



HAL
open science

Topologie Appliquée

Olivier Maurice

► **To cite this version:**

Olivier Maurice. Topologie Appliquée. DEA. école d'été du GDR Ondes 2011, 2011, pp.135. cel-00617363v2

HAL Id: cel-00617363

<https://cel.hal.science/cel-00617363v2>

Submitted on 3 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Topologie appliquée

GDR Ondes – école d'été

Olivier MAURICE, senior scientist au GERAC

La topologie appliquée à la compatibilité électromagnétique est un domaine nouveau au sens où bien des concepts restent encore à formaliser dans le cadre de la topologie mathématique à laquelle nous nous référons.

Dès lors que la topologie est appliquée, plusieurs liaisons entre le vécu des physiciens et les définitions des mathématiciens sont possibles. Je présente ici ma vue personnelle de cette implémentation, qui peut être appelée à évoluer car le domaine est extrêmement complexe.

Néanmoins les concepts mathématiques abordés sont eux non dépendants de cette vision, et cet exposé est avant tout l'occasion de les adresser.

Alors, bon voyage !

Un peu d'histoire

On considère souvent comme grand père de la topologie, Leonhard Euler (1707 – 1783) qui résolut le problème des sept ponts de Koenigsberg dont on disait qu'un promeneur ne pouvait les traverser sans repasser par l'un des ponts. Euler donna une démonstration mathématique de cette impossibilité.

La topologie est assimilable à ce moment à la géométrie.

Elle va émerger de l'analyse avec Karl Weierstrass (1815 – 1897) qui étudie la limite des fonctions, ce qui le pousse à se pencher sur les propriétés de l'ensemble des réels. Georg Cantor avec sa théorie des ensembles (1845 – 1918) introduit ce qu'on appelle aujourd'hui la topologie ensembliste.

Henri Poincaré (1854 – 1912) va jeter les bases de la topologie algébrique ou combinatoire dont l'objectif principal est la recherche d'invariants dans les transformations.

On citerait aussi Hausdorff, Brouwer, Alexander, Alexandrov et Lefschetz. Ce dernier a priori a introduit le vocable de « topologie ».

Définition

Une structure topologique sur un ensemble X est un ensemble T de parties de X qui satisfait aux conditions suivantes :

- *La réunion de toute famille d'éléments de T appartient à T*
- *L'intersection de toutes familles finies d'éléments de T appartient à T*

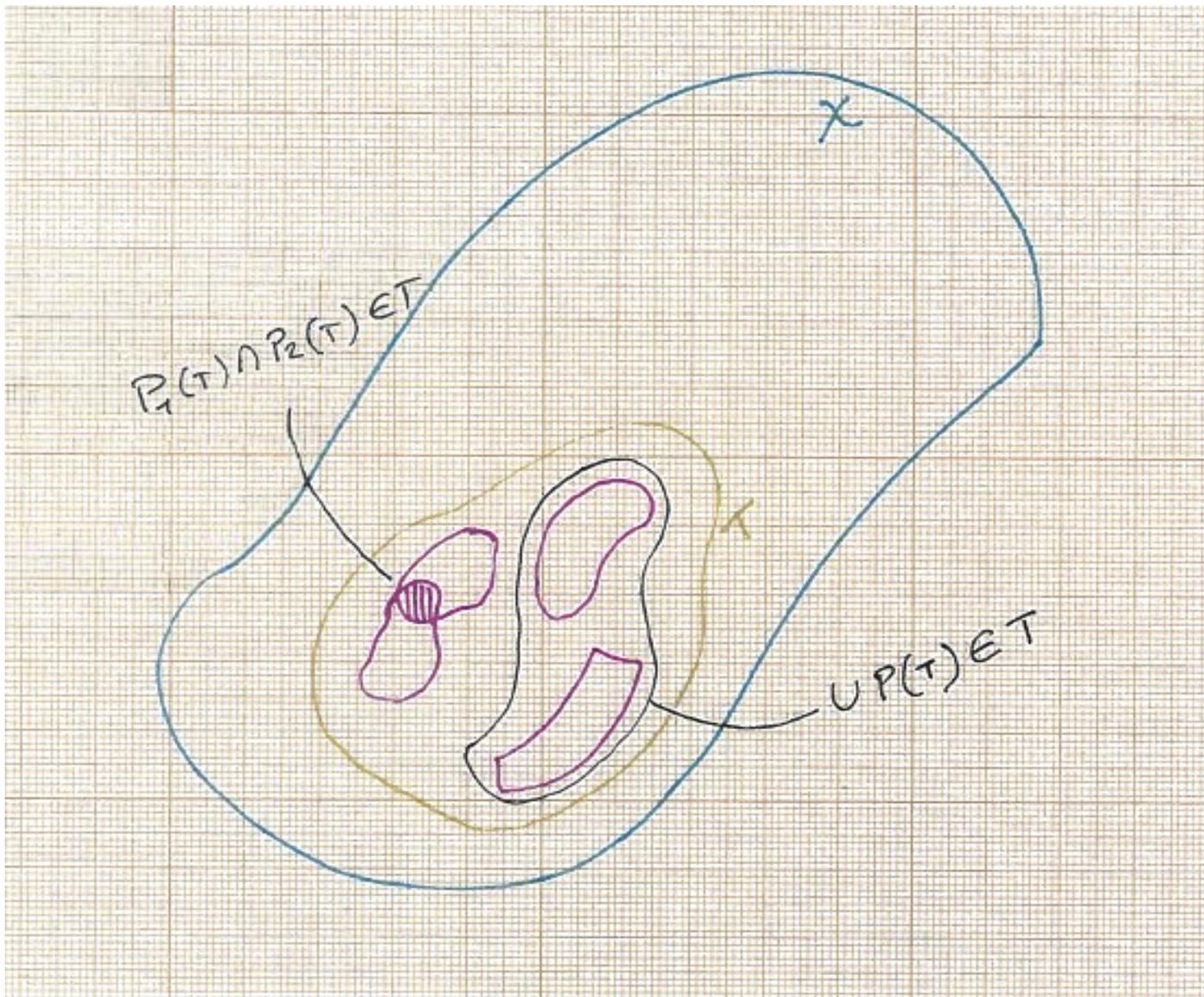
Le couple (X,T) constitue un espace topologique.

Petite introduction

Nous allons travailler sur l'espace en trois (voire quatre) dimensions, associé à une structure topologique : les graphes, et une structure algébrique associée : l'algèbre tensoriel.

On parle souvent d'étendre le traitement abstrait appliqué aux graphes à des structures de plus hautes dimensions : des surfaces, des volumes, etc. [Branin, « The algebraic topological basis for network analogies and the vector calculus).

Notre démarche va être différente. Nous allons montrer que sous certaines conditions on peut au contraire réduire l'espace des champs à un graphe, à une topologie algébrique discrète. Puis nous verrons comment ce graphe se connecte à son dual. Et enfin, nous étudierons la connexion de ces confinements avec l'espace des champs rayonnés statiques ou photoniques.



Variétés

Voir l'article de Wikipédia sur les variétés.

Une variété est un espace topologique abstrait, qui peut être localement vu comme Euclidien, de dimension n .

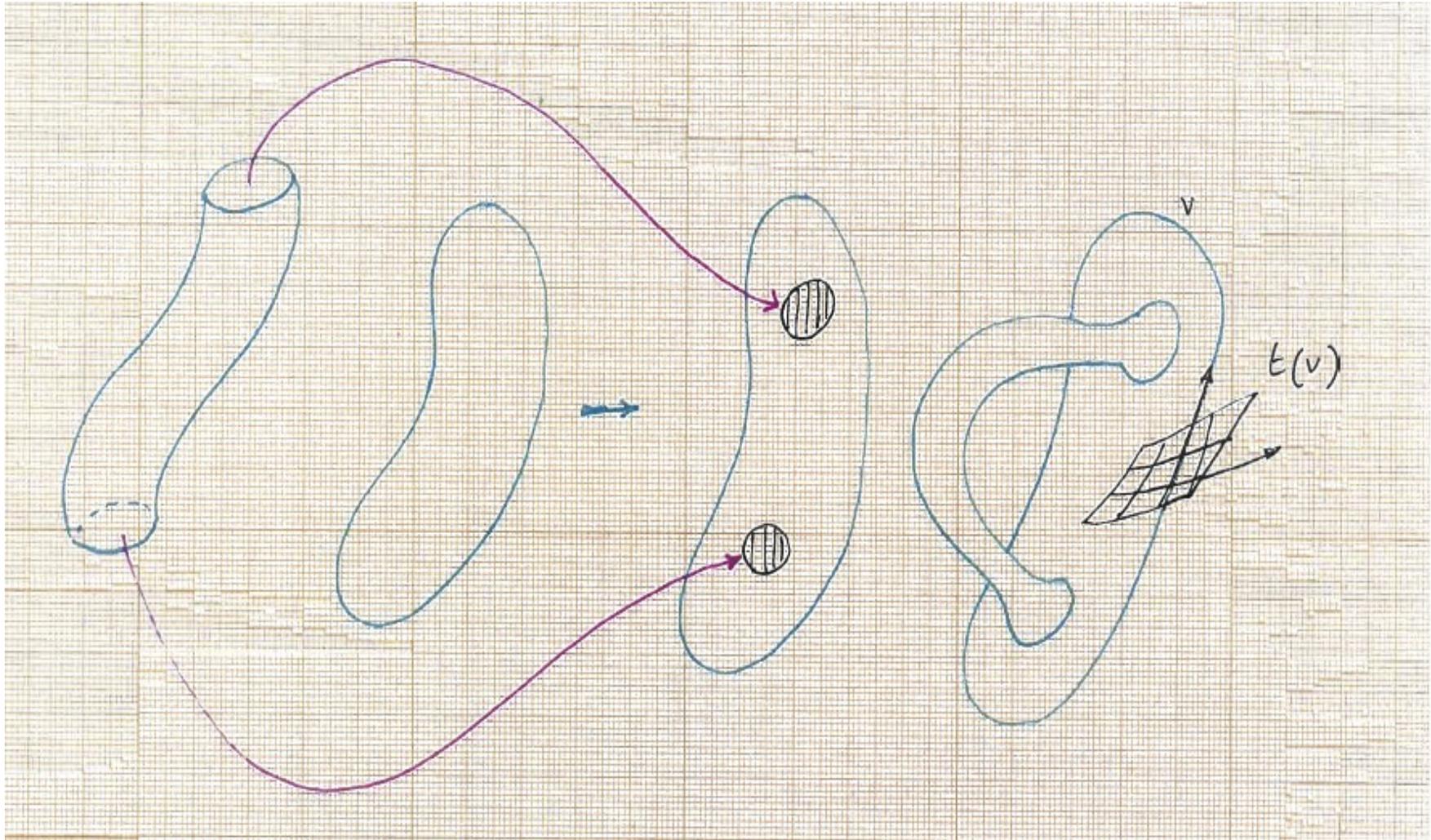
On peut construire une variété par recollement : c'est le mode de construction des figures classiques.

Tout le travail de la topologie algébrique est d'étudier les transformations qui font passer d'une variété à une autre, classer les variétés, etc.

Nous allons nous intéresser aux n -variétés, localement homéomorphes¹ à un espace vectoriel de dimension n . Par exemple une 1-variété est une ligne, une 2-variété une surface, etc.

Nous allons appuyer la variété sur un espace affine (A_3) de façon à définir un champ de vecteur tangent à la variété.

1 : un homéomorphisme est une application bijective d'un espace topologique vers un autre.



Espace affine

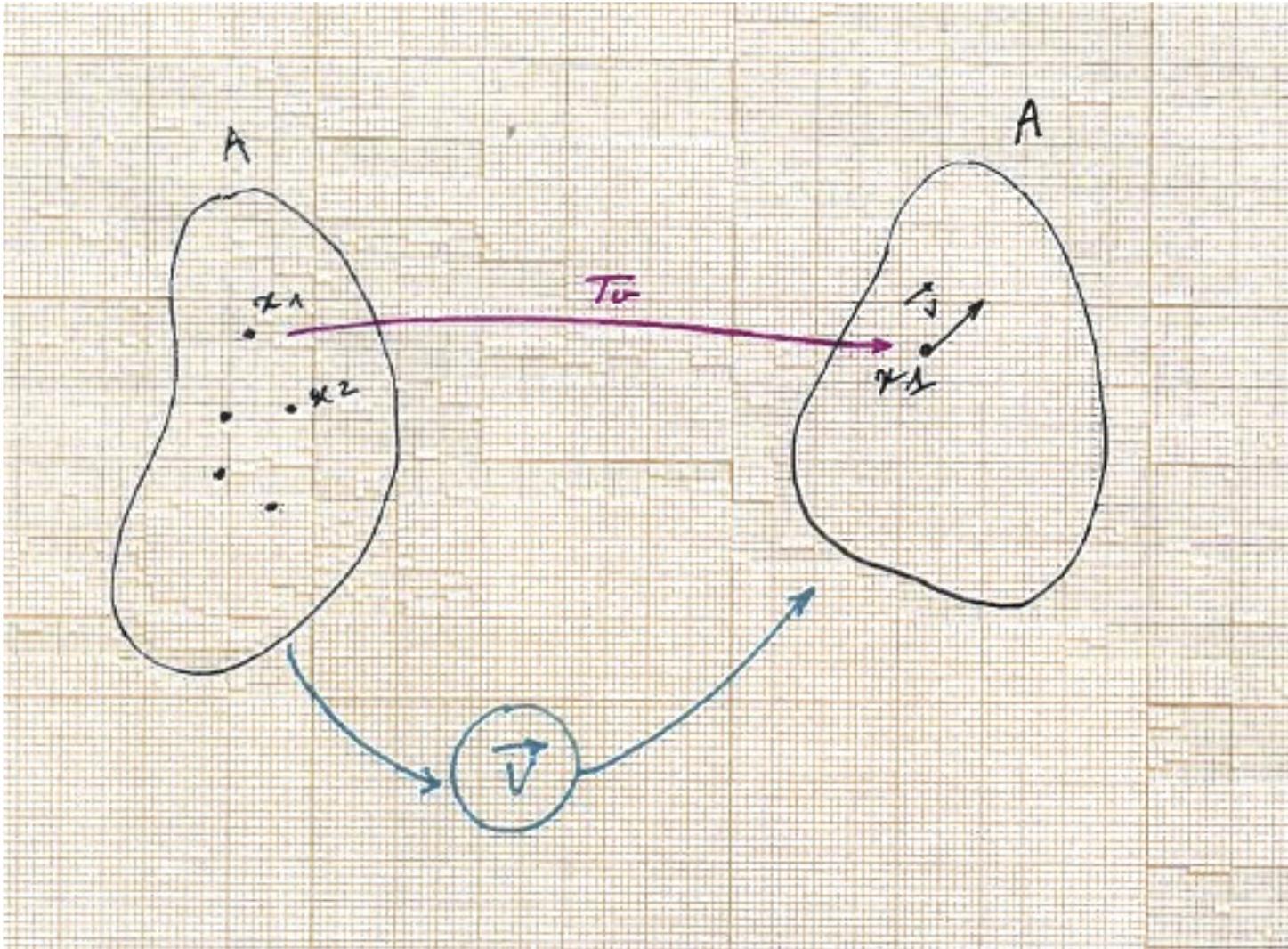
Un espace affine A est un ensemble de points auquel on associe un espace vectoriel V .

Un vecteur de V agit sur A s'il existe une application T_v de A dans A que l'on appelle une translation telle que $T_v(x)=x+v$

On peut y appliquer les règles de l'algèbre.

En citant Bossavit : « l'espace affine est un espace vectoriel dont on a oublié l'origine ».

C'est intéressant car les lois de la physique sont en général invariante par translation, ce que l'on retrouve dans l'espace affine, et il est assez facile en partant d'observation physique de construire un ensemble de points aux propriétés mesurées.

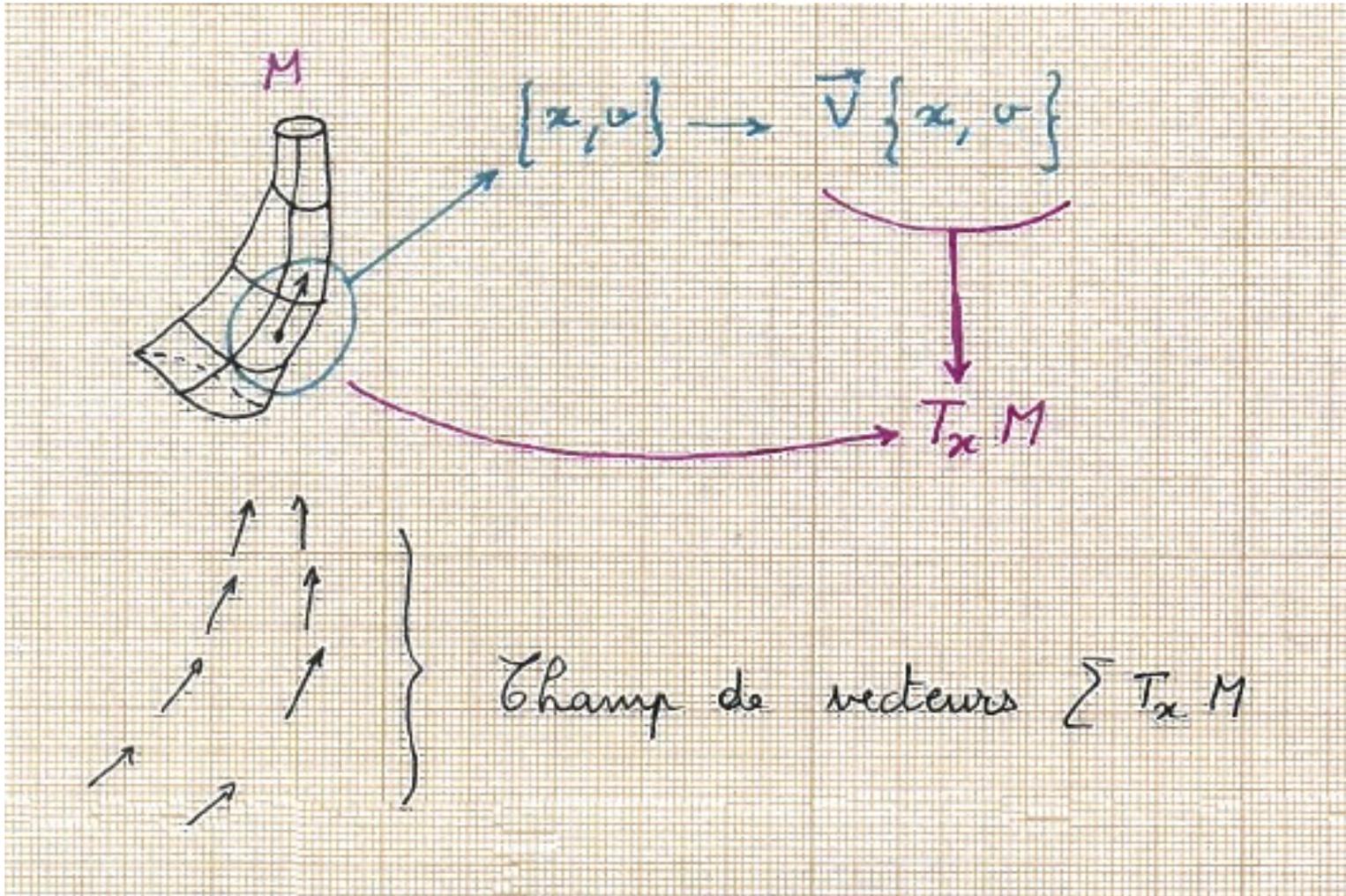


Variétés et vecteurs tangents

On suppose que l'on a construit nos variétés par collage de petits plans, assurant ainsi qu'elles sont partout localement assimilables à un espace Euclidien. De fait elles présentent partout des tangentes au point courant.

Sur la variété on peut définir des couples $\{x,v\}$ où x est un point de l'espace affine de la variété et v un vecteur lié. Ce vecteur s'étend entre x et $x+v$. Or l'ensemble des vecteurs liés définissables sur la variété ne forme pas un espace vectoriel (ce ne sont donc pas des vecteurs « ordinaires »). Par exemple, multiplier $\{x,v\}$ par r n'a pas de sens (que signifie la multiplication du point x par r ?).

Par contre il en va différemment de l'ensemble des vecteurs liés au point x .



Espace tangent à la variété

En tout point de la variété on peut définir un ensemble de Vecteurs liés qui forme bien un espace vectoriel. On l'appelle espace tangent.

Donc une variété M de dimension n a en tout point x un espace tangent noté $T_x M$.

