



Equations hyperboliques non-linéaires

Jean-François Coulombel

► **To cite this version:**

Jean-François Coulombel. Equations hyperboliques non-linéaires. DEA. Université de Lille 1, France. 2009, pp.66. <cel-00616496>

HAL Id: cel-00616496

<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00616496>

Submitted on 22 Aug 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Equations hyperboliques non-linéaires

Jean-François COULOMBEL

23 septembre 2009

Quelques mots en guise d'introduction Le but de ces notes est de présenter différents résultats sur l'existence et les propriétés des solutions d'équations hyperboliques scalaires non-linéaires. Dans un premier temps, on aborde les solutions régulières et on montre un critère d'explosion en temps fini. Puis on aborde les solutions faibles et la notion cruciale de solution entropique. La résolution du problème de Riemann est la pierre angulaire sur laquelle est basée le schéma de Glimm qui constitue le point culminant de ces notes. Le cas des équations scalaires est techniquement beaucoup plus favorable que le cas des systèmes pour présenter l'analyse de Glimm. En se focalisant sur le cas scalaire, on essaie ainsi de familiariser le lecteur avec un grand nombre d'outils qui seront nécessaires en vue de l'étude ultérieure des systèmes hyperboliques. L'avantage est que les démonstrations ci-dessous font appel à des prérequis somme toute élémentaires : quelques notions de base de calcul et d'équations différentiels ainsi que la théorie de l'intégration (intégration par parties et changements de variables pour les fonctions d'une variable réelle, théorème de Fubini, lemme de Fatou, théorème de convergence dominée). L'analyse se corse un peu sur la fin et on doit faire appel à la notion de mesure produit, ainsi qu'à une version du théorème de Helly sur les fonctions à variations bornées. Ces notions sont rappelées au fur et à mesure du texte lorsqu'on y a recours. Par ailleurs, les fonctions à variations bornées jouant un rôle central dans cette théorie, on a rassemblé dans l'appendice A les résultats essentiels qui sont utilisés ici. Le texte est parsemé d'un certain nombre d'exercices qui peuvent être des illustrations directes des résultats présentés, en particulier des calculs explicites de solutions, ou encore des compléments. Certaines terminologies apparaissent en italique au fil du texte.

Ces notes sont basées dans une très large mesure sur les ouvrages d'Alberto Bressan (Oxford University Press, 2000) et de Denis Serre (Cambridge University Press, 1999) dans lesquels le lecteur trouvera une bibliographie complète ainsi qu'une étude des systèmes hyperboliques. Sans prétendre se substituer à ces ouvrages, le but que l'on se fixe ici est de décortiquer, dans le cas scalaire, tous les éléments des démonstrations en utilisant, autant que faire se peut, des arguments élémentaires quitte à ne pas considérer les hypothèses les plus générales. L'auteur remercie par avance tout lecteur qui voudra bien lui signaler d'éventuelles erreurs ou coquilles qui subsisteraient dans le texte.

On se donne, une fois pour toute, une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . On s'intéresse alors à la résolution de l'équation non-linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

On note $a(u) = f'(u)$. Ainsi a est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Dans le cas où f est linéaire, a est une application constante et on retrouve l'équation de transport. Dans tout ce qui suit, on supposera toujours que u_0 est une fonction bornée sur \mathbb{R} . On expliquera cette restriction un peu plus loin.

1 Solutions régulières, explosion en temps fini

1.1 Existence de solutions régulières

Comme dans l'étude de l'équation de transport, le premier problème que l'on se pose est la résolution de l'équation (1) lorsque la donnée initiale u_0 est régulière, c'est-à-dire de classe \mathcal{C}^1 au moins. Il est relativement naturel d'espérer pouvoir construire une solution u de classe \mathcal{C}^1 par rapport à ses deux variables (t, x) . La méthode pour construire une telle solution s'appelle la *méthode des caractéristiques*. Elle est basée sur le calcul suivant : supposons qu'il existe une solution u de (1) définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ pour un certain réel $T > 0$, avec u de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$. Autrement dit, supposons qu'on ait déjà résolu (1) et construit une solution régulière. La solution u vérifie :

$$\begin{aligned} \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (\partial_t u)(t, x) + (\partial_x (f \circ u))(t, x) &= 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $X(t)$ la solution de l'équation différentielle non-linéaire :

$$\begin{cases} X'(t) = a(u(t, X(t))), \\ X(0) = x_0. \end{cases} \quad (2)$$

Comme a et u sont de classe \mathcal{C}^1 par rapport à leurs arguments respectifs, l'existence de X sur un intervalle $[0, T_*]$, $T_* > 0$, découle du théorème de Cauchy-Lipschitz. A priori, il n'est pas exclu d'avoir $T_* < T$ car l'équation différentielle (2) est non-linéaire, et en principe T_* dépend de x_0 . La courbe $\{(t, X(t)), t \in [0, T_*]\}$ est appelée la *courbe caractéristique issue de x_0* (ou pour être tout-à-fait précis, issue de $(0, x_0)$). On calcule alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, X(t)) &= (\partial_t u)(t, X(t)) + X'(t) (\partial_x u)(t, X(t)) \\ &= (\partial_t u)(t, X(t)) + a(u(t, X(t))) (\partial_x u)(t, X(t)) \\ &= (\partial_t u)(t, X(t)) + (f'(u) \partial_x u)(t, X(t)) \\ &= [\partial_t u + \partial_x f(u)](t, X(t)) = 0. \end{aligned}$$

On en conclut que la fonction $(t \mapsto u(t, X(t)))$ est constante sur son intervalle de définition ; elle est donc égale à sa valeur en 0, c'est-à-dire $u_0(x_0)$. Si on reporte cette information dans (2), on s'aperçoit que X vérifie :

$$\begin{cases} X'(t) = a(u_0(x_0)), \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

et donc on obtient :

$$X(t) = x_0 + t a(u_0(x_0)). \quad (3)$$

La courbe caractéristique $\{(t, X(t))\}$ issue de x_0 est donc une ligne droite ! Par ailleurs, X est définie sur tout l'intervalle $[0, T]$ et pas uniquement sur un sous-intervalle $[0, T_*]$. Contrairement au cas de l'équation de transport, la pente de la caractéristique issue de x_0 dépend ici de la donnée initiale u_0 . Autrement dit, pour deux données initiales différentes, les courbes caractéristiques ne seront pas identiques.

En utilisant l'expression explicite (3) de $X(t)$, et le fait que la fonction u est constante le long des courbes caractéristiques, on obtient :

$$\forall (t, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad u(t, x_0 + t a(u_0(x_0))) = u_0(x_0). \quad (4)$$

La problème est alors le suivant : étant donné un point $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, peut-on trouver un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que (t, x) se situe sur la courbe caractéristique issue de x_0 ? Si on peut trouver un tel x_0 , alors $u(t, x) = u_0(x_0)$ et on obtient ainsi la valeur de u en (t, x) . Il s'agit donc de

savoir si l'on peut *remonter* les caractéristiques, c'est-à-dire trouver le *pied* de la caractéristique passant par x au temps t .

Le théorème suivant montre qu'il est effectivement possible de remonter les caractéristiques, et de construire une solution de (1) :

Théorème 1 (Solutions régulières locales en temps). *Soit u_0 de classe \mathcal{C}^1 bornée, à dérivée bornée. Alors il existe un réel $T > 0$ et il existe une unique solution u de (1) de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.*

De plus, tout réel $T > 0$ vérifiant la condition (5) ci-dessous convient.

Avant de démontrer le théorème 1, on commence par établir le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit u_0 de classe \mathcal{C}^1 bornée, à dérivée bornée. Soit $T > 0$ un réel vérifiant :*

$$1 + T \inf_{y \in \mathbb{R}} (a \circ u_0)'(y) > 0. \quad (5)$$

Alors l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : [0, T] \times \mathbb{R} &\longrightarrow [0, T] \times \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto (t, x + t a(u_0(x))), \end{aligned}$$

est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, T] \times \mathbb{R}$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Démonstration du lemme 1. Remarquons tout d'abord que $(a \circ u_0)' = a'(u_0)u_0'$ est bornée comme produit de deux fonctions bornées. Il existe donc bien un réel $T > 0$ vérifiant (5). Dans le cas où la donnée initiale n'est pas bornée, ou bien si sa dérivée n'est pas bornée, l'existence d'un $T > 0$ vérifiant (5) n'est pas automatique. Cela explique pourquoi on s'est restreint dès le début à des données initiales bornées.

Comme a et u_0 sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , il est clair que l'application Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, l'application affine $(t \mapsto 1 + t \inf_{y \in \mathbb{R}} (a \circ u_0)'(y))$ prend des valeurs strictement positives en 0 et en T . Elle prend donc des valeurs strictement positives sur tout le segment $[0, T]$. L'inégalité (5) a donc lieu si l'on remplace T par n'importe quel $t \in [0, T]$.

Pour $t \in [0, T]$ fixé, notons ϕ_t l'application de classe \mathcal{C}^1 :

$$\begin{aligned} \phi_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + t a(u_0(x)). \end{aligned}$$

On calcule

$$\phi_t'(x) = 1 + t (a \circ u_0)'(x) \geq 1 + t \inf_{y \in \mathbb{R}} (a \circ u_0)'(y) > 0.$$

Ainsi ϕ_t' est minorée par une constante strictement positive, donc ϕ_t est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On vérifie maintenant que l'application Φ est injective. En effet, supposons que $\Phi(t_1, x_1) = \Phi(t_2, x_2)$, c'est-à-dire :

$$(t_1, x_1 + t_1 a(u_0(x_1))) = (t_2, x_2 + t_2 a(u_0(x_2))).$$

On obtient directement $t_1 = t_2$, et en notant simplement t cette valeur commune, on trouve $\phi_t(x_1) = \phi_t(x_2)$. Comme ϕ_t est injective, on a $x_1 = x_2$, et Φ est injective.

Vérifions la surjectivité de Φ . Soit $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$; on cherche deux réels $s \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi(s, x) = (t, y)$. Bien sûr, on voit tout de suite qu'il faut prendre $s = t$, et que x doit satisfaire $\phi_t(x) = y$. Comme ϕ_t est une bijection de \mathbb{R} dans lui-même, on a $\Phi(t, \phi_t^{-1}(y)) = (t, y)$, et donc Φ est surjective.

Pour finir, on calcule la matrice jacobienne de Φ au point $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$:

$$D\Phi(t, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a(u_0(x)) & 1 + t (a \circ u_0)'(x) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice ne s'annule pas, et cela permet de conclure (grâce à l'injectivité de Φ) que Φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, T] \times \mathbb{R}$ sur son image, dont on a montré qu'elle était exactement $[0, T] \times \mathbb{R}$. On a ainsi démontré le lemme 1. \square

Le lemme 1 assure que sur un intervalle de temps $[0, T]$ suffisamment court, les caractéristiques ne se croisent pas (Φ est injective) et que de plus on peut remonter les caractéristiques (Φ est surjective). Passons maintenant à la démonstration du théorème 1.

Démonstration du théorème 1. Soit $T > 0$ un réel vérifiant la condition (5), et soit Φ le \mathcal{C}^1 -difféomorphisme défini au lemme 1. Pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, on note :

$$\Phi^{-1}(t, x) = (t, \varphi(t, x)),$$

et on définit une fonction u par :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = u_0(\varphi(t, x)). \quad (6)$$

Par rapport au calcul développé au début de ce paragraphe, il faut comprendre que $\varphi(t, x)$ n'est rien d'autre que le pied de la caractéristique passant par x au temps t , et que (6) est une réécriture de la relation (4) traduisant le fait qu'une solution \mathcal{C}^1 de (1) est nécessairement constante le long des courbes caractéristiques. La formule (6) constitue donc la seule possibilité pour définir une fonction u qui puisse être une solution \mathcal{C}^1 de (1).

Comme Φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, l'application φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, et donc u est également de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, on a $\Phi(0, x) = (0, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\varphi(0, x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $u(0, x) = u_0(x)$.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que u est solution de l'équation aux dérivées partielles. Pour cela, on part de la définition (6), et on calcule :

$$\begin{aligned} (\partial_t u)(t, x) + (\partial_x f(u))(t, x) &= (\partial_t u + a(u) \partial_x u)(t, x) \\ &= [(u'_0 \circ \varphi) (\partial_t \varphi + a \circ u_0 \circ \varphi \partial_x \varphi)](t, x). \end{aligned} \quad (7)$$

Par définition de φ , on a $\Phi(t, \varphi(t, x)) = (t, x)$, c'est-à-dire :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad \varphi(t, x) + t(a \circ u_0)(\varphi(t, x)) = x.$$

En dérivant successivement par rapport à t puis par rapport à x , et en rappelant que T vérifie (5), il vient :

$$\partial_t \varphi(t, x) = \frac{-a \circ u_0 \circ \varphi(t, x)}{1 + t(a \circ u_0)'(\varphi(t, x))}, \quad \partial_x \varphi(t, x) = \frac{1}{1 + t(a \circ u_0)'(\varphi(t, x))}.$$

On reporte ces expressions de $\partial_t \varphi$ et $\partial_x \varphi$ dans (7), et on trouve finalement :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (\partial_t u)(t, x) + (\partial_x f(u))(t, x) = 0.$$

La formule (6) définit donc bien une solution \mathcal{C}^1 de (1).

Pour vérifier que la solution est unique, on considère v une autre solution de classe \mathcal{C}^1 sur le même ensemble de définition $[0, T] \times \mathbb{R}$, avec la même donnée initiale u_0 . On reprend alors les calculs développés au début de ce paragraphe : à partir de tout point x_0 , on définit la courbe caractéristique (associée à la solution v) issue de x_0 . Par le calcul précédent, on se rend compte que cette courbe est une droite de pente $a(u_0(x_0))$, et que la solution v est constante le long de cette courbe. Donc u et v coïncident sur toutes les caractéristiques. Comme les caractéristiques recouvrent $[0, T] \times \mathbb{R}$, u et v sont égales. \square

D'après le théorème 1, on sait donc résoudre l'équation (1) sur un intervalle de temps $[0, T]$, pour $T > 0$ suffisamment petit. On dit qu'on a une solution *locale en temps*. Par construction, voir (6), la solution vérifie le principe du maximum :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad \inf u_0 \leq u(t, x) \leq \sup u_0.$$

Par ailleurs, si les données sont régulières alors la solution l'est aussi. Plus précisément, si en plus des hypothèses du théorème 1, on suppose également que f est de classe \mathcal{C}^{p+1} et u_0 de classe \mathcal{C}^p , avec $p \geq 1$, alors u est de classe \mathcal{C}^p . (On vérifie en effet dans ce cas que Φ est un \mathcal{C}^p -difféomorphisme¹.)

