathbb{M}$, i.e.,*

$$\omega(\Gamma p, g) := \{\lim_{k\to\infty} g_{t_k}(\Gamma p) : t_k \nearrow \infty\} = \emptyset \tag{26}$$

alors $\Gamma p = \Gamma(x + iy, i)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. — Soit Γp comme dans l'énoncé. Posons $p_t := \Gamma.(g_t(p)) \cap \hat{E}$. Si $\liminf_{t\to\infty} \Im(p_t) < \infty$, alors on peut extraire une sous-suite convergente dans la fermeture de $\hat{E}$, mais ceci nous donne aussi une valeur d'adhérence dans $\mathbb{M}$. On a donc : $\lim_{t\to\infty} \Im(p_t) = \infty$. On a : $\Im(p_t) > 1$ pour $t > t_0$, donc $p_t = g_t(p) - n_t$ avec n_t une fonction à valeurs entières. Donc $\lim_{t\to\infty} \Im(g_t(p)) = \infty$. En examinant le comportement des géodésiques sur $T^1\mathbb{H}$, on voit que seules les géodésiques verticales pointant vers le haut peuvent satisfaire cette condition. □

On note $\mathbb{M}_\infty$ (pour les besoins de notre démonstration) l'ensemble des points de $\mathbb{M}$ vérifiant (26). $\mathbb{M}_\infty$ est invariante par le flot horicyclique. Donc, par ergodicité, $\nu(\mathbb{M}_\infty) = 1$ ou 0.

Si $\nu(\mathbb{M}_\infty) = 1$, alors il existe $p \in \mathbb{M}_\infty$ tel que $\frac{1}{t}\int_0^t f \circ h_s(p)\, ds \to \nu(f)$ pour toute fonction continue à support compact, vu le théorème ergodique de Birkhoff. Mais tout $p \in \mathbb{M}_\infty$ est de la forme $(x + iy, i)$ et donc $p = h_{x/y}(iy, i)$ et ν est donc la mesure $\pi_{\log y}$. Supposons donc $\nu(\mathbb{M}_\infty) = 0$.

Proposition 9.6. — *Soit μ une mesure borélienne, de probabilité, invariante et ergodique par le flot horicyclique. Si $\mu(\mathbb{M}_\infty) = 0$, alors $\mu = m_{\mathbb{M}}$.*

Démonstration. — Soit $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et bornée. Fixons $x \notin \mathbb{M}_\infty$. Par définition, il existe $t_k \nearrow \infty$ telle que $g_{\ln t_k}(x)$ converge. En particulier, $K_x = \overline{\{g_{\ln t_k}(x)\}}$ est un compact.

Vu la preuve de l'ergodicité, quitte a remplacer t_k par une sous-suite, on a, uniformément sur le compact K_x :

$$M_{t_k} f \to m_{\mathbb{M}}(f)$$

En particulier,

$$M_{t_k} f(g_{\ln t_k} x) = H_{t_k} f(x) \to m_{\mathbb{M}}(f)$$

Le théorème de Birkhoff montre que $\nu = m_{\mathbb{M}}$. □

9.4. Exercices

Exercice 9.1. — Montrer que si X est un espace métrique complet et si $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot sur X agissant par homéomorphismes tel que pour tout couple d'ouverts non-vides U, V de X, il existe t arbitrairement grand satisfaisant $g_{-t}(U) \cap V \neq \emptyset$, alors il existe une orbite dense dans X. L'appliquer au flot horicyclique sur $\mathbb{M}$.

APPENDICE A

POUR ALLER PLUS LOIN

Les titres suivants sont une sélection assez partiale d'ouvrages pouvant utilement compléter l'étude du cours :

- Systèmes dynamiques et géométrie hyperbolique :
  - T. Bedford, M. Keane, C. Series (éditeurs) *Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*, Oxford University Press (1991) : moins précis mais plus large que le cours.
  - G. Courtois, F. D'albo, F. Paulin, *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques,* Editions de l'Ecole polytechnique (2007) : introduction exigeante mais efficace aux théorèmes de Ratner et de Margulis.
  - F. D'albo *Trajectoires geodesiques et horocycliques,* EDP Sciences (2007) esprit semblable à celui du cours, mais plus de géométrie, de topologie et pas de théorie ergodique.
- Systèmes dynamiques :
  - W. Parry, *Introduction to ergodic theory,* Graduate Texts in Mathematics, Springer : introduction très bien faite à la dynamique topologique et mesurée, orientée vers le formalisme thermodynamique.
  - K. Petersen, *Ergodic theory,* Cambridge University Press : comme son nom l'indique, se concentre sur la théorie ergodique.
  - N. Berline, C. Sabbagh, *Aspects des systèmes dynamiques,* Editions de l'Ecole polytechnique (2009) : présentation variée de la théorie des systèmes dynamiques à travers une variété d'aspects topologiques, géométriques ou combinatoire (pas de théorie ergodique).
  - C. Robinson, *Dynamical systems,* CRC Press : développe les outils analytiques et topologiques pour l'étude des systèmes différentiables, notamment de la stabilité et de l'hyperbolicité.
  - A. Fathi, *Systèmes dynamiques,* cours de l'Ecole polytechnique.

- B. Hasselblatt, A. Katok, *A first course in dynamical systems*, introduction rapide à une large palette d'aspects importants des systèmes dynamiques.
- B. Hasselblatt, A. Katok, *An Introduction to Modern Dynamical System Theory,* Cambridge University Press : un livre de référence
- V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, Editions de Moscou, très bonne introduction, moins avancée que MAT551
- V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Editions de Moscou : plus avancé que MAT551, toujours très stimulant

– Géométrie différentielle :
  - M. Do Carmo *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice-Hall.
  - V. Arnold *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Editions de Moscou.
  - S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer (les premiers chapitres).
  - M. Berger, B. Gostiaux *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces,* P.U.F. (1992).
– Géométrie hyperbolique
  - A.F. Beardon, *The geometry of discrete groups,* GTM, Springer (1995).
  - S. Katok, *Fuchsian groups,* University of Chicago Press (1992).
– Théorie des nombres
  - G. Hardy, Littlewood, *An introduction to the theory of numbers.*
– Physique :
  - G. Gallavotti, *Statistical Mechanics : a short treatise,* Springer (1999).

APPENDICE B

LIENS AVEC LA THÉORIE DES NOMBRES

Dans cet appendice, nous expliquons quelques propriétés de théorie des nombres qui éclairent les exemples dynamiques du texte principal. L'ouvrage classique [**15**] développe les propriétés des fractions continues et leurs liens avec les approximations des réels par les rationnels.

B.1. Multiplication par N et développement en base N

Rappelons que la multiplication par N est le système dynamique en temps $\mathbb{N}$ défini sur l'espace $[0,1]$ par l'application :

$$T_N(x) := \{Nx\} := Nx - E(Nx)$$

où $\{\cdot\}$ est la *partie fractionnaire* et E est la fonction *partie entière* caractérisée par $E(y) \in \mathbb{Z}$ et $E(y) \leq y < E(y)+1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. En particulier $T([0,1]) = [0,1[$.

Définition B.1. — Soit $x \in [0,1[$ et $N \geq 2$, entier. Le développement en base N de x est la suite $\mathbf{x} := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,\dots,N-1\}^{\mathbb{N}}$ définie par :

- $x = \sum_{n\geq 0} N^{-n-1} x_n$;
- la suite $\mathbf{x}$ n'est pas éventuellement constante et égale à $N-1$, i.e., il n'existe pas n_0 tel que $\forall n \geq n_0\ x_n = N-1$.

Proposition B.2. — *Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. L'unique développement en base N de tout $x \in [0,1[$ s'obtient dynamiquement en posant :*

$$x_n = c(T_N^n x) \text{ où } c(x) = E(Nx).$$

Démonstration. — Montrons d'abord l'unicité : supposons donc qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux développements distincts d'un même réel. Soit $m \geq 0$ minimal tel que $x_m \neq x'_m$. Supposons $x_m > x'_m$, quitte à échanger les deux suites. On a donc :

$$N^{-m-1}(x_m - x'_m) = \sum_{n>m} N^{-n-1}(x'_n - x_n)$$

et donc, l'inégalité stricte venant de ce que $x'_n - x_n = N-1 \iff (x'_n, x_n) = (N-1, 0)$:

$$1 < \sum_{n\geq 1} N^{-n}(N-1) = \frac{1}{N-1}(N-1) = 1.$$

La contradiction montre l'unicité.

Soit $x \in [0,1[$. Montrons que la suite $\mathbf{x} := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans l'énoncé satisfait les deux propriétés du développement en base N. Vérifions d'abord par récurrence que $x = \sum_{k=0}^{n-1} N^{-k-1}x_k + N^{-n}T_N^n x$ pour tout $n \geq 0$.

Pour $n = 0$, l'assertion se réduit à $x = T_N^0(x)$, trivialement vraie. Supposons la maintenant pour un certain $n \geq 0$. Par définition de T_N, $NT_N^n x = T_N^{n+1}x + c(T_N^n x)$, i.e., $N^{-n}T_N x = N^{-n-1}T_N^{n+1}x + N^{-n-1}c(T_N^n x)$, d'où :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{n-1} N^{-k-1}x_k + N^{-n}T_N^n x = \sum_{k=0}^{n-1} N^{-k-1}x_k + N^{-n-1}T_N^{n+1}x + N^{-n-1}c(T_N^n x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} N^{-k-1}x_k + N^{-n-1}T_N^{n+1}x, \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Comme $N^{-n}T_N^n x \leq (N-1)/N^n \to 0$ quand $n \to \infty$, on obtient bien $x = \sum_{k=0}^{\infty} N^{-k-1}x_k$ par passage à la limite.

Vérifions la deuxième propriété. Supposons $x_n = N-1$ pour tout $n \geq n_0$. Mais, en appliquant la première propriété à $y := T_N^{n_0}x$, on trouve $y = \sum_{n\geq 0} N^{-n-1}(N-1) = 1$, mais ceci implique $T_N^{n_0+1}(x) = 0$, donc $x_{n_0+1} = 0$, contradiction. □

B.2. Rotation et approximation rationnelle

La rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ est le système dynamique en temps $\mathbb{Z}$ définie sur l'espace $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ par la transformation $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $R_\alpha(z) := e^{2i\pi\alpha}z$.

Définition B.3. — La *vitesse d'approximation* de $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ par les rationnels de petit dénominateur est la fonction :

$$v(\alpha, n) := \min\{|q\alpha - p| : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq q \leq n\}.$$

Lemme B.4 **(Dirichlet)**. — *Si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, il existe une infinité d'entiers $q \in \mathbb{N}$ tels que $v(\alpha, q) < 1/q$.*

On rappelle la notation $\{x\} := x - E(x) \in [0,1[$.