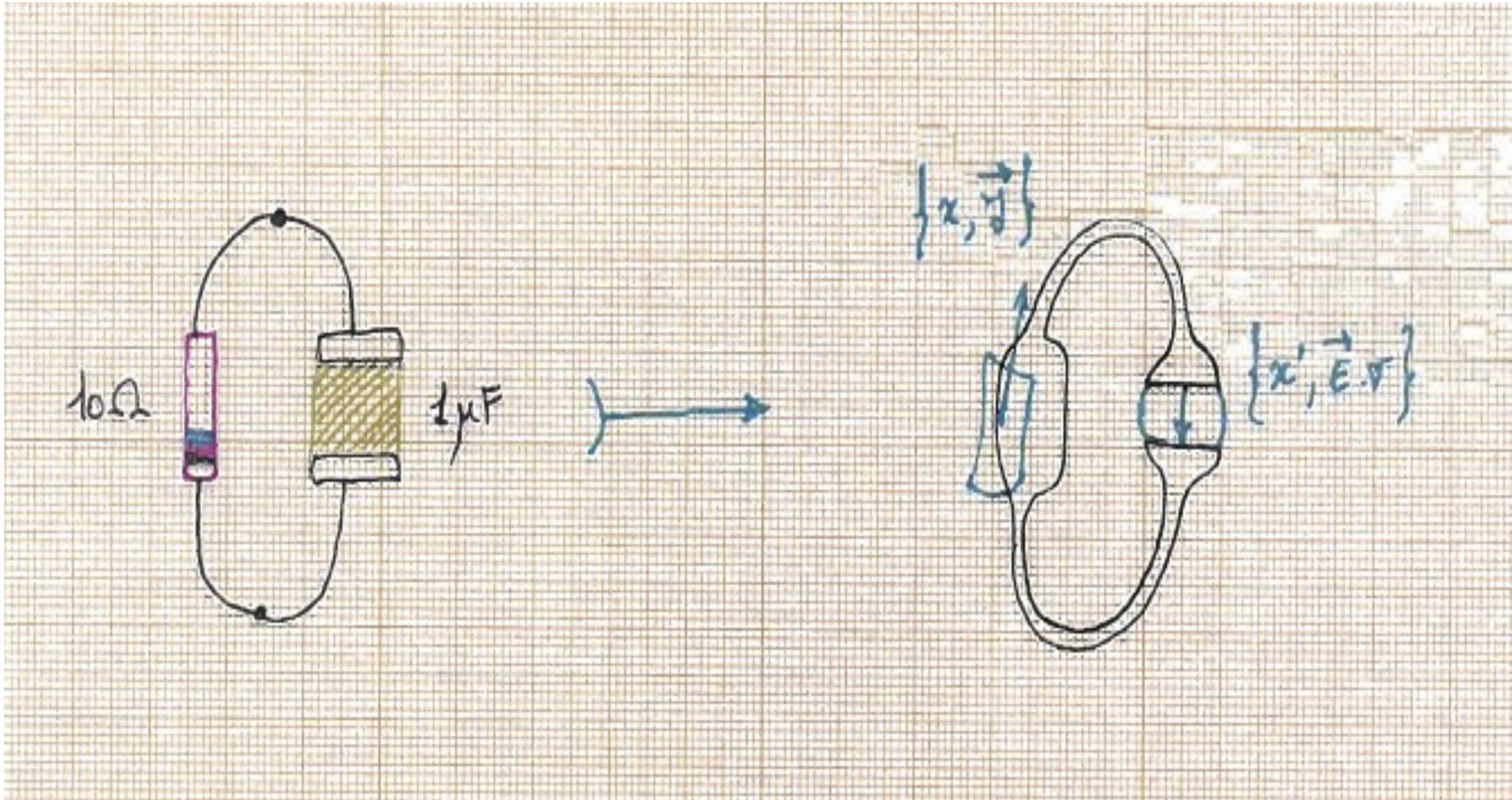
Un champ de vecteur apparaît alors comme une fonction du type : $A_n \rightarrow TA_n$, soit en chaque point x d'une région de l'espace affine attachée à la variété, un vecteur lié $\{x, v\}$.

Les champs de débits vus comme des variétés

On peut identifier (on veut!) les flux – les débits d'énergie issus de gradient de potentiel avec des variétés de type tubes, d'ailleurs orientés.

Les résistances constituent le cas le plus simple. L'ensemble de la partie solide du composant est assimilable à un ensemble de points, un espace affine. En chaque point on peut lier un vecteur densité de courant, localement tangent au tube.

En écrivant $J = \sigma E$, comme E découle d'un gradient de potentiels présent aux extrémités de la variété tubulaire, on peut construire un tube similaire (ces tubes ne sont pas forcément de section constante entre deux extrémités) pour le courant de déplacement.



Variétés découlant du gradient d'un potentiel

Nous disposons ainsi de variétés, de tubes que nous appelons résistance, condensateur. Chacun de ces tubes est caractérisé par le débit qu'il transporte. On suppose pour l'instant simplement que ce débit est engendré par un gradient de potentiel présent aux extrémités du tube.

Ces tubes sont de formes quelconques mais longilignes, c'est à dire qu'ils ne se croisent pas eux-mêmes et qu'un promeneur marchant sur leur surface dans la direction de leur orientation choisie, ne peut à aucun moment ne revenir à son point de départ sans faire demi-tour. Nous n'avons pour l'instant fait aucune autre hypothèse.

Nous voulons maintenant construire des variétés plus compliquées en collant ces tubes.

***E* comme 1-forme**

Le champ électrique engendre par son déplacement un travail conservatif :

$$W = q \int_X \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = q V$$

Le champ électrique apparaît ici de fait comme une forme différentielle d'ordre 1 (la forme différentielle est tout ce qui se trouve sous l'intégrale).

On peut introduire aussi ici l'opérateur de bord très utile en topologie. Soit une variété d'ordre n : M^n , le théorème de Stokes se résume à égaliser l'intégrale de la forme différentielle sur la variété orientée et sa primitive intégrée sur le bord de la variété. Le bord d'une ligne étant un point. Écrivons déjà :

$$\int_{\partial M^n} \omega = \int_{M^n} d\omega$$

Parlant du bord d'une variété nous aurions dû démontrer d'abord que la variété était « à bord ». Nous l'admettrons.

Première application de l'opérateur de bord

Prenant comme forme différentielle le potentiel on trouve immédiatement en appliquant le théorème de Stokes :

$$\int_X dV = \int_{\partial X} V = V_2 - V_1 = EX$$

Le point important que nous reprendrons ensuite est de remarquer que le potentiel comme le champ électrique longitudinal est une 1-forme (on parle aussi pour le champ électrique de « vecteur polaire »).

Imaginer un autre cas de variété tubulaire

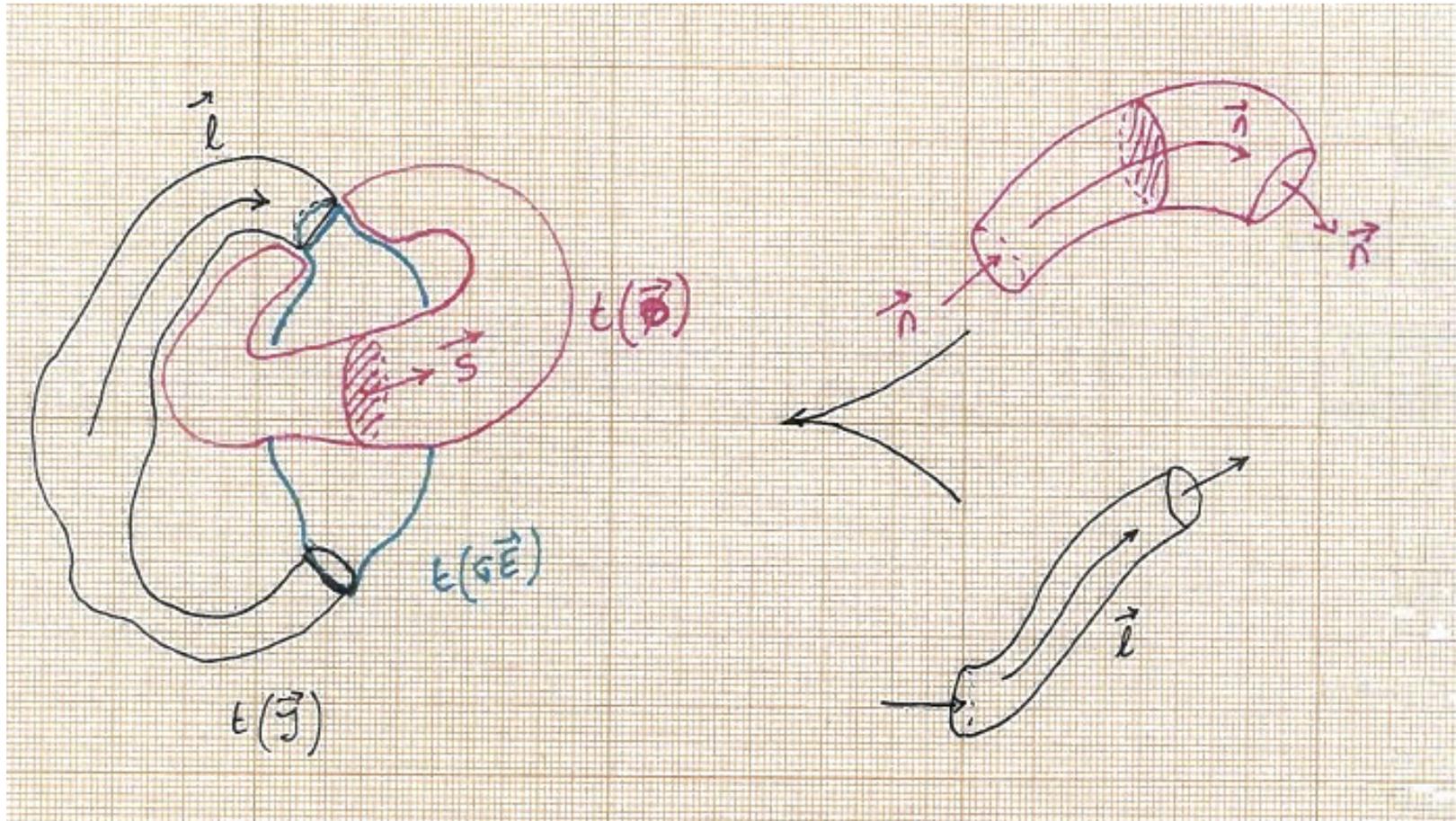
Partant toujours du travail, on écrit que le travail virtuel pour se faire mouvoir une boucle de courant de I ampères est :

$$W=I\Phi$$

Φ est le flux du champ magnétique, définit par rapport à la surface S encadrée par le courant. On définit alors une force magnétomotrice $F = NI$ où N est le nombre de tour parcouru par le courant.

En remplaçant à partir de là le débit précédent de masse (ou de charge électrique) par le flux et le potentiel par la force magnétomotrice, on retrouve les mêmes variables pour définir un tube de flux, un espace tangent lié (vecteur B), etc.

On dispose donc de deux variétés tubulaires l'une associée au champ électrique longitudinal et l'autre au champ magnétique longitudinal.



Le champ B comme 2-forme

Il y a quand même une différence importante entre les deux variétés tubulaires que nous avons engendrées à partir de E et B .

B étant lié à une surface est une 2-forme et non une 1-forme comme E .

Dans un déplacement virtuel d'une boucle d'un emplacement c à c' , la normale à la surface balayée, n , définit le travail de la force de Laplace égal à I fois le flux :

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$$

On peut aussi définir B à partir d'un autre champ – le potentiel vecteur A sous la forme générale : $B_{xy} = \partial_x A_y$ *

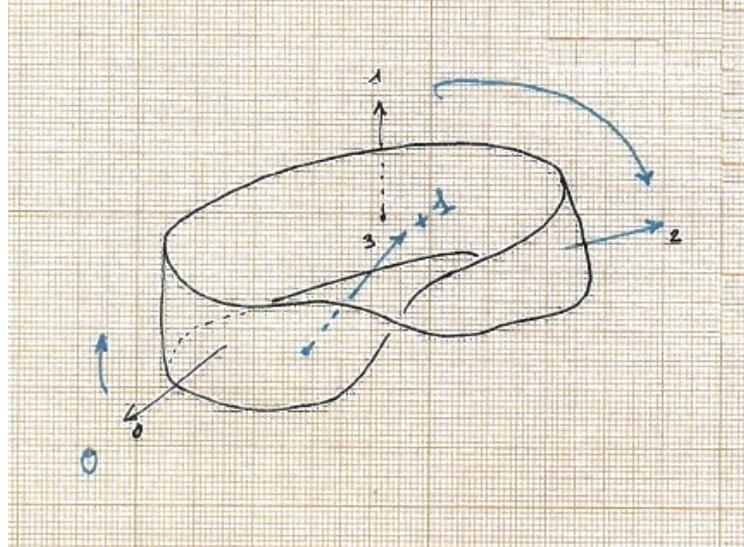
Où apparaît clairement encore son aspect axial – ou 2-forme.

* : ici x et y sont des indices muets et représentent l'une quelconque des 3 directions de l'espace

Variété orientable

On peut orienter une variété. Cela revient à trouver une direction homogène sur l'ensemble de la variété, à partir par exemple de l'espace tangent.

Certaines variétés ne sont pas orientables – par exemple le fameux ruban de Moëbius.



Variétés de CEP* ≥ 1

Pour fabriquer des variétés plus complexes que les simples tubes on doit réaliser des opérations de collages (gluing). Si l'opération de collage est bien faite, la nouvelle variété conserve les propriétés nécessaires.

Une variété peut être vue comme une collection de cartes (map) réunies en un atlas, qui indique comment passer de l'une à l'autre. Au niveau des zones frontières on doit disposer d'une redondance, de valeurs communes à deux (ou plus) cartes pour pouvoir effectuer le changement de carte.

Suivant le type de fonctions qui assurent le changement de carte, la variété possède une structure plus ou moins forte.

** : Caractéristique d'Euler Poincaré*

Coller les variétés tubulaires

Si l'on considère deux variétés V_1 et V_2 , pour les « coller » c'est à dire constituer un nouvel ensemble de points réunissant les ensembles de points de V_1 et V_2 il faut opérer une réunion.

Pour assurer la continuité des relations entre les points il faut une intersection non nulle. Soit I cette intersection, on peut définir les relations dans V_1 entre les points de $\{V_1-I\}$ et I . De même dans V_2 on peut définir les relations entre les points de I et $\{V_2-I\}$. Par exemple on peut calculer $(x_{V_1}-x_I)$ de même que $(x_{V_2}-x_I)$. Dès lors le calcul de $(x_{V_1}-x_{V_2})$ est possible dans la réunion. On comprend alors que sans cette intersection la conservation des propriétés est perdue dans la réunion.

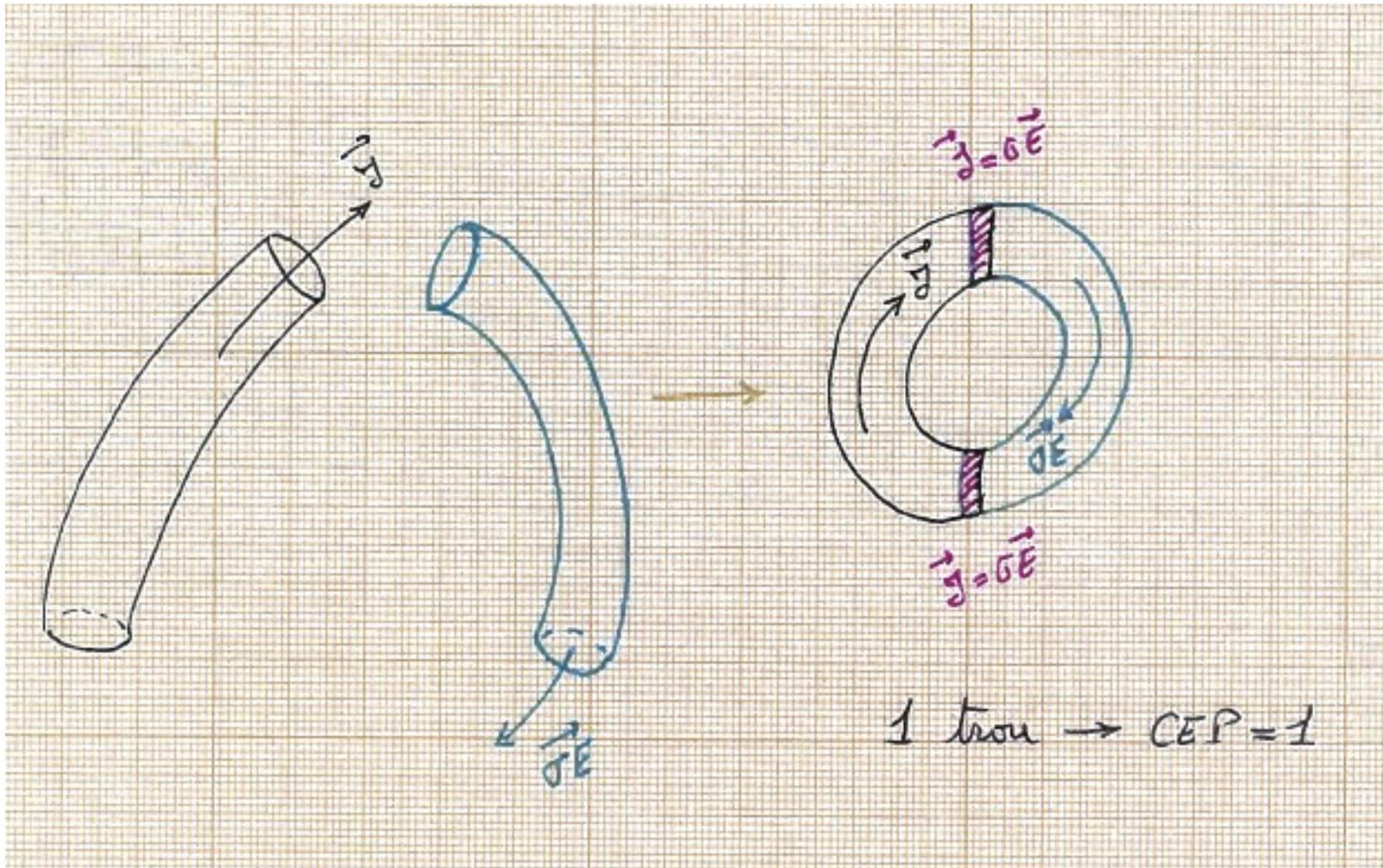
Sous ces hypothèses, l'opération de collage de deux tubes est pratiquement une simple réunion des ensembles liés.

Le collage de plus de deux variétés suit un processus similaire à celui vu pour 2. Évidemment notre exposé est mathématiquement très incomplet voire faux, mais suffit à notre compréhension.

La notion d'orientation doit par exemple être ajoutée (ainsi que d'autres comme celle de « variété » compacte) pour pouvoir définir les différenciations dans une direction commune. Les personnes intéressées pourront consulter les ouvrages spécialisés sur ces notions de mathématiques modernes.

Mais pour notre besoin, retenons qu'une fois les continuités et les orientations définies, on peut coller nos tubes comme autant de réunions des variétés.

Nos tubes ont des propriétés. Nous appellerons propriété intrinsèque du tube le coefficient qui connecte l'espace tangent en champ et le débit : dans un cas $J = \sigma E$ et dans l'autre cas $J = p \varepsilon E$. Dans toute la suite de l'exposé on notera p l'opérateur de Laplace.



Rétraction

Nous voilà pratiquement au bout de notre première étape !

La principale idée de la topologie algébrique est de considérer deux espaces comme étant équivalents si ils ont la même forme, dans un sens plus large qu'un simple homéomorphisme (rappel : homéomorphisme=application bijective entre 2 espaces topologiques).

Un exemple simple est de considérer équivalent deux lettres écrites, l'une en gras et l'autre en épaisseur ordinaire.

L'opération d'amaigrissement consiste à continûment rapprocher tous les points qui constituent l'épaisseur pour les ramener tous sur une âme centrale qui va constituer la lettre fine.

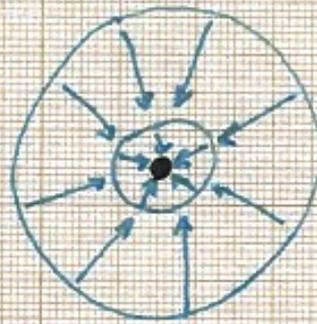
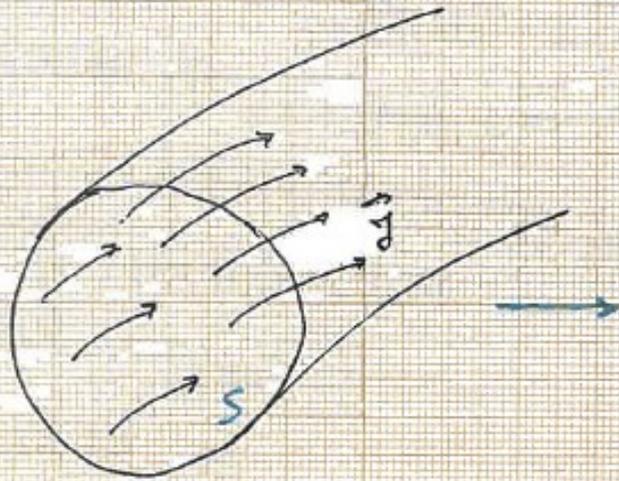
Ainsi, en tout point de notre variété complexe nous allons appliquer une homotopie particulière appelée rétraction.

L'idée de la rétraction est de contracter une distance entre points suivant un paramètre, cela de façon symétrique sur une tranche du tube pour réduire son diamètre à une valeur infinitésimale abstraite. Cela est possible et il y a convergence car on exploite une fonction d'intégration sur la section qui nous donne la valeur de convergence :

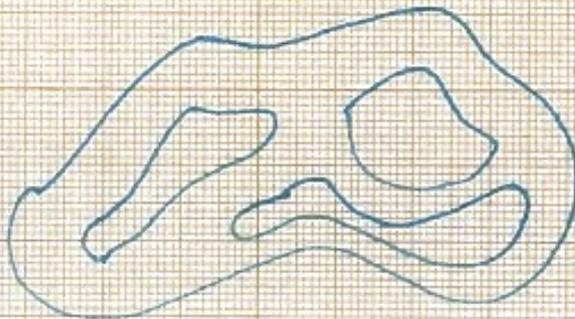
$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I \quad \forall S$$

Ainsi, pour toute famille de carte sur la variété tube on peut réduire le coefficient de rayon et ainsi réduire la surface pour la ramener à un rayon infinitésimale en garantissant la convergence. La fonction de rétraction existe donc et est continue dans un intervalle que l'on peut normer $[0,1]$.

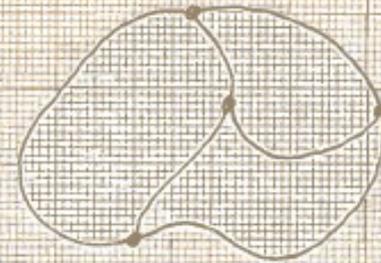
$$\oint_S ds \rightarrow \oint_{\ell} dl \rightarrow I$$



$$\oint_{\ell} R \cdot dl = I, \forall \ell$$



Graphe



Écrivons notre rétraction :

Une déformation de rétraction $f_t : X \rightarrow X$ est un cas particulier d'homotopie. C'est toute famille de carte $f_t : X \rightarrow Y$ t appartenant à $[0,1]$ telle que la carte associée $F : X \times [0,1] \rightarrow Y$ donnée par $F(x,t) = f_t(x)$ est continue.

On dit alors que les deux familles de cartes $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sont homotopiques s'il existe une homotopie f_t pour les connecter.

A ce niveau nous avons donc transformé notre variété complexe en graphe. C'est la première étape de notre voyage.

Deux points importants en conclusion de cette étape.