Une fois que l'on a construit une solution locale en temps, on peut se demander (comme dans l'étude des équations différentielles ordinaires) s'il existe une solution *globale* en temps, c'est-à-dire s'il existe une solution u de (1) qui soit de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Cette problématique fait l'objet du paragraphe suivant. Terminons ce paragraphe par quelques exercices.

Exercice 1. *En supposant $f(u) = u^2/2$, et donc $a(u) = u$, trouver une fonction u_0 de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , bornée, mais dont la dérivée n'est pas bornée, et telle que pour tout $T > 0$, la fonction Φ définie au lemme 1 ne soit pas un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.*

En supposant $f(u) = \exp(u)$, trouver une fonction u_0 de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , non bornée mais dont la dérivée est bornée, et telle que pour tout $T > 0$ la fonction Φ définie au lemme 1 ne soit pas un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Exercice 2. *Sous les hypothèses du théorème 1, montrer que la solution u vérifie que pour tout $t \in [0, T]$, l'application $(x \mapsto u(t, x))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , bornée, et de dérivée bornée.*

1.2 Existence globale, explosion en temps fini

Concernant l'existence d'une solution globale en temps, un premier cas favorable est le suivant :

Proposition 1 (Solutions régulières globales en temps). *Soit u_0 de classe \mathcal{C}^1 bornée, à dérivée bornée. Supposons de plus que $(a \circ u_0)' \geq 0$. Alors il existe une unique solution u de (1) de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.*

Démonstration de la proposition 1. En supposant vérifiée la condition $(a \circ u_0)' \geq 0$, on se rend compte que n'importe quel réel $T > 0$ vérifie la condition (5). On peut même montrer dans ce cas que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : [0, +\infty[\times \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto (t, x + t a(u_0(x))), \end{aligned}$$

est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ dans lui-même². En suivant la démonstration du théorème 1, on peut définir une solution u sur tout $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Une telle solution est unique car la restriction à tout ensemble $[0, T] \times \mathbb{R}$ est unique en vertu du théorème 1. \square

En fait, la condition $(a \circ u_0)' \geq 0$, qui est suffisante pour avoir l'existence d'une solution régulière globale, est également nécessaire. Il s'agit donc du seul cas d'existence d'une solution régulière globale en temps, comme on le montre dans le théorème suivant :

Théorème 2 (Explosion en temps fini). *Supposons f de classe \mathcal{C}^3 et u_0 de classe \mathcal{C}^2 , bornée et à dérivée bornée. Supposons qu'il existe un réel \underline{x} tel que $(a \circ u_0)'(\underline{x}) < 0$, et posons :*

$$T^* = \frac{-1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} (a \circ u_0)'(y)} > 0.$$

¹Exercice : montrer ce résultat.

²Exercice : montrer ce résultat en adaptant la démonstration du lemme 1.

Alors il existe une unique solution u de (1) de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T^*[\times\mathbb{R}$, et T^* est maximal pour cette propriété : si v est une solution de (1) de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T_*[\times\mathbb{R}$, $T_* > 0$, alors on a $T_* \leq T^*$ et $v = u$ sur $[0, T_*[\times\mathbb{R}$.

De plus, on a :

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \sup_{y \in \mathbb{R}} |\partial_x u(t, y)| = +\infty. \quad (8)$$

Démonstration du théorème 2. Pour l'existence et l'unicité de la solution u sur $[0, T^*[\times\mathbb{R}$, il suffit de procéder comme dans l'étude des équations différentielles ordinaires et de "recoller" les solutions fournies par le théorème 1 (la régularité \mathcal{C}^2 provient de la remarque faite après le théorème 1). En effet, d'après la définition de T^* , on a :

$$\forall T \in [0, T^*[, \quad 1 + T \inf_{y \in \mathbb{R}} (a \circ u_0)'(y) > 0,$$

donc on sait qu'il existe une unique solution u de (1) de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, quelque soit $T \in [0, T^*[$. On recolle alors les solutions définies sur $[0, (1 - 2^{-n})T^*] \times \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Supposons maintenant qu'il existe un réel $T_* > 0$ et une solution v de (1) de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T_*[\times\mathbb{R}$, avec la même donnée initiale u_0 . On définit une fonction w sur $[0, T_*[\times\mathbb{R}$ par :

$$\forall (t, x) \in [0, T_*[\times\mathbb{R}, \quad w(t, x) = a'(v(t, x)) (\partial_x v)(t, x). \quad (9)$$

Comme v est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T_*[\times\mathbb{R}$, et a est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , w est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T_*[\times\mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned} \partial_t w + a(v) \partial_x w &= a'(v) [\partial_t \partial_x v + a(v) \partial_x \partial_x v] + a''(v) [\partial_t v + a(v) \partial_x v] \partial_x v \\ &= a'(v) [\partial_t \partial_x v + a(v) \partial_x \partial_x v] \\ &= a'(v) [\partial_x (\partial_t v + a(v) \partial_x v) - (\partial_x a(v)) \partial_x v] \\ &= - [a'(v) \partial_x v]^2 = -w^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $X(t) = x_0 + t a(u_0(x_0))$ l'équation de la caractéristique issue de x_0 . La solution v est constante le long de cette caractéristique. De plus, en utilisant l'égalité (10), on trouve :

$$\frac{d}{dt} w(t, X(t)) = -w(t, X(t))^2, \quad w(0, X(0)) = (a \circ u_0)'(x_0). \quad (11)$$

L'équation (11) est une équation différentielle de Ricatti qui s'intègre explicitement :

$$\forall t \in [0, T_*[, \quad w(t, X(t)) = \frac{w(0, X(0))}{1 + t w(0, X(0))} = \frac{(a \circ u_0)'(x_0)}{1 + t (a \circ u_0)'(x_0)}. \quad (12)$$

En particulier, comme l'application $(t \mapsto w(t, X(t)))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[0, T_*[$, le dénominateur ne peut pas s'annuler, donc il garde un signe constant. On en déduit :

$$\forall t \in [0, T_*[, \quad 1 + t (a \circ u_0)'(x_0) > 0.$$

En faisant tendre t vers T_* , puis en prenant l'infimum sur tous les $x_0 \in \mathbb{R}$, il vient :

$$1 + T_* \inf_{y \in \mathbb{R}} (a \circ u_0)'(y) \geq 0.$$

D'après la définition de T^* , on trouve donc :

$$1 - \frac{T_*}{T^*} \geq 0,$$

c'est-à-dire $T_* \leq T^*$. On a donc bien montré $T_* \leq T^*$, et dans ce cas, le théorème 1 montre que u et v coïncident sur $[0, T_*[\times\mathbb{R}$.

Considérons notamment le cas particulier $T_* = T^*$, et $v = u$. En utilisant la définition (9) de w , ainsi que l'expression (12), on a :

$$\forall t \in [0, T^*[, \quad a'(u(t, X(t))) (\partial_x u)(t, X(t)) = \frac{(a \circ u_0)'(x_0)}{1 + t(a \circ u_0)'(x_0)}. \quad (13)$$

Comme la solution u est constante le long de la caractéristique issue de x_0 , on a $a'(u(t, X(t))) = a'(u_0(x_0))$. La fonction u_0 étant bornée, on peut donc majorer :

$$|a'(u_0(x_0)) (\partial_x u)(t, X(t))| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |a'(u_0(y))| \sup_{y \in \mathbb{R}} |\partial_x u(t, y)|. \quad (14)$$

On va appliquer cette majoration dans (13), en choisissant le point x_0 de manière appropriée. Plus précisément, on se donne une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $((a \circ u_0)'(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\inf_{\mathbb{R}} (a \circ u_0)' = -1/T^*$. On considère alors l'égalité (13) au point $x_0 = y_n$, et on utilise la majoration (14). On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T^*[, \quad \frac{|(a \circ u_0)'(y_n)|}{|1 + t(a \circ u_0)'(y_n)|} \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |a'(u_0(y))| \sup_{y \in \mathbb{R}} |\partial_x u(t, y)|.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve :

$$\forall t \in [0, T^*[, \quad \frac{1}{T^* - t} \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |a'(u_0(y))| \sup_{y \in \mathbb{R}} |\partial_x u(t, y)|. \quad (15)$$

La quantité $\sup_{y \in \mathbb{R}} |a'(u_0(y))|$ étant nécessairement non-nulle (sinon l'inégalité (15) ne pourrait avoir lieu), on a finalement obtenu :

$$\forall t \in [0, T^*[, \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} |\partial_x u(t, y)| \geq \frac{c}{T^* - t},$$

où c est une constante strictement positive. En particulier, cela montre (8), et conclut la démonstration du théorème 2. \square

Exercice 3. On suppose f de classe \mathcal{C}^3 . Montrer que si f n'est pas une application affine, alors il existe une donnée initiale u_0 de classe \mathcal{C}^2 , bornée et de dérivée bornée, vérifiant :

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} (a \circ u_0)'(y) < 0.$$

Le cadre des solutions régulières n'est donc pas adapté (sauf dans le cas où f est linéaire) pour résoudre l'équation (1) globalement en temps. Dans le cadre du théorème 2, le temps T^* est appelé le *temps d'explosion* de la solution u . Remarquons que la solution u est bornée sur $[0, T^*[\times \mathbb{R}$, car elle vérifie le principe du maximum sur tout $[0, T] \times \mathbb{R}$ avec $T < T^*$. Elle vérifie donc le principe du maximum sur $[0, T^*[\times \mathbb{R}$:

$$\forall (t, x) \in [0, T^*[\times \mathbb{R}, \quad \inf u_0 \leq u(t, x) \leq \sup u_0.$$

En revanche, la dérivée partielle de u par rapport à x ne reste pas bornée lorsque l'on s'approche du temps d'explosion. On peut également montrer que la dérivée partielle de u par rapport à t n'est pas bornée lorsque l'on s'approche du temps d'explosion.

On représente ci-dessous le phénomène d'explosion en temps fini dans le cas $f(u) = u^2/2$, qui porte le nom d'*équation de Burgers*. La donnée initiale est en forme de "cloche". (Vérifier qu'une telle donnée initiale satisfait les hypothèses du théorème 2.)

La figure 1 montre bien que la solution u reste bornée, tandis que sa dérivée par rapport à x explose. Si l'on veut prolonger la solution u au-delà du temps T^* , il faut nécessairement autoriser à u d'être discontinue. Dans ce cas, u ne peut être solution de l'équation (1) que dans un sens faible (c'est-à-dire au sens des distributions), et plus au sens classique.

L'exercice suivant illustre le lien (important) entre l'explosion en temps fini et le comportement des courbes caractéristiques :

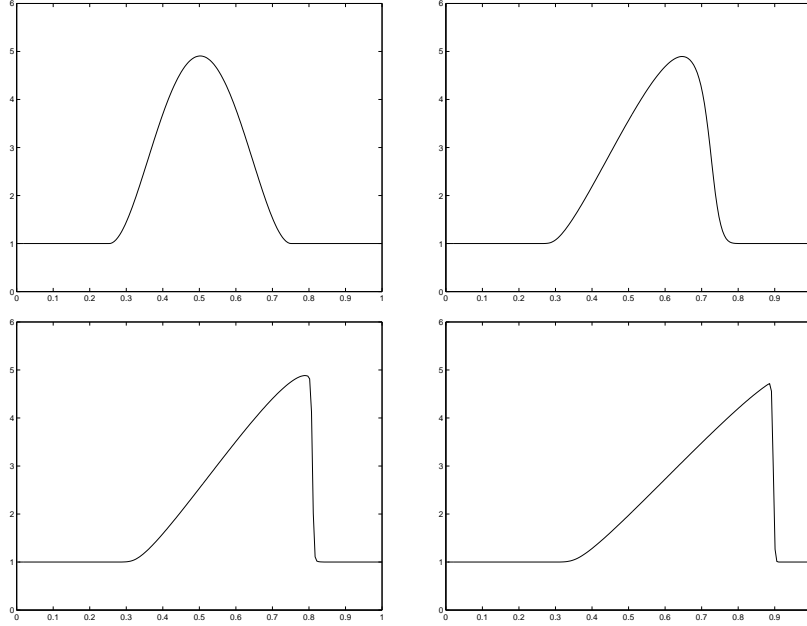


FIG. 1 – Explosion d’une solution régulière de l’équation de Burgers. La solution est représentée à quatre instants successifs.

Exercice 4. Supposons u_0 de classe \mathcal{C}^1 bornée et de dérivée bornée. Soit alors $X(t) = x + t a(u_0(x))$ l’équation de la caractéristique issue de x . Montrer que $(a \circ u_0)' \geq 0$ si et seulement si pour tous $x_1 \neq x_2$, les courbes caractéristiques issues de x_1 et x_2 ne se coupent pas dans le demi-plan $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

En déduire que $\inf_{\mathbb{R}} (a \circ u_0)' < 0$ si et seulement si on peut trouver $x_1 \neq x_2$ tels que les courbes caractéristiques issues de x_1 et x_2 se coupent dans le demi-plan ouvert $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Faire un dessin des courbes caractéristiques dans les deux situations.

2 Solutions faibles, premières propriétés

On reprend la démarche adoptée dans le cas de l’équation de transport. Le but est de définir une notion de solution faible qui autorise à une telle solution d’être peu régulière (pas nécessairement de classe \mathcal{C}^1), et telle que toute solution régulière soit solution faible. Supposons que u soit une solution régulière de (1) sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ à support compact. On calcule :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \varphi \, dt \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} (\partial_t u) \varphi \, dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_x f(u)) \varphi \, dx \right) dt \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} u (\partial_t \varphi) \, dt \right) dx - \int_{\mathbb{R}} u(0, x) \varphi(0, x) \, dx - \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) (\partial_x \varphi) \, dx \right) dt \\
 &= - \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx .
 \end{aligned}$$

On a donc obtenu la relation :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx = 0, \tag{16}$$

pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On est donc assez naturellement amené à définir la notion de solution faible comme suit :

Définition 1 (Solution faible). Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Une fonction u définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} sera dite solution faible de (1) si :

- $u \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, et $f(u) \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$,
- pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 , et à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a la relation :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx = 0. \quad (17)$$

Exercice 5. Supposons $f(u) = u^2/2$. Trouver une fonction $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $f(v) \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

L'exercice 5 montre que dans la définition d'une solution faible, la vérification de $f(u) \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ n'est pas forcément immédiate. L'appartenance de $f(u)$ à $L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ est par ailleurs nécessaire pour donner un sens à l'une des intégrales intervenant dans (17).