Démonstration. — Cela découle du fameux "principe des tiroirs". Répartissons les $n+1$ nombres $\{n\alpha\}, n = 0, 1, \ldots, n$ dans les n intervalles $[k/n, (k+1)/n[$, $k = 0, \ldots, n-1$. Un de ces intervalles contient donc au moins deux de ces points. On trouve donc

$0 \leq k_1, k_2 \leq n$ tels que $|\{k_2\alpha\} - \{k_1\alpha\}| < 1/n$ donc, en posant $q = k_2 - k_1$ et $p = E(k_1 x) - E(k_2 x)$,

$$|q\alpha - p| < 1/n \leq 1/q.$$

α n'étant pas rationnel, $|q\alpha - p| > 0$. L'ensemble des entiers q ainsi obtenus quand $n \to \infty$ ne peut donc être fini. □

Lemme B.5. — *La vitesse $v(\alpha, n)$ coïncide avec la vitesse de récurrence des points $x \in [0,1[$ sous l'action de R_α pour la distance $d(x,y) := \min(|x-y|, |1-|x-y||)$ sur $[0,1[$:*

$$\forall x \in [0,1[\forall n \geq 0 \quad v(\alpha, n) = \min_{0 \leq k \leq n} d(x, R_\alpha^n(x)).$$

Remarque B.6. — La distance $d(x,y)$ ci-dessus est exactement la distance correspondant au quotient $\pi : [0,1] \to [0,1[$, $\pi(x) := \{x\}$, vu dans l'exercice 2.14.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $-1 < x - y < 1$ et donc :

$$d(x,y) = \min(|x-y|, |x-y+1|, |x-y-1|) = \min_{p \in \mathbb{Z}} |x - y - p|,$$

d'où

$$d(x, R_\alpha^n(x)) = \min_{p \in \mathbb{Z}} |x - \{x + n\alpha\} - p| = \min_{p \in \mathbb{Z}} |x - x - n\alpha - E(x + n\alpha) - p| = \min_{r \in \mathbb{Z}} |n\alpha - r|$$

et de comparer avec la définition de $v(\alpha, n)$. □

B.3. Transformation de Gauss et développement en fraction continue

On rappelle la transformation de Gauss $G : [0,1] \to [0,1]$ définie par $G(0) = 0$ et $G(x) = 1/x - E(1/x)$ pour $x \neq 0$.

Définition B.7. — La fraction continue définie par une suite finie de nombres $a_0, \ldots, a_n$ est :

$$[a_0, \ldots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\cdots}{a_n}}}}.$$

Autrement dit, $[a_0] := a_0$ et $[a_0, a_1, \ldots, a_n] := a_0 + 1/[a_1, \ldots, a_n]$ si $n \geq 1$.

Pour une suite infinie de nombres $a_0, a_1, \ldots$, on pose :

$$[a_0, a_1, \ldots] := \lim_{n \to \infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

si la limite existe.

Notons la conséquence suivante, immédiate, de cette définition. Pour tout $0 \leq m < n$,

$$[a_0, \ldots, a_n] = [a_0, \ldots, a_m, [a_{m+1}, \ldots, a_n]]. \tag{27}$$

On considèrera des coefficients pris dans les deux ensembles suivants : $\mathcal{A} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \ldots$ et $\mathcal{A}_0 := \{0\} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \ldots$.

Proposition B.8. — *L'application :*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ & (a_0,a_1,\dots) & \longmapsto & [a_0,a_1,\dots]:=\lim_{n\to\infty}[a_0,\dots,a_n] \end{array}$$

est bien définie et bijective. Son inverse s'obtient dynamiquement à partir de la transformation de Gauss selon :

$$x=[0,a(x),a(G(x)),a(G^2(x)),\dots]$$

avec $a(x)=E(1/x)$.

Définition B.9. — Etant donnée une suite $a\in\mathcal{A}$, ses *convergents* sont les couples $(p_n,q_n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ définis par : $(p_0,q_0):=(a_0,1)$, $(p_1,q_1):=(a_1a_0+1,a_1)$ et, pour tout $n\geq 1$,

$$(p_{n+1},q_{n+1}):=(a_{n+1}p_n+p_{n-1},a_{n+1}q_n+q_{n-1}).$$

Lemme B.10. — *Pour tout* $n\geq 1$,

$$q_np_{n-1}-p_nq_{n-1}=(-1)^n. \tag{28}$$

En particulier, p_n *et* q_n *sont premiers entre eux et* $p_{n-1}/q_{n-1}-p_n/q_n=(-1)^n/q_nq_{n-1}$.

Démonstration. — Pour $n\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} q_{n+1}p_n-p_{n+1}q_n&=(a_{n+1}q_n+q_{n-1})p_n-(a_{n+1}p_n+p_{n-1})q_n \\ &=q_{n-1}p_n-p_{n-1}q_n=-(-1)^n=(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

en procédant par récurrence à partir du cas $n=1$. (28) est vérifiée. Mais ceci implique que tout diviseur commun divise ± 1 : p_n et q_n sont premiers entre eux. La dernière assertion suit de (28) par une simple division par q_nq_{n-1}. □

Lemme B.11. — *Pour tout* $n\geq 0$, $[a_0,\dots,a_n]=p_n/q_n$.

Démonstration. — Démontrons par récurrence l'identité suivante, pour tout $X>0$ et tout $n\geq 2$:

$$[a_0,a_1,\dots,a_{n-1},X]=\frac{Xp_{n-1}+p_{n-2}}{Xq_{n-1}+q_{n-2}}. \tag{29}$$

Pour $n=2$, ceci découle d'un calcul direct : les deux membres valent $((a_0a_1+1)X)/(a_1X+1)$. Pour $n\geq 2$, on calcule :

$$\begin{aligned} [a_0,\dots,a_{n-1},a_n,X]&=[a_0,\dots,a_{n-1},a_n+1/X]=\frac{(a_n+1/X)p_{n-1}+p_{n-2}}{(a_n+1/X)q_{n-1}+q_{n-2}} \\ &=\frac{X(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{X(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}=\frac{Xp_n+p_{n-1}}{Xq_n+q_{n-1}} \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence au rang n et la définition de (p_n,q_n) . Ceci achève la récurrence et la preuve de (29). □

Lemme B.12. — *L'application* $F:\mathcal{A}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *est bien définie.*

Démonstration. — D'après le lemme B.11, il suffit d'étudier la convergence des p_n/q_n.

Remarquons que $q_0 = 1$, $q_1 = a_1 \geq 1$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2}$. Une récurrence immédiate montre que $q_n \geq n$ pour tout n et $q_n > q_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Vu (28), on a, pour tout $n \geq 3$,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$$

La série $\sum(p_n/q_n - p_{n+1}/q_{n+1})$ est donc alternée : la suite des p_n/q_n converge vers une limite ℓ avec l'encadrement : $p_{2m}/q_{2m} < \ell < p_{2m+1}/q_{2m+1}$ pour tout entier $m \geq 1$.

Si la limite était rationnelle, i.e., de la forme p/q, on aurait

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Mais la différence la plus à gauche est de la forme $a_n/(qq_n)$ avec a_n entier et q fixé. Pour q_n grand ceci n'est possible que si $a = 0$ donc $p_n/q_n = p/q$, pour tout n grand. p_n/q_n étant sous forme réduite, on a $q_n = q$ pour tout n assez grand, ce qui contredit l'irrationnalité de x. La contradiction montre que la limite est irrationnelle et que F est bien définie. □

Cet unique développement est précisément donné par l'itération de l'application de Gauss :

Démonstration de la proposition B.8. — On a déjà vu que F était bien définie. Montrons que, pour tout $x \in [0,1[\setminus\mathbb{Q}$, la suite $\mathbf{a}(x) := (a(x), a(G(x)), a(G^2(x)), \dots)$ vérifie $F(\mathbf{a}(x)) = x$.

D'après $1/x = G(x) + E(1/x)$, on obtient : $1/x = [a_0, 1/G(1/x))]$, donc $1/G(1/x) = [E(G(1/x)), 1/G^2(1/x)]$ et, par récurrence, sur $n \geq 0$:

$$1/G^n(x) = [a_n, 1/G^{n+1}(x)]. \tag{30}$$

En utilisant la formule (27), on obtient, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{[a_0, [a_1, \dots, [a_n, 1/G^{n+1}(x)] \dots]]} = \frac{1}{[a_0, \dots, a_n, 1/G^{n+1}(x)]}$$

$t \mapsto [a_0, \dots, a_n, t]$ est monotone, donc, pour n pair :

$$\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{[a_0, \dots, a_n]}, \frac{1}{[a_0, \dots, a_n, a_{n+1}]}\right]$$

On en déduit :

$$x = \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots],$$

ce qui achève la preuve de $F(\mathbf{a}(x)) = x$. F est donc surjective. Par ailleurs, (30) donne : $F(\mathbf{b}) = x \implies \mathbf{b} = \mathbf{a}(x)$, donc la surjectivité. □

APPENDICE C

OUTILS

Cet appendice regroupe des définitions et des résultats dont nous avons besoin mais dont les démonstrations ne sont pas indispensables à la compréhension du reste du cours.

C.1. Vocabulaire algébrique

On commence par quelques définitions très générales.

Définition C.1. — Une **relation d'équivalence** $\sim$ sur un ensemble X est une relation réflexive, symétrique et transitive. La *classe d'équivalence* $[x]_\sim$ d'un point $x \in X$ est l'ensemble des $y \in X$ équivalents à x. L'**espace quotient** $X/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation considérée. La **surjection canonique** $\pi_\sim : X \to X/\sim$ associe à chaque $x \in X$ sa classe d'équivalence $[x]_\sim$.

Définition C.2. — Un **semigroupe** $(G, \oplus)$ (ou simplement G) est un ensemble muni d'un élément distingué appelé son élément neutre et noté e ainsi que d'une loi interne associative $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto g \oplus g'$ vérifiant : (i) pour tout $g \in G$, $g \oplus e = e \oplus g = g$; (ii) pour tout $g, h, k \in Gg \oplus h = g \oplus k$ ou $h \oplus g = k \oplus g$ implique $h = k$.

Un **groupe** G est un ensemble muni d'un élément distingué appelé son élément neutre et noté e ainsi que d'une loi interne associative $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto g \oplus g'$ vérifiant : (i) pour tout $g \in G$, $g \oplus e = e \oplus g = g$; (ii) pour tout g il existe un unique $g' \in G$ tel que $g \oplus g' = g' \oplus g = e$ —g' est l'inverse de G, souvent noté g^{-1}.

Un *sous-groupe* de G est une partie de G qui est encore un sous-groupe pour la loi induite (celle obtenue par restriction de la loi de G). Un sous-groupe est *distingué* si pour tout $g \in G$, $g^{-1}Hg = H$. Un *sous-semigroupe* d'un semigroupe G est une partie de G qui est un semigroupe pour la loi induite.