- *Nous sommes arrivés à décrire la réalité – c'est à dire une répartition de propriétés de conduction et permittivité dans l'espace en variété complexe (on parle aussi de graphe d'espaces) réductible à un graphe.*
- *Sur ces graphes les variables champ sont remplacées par des variables courant et flux magnétique. On pourrait croire perdre de l'information, mais il n'en est rien. Les opérations précédentes, difficiles, et qui peuvent être réellement démontrées de façon beaucoup plus rigoureuse, le lien entre la forme différentielle et l'espace tangent font qu'il y a une équivalence parfaite entre I , Φ et E et B . Il faut en être convaincu et nous allons repartir des graphes pour démontrer de façon plus simple des propriétés de l'espace de départ. Notons de toute façon que l'on ne sait pas mesurer un champ. Cette quantité abstraite n'est donc en réalité atteignable que par les variables du graphe. Autant s'en contenter !*

Graphes

Un graphe est une structure topologique se présentant comme un agencement de branches, nœuds, mailles et nous le verrons plus tard, de moments. Sur ces graphes se rajoutent des cordes que nous aborderons aussi par la suite.

La première caractéristique d'un graphe est sa caractéristique d'Euler – Poincaré. Ainsi pour un graphe comportant B branches, N nœuds et M mailles on respecte la relation :

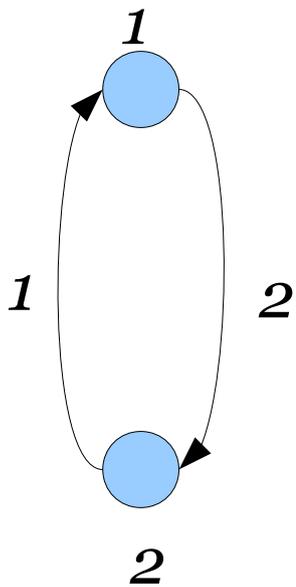
$$M=B-N+1$$

Ceci pour un graphe dit « connexe » c'est à dire pour lequel il n'existe pas de branches non reliées à une maille qui est une suite fermée de branches.

Le graphe est orienté puisque les variétés de départ sur lequel il s'appuie le sont.

Incidence et justification de l'assimilation d'un condensateur avec une variété à bord

Dans un graphe on peut relier par une matrice nœuds et branches les éléments nœuds – branches du graphe. Cette matrice A est appelée incidence. Considérons le graphe simple ci-dessous :



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les nœuds sont placés en colonnes, les branches en lignes. On place un 1 quand la branche alimente le nœud, -1 si elle consomme sur le nœud et 0 si elle n'est pas connectée au nœud.

La matrice incidence est une matrice de grande importance pour le graphe et notre approche topologique. Dans l'exemple précédent, on peut transposer A pour obtenir par exemple pour le premier nœud n_1 : $n_1 = b_1 - b_2$. b_1 et b_2 étant les débits de branches. Si il n'y a pas de source de débit externe au nœud 1, n_1 vaut 0. De fait on trouve $b_1 = b_2$, autrement dit l'incidence conserve les débits. Nous allons voir cela exprimé en topologie algébrique ensuite.

Nous voulons juste ici justifier l'assimilation du flux électrique entre deux nœuds à une variété à bord. Cela peut surprendre et est souvent l'argument pour dire que les graphes ne sont qu'une représentation approchée des équations de Maxwell. Nous allons contredire cette assertion, sous l'hypothèse rappelons-le que nous ne considérons ici que le champ électrique longitudinal, autrement dit le champ électrostatique local. Nous allons d'abord démontrer que le champ électrique est fondamentalement décomposé en ses composantes longitudinale et transverse, puis démontrer la réduction de la composante longitudinale locale en branche d'un graphe.

Le champ électrique longitudinal

Il est important pour nous, pour pouvoir inscrire rigoureusement la réalité électrique dans la modélisation topologique de maîtriser les propriétés spatiales du champ.

Dans la jauge de Coulomb (très insuffisamment utilisée en CEM!) le potentiel vecteur est transverse. Il en découle que le champ électrique se décompose clairement en deux composantes, l'une dérivant du potentiel scalaire : c'est la composante que nous pourrions appeler « de Poisson », et l'autre dérivant du potentiel vecteur : c'est la composante de rayonnement.

$$\mathbf{E}_L = -\mathbf{grad} V \quad \mathbf{E}_T = \frac{-\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Cette décomposition est à la base de la définition du photon.

Nous ne considérons donc que la partie longitudinale du champ E. C'est celle qui est mise en œuvre dans 99% de l'énergie véhiculée dans tout circuit électrique – électronique. C'est aussi l'énergie potentielle qui intervient dans l'hamiltonien de la mécanique quantique.

Or il suffit de regarder le bilan de flux donné par l'incidence pour comprendre que le flux de l'échange électrostatique dans une variété locale est forcément convergent et conservatif. Sans quoi une partie de débit serait perdue et pour respecter l'incidence, il faudrait forcément qu'existe une dérivation, une branche supplémentaire qui expliquerait qu'une partie des lignes de champ E (notre espace tangent) est dirigée vers un autre nœud.

L'assimilation des condensateurs à des tubes de flux est donc une réalité concrète

Le même raisonnement peut être appliqué aux flux magnétostatiques en partant des forces magnétomotrices.

Lois de Kirchhoff et topologie algébrique

Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) naît à Konisberg en Allemagne. Il établit la loi des nœuds et des mailles en 1845. Mais c'est dans le domaine de la spectroscopie qu'il est le plus actif.

Nous allons redémontrer les lois de Kirchhoff en partant de la topologie algébrique discrète. Je me base pour cela sur un développement réalisé par François DUBOIS du département de mathématiques appliquées au CNAM, mais pour des contraintes de « condensation » et de temps je réduis sa démonstration et la dénature partiellement de fait.

Topologie algébrique discrète

On travaille dans un complexe cellulaire noté C^∞ , formé de nœuds, branches, mailles (je préfère utiliser cette terminologie plutôt que sommets, arêtes, faces plus usitée en mathématique et en numérique mais notre propos ici concerne les circuits).

A des objets géométriques on associe formellement des vecteurs :

$|n\rangle$ pour les nœuds, $|b\rangle$ pour les branches, $|m\rangle$ pour les mailles.

On peut introduire les débits comme combinaison linéaire des branches :

$$I \in C_1$$

C_1 étant l'espace vectoriel engendré par la géométrie discrète C^1 .

L'opérateur de bord appliqué aux courants est une combinaison linéaire de nœuds. Il est donc intéressant de faire agir une fonction sur ces nœuds. Soit de considérer le potentiel V comme une forme linéaire définie sur les nœuds (remarquez que dans cette étude théorique nous n'avons pas besoin de préciser cette forme). Soit :

$$V \in C_0^*$$

L'opérateur de bord ∂ correspond bien à l'idée intuitive : le bord d'une branche est un nœud, le bord d'une surface est une maille, etc. Il est important de noter que le bord du bord est nul^{} :*

$$\partial \circ \partial = \mathbf{0}$$

** : Le bord d'une droite est un point. Le bord d'un point est nul. Le bord d'une surface est une ligne fermée, sans extrémités, dont le bord est à son tour nul. Etc.*

Le produit scalaire $\langle V, \partial I \rangle$ a donc un sens puisque les deux termes se situent dans C_0 . En normalisant V qui est arbitraire, en un nœud où arriveraient 3 débits, l'expression précédente s'écrit :

$$\langle V, \partial I \rangle = 0, I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

qui est la loi des nœuds. On note que l'opérateur de bord appliqué au débit donne le même résultat via le produit scalaire que l'incidence, qui apparaît **comme une autre expression de cet opérateur de bord**.

Regardons la somme sur une maille m des branches – des débits.

$$\sum_{\alpha \in m} |b\rangle \Rightarrow \sum_{\alpha \in m} |\partial b\rangle = \sum_{\alpha \in m} \sum_q \alpha_q |V\rangle = 0$$

Or la somme des bords des courants est nulle, on retrouve donc ici la loi des mailles de Kirchhoff appliquée aux différences de potentiels (puisque la somme des potentiels conduit à ces différences). Notons que les géométries s'appellent des chaînes. ⁴⁰

Propriétés de l'espace électromagnétique comme Propriétés des branches

Dans les discussions précédentes nous avons relié l'espace des champ à une grandeur dans un tube réduite ensuite à une grandeur compacte associée à une branche.

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{J} = (\sigma, p \epsilon) \mathbf{E} \rightarrow i = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{H} \rightarrow \bar{\Phi} = \mu \mathbf{H} \rightarrow \Phi = \iint_S \bar{\Phi} \cdot d\mathbf{S}$$

Les propriétés topologiques discrètes des graphes permettent de retrouver les lois de Kirchhoff, mais ne permettent pas de faire des calculs. Nos graphes sont orientés, mais il doivent être de plus pondérés.

Intermède : calcul tensoriel

Pour la suite il nous est nécessaire de savoir réaliser des calculs tensoriels. L'objet de ces quelques rappels est de savoir manipuler les tenseurs et d'acquérir les bases de l'algèbre tensorielle.

La première convention de cette algèbre est celle de l'indice muet. Comme on est appelé à symboliser de nombreuses sommes, Einstein proposa de s'abstenir du signe somme chaque fois qu'un indice se répète dans une expression. L'indice n'a donc aucune signification particulière si ce n'est celle de pointer l'organisation du tenseur. C'est plus difficile que l'on ne le croit, car on est toujours tenté au début d'associer à l'indice une valeur particulière, or il faut plus le voir comme un indicateur de structure.

La convention de l'indice muet :

$$\sum_i a^i \vec{u}_i \rightarrow a^i \vec{u}_i$$

définition d'une forme sur \vec{u} : $\tilde{u} \quad / \quad \vec{u}_i \tilde{u}^j = \delta_i^j$

covecteur appartenant au dual de l'espace tangent -
vecteur : $b_i \tilde{u}^i$

notion de produit contracté $\propto a^i b_i = \text{nombre} \Leftrightarrow \langle b|a \rangle$

équivalence informelle : $\langle a| \propto a_q \quad |a \rangle \propto a^q$

On associe abusivement dans la notation les composantes au vecteur. Ainsi a^k représente le vecteur \mathbf{a} tel que $\mathbf{a} = a^k \mathbf{u}_k$.

Lorsque l'on veut pointer une composante abstraite particulière, on met l'indice entre parenthèses. Ainsi $a^{(k)}$ pointe une composante (par exemple $a^{(1)}$) du vecteur \mathbf{a} mais pas le vecteur lui-même.

$$C_v^a C_\mu^b g_{ab}$$

$$h_{tv} e^v$$

$$y^{zv} u_v$$

$$v_a \Lambda^a_b$$

$$\epsilon_{ijk} A^i A^j$$

$$\gamma_{ab} \delta^b_v y^{v\alpha} \delta_\alpha^f g_f$$

$$a^\alpha b^\mu$$

Calculer :

Les mécanismes simples remarquables

L'inversion échange le genre et l'ordre des indices :

$$(y^{ab})^{-1} = z_{ba}$$

Une matrice ne change pas le genre d'un vecteur ou d'un covecteur :

$$u^a = L^a_b u^b$$

Le produit tensoriel conserve l'ordre des indices :

$$u^a v^b = t^{ab}$$

Ainsi dans l'analyse tensorielle des réseaux :

Certaines matrices correspondent à des opérateurs (nous avons vu l'incidence qui est la matrice de l'opérateur de bord) .

D'autres matrices sont des matrices de changement de bases (que nous verrons plus loin).

Des vecteurs ou covecteurs regroupent l'ensemble des éléments d'un type de la géométrie cellulaire discrète du graphe (vecteur des débits, covecteurs des potentiels).

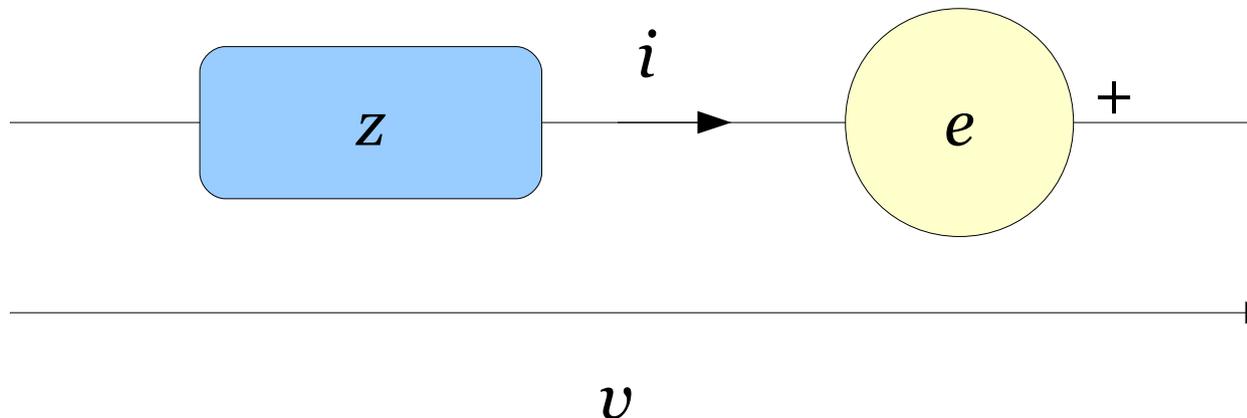
D'autres matrices qui pourront prendre ensuite un caractère plus fondamental donne une relation entre les vecteurs et les covecteurs (rappelons que le covecteur est une forme linéaire sur les vecteurs).

La géométrie discrète « nodale » → basée sur les nœuds

Entre les différences de potentiel aux branches v_b et les potentiels aux nœuds v_n nous avons l'incidence A :

$$v_b = A_b^n v_n$$

Si l'on regarde la « branche de Kirchhoff » :



On a la relation duale de celle en potentiels :

$$i^\alpha = A_b^\alpha i^b$$

*(nous prendrons des lettres grecques pour l'espace des nœuds).
Remplaçons le courant de nœud à gauche par son expression
en fonction des potentiels de nœuds, et le courant de branche
par le produit de l'admittance et de la source :*

$$Y^{\alpha\mu} v_\mu = A_b^\alpha \left(Y^{bs} e_s \right)$$

On en déduit immédiatement les potentiels aux nœuds :

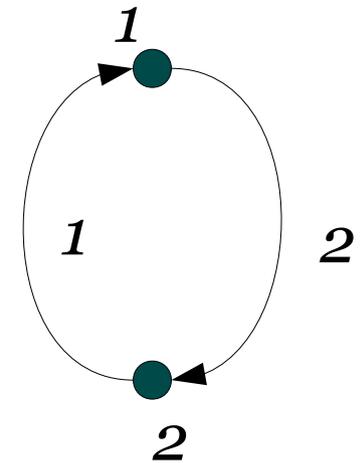
$$v_\mu = \left\{ Y^{\alpha\mu} \right\}^{-1} A_b^\alpha \left(Y^{bs} e_s \right)$$

C'est exactement ce que résout SPICE en l'absence de sources de courants. Notez la règle des indices sur l'inversion...

L'équation matricielle précédente est donc, à peu de chose près (on peut toujours transformer les sources de courants en sources de tension par la conversion Norton – Thévenin) l'équation nodale d'un réseau à partir de laquelle on résout les potentiels aux nœuds. Une fois ces potentiels connus, on a avec l'incidence les différences de potentiels et avec la matrice impédance les courants, etc.

Il est toujours intéressant d'appliquer !

Considérons le circuit (réseau) suivant :



La matrice d'incidence vaut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Posons l'impédance :

$$Z = \begin{bmatrix} R1 & 0 \\ 0 & R2 \end{bmatrix}$$

Supposons que la branche 1 porte une source e_1 .

Posons $1/R_1=a$ et $1/R_2=b$. On trouve facilement l'admittance dans l'espace des nœuds (AYA^t) :

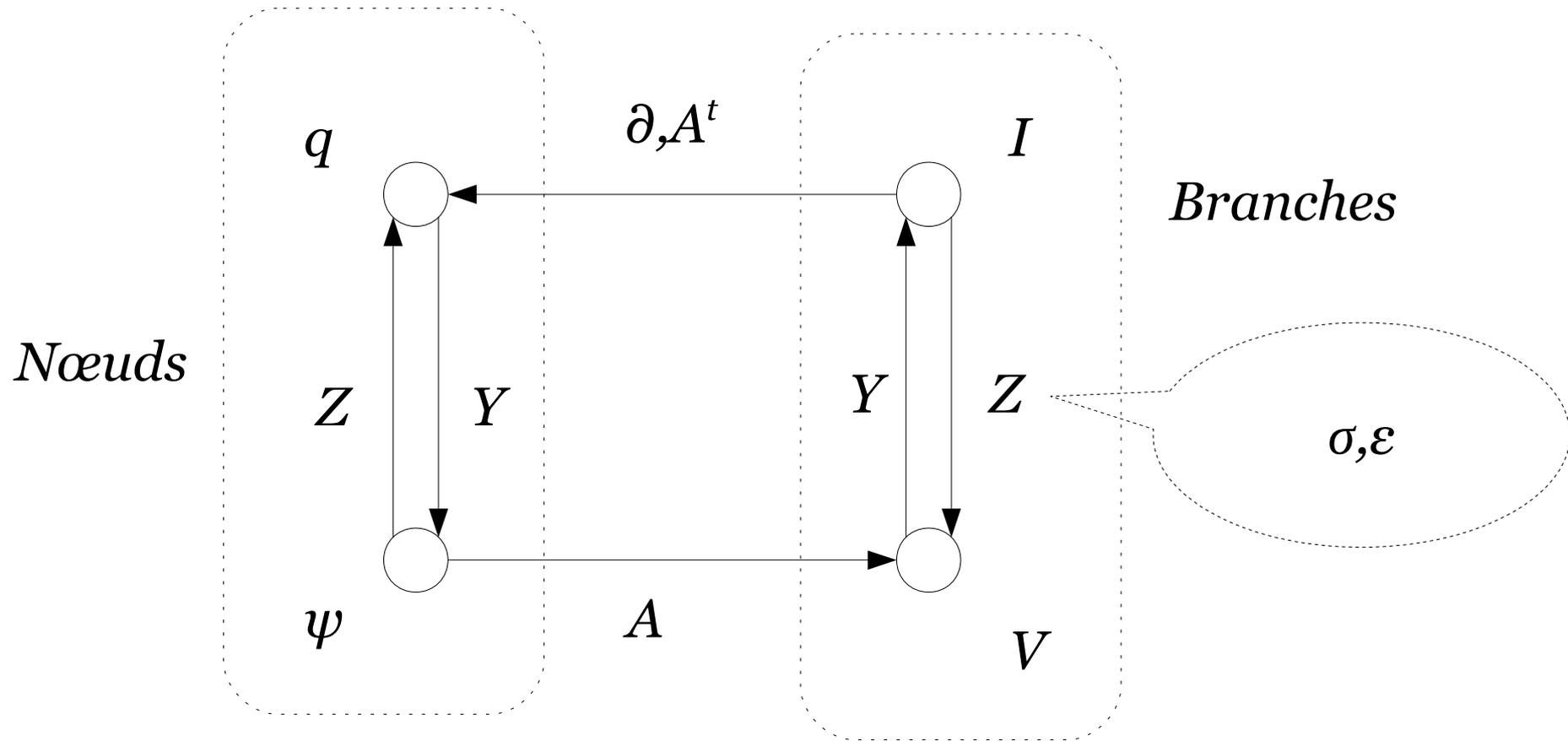
$$Y^{\alpha\mu} = \begin{bmatrix} a+b & -a-b \\ -a-b & a+b \end{bmatrix}$$

Le terme source Aye se trouve aussi facilement : $[ae_1, -ae_1]$. Mais la forme de Y pose problème ! Elle n'est pas inversible. En fait le système est surdimensionné. Posons un potentiel égal à zéro, par exemple celui du nœud 2. L'incidence se trouve alors réduite à une matrice de deux termes : $[1,-1]$. En reprenant tous les calculs on trouve alors :

$$v_1 = \frac{1}{a+b} (ae_1)$$

On comprend maintenant mieux pourquoi SPICE a besoin d'un zéro – un nœud de référence !

Le diagramme de Tontin suivant résume les propriétés et objets que nous avons abordés dans le cadre de notre premier réseau branches – nœuds :



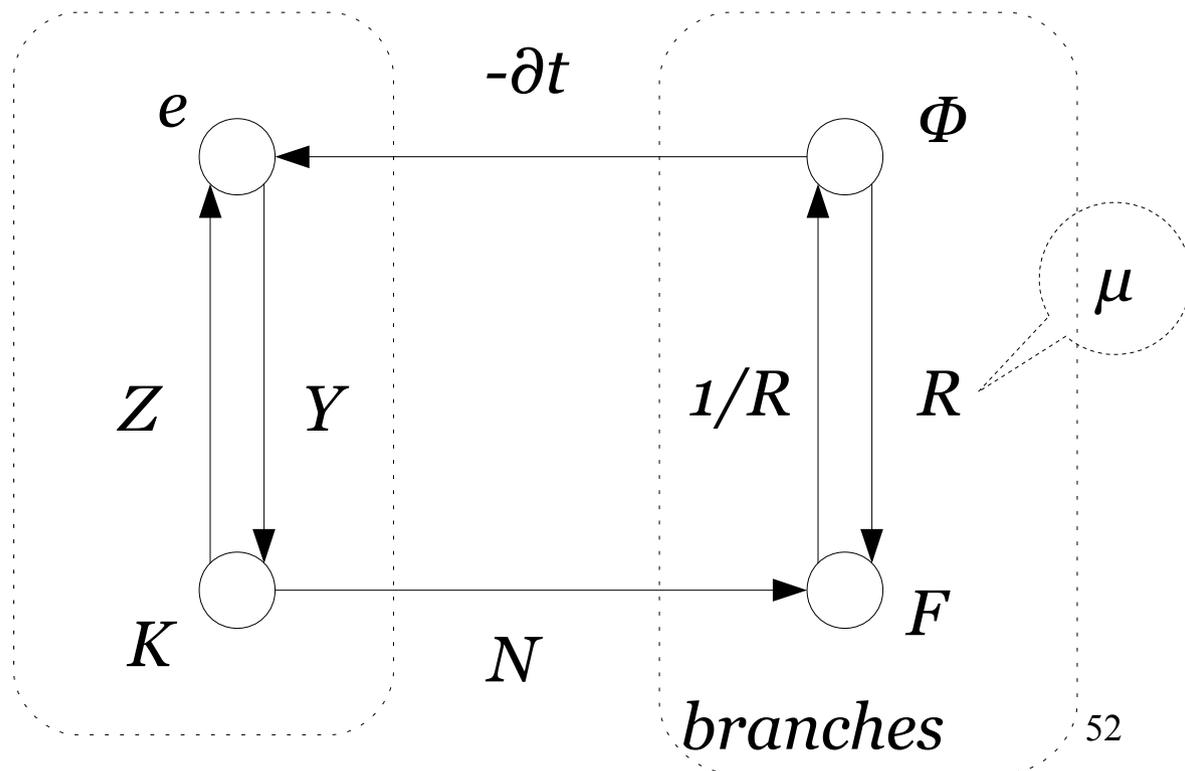
Tout ce que nous venons de voir s'applique au réseau de réluctances qui est en tout point similaire à celui « électrique » des résistances et condensateurs, tout au moins pour le graphe...