Dans toute la suite de ces notes, on ne rencontrera que des solutions faibles u qui seront bornées sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Les fonctions u et $f(u)$ seront donc localement intégrables car elles seront toutes les deux bornées.

Exercice 6. Vérifier que si u est une solution de classe \mathcal{C}^1 de (1) sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, alors u est solution faible de (1).

En autorisant aux solutions d'être non dérivables et même éventuellement discontinues, on espère pouvoir résoudre (1) globalement en temps. On a vu plus haut que trouver une solution régulière globale en temps est en général impossible. Néanmoins, la notion de solution faible définie plus haut présente le désavantage d'autoriser beaucoup (trop) de solutions pour une même donnée initiale :

Proposition 2 (Non-unicité des solutions faibles). Soit $f(u) = u^2/2$ et soit $u_0 = 0$. Pour $p > 0$, on définit :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad v_p(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -pt, \\ -2p & \text{si } -pt < x \leq 0, \\ 2p & \text{si } 0 < x \leq pt, \\ 0 & \text{si } x > pt. \end{cases}$$

Pour $t = 0$, on pose $v_p(t, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors v_p est une solution faible de (1).

Démonstration de la proposition 2. La fonction v_p est mesurable et bornée sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ (sa norme L^∞ vaut $2p$). On en déduit que v_p et $f(v_p)$ sont localement intégrables sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Soit alors φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On veut montrer que (17) a lieu avec $u_0 = 0$ et $f(v_p) = v_p^2/2$. Pour cela, on commence par calculer :

$$\begin{aligned} \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \frac{1}{2} v_p^2 \partial_x \varphi \, dt \, dx &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} v_p(t, x)^2 (\partial_x \varphi)(t, x) \, dx \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-pt}^{pt} 2p^2 (\partial_x \varphi)(t, x) \, dx \right) dt \\ &= 2p^2 \int_0^{+\infty} [\varphi(t, pt) - \varphi(t, -pt)] \, dt. \end{aligned} \quad (18)$$

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} v_p \partial_t \varphi \, dt \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} v_p(t, x) (\partial_t \varphi)(t, x) \, dt \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} v_p(t, x) (\partial_t \varphi)(t, x) \, dt \right) dx + \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{+\infty} v_p(t, x) (\partial_t \varphi)(t, x) \, dt \right) dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Si $x > 0$, on a $v_p(t, x) = 0$ pour $t \in]0, x/p[$ et $v_p(t, x) = 2p$ pour $t > x/p$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} v_p(t, x) (\partial_t \varphi)(t, x) dt \right) dx &= \int_0^{+\infty} 2p \left(\int_{x/p}^{+\infty} (\partial_t \varphi)(t, x) dt \right) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} 2p \varphi\left(\frac{x}{p}, x\right) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

De même, si $x < 0$, on a $v_p(t, x) = 0$ pour $t \in]0, -x/p[$ et $v_p(t, x) = -2p$ pour $t > -x/p$, donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{+\infty} v_p(t, x) (\partial_t \varphi)(t, x) dt \right) dx &= \int_{-\infty}^0 (-2p) \left(\int_{-x/p}^{+\infty} (\partial_t \varphi)(t, x) dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 2p \varphi\left(\frac{-x}{p}, x\right) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

En reportant (20) et (21) dans (19), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} v_p \partial_t \varphi dt dx &= - \int_0^{+\infty} 2p \varphi\left(\frac{x}{p}, x\right) dx + \int_{-\infty}^0 2p \varphi\left(\frac{-x}{p}, x\right) dx \\ &= -2p^2 \int_0^{+\infty} \varphi(\tau, p\tau) d\tau + 2p^2 \int_0^{+\infty} \varphi(\tau, -p\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

En combinant (18) et (22), on trouve :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} v_p \partial_t \varphi + \frac{1}{2} v_p^2 \partial_x \varphi dt dx = 0,$$

ce qui montre que v_p est une solution faible, au sens de la définition 1, de :

$$\begin{cases} \partial_t v_p + \partial_x \left(\frac{v_p^2}{2} \right) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_p(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

□

Pour une même donnée initiale, on arrive à construire une infinité (non-dénombrable!) de solutions faibles. Le constat est alors le suivant : en se restreignant aux solutions régulières il n'existe pas toujours de solutions globales en temps de (1), mais si l'on considère des solutions faibles (au sens de la définition 1) il n'y a pas unicité des solutions. Cependant, si l'on cherche à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

on voit facilement que $u \equiv 0$ est une solution (régulière!) globale en temps, et que cette solution semble un peu plus naturelle que les solutions v_p données par la proposition 2. En particulier, on note que ces solutions v_p ne vérifient pas le principe du maximum car v_p prend des valeurs strictement positives aussi bien que des valeurs strictement négatives, tandis que la donnée initiale est nulle. Dans le paragraphe suivant, nous allons introduire un critère d'*admissibilité* des solutions qui sera tel que les v_p seront des solutions déclarées *inadmissibles*.

3 Notion de solution entropique

Le principe général qui conduit au critère d'admissibilité est le suivant : les “bonnes” solutions de (1), autrement dit les solutions qui sont *physiquement admissibles*, sont limites quand ε tend vers 0^+ , de solutions de l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_{xx} u, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (23)$$

où, par rapport à (1), on a rajouté la dérivée du second ordre $\partial_{xx} u$ pondéré par un petit coefficient positif ε . Si pour tout $\varepsilon > 0$ on note u^ε la solution régulière de (23), alors une solution u de (1) sera *admissible* si u^ε tend vers u (dans un certain sens...). Bien entendu, tant que l'on ne précise pas en quel sens u^ε doit tendre vers u , on ne définit rien du tout ; on énonce simplement un principe général et pas une définition mathématique. Remarquons également que ce principe repose sur le fait qu'on sache effectivement résoudre (23) et que cette équation admette une solution régulière, définie globalement en temps (ce qui est possible, mais requiert un peu de travail).

Restons encore un peu dans le domaine du “non-rigoureux”, et supposons que u^ε est une solution régulière de (23) qui tend, quand ε tend vers 0^+ , vers une fonction u . On ne précisera pas en quel sens u^ε tend vers u , car on reste pour l'instant dans le domaine du “non-rigoureux”. Soit alors $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction convexe, et soit $q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une primitive de $\eta' a$. On rappelle que a désigne la dérivée de f , et que a est de classe \mathcal{C}^1 . On calcule :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta(u^\varepsilon) &= \eta'(u^\varepsilon) \partial_t u^\varepsilon = \eta'(u^\varepsilon) (-\partial_x f(u^\varepsilon) + \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon) \\ &= -(\eta'(u^\varepsilon) a(u^\varepsilon)) \partial_x u^\varepsilon + \varepsilon \eta'(u^\varepsilon) \partial_{xx} u^\varepsilon \\ &= -q'(u^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon + \varepsilon \partial_{xx} \eta(u^\varepsilon) - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon) (\partial_x u^\varepsilon)^2 \\ &= -\partial_x q(u^\varepsilon) + \varepsilon \partial_{xx} \eta(u^\varepsilon) - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon) (\partial_x u^\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Comme η est supposée convexe, on a $\eta'' \geq 0$, et on en déduit l'inégalité :

$$-\partial_t \eta(u^\varepsilon) - \partial_x q(u^\varepsilon) + \varepsilon \partial_{xx} \eta(u^\varepsilon) \geq 0.$$

Soit alors φ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, à support compact et positive. On multiplie l'inégalité précédente par φ (ce qui ne change pas le signe de l'inégalité), puis on intègre sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$:

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \left(-\partial_t \eta(u^\varepsilon) - \partial_x q(u^\varepsilon) + \varepsilon \partial_{xx} \eta(u^\varepsilon) \right) \varphi \, dt \, dx \geq 0.$$

En intégrant formellement par parties, on obtient :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u^\varepsilon) \partial_t \varphi + q(u^\varepsilon) \partial_x \varphi + \varepsilon \eta(u^\varepsilon) \partial_{xx} \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq 0.$$

Maintenant, on fait tendre ε vers 0^+ , en gardant à l'esprit que u^ε tend vers une limite u . Si on passe à la limite sous les intégrales sans rien justifier (mais nous sommes provisoirement dans le domaine du “non-rigoureux”), on obtient finalement :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq 0. \quad (24)$$

Remarquons que cette dernière inégalité ne fait plus intervenir que la limite u , ainsi que les fonctions η , q et φ . On remarque également que l'inégalité (24) garde un sens pour φ seulement de classe \mathcal{C}^1 , et pas de classe \mathcal{C}^2 comme nous l'avons supposé plus haut. Si l'on considère que les “bonnes” solutions de (1) sont limites, quand ε tend vers 0^+ , de solutions de (23), les “bonnes” solutions de (1) doivent nécessairement vérifier (24). Nous sommes donc conduits à la définition suivante :

Définition 2 (Solution entropique). Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Une fonction u définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} sera dite solution entropique de (1) si u est une solution faible de (1), et si pour toute fonction $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ convexe, en notant $q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une primitive de $\eta' a$, on a :

- $\eta(u) \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, $q(u) \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$,
- pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive, on a la relation :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq 0. \quad (25)$$

Contrairement à la discussion précédente, il s'agit ici d'une définition rigoureuse ! Nous montrerons plus loin que la notion de solution entropique est adaptée à la résolution du problème de Cauchy (1). Plus précisément, nous verrons que pour une large classe de données initiales, il existe une et une seule solution entropique de (1). Dans l'approche que nous suivrons, il n'y aura plus aucun lien avec l'équation (23). La seule "trace" qui reste de l'équation (23) est l'inégalité (25). Il est donc possible, à partir de maintenant, d'oublier totalement la discussion qui précède et de ne retenir que la définition 2.

La terminologie *entropique* provient de la dynamique des gaz où les solutions physiquement admissibles doivent satisfaire le second principe de la thermodynamique. L'étude de l'équation (1) s'étant développée parallèlement à l'étude du système de la dynamique des gaz, une partie du vocabulaire de la thermodynamique a été étendue à l'étude de (1). En particulier, nous dirons qu'une fonction $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ convexe est une *entropie* pour (1). Si q est une primitive de $\eta' a$, nous dirons que q est le *flux* associé à l'entropie η . Nous dirons également que (η, q) forme un *couple entropie-flux*. En particulier, la fonction identité est une application convexe sur \mathbb{R} , et (Id, f) est un couple entropie-flux, de même que $(-Id, -f)$.

Bien évidemment, il n'existe pas une seule primitive de $\eta' a$, mais la notion de solution entropique ne dépend pas de la primitive choisie :

Exercice 7. Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, et soit u une fonction mesurable de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ convexe, et soient q_1, q_2 deux primitives de $\eta' a$. On suppose que $\eta(u) \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$. Montrer que $q_1(u) \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ si et seulement si $q_2(u) \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$.

Soit φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive. Montrer que :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q_1(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq 0,$$

si et seulement si :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q_2(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq 0.$$

Revenons maintenant aux solutions faibles de la proposition 2 :

Exercice 8. Soit $p > 0$, et soit v_p la solution faible du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

définie à la proposition 2. En considérant l'entropie $\eta(u) = u^2/2$, dont on calculera le flux correspondant, montrer que v_p n'est pas une solution entropique de l'équation ci-dessus.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la résolution de l'équation (1) pour des données initiales non-régulières (c'est-à-dire pouvant présenter des discontinuités). Le but que l'on se fixe est de montrer que pour des données initiales u_0 convenables (dans un sens à préciser plus tard),

il existe une et une seule solution entropique de (1). Pour cela, nous commencerons par résoudre (1) dans le cas d'une donnée initiale "en escaliers". Il s'agit de la donnée initiale discontinue la plus simple possible. Ce problème porte le nom de *problème de Riemann*. Nous traiterons ensuite le cas de données initiales plus générales, dans l'espace des fonctions à variations bornées $BV(\mathbb{R})$, par un procédé d'approximation utilisant la résolution du problème de Riemann.

4 Résolution du problème de Riemann

Le problème de Riemann est la résolution de (1) dans le cas où la donnée initiale u_0 est de la forme :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq 0, \\ u_d, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (26)$$

4.1 Autosimilarité

Une remarque importante est que les données initiales (26) sont invariantes par dilatation : pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u_0(\alpha x) = u_0(x)$. Par ailleurs si $\alpha > 0$, et si u est une solution entropique de (1) avec la donnée initiale u_0 , alors on peut montrer que l'application :

$$w_\alpha : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \longmapsto u(\alpha t, \alpha x),$$

est une solution entropique de (1) avec la donnée initiale $(x \mapsto u_0(\alpha x))^3$. Comme les fonctions $u_0(\alpha \cdot)$ et u_0 coïncident, si (1) admet au plus une solution entropique pour chaque donnée initiale, on doit avoir $w_\alpha = u$, c'est-à-dire $u(\alpha t, \alpha x) = u(t, x)$, et ceci pour tout $\alpha > 0$. On obtient alors :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = u\left(1, \frac{x}{t}\right),$$

donc u ne dépend que de la seule variable x/t . Il est donc naturel de chercher une solution entropique de (1) ne dépendant que de la variable *autosimilaire* x/t , c'est-à-dire $u(t, x) = v(x/t)$. En un point ξ où v est dérivable, on doit avoir :

$$v'(\xi) (\xi - a \circ v(\xi)) = 0.$$

Autrement dit, on a soit $v'(\xi) = 0$, soit $a \circ v(\xi) = \xi$.

4.2 Ondes de choc

On introduit la terminologie suivante :

Définition 3 (Onde de choc). *Une onde de choc est une solution entropique de (1) de la forme :*

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq \sigma t, \\ u_d, & \text{si } x > \sigma t, \end{cases}$$

où $u_g \neq u_d$, et où la donnée initiale est donnée par (26). On dit que σ est la vitesse du choc, u_g est l'état "à gauche" du choc, et u_d l'état "à droite" du choc.

Il arrive parfois que l'on parle d'*onde de choc entropique* pour insister sur le fait que l'onde de choc doit être une solution entropique de (1).

A priori, la valeur de u sur la droite $\{x = \sigma t\}$ n'est pas bien définie. On aurait aussi bien pu choisir de poser $u(t, x) = u_d$ sur la droite $x = \sigma t$. On adoptera la convention précédente

³Exercice : vérifier ce résultat.

de sorte que pour tout $t \geq 0$, la fonction $u(t, \cdot)$ est continue à gauche en tout point (voir dans l'appendice A les conventions similaires pour les fonctions à variations bornées).