Remarque C.3. — Tout groupe est un semigroupe. Tout semigroupe se plonge dans un groupe (de la même façon que l'anneau $\mathbb{Z}$ se plonge dans son corps des fractions $\mathbb{Q}$) grâce à la propriété (ii) de la définition d'un semi-groupe (appelée l'intégrité).

La définition américaine d'un *semigroup* est différente.

Définition C.4. — Une **action** d'un semi-groupe G sur un ensemble X est une application $G \times X \to X$ notée $(g, x) \mapsto g.x$ vérifiant : pour tous $g, h \in G$, tout $x \in X$, $g.(h.x) = (g \oplus h).x$ et $e.x = x$ pour tout $x \in X$. L'**orbite** de $x \in X$ sous G est l'ensemble $G.x = \{g.x : g \in G\}$. La relation d'équivalence induite est la **G-équivalence** : $x \sim_G y \iff G.x = G.y$. On note souvent X/G au lieu de $X/\sim_G$. Tout sous-semigroupe de G définit une *action induite* par restriction. Une action est :

- *fidèle* si $x \mapsto g.x$ n'est l'identité que si $g = e$;
- *libre* si $g.x \neq x$ pour tout $x \in X$ sauf si $g = e$;
- *transitive* si $G.x = X$ pour un $x \in X$ (et donc pour tout $x \in X$).

Exemple C.5. — Tout semigroupe G agit sur lui-même par :

- *translation à gauche* $g.x := g \oplus x$;
- *translation à droite* $g.x := x \oplus g^{-1}$ (on note parfois $x.g$ au lieu de $g.x$ et $H\backslash G$ au lieu de $G/\sim_G$).

Si G est un groupe, il agit sur lui-même par *conjugaison* $g.x := g \oplus x \oplus g^{-1}$.

Lemme C.6. — *Soit H un sous-groupe de G agissant sur G par translation à gauche (ou à droite). Alors la loi $H.x \oplus H.y := H.(x \oplus y)$ est bien définie et donne à H une structure de groupe si et seulement si H est un sous-groupe distingué.*

C.2. Topologie

C.2.1. Définitions fondamentales. —

Définition C.7. — Une **topologie** sur un ensemble X est une collection $\mathcal{T}$ de parties de X vérifiant :

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ si $U_i \in \mathcal{T}$ pour tout $i \in I$ où l'index I est quelconque ;
- $\bigcap_{n=1}^{N} U_i \in \mathcal{T}$ si $U_1, \ldots, U_N \in \mathcal{T}$ avec n fini.

On appelle **ouverts** les éléments de la topologie. Un **voisinage** d'un point x ou d'une partie $Y \subset X$ est une partie de X contenant un ouvert contenant x.

On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un **espace topologique**. Notation : le plus souvent, on omet $\mathcal{T}$. Si nécessaire, on note la topologie des espaces $X, Y, \ldots$, $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$,$\ldots$.

Définition C.8. — Une topologie est **séparée** si pour toute paire de points distincts x, y, il existe deux ouverts disjoints contenant chacun un des deux points. Elle est **séparable** s'il existe une partie dense.

Définition C.9. — On dit qu'une topologie $\mathcal{T}_1$ est **plus fine** qu'une autre topologie $\mathcal{T}_2$ sur le même espace si $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$.

Définition C.10. — Si C est une collection de parties de X, la **topologie engendrée** par C est l'intersection de toutes les topologies de X contenant C.

Une **pré-base de la topologie** est une collection d'ouverts engendrant la topologie. Une **base de la topologie** est une collection d'ouverts telle que tout ouvert de la topologie est une union d'éléments de la base.

Exemple C.11. — Les intervalles ouverts forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$. Les intervalles de la forme $]-\infty, x[$, $]x, \infty$ pour $x \in \mathbb{R}$, forment une pré-base de cette même topologie.

La moins fine de toutes les topologies sur un ensemble donnée X est la *topologie grossière* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. La plus fine est la *topologie discrète* : l'ensemble de toutes les parties X.

K étant un corps, la topologie de Zariski sur K^n est la topologie engendrée par les parties de la forme $P^{-1}(K \setminus \{0\})$, P décrivant les polynômes à n variables et à coefficients dans K. Cette topologie n'est pas séparée (et donc pas métrisable). Si $\mathbb{R}$ est muni de cette topologie, la fermeture de $[0, 1]$ est $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sin(x)$ n'est pas une fonction continue !

Lemme C.12. — *Si X est un espace séparé, $x \in X$ et K est un ouvert ne contenant pas x, alors il existe deux ouverts disjoints, l'un contenant x, l'autre K.*

Définition C.13. — Une **fonction continue** est une application $f : X \to Y$ où X, Y sont des espaces topologiques et $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ pour tout $U \in \mathcal{T}_Y$.

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace topologique X converge vers une limite $y \in X$ si et seulement si pour tout voisinage V de y, il existe $N < \infty$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$.

Définition C.14. — Un **espace métrique** (X, d) est un ensemble X muni d'une distance ou métrique, i.e., $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que, pour tous $x, y, z \in X$: $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ et (inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Une **boule (ouverte)** est un ensemble de la forme : $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ pour $x \in X$, $r > 0$.

La topologie métrique est la collection formée des parties contenant une boule autour de chacun de leurs points.

Exercice C.1. — Reformuler directement en termes métriques les notions de continuité et de convergence ainsi définies pour la topologie métrique.

Définition C.15. — Un espace topologique est **métrisable** s'il admet une métrique dont la topologie coincide avec la topologie initiale.

Définition C.16. — Un espace topologique est **connexe** s'il n'admet pas de partition en deux ouverts. Une partie d'un espace est connexe si, munie de la topologie induite, c'est un espace connexe. La composante connexe d'un point x dans un espace X est la partie connexe maximale pour l'inclusion contenant x.

Lemme C.17. — *Une union de parties connexes contenant toutes un même point, est une partie connexe. La composante connexe de x est donc l'union de toutes les parties connexes contenant x.*

Définition C.18. — Une partie Y d'un espace topologique est **compacte** si, pour tout *recouvrement ouvert* de Y, i.e., toute famille d'ouvert $(U_i)_{i\in I}$ telle que $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe un sous-recouvrement fini, i.e., une partie finie $J \subset I$ telle que $Y \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Exercice C.2. — Une famille de parties compactes est d'intersection vide si et seulement si elle admet une sous-famille finie d'intersection vide.

Exercice C.3. — Montrer que, tout fermé inclus dans un compact est compact. Montrer que, dans un espace topologique séparé, toute partie compacte est fermée. Montrer que, dans $\mathbb{C}^N$ muni de la topologie de Zariski toute partie est compacte mais pas nécessairement fermé. Commenter.

Exercice C.4. — Montrer que toute suite à valeurs dans un espace compact métrisable admet une sous-suite convergente : on dit que l'espace est *séquentiellement compact*. Montrer la réciproque. Trouver un espace séquentiellement compact mais non compact.

***Théorème C.19* (Brouwer)**. — *Les espaces topologiques métrisables, compacts, non-vides, sans points isolés et tels que la composante connexe de tout point est réduite à celui-ci, sont isomorphes. On appelle tout espace ayant ces propriétés un espace de Cantor.*

Exercice C.5. — Vérifier que $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est un espace de Cantor.

C.2.2. Constructions. —

Définition C.20. — La **topologie induite** sur une partie Y d'un espace topologique X est $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}_X\}$.

Définition C.21. — Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques. $X = \prod_{i\in I} X_i$ est muni par défaut de la **topologie produit** définie comme la topologie engendrée par : les parties de la forme :

$$\prod_{i\in I} U_i \text{ où } U_i \in \mathcal{T}_{X_i} \text{ et } \{i \in I : U_i \neq X_i\} \text{ est fini.}$$

Exercice C.6. — Montrer qu'un produit dénombrable d'espaces métrisables est métrisable.

***Théorème C.1* (Tychonoff)**. — *Le produit d'une famille quelconque d'espace compacts est un espace compact.*

Exercice C.7. — Déduire du théorème de Tychonoff que toute suite à valeurs dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Le montrer directement par un argument de diagonalisation.

Est-ce le cas dans $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)}$, l'ensemble des fonctions $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit ?

Exercice C.8. — Montrer que la topologie induite sur une partie Y d'un espace topologique X est la topologie la moins fine telle que l'inclusion $i : Y \to X$, $y \mapsto y$, soit continue.

Montrer que la topologie produit sur $X := \prod_{i\in I} X_i$ est la topologie la moins fine telle que chaque projection $\pi_i : X \to X_i$, $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_i$, soit continue.

Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $X := \prod_{i\in I} X_i$ converge vers $x \in X$ si et seulement si elle converge simplement, i.e., pour tout $i \in I$, $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$.

C.2.3. Passage au quotient. —

Définition C.22. — Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\sim$. L'espace quotient $X/\sim$, i.e., l'ensemble des classes d'équivalence, est muni par défaut de la **topologie quotient** :

$$\{\mathcal{U} \subset X/\sim : \bigcup_{V\in\mathcal{U}} V \in \mathcal{T}_X\}$$

Exercice C.9. — Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\sim$. Soit $\pi : X \to X/\sim$ la *projection canonique* qui envoie tout point sur sa classe d'équivalence. Montrer que la topologie quotient est la plus fine pour laquelle π est continue. Montrer que si $f : X \to Y$ est une surjection continue entre deux espaces topologiques et si $x \sim x' \iff f(x) = f(y)$ alors l'espace topologique $X/\sim$ est homéomorphe à Y. En déduire que $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\sim$ si $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Exercice C.10. — Soit X, Y deux espaces topologiques et $\sim$ une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/\sim$ la projection canonique. Montrer qu'une fonction $f : X/\sim \to Y$ est continue si et seulement s'il existe une fonction $F : X \to Y$ continue telle que $F = f \circ \pi$.

Exercice C.11. — Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la topologie quotient est homéomorphe au cercle unité.

Montrer que la topologie quotient sur $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparée.

Définition C.23. — Soit X est un espace métrique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Soit $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) := \inf\{d(x,y) : x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\}$. Si $\tilde{x} \neq \tilde{y} \implies \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})$ alors $\tilde{d}$ est appelée la **distance quotient**.

Exercice C.12. — Donner un exemple de relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\tilde{d}(\cdot,\cdot)$ viole l'inégalité triangulaire. Montrer que si les classes d'équivalence sont compactes et deux-à-deux isométriques, alors $\tilde{d}$ est bien une distance compatible avec la topologie quotient.

C.2.4. Espaces de Baire. —

Définition C.24. — Un **espace de Baire** est un espace topologique où toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

On appelle **ensemble gras**[(1)] toute ensemble contenant un **G_δ-dense**, i.e., une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Dans un espace de Baire, les ensembles gras fournissent un analogue topologique aux ensembles de mesure totale :

***Théorème C.25* (Baire).** — *Tout espace métrique complet est un espace de Baire : toute intersection dénombrable d'ensembles gras y est encore un ensemble gras.*

Malgré l'analogie avec les ensembles de mesure totale, les notions ne coïncident pas et, à vrai dire, s'opposent souvent.