Diagramme de Tontin du réseau de réluctances

Le diagramme de Tontin de ce second réseau n'est pas trivial. Car on ne se situe plus, comme on l'a remarqué sur des 1-chaînes ouvertes mais sur des 1-chaînes fermées : des cycles. Pour trouver les relations entre les grandeurs fém, flux, forces magnétomotrices et courants de mailles, il faut exprimer le flux en fonction du potentiel vecteur magnétique A . Sous cette opération on trouve :

Espace des cycles
- mailles

Il n'existe pas ici d'opérateurs de bord entre cycles et branches. Nous allons voir comment connecter les deux représentations.

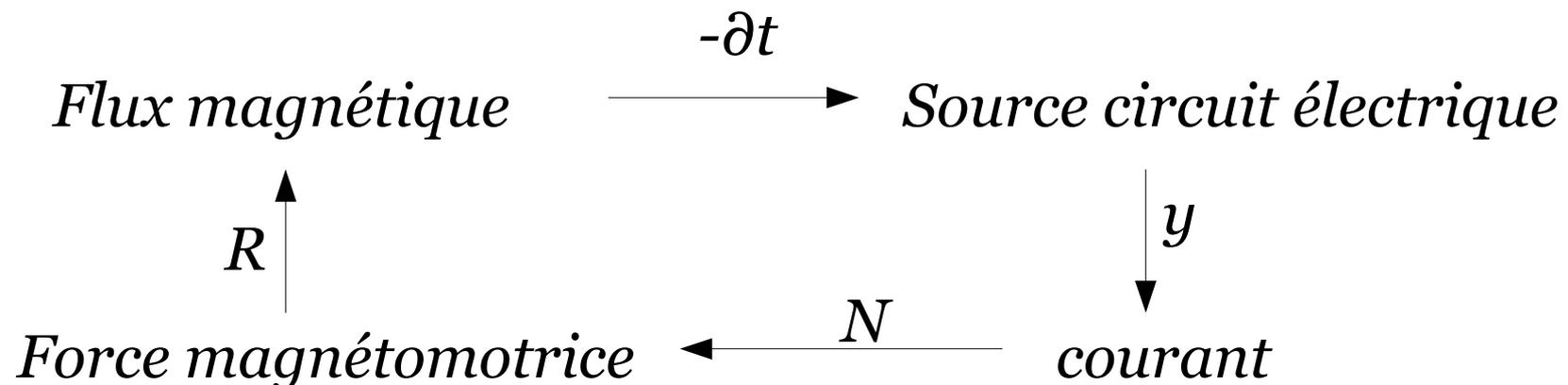


Sources d'énergie des réseaux

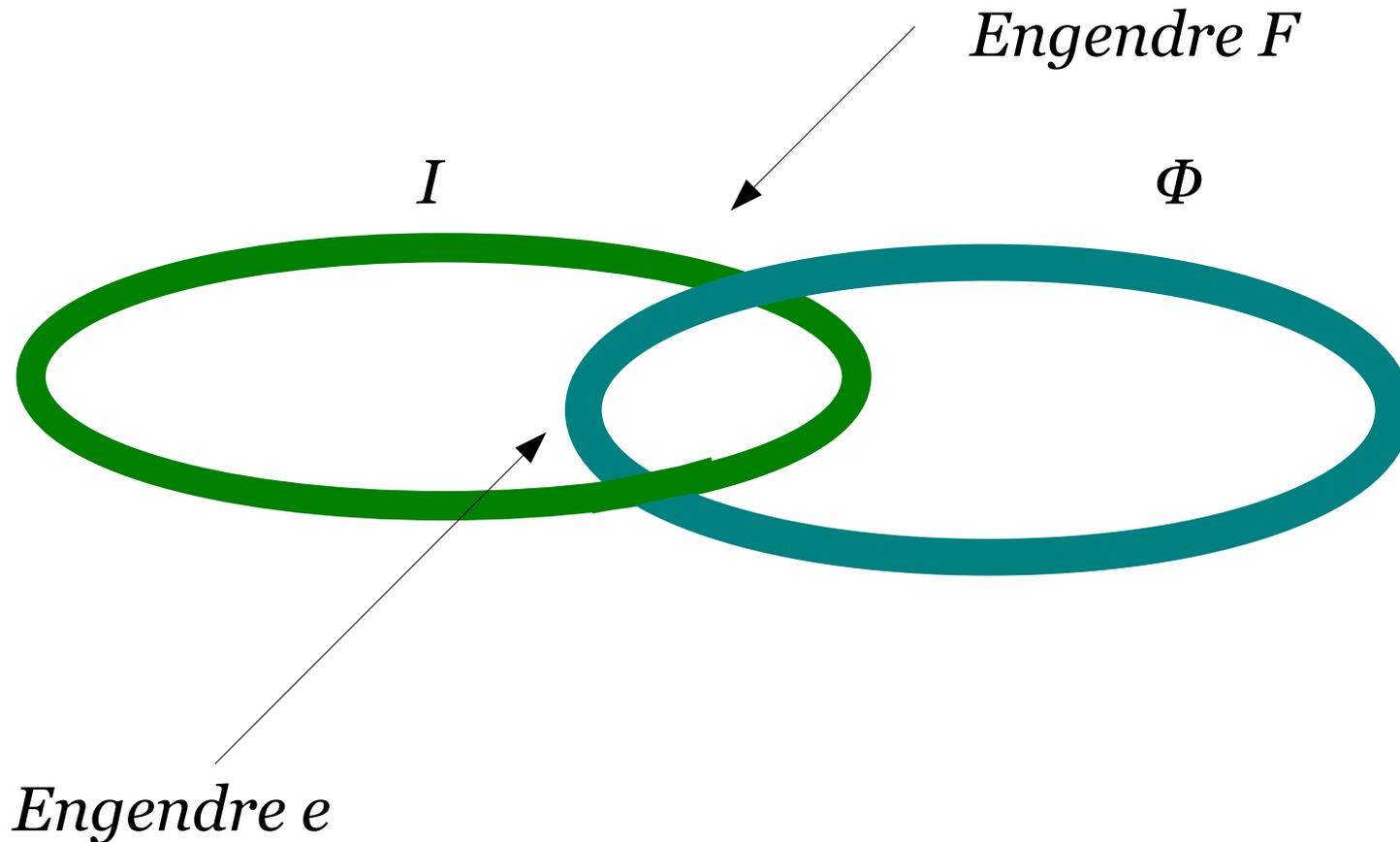
Les deux réseaux « électrique » et « magnétique » n'ont pour l'instant pour seules sources que des sources externes admises pour lesquelles on ne s'est pas posé la question de l'origine.

Or tout bon électronicien (ou tout physicien qui se rappelle de Maxwell) sait que les fém sont des dérivées du flux et que les forces magnétomotrices sont des intégrales du courant sur une maille.

On a donc bien envie de coupler nos deux réseaux électrique et magnétique. L'idée est schématiquement la suivante :



L'idée est d'imbriquer nos deux réseaux – c'est une belle image très en cohérence avec les équations de Maxwell.



Opérateur de Hodge

La *fém* ayant la même dimension que la différence de potentiels, elle doit appartenir à l'espace dual de l'espace primal des courants (débits). Deux difficultés s'offrent à nous : l'espace magnétique travaille sur des sections alors que l'espace électrique travaille sur des branches. Les *fém* s'établissent sur des surfaces fermés. Un **changement de base** opéré sur les débits de branches peut permettre déjà de trouver des débits de mailles dont les *fém* seraient le dual si on sait relier section et mailles. Ce ne peut être qu'un changement de base car comme on l'a vu il n'y a pas de relation de bord entre le cycle et la branche.

Mais pour autant peut-on relier ensuite la *fém* à ces courants de mailles ? La *fém* est connectée à la section, dérivant du flux. Il faut donc être capable de relier une 1-forme (les courants de mailles) à une 2-forme (la dérivée du flux).

Cela peut être fait par la perméabilité qui est une machine particulière qui permet de passer d'une 1-forme (le champ h ou le potentiel vecteur A , duaux du courant de débit) à une 2-forme, le champ B ou son flux, dont on peut déduire la fém.

Un opérateur de Hodge transforme une p -forme en une $(n-p)$ -forme. Cet opérateur fait intervenir les dimensions, les propriétés du vide et le terme μ qui est une métrique.

En se dotant d'une métrique de l'espace électromagnétique, on peut ainsi coupler nos deux réseaux. On a du coup transformé le second en réseau fém – courant dans l'espace des mailles, ce qui permet de nous passer éventuellement même de la représentation en réluctance qui devient intégrée implicitement à celle en (e,k) (je parle personnellement de réseau caché ou sous-jacent) – nous noterons k les débits de mailles.

Détaillons les opérations précédentes.

Changement de bases

Le changement de base imaginé par Kron en 1939 est l'opération inverse de celle que l'on réalise dans les lois de Kirchhoff.

Nous avons besoin de changer de base pour exprimer les forces magnétomotrices à partir des branches, et nous devons nous doter d'une métrique pour relier les courants de mailles à leur dual les fém de mailles (c'est une autre façon de voir le problème, les fém sont la dérivée du flux qui s'exprime sur la section, alors que les courants en sont le bord). On relie suivant un choix dont nous verrons qu'il n'est pas arbitraire fondamentalement, les courants de branches et de mailles par un changement de base relié à une matrice C.

$$I^a = C^a_{\ v} k^v$$

Notons μ notre métrique (cela nous rappellera d'où elle vient).
 Nous nous dotons d'une métrique. Qu'est-ce que cela veut dire ?
 Et bien tout courant engendrant un champ magnétique h , cela revient à dire que l'on pose, en s'inspirant de la réalité palpable, un ensemble de relations entre h et B en tout point du graphe.

Écrivons par exemple :
$$\mathbf{e} \approx -\eta^\sigma \mu_{\alpha\beta} \dot{h}^\beta (r^\sigma)$$

α et β représentant n'importe quelles coordonnées x , y ou z . σ est la position du flux considéré. En remplaçant h par son équivalent en courant on obtient :

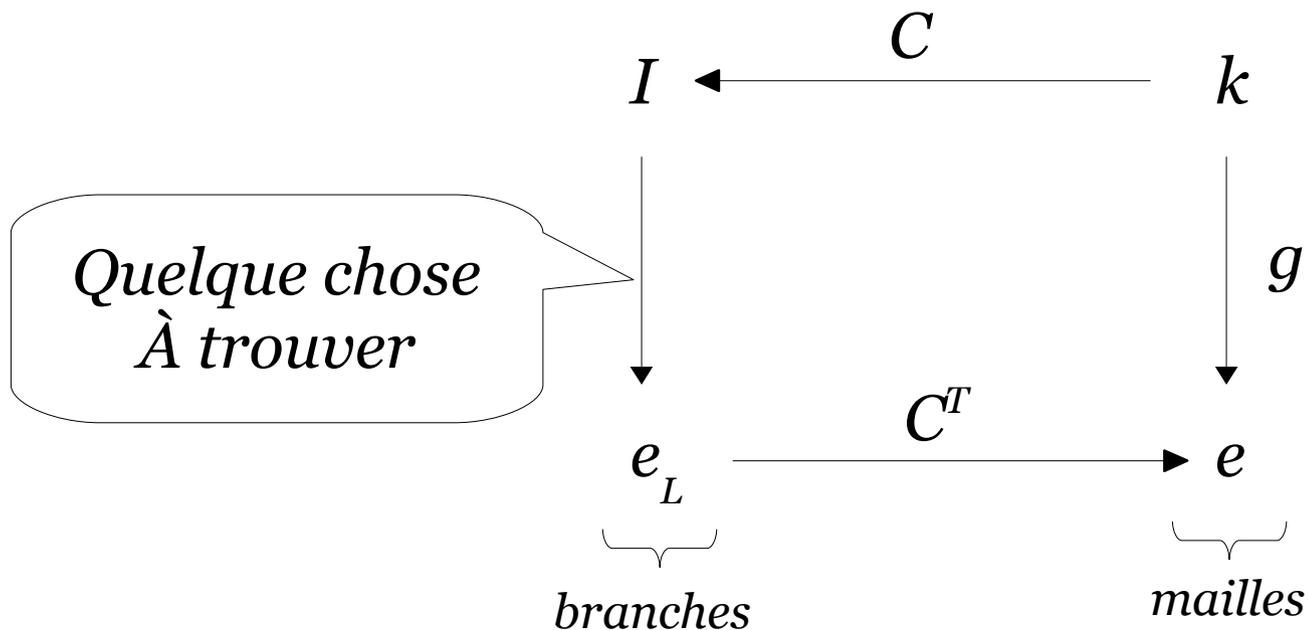
$$e_\alpha = -\mu_{\alpha\beta} \eta^\sigma \frac{\dot{k}^\beta}{2r^\sigma}$$

Le terme $\eta/2r$ peut être vu comme un facteur de forme f après contraction. On crée alors le tenseur métrique des impédances $g = \mu f$ pour écrire :

$$e_\sigma = g_{\sigma\beta} k^\beta$$

Mais pour l'instant nous n'avons considéré que l'espace des mailles et les relations entre courants – débits de mailles et fém. Quid des propriétés vues précédemment en nodal dans l'espace des branches ? Comme e devient dual de k , on peut appliquer la transformation via la transposée de C sur e et en déduire une fém de branche telle que :

$$e_a = C_a^\sigma e_\sigma$$



Propriétés dans l'espace des branches

On voit d'après notre diagramme de Tontin qu'une métrique doit exister entre les courants de branches et la fém de branche déduite précédemment, qui correspond d'ailleurs à la fém de flux coupé B_l .

Partons de notre relation « phare » (comme en nodal, partir de la relation entre espaces de bases est souvent révélateur de choses) :

$$e_{\sigma} = g_{\sigma\alpha} k^{\alpha} \Rightarrow C_a^{\sigma} e_{\sigma} = C_a^{\sigma} g_{\sigma\alpha} k^{\alpha}$$

Nous avons aussi la relation de Kirchhoff entre débits de branches et mailles, transposée de celle de base :

$$e_a = C_a^{\sigma} e_{\sigma} = C_a^{\sigma} g_{\sigma\alpha} C_b^{\alpha} I^b$$

$$\text{soit : } e_a = g_{ab} I^b$$

Cette relation nous montre qu'il existe un pendant à la métrique que nous avons créée dans l'espace des mailles. Mais rappelons nous que cette métrique est engendrée par le flux magnétique. Or en appliquant la transformation inverse, on décompose la « variété maille » en ses cartes « branches » suivant un atlas « C ». Nous faisons l'opération inverse du « gluing » en revenant à des variétés tubes, partant du tore. Or au niveau du tube, le flux n'est pas défini, enfin pas pour moi (C.R.Paul par exemple a beaucoup travaillé sur la notion de flux et d'inductance partielle). Si nous pouvons définir une fém de flux coupé B_{lv} , nous ne pouvons pas définir de réluctance.

Qu'est-ce qui s'est passé dans notre transformation ?

Pratiquement, elle transforme une somme en matrice. Partant du tore, de la somme des propriétés, on re-décompose en propriétés séparées. Soit :

$$a + b \rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Cette opération est très difficile à faire. Mais étudions l'origine...⁶¹

Au départ nous avons nos deux réseaux séparés et couplés en mailles, c'est une forme hamiltonienne (variables d'états couplées):

$$\begin{bmatrix} e \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & \partial_t \\ -N & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \Phi \end{bmatrix}$$

Nous avons noté z les propriétés d'impédances dans les branches transformées – c'est à dire intégrées dans les mailles. Or les forces magnétomotrices n'existent pas en tant que tel, elles sont engendrées par les courants k . Posons $F=0$ et remplaçons dans la première équation, on trouve le lagrangien :

$$e = \left(z + \frac{N}{R} \partial_t \right) k$$

Ainsi, partant des branches nous voyons que notre métrique g devrait se transformer en une somme d'un terme z associé aux propriétés des branches et s'y ajoute un terme de métrique des flux.

Notre décomposition réalisée par la transformation inverse doit redonner pour les propriétés de branches les impédances de branches, c'est évident puisque nous faisons à l'envers ce que nous avons défini au départ. Néanmoins nous précisons nettement les choses, à savoir que si il existe un invariant, le fait d'obtenir z à partir d'une transformation de g implique que z est aussi un tenseur (une métrique?) qui s'appuie sur les tenseurs ε et σ .

Par contre si nous considérons la décomposition du flux engendré par B , elle est nulle ! La définition de $\text{div}B=0$ le traduit vectoriellement. Cette relation s'adresse au champ rotationnel qui crée le flux issu de la force magnétomotrice.

Quant aux fém de branches nous avons vu qu'elles pouvaient exister, le flux coupé engendrant une différence de potentiels au même titre que l'intégrale du champ électrique.

Le mécanisme pour les réseaux connexes

Refaisons notre chemin de pensée à l'envers – soit branches vers mailles :

$$e_a = v_a + z_{ab} I^b + m_{ab} \partial_t I^b \rightarrow e_a = (z_{ab} + m_{ab} \partial_t) C^b_{\sigma} k^{\sigma}$$

$$C_{\alpha}^a e_a + e'_{\alpha} = C_{\alpha}^a v_a + C_{\alpha}^a (z_{ab} + m_{ab} \partial_t) C^b_{\sigma} k^{\sigma}$$

$$e_{\alpha} + e'_{\alpha} = (z_{\alpha\sigma} + m_{\alpha\sigma} \partial_t) k^{\sigma} + L_{\alpha\sigma} \partial_t k^{\sigma}$$

Nous avons exploité le fait dans ces calculs, que $CV=0$, deuxième loi de Kirchhoff (attention, C est ici la connectivité!). z contient toute l'information des condensateurs et résistances. m traduit la présence d'aimants ou solénoïdes et L est la métrique des flux ajoutée dans l'espace des mailles.

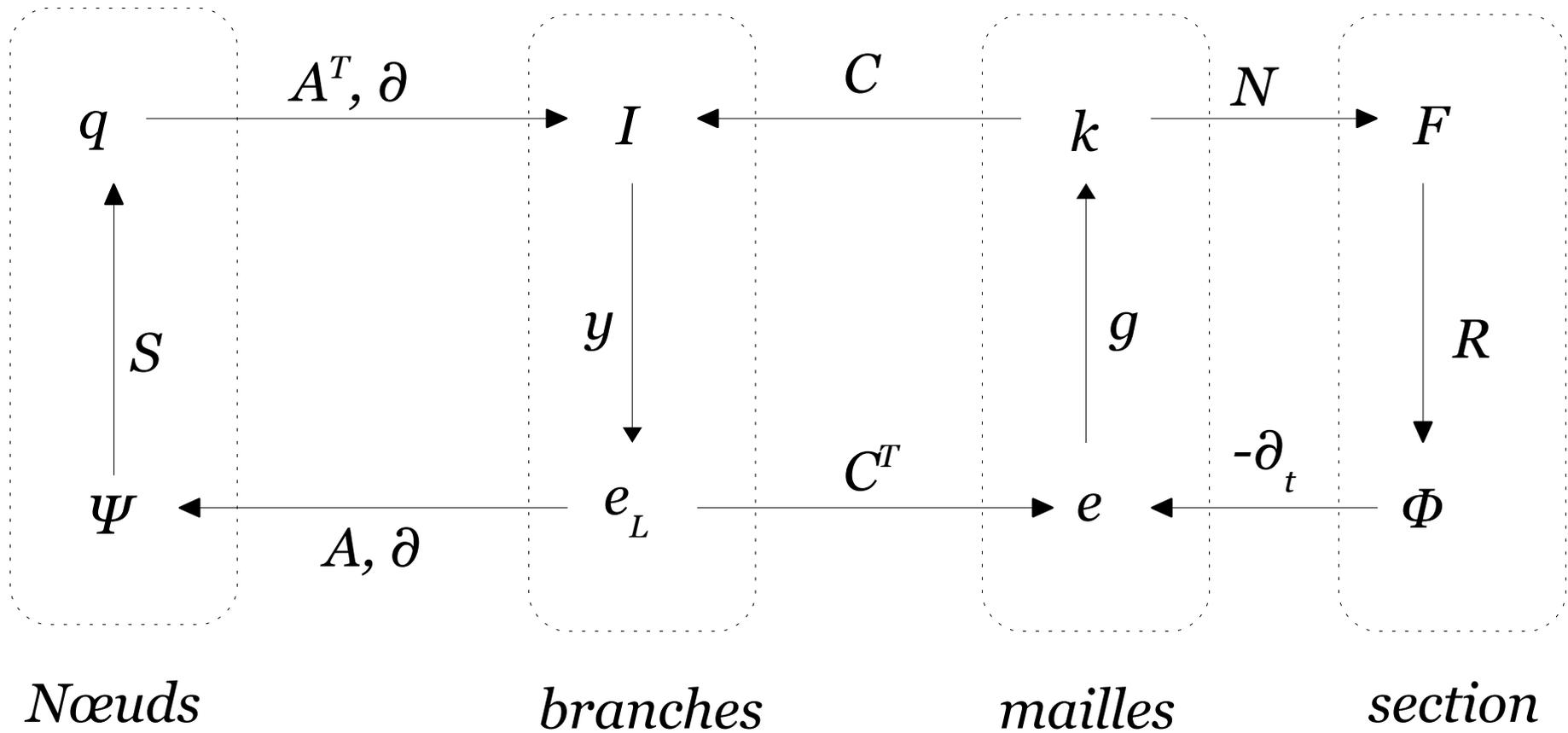
Un graphe un peu particulier

Nous allons à partir de maintenant travailler sous une formulation lagrangienne, le réseau de réluctance « disparaissant » sous forme de métrique de couplage dans l'espace des mailles.