Le but de ce paragraphe est de déterminer quand une donnée initiale (26) donne lieu à une onde de choc, et dans ce cas quelle est la vitesse σ du choc. Notons en effet que pour $u_g \neq u_d$, la vitesse σ est déterminée de manière unique, c'est-à-dire que si σ_1 et σ_2 sont deux réels tels que les fonctions :

$$u_1(t, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq \sigma_1 t, \\ u_d, & \text{si } x > \sigma_1 t, \end{cases} \quad \text{et} \quad u_2(t, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq \sigma_2 t, \\ u_d, & \text{si } x > \sigma_2 t, \end{cases}$$

sont égales presque-partout sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, alors $\sigma_1 = \sigma_2$.

Les ondes de choc sont entièrement caractérisées par le résultat suivant :

Théorème 3 (Caractérisation des ondes de choc). *Soient $u_g, u_d, \sigma \in \mathbb{R}$, avec $u_g \neq u_d$, et soit :*

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq \sigma t, \\ u_d, & \text{si } x > \sigma t. \end{cases} \quad (27)$$

Alors u est une onde de choc (au sens de la définition 3) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) $f(u_d) - f(u_g) = \sigma (u_d - u_g)$,
- ii) pour tout $\theta \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{cases} f(\theta u_d + (1 - \theta) u_g) \geq \theta f(u_d) + (1 - \theta) f(u_g), & \text{si } u_d > u_g, \\ f(\theta u_d + (1 - \theta) u_g) \leq \theta f(u_d) + (1 - \theta) f(u_g), & \text{si } u_d < u_g. \end{cases} \quad (28)$$

On peut remplacer, de manière équivalente, les conditions i) et ii) par la condition que pour tout couple entropie-flux (η, q) , on a l'inégalité :

$$\sigma (\eta(u_d) - \eta(u_g)) \geq q(u_d) - q(u_g).$$

La première condition $f(u_d) - f(u_g) = \sigma (u_d - u_g)$ s'appelle la *condition de Rankine-Hugoniot*. Elle caractérise entièrement le fait que la fonction (27) soit une solution faible⁴ de (1) pour la donnée initiale (26). La condition (28) porte le nom de *condition d'Oleinik*. Si u_g, u_d, σ vérifient la condition de Rankine-Hugoniot, la condition d'Oleinik caractérise entièrement le fait que (27) soit une solution entropique de (1).

Démonstration du théorème 3. Remarquons tout d'abord que u définie par (27) est mesurable, bornée sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, donc pour toute fonction g continue sur \mathbb{R} , on a $g(u) \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$. Soit (η, q) un couple entropie-flux. Soit également φ de classe \mathcal{C}^1 et à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On ne suppose pas pour l'instant que φ est positive. On va obtenir une expression la plus simple possible de la quantité suivante :

$$I = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi \, dt \, dx + \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} q(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx.$$

Calculons tout d'abord la première intégrale :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi \, dt \, dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{+\infty} \eta(u(t, x)) \partial_t \varphi(t, x) \, dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \eta(u(t, x)) \partial_t \varphi(t, x) \, dt \right) dx. \end{aligned}$$

⁴Sous-entendu, au sens de la définition 1.

Supposons momentanément $\sigma > 0$. Alors pour $x < 0$, on a $\eta(u(t, x)) = \eta(u_g)$ pour tout $t \geq 0$. Pour $x > 0$, on a $\eta(u(t, x)) = \eta(u_d)$ pour tout $t \in [0, x/\sigma[$ et $\eta(u(t, x)) = \eta(u_g)$ pour tout $t \geq x/\sigma$. On obtient alors (toujours en supposant $\sigma > 0$) :

$$\begin{aligned} I_1 &= (\eta(u_d) - \eta(u_g)) \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{\sigma}, x\right) dx - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx \\ &= \sigma (\eta(u_d) - \eta(u_g)) \int_0^{+\infty} \varphi(t, \sigma t) dt - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx. \end{aligned}$$

On obtient la même expression pour I_1 dans le cas $\sigma < 0$, et dans le cas encore plus facile $\sigma = 0$. De la même manière, on calcule :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} q(u) \partial_x \varphi dt dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} q(u(t, x)) \partial_x \varphi(t, x) dx \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\sigma t} q(u_g) \partial_x \varphi(t, x) dx + \int_{\sigma t}^{+\infty} q(u_d) \partial_x \varphi(t, x) dx \right) dt \\ &= (q(u_g) - q(u_d)) \int_0^{+\infty} \varphi(t, \sigma t) dt. \end{aligned}$$

En additionnant les deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx \\ &= \left(\sigma (\eta(u_d) - \eta(u_g)) - (q(u_d) - q(u_g)) \right) \int_0^{+\infty} \varphi(t, \sigma t) dt. \end{aligned} \quad (29)$$

En particulier, en choisissant le couple entropie-flux $(\eta, q) = (Id, f)$, u est une solution faible si et seulement si $I = 0$ pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ (voir la relation (17) dans la définition 1). Comme il existe des fonctions φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et telles que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t, \sigma t) dt$$

soit non-nulle⁵, la relation (29) montre que u est une solution faible si et seulement si la condition de Rankine-Hugoniot :

$$f(u_d) - f(u_g) = \sigma (u_d - u_g), \quad (30)$$

est vérifiée. La vitesse σ du choc est donc entièrement déterminée par les états à gauche et à droite du choc, et vaut le taux d'accroissement de f entre les états u_g et u_d . On supposera désormais que la relation (30) est vérifiée.

On revient à la relation (29) pour un couple entropie-flux (η, q) quelconque. On suppose maintenant que φ est une fonction positive. Alors u est une solution entropique (au sens de la définition 2) si et seulement si I est une quantité positive ou nulle indépendamment du choix de la fonction test φ (voir l'inégalité (25) dans la définition 2). En utilisant (29), on se rend compte que u est une solution entropique si et seulement si u_g, u_d, σ vérifient l'inégalité :

$$\sigma (\eta(u_d) - \eta(u_g)) \geq q(u_d) - q(u_g). \quad (31)$$

Observons que la relation (31) ne fait plus intervenir la fonction test φ . Pour finir la preuve du théorème 3, il nous suffit de montrer que la relation (31) est vérifiée pour tout couple entropie-flux (η, q) si et seulement si u_g et u_d vérifient la condition d'Oleinik (28). Observons également que l'inégalité (31) implique la relation de Rankine-Hugoniot (30) en choisissant comme couple entropie-flux (Id, f) puis $(-Id, -f)$.

⁵Exercice : construire un exemple d'une telle fonction φ .

Supposons dans un premier temps que u_g, u_d vérifient (31) pour tout couple entropie-flux (η, q) et montrons que la propriété (28) est vérifiée. En particulier, u_g, u_d, σ vérifient la relation de Rankine-Hugoniot (30). Nous supposons $u_g < u_d$, pour fixer les idées. Le cas $u_g > u_d$ se traite de manière similaire. Soit alors $k \in \mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. Nous allons appliquer l'inégalité (31) au couple entropie-flux :

$$\eta_\varepsilon : u \mapsto \sqrt{\varepsilon + (u - k)^2}, \quad q_\varepsilon : u \mapsto \int_k^u \frac{f'(v)(v - k)}{\sqrt{\varepsilon + (v - k)^2}} dv.$$

On vérifie en effet que $(\eta_\varepsilon, q_\varepsilon)$ est bien un couple entropie-flux, avec $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ convexe. Alors (31) implique qu'on a l'inégalité :

$$\sigma(\eta_\varepsilon(u_d) - \eta_\varepsilon(u_g)) \geq q_\varepsilon(u_d) - q_\varepsilon(u_g), \quad (32)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Rappelons que la vitesse σ est déterminée par la relation de Rankine-Hugoniot (30). On fait alors tendre ε vers 0, le passage à la limite étant immédiat pour les termes $\eta_\varepsilon(u_d)$, $\eta_\varepsilon(u_g)$. Pour les termes $q_\varepsilon(u_d)$ et $q_\varepsilon(u_g)$, on utilise le théorème de convergence dominée et on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q_\varepsilon(u_d) = \begin{cases} f(u_d) - f(k), & \text{si } u_d \geq k, \\ f(k) - f(u_d), & \text{si } u_d \leq k, \end{cases}$$

avec un résultat similaire pour u_g . Par passage à la limite dans (32), on obtient donc :

$$\sigma(|u_d - k| - |u_g - k|) \geq \operatorname{sgn}(u_d - k)(f(u_d) - f(k)) - \operatorname{sgn}(u_g - k)(f(u_g) - f(k)), \quad (33)$$

où le signe d'un réel x , noté $\operatorname{sgn}(x)$, est égal à $+1$ si $x > 0$, égal à -1 si $x < 0$, et égal à 0 si $x = 0$. L'inégalité (33) se simplifie suivant la position de k par rapport à u_g et u_d (rappelons que nous nous plaçons dans le cas $u_g < u_d$). En particulier, si on choisit $k = \theta u_d + (1 - \theta) u_g$ avec $\theta \in [0, 1]$, on obtient :

$$\sigma(u_d + u_g - 2k) \geq f(u_d) + f(u_g) - 2f(k).$$

En reportant l'expression de σ donnée par (30) et la valeur de k dans cette dernière inégalité, on obtient :

$$f(k) = f(\theta u_d + (1 - \theta) u_g) \geq \theta f(u_d) + (1 - \theta) f(u_g),$$

ce qui n'est rien d'autre que la condition (28).

Supposons maintenant que u_g, u_d, σ vérifient (30), $u_g < u_d$, et que la condition (28) est vérifiée pour tout $\theta \in [0, 1]$. Nous allons montrer que l'inégalité (31) a lieu pour tout couple entropie-flux (η, q) . En reprenant les calculs précédents, on commence par observer que l'inégalité (33) est vérifiée pour tout $k \in [u_g, u_d]$. On vérifie également que (33) est vérifiée pour tout $k \notin [u_g, u_d]$ car pour $k < u_g$, (33) est équivalent à :

$$\sigma(u_d - u_g) \geq f(u_d) - f(u_g),$$

et pour $k > u_d$, (33) est équivalent à :

$$\sigma(u_g - u_d) \geq f(u_g) - f(u_d).$$

Ces deux dernières inégalités sont équivalentes à la condition de Rankine-Hugoniot (30), et sont donc vérifiées par u_g, u_d, σ . On a donc montré pour l'instant que l'inégalité (33) est vraie quelque soit $k \in \mathbb{R}$. Soit maintenant un couple entropie flux (η, q) , avec $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On utilise le lemme suivant :

Lemme 2. Pour tout $\delta > 0$ il existe un entier N , des nombres réels a, b, d, k_1, \dots, k_N , et des nombres réels positifs c_1, \dots, c_N tels que si l'on définit :

$$\eta_\delta(v) = a + bv + \sum_{j=1}^N c_j |v - k_j|, \quad q_\delta(v) = d + bf(v) + \sum_{j=1}^N c_j \operatorname{sgn}(v - k_j) (f(v) - f(k_j)),$$

alors on a :

$$\sup_{v \in [u_g, u_d]} |\eta(v) - \eta_\delta(v)| + \sup_{v \in [u_g, u_d]} |q(v) - q_\delta(v)| \leq \delta.$$

Le lemme implique que l'inégalité (32) est vérifiée. En effet, pour tout entier p , le lemme 2 assure l'existence d'un entier N et de réels⁶ a, b, d, k_1, \dots, k_N et de réels positifs c_1, \dots, c_N tels que les fonctions η_p, q_p construites comme dans l'énoncé du lemme 2 vérifient :

$$\sup_{v \in [u_g, u_d]} |\eta(v) - \eta_p(v)| + \sup_{v \in [u_g, u_d]} |q(v) - q_p(v)| \leq 2^{-p}.$$

En particulier, on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sigma(\eta_p(u_d) - \eta_p(u_g)) - (q_p(u_d) - q_p(u_g)) = \sigma(\eta(u_d) - \eta(u_g)) - (q(u_d) - q(u_g)).$$

Il suffit maintenant de montrer que la quantité :

$$\sigma(\eta_p(u_d) - \eta_p(u_g)) - (q_p(u_d) - q_p(u_g))$$

est positive pour tout p et on obtiendra l'inégalité (31) par passage à la limite. Pour montrer que cette dernière quantité est effectivement positive, il suffit d'appliquer l'inégalité (33) pour $k = k_j$, $j \in \{1, \dots, N\}$, de multiplier par $c_j \geq 0$, puis de sommer. On utilise également la condition de Rankine-Hugoniot (30) pour conclure. Au final, on a bien montré que l'inégalité (31) est vérifiée pour tout couple entropie-flux (η, q) , ce qui montre que u est une solution entropique. \square

On a utilisé dans la démonstration du théorème 3 le fait que les inégalités d'entropie (25) sont vraies pour tout couple entropie-flux si et seulement si elles sont vérifiées lorsqu'on choisit les couples (η, q) avec $\eta(v) = |v - k|$ et $q(v) = \operatorname{sgn}(v - k) (f(v) - f(k))$. Ces couples sont les *couples entropie-flux de Kruzkov*. On y reviendra plus en détails dans l'analyse du schéma de Glimm et la construction de solutions entropiques pour (1). Il faut prendre garde qu'une telle fonction $\eta(v) = |v - k|$ est bien convexe sur \mathbb{R} mais n'est pas de classe \mathcal{C}^2 . Par ailleurs, les fonctions η, q ainsi définies sont continues et \mathcal{C}^1 par morceaux, et vérifient $q' = \eta' a$ là où elles sont dérivables. Pour ne pas introduire de terminologie supplémentaire, on gardera la convention qu'une entropie est une fonction η convexe de classe \mathcal{C}^2 , et que le flux associé est une primitive de $\eta' a$.

Démonstration du lemme 2. On se donne un entier N à fixer plus tard (en fonction de δ), et on note :

$$\forall j \in \{0, \dots, N\}, \quad k_j = u_g + \frac{j}{N} (u_d - u_g).$$

L'idée de la démonstration consiste à approcher η sur l'intervalle $[u_g, u_d]$ par une fonction continue, convexe, et affine par morceaux, coïncidant avec η aux points k_0, \dots, k_N . Autrement dit, on définit une fonction η_N de la manière suivante :

$$\forall j \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \forall v \in [k_j, k_{j+1}], \quad \eta_N(v) = \eta(k_j) + \frac{\eta(k_{j+1}) - \eta(k_j)}{k_{j+1} - k_j} (v - k_j).$$

⁶On omet ici de rajouter que toutes les quantités dépendent de l'indice p .