Exercice C.13. — Montrer que l'ensemble L des nombres de Liouville c'est-à-dire des $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il n'existe pas $\nu > 0$ et $C > 0$ vérifiant $|x - p/q| > Cq^{-\nu}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est de mesure nulle. Montrer que L est cependant un ensemble gras. Commenter.

C.3. Théorie de la mesure

On pourra se rapporter à [**24**] (ou sa traduction française).

C.3.1. Tribus. —

Définition C.26. — Une **tribu** (ou *σ-algèbre*) $\mathcal{X}$ dans un espace X est une collection de parties de X vérifiant :

- $\emptyset \in \mathcal{X}$;
- $E \in \mathcal{X} \implies X\backslash \in \mathcal{X}$;
- l'union de toute famille dénombrable $X_1, X_2, \cdots \in \mathcal{X}$ est encore dans $\mathcal{X}$.

(1) ou *ensemble de deuxième catégoie* ou *ensemble !résiduel.*

La *tribu engendrée* par une collection de parties de X est l'intersection de toutes les tribus sur X contenant cette collection.

Un ensemble X muni d'une tribu est appelé **espace mesurable**.

Exemple C.27. — La *tribu grossière* est $\{\emptyset, X\}$. $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble de toutes les parties de X, est également une tribu. La tribu des boréliens est la tribu engendrée par la topologie.

Définition C.28. — Une **sous-tribu** de $\mathcal{X}$ est une tribu $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. La *tribu engendrée* par $\mathcal{X}_0$, une collection de parties de X, est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{X}_0$.

Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont deux tribus d'espaces X, Y, alors $X \otimes Y$, la tribu engendrée par $\{E \times F : E \in \mathcal{X}, F \in \mathcal{Y}\}$ est la *tribu produit*.

Définition C.29. — Si X est un espace topologique, alors la **tribu borélienne** est la tribu engendrée par la topologie de X. Les éléments de cette tribu sont les ensembles *boréliens*. Une fonction mesurable par rapport à cette tribu est dite *borélienne*.

La restriction aux espaces de probabilité "raisonnables", i.e., du type suivant permettra d'utiliser certains résultats un peu plus fin ou plus puissants.

Définition C.30. — Un *espace de Borel standard* est un espace muni de la tribu des boréliens définis par une topologie séparable admettant une distance complète (i.e., pour laquelle toute suite de Cauchy converge).

Un *espace de probabilité standard* est un espace de Borel standard muni d'une probabilité borélienne.

Proposition C.31. — *Sur un espace de probabilité standard :*

- *si $\mathcal{D}$ est une collection dénombrable de parties mesurables, alors la tribu engendrée par $\mathcal{D}$ coincide modulo μ avec $\mathcal{X}$ si et seulement s'il existe une partie $X_1 \subset X$ de mesure 1 telle que pour toute paire de points $x \neq y$, il existe $D \in \mathcal{D}$ tel que $x \in D$ et $y \notin D$ (ou l'inverse).*

C.3.2. Mesures. —

Définition C.32. — Une **mesure positive** sur un espace mesurable $(X, \mathcal{X})$ est une application μ définie sur $\mathcal{X}$ et à valeurs dans $[0, \infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- si $X_1, X_2, \dots$ est une famille dénombrable de mesurables disjoints, alors $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i)$.

Elle est *σ-finie* s'il existe une partition dénombrable de X en mesurables ayant chacun une mesure finie. C'est une *mesure de probabilité* si $\mu(X) = 1$.

Exemple C.33. — Sur un espace non-dénombrable, la formule $\mu(A) = \#A$ définit une mesure borélienne qui n'est pas σ-finie. Les formules $\delta_x(A) = \#(A \cap \{x\})$ (la *mesure de Dirac* en x) et

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{q^3}\delta_{p/q}$$

définissent deux mesures boréliennes σ-finies.

Lemme C.34. — *Deux mesures finies coincidant sur une certaine collection de parties de X coincident sur la tribu engendrée par cette partie.*

Définition C.35. — Si μ est une mesure borélienne d'un espace dont la topologie admet une base dénombrable, son *support* est le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle, i.e., $\mathrm{supp}(\mu) := \bigcup_{\mu(U)=0} U$. Si $\mathrm{supp}(\mu) = X$, on dit la mesure de *support total*.

Théorème C.36 **(Carathéodory)**. — *Soit $\mathcal{A}$ une collection de parties de X vérifiant : (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$; (ii) $E, F \in \mathcal{A} \implies E \setminus F \in \mathcal{A}$; (iii) $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \implies E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A}$ (union finie). Toute mesure sur $\mathcal{A}$ se prolonge en une mesure sur la tribu engendrée. Si la mesure initiale est σ-finie, alors le prolongement est unique.*

Théorème C.37 **(représentation de Riesz$^{(2)}$)**. — *Soit X un espace topologique séparé et localement compact. Soit $L : C_c(X) \to \mathbb{R}$ linéaire et positive, i.e., $f \geq 0 \implies L(f) \geq 0$. Alors il existe une tribu contenant les boréliens et une unique mesure μ sur cette tribu vérifiant : (i) $\forall f \in C_c(X)\ \Lambda(f) = \mu(f)$; (ii) la mesure de tout compact est finie ; (iii) la mesure est régulière, i.e., pour tout E mesurable et tout F mesurable et de mesure finie,*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert et } U \supset E\} \text{ et } \mu(F) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact et } K \subset F\}.$$

Théorème C.38. — *Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique mesure borélienne sur $\mathbb{R}^d$ invariante par translation sous la condition de normalisation $m([0,1]^d) = 1$. On l'appelle la mesure de Lebesgue.*

Définition C.39. — Si $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ sont deux espaces mesurés σ-finis, leur **produit** est $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mu \otimes \nu)$ où $\mu \otimes \nu$ est définie par $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Théorème C.40 **(Fubini$^{(3)}$-Tonelli $^{(4)}$)**. — *Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$-mesurable.*

Les intégrales

$$\int_{X\times Y} |f|\, d\mu \otimes d\nu, \int_X \left(\int_Y |f|\, d\nu\right) d\mu \text{ et } \int_Y \left(\int_X |f|\, d\mu\right) d\nu.$$

sont bien définies (i.e., $y \mapsto f(x,y)$ est $\mathcal{Y}$-mesurable pour μ-p.t. x, etc.) à valeurs dans $[0,\infty]$ et égales. Si leur valeur commune est finie alors

$$\int_{X\times Y} f\, d\mu\otimes d\nu = \int_X \left(\int_Y f\, d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f\, d\mu\right) d\nu.$$

Définition C.41. — Si $(X,\mathcal{X},\mu)$ est un espace mesuré, la **tribu complétée** est $\overline{\mathcal{X}} := \{A \subset X : \exists B \in \mathcal{X}\ \mu(A\Delta B) = 0\}$. $\mathcal{X}$ est complète si elle est égale à sa complétée. μ s'étend aussitôt à cette nouvelle tribu par $\nu(A) = \nu(B)$ avec les notations précédentes.

Ce produit donne bien ce que l'on pense dans les cas classiques :

Proposition C.42. — *Si $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{B}_n}, m_n)$ désigne $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue sur la tribu complétée des boréliens, alors $\overline{\mathcal{B}_n}\otimes\overline{\mathcal{B}_n} = \overline{\mathcal{B}_{n+m}}$ et $m_{n+m} = m_n \otimes m_m$.*

En particulier, le théorème de Fubini-Tonelli dans le cas général contient bien le théorème sur les espaces euclidiens.

Définition C.43. — Soit deux mesures μ et ν définies sur un même espace mesurable X. On dit que $\mu << \nu$ (μ **absolument continue** par rapport à ν) si tout mesure de ν-mesure nulle est de μ-mesure nulle. On dit que $\mu \perp \nu$ (μ et ν sont **étrangères** s'il existe un mesurable A tel que $\mu(A) = 0$ et $\nu(X \setminus A) = 0$.

Une mesure est dire *continue* si la mesure de tout singleton est nulle. Une mesure est dire *atomique* s'il existe un ensemble dénombrable dont le complémentaire est de mesure nulle.

Exercice C.14. — Montrer que la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et la mesure $\nu := \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\delta_{r_n}$, où $(r_n)_{n\geq 1}$ est une énumération des rationnels de $[0,1]$, sont étrangères. Déterminer le support de ν.

Montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité borélienne μ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\mu([k/3^n,(k+1)/3^n]) = \mu([(k+2)/3^n,(k+3)/3^n]) = 2^{-n}$ pour tout entier k de la forme $k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j 3^j$ avec $a \in \{0,2\}^n$. Déterminer le support de μ. Montrer que μ est étrangère à la mesure de Lebesgue.

C.3.3. Espaces de fonctions. — $f : (X,\mathcal{X}) \to (Y,\mathcal{Y})$ est une *fonction mesurable* si $f^{-1}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}$.

Deux fonctions mesurables sont égales *μ-presque partout* si $f(x) = g(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle. On dit aussi que l'égalité a lieu pour *μ-presque tout x*. On appelle *fonction définie μ-presque partout* une classe d'équivalence de fonctions mesurables deux-à-deux μ-presque partout égales.

Soit μ une mesure positive sur $(X,\mathcal{X})$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ est l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ définies presque partout vérifiant $\int |f|^p\, d\mu < \infty$. Muni de la norme $\|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$ si $p < \infty$, $\|f\|_{L^\infty(\mu)} := \sup\{t \in \mathbb{R} : \mu(f^{-1}(]-\infty,t])) = 0\}$ c'est un espace de Banach appelé **espace de Lebesgue**.

Théorème C.44. — *Soit X un espace topologique séparé et localement compact. Soit μ une mesure borélienne sur X finie sur les compacts. Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mu)$.*

Voir [**24**], théorèmes 3.14 et 2.14.

C.3.4. Différentiation et espérance conditionnelle. —

Théorème C.45 **(Radon-Nikodym)**. — *Soit μ et ν deux mesures définies sur un même espace mesurable X. Il existe une fonction $f \in L^1(\nu)$ (unique en tant que classe de fonction définie ν-presque partout) et une unique mesure μ' sur X étrangère à ν telles que $\mu = f \cdot \nu + \mu'$. On appelle f la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à ν et on la note $d\mu/d\nu$.*

La notion suivante est fondamentale en théorie des probabilités :

Définition C.46. — Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace probabilisé et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ une sous-σ-tribu. L'**espérance conditionnelle** d'une fonction $f \in L^1(\mu)$ est une fonction $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Y}) \in L^1(\mu)$ vérifiant :

- $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Y}) : X \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathcal{Y}$-mesurable g, i.e., $g^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{C}) \subset \mathcal{Y}$.
- pour tout $Y \in \mathcal{Y}$, $\int_Y \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Y})\, d\mu = \int_Y f\, d\mu$.