Il nous reste un « détail » à résoudre sur ce point. Ces éléments n'existant que dans l'espace des mailles, comment les représenter ?

*Je propose de rajouter sur le graphe **le symbole d'une inductance au centre de la maille concernée** pour rappeler ces termes qui se rajoutent dans la métrique transformée dans cet espace. Pour les mutuelles inductances – couplages entre deux mailles différentes, je propose le dessin de ce que j'appelle une « corde » : trait discontinu reliant les deux mailles.*

Diagramme de Tontin presque complet (sans le champ lointain)



$$M = B - N + R$$

Sources de débits - courants

Là aussi, tout électronicien a l'habitude d'user de sources de courants tout autant que de sources de potentiels. Ces courants peuvent être issus de sources externes dont on a pas à se préoccuper de la nature exacte. Par exemple, l'arrachage d'électrons dans une structure cristalline par bombardement de photons énergétiques se modélise bien par une source de courant. Comment introduire ces nouvelles sources dans notre formalisme ?

Il suffit de rajouter autant de courants de mailles que de sources de courants externes. Notons J ces sources, on écrit :

$$e_{\sigma} = g_{\sigma\alpha} \{ k^{\alpha} + J^{\alpha} \}$$

Et l'on résout les inconnues k par : $k^{\alpha} = \rho^{\alpha\sigma} \{ e_{\sigma} - g_{\sigma\alpha} J^{\alpha} \}$

ρ étant l'inverse de g .

Pratiquons !

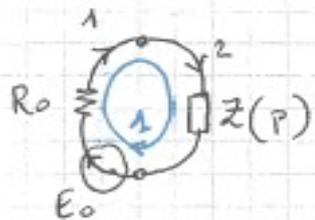
Rien ne remplace la pratique pour qui veut maîtriser l'analyse tensorielle des réseaux. Nous n'aborderons pas ici les problèmes numériques liés à l'usage du calcul numérique pour résoudre l'équation du réseau. Nous abordons ici la démarche, les structures utilisées. Contrairement aux méthodes nodales, au logiciel SPICE, il faut raisonner ici en termes de réseaux élémentaires, couplages, branchements, transformations.

Par certain côté la méthode pourra sembler beaucoup plus compliquée que celles classiques appliquant les lois de Kirchhoff. Mais en contrepartie vous pourrez aborder des problèmes également d'une autre complexité, comme nous le verrons également par la suite des aspects théoriques.

Car cet intermède pratique n'est pas la fin de notre exploration théorique, loin de là !

Exercice 1

alimentation d'un courant sur une charge



$$C: \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$Z: \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & Z(p) \end{bmatrix}$$

$$C^T \cdot Z \cdot C = g = R_0 + Z(p)$$

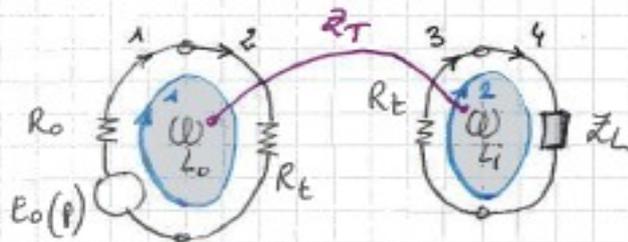
$$E' = C^T \begin{bmatrix} E_0 \\ 0 \end{bmatrix} = E_0$$

$$e_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu \rightarrow E_0 = (R_0 + Z(p)) k^1$$

$$k^1 = \frac{E_0(p)}{[R_0 + Z(p)]}$$

Exercice 2

Couplage par impédance de transfert en fondre



$$C: \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$Z: \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_L(p) \end{bmatrix} \quad Z: \begin{bmatrix} L_0 p & -Z_T(p) \\ -Z_T(p) & L_L p \end{bmatrix}$$

$$g = C^T \cdot Z \cdot C + i\omega Z \quad e = C^T \cdot [E_0, 0, 0, 0]^T$$

$$e_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu \rightarrow k^\nu = y^{\nu\mu} e_\mu$$

$$Z_L(p) \approx R_t + L_t p + Z_t \sqrt{p}$$

Énergie, métrique et invariant

Du fait que l'on peut choisir la métrique, on pourrait craindre que le résultat dépende de ce choix. Il n'en est rien bien sûr, et c'est même un moyen de démontrer qu'au sens de l'algèbre tensorielle, cette métrique est un tenseur.

Calculons la puissance stockée ou dissipée dans tout le réseau.

Soit P cette quantité, scalaire, on a :

$P = e_{\mu} k^{\mu}$. Partons de là en considérant cette grandeur sous l'œil de notre métrique et voyons ce qu'elle devient sous un changement de base.

La démonstration de l'invariance d'une grandeur par transformation permet de vérifier si l'objet impliqué dans le produit qui conduit à l'observable est un tenseur ou non. On considère comme caractère tensoriel la conservation du caractère intrinsèque de l'observable.

$$P = e_{\alpha} k^{\alpha} = g_{\alpha\sigma} k^{\sigma} k^{\alpha}$$

Soit le changement de base : $k^a = C^a_{\alpha} k^{\alpha}$

$$\rightarrow P = g_{\alpha\sigma} C^{\alpha}_a k^a C^{\sigma}_b k^b$$

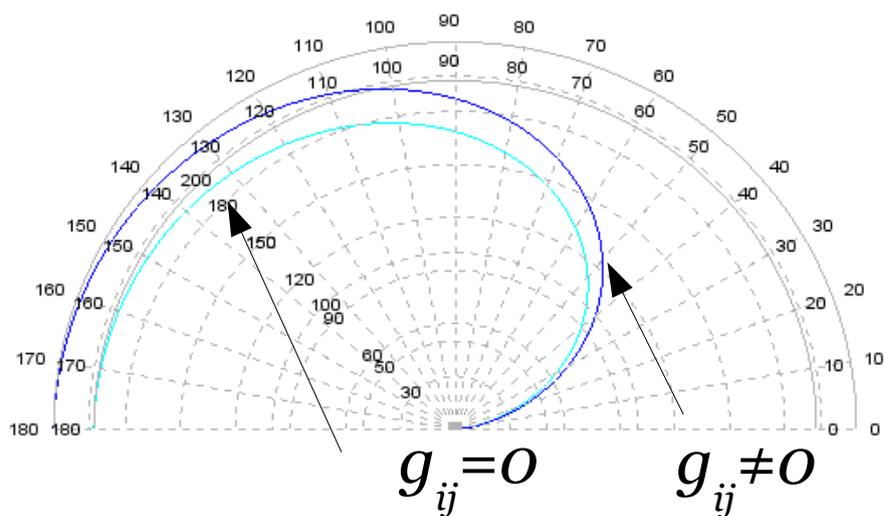
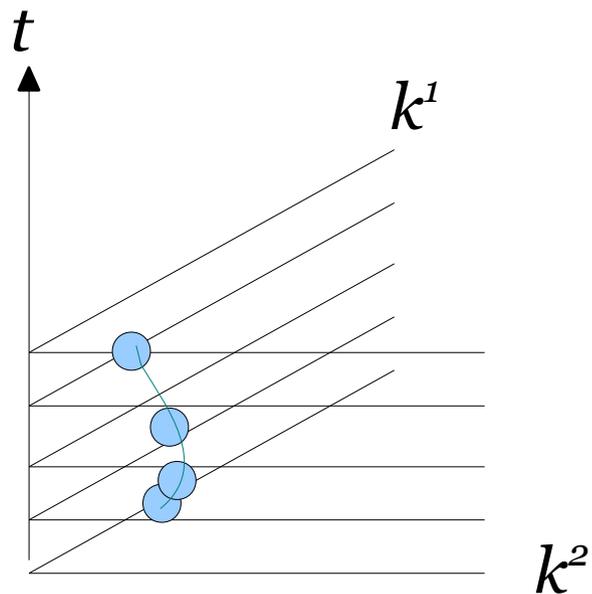
$$P = g_{\alpha\sigma} C^{\alpha}_a C^{\sigma}_b k^a k^b = g_{ab} k^a k^b$$

La puissance, qui est l'invariant de l'analyse tensorielle des réseaux est effectivement invariante par transformations.

On a dans cette analyse une similitude point à point avec la relativité générale, nous le verrons par la suite. Comme en mécanique, on peut étudier l'évolution du système dans un repère où les axes sont les valeurs prises par les courants de mailles au cours du temps.

Diagramme d'évolution

Considérons une ligne
(nous les aborderons plus loin)



$$k_1 + jk_2 \rightarrow r = g_{\sigma\nu} k^\sigma k^\nu \quad \phi = \alpha \frac{t}{\pi}$$

Les axes de l'espace sont les courants de mailles. La trajectoire de l'état du système est donnée pour un « bicycle » par une projection dans le corps des complexes et le tracé de r , ϕ

La métrique comme pondération d'un graphe valué

On se dote d'une métrique dans un espace à 4 dimensions. Soit a, b, c, d , les composantes de cette métrique dans l'espace des mailles (cet espace sera considéré comme l'espace de travail dorénavant dans le formalisme lagrangien). La métrique étant purement diagonale, les débits ne seront pas nuls que si une source les excite. Si c'est le cas, le débit le plus fort sera celui où la métrique est la plus faible.

Tout cela se résume par le calcul des distances :

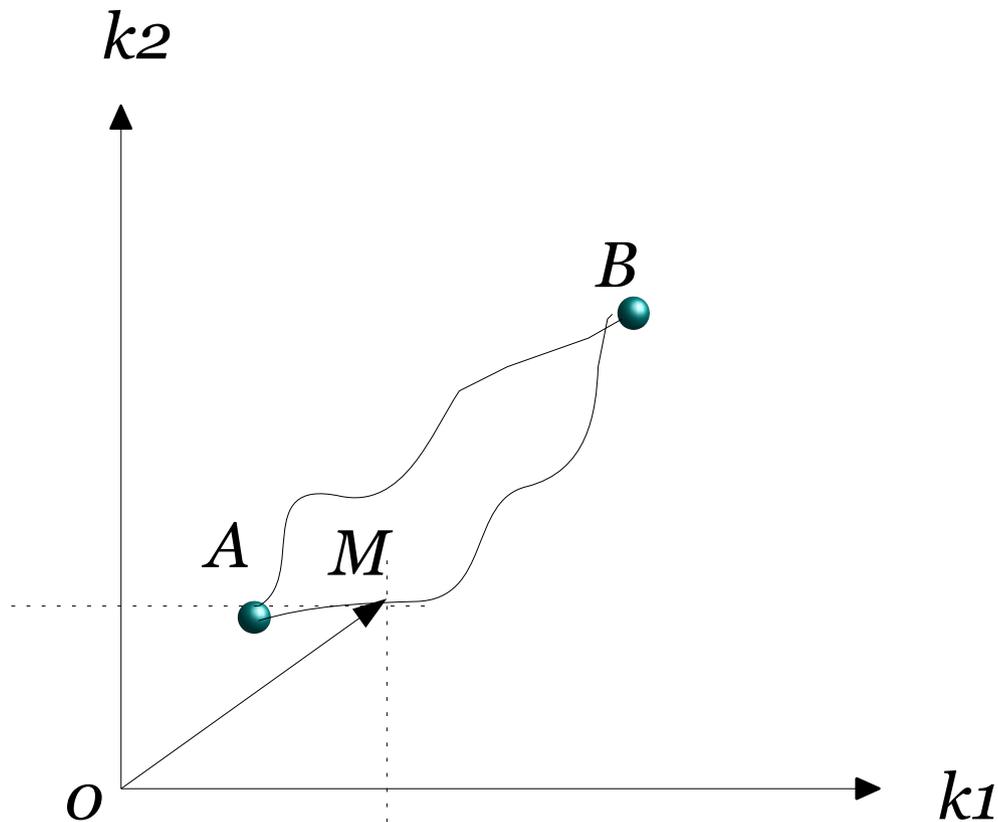
$$d = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \rightarrow \text{posons } g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu$$

$$d = g_{\nu\nu} (k^\nu)^2 \rightarrow k^\nu = \rho^{\nu\nu} e_\nu$$

$$k^{(\nu)} > k^{(\mu)} \text{ pour } e_\nu = e_\mu = 1 \rightarrow \rho^{(\nu\nu)} > \rho^{(\mu\mu)} \text{ d'où } g_{(\nu\nu)} < g_{(\mu\mu)}$$

Énergie et action

$$Action = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{g_{\mu\nu} k^\mu(t) k^\nu(t)} \quad \text{extremum}$$



$$Action = \int_A^B \vec{MM}'(t)$$

Les chemins de l'énergie

Dans une topologie donnée, la détermination des mailles, c'est à dire se doter d'une métrique qui exprime au mieux les phénomènes physiques que l'on veut étudier n'est pas un exercice trivial.

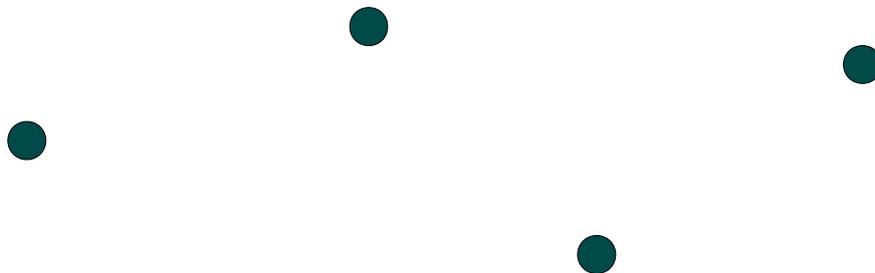
Certaines démarches permettent de lever une partie de la difficulté.

La première démarche consiste à déterminer l'arbre couvrant du graphe. Cet arbre est la suite de branches qui passe par tous les nœuds.

A partir de cet arbre on détermine les mailles à partir des branches du « co-arbre » qui referment les parcours vers les nœuds et forment les mailles.

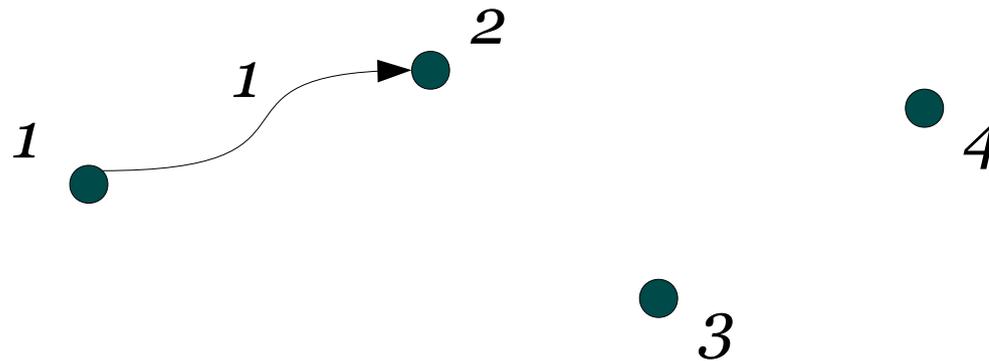
Le principe est le suivant :

Dans le complexe cellulaire C englobant les objets C_0 (nœuds), C_1 (branches) et C_2 (surfaces dont les bords sont les mailles), on peut parcourir les branches pour atteindre tous les nœuds par l'intermédiaire de l'incidence, c'est à dire du bord. En construisant l'incidence dans le sens de parcours de l'arbre couvrant – qui n'est jamais qu'une concrétisation du jeu de piste – on retrouve les chemins. Considérons la topologie C_0 suivante :



C_0

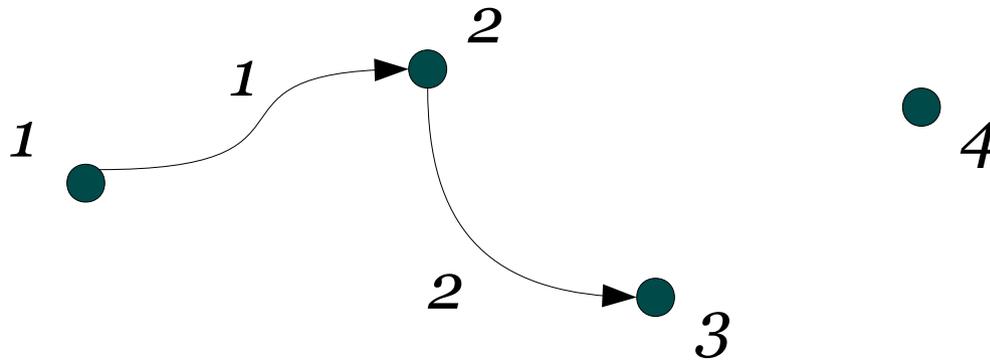
Partant d'un bord, on se dirige dans une direction principale arbitraire – mais passant grosso modo par la droite de régression du premier ordre du plan des points – pour venir toucher le nœud le plus proche.



Évidemment on ne peut prendre que des routes autorisées par les relations entre les branches et les nœuds. On déduit le début de l'incidence :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On continue le chemin en joignant de nouveau le premier autorisé, ici le nœud 3 suivant :

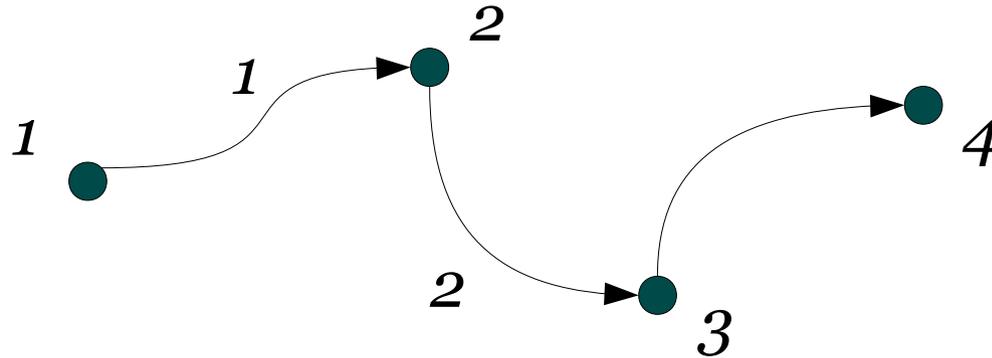


L'incidence est aussi complétée :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On pourrait se poser la question ici de savoir s'il faut retirer une branche depuis le nœud 2 ou continuer vers le nœud 3 ? Au départ, la question ne se posait pas trop, ayant pris comme critère d'attraction la distance, 2 était plus proche de 1 que 3. Ensuite 3 était plus proche de 2 que 4. Et bien suivons notre parcours ! Le plus simple pour une particule n'est certainement pas de revenir en arrière mais d'aller vers 4.

On obtient par cette méthode l'incidence ci-dessous. Nous verrons qu'elle implique une connectivité particulière.



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour construire l'arbre nous avons parlé d'un critère d'attraction. Qu'est-ce que cette grandeur ?

Pour appliquer notre méthode des chemins optimisés à un graphe de flux physiques, il faut revenir à la métrique que l'on a choisi.

La distance devient une impédance et la particule (le promeneur) un courant – un débit. Pour « visualiser » ce courant, il faut alors disposer, faire l'hypothèse d'une source.

Le critère d'attraction devient alors naturel : le courant veut avant tout revenir à la source par le plus court chemin.

Après on pourrait objecter que l'impédance a une 'distance' qui dépend du temps ! Mais sous le formalisme de Laplace la question ne se pose pas trop. C'est aux instants les plus courts (en réponse à l'impulsion de Dirac) que les chemins sont déterminés. A l'infini, en état statique, la détermination des chemins de toute façon n'est plus critique. Par contre la difficulté est qu'il faut « pressentir » le chemin complet le moins impédant, avant de l'avoir complètement déterminé ! Nous allons voir comment procéder.

Dernier point d'objection quand même (si vous n'en avez pas d'autres?) : pour un circuit complexe, ce type d'exercice devient périlleux et est de toute façon difficilement automatisable. Nos graphes sont orientés et pondérés. Que nous dit la théorie des graphes ?

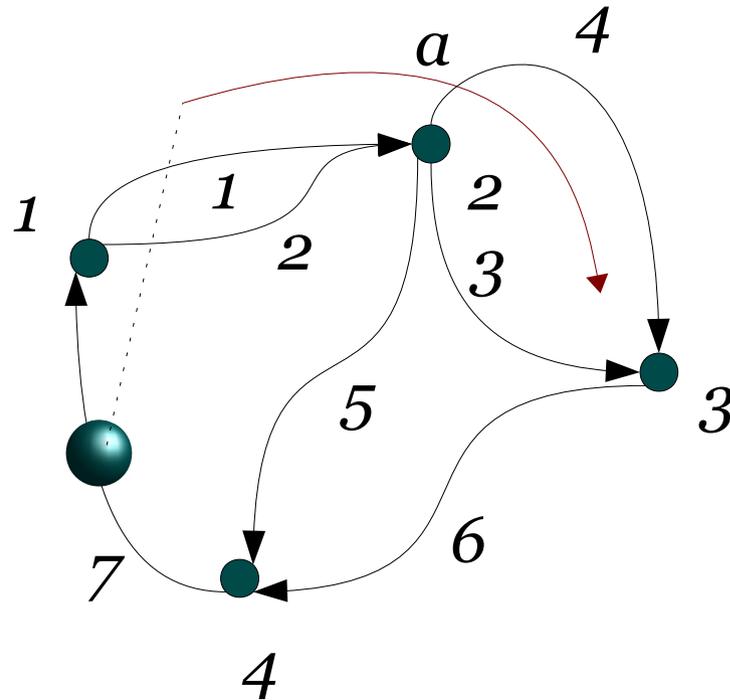
Dans un graphe, une chaîne hamiltonienne est une chaîne qui passe une fois et une seule par tous les nœuds.

Si le graphe est hamiltonien, on peut déterminer cette chaîne par la scrutation d'un rayon partant du barycentre de la source et explorant sur tout le graphe les successions de nœuds sur le principe de la moindre impédance lorsque des branches sont en parallèles.