On va montrer que η_N admet une expression de la forme :

$$\eta_N(v) = a + b v + \sum_{j=0}^N c_j |v - k_j|.$$

Pour cela, il suffit simplement d'identifier les coefficients a, b, c_0, \dots, c_N . Après quelques calculs⁷, on se rend compte que le choix suivant convient :

$$\begin{aligned} c_0 &= c_N = 0, \\ \forall j \in \{1, \dots, N-1\}, \quad c_j &= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta(k_{j+1}) - \eta(k_j)}{k_{j+1} - k_j} - \frac{\eta(k_j) - \eta(k_{j-1})}{k_j - k_{j-1}} \right) \geq 0, \\ b &= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta(k_1) - \eta(k_0)}{k_1 - k_0} + \frac{\eta(k_N) - \eta(k_{N-1})}{k_N - k_{N-1}} \right), \\ a &= \frac{k_1 \eta(k_0) - k_0 \eta(k_1)}{k_1 - k_0} - \sum_{j=1}^{N-1} c_j k_j. \end{aligned}$$

Avec ce choix de coefficients, η_N est une interpolation affine de η sur chaque intervalle $[k_j, k_{j+1}]$. Soit alors $j_0 \in \{0, \dots, N-1\}$ et $v \in [k_{j_0}, k_{j_0+1}]$. On a :

$$\begin{aligned} |\eta(v) - \eta_N(v)| &= \left| \eta(v) - \eta(k_{j_0}) - \frac{\eta(k_{j_0+1}) - \eta(k_{j_0})}{k_{j_0+1} - k_{j_0}} (v - k_{j_0}) \right| \\ &\leq |\eta(v) - \eta(k_{j_0})| + \left| \frac{\eta(k_{j_0+1}) - \eta(k_{j_0})}{k_{j_0+1} - k_{j_0}} \right| (v - k_{j_0}) \\ &\leq 2 \|\eta'\|_{L^\infty([u_g, u_d])} (v - k_{j_0}) \leq \frac{2(u_d - u_g) \|\eta'\|_{L^\infty([u_g, u_d])}}{N}, \end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation :

$$\sup_{v \in [u_g, u_d]} |\eta(v) - \eta_N(v)| \leq \frac{2(u_d - u_g) \|\eta'\|_{L^\infty([u_g, u_d])}}{N}. \quad (34)$$

Il reste à trouver la constante d de sorte qu'on puisse estimer l'écart entre le flux q et le flux q_N défini par :

$$q_N(v) = d + b f(v) + \sum_{j=0}^N c_j \operatorname{sgn}(v - k_j) (f(v) - f(k_j)).$$

Les nombres $b, c_0, \dots, c_N, k_0, \dots, k_N$ ayant été fixés préalablement, on fixe le nombre d de telle sorte que $q_N(u_g) = q(u_g)$. Notons alors (un peu abusivement) :

$$\eta'_N(v) = b + \sum_{j=0}^N c_j \operatorname{sgn}(v - k_j).$$

La fonction η'_N est mesurable et bornée. Hors des points k_j , elle est égale à la dérivée de η_N car η_N est bien dérivable en tout point différent des k_j . On vérifie alors la formule⁸ :

$$q_N(v) - q_N(u_g) = \int_{u_g}^v \eta'_N(w) f'(w) dw.$$

En découpant l'intégrale convenablement, et en intégrant par parties, on obtient :

$$q_N(v) - q_N(u_g) = \eta_N(v) f'(v) - \eta_N(u_g) f'(u_g) - \int_{u_g}^v \eta_N(w) f''(w) dw, \quad (35)$$

⁷que le lecteur est invité à faire...

⁸Utiliser la linéarité de l'intégrale, et montrer la formule uniquement pour une seule fonction $\operatorname{sgn}(v - k_j)$.

et on a également :

$$q(v) - q(u_g) = \int_{u_g}^v \eta'(w) f'(w) dw = \eta(v) f'(v) - \eta(u_g) f'(u_g) - \int_{u_g}^v \eta(w) f''(w) dw. \quad (36)$$

En combinant (35) avec (36), et en rappelant que $q(u_g) = q_N(u_g)$ et $\eta(u_g) = \eta_N(u_g)$, on obtient :

$$q(v) - q_N(v) = (\eta(v) - \eta_N(v)) f'(v) + \int_{u_g}^v (\eta(w) - \eta_N(w)) f''(w) dw.$$

On utilise alors (34) et on obtient :

$$\sup_{v \in [u_g, u_d]} |q(v) - q_N(v)| \leq \frac{2(u_d - u_g) \|\eta'\|_{L^\infty([u_g, u_d])}}{N} (\|f'\|_{L^\infty([u_g, u_d])} + (u_d - u_g) \|f''\|_{L^\infty([u_g, u_d])}). \quad (37)$$

En choisissant N suffisamment grand dans (34) et (37), on montre le résultat annoncé. \square

On déduit immédiatement du théorème 3 le corollaire suivant (la démonstration est laissée au lecteur) :

Corollaire 1. *Supposons que la fonction u définie par (27) est une onde de choc (au sens de la définition 3). Alors on a les inégalités de Lax :*

$$a(u_d) \leq \sigma \leq a(u_g), \quad (38)$$

et ces inégalités sont strictes si f est strictement concave ou si f est strictement convexe. De plus,

si f est strictement convexe, on a $u_d < u_g$,

si f est strictement concave, on a $u_d > u_g$.

L'exercice suivant traite de la réciproque du corollaire 1 :

Exercice 9. *Soit f de classe \mathcal{C}^2 strictement convexe (resp. strictement concave). Soient $\sigma, u_g, u_d \in \mathbb{R}$ tels que la condition de Rankine-Hugoniot (30) soit vérifiée. Montrer que :*

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq \sigma t, \\ u_d, & \text{si } x > \sigma t, \end{cases}$$

est une onde de choc si et seulement si $u_d < u_g$ (resp. $u_d > u_g$).

Exercice 10. *Supposons $f(u) = u^2/2$. Quelles sont les ondes de choc pour l'équation (1) dans ce cas ? Même question lorsque $f(u) = u(1 - u)$.*

Exercice 11. *Soit f de classe \mathcal{C}^2 strictement convexe. Soient $\sigma, u_g, u_d \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition de Rankine-Hugoniot, et $u_d < u_g$. Quel est le comportement de la vitesse σ lorsque u_d tend vers u_g ?*

Exercice 12. *Supposons $f(u) = \cos u$. Soit $u_g = 0$ et $u_d > 0$. Pour quelles valeurs de u_d existe-t-il une vitesse σ telle que :*

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq \sigma t, \\ u_d, & \text{si } x > \sigma t, \end{cases}$$

soit une onde de choc ?

Le paragraphe précédent montre que pour une donnée initiale (26), il n'est pas toujours possible de trouver une vitesse σ telle que (27) soit une solution entropique de (1) correspondant à la donnée initiale (26). Une condition nécessaire est que les inégalités de Lax (38) soient vérifiées. Ces inégalités traduisent le fait que les courbes caractéristiques correspondant aux états de part et d'autre du choc *rentrent* dans la discontinuité $\{x = \sigma t\}$, voir la figure 2. Dans le paragraphe suivant, nous allons nous intéresser à la situation opposée où les courbes caractéristiques correspondant aux états initiaux u_g, u_d ne se rencontrent pas dans le domaine $\{t \geq 0\}$.

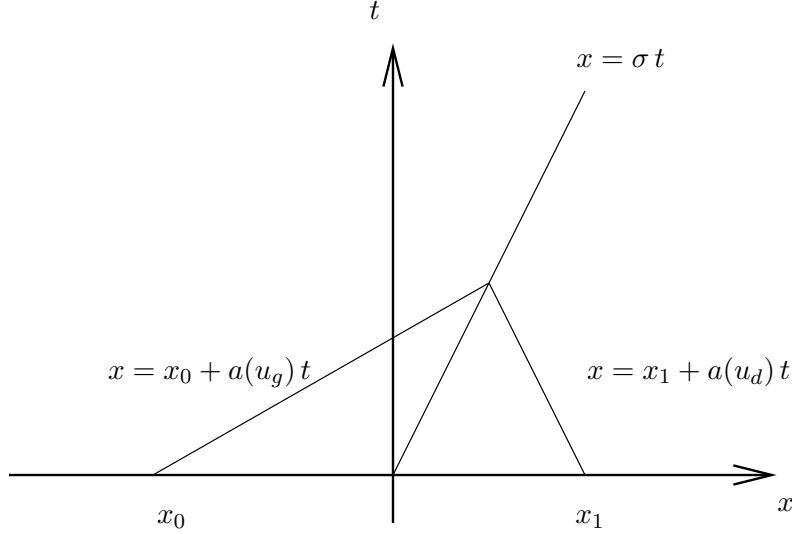


FIG. 2 – Les caractéristiques *rentrent* dans le choc.

4.3 Ondes de détente (ou de raréfaction)

On introduit tout d'abord la terminologie suivante :

Définition 4 (Onde de détente). *Une onde de détente reliant l'état u_g à l'état u_d est une solution entropique u de (1) pour la donnée initiale (26), telle que u ne dépende que de la seule variable x/t , u soit continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , et vérifie de plus :*

$$u(\xi) = \begin{cases} u_g, & \text{si } \xi \leq a(u_g), \\ u_d, & \text{si } \xi \geq a(u_d). \end{cases}$$

Une onde de détente est donc une solution de la forme $(t, x) \mapsto u(x/t)$; dans la pratique, on notera également, et de manière abusive, u la fonction de deux variables $u(t, x) = u(x/t)$. En particulier, $u(t, \cdot)$, $t > 0$, est l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout réel x associe $u(x/t)$. Ce qu'il faut retenir, c'est qu'une onde de détente est représentée par une fonction d'une seule variable réelle v ; pour tout $t > 0$ et pour tout x , on a $u(t, x) = v(x/t)$, avec v une fonction vérifiant les propriétés énoncées dans la définition 4. Dans la pratique, on confond u et v pour ne pas introduire de notation supplémentaire.

Une condition nécessaire pour l'existence d'une onde de détente reliant u_g à u_d est bien entendu d'avoir $a(u_g) \leq a(u_d)$, ce qui est la situation opposée à celle des ondes de choc, voir (38). On ne peut avoir l'égalité $a(u_g) = a(u_d)$ que dans le cas $u_g = u_d$ car u doit être continue. Etant donnés deux états u_g et u_d tels que $a(u_g) < a(u_d)$, le problème consiste à déterminer les valeurs de u dans l'intervalle $[a(u_g), a(u_d)]$ de sorte que u soit continue et \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , et u soit solution entropique de (1). La figure 3 représente les caractéristiques associées à une donnée initiale (26) telle que $a(u_g) < a(u_d)$. Dans ce cas, il faut construire la solution à l'intérieur du secteur angulaire délimité par les deux demi-droites $x = a(u_g)t$ et $x = a(u_d)t$.

L'existence des ondes de détente est assurée par le résultat suivant :

Théorème 4 (Existence des ondes de détente). *Supposons que f vérifie $f''(v) > 0$ pour tout v , et soient $u_g \leq u_d$. Alors il existe une onde de détente u reliant u_g à u_d . Par ailleurs, pour tout couple entropie-flux (η, q) , pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a une égalité dans l'inégalité d'entropie (25) :*

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi dt dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx = 0.$$

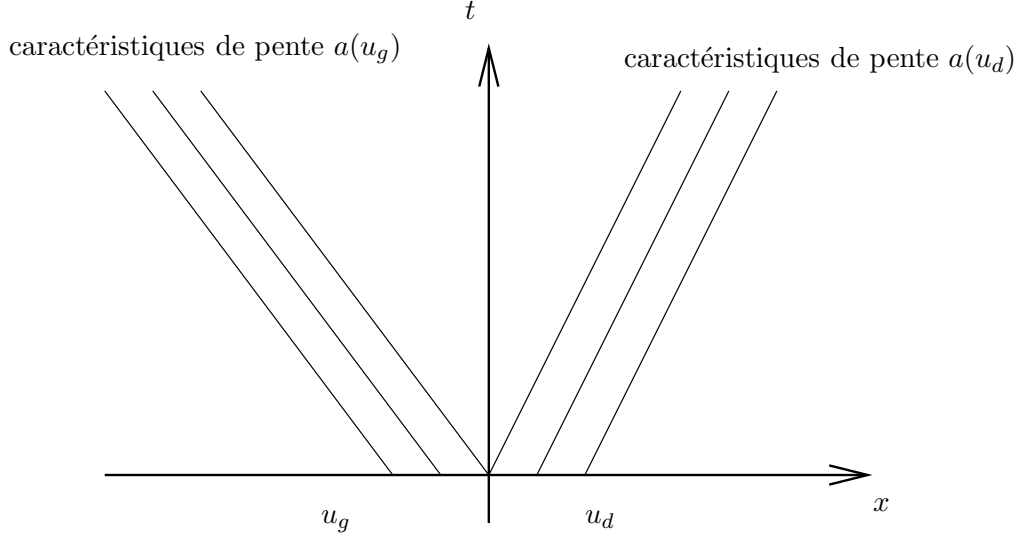


FIG. 3 – Les caractéristiques dans le cas d’une onde de détente.

De plus, cette onde de détente vérifie le principe du maximum :

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad u_g \leq u(t, x) \leq u_d,$$

et l’application $u(t, \cdot)$ est croissante pour tout $t \geq 0$.

Démonstration du théorème 4. On commence par construire u , qui ne doit dépendre que la variable x/t , dans l’intervalle $[a(u_g), a(u_d)]$. Nous avons vu que pour une solution autosimilaire, en un point ξ où u est dérivable, on a soit $u'(\xi) = 0$ soit $a \circ u(\xi) = \xi$. Rappelons que a désigne la dérivée de f . Comme $f''(v) > 0$ pour tout v , la fonction a est strictement croissante. C’est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur son image. En particulier, le segment $[a(u_g), a(u_d)]$ est inclus dans l’image de a , donc a^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a(u_g), a(u_d)]$. On pose alors :

$$u(\xi) = \begin{cases} u_g, & \text{si } \xi \leq a(u_g), \\ a^{-1}(\xi), & \text{si } \xi \in]a(u_g), a(u_d)], \\ u_d, & \text{si } \xi > a(u_d), \end{cases} \quad (39)$$

et on va montrer que l’application $((t, x) \mapsto u(x/t))$ est bien une onde de détente reliant u_g à u_d .