Proposition C.47. — *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et tout $f \in L^p(\mu)$, il existe exactement une fonction dans $L^p(\mu)$ qui soit l'espérance conditionnelle de f. Si $p = 2$,*

$$\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Y}) = \pi(f)$$

où $\pi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ est la projection orthogonale sur les fonctions $\mathcal{Y}$-mesurables.

Théorème C.48 **(Doob[(5)])**. — *Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace de probabilité et $f \in L^1(\mu)$. Soit des sous-tribus $\mathcal{Y}_n \nearrow \mathcal{Y}$, i.e., $\mathcal{Y}_n \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{Y}_n \subset \mathcal{Y}_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ et $\mathcal{Y}$ est la tribu engendrée par $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{Y}_n$. Alors,*

$$\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Y}_n) \to \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Y}) \text{ presque partout et dans } L^1(\mu)$$

C.4. Variétés différentiables

C.4.1. Définitions fondamentales. —

Définition C.49. — Soit X un ensemble et $1 \leq r \leq \infty$. Un **atlas** $\mathcal{A}$ de classe C^r de X est une collection de bijections $\psi : U \to V$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $V \subset X$ vérifiant (1) l'union des images est égale à X et (2) la condition de compatibilité suivante :

Si $\psi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, sont deux éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\psi_2^{-1} \circ \psi_1 : \psi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \psi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

est un difféomorphisme de classe C^r entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Les bijections $\psi : U \to V$ sont appelés les **cartes** de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est un atlas de classe C^r de X, alors $(X, \mathcal{A})$ est une **variété** de classe C^r. On identifie $(X, \mathcal{A})$ et $(X, \mathcal{B})$ si les atlas sont **équivalents**, i.e., si leur union est encore un atlas. On sous-entend la plupart du temps les atlas considérés.

La topologie de X est la topologie engendrée par $\{\psi(\Omega) : (\psi : U \to V) \in \mathcal{A} \text{ et } \Omega \text{ ouvert de } U\}$.

On ne considère dans ce cours que des variétés de classe C^∞.

Exemple C.50. — $\mathbb{R}^d$ muni de l'atlas réduit à la carte $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une variété.

Exemple C.51. — $[0,1]/_{0\sim 1}$ muni de l'atlas consistant des deux cartes $t \in]0,1[\mapsto x$ et $t \in]1/2, 3/2[\mapsto \{x\}$ est une variété.

Définition C.52. — Soit X_1 et X_2 deux variétés de classe. Soit $0 \leq s \leq r$. Une application $f : X_1 \to X_2$ est dite de **classe** C^s si pour tout couple de cartes $\psi_i : U_i \to V_i$ de X_i, $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1$ est de classe C^s sur son domaine de définition.

Une bijection $f : X_1 \to X_2$ est appelée un **difféomorphisme de classe** C^s si elle et son inverse sont des applications de classe C^s.

Une application $f : X_1 \to X_2$ est appelée une **submersion** si elle est de classe C^1 et si pour tout $p \in X_1$ et tout couple de cartes $\psi_i : U_i \to V_i$ de X_i, $i = 1, 2$ avec $q \in U_1$ et $f(q) \in X_2$, la différentielle $(\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1))'(\psi_1^{-1}(q))$ est surjective.

Définition C.53. — Une **sous-variété** N de classe C^r et de dimension k d'une variété M de dimension d est une variété admettant un atlas dont les cartes sont de la forme $\psi : U' \to V'$ avec $U' := U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{d-k})$ et $V' = \psi(U')$ où $\psi : U \to V$ est une carte d'un atlas de M.

Exercice C.15. — Une partie N d'une variété M de dimension d est une sous-variété de dimension k si et seulement si tout $p \in N$ admet un voisinage U et une submersion de classe C^∞, $f : U \to \mathbb{R}^{d-k}$ telle que $f^{-1}(0) = N \cap U$.

Définition C.54. — Un **revêtement ramifié** au-dessus de $S \subset X_2$ est une application continue $\pi : X_1 \to X_2$ telle que tout $x \in X_2 \setminus S$ admet un voisinage U tel que π^{-1} est une union disjointes d'ouverts U_α tels que $\pi : U_\alpha \to U$ est un homéomorphisme. Le revêtement est dit *non-ramifié* si $S = \emptyset$.

Si X_1 est une variété alors $X_2 \setminus S$ peut être muni d'une structure de variété constitué des cartes $\pi \circ \psi : U \to V$ où $\psi : U_0 \to V_0$ parcourt les cartes de X_2, $U := \psi^{-1}(U_\alpha)$ avec U_α un ouvert comme dans la définition d'un revêtement et V son image par ψ.

Exercice C.16. — Montrer que $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un revêtement non ramifié. Montrer que la structure de variété de $\mathbb{S}^1$ définie par ce revêtement coincide avec la structure définie en voyant $\mathbb{S}^1$ comme une sous-variété de $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$

Montrer que $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ est un revêtement ramifié au-dessus de 0.

C.4.2. Espace tangent. — Soit X une variété de classe C^r. Pour chaque $x \in X$, on considère l'ensemble Γ_x des applications $\gamma :]-1,1[\to X$ de classe C^1 telles que $\gamma(0) = x$. On les dits équivalentes si pour une carte $\psi : U \to V$ avec $x \in V$, elles ont le même vecteur dérivé $(\psi^{-1} \circ \gamma)'(0)$. On note $[\cdot]_x$ la classe d'équivalence.

Définition C.55. — Soit X une variété. Son **fibré tangent** est la variété de classe C^r définie par $TX := \{(x, [\gamma]_x) : x \in X \text{ et } \gamma \in \Gamma_x\}$ et l'atlas :

$$\{\hat{\psi} : U \times \mathbb{R}^d \to V \times \Gamma_x / \sim : \psi : U \to V \in \mathcal{A}\}$$

où $\hat{\psi}(x, v) = (\psi(x), [\gamma]_x)$ si $\gamma :]-1,1[\to X$ avec $(\psi^{-1} \circ \gamma)'(0) = v$.

Exercice C.17. — Montrer que le fibré tangent à $\mathbb{R}^d$, resp. $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{T}^d$, est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2d}$, resp. l'anneau ouvert $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$ et $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$.

C.5. Analyse fonctionnelle

C.5.1. Définitions fondamentales. —

Définition C.56. — Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un *K-espace vectoriel topologique* est un K-espace vectoriel muni d'une topologie pour laquelle (i) tout singleton est un fermé ; (ii) $E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x - y$ et $K \times E \to E$, $(k, x) \mapsto k.x$ sont continues. Un *K-espace vectoriel normé* E est un K-espace vectoriel muni d'une norme et de la distance induite $\|x - y\|_E$. La *boule* de E de centre x et de rayon $r > 0$ est alors l'ouvert : $B_E(x, r) := \{y \in E : \|y - x\|_E < r\}$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F deux espaces vectoriels topologiques. Par défaut sa topologie est

Le **dual** d'un espace E est $E' := \mathcal{L}(E, K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

La *norme d'opérateur* de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est : $\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup\{\|u(x)\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$.

Un **espace de Banach** E est un espace vectoriel normé complet : toute suite de Cauchy est convergente.

Lemme C.57. — *Si E et F sont des espaces de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateur est aussi un espace de Banach.*

Définition C.58. — On appelle *topologie forte* sur un espace vectoriel normé la topologie donnée *a priori*, le plus souvent celle induite par la norme.

La *topologie faible* sur un espace vectoriel topologique E est la topologie engendrée par les parties :

$$\{x \in E : \ell(x) \in U\} \text{ pour } \ell \in E^* \text{ et } U \text{ ouvert de } K.$$

La *topologie *-faible* sur le dual E' d'un espace vectoriel topologique E est la topologie engendrée par les parties :

$$\{\ell \in E' : \ell(x) \in U\} \text{ pour } x \in E \text{ et } U \text{ ouvert de } K.$$

Théorème C.59. — *Soit μ une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$.*

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ muni de la norme $\|f\|_p := \left(\int |f|^p(x)\,\mu(dx)\right)^{1/p}$ est un espace de Banach.

Si $1 \leq p < \infty$ et $1/p + 1/q = 1$, alors $L^q(\mu)$ est le dual de $L^p(\mu)$.

Remarque C.60. — $L^1(\mu)$ n'est PAS le dual de $L^\infty(\mu)$ en général !

Exercice C.18. — Soit E un espace vectoriel topologique. Sa topologie faible est une topologie moins fine que la topologie forte.

La topologie *-faible du dual E' est une topologie séparée.

C.5.2. Propriété de compacité. —

Théorème C.61 **(Banach-Alaoglu)**. — *Soit E un espace vectoriel topologique. Pour un ouvert V de X contenant 0 et $\ell \in E'$, on pose :*

$$B_{\ell,V} := \{x \in E' : |\ell(x)| \leq 1\}$$

*Alors $B_{\ell,V}$ est compact pour la topologie *-faible sur E'. Si E est séparable (i.e., admet une partie dénombrable dense), alors $B_{\ell,V}$) est métrisable pour la topologie *-faible*

On pourra se référer aux théorèmes 3.15 et 3.16 de [**23**].

APPENDICE D

PROBLÈMES

D.1. Devoir de novembre 2010

Les problèmes et exercices sont indépendants. Les questions marquées (*) sont optionelles. Il n'est pas demandé de redémontrer les résultats contenus dans le cours. La clarté de la rédaction sera tout particulièrement considérée.

Exercice 1 On rappelle que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ porte la mesure de Lebesgue normalisée m sur $\mathbb{T}^2$, $m(f) := \int_{[0,1]^2} f(e^{2i\pi u}, e^{2i\pi v})\, dudv$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $T(x, y) = (e^{2i\pi\alpha}x, xy)$.
Montrer que m est invariante et ergodique pour T. On pourra considérer une fonction invariante $f \in L^2(m)$ et sa série de Fourier. $(\mathbb{T}^2, T)$ est-il topologiquement transitif ?
(*) Montrer que pour Lebesgue presque tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $\{u + nv + n^2w\}$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite uniformément répartie sur $[0, 1]$.

Exercice 2 Soit $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $T : X \to X$ l'homéomorphisme tel que : $T(x) = y$ avec $y_n := 0$ pour $n \leq N := \inf\{n : x_n = 0\}$ et, si $N < \infty$, $y_N := 1$ et $y_n := x_n$ pour $n > N$. X est muni de la topologie produit.
Montrer que l'ensemble des cylindres, i.e., des parties de la forme $[a] := \{x \in X : \forall 0 \leq i < n\ x_i = a_i\}$, $a \in \{0, 1\}^n$, $n \geq 1$, est une base de cette topologie. Vérifier que (X, T) est un système dynamique topologique. Prouver que si $T(x) = y$ alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{N-1} 2^i y_i = \sum_{i=0}^{N-1} 2^i x_i + 1 \mod 2^N$. Montrer que T est topologiquement minimal. Montrer que son unique mesure de probabilité invariante est définie par $\mu([a]) = 2^{-n}$ pour $a \in \{0, 1\}^n$, $n \geq 1$.
(*) (X, T) est-elle topologiquement conjuguée au décalage sur deux symboles, (X, σ) avec $\sigma(x) = y$, $y_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? (X, T, μ) est-elle conuguée en mesure avec (X, σ, μ) ?