Un graphe est hamiltonien si pour toute paire de nœuds non adjacents, la somme de leurs degrés est supérieure ou égale à l'ordre du graphe. L'ordre du graphe est le nombre de nœuds, le degré d'un nœud est le nombre de branches auxquelles il est raccordé. Deux nœuds sont adjacents s'ils sont reliés par une branche.

Concrétisons un peu tout cela ...

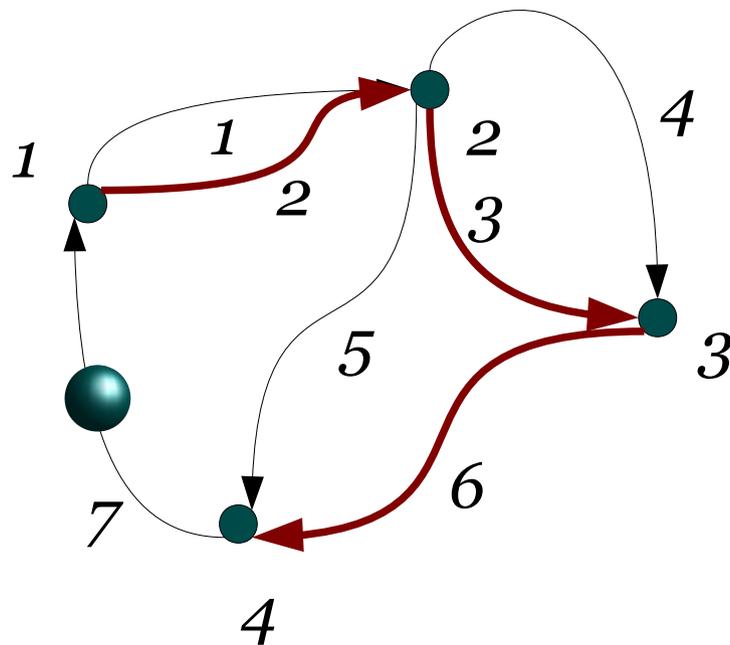
Considérons le graphe suivant :



Le graphe est muni d'une source orientée. Il est d'ordre 4 et est hamiltonien : les deux seuls nœuds non adjacents (1 et 3) sont de degrés 3 et $3 + 3 = 6 > 4$.

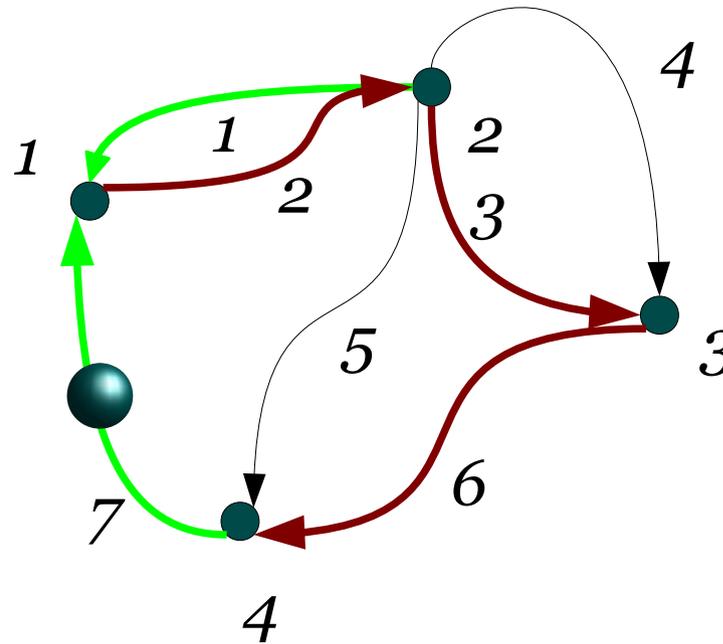
Lorsque l'on parcourt a , on prend la branche 2, puis 4 puis 6 et 7. Au nœud 2 on ne peut pas prendre la branche 5 car alors on 'louperait' le nœud 3 sauf à revenir en arrière, ce qui est interdit (la particule ne rebrousse jamais chemin).

On trouve l'arbre couvrant 2, 3, 6. En scrutant le rayon **a** nous avons retenu à chaque fois la branche la moins impédante. Comme nous ne pouvons pas appréhender les cordes ni les résonances, ce raisonnement n'a rien d'infaillible. Cela ne fait rien, il donne une règle pour construire l'arbre couvrant. Si l'on a des doutes, on peut explorer d'autres arbres possibles, toujours dans l'hypothèse de chaînes hamiltoniennes, puis comparer les valeurs des trajets en impédances.

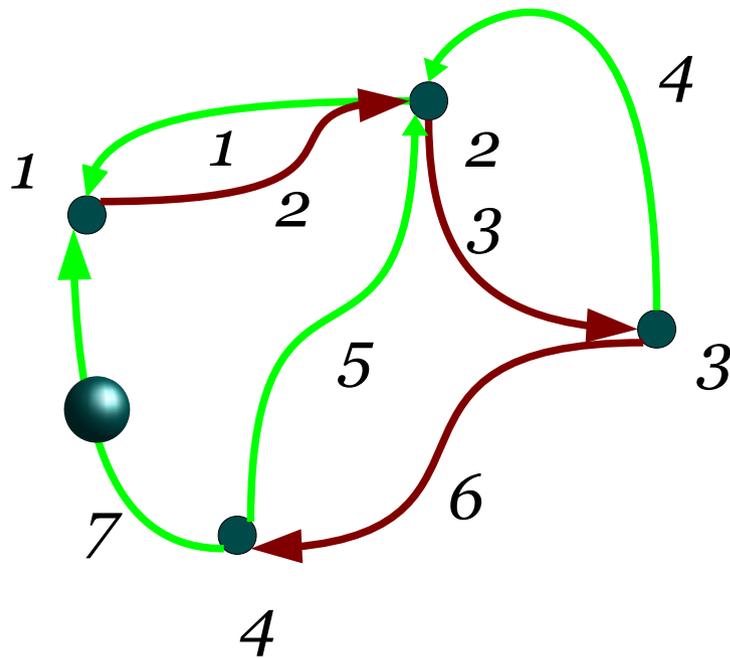


Ayant déterminé l'arbre couvrant comme chaîne hamiltonienne, on va pouvoir déterminer les mailles, comme branches de fermetures.

On repart du nœud 1 et on regarde si du nœud 2, puis du nœud 3, etc., des branches permettent de revenir au nœud 1.



En parcourant ainsi la suite de nœuds de l'arbre couvrant, on trouve deux mailles qui retournent en 1 : la maille 1-2 et la maille 2-3-6-7. On réoriente les branches du co-arbre pour qu'elles soient dans le sens des mailles créées. On passe ensuite au nœud suivant : le nœud 2. On va au nœud 3 et on regarde si une branche permet de revenir au nœud 2. Etc.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaque scrutation s'arrête au nœud 4. On trouve pour le nœud 2 les mailles 3-4 et 3-6-5. Toutes les branches ont été utilisées, l'algorithme s'arrête là et on en déduit les matrices incidences signée et connectivité (la matrice incidence non signée donne juste les liens entre nœuds et branches, elle permet dans un programme, de fixer la topologie de départ).

La CEP est égale à 4, et la connectivité n'est constituée que de +1 et de 0.

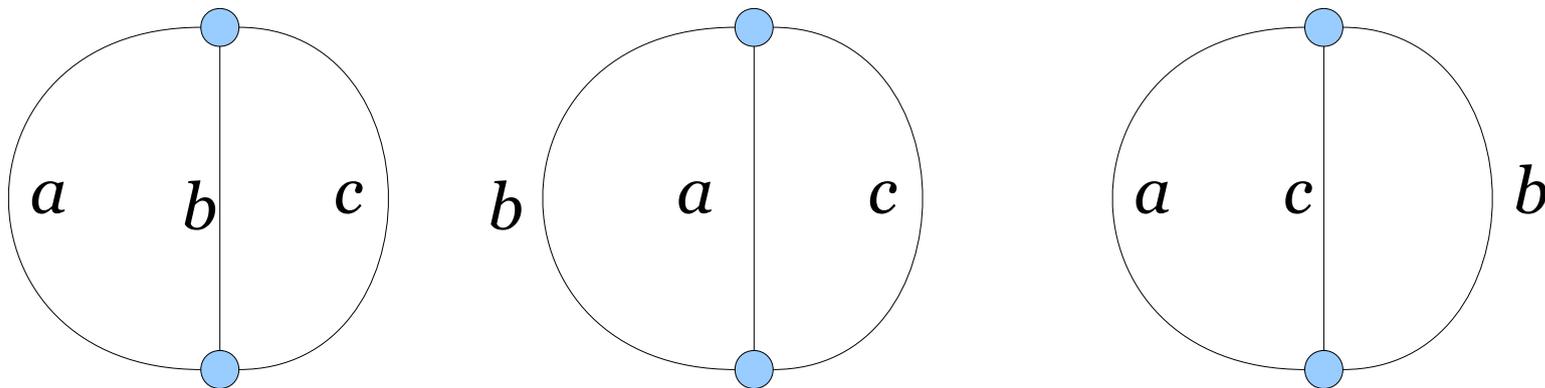
Réseaux primitifs

Les processus de construction que nous venons de voir sont lourds, sauf à ce que le circuit considéré soit simple.

Heureusement, toute la philosophie de la méthode de Kron consiste à coupler des réseaux simples. Nous verrons de fait que le processus précédent devient tout à fait gérable et que l'on va coupler, assembler, des réseaux dits « primitifs », d'ordres faibles, ou autrement dit, de genres peu élevés. Partant d'éléments simples mais non homogènes, on va construire la complexité, et c'est comme cela qu'il faut travailler dans l'approche topologique que l'on pourrait appeler « analogique » par opposition aux techniques numériques systématiques. Elle englobe deux mots clés : le macromodélisme (qui est l'homotopie de départ) et les transformations en général (incluant les couplage).

Transformations et équivalents topologiques

S'il y a plusieurs sources on en privilégiera une. Mais certains pourraient objecter que la source ne se trouve pas forcément sur la branche de gauche. On peut de toute façon explorer 360 degrés, et puis il faut se rappeler que toute variété de même genre peut être continûment déformée pour en retrouver une autre de même genre. Les trois réseaux suivant par exemple sont équivalents.



Champ lointain

Nous avons pratiquement tout le matériel pour traiter 99% des applications. Il nous manque un dernier point essentiel : les interactions de champ lointain de champ transverse et le champ stationnaire qui est une zone d'échanges entre champs proches et lointains.

Jusqu'à présent nous avons travaillé sur des graphes qui étaient des discrétisations contrôlées d'interactions de champs proches. Tous les éléments de ces graphes se regroupent en mécanique quantique dans les termes d'énergie potentielle pour la présence d'un champ électrostatique ou d'interaction de spin pour le champ magnétique. Mais ces interactions ne sont pas associées à des photons (suivant Feynman, elles sont associées à des photons virtuels).

Nous voulons maintenant nous connecter au champ photonique.

Bref rappel sur l'émission de lumière

La position moyenne d'une particule est donnée par

$$\bar{x} = \int x \psi \psi^* dx$$

pour un état statique : $\psi = e^{\left(\frac{2\pi i n E_n}{h}\right)t} \psi_n$

L'intégrale de la position moyenne dans ce cas est indépendante du temps.

Considérons maintenant un système qui peut être dans deux états n et m : $\Psi = a\Psi_n + b\Psi_m$

En reprenant le calcul de la position moyenne et en simplifiant l'expression on obtient pour les fréquences de transitions permises (sans déterminer la valeur moyenne de ab pour un grand nombre d'oscillateurs) :

$$2 \cos \left\{ \left(\frac{2\pi}{h} \right) (E_m - E_n) t \right\} \int x \psi_m \psi_n dx$$

De cette égalité on déduit que le photon est à la fréquence déterminée par la différence des énergies et multipliée par une intégrale qui détermine les transitions permises.

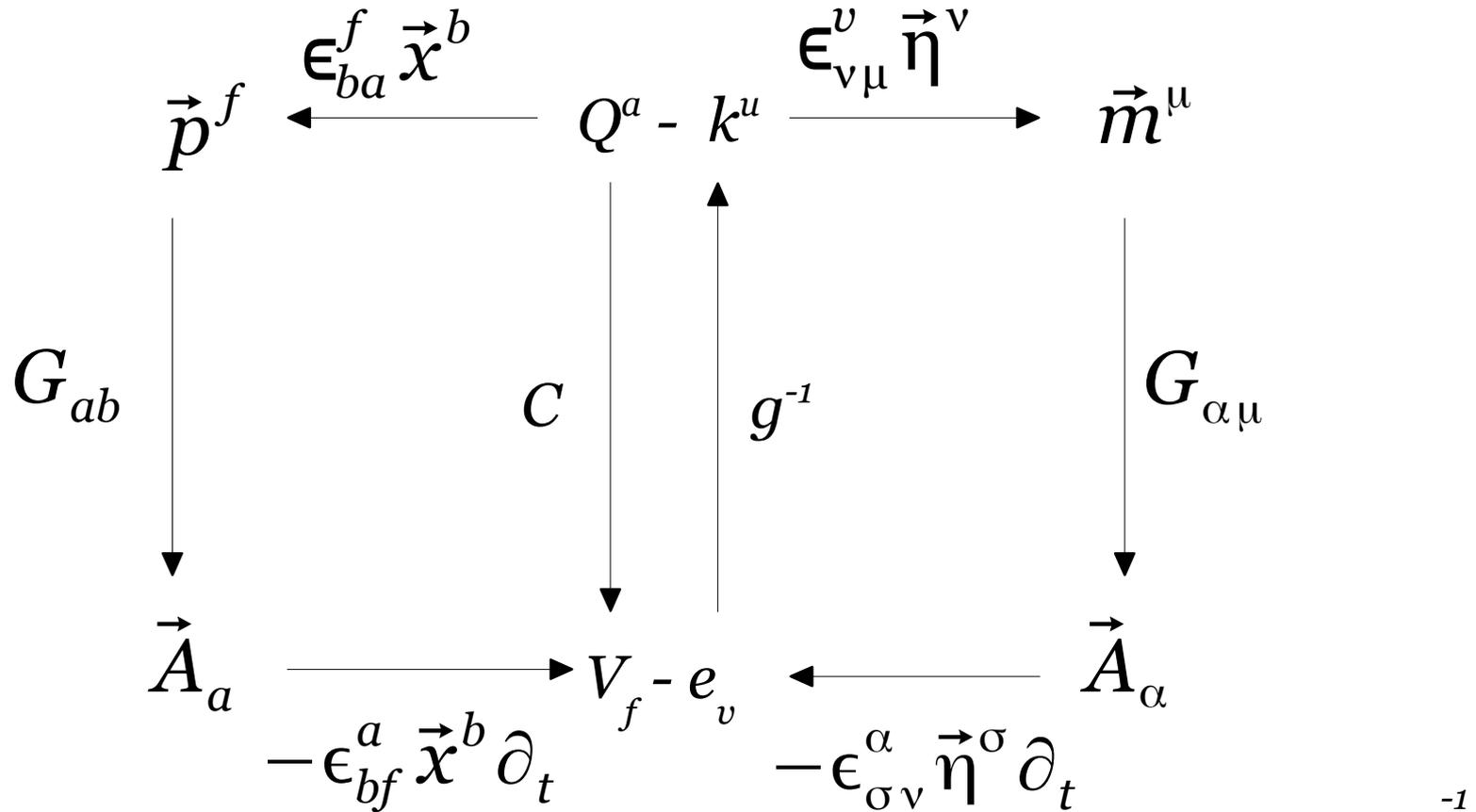
Les photons résultent de ces sauts quantiques qui ne sont pas forcément existants, même si l'électron est dans un état d'énergie cinétique significatif. Dans les graphes précédents, on supposait justement que cet état ne comportait pas ces sauts d'énergie ou à des niveaux négligeables.

L'idée

- *Le champ rayonné lointain ne peut être confiné dans des variétés à bords. Il s'étend à l'infini et est continu.*
- *On connaît les antennes qui interagissent par champ lointain.*
- *On veut créer un lien entre le graphe a priori non relié à une géométrie particulière (ce serait compliqué et on retomberait dans des techniques de maillages numériques et ce n'est pas le but) et le champ de rayonnement repéré dans l'espace-temps.*
- *On peut projeter certains éléments du graphe vers des vecteurs d'un espace des moments, lequel est tangent au diagramme de rayonnement.*

Cela revient (à confirmer par nos chers collègues mathématiciens) à définir un fibré cotangent à la variété de dimension 4 qu'est le diagramme de rayonnement. Ces fibrés sont toujours des variétés symplectiques dont les sections sont ici le champ de tenseur de Maxwell.

Un diagramme vers l'espace continu de Maxwell



-1

Ce diagramme complète le diagramme de Tontin « presque complet » que nous avons vu auparavant.

Le terme G est une fonction de Green qui engendre le diagramme de rayonnement 3D à partir des espaces tangents des moments sources.

Les connexions x et η transforment les fonctions charge et courant en moments. Ce sont eux qui assurent la projection du graphe sur l'espace du diagramme de rayonnement.

On peut « compacter » cette interaction en ramenant directement dans la matrice d'impédance de branches et dans la métrique des mailles un terme de couplage qui n'est rien d'autre que la fonction de transfert de Friis.

Comme toute antenne peut être décomposée en somme de moments, notre projection nous permet d'intégrer tout type de source de rayonnement en champ lointain.

L'aspect champ proche est pris en compte dans des branches ou des cordes magnétiques provenant du graphe de flux.

L'espace des moments peut donc être un espace « imbriqué » au même titre que l'espace des flux. On a là une démonstration de l'aspect multiéchelles de la méthode de Kron.

Reste un point important pour que la connexion soit précise. La transmission d'énergie de l'espace du graphe vers l'espace de Maxwell n'est pas sans conséquence pour l'un comme pour l'autre. Pour le premier, la perte d'énergie doit être répercutée sur la maille. Or toute maille résonante, avec des composantes R et C sur des branches et une inductance propre en maille est un résonateur. On pourrait même dire que c'est la raison de son caractère rayonnant. A la résonance, la résistance doit être égale à la somme des pertes Joule et des pertes par rayonnement. C'est sous cette condition pratique, qui ne pose pas de difficultés, que l'on obtiendra le bilan précis des puissances échangées.

Champs stationnaires et ondes guidées

Une onde stationnaire est équivalente à un oscillateur donc un moment rayonnant.

Les ondes guidées sont des lieux intermédiaire entre le graphe des champs longitudinaux et le rayonnement de photon – c'est la troisième forme possible de champ. Pour ces champs, on dispose d'une méthode simple pour les incorporer dans l'espace des branches comme interaction d'ondes guidées.

C'est le dernier élément nécessaire pour calculer tout sauf : les réseaux en mouvement ; que nous verrons après les applications.

On définit la matrice chaîne du guide d'onde

$$T = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} U_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

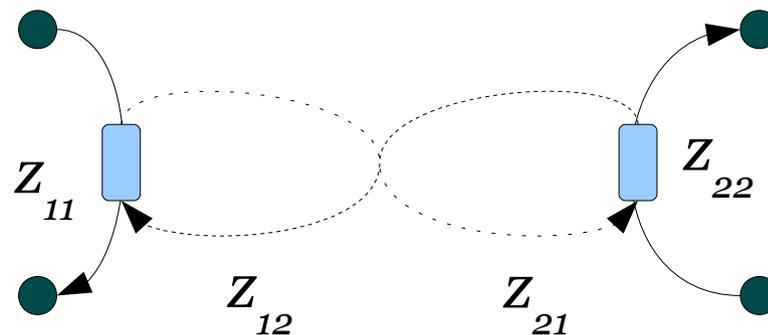
Cette matrice existe aussi pour tout guide d'onde.
On transforme la matrice T en matrice impédance :

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}}{\phi_{21}} & \frac{1}{\phi_{21}} \det(T) \\ \frac{1}{\phi_{21}} & \frac{\phi_{22}}{\phi_{21}} \end{bmatrix}$$

La matrice impédance d'un guide d'onde s'insère dans des réseaux avec deux termes Z_{12} et Z_{21} représentés sous forme de cordes.

Le principe de la corde dans un graphe est qu'elle :

- ♦ *ajoute une interaction extra-diagonale dans la métrique ;*
- ♦ *ne modifie pas la CEP du graphe.*



Les cavités

Une cavité est un réseau en soit, particulier, un résonateur. Placer un réseau dans une cavité revient à coupler ces deux réseaux. Depuis longtemps les spécialistes en hyperfréquences utilisent des circuits « bouchons » pour modéliser les cavités, on l'a oublié parfois un peu vite. Si la cavité est complexe, on a l'impression que le seul moyen de parvenir à la modéliser est d'utiliser un code d'électromagnétisme 3D.

Il ne faut peut-être pas abandonner si vite... Mais ce développement sort du cadre de cette présentation.

Dans tous les cas, une cavité est avant tout un guide d'onde court-circuité et un agencement de guides aux conditions limites diverses pour les cavités remplies. C'est donc un couplage similaire à celui des ondes guidées dans le cadre de notre symbolisme et de nos équations.

Réseaux en mouvements

Nous touchons là à une des applications ultime de la méthode de Kron. On peut aller très loin sur ce sujet, jusqu'à comparer les métriques et transformations comme en discute Banesh Hoffmann dans son article 'Kron's non riemannian electrodynamics' (revue de physique moderne, Juillet 1949) pour comparer les équations de Kron et celle d'Einstein. On pourra aussi lire l'ouvrage de Balasubramanian, Lynn et Sen Gupta : 'differential forme on electromagnetic networks'. Mais discuter de ces théories nécessiterait plus que le temps qui nous est imparti ici.