Par construction, u est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , car a^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur son image. De plus l’application $(\xi \mapsto u(\xi))$ est croissante car a^{-1} est croissante, et on a donc $u(\xi) \in [u_g, u_d]$ pour tout ξ . Par conséquent l’application :

$$(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \mapsto u(t, x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } t = 0, \\ u(x/t) & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

est mesurable, bornée, et vérifie le principe du maximum. En particulier, pour toute fonction continue g sur \mathbb{R} , $((t, x) \mapsto g \circ u(x/t))$ appartient à $L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$. Soit maintenant (η, q) un couple entropie-flux, et soit φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On va calculer :

$$I = \underbrace{\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta(u(x/t)) \partial_t \varphi(t, x) dt dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} q(u(x/t)) \partial_x \varphi(t, x) dt dx}_{I_2}.$$

Commençons par analyser le terme I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} q(u(x/t)) \partial_x \varphi(t, x) dx \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{a(u_g)t} q(u_g) \partial_x \varphi(t, x) dx + \int_{a(u_g)t}^{a(u_d)t} q(u(x/t)) \partial_x \varphi(t, x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{a(u_d)t}^{+\infty} q(u_d) \partial_x \varphi(t, x) dx \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} q(u_g) \varphi(t, a(u_g)t) - q(u_d) \varphi(t, a(u_d)t) dt + \int_0^{+\infty} \int_{a(u_g)t}^{a(u_d)t} q(u(x/t)) \partial_x \varphi(t, x) dx dt.
\end{aligned}$$

On calcule la dernière intégrale en intégrant par parties par rapport à la variable x :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{+\infty} q(u_g) \varphi(t, a(u_g)t) - q(u_d) \varphi(t, a(u_d)t) dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \left(q(u(a(u_d))) \varphi(t, a(u_d)t) - q(u(a(u_g))) \varphi(t, a(u_g)t) \right) dt \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \left(\int_{a(u_g)t}^{a(u_d)t} \frac{1}{t} q' \left(u \left(\frac{x}{t} \right) \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) \varphi(t, x) dx \right) dt \\
I_2 &= - \int_D \frac{1}{t} q' \left(u \left(\frac{x}{t} \right) \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) \varphi(t, x) dt dx,
\end{aligned}$$

où la notation D désigne le secteur angulaire $\{(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, x \in [a(u_g)t, a(u_d)t]\}$. On calcule désormais l'intégrale I_1 :

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \eta(u(x/t)) \partial_t \varphi(t, x) dt \right) dx.$$

Supposons pour fixer les idées que les nombres $a(u_g)$, $a(u_d)$ sont tels que $a(u_g) < 0 < a(u_d)$. Alors on découpe l'intégrale I_1 en :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{x/a(u_g)} \eta(u_g) \partial_t \varphi(t, x) dt \right) dx + \int_{-\infty}^0 \left(\int_{x/a(u_g)}^{+\infty} \eta(u(x/t)) \partial_t \varphi(t, x) dt \right) dx \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x/a(u_d)} \eta(u_d) \partial_t \varphi(t, x) dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(\int_{x/a(u_d)}^{+\infty} \eta(u(x/t)) \partial_t \varphi(t, x) dt \right) dx.
\end{aligned}$$

On calcule chacune des quatre intégrales ci-dessus en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^0 \eta(u_g) (\varphi(x/a(u_g), x) - \varphi(0, x)) dx - \int_{-\infty}^0 \eta(u(a(u_g))) \varphi(x/a(u_g), x) dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 \left(\int_{x/a(u_g)}^{+\infty} \frac{x}{t^2} \eta'(u(x/t)) u'(x/t) \varphi(t, x) dt \right) dx \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \eta(u_d) (\varphi(x/a(u_d), x) - \varphi(0, x)) dx - \int_0^{+\infty} \eta(u(a(u_d))) \varphi(x/a(u_d), x) dx \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \left(\int_{x/a(u_d)}^{+\infty} \frac{x}{t^2} \eta'(u(x/t)) u'(x/t) \varphi(t, x) dt \right) dx \\
I_1 &= - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx + \int_D \frac{x}{t^2} \eta'(u(x/t)) u'(x/t) \varphi(t, x) dt dx,
\end{aligned}$$

où D désigne le même secteur angulaire que précédemment. On additionne les valeurs obtenues pour I_1 et I_2 :

$$I = I_1 + I_2 = - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx + \int_D \frac{1}{t} u'(x/t) \varphi(t, x) \left\{ \eta'(u(x/t)) \frac{x}{t} - q'(u(x/t)) \right\} dt dx.$$

Or, dans le secteur angulaire D , on a $x/t = \xi \in [a(u_g), a(u_d)]$ et par construction de u , on a $a \circ u(\xi) = \xi$. On obtient donc :

$$\eta'(u(\xi)) \xi = \eta'(u(\xi)) a(u(\xi)) = (\eta' f')(u(\xi)) = q'(u(\xi)).$$

En particulier, on trouve :

$$I + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx = 0.$$

En choisissant le couple $(\eta, q) = (Id, f)$, on montre ainsi que u est une solution faible de (1) pour la donnée initiale (26). Ensuite, en choisissant n'importe quel couple entropie-flux (η, q) , on aboutit au fait que u est une solution entropique, vérifiant l'égalité dans (25), et non simplement une inégalité. Notons également que cette égalité a lieu pour toute fonction test φ et pas seulement dans le cas où φ est positive.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la démonstration fonctionne de la même manière dans les quatre autres cas ($a(u_g) = 0, a(u_d) > 0$), ($a(u_g) > 0, a(u_d) > 0$), ($a(u_g) < 0, a(u_d) = 0$), ($a(u_g) < 0, a(u_d) < 0$). \square

Il est utile, et instructif, de reprendre la démonstration et de vérifier que toutes les opérations (intégrations par parties, et applications du théorème de Fubini) sont bien licites. En particulier, on vérifiera que les applications :

$$(t, x) \mapsto \frac{1}{t} q' \left(u \left(\frac{x}{t} \right) \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) \varphi(t, x), \quad (t, x) \mapsto \frac{x}{t^2} \eta' \left(u \left(\frac{x}{t} \right) \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) \varphi(t, x),$$

sont intégrables sur le secteur angulaire $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, x \in [a(u_g)t, a(u_d)t]\}$.

Le théorème 4 admet un analogue immédiat dans le cas où f'' prend des valeurs strictement négatives :

Théorème 5. *Supposons que f vérifie $f''(v) < 0$ pour tout v , et soient $u_g \geq u_d$. Alors il existe une onde de détente u reliant u_g à u_d . Par ailleurs, pour tout couple entropie-flux (η, q) , pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 , à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a une égalité dans l'inégalité d'entropie (25). De plus, cette onde de détente vérifie le principe du maximum :*

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad u_d \leq u(t, x) \leq u_g,$$

et la fonction $u(t, \cdot)$ est décroissante pour tout $t \geq 0$.

Terminons ce paragraphe par quelques exemples :

Exercice 13. *Soit $f(u) = u^2/2$, et $u_g \leq u_d$. Calculer l'expression de l'onde de détente reliant u_g à u_d .*

Soit $f(u) = u(1-u)$, et $u_g \geq u_d$. Calculer l'expression de l'onde de détente reliant u_g à u_d .

Soit $f(u) = \exp(u)$, et $u_g \leq u_d$. Calculer l'expression de l'onde de détente reliant u_g à u_d .

4.4 Résolution du problème de Riemann

A l'aide des résultats des paragraphes précédents, nous sommes en mesure de résoudre le problème de Riemann pour (1) dans le cas où f'' ne s'annule pas. La définition et les principales propriétés des fonctions à variations bornées sont rappelées dans l'appendice A.

Théorème 6 (Résolution du problème de Riemann). *Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que $f''(v) > 0$ pour tout v . Soit $u_g, u_d \in \mathbb{R}$ et soit u_0 définie par (26). Alors le problème de Riemann :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admet une solution autosimilaire ($u : (t, x) \mapsto u(x/t)$) qui vérifie :

i) u est une solution entropique,

ii) Principe du maximum : pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a :

$$\min(u_g, u_d) \leq u(t, x) \leq \max(u_g, u_d),$$

iii) Variation totale constante : pour tout $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$ appartient à l'espace $BV(\mathbb{R})$ et la variation totale de $u(t, \cdot)$ est constante, égale à $|u_d - u_g|$,

iv) si $u_g > u_d$, u est une onde de choc dont la vitesse σ est donnée par la condition de Rankine-Hugoniot (30),

v) si $u_g \leq u_d$, u est une onde de détente reliant u_g à u_d ,

vi) Propagation à vitesse finie : si $x > \max(|a(u_g)|, |a(u_d)|)t$ alors $u(t, x) = u_d$, et si $x \leq -\max(|a(u_g)|, |a(u_d)|)t$ alors $u(t, x) = u_g$.

Démonstration du théorème 6. Les points i), ii), iv), v) découlent des théorèmes 3 et 4 ci-dessus. Montrons le point vi). Dans le cas d'une onde de choc, on a :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq \sigma t, \\ u_d, & \text{si } x > \sigma t, \end{cases}$$

et la vitesse σ est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot (30). Le théorème des accroissements finis donne l'inégalité :

$$|\sigma| \leq \max_{[u_g, u_d]} |a|.$$

Comme $a = f'$ est une fonction continue et strictement croissante, on vérifie que :

$$\max_{[u_g, u_d]} |a| = \max(|a(u_g)|, |a(u_d)|),$$

et la propriété vi) découle alors facilement. Dans le cas d'une onde de détente, la propriété vi) est claire lorsque $t = 0$. Pour $t > 0$, on a :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x/t \leq a(u_g), \\ u_d, & \text{si } x/t \geq a(u_d), \end{cases}$$

et la propriété de vitesse finie de propagation découle facilement.

Le seul point restant à vérifier est le comportement de la variation totale de $u(t, \cdot)$. Pour une onde de choc, la fonction $u(t, \cdot)$ est une fonction en escaliers avec une seule discontinuité au point σt . Sa variation totale est égale à la valeur absolue du saut de u en σt , c'est-à-dire $|u_d - u_g|$. Pour une onde de détente, nous avons vu que l'application $u(t, \cdot)$ est croissante, valant u_g pour $x \leq a(u_g)t$ et u_d pour $x \geq a(u_d)t$. Sa variation totale est donc égale à $u_d - u_g$. Dans tous les cas, la variation totale de $u(t, \cdot)$ est constante, égale à la variation totale de la donnée initiale u_0 , c'est-à-dire $|u_d - u_g|$. \square

Bien entendu, le théorème 6 admet une extension immédiate dans le cas où $f''(v) < 0$ pour tout v . On laisse le soin au lecteur d'apporter les modifications nécessaires. Par ailleurs, si f vérifie $f''(v) > 0$ pour tout v dans un intervalle I , alors le résultat du théorème 6 demeure vrai pour tout u_g, u_d appartenant à l'intervalle I . En particulier, dans certaines applications la

fonction f n'est pas définie sur tout \mathbb{R} mais seulement sur un intervalle I , et on peut être amené à utiliser le théorème 6 pour $u_g, u_d \in I$. Dans ce cas, la solution u reste à valeurs dans I en vertu du principe du maximum.

On introduit la définition suivante :

Définition 5 (Solveur de Riemann). *Supposons que f'' ne s'annule pas, et soient $u_g, u_d \in \mathbb{R}$. Pour $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on note $w_R(x/t, u_g, u_d)$ la valeur en (t, x) de la solution du problème de Riemann avec la donnée initiale (26), fournie par le théorème 6. L'application w_R s'appelle un solveur de Riemann.*

Pour l'instant, nous n'avons pas montré de résultat d'unicité pour les solutions du problème de Riemann. Néanmoins, le théorème 6 fournit une solution du problème de Riemann donnée par une formule explicite. La solution est soit une onde de choc dont la vitesse σ est donnée par la condition de Rankine-Hugoniot (voir le théorème 3), soit une onde de détente dont l'expression est donnée par (39). Nous verrons plus loin un résultat d'unicité général sur les solutions entropiques de (1), qui s'appliquera en particulier aux solutions entropiques du problème de Riemann.

Exercice 14. *Vérifier que l'application w_R est mesurable.*

L'exercice suivant traite de l'inégalité dite d'Oleinik :

Exercice 15. *Supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ vérifiant :*

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad f''(v) \geq \alpha.$$

Soit $u_g, u_d \in \mathbb{R}$, et soit $u(t, x) = w_R(x/t, u_g, u_d)$. Soit φ une fonction positive, de classe \mathcal{C}^1 et à support compact dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall (t, x) \notin \left[\frac{1}{R}, R \right] \times [-R, R], \quad \varphi(t, x) = 0,$$

pour un certain $R \geq 1$. Montrer qu'on a l'inégalité :

$$\int_{]0, +\infty[\times \mathbb{R}} \left(\frac{1}{\alpha t} \varphi(t, x) + u(t, x) \partial_x \varphi(t, x) \right) dt dx \geq 0. \quad (40)$$

Dans le langage de la théorie des distributions, l'inégalité (40) s'écrit :

$$\partial_x u \leq \frac{1}{\alpha t}.$$

Il faut néanmoins prendre garde au fait que u n'est généralement pas dérivable par rapport à x en tout point (penser aux ondes de choc), et cette dernière inégalité est à comprendre en un sens faible (c'est-à-dire elle ne prend sens qu'une fois multipliée par une fonction test positive).

Montrer que pour tout $t > 0$, et pour tous $x_1 \leq x_2$, on a :

$$u(t, x_2) - u(t, x_1) \leq \frac{x_2 - x_1}{\alpha t}.$$

On s'intéresse maintenant à une propriété de continuité en temps de la solution du problème de Riemann :

Proposition 3 (Continuité en temps de la solution du problème de Riemann). *Supposons que f'' ne s'annule pas. Soit $u_g, u_d \in \mathbb{R}$, et soit u la solution du problème de Riemann de donnée initiale (26). Alors pour tous $t \geq s \geq 0$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq \max_{[u_g, u_d]} |a| |u_d - u_g| (t - s). \quad (41)$$

La proposition montre en particulier que l'application $(t \mapsto u(t, \cdot))$ est continue de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Remarquer que $u(t, \cdot)$ n'appartient pas à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ pour tout t car en particulier on n'a pas fait l'hypothèse que u_0 appartient à $L^1(\mathbb{R})$. En fait, la donnée initiale (26) n'appartient à $L^1(\mathbb{R})$ que dans le cas extrêmement particulier $u_g = u_d = 0$. La proposition 3 dit juste que la différence $u(t, \cdot) - u(s, \cdot)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ pour tous $t \geq s \geq 0$, avec l'estimation (41) de la norme L^1 .