Problème 1 On pose $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\pi(x) = e^{2i\pi x}$ et on se donne deux applications continues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ et $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\epsilon > 0$ et un *relèvement* de g sur $]x-\epsilon, x+\epsilon[$, i.e., une application continue $G^x :]x-\epsilon, x+\epsilon[\to \mathbb{R}$ vérifiant $\pi \circ G^x = g$. Ce relèvement est-il unique ?

(2) En déduire l'existence d'un relèvement de g sur $\mathbb{R}$ (on pourra commencer par construire un relèvement sur un intervalle compact arbitraire). Décrire l'ensemble des relèvements de g sur $\mathbb{R}$.

(3) Un relèvement de $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{R}$ est $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\pi \circ F = f \circ \pi$. Décrire l'ensemble des relèvements de f donné, puis l'ensemble des relèvements d'une application continue du cercle dans lui-même et finalement l'ensemble des relèvements des homéomorphismes du cercle.

On suppose désormais que f est un homéomorphisme et préserve l'orientation[1]

(4) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relèvement de f. Déterminer $F(x+1) - F(x)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\rho(F, x) := \lim_{n\to\infty}(F^n(x)-x)/n$. En utilisant la monotonie de F et en comparant $x \in [0, 1]$ avec $x = 0$ et $x = 1$, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $((F^n(x) - x)/n)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de x.

(5) Justifier l'existence d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}^1$ invariante par f. En déduire que la suite $((F^n(x) - x)/n)_{n\geq 1}$ converge tout $x \in \mathbb{R}$ vers une même valeur, que l'on note $\rho(F)$. Si F et G sont deux relèvements de f, a-t-on nécessairement $\rho(F) = \rho(G)$?

(6) Montrer que si f possède un point périodique alors $\rho(F)$ est rationnel.

(7) Prouver la réciproque du (6) (Indication : on pourra montrer que si F n'a pas de point fixe alors $\rho(F) \neq 0$).

(8*) On suppose que $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sont deux applications continues topologiquement conjuguées par un homéomorphisme $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, i.e., $f \circ h = h \circ g$. Soit $F, G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relèvements de f, g, h respectivement. Est-il nécessairement vrai que $F \circ H = H \circ G$? Peut-on toujours satisfaire l'équation précédente par un bon choix des relevés ? En déduire que $F(x+1) - F(x) = G(x+1) - G(x)$. On appelle cette valeur commune le *degré topologique* de f. Expliquez pourquoi il ne dépend pas du choix du relevé de f.

En déduire que si $N, M \geq 1$ sont deux entiers distincts, alors T_N et T_M ne peuvent être topologiquement conjugués. Sous quelle condition T_N peut-il être un facteur topologique de T_M ?

Problème 2 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application continue. On suppose qu'il existe un point $x_* \in [0, 1]$ de période minimale égale à 3 : $x_*, f(x_*), f^2(x_*)$ sont deux-à-deux distincts et $f^3(x_*) = x_*$.

(1) Soit $g : [0, 1] \to [0, 1]$ une application continue. Montrer que g admet un point fixe (on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie).

[1] On dit que $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ continu préserve l'orientation s'il admet un relèvement croissant.

(2) Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une application continue définie sur un intervalle I et J un intervalle contenu dans $g(I)$. Montrer qu'il existe un intervalle $K \subset I$ tel que $f(K) = J$.

(3 bis) Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue et $I_0, I_1, \dots, I_n$ est une suite d'intervalles tels que $g(I_j) \supset I_{j+1}$ alors il existe un intervalle K tel que $g^j(K) \subset I_j$ pour tout $j = 0, 1, \dots, n$ et $g^n(K) = I_n$. En déduire que si $I_n = I_0$, il existe $x \in K$ vérifiant $g^j(x) \in \bar{I}_j$ pour tout $0 \leq j \leq n$ et $g^n(x) = x$.

(3) Montrer qu'il existe deux intervalles I_0, I_1 d'intérieurs non-vides et deux-à-deux disjoints tels que $f(I_0) \supset I_1$ et $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$. En déduire l'existence, pour tout entier $N \geq 1$, d'une suite $(j_0, j_1, j_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(I_{j_n}) \supset I_{j_{n+1}}$ pour tout n et de période minimale N : $\forall n \in \mathbb{N}\ j_{n+N} = j_n$ et N est le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ avec cette propriété.

(4) En déduire l'existence d'un point de période minimale n pour tout entier $n \geq 1$. On prendra garde à ce que $I_0 \cap I_1 \neq \emptyset$.

(5*) En déduire que le nombre de points de période n croît au moins exponentiellement : $\#\{x \in [0, 1] : f^n(x) = x\} \geq ce^{hn}$ pour un certain $h > 0$

Problème 3 On étudie la transformation de Gauss $G : X \to X$ définie sur $X := [0, 1]$ par $G(x) := \{1/x\}$, $G(0) = 0$. Elle est munie de μ_G, la mesure de Gauss définie par :

$$\mu_G(A) = \int_A \frac{1}{\log 2} \frac{dx}{1+x}$$

pour tout $A \in \mathcal{X}$, la tribu des boréliens de $]0, 1[$. On note m la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

(1) Vérifier que $(X, \mathcal{X}, \mu_G, G)$ est un système dynamique probabiliste.

Soit $P_1 := \{]1/(n+1), 1/n[: n \in \mathbb{N}^*\}$ *et, pour* $n \geq 2$, $P_n := \bigvee_{k=0}^{n-1} G^{-k}(P_1)$ *où :* $P \vee Q := \{A \cap B \neq \emptyset : A \in P, B \in Q\}$ *et* $G^{-k}(P) := \{G^{-k}(A) : A \in P\}$. $P_n(x)$ *est l'unique élément de* P_n *contenant* x*, s'il existe.*

(2) Montrer que chaque P_n est une partition dénombrable de X (privé d'un ensemble dénombrable) et que pout tout $I \in P_n$, $G^n : I \to]0, 1[$ est un difféomorphisme.

(3) Vérifier que $\inf_{x \in X'} |(G^2)'(x)| = 4$ où X' est l'ensemble des points où G^2 est dérivable. En déduire que : $\operatorname{diam}(P_n) := \sup_{I \in P_n} \operatorname{diam}(I) \leq 4 \cdot 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$.

Ceci implique que pour μ_G*-p.t.* $x \neq y$*, il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P_n(x) \neq P_n(y)$. *On admettra que ceci implique que la tribu engendrée par l'union de ces partitions coïncide, modulo* μ*, avec la tribu des boréliens.*

(4) En déduire que si A est un mesurable de mesure non-nulle alors, il existe un $x \in [0, 1]$, tel que,$\lim_{n \to \infty} m(A \cap P_n(x))/m(P_n(x)) = 1$.

(5) Montrer la propriété suivante : il existe une constante $1 < K < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $I \in P_n$, tout mesurable A, on a :

$$\frac{1}{K} \frac{m(A \cap I)}{m(I)} \leq \frac{m(G^n(A \cap I))}{m(G^n(I))} \leq K \frac{m(A \cap I)}{m(I)}$$

Indication : on pourra majorer $m(G^n(A \cap I))/m(G^n(I))$ par $\sup_{x,y\in I} \frac{|(G^n)'(x)|}{|(G^n)'(y)|}$ et $\log|G'(G^k x)/G'(G^k y))|$ par $|G^k(I)| \sup_{x\in G^k(I)} |G''(x)/G'(x)|$ puis $|G^k(I)| \times \sup_{x,y\in G^k(I)} \frac{|G''(x)|}{|G'(x)G'(y)|}$ et enfin borner $\sum_{k=1}^n |G^k(I)|$ par une constante indépendante de I et de n.

(6) En déduire l'ergodicité de μ_G (Indication : on pourra observer que $\mu_G(A) = 0 \iff m(A) = 0$ et prouver $m(A) > 0$ pour A mesurable invariant $\implies m(A^c) = 0$).

(7) Montrer que, pour Lebesgue presque tout $x \in \mathbb{R}$, si on écrit $x := [a_0, a_1, \dots]$ son développement en fraction continue, alors :

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} = \exp \sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{\log 2} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

(8*) On pourra estimer numériquement cette limite et comparer avec le développement observé expérimentalement pour des nombres "tirés au hasard".

D.2. Devoir de décembre 2010

Remarque D.1. — Il suffisait d'avoir fait correctement la moitié des questions pour avoir une bonne note.

Problème 1

> Dans tout ce problème $(G, \mathcal{G}, m_G)$ est le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Lebesgue normalisée sur les boréliens tandis que $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ est un système dynamique topologique muni d'une mesure invariante de probabilité μ sur ses boréliens $\mathcal{X}$.
>
> On définit l'extension topologique, resp. probabiliste de T par le groupe G selon une application continue $\psi : X \to G$ comme $T_\psi(x, g) = (Tx, \psi(x) + g)$ agissant respectivement sur X et $(X \times G, \mathcal{X} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes m_G)$. On note $\pi : X \times G \mapsto X$, la projection $(x, g) \mapsto x$.

(1) Montrer que ces deux extensions $(X \times G, T_\psi)$ et $(\mu \times m_G, T_\psi)$ sont des systèmes dynamiques respectivement topologiques et probabilistes.

(2) On suppose (X, T) topologiquement minimal. Montrer que $X \times G$ admet une partition en compacts invariants K tels que $\pi(K) = X$ et $T_\psi|K$ est topologiquement minimal tandis que deux quelconques de ces restrictions sont topologiquement conjuguées. Donner un exemple où $K \neq X \times G$. Que peut-on dire si $(X \times G, T_\psi)$ est topologiquement transitif ?

(3) On suppose (T, μ) uniquement ergodique. Montrer que pour T_ψ la transitivité topologique[(2)] implique l'unique ergodicité. *Indication :* On pourra considérer, pour

[(2)] Erreur d'énoncé : il faut supposer l'ergodicité.

une mesure de probabilité T_ψ-invariante μ, l'ensemble E_μ des points génériques (x, g), i.e., tels que $\lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{T_\psi^k(x,g)} = \mu$ dans la topologie étoile faible.

(4) Soit $F : (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ défini par $F(x_1, \dots, x_d) := (x_1 + \alpha, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{d-1} + x_d)$, les additions étant comprises modulo 1. Soit m la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$, i.e., $m(f) := \int_{[0,1]^d} f(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots x_d$. Vérifier que (F, m) est un système dynamique probabiliste. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, (F, m) est ergodique, puis que F est uniquement ergodique.