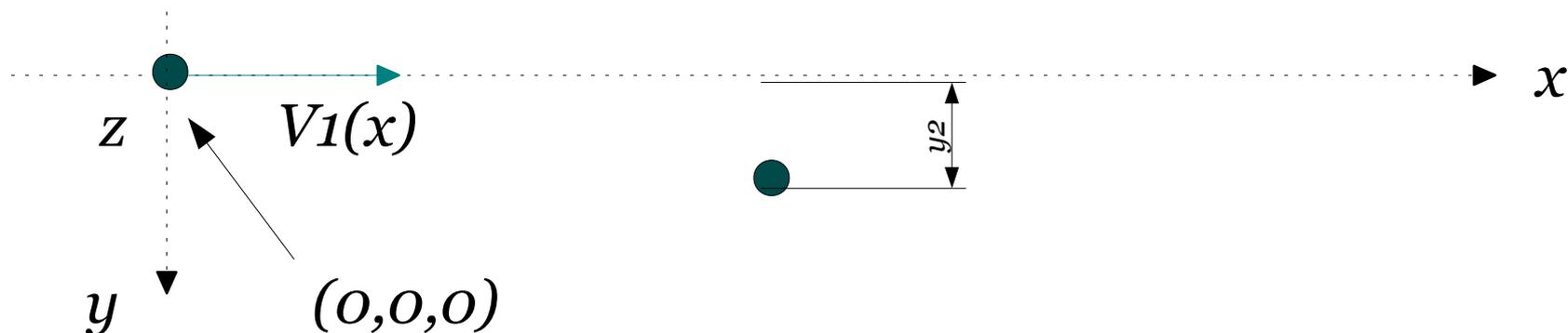
On peut néanmoins aborder deux applications simples pour montrer toute l'étendue de l'approche de Kron et toute la possibilité de la topologie et des graphes, bien au-delà de ce que l'on croit généralement.

Les deux applications sont l'effet Doppler et la machine électrique.

Effet Doppler entre deux réseaux dont un mobile

Les choses deviennent rapidement compliquées lorsque l'on touche aux réseaux mobiles. On considère ici deux réseaux monocycles. Un réseau se déplaçant en ligne droite à la vitesse V_1 . Il passe devant un second réseau, fixe dans le référentiel du laboratoire, qui perçoit le champ rayonné par le réseau 1 mobile. On suppose que quelle que soit la position du réseau 1, l'interaction entre les deux réseaux est une interaction de champ lointain.

Si le réseau 1, au moment où il passe devant le réseau récepteur 2 interagissait aussi en champ proche, on pourrait tout à fait calculer le résultat mais la situation serait notablement plus compliquée comme nous le verrons avec les machines électriques. Le dessin suivant résume la situation :



Pulsation propre et vitesse du réseau 1 sont fixes.

On admet la formule de l'effet Doppler qui exprime la pulsation perçue par le réseau 2 quand le réseau 1 est mobile à la vitesse V_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\omega_1 \right]_2 = \left[\frac{1 + \frac{V_1}{c}}{1 - \frac{V_1}{c}} \right]^{1/2} \omega_1 \quad x_1(t) < x_2 \\ \left[\omega_1 \right]_2 = \omega_1 \quad x_1(t) = x_2 \\ \left[\omega_1 \right]_2 = \gamma \left(V_1 \rightarrow -V_1 \right) \omega_1 \quad x_1(t) > x_2 \end{array} \right.$$

Calculons la fém induite dans le réseau 2 :

$$e_2 = \frac{-\vec{h}_2 \cdot \partial [\vec{A}_1]_2}{\partial t}$$

h_2 est notre opérateur de passage moment \rightarrow maille.
On remplace le champ par sa valeur :

$$[\vec{A}_1]_2 = \mu i^1 \vec{h}_1 \left\{ \frac{\sin \left([\omega_1]_2 \left(t - \frac{R(t)}{c} \right) \right)}{4 \pi R(t)} \right\}$$

Le terme entre accolades est la fonction de Green qui propage le champ. La distance $R(t)$ dépend de la position courant de 1, avec $x_1(t) = V_1 t$. h_1 est l'opérateur de projection courant – moment pour le réseau 1.

Soit :
$$R(t) = \sqrt{(x_2 - V_1 t)^2 + (y_2)^2} \quad \text{Comme } y_1 = 0.$$

Notons :
$$R'(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(V_1)^2 t - 2x_2 V_1}{\sqrt{(x_2 - V_1 t)^2 + (y_2)^2}} \right\}$$

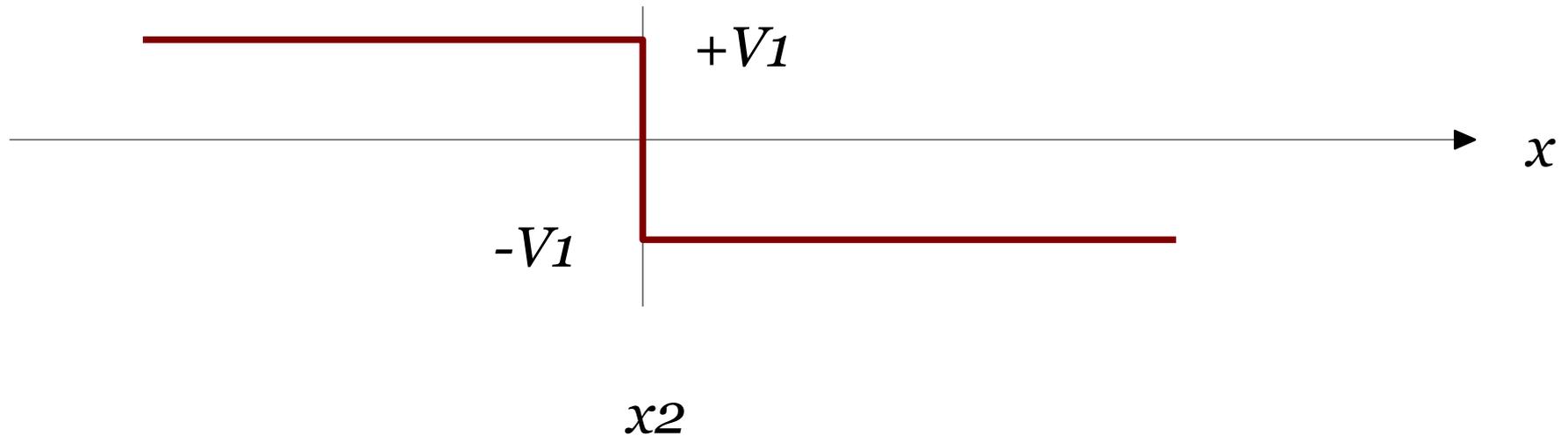
et :
$$[\omega_1]_2^r = [\omega_1]_2 \left(t - \frac{R(t)}{c} \right) = \gamma^r \omega_1$$

Par remplacements on trouve alors :

$$\frac{e_2}{i^1} = \frac{-\mu \vec{h}_2 \cdot \vec{h}_1}{2\pi [R(t)]^2} \left\{ \gamma \omega_1 \left(1 - \frac{1}{c} R'(t) \right) \cos(\gamma^r \omega_1) R(t) - \sin(\gamma^r \omega_1) R'(t) \right\} = g_{21}$$

Nous avons notre fonction de couplage dans l'espace des mailles, nous avons gagné !

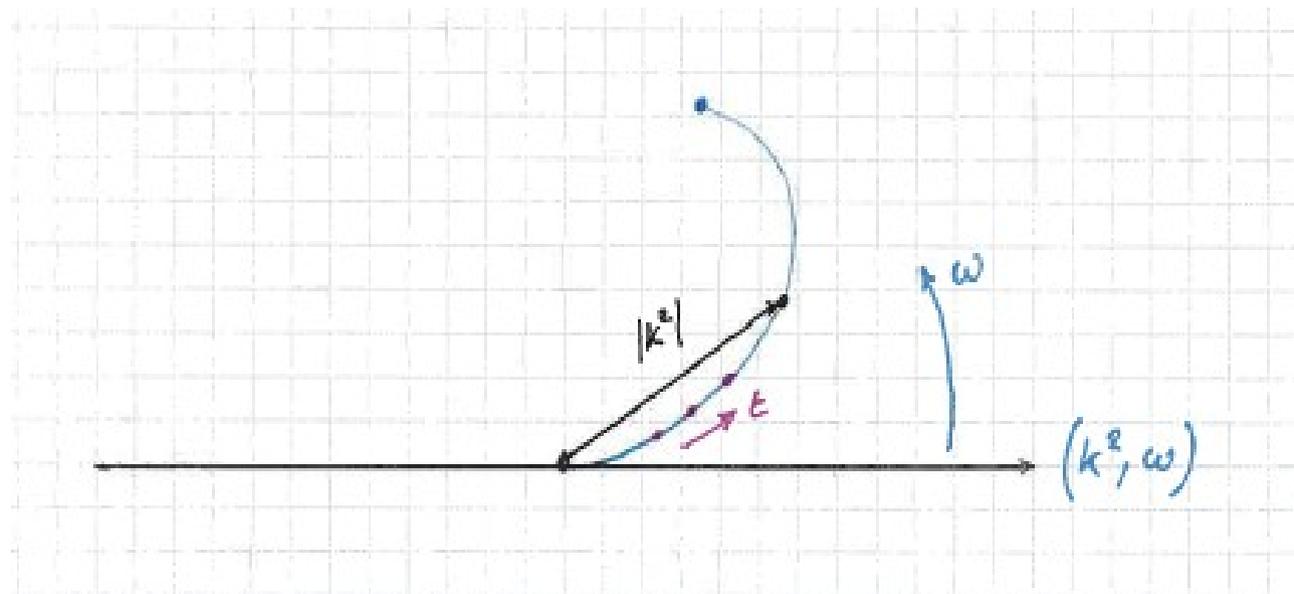
On voit que cet exemple pourtant a priori assez simple pose déjà de nombreuses questions. La vitesse V_1 n'est pas constante, suivant nos choix elle a l'allure suivante :



Par ailleurs on remarque que la fonction de couplage peut être exprimée comme une sorte de mutuelle (où l'on retrouve une forme $-j\omega M$) additionnée d'une composante qui ne dépend pas en facteur de la pulsation. Le premier terme est le couplage classique, le dernier traduit le couplage par flux coupé.

Si l'on désire programmer ce calcul, on considère les deux petites antennes comme des réseaux R-C (un petit brin rayonnant petit devant la longueur d'onde se modélise très bien comme cela) et comme fonction de couplage on peut symétriser g_{21} calculé précédemment. Ce couplage est une corde entre les deux réseaux d'une maille. La CEP du problème est de 2.

En polaire, la trajectoire décrite par k_2 est un bord de goutte d'eau si l'on prend la pulsation pour angle et l'amplitude pour rayon.



Les machines électriques

Une machine électrique est un objet fascinant, terriblement complexe. Dans le cas des machines on est appelé à considérer des champs proches en mouvements relatifs accélérés. Le problème de Coriolis rentre aussi dans cette catégorie.

Nous allons considérer un cas de machine sans détailler l'ensemble des possibilités, juste pour montrer comment la connectivité peut dépendre du temps.

On considérera néanmoins la métrique fixe. On pourra ensuite discuter du cas d'une métrique variable, dépendant par exemple des courants.

La machine la plus élémentaire est constituée par une spire en rotation dans un champ magnétique. On note :

K le moment d'inertie du cadre

ρ le coefficient linéaire de frottement de la partie mécanique

L le coefficient d'inductance propre du cadre

r la résistance du cadre

$\Psi(t)$ le flux d'induction à travers le cadre

$e(t)$ la tension appliquée aux bornes

$i(t)$ le courant dans le cadre

$\theta(t)$ la position angulaire du cadre

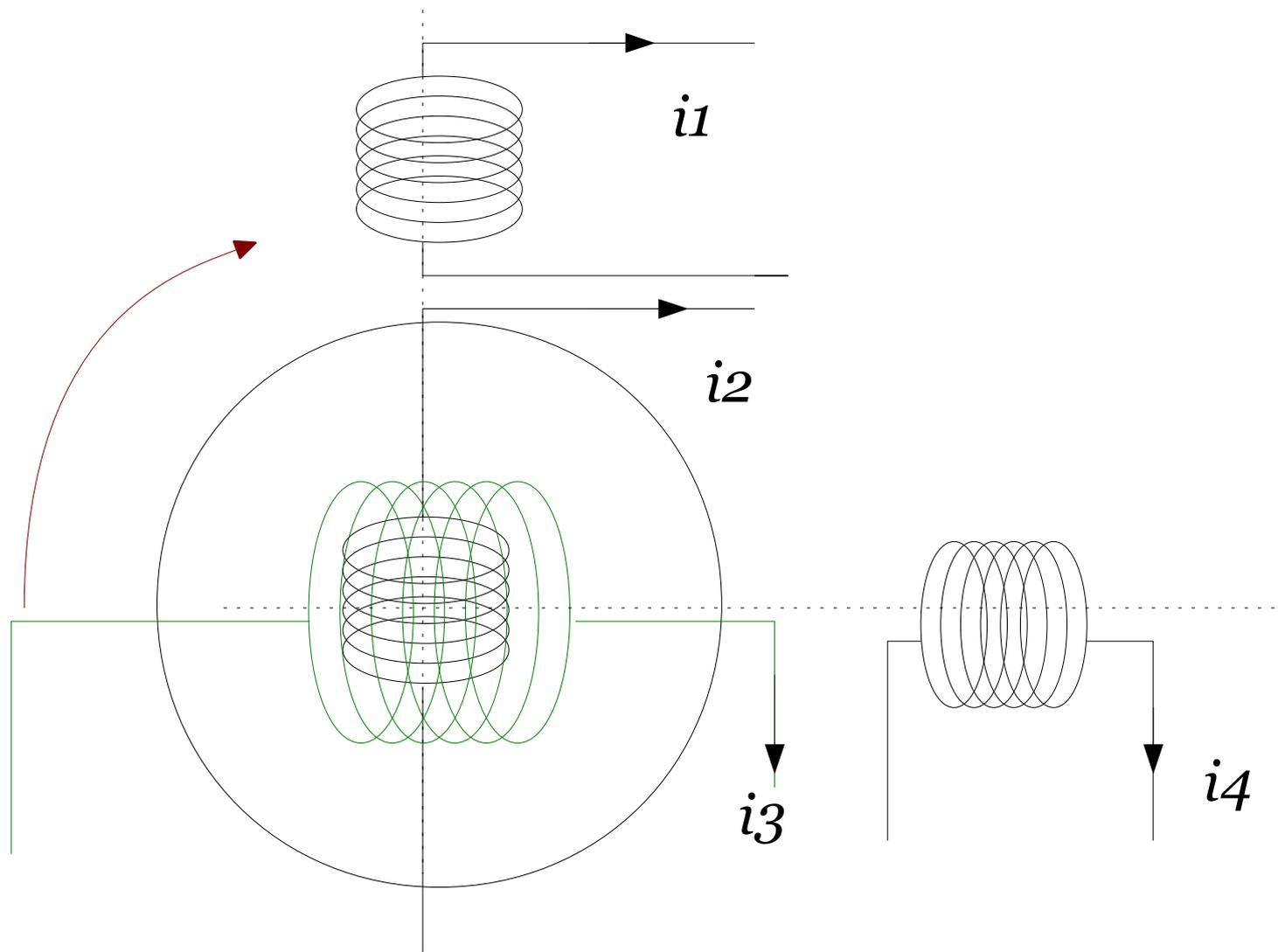
$\Omega = d\theta/dt$ la vitesse angulaire

$\Gamma(t)$ le couple instantané

Les équations de la machine sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} e = L \frac{di}{dt} + ri + \Psi \Omega \\ \Gamma = K \frac{d\Omega}{dt} + \rho \Omega - \Psi i \end{array} \right.$$

On peut représenter la machine comme un agencement d'inductances dans le rotor et le stator :



Pour représenter cette machine nous pouvons créer un vecteur des courants et des fém dans un espace de dimension 4. Nous supposons pour l'instant les inductances fixes, pour poser déjà les premiers termes de l'équation de résolution.

Les résistances des bobinages forment une matrice purement diagonale r_{ii} . Nous pouvons aussi définir la matrice des inductances propres L_{ii} et des mutuelles entre les bobinages M_{ij} .

Les fém de flux coupés créent une matrice G_{ij} .

De ces quatre matrices on peut déduire la relation entre les fém et le courants dans les bobinages :

$$e_{\alpha} = \left(r_{\alpha\sigma} + L_{\alpha\sigma} p + M_{\alpha\sigma} p + G_{\alpha\sigma} \Omega \right) i^{\sigma}$$

On a par ailleurs, en négligeant les frottements d'axes :

$$\Gamma = \Psi_{\alpha} i^{\alpha}$$

Et en supposant les caractéristiques d'induction linéaires (pas de saturation) :

$$\Psi_{\alpha} = G_{\alpha\sigma} i^{\sigma}$$

D'où :

$$\Gamma = G_{\alpha\sigma} i^{\alpha} i^{\sigma}$$

Voyant un peu mieux comment cela « fonctionne », considérons maintenant un axe rotorique mobile, où les inductances tournent avec l'axe.

Entre les axes de la machine « fixe » et ceux de la machine tournante existe un changement de référentiel correspondant à chaque instant aux changement d'axes. On écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} i^1 = i'^1 \\ i^2 = i'^2 \cos \theta - i'^3 \sin \theta \\ i^3 = i'^2 \sin \theta + i'^3 \cos \theta \\ i^4 = i'^4 \end{array} \right.$$

L'angle $\theta = \theta(t)$ dépend du temps. On peut écrire ce changement de base sous la forme compacte :

$$i^\alpha = C^\alpha_\sigma i'^\sigma$$

Reprenons l'équation de la machine fixe en posant que L englobe L et M :

$$e_\alpha = r_{\alpha\sigma} i^\sigma + L_{\alpha\sigma} \frac{di^\sigma}{dt} + G_{\alpha\sigma} \Omega i^\sigma$$

On remplace alors les i par les i' en profitant du changement de base C , mais en faisant attention que C dépend du temps. De fait :

$$\begin{aligned} \frac{di^\alpha}{dt} &= i'^j \frac{d}{dt} C^\alpha_j + C^\alpha_j \frac{di'^j}{dt} \\ &= i'^j \frac{\partial C^\alpha_j}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + C^\alpha_j \frac{di'^j}{dt} \\ &= i'^j \frac{\partial C^\alpha_j}{\partial \theta} \Omega + C^\alpha_j \frac{di'^j}{dt} \end{aligned}$$

On peut maintenant remplacer dans l'équation de la machine pour obtenir :

$$e_\alpha = C^\beta_j r_{\alpha\beta} i'^j + C^\beta_j L_{\alpha\beta} \frac{di'^j}{dt} + \frac{\partial C^\beta_j}{\partial \theta} L_{\alpha\beta} \Omega i'^j + C^\beta_j G_{\alpha\beta} \Omega i'^j$$

Multiplions les deux membres par C^α_i , pour obtenir :

$$C^\alpha_i e_\alpha = C^\alpha_i C^\beta_j r_{\alpha\beta} i'^j + C^\alpha_i C^\beta_j L_{\alpha\beta} \frac{di'^j}{dt} + C^\alpha_i \frac{\partial C^\beta_j}{\partial \theta} L_{\alpha\beta} \Omega i'^j + C^\alpha_i C^\beta_j G_{\alpha\beta} \Omega i'^j$$

Notons :

$$H_{ij} = L_{\alpha\beta} C^\alpha_i \frac{\partial C^\beta_j}{\partial \theta}$$

H n'est pas un tenseur. En fait il traduit justement la non symétrie entre le référentiel mobile et le référentiel animé d'un mouvement de rotation.

L'équation de la machine devient alors :

$$e'_i = r'_{ij} i'^j + L_{ij} \frac{di'^j}{dt} + (H_{ij} + G'_{ij}) \Omega i'^j$$

Kron a appelé le produit H_{ij} , « fém de Coriolis ».

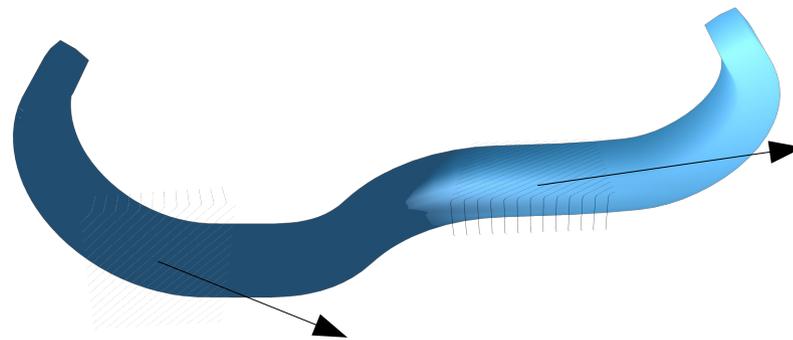
Pour l'instant, ces nouveaux objets découlent des propriétés de dérivées de la connectivité. C'est à dire que du fait que l'on change de base, d'axes de référentiel, on engendre de nouveaux champs qui créent les fém supplémentaires.

Cela n'est pas « nouveau ». Ainsi, un personne assise sur un électron en mouvement ne perçoit qu'un champ électrostatique, un potentiel scalaire. Par contre un observateur externe qui regarde passer l'électron voit un potentiel scalaire ET un potentiel vecteur.

La machine électrique : un espace courbe local

Lorsque nous faisons tourner les axes du rotor, nous supposons les mutuelles et inductances constantes. On a un effet de rotation, comme pour la force de Coriolis, mais « l'espace courants - temps » reste de proportions constantes. Autrement dit, la variété attachée au tube de flux est cylindrique (de section homogène).

Si au contraire la section et le temps varie lorsque l'on se déplace le long du flux, il en va tout autrement.



$$g \rightarrow g(k)$$

La métrique devient une fonction des courants (saturation).

Si g est notre métrique (qui s'appuie sur μ), on peut écrire l'invariant :

$$S = g_{\alpha\sigma} k^\alpha k^\sigma = ds^2 \rightarrow L = \sqrt{ds^2}$$

Cet invariant est une énergie. Écrit ainsi, cela suggère que l'opérateur de dérivation a été extrait de la métrique qui se réduit par exemple aux inductances et mutuelles.

La racine de cette quantité donne une distance qui pour l'espace des réseaux électriques est ici l'intégrale d'un courant sur un chemin. Notons L cette distance. En l'intégrant sur le paramètre λ (qui régit les variables k) on trouve l'action A :

$$\text{action : } A = \int_A^B d\lambda L = \int_A^B d\lambda \sqrt{g_{\alpha\sigma} k^\alpha k^\sigma}$$

La trajectoire du système, au sens où nous l'avons écrit précédemment, dans l'espace des k^i est donnée par le maximum des équations d'Euler – Lagrange pour des sources externes e :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial k^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = e_\alpha$$

On doit faire apparaître ici les charges. Ce simple fait implique que l'on exprime le Lagrangien dans l'espace des branches. Pourtant il a été démontré que l'on retrouvait directement les expressions des opérateurs de Lagrange dans l'espace des mailles¹. En fait il n'y a pas contradiction car notre charge et le Δq entre les deux nœuds sont associés à une branche incluse dans une maille. Calculons chacun de ces termes avec l'expression précédente du Lagrangien.