Démonstration de la proposition 3. On traite le cas où $f''(v) > 0$ pour tout v . Soit alors $t \geq s \geq 0$. Supposons dans un premier temps $u_g > u_d$. On sait dans ce cas que la solution du problème de Riemann est une onde de choc, dont la vitesse σ est donnée par la condition de Rankine-Hugoniot (30). Dans le cas où la vitesse σ est positive, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\sigma s} \underbrace{|u(t, x) - u(s, x)|}_{=|u_g - u_d|=0} dx + \int_{\sigma s}^{\sigma t} |u(t, x) - u(s, x)| dx + \int_{\sigma t}^{+\infty} \underbrace{|u(t, x) - u(s, x)|}_{=|u_d - u_d|=0} dx \\ &= \int_{\sigma s}^{\sigma t} |u(t, x) - u(s, x)| dx = \int_{\sigma s}^{\sigma t} |u_g - u_d| dx = \sigma (t - s) |u_d - u_g|. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité des accroissements finis pour majorer σ et obtenir (41). Dans le cas où la vitesse σ est négative, les estimations sont identiques (il suffit grosso modo d'échanger les rôles de s et t car on a alors $\sigma t \leq \sigma s$).

Supposons maintenant $u_g \leq u_d$, ce qui correspond au cas d'une onde de détente. On sait que la solution u du problème de Riemann est donnée par :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq a(u_g) t, \\ a^{-1}(x/t), & \text{si } x \in]a(u_g) t, a(u_d) t], \\ u_d, & \text{si } x > a(u_d) t. \end{cases}$$

Définissons une fonction v comme suit⁹ :

$$v(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a(u_g) t, \\ 1/(t a' \circ a^{-1}(x/t)), & \text{si } x \in]a(u_g) t, a(u_d) t], \\ 0, & \text{si } x > a(u_d) t. \end{cases}$$

Il est assez facile de vérifier que v est mesurable, bornée sur tout sous-ensemble compact de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et que v est à valeurs positives (car $a' = f''$). On va alors montrer que pour tous $t \geq s > 0$ et pour tout $x \neq 0$, on a la relation :

$$u(t, x) - u(s, x) = - \int_s^t a(u(\tau, x)) v(\tau, x) d\tau. \quad (42)$$

Admettons provisoirement que cette formule soit vraie. Pour $t \geq s > 0$, on obtient alors les inégalités :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_s^t a(u(\tau, x)) v(\tau, x) d\tau \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_s^t |a(u(\tau, x)) v(\tau, x)| d\tau dx \\ &\leq \max_{[u_g, u_d]} |a| \int_{\mathbb{R}} \int_s^t |v(\tau, x)| d\tau dx \leq \max_{[u_g, u_d]} |a| \int_s^t \left(\int_{\mathbb{R}} v(\tau, x) dx \right) d\tau, \end{aligned}$$

⁹La fonction v n'est rien d'autre que la dérivée partielle de u par rapport à x au sens des distributions sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, mais il n'est pas utile de savoir cette propriété pour ce qui suit.

où on a utilisé le principe du maximum ($u(\tau, x) \in [u_g, u_d]$), le fait que v est positive, puis le théorème de Fubini. Il suffit maintenant de remarquer que pour tout $\tau > 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} v(\tau, x) dx = \int_{a(u_g)\tau}^{a(u_d)\tau} \frac{dx}{\tau a' \circ a^{-1}(x/\tau)} = \left[a^{-1}(x/\tau) \right]_{a(u_g)\tau}^{a(u_d)\tau} = u_d - u_g.$$

On en déduit donc :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq \max_{[u_g, u_d]} |a| \int_s^t (u_d - u_g) d\tau,$$

ce qui donne (41) pour $t \geq s > 0$. On veut maintenant montrer (41) dans le cas $s = 0$. Pour cela, on se donne $t > 0$, et on utilise le lemme de Fatou :

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{s \rightarrow 0^+} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx.$$

On majore le terme de droite de l'inégalité en utilisant (41) pour $t \geq s > 0$, et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{s \rightarrow 0^+} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \left(\max_{[u_g, u_d]} |a| |u_d - u_g| (t - s) \right) = \max_{[u_g, u_d]} |a| |u_d - u_g| t.$$

Le terme de gauche de l'inégalité se calcule en utilisant :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} u(s, x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x < 0, \\ u_d, & \text{si } x > 0, \end{cases} = u_0(x).$$

On a donc montré que l'inégalité (41) est vraie dans le cas $s = 0$ et $t > 0$. Le cas $t = s = 0$ est trivial.

Pour achever la démonstration, il ne reste donc plus qu'à établir la formule (42). Pour fixer les idées, on traite le cas où $a(u_g) < 0$ et $a(u_d) > 0$. Pour $x > 0$, on a $u(\tau, x) = u_d$ si $\tau \leq x/a(u_d)$, et $u(\tau, x) = a^{-1}(x/\tau)$ si $\tau \geq x/a(u_d)$. On remarque alors que (42) est trivial si $0 < s \leq t \leq x/a(u_d)$. Dans le cas $x/a(u_d) \leq s \leq t$, on a :

$$- \int_s^t a(u(\tau, x)) v(\tau, x) d\tau = - \int_s^t \frac{x}{\tau^2} \frac{1}{a' \circ a^{-1}(x/\tau)} d\tau = \left[a^{-1}(x/\tau) \right]_s^t = u(t, x) - u(s, x),$$

donc (42) est vérifiée. Dans le dernier cas $s \leq x/a(u_d) \leq t$, on a :

$$\begin{aligned} - \int_s^t a(u(\tau, x)) v(\tau, x) d\tau &= - \int_{x/a(u_d)}^t a(u(\tau, x)) v(\tau, x) d\tau \\ &= u(t, x) - u(x/a(u_d), x) = u(t, x) - u_d = u(t, x) - u(s, x). \end{aligned}$$

On a donc établi la relation (42) pour $x > 0$, le cas $x < 0$ étant totalement analogue. Les autres cas $a(u_d) > a(u_g) > 0$, $a(u_g) < a(u_d) < 0$ etc. se traitent de la même manière. \square

Comme nous allons le voir dans ce qui suit, le problème de Riemann joue un rôle crucial dans la résolution du problème (1) pour des données initiales u_0 générales. Dans un premier temps, nous allons voir comment la résolution du problème de Riemann permet directement de résoudre, localement en temps, le problème de Cauchy (1) pour une donnée initiale en escaliers présentant un nombre quelconque de sauts. Le cas des données initiales dans l'espace $BV(\mathbb{R})$ sera traité au paragraphe suivant par un procédé d'approximation dû à Glimm.

5 Juxtaposition de problèmes de Riemann

5.1 Juxtaposition d'un nombre fini de problèmes de Riemann

Dans ce paragraphe, on montre comment résoudre (1), localement en temps, pour des données initiales en escaliers qui ont un nombre fini de sauts. On étudiera également la propriété de continuité en temps de la solution obtenue. Commençons par définir ce qu'est une solution entropique de (1) sur un intervalle de temps borné (la définition 2 portait sur des solutions définies pour tous les temps positifs) :

Définition 6 (Solution entropique sur un intervalle de temps borné). *Soit $\underline{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$, et soit $T_2 > T_1$. Une fonction u définie sur $[T_1, T_2] \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} sera dite solution faible sur l'intervalle de temps $[T_1, T_2]$ du problème :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & t \in [T_1, T_2], x \in \mathbb{R}, \\ u(T_1, x) = \underline{u}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (43)$$

si $u, f(u) \in L^1_{loc}([T_1, T_2] \times \mathbb{R})$, si pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[T_1, T_2] \times \mathbb{R}$, on a la relation :

$$\int_{[T_1, T_2] \times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \underline{u}(x) \varphi(T_1, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} u(T_2, x) \varphi(T_2, x) \, dx.$$

On dira que u est une solution entropique de (43) si, de plus, pour tout couple entropie-flux (η, q) , on a :

- $\eta(u), q(u) \in L^1_{loc}([T_1, T_2] \times \mathbb{R})$,
- pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[T_1, T_2] \times \mathbb{R}$ et positive, on a l'inégalité :

$$\int_{[T_1, T_2] \times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(\underline{u}(x)) \varphi(T_1, x) \, dx \geq \int_{\mathbb{R}} \eta(u(T_2, x)) \varphi(T_2, x) \, dx.$$

On se rend compte assez facilement que si u est une fonction mesurable sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et si de plus u est une solution entropique de (1) sur tout intervalle $[0, T]$, $T > 0$, alors u est une solution entropique de (1) au sens de la définition 2. La réciproque est moins évidente, mais de toute façon nous ne l'utiliserons pas.

Passons maintenant à la résolution de (1) pour une donnée initiale en escaliers :

Théorème 7 (Juxtaposition d'un nombre fini de problèmes de Riemann). *Supposons que f'' ne s'annule pas. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1 < \dots < x_N$, et soient $v_0, \dots, v_N \in \mathbb{R}$. On définit la fonction en escaliers u_0 suivante :*

$$u_0(x) = \begin{cases} v_0, & \text{si } x \leq x_1, \\ v_j, & \text{si } x_j < x \leq x_{j+1} \text{ et } 1 \leq j \leq N-1, \\ v_N, & \text{si } x > x_N, \end{cases}$$

Soit $T > 0$ vérifiant la condition :

$$T \max(|a(v_0)|, \dots, |a(v_N)|) \leq \frac{1}{2} \min(x_2 - x_1, \dots, x_N - x_{N-1}).$$

Pour $(t, x) \in]0, T] \times \mathbb{R}$, on définit :

$$u(t, x) = \begin{cases} w_R\left(\frac{x - x_1}{t}, v_0, v_1\right), & \text{si } x \leq (x_1 + x_2)/2, \\ w_R\left(\frac{x - x_j}{t}, v_{j-1}, v_j\right), & \text{si } (x_{j-1} + x_j)/2 < x \leq (x_j + x_{j+1})/2 \text{ et } 2 \leq j \leq N-1, \\ w_R\left(\frac{x - x_N}{t}, v_{N-1}, v_N\right), & \text{si } x > (x_{N-1} + x_N)/2, \end{cases}$$

et on pose $u(0, x) = u_0(x)$. Alors u est une solution entropique de (1) sur l'intervalle de temps $[0, T]$. De plus, u vérifie le principe du maximum :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad \min (v_0, \dots, v_N) \leq u(t, x) \leq \max (v_0, \dots, v_N),$$

et la variation totale de $u(t, \cdot)$ est constante :

$$\forall t \in [0, T], \quad \text{TV}(u(t, \cdot)) = \text{TV}(u_0) = \sum_{j=0}^{N-1} |v_{j+1} - v_j|.$$

Démonstration du théorème 7. Pour fixer les idées, on traite le cas où $f''(v) > 0$ pour tout v . La démonstration repose principalement sur la propriété de vitesse finie de propagation montrée au théorème 6. En effet, nous allons commencer par montrer que pour $j \in \{2, \dots, N-1\}$ et $t \in]0, T]$, on a les relations :

$$w_R\left(\frac{x_{j-1} - x_j}{2t}, v_{j-1}, v_j\right) = v_{j-1}, \quad w_R\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{2t}, v_{j-1}, v_j\right) = v_j. \quad (44)$$

Donnons nous un entier $j \in \{2, \dots, N-1\}$ et un temps $t \in]0, T]$. Supposons dans un premier temps que la solution du problème de Riemann entre v_{j-1} et v_j est une onde de détente (c'est le cas si $v_{j-1} \leq v_j$). La définition de T donne :

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{2t} \geq \frac{x_{j+1} - x_j}{2T} \geq \frac{\min_k (x_{k+1} - x_k)}{2T} \geq \max (|a(v_j)|, |a(v_{j-1})|).$$

D'après l'expression explicite d'une onde de détente, on a donc la relation :

$$w_R\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{2t}, v_{j-1}, v_j\right) = v_j.$$

On montre de même la relation :

$$w_R\left(\frac{x_{j-1} - x_j}{2t}, v_{j-1}, v_j\right) = v_{j-1},$$

ce qui donne (44) dans le cas d'une onde de détente. Supposons maintenant que la solution du problème de Riemann entre v_{j-1} et v_j est une onde de choc ($v_{j-1} > v_j$). On a encore l'inégalité :

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{2t} \geq \max (|a(v_j)|, |a(v_{j-1})|),$$

et nous allons montrer que la vitesse σ du choc est strictement inférieure au maximum de $|a(v_j)|$ et $|a(v_{j-1})|$. La vitesse σ du choc est donnée par la condition de Rankine-Hugoniot (30). Par le théorème des accroissements finis, il existe un réel $v_b \in]v_j, v_{j-1}[$ tel que $\sigma = a(v_b)$. Comme l'application a est strictement croissante, on a l'encadrement :

$$a(v_j) < a(v_b) = \sigma < a(v_{j-1}).$$

On en déduit l'inégalité :

$$-\max (|a(v_j)|, |a(v_{j-1})|) < \sigma < \max (|a(v_j)|, |a(v_{j-1})|).$$

En particulier, l'onde de choc issue du point x_j au temps 0 ne peut pas toucher la demi-droite $x = (x_j + x_{j+1})/2$ sur l'intervalle (fermé) de temps $[0, T]$. On en déduit en particulier la relation :

$$w_R\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{2t}, v_{j-1}, v_j\right) = v_j.$$

L'onde de choc issue de x_j au temps 0 ne peut pas non plus toucher la demi-droite $x = (x_{j-1} + x_j)/2$ sur l'intervalle fermé de temps $[0, T]$, et on a :

$$w_R\left(\frac{x_{j-1} - x_j}{2t}, v_{j-1}, v_j\right) = v_{j-1}.$$

On a donc montré (44). De la même manière, on montre les relations :

$$w_R\left(\frac{x_2 - x_1}{2t}, v_0, v_1\right) = v_1, \quad w_R\left(\frac{x_{N-1} - x_N}{2t}, v_{N-1}, v_N\right) = v_{N-1}. \quad (45)$$

En particulier, pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $u(t, \cdot)$ définie dans l'énoncé du théorème 7 est continue aux points $(x_j + x_{j+1})/2$, $j = 1, \dots, N - 1$.