(5) En déduire le cas particulier suivant du théorème d'équirépartition de Weyl : Soit $P(X) = p_0 + p_1 X + \dots + p_d X^d$ un polynôme à coefficients réels avec $p_d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On note $\{x\} \in [0, 1[$ la partie fractionnaire d'un nombre réel x. Alors la suite $(\{P(n)\})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément distribuée sur $[0, 1]$. *Indication :* On pourra établir une formule polynomiale pour $F^n(x_1, \dots, x_d)$.

Problème 2

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ un système dynamique probabiliste en temps $\mathbb{N}$. On dit qu'il est *faiblement mélangeant* si, pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{X}^2$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |\mu(A \cap T^{-k}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0. \tag{31}$$

(1) Montrer que le mélange faible est un invariant de conjugaison mesurée : deux systèmes dynamiques probabilistes conjugués de façon mesurée sont simultanément faiblement mélangeants ou non.

(2) Montrer que le mélange faible implique l'ergodicité et que le mélange fort implique le mélange faible.

(3) Soit $\mathcal{Y}$ engendrant $\mathcal{X}$ modulo μ. Montrer qu'il suffit de vérifier (31) pour tout $(A, B) \in \mathcal{Y}^2$ pour caractériser le mélange faible. *Indication :* On pourra fixer un des deux ensembles A et B et utiliser le théorème de la classe monotone : Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ contient une partie stable par intersection finie engendrant $\mathcal{X}$ et si $\mathcal{C}$ contient X, est stable par différence et par union dénombrable croissante alors $\mathcal{C} = \mathcal{X}$.

(4) Soit $p, \alpha \in [0, 1]$. Soit $X_1 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu $\mathcal{X}_1$ des boréliens, de la mesure de Bernoulli μ_1 telle que $\mu_1(\{x \in X_1 : x_0 = 0\}) = p$ et de la transformation $T_1((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $X_2 = \mathbb{S}^1$ muni de la tribu $\mathcal{X}_2$ des boréliens, de la mesure de Lebesgue normalisée μ_2 et de la transformation $T_2(z) = e^{2i\pi\alpha}z$. Déterminer parmi ces deux familles de systèmes dynamiques probabilistes ceux qui sont faiblement mélangeants et ceux qui ne le sont pas. *Indication :* on pourra considérer les cylindres ou les intervalles.

(6) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels $a_n \in [0, 1]$ et a un réel. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a| = 0$;

2. $\lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = a^2$ et $\lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} a_k = a$;
3. $\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}(1/n)\#\{0 \le k < n : |a_n - a| > \epsilon\} = 0$.

(7) Montrer que si $(X \times X, \mathcal{X} \otimes \mathcal{X}, \mu \otimes \mu, T \times T)$ est ergodique alors $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est faiblement mélangeant. Montrer ensuite la réciproque.

Problème 3

On considère les transformations : $f(z) := \frac{-1}{z+3}$ et $g(z) := \frac{-1}{z-3}$. On les étend à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $f(\infty) = g(\infty) = 0$, $f(-3) = g(3) = \infty$. On pose $D := \{z \in \mathbb{H} : |z| < 1\}$ et $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Par commodité le pavage du plan hyperbolique par le domaine fondamental E du cours est reproduit à la fin de ce document.

(1) Montrer que les formules précédentes définissent deux isométries du plan hyperbolique $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ ainsi que deux bijections de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que l'on précisera. Calculer les inverses.

(2) Montrer que $f(D)$ et $g(D)$ sont deux demi-disques que l'on précisera. Vérifier que $\overline{f(D)}$ et $\overline{g(D)}$ sont deux compacts disjoints strictement inclus dans $D \cup [-1, 1]$. En déduire que $f(f(D)) \subsetneq f(D)$ et $g(f(D)) \subsetneq g(D)$. Représenter $D, f(D), g(D), f(f(D)), g(f(D)), f(g(D)), g(g(D))$ sur un dessin respectant les inclusions.

(3) Pour toute suite $t := (t_0, \dots, t_n) \in \{f, g\}^{n+1}$, on pose $D_{t_0,\dots,t_n} := t_0(t_1(\dots(t_n(D))\dots))$ (par exemple : $D_f = f(D)$ et $D_{f,g} = f(g(D))$. Montrer que chacun de ces ensembles est un demi-disque non-vide, que $\overline{D_{t_0,\dots,t_n}} \subsetneq D_{t_0,\dots,t_{n-1}}$ et $\overline{D_{t_0,\dots,t_n}} \cap \overline{D_{s_0,\dots,s_n}} = \emptyset$ si $(s_0, \dots, s_n) \in \{f, g\}^{n+1} \setminus \{(t_0, \dots, t_n)\}$.

(4) Montrer que les intersections $\bigcap_{n\ge 0} \overline{D_{t_0,\dots,t_n}}$, $t \in \{f, g\}^{\mathbb{N}}$, sont des singletons inclus dans $\mathbb{R}$. On les note $\eta(t)$ dans la suite. *Indication :* On pourra calculer $f'(z)$ et $g'(z)$ sur $[-1, 1]$.

(5) Soit $u : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $u(x) := -1/x$. Montrer que $u(\mathbb{H} \setminus D) = D$, $u \circ f^{-1} \circ u = g$ et $u \circ g^{-1} \circ u = f$. En déduire que si $t \in \{f, g\}^{\mathbb{Z}_-}$ ($\mathbb{Z}_- := \{0, -1, -2, \dots\}$), alors $\bigcap_{n\ge 0} \overline{t_{-1}^{-1}(t_{-2}^{-1}(t_{-3}^{-1}(\dots t_{-n}^{-1}((\mathbb{H} \setminus D)\dots)))}$ est également réduit à un point.

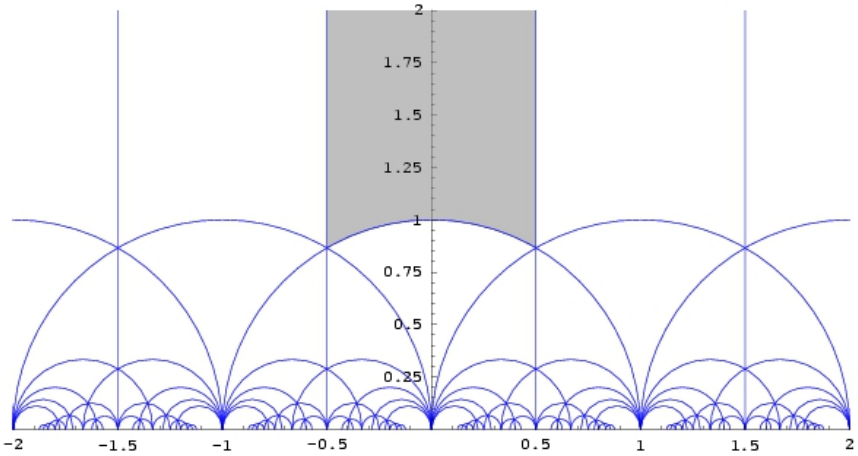
Pour $t \in \{f, g\}^{\mathbb{Z}}$, on note $\xi(t)$ l'unique point de $\bigcap_{n\ge 0} \overline{t_{-1}^{-1}(t_{-2}^{-1}(t_{-3}^{-1}(\dots t_{-n}^{-1}((\mathbb{H} \setminus D)\dots)))}$. Rappel : $\eta(t)$ est l'unique point de $\bigcap_{n\ge 0} \overline{D_{t_0,\dots,t_n}}$. On note également Γ_t l'unique géodésique (complète et orientée) issue de $\xi(t)$ et aboutissant à $\eta(t)$. On note $\sigma : \{f, g\}^{\mathbb{Z}} \to \{f, g\}^{\mathbb{Z}}$, $\sigma((t_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := ((t_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$, le décalage.

(6) Soit $t \in \{f, g\}^{\mathbb{Z}}$. Montrer que $\Gamma_{\sigma(t)} = t_0^{-1}(\Gamma_t)$. En déduire que si $\sigma^p(t) = t$ et $T := t_0 \circ t_1 \circ \dots \circ t_{p-1}$, $T(\Gamma_t) = \Gamma_t$.

(7) Soit $t \in \{f, g\}^{\mathbb{Z}}$. Soit z_1 l'intersection de Γ_t avec l'union des bords dans $\mathbb{H}$ de $f^{-1}(D)$ et $g^{-1}(D)$. Soit z_2 l'intersection de Γ_t avec le bord dans $\mathbb{H}$ de D. Montrer qu'il existe deux constantes $0 < A < B < \infty$, indépendantes de t telles que $A < d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) < B$. *Indication :* On pourra encadrer les valeurs de $\Im(z)$ sur le segment de géodésique entre z_1 et z_2.

(8) En déduire que si p est la période minimale de $t \in \{f, g\}^{\mathbb{Z}}$ soit σ alors la projection de Γ_t sur la surface modulaire est périodique et de période minimale majorée par Cp avec $0 < C < \infty$ indépendant de t.

(9) Montrer qu'il existe des constantes $D, E > 0$ telles que, pour tout ℓ assez grand, le nombre de géodésiques géométriquement distinctes *sur la surface modulaire*, périodiques de longueur au plus ℓ, est minoré par $De^{E\ell}$.



Partition du plan hyperbolique par l'orbite du domaine fondamental E. Ci-dessus $-2 \leq \Re(z) \leq 2$ et $0 < \Im(z) \leq 2$ et E en gris. On rappelle $e_1 := \{z : \Re(z) = 1/2 \text{ et } |z| > 1\}$ et $e_2 := \{z : |z| = 1 \text{ et } 0 < \Im(z) < 1/2\}$.