Comme : $\frac{\partial k^\mu}{\partial q^\alpha} = 0$, $\frac{\partial}{\partial q^\alpha} (g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} k^\mu k^\nu$

alors : $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} k^\mu k^\nu$

On trouve ainsi le terme de droite. Calculons le terme entre parenthèses à gauche :

$$\frac{\partial}{\partial k^\alpha} (g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu) = g_{\alpha\nu} k^\nu + g_{\mu\alpha} k^\mu = 2g_{\alpha\mu} k^\mu$$

alpha prenant toute valeur, comme μ et ν

Dans cette dernière relation on peut réduire dans le cas de la relativité générale la somme à un terme unique parce que la métrique g est symétrique. Dans notre cas, ce n'est pas évident. On doit donc garder la somme pour obtenir :

$$\frac{\partial L}{\partial k^\alpha} = \frac{1}{2L} (g_{\alpha\nu} k^\nu + g_{\mu\alpha} k^\mu)$$

Il faut maintenant dériver cette expression par rapport à λ .

Premier terme :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2L} \right) = \frac{-1}{4L^2} \frac{dL}{d\lambda}$$

Deuxième terme :

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\alpha\nu}) k^\nu = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \lambda} k^\nu$$

or : $\frac{\partial q^\mu}{\partial \lambda} = k^\mu$ donc : $\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \lambda} k^\nu = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} k^\mu k^\nu$

Dernier terme

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\alpha\mu} k^\mu) = g_{\alpha\mu} \dot{k}^\mu$$

Finalemment :

$$\frac{-1}{4L^2} \frac{dL}{d\lambda} (g_{\alpha\nu} k^\nu + g_{\mu\alpha} k^\mu) + \frac{1}{2L} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} k^\nu k^\mu + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial q^\nu} k^\mu k^\nu \right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2L} (g_{\alpha\nu} \dot{k}^\nu + g_{\mu\alpha} \dot{k}^\mu) - \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} k^\mu k^\nu = e_\alpha$$

On réorganise pour écrire :

$$\frac{1}{2} \left(g_{\alpha\nu} \dot{k}^\nu + g_{\mu\alpha} \dot{k}^\mu \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \right) k^\mu k^\nu \dots$$

$$\dots = L e_\alpha + \frac{1}{4L} \frac{dL}{d\lambda} \left(g_{\alpha\nu} k^\nu + g_{\mu\alpha} k^\mu \right)$$

On multiplie les termes par la métrique inverse y et on note :

$$\dot{X}^\beta = \frac{1}{2} y^{\beta\alpha} \left(g_{\alpha\nu} \dot{k}^\nu + g_{\mu\alpha} \dot{k}^\mu \right)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} y^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \right)$$

$$T^\beta = y^{\beta\alpha} \left\{ L e_\alpha + \frac{1}{4L} \frac{dL}{d\lambda} (g_{\alpha\nu} k^\nu + g_{\mu\alpha} k^\mu) \right\}$$

Par remplacement on obtient comme équation des géodésiques – trajectoires optima, normalement pour $e=0$:

$$\dot{X}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta k^\mu k^\nu = T^\beta$$

k , le débit, a la grandeur d'une vitesse. De fait la dérivée de X est homogène à une accélération. Si l'espace est homogène les coefficients appelés coefficients de Christoffel (ce ne sont pas des tenseurs) sont nuls. Notre équation des géodésiques est alors une sorte d'équation de Newton multidimensionnelle.

Riemann et la courbure du flux

Dans l'équation des géodésiques, on peut poser les sources T nulles, en forçant e à zéro et en supposant $dL/d\lambda$ assez petit.

On trouve alors :

$$\dot{X}^\beta = -\Gamma^\beta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = -\Gamma^\beta_{\mu\nu} k^\mu \frac{dq^\nu}{d\lambda} \Leftrightarrow \dot{X}^\beta d\lambda = -\Gamma^\beta_{\mu\nu} k^\mu dq^\nu$$

Khi est homogène à un courant (rappelons nous que nous manipulons des courants – des flux abstraits et quelconques), on écrit :

$$\dot{X}^\beta = \frac{\partial k^\beta}{\partial \lambda} \rightarrow \dot{X}^\beta d\lambda = \frac{\partial k^\beta}{\partial \lambda} d\lambda = -\Gamma^\beta_{\mu\nu} k^\mu dq^\nu$$

On sait donc exprimer la variation de flux.

L'idée pour appréhender combien l'espace est « tordu » est d'effectuer un petit déplacement du vecteur de l'espace tangent, d'un espace tangent à son voisin. Puis en comparant deux chemins réalisés par ces déplacements élémentaires, « sentir » l'inhomogénéité de l'espace sur lequel on se promène.

Imaginons que l'on regarde le courant de A (espace T1) vers B (espace T2) :

$$k^\alpha(B) = k^\alpha(A) - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha(A) k^\beta(A) dq^\nu \quad (1)$$

Maintenant de B on va vers C :

$$k^\alpha(C) = k^\alpha(B) - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha(B) k^\beta(B) dq^\nu \quad (2)$$

Or en B on peut développer le coefficient de Christoffel au premier ordre :

$$\Gamma_{\beta\nu}^\alpha(B) = \Gamma_{\beta\nu}^\alpha(A) + \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^\alpha}{\partial q^\mu}(A) dq^\mu \quad (1)$$

En utilisant ces trois équations on trouve :

$$k^\alpha(C) = \left\{ k^\alpha(A) - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha(A) k^\beta(A) dq^\nu(1) \right\} \dots$$

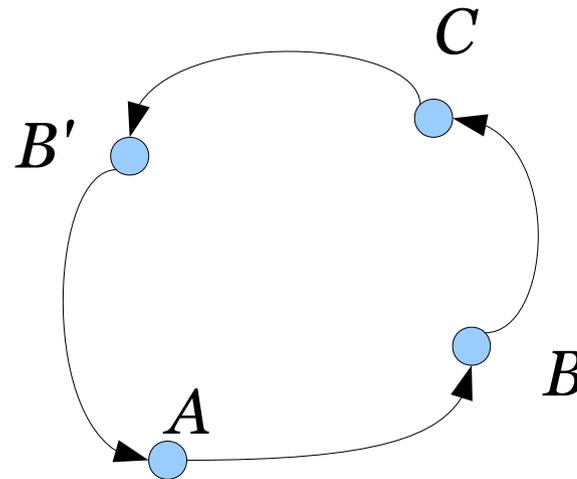
$$\dots - \left[\Gamma_{\beta\nu}^\alpha(A) + \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^\alpha(A)}{\partial q^\mu} dq^\mu(1) \right] k^\beta(B) dq^\nu(2)$$

soit : $k^\alpha(C) = \left\{ k^\alpha(A) - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha(A) k^\beta(A) dq^\nu(1) \right\} \dots$

$$\dots - \left[\Gamma_{\beta\nu}^\alpha(A) + \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^\alpha(A)}{\partial q^\mu} dq^\mu(1) \right] \dots$$

$$\dots \left[k^\beta(A) - \Gamma_{\sigma\nu}^\beta(A) k^\sigma(A) dq^\nu(1) \right] dq^\nu(2)$$

Maintenant on revient de C à A par un parcours un petit peu différent.



On obtient ce nouveau trajet en intervertissant les deux variables dq . On fait la différence pour obtenir :

$$k'^{\alpha} - k^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} k^{\beta}_0 dq^{\mu}(1) dq^{\nu}(2)$$

Avec :

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial q^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial q^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

Tenseur de Riemann.

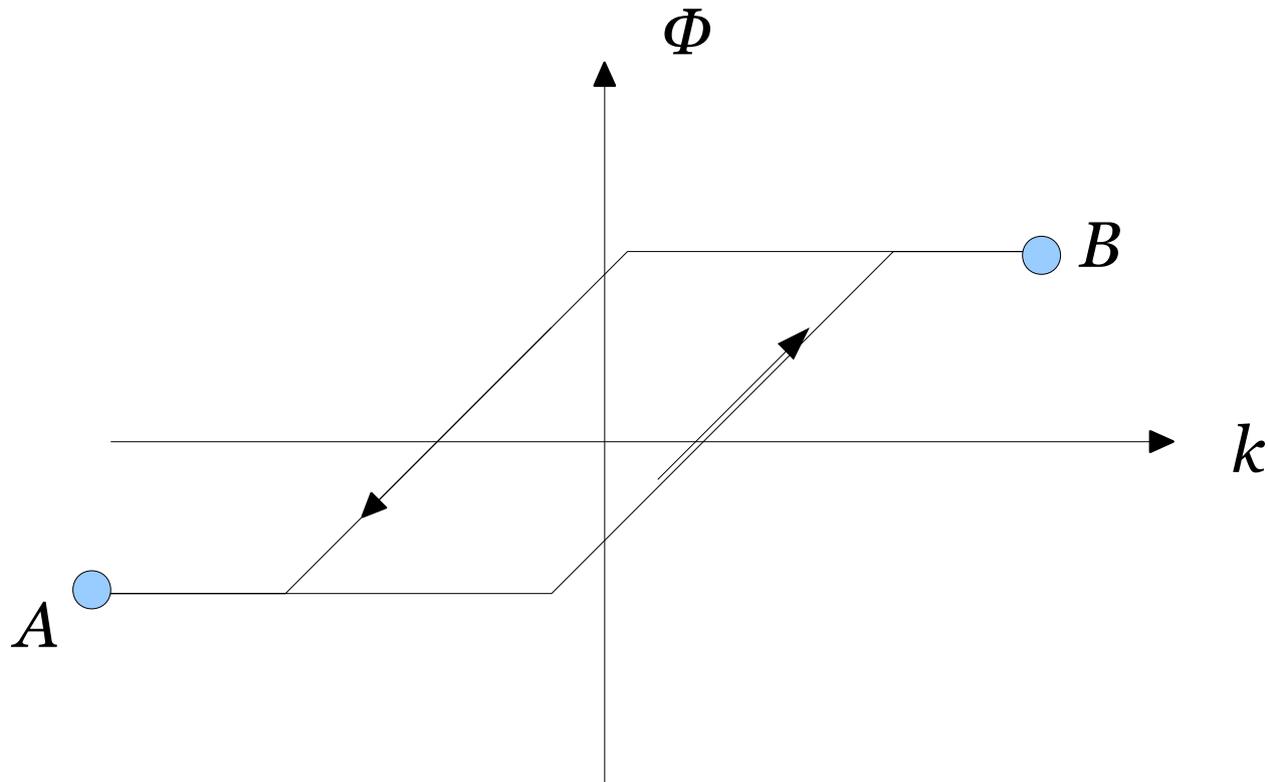
Au prix de calculs quand même lourd on a obtenu une expression de l'écart de trajets dans un aller-retour sur la variété flux lorsque celle-ci n'est plus linéaire, c'est à dire que la métrique varie avec le lieu, ou les courants. En relativité générale, l'exercice suivant consiste à relier les sources à cette courbure. Les personnes intéressées par cet exercice trouveront quantité d'ouvrage le détaillant. Par rapport à notre développement, k est la vitesse, q est x et λ le temps propre.

Nous allons nous regarder un raisonnement un peu différent. Précédemment nous avons établi le lagrangien, d'où l'on a déduit par remplacement les géodésiques, puis en explorant les différents cheminement, l'expression de la courbure – que l'on peut relier ensuite à l'énergie présente.

Dans notre représentation, les flux, les courants sont attachés à un espace tangent \mathbf{h} . \mathbf{h} est lui relié à \mathbf{B} par une quantité tensorielle qui engendre la métrique : $\boldsymbol{\mu}$.

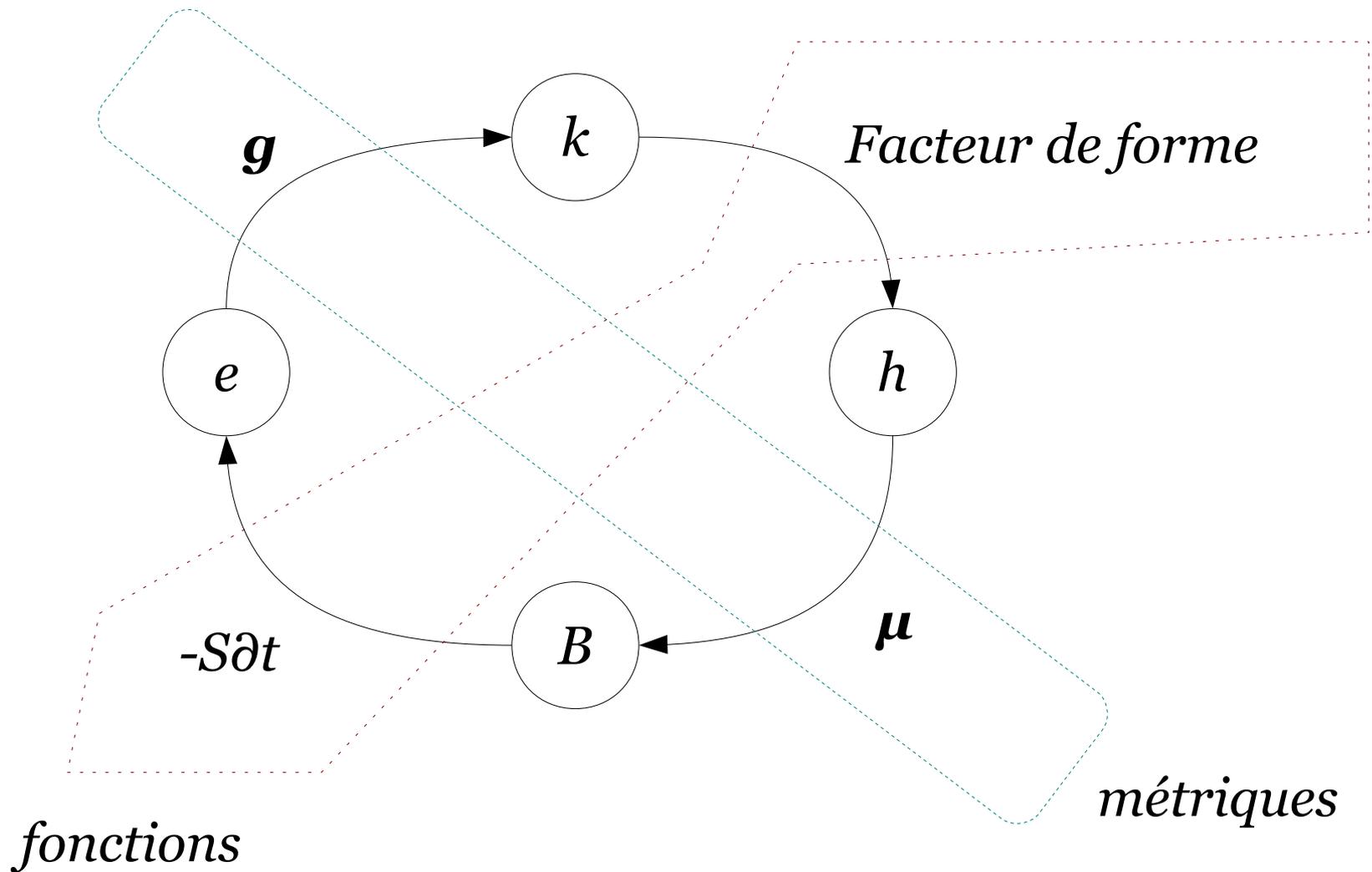
Ce qui suit est une « philosophie » toute personnelle !

Nous rappelant de l'équivalence entre h et k et B et Φ , on trace la fonction $\Phi(k)$ dans des matériaux avec hystérésis :



Φ étant relié à k , on voit dans l'espace des k la courbure ! C'est la différence de chemins issue de l'hystérésis sur μ .

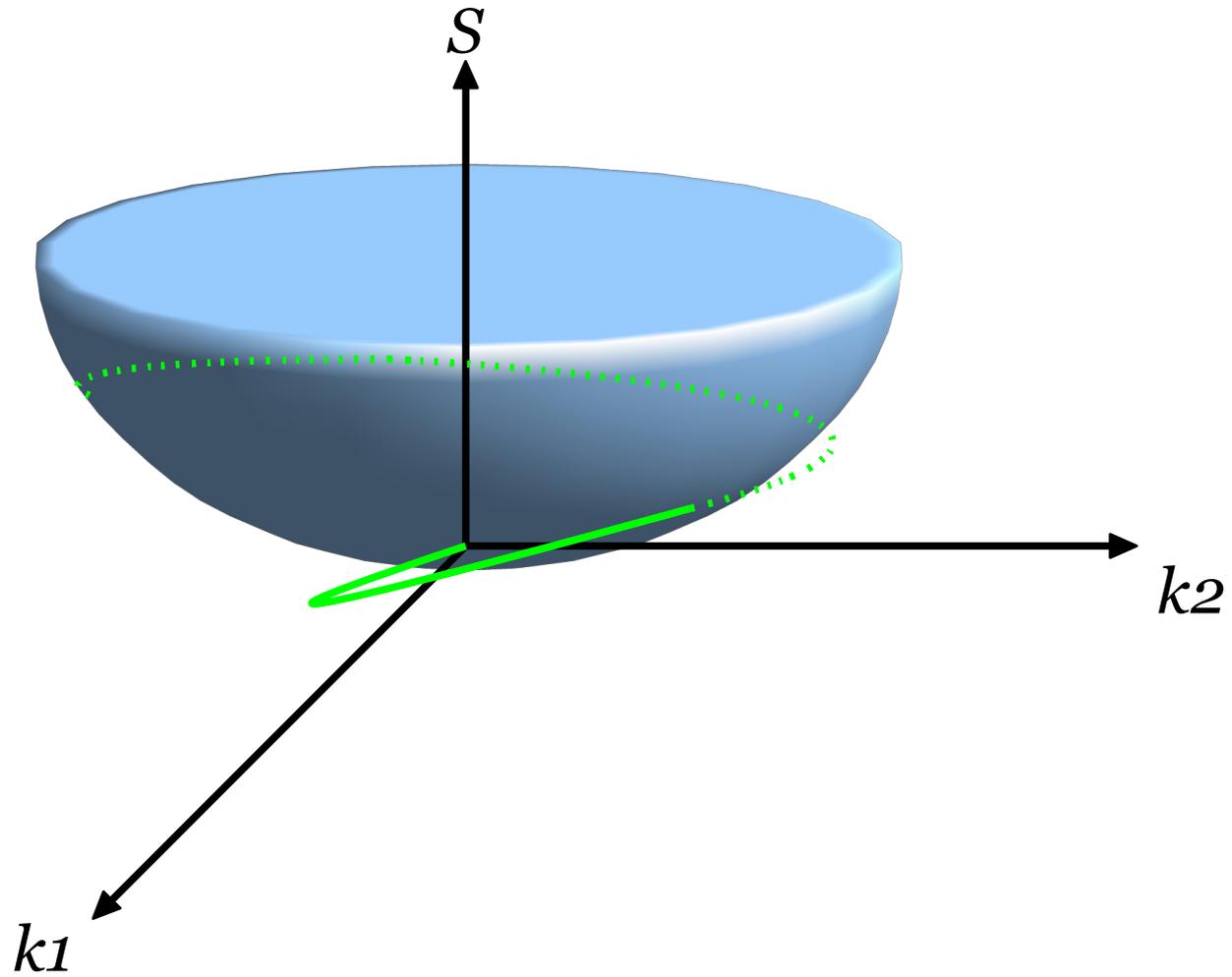
Einstein travaille dans un espace « nodal » continu. Nous, nous travaillons dans un espace des mailles imbriquées, au global continu, localement discret. On décrit le cycle suivant :



Dans notre variété k_1, k_2, S où S est notre invariant (un équivalent du temps propre. Pour nous le temps est constant car en champ proche, le temps n'a « pas le temps de se tordre »!) – une racine de l'énergie magnétique stockée, on augmente $k_1 (v)$. Il arrive un moment où k_1 tend vers k_{1sat} , le matériau ne peut plus considérer le supplément d'énergie en source. K_2 tend à s'aplanir et S devient constant (v tend vers c constante, et la variation de temps devient nulle). L'espace se tord pour compenser cet effort d'énergie cinétique en une autre forme d'énergie. S est bien une image de t car cette puissance se dissipe continuellement sauf à tordre assez l'espace pour la stocker : c'est le même processus dans les trous noirs d'où rien ne s'échappe et où le temps devient évanescent.

La relativité générale est l'image de nos raisonnements en champ lointain, dans le cadre des variables de l'espace-temps relativiste. Profitant des similitudes démontrées avec les réseaux on peut en profiter et s'en inspirer largement.

Cône d'hystérésis



Le professeur Rocard avait montré que finalement en assimilant les champs de gravitation et électromagnétique, on retrouvait les valeurs de déviation du périhélie de Mercure, etc. Dans ce cadre, la courbure sera estimée dans une discrétisation de l'espace par un réseau magnétique pourvu d'une métrique qui est une perméabilité magnétique non linéaire.

Enfin, pour ce qui est des théories cosmologistes, on peut essayer de trouver une théorie du tout. Personnellement je n'y crois pas (mais ça ce n'est qu'une intuition). Par contre, on peut considérer différentes strates d'espaces imbriqués d'où émergent suivant les niveaux où l'on se situe, des propriétés intrinsèques à un niveau, que l'on ne peut pas observer dans les niveaux sous-jacents. C'est un concept de systémique qui admet qu'un système complexe n'est pas la simple combinaison de ses éléments les plus élémentaires.

Connexions vers la mécanique quantique

Sous ce concept d'émergences on peut voir la mécanique quantique comme un espace sous-jacent d'où émergent les grandeurs classiques. La connexion entre les espaces revenant au processus d'effondrement de la fonction d'onde.

Par exemple suivant Klein-Gordon on a les densités de charge et courant données par :

$$\rho = \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - e \phi \psi \psi^*$$

$$\mathbf{j} = \frac{-i}{2} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) - e \mathbf{A} \psi \psi^*$$

À suivre ...

En espérant que vous aurez fait un bon voyage, la compagnie 'Olivier Maurice' vous souhaite un agréable séjour.

Merci !