APPENDICE E

NOTATIONS

$X := Y$	$X = Y$ par définition de X
$X =: Y$	$X = Y$ par définition de Y
$\mathbb{C}$	nombres complexes
$\mathbb{N}$	entiers positifs ou nuls
$\mathbb{N}^*$	entiers strictement positifs
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	nombres rationnels
$\mathbb{R}$	nombres réels
$\mathbb{R}_+$	nombre réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}_+^*$	nombre réels strictement positifs
$\mathbb{S}^1$	cercle unité de $\mathbb{C}$
$\mathbb{S}^n$	sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$
$\mathbb{T}$	quotient de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$
$\Re(z)$	partie réelle de z
$\Im(z)$	partie imaginaire de z
1_X	fonction indicatrice de X
$f \circ g$	composition : g puis f
$a \mapsto b$	application envoyant a sur b
$\mathcal{O}^T(x)$	orbite (p.21)
C^r	r-fois continûment différentiable
σ_N	décalage (p.16)
f_*	application induite (covariante) (p.25)
τ_S	temps de retour (p.25)
ϕ_S	application de premier retour (p.25)
$[\cdots]$	cylindre (p.18)
$A \Delta B$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$(X, \dots) \to (Y, \dots)$	transformation respectant la structure
$\omega(\phi, x)$	ensemble omega-limite (p.31)
$\alpha(\phi, x)$	ensemble alpha-limite (p.31)
$L(\phi), L_+(\phi)$	ensembles limites (p.31)
f^n	f composée n fois si $n \geq 0$, f^{-1} composé n fois sinon
$\mathrm{Per}_\tau(\phi), \mathrm{Per}(\phi)$	points périodiques (p.34)
$\mathrm{Fix}_\tau(\phi)$,	points fixés (p.34)
$\mathrm{Rec}(\phi)$	points récurrents (p.35)
$E(\cdot)$	partie entière
$\{\cdot\}$	partie fractionnaire
$d(\cdot, \cdot)$	distance
$\mathcal{I}(\phi)$	tribu des invariants (p.48)
$L^p(\mu)$	fonctions f telles que $\lvert f\rvert^p$ est intégrable pour μ
$L^0(\mu)$	fonctions mesurables modulo μ
$\mathbb{E}_\mu(f\lvert\mathcal{A})$	espérance conditionnelle de f sachant $\mathcal{A}$ (p.146)
$M_t f$	moyenne ergodique de f (p.53)
$\lVert \cdot \rVert_{L^p}$	norme L^p
T^+	restriction de T à ses éléments strictement positifs
$C(X)$	fonctions continues sur X
m_X	mesure de Lebesgue normalisée sur X

R_α	rotation (p.13)	$\text{supp}(\mu)$	support (p.144)
p.p.	presque partout (p.145)	$S_n(f)$	somme ergodique (p.57)
p.t.	presque tout (p.145)	$M_n(f)$	moyenne ergodique (p.53)
x^+	partie positive : $\max(x, 0)$	$\text{Prob}(X)$	ensemble des probabilités (p.38)
$x-$	partie négative : $\max(-x, 0)$	$\text{Prob}(\phi)$	ensemble des probabilités invariantes (p.38)

INDEX

σ-algèbre, 142
conjugaison, 138
translation à droite, 138
translation à gauche, 138
cylindre, 18
action, 21, 70, 138
  fidèle, 70, 138
  libre, 75, 138
  transitive, 70, 138
action de groupe, 69
action induite, 138
α-limite, 32
application
  de classe C^r, 147
application de premier retour, 26, 28
argument de Hopf, 107
atlas, 146
  équivalent, 146
Baire, 142
base de la topologie, 139
borélienne, 143
boréliens, 143
boule ouverte, 139
cartes, 146
cercle généralisé, 74
classe d'équivalence, 137
codage, 17
compacité, 140
compacité séquentielle, 140
condition de Cauchy, 8
conjugaison, 23
connexe, 140
constante modulo μ
  fonction, 49
convergents, 15
courbe, 66
  paramétrée, 66
  trace d'une, 66
dérivée de Radon-Nikodym, 146
décalage
  de type fini, 40
décalage bilatère, 17
décalage unilatère, 17
décomposition ergodique, 53
décomposition spectrale, 37
demi-plan de Poincaré, 68
dense, 12
differentiabilite
  différentiabilité, 75
distance
  quotient, 86
distance hyperbolique, 69
distance quotient, 142
divergence, 112
dual, 148
dynamique symbolique, 39
ensemble
  de deuxième catégorie, 142
  gras, 142
ensemble limite, 32
entropie topologique, 41
ϵ-dense, 34
équation différentielle autonome, 9
équidistribution, 12, 62
ergodique, 48
espace
  de Baire, 142
espace de Banach, 148

espace de Borel standard, 143
espace de Hilbert, 53
espace de Lebesgue, 145
espace de probabilité standard, 143
espace des phases., 7
espace métrique, 139
espace modulaire, 84
espace quotient, 137
espaces mesurés
  produit, 144
espérance conditionnelle, 146
extension, 23
extension naturelle, 27
extension topologique, 18
facteur, 23
fibré tangent, 148
fibre unitaire tangent
  fibré unitaire tangent, 75
flot géodésique, 97
flot horicyclique, 100
flot horicyclique dual, 102
fonction
  mesurable, 145
  presque partout, 145
fraction continue, 15
G-équivalence, 138
G_δ-dense, 142
geodesique
  complète, 68
géodésique, 68
groupe, 137
groupe linéaire, 69
groupe linéaire spécial, 69
groupe linéaire spécial orthogonal, 69
groupe linéaire spécial orthogonal projectif, 69
groupe linéaire spécial projectif, 69
groupe modulaire, 83
groupe unimodulaire, 110
horicycle, 101
horicycle dual, 103
image, 25
invariance
  d'un ensemble, 25
  d'une mesure, 38
  stricte, 32
  totale, 32
  tribu, 48
invariance modulo μ
  des fonctions, 49
invariant, 23
  complet, 23
isométrie (riemannienne), 67
longueur d'une courbe, 66
longueur hyperbolique, 69
lot horicyclique dual, 109
mélange, 55
mesurable
  espace, 142
mesure
  σ-finie, 143
  étrangère, 145
  absolument continue, 145
  atomique, 145
  continue, 145
  de probabilité, 143
  invariante, 38
  positive, 143
  support de, 144
  support total, 144
mesure de Bernoulli, 19
mesure de Lebesgue, 144
mesure de Liouville, 110, 114
mesures
  singulière, 145
mesures absolument continues, 55
mesures équivalentes, 55
mesures étrangères, 55
métrisable, 139
minimalité, 33
moyenne ergodique, 53
multiplication, 13
normal, 14
norme d'opérateur, 148
ω-limite, 31
opérateur de Koopman, 49
opérateur de Koopman, 24
orbite, 21, 138
orbites, 11
orientable, 82
ouvert, 138
ouvert riemannien, 66
partie entière, 15
partie entière, 131
partie fractionnaire, 131
période, 34
périodicité, 10
périodique, 34
périodique, 18
plan hyperbolique, 68
point extrémal, 55
pré-base de la topologie, 139
préservation du volume, 10
préserve l'orientation, 72
presque partout, 145
presque tout, 145

produit, 24
projection canonique, 141
projection orthogonale, 53
pseudo-distance, 86
quotient, 25
quotients partiels, 15
recouvrement ouvert, 140
récurrence, 10
récurrent, 35
relation d'équivalence, 137
revêtement ramifié, 147
rotation, 13
schéma de Bernoulli, 19
section de Poincaré, 26
section globale, 28
segment de courbe, 66
semi-conjugaison, 23
semigroupe, 137
solution maximale, 8
somme ergodique, 57
sous-décalages, 39
sous-groupe, 137
  distingué, 137
sous-système dynamique, 25
sous-tribu, 143
sous-variété, 147
spectre ponctuel, 24
stabilisateur, 70
structure riemannienne, 65
submersion, 147
surface modulaire, 83
surjection canonique, 85, 137
suspension, 26
système dynamique
  différentiable, 22
  mesurable, 22
  mesuré, 22
  probabiliste, 22
  topologique, 22
système dynamique, 21
temps, 21
  continu, 21
  discret, 21
temps de retour, 25, 28
temps discret, 11
théorème
  de Brouwer, 140
  de Carathéodory, 144
  de Doob, 146
  de Fubini-Tonelli, 144
  de Radon-Nikodym, 146
  de représentation de Riesz, 144
  de Tychonoff, 141
théorie ergodique, 10
topologie, 138
  discrète, 85, 139
  engendrée, 139
  grossière, 139
  induite, 85, 140
  plus fine, 139
  produit, 140
  quotient, 85, 141
  séparée, 85, 138
  séparable, 138
topologie *-faible, 148
topologie faible, 148
topologie forte, 148
transformation de Gauss, 15
transformation de Möbius, 70
transitivité topologique, 36
tribu, 142
  complete, 144
tribu borélienne, 143
tribu engendrée, 142, 143
tribu grossière, 143
tribu produit, 143
triviale modulo μ, 48
unique ergodicité, 59
variété, 146
variété riemannienne, 66
variete stable ou instable, 108
vitesse d'approximation, 132
voisinage, 138

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Arnold – *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, 1980.

[2] J. Barrow-Green – *Poincare and the three body problem*, American Mathematical Society, 2011.

[3] A. F. Beardon – *The geometry of discrete groups*, Graduate texts in mathematics, vol. 91, Springer, 1983.

[4] T. Bedford, M. Keane & C. Series (éds.) – *Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*, Oxford University Press, Oxford, Royaume-Uni, 1991.

[5] C. Bonatti & S. Crovisier – « Récurrence et généricité », *Inventiones Mathematicae* (2004), no. 158, p. 33–104.

[6] M. P. D. Carmo – *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[7] ———, *Riemannian geometry*, Birkhauser, 1992.

[8] P. Colmez – *Eléments d'algèbre et d'analyse (mat331)*, Cours de l'École polytechnique, Palaiseau, France, 2009.

[9] G. Courtois, F. Dal'bo & F. Paulin – *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, Editions de l'École polytechnique, Palaiseau, France, 2007.

[10] T. Downarowicz – *Entropy in dynamical systems*, Cambridge University Press, 2011.

[11] S. Gallot, D. Hulin & J. Lafontaine – *Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 2004.

[12] F. Golse – *Distributions, analyse de fourier, edp (mat 431)*, Ecole polytechnique, 2010.

[13] F. Golse, Y. Laszlo & C. Viterbo – *Eléments d'algèbre et d'analyse (mat311)*, Cours de l'École polytechnique, Palaiseau, France, 2009.

[14] A. Greven, G. Keller & G. Warnecke – *Entropy*, Princeton University Press, 2003.

[15] G. H. Hardy & E. M. Wright – *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, 2008.

[16] A. Katok – « Fifty years of entropy in dynamics : 1958-2007 », *Journal of Modern Dynamics* (2007), no. 1, p. 545–596.

[17] P. de La Harpe – *Topics in geometric group theory*, University of Chicago Press, 2000.

[18] M. Lemańczyk – « On the weak isomorphism of strictly ergodic homeomorphisms », *Monat. Math.* (2005), p. 39–46.

[19] J. Mather & R. McGehee – « sur les singularites non-collisionnelles », *Journal inconnu* (1974).

[20] W. de Melo & S. van Strien – *One-dimensional dynamics*, Springer, 1993.

[21] H. Poincaré – *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (3 volumes)*, Nabu press, 2010.

[22] C. Robinson – *Dynamical systems : Stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC Press, 1998.

[23] W. Rudin – *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[24] ———, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[25] D. J. Rudolph – *Fundamentals of measurable dynamics*, Cambridge University Press, 1990.

[26] S. Ruette – « Chaos for continuous interval maps - a survey of relationship between the various sorts of chaos », available at `http://www.math.u-psud.fr/ruette`, 2011.

[27] C. Viterbo – *Systèmes dynamiques (mat431)*, Cours de l'École polytechnique, Palaiseau, France, 2009.

[28] J. Xia – « sur les singularites non-collisionnelles », *Journal inconnu* (1992).