Montrons maintenant que la fonction u est bien une solution entropique sur l'intervalle $[0, T]$ pour la donnée initiale u_0 définie dans l'énoncé. Il est clair que u est mesurable et bornée, et il suffit donc de montrer que les relations de la définition 6 ont lieu. Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Tout d'abord, on va calculer :

$$I = \int_{[0, T] \times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx.$$

On décompose I de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dx \, dt \\ &+ \sum_{j=2}^{N-1} \int_0^T \int_{(x_{j-1}+x_j)/2}^{(x_j+x_{j+1})/2} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Traitons tout d'abord le cas où la solution du problème de Riemann entre v_0 et v_1 consiste en un choc de vitesse σ , autrement dit :

$$w_R(\xi, v_0, v_1) = \begin{cases} v_0, & \text{si } \xi \leq \sigma, \\ v_1, & \text{si } \xi > \sigma, \end{cases} \quad \sigma = \frac{f(v_1) - f(v_0)}{v_1 - v_0}.$$

On a vu plus haut que pour tout $t \in [0, T]$, on a $x_1 + \sigma t < (x_1 + x_2)/2$ car l'onde de choc issue de x_1 au temps 0 ne peut toucher la demi-droite $x = (x_1 + x_2)/2$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{x_1+\sigma t} v_0 \partial_t \varphi + f(v_0) \partial_x \varphi \, dx \right) dt + \int_0^T \left(\int_{x_1+\sigma t}^{(x_1+x_2)/2} v_1 \partial_t \varphi + f(v_1) \partial_x \varphi \, dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{x_1+\sigma T} v_0 \varphi(T, x) \, dx - \int_{-\infty}^{x_1} v_0 \varphi(0, x) \, dx + \int_{x_1+\sigma T}^{(x_1+x_2)/2} v_1 \varphi(T, x) \, dx - \int_{x_1}^{(x_1+x_2)/2} v_1 \varphi(0, x) \, dx \\ &\quad + \int_0^T f(v_1) \varphi\left(t, \frac{x_1 + x_2}{2}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} u(T, x) \varphi(T, x) \, dx - \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx + \int_0^T f(v_1) \varphi\left(t, \frac{x_1 + x_2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Si la solution du problème de Riemann entre v_0 et v_1 est une onde de détente, on montre également¹⁰ qu'on a la relation :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dx \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} u(T, x) \varphi(T, x) \, dx - \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx + \int_0^T f(v_1) \varphi\left(t, \frac{x_1 + x_2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

¹⁰Les calculs sont similaires, bien qu'un peu plus fastidieux...

Cette relation a donc lieu indépendamment de la structure de la solution du problème de Riemann entre v_0 et v_1 . Les calculs sont similaires à ceux effectués dans les démonstrations des théorèmes 3 et 4, à la différence près qu'ici on intègre sur la bande $[0, T] \times \mathbb{R}$, alors que dans les démonstrations des théorèmes 3 et 4, on intégrait sur le demi-espace $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

De la même manière, pour $j \in \{2, \dots, N-1\}$, on peut montrer l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{(x_{j-1}+x_j)/2}^{(x_j+x_{j+1})/2} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dx \, dt &= \int_{(x_{j-1}+x_j)/2}^{(x_j+x_{j+1})/2} u(T, x) \varphi(T, x) \, dx \\ - \int_{(x_{j-1}+x_j)/2}^{(x_j+x_{j+1})/2} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx &+ \int_0^T f(v_j) \varphi\left(t, \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \, dt - \int_0^T f(v_{j-1}) \varphi\left(t, \frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) \, dt, \end{aligned}$$

ainsi que l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dx \, dt &= \int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} u(T, x) \varphi(T, x) \, dx \\ - \int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx &- \int_0^T f(v_{N-1}) \varphi\left(t, \frac{x_{N-1} + x_N}{2}\right) \, dt. \end{aligned}$$

En sommant les trois dernières égalités ci-dessus, on aboutit à :

$$I + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} u(T, x) \varphi(T, x) \, dx,$$

ce qui traduit le fait que u est une solution faible sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Pour montrer que u est une solution entropique sur $[0, T]$, on procède de la même manière, en partant de la quantité :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx,$$

avec (η, q) un couple entropie-flux et φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à support compact et positive. On découpe à nouveau l'intégrale en $N+1$ morceaux, et on utilise sur chaque morceau l'inégalité d'entropie vérifiée par la solution du problème de Riemann entre v_{j-1} et v_j . Rappelons que pour une onde de détente, on a une égalité, et non une inégalité dans le bilan d'entropie. Finalement, on aboutit à l'inégalité :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq \int_{\mathbb{R}} \eta(u(T, x)) \varphi(T, x) \, dx.$$

Le principe du maximum est clair grâce aux propriétés de la solution du problème de Riemann. Pour le comportement de la variation totale, nous allons utiliser la monotonie de la fonction $u(t, \cdot)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, (x_1 + x_2)/2]$, $[(x_1 + x_2)/2, (x_2 + x_3)/2]$, ... et $[(x_{N-1} + x_N)/2, +\infty[$. Les relations (44) et (45) montrent de plus que $u(t, \cdot)$ est continue à travers les points $(x_j + x_{j+1})/2$, $j = 1, \dots, N-1$. Soit alors $p \in \mathbb{N}$, et $z_0 < z_1 < \dots < z_p$. On considère l'ensemble de points :

$$\{z_0, z_1, \dots, z_p\} \cup \{(x_1 + x_2)/2, \dots, (x_{N-1} + x_N)/2\},$$

que l'on ordonne en ordre strictement croissant. On note $P+1$ le cardinal de cet ensemble, et $y_0 < y_1 < \dots < y_P$ ses points. Comme les points z_j font partie des y_k , on peut écrire $z_j = y_{k_j}$, où $k_0 < \dots < k_p$. Pour $t \in [0, T]$, on peut donc majorer :

$$\sum_{j=0}^{p-1} |u(t, z_{j+1}) - u(t, z_j)| = \sum_{j=0}^{p-1} |u(t, y_{k_{j+1}}) - u(t, y_{k_j})| \leq \sum_{k=0}^{P-1} |u(t, y_{k+1}) - u(t, y_k)|.$$

Pour majorer cette dernière somme, on utilise le fait que les points $(x_j + x_{j+1})/2$, $j = 1, \dots, N-1$ font partie des points y_k , et on peut donc trouver des indices $0 \leq i_1 < \dots < i_{N-1} \leq P$ tels que :

$$(x_1 + x_2)/2 = y_{i_1}, \dots, (x_{N-1} + x_N)/2 = y_{i_{N-1}}.$$

On utilise ensuite les propriétés de monotonie de $u(t, \cdot)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{P-1} |u(t, y_{i+1}) - u(t, y_i)| \\ &= \sum_{i < i_1} |u(t, y_{i+1}) - u(t, y_i)| + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{i=i_j}^{i_{j+1}-1} |u(t, y_{i+1}) - u(t, y_i)| + \sum_{i=i_{N-1}}^{P-1} |u(t, y_{i+1}) - u(t, y_i)| \\ &\leq |v_1 - v_0| + \sum_{j=1}^{N-2} |v_{j+1} - v_j| + |v_N - v_{N-1}|. \end{aligned}$$

Au final, on a obtenu :

$$\sum_{j=0}^{p-1} |u(t, z_{j+1}) - u(t, z_j)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} |v_{j+1} - v_j|.$$

La variation totale de $u(t, \cdot)$ est donc plus petite que la variation totale de la donnée initiale u_0 . En choisissant la suite particulière de points :

$$x_1 - \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \dots < \frac{x_{N-1} + x_N}{2} < x_N + \frac{x_N - x_{N-1}}{2},$$

et en utilisant les propriétés de continuité de $u(t, \cdot)$, on montre que la variation totale de $u(t, \cdot)$ est plus grande que la variation totale de la donnée initiale, ce qui finit de démontrer la propriété annoncée. \square

On s'intéresse maintenant à la continuité en temps de la solution entropique construite au théorème 7 :

Proposition 4 (Continuité en temps). *Sous les hypothèses du théorème 7, la solution entropique u vérifie la propriété suivante : pour tous temps $0 \leq s \leq t \leq T$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq \max_K |a| \text{TV}(u_0) (t - s),$$

où K désigne l'intervalle $[\min_j v_j, \max_j v_j]$.

Démonstration de la proposition 4. On décompose l'intégrale à estimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx &= \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} |u(t, x) - u(s, x)| dx \\ &+ \sum_{j=1}^{N-2} \int_{(x_j+x_{j+1})/2}^{(x_{j+1}+x_{j+2})/2} |u(t, x) - u(s, x)| dx + \int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} |u(t, x) - u(s, x)| dx, \end{aligned}$$

puis on majore chacun des termes. Pour $j = 1, \dots, N-2$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{(x_j+x_{j+1})/2}^{(x_{j+1}+x_{j+2})/2} |u(t, x) - u(s, x)| dx \\ &= \int_{(x_j+x_{j+1})/2}^{(x_{j+1}+x_{j+2})/2} \left| w_R\left(\frac{x - x_{j+1}}{t}, v_j, v_{j+1}\right) - w_R\left(\frac{x - x_{j+1}}{s}, v_j, v_{j+1}\right) \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| w_R\left(\frac{y}{t}, v_j, v_{j+1}\right) - w_R\left(\frac{y}{s}, v_j, v_{j+1}\right) \right| dy \\ &\leq \max_{[v_j, v_{j+1}]} |a| |v_{j+1} - v_j| (t - s) \leq \max_K |a| |v_{j+1} - v_j| (t - s), \end{aligned}$$

où on a utilisé la proposition 3 pour majorer la dernière intégrale. De même, la proposition 3 donne :

$$\int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} |u(t,x) - u(s,x)| dx \leq \max_K |a| |v_1 - v_0| (t-s),$$

$$\int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} |u(t,x) - u(s,x)| dx \leq \max_K |a| |v_N - v_{N-1}| (t-s).$$

En sommant les trois dernières inégalités, on obtient le résultat annoncé. \square

Pour finir ce paragraphe, on propose quelques exercices consacrés à des cas simples où il est possible de résoudre globalement en temps une juxtaposition de deux problèmes de Riemann :

Exercice 16. Supposons $f(u) = u^2/2$. Soit u_0 la fonction en escaliers suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ -1, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ -3, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Pour $t \in [0, 1/2]$, on pose :

$$u(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ -1, & \text{si } 0 < x \leq 1 - 2t, \\ -3, & \text{si } x > 1 - 2t, \end{cases}$$

et pour $t \geq 1/2$, on pose :

$$u(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq -(t - 1/2), \\ -3, & \text{si } x > -(t - 1/2). \end{cases}$$

Montrer que u est une solution entropique pour la donnée initiale u_0 . Que peut-on dire de la variation totale de $u(t, \cdot)$? Expliquer comment est construite la solution u et donner un sens à la phrase "l'interaction des deux ondes de choc issues de $x = 0$ et $x = 1$ au temps 0 produit une nouvelle onde de choc au temps $1/2$ ". Trouver un majorant de la quantité :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x) - u(s,x)| dx,$$

pour $t \geq s \geq 0$.

Exercice 17. Généraliser le résultat de l'exercice 16 au cas d'une donnée initiale u_0 de la forme :

$$u_0(x) = \begin{cases} v_0, & \text{si } x \leq x_1, \\ v_1, & \text{si } x_1 < x \leq x_2, \\ v_2, & \text{si } x > x_2, \end{cases}$$

où $x_1 < x_2$, et où $v_0 > v_1 > v_2$. On considèrera encore le cas où la fonction f est donnée par $f(u) = u^2/2$.

Après les deux exercices précédents qui étaient consacrés à des interactions de type choc-choc, l'exercice suivant est consacré à une donnée initiale produisant deux ondes de détente :

Exercice 18. Supposons $f(u) = u^2/2$. Soit u_0 la fonction en escaliers suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} v_0, & \text{si } x \leq x_1, \\ v_1, & \text{si } x_1 < x \leq x_2, \\ v_2, & \text{si } x > x_2, \end{cases}$$

où $x_1 < x_2$, et où $v_0 < v_1 < v_2$. Pour $t > 0$, on pose :

$$u(t, x) = \begin{cases} v_0, & \text{si } x \leq x_1 + v_0 t, \\ (x - x_1)/t, & \text{si } x_1 + v_0 t \leq x \leq x_1 + v_1 t, \\ v_1, & \text{si } x_1 + v_1 t \leq x \leq x_2 + v_1 t, \\ (x - x_2)/t, & \text{si } x_2 + v_1 t \leq x \leq x_2 + v_2 t, \\ v_2, & \text{si } x \geq x_2 + v_2 t. \end{cases}$$

Expliquer comment est construite u . Montrer que u est une solution entropique pour la donnée initiale u_0 , et qu'on a une égalité dans l'inégalité d'entropie (25). Que peut-on dire de la variation totale de $u(t, \cdot)$?

Pour finir, on traite le cas d'une interaction entre une onde de détente et une onde de choc :

Exercice 19. Supposons toujours $f(u) = u^2/2$. Soit u_0 la fonction en escaliers suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Pour $t \in]0, 2]$, on pose :

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x/t, & \text{si } 0 < x \leq t, \\ 1, & \text{si } t < x \leq 1 + t/2, \\ 0, & \text{si } x > 1 + t/2. \end{cases}$$

Enfin, pour $t > 2$, on pose :

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x/t, & \text{si } 0 < x \leq \sqrt{2t}, \\ 0, & \text{si } x > \sqrt{2t}. \end{cases}$$

Montrer que u est une solution entropique pour la donnée initiale u_0 définie plus haut. Calculer la variation totale de $u(t, \cdot)$, et vérifier que l'application $(t \mapsto \text{TV}(u(t, \cdot)))$ est décroissante. Quelle est la limite de cette application quand t tend vers $+\infty$? Calculer la quantité :

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx,$$

pour tout temps $t \geq 0$. Enfin, montrer que pour tout $p > 1$, $\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Généraliser au cas d'une donnée initiale de la forme :

$$u_0(x) = \begin{cases} v_0, & \text{si } x \leq x_1, \\ v_1, & \text{si } x_1 < x \leq x_2, \\ v_2, & \text{si } x > x_2, \end{cases}$$

où $x_1 < x_2$, et où $v_1 > \max(v_0, v_2)$.

5.2 Juxtaposition d'une infinité de problèmes de Riemann

On traite maintenant le cas d'une donnée initiale en escaliers présentant un nombre dénombrable de sauts. Pour simplifier, et parce que c'est le cas qui nous intéressera par la suite, on suppose que les points où la donnée initiale présente un saut sont équidistants. Le résultat est alors le suivant :

Théorème 8 (Juxtaposition de problèmes de Riemann). *Supposons que f'' ne s'annule pas. Soit $h > 0$, soit K un intervalle compact de \mathbb{R} , et soit $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite indexée par \mathbb{Z} et à valeurs dans l'intervalle K . Soit u_0 la fonction en escaliers suivante :*

$$u_0(x) = v_j, \quad \text{si } x \in]jh, (j+1)h], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Soit $T > 0$ vérifiant la condition :

$$T \sup_{v \in K} |a(v)| \leq \frac{h}{2}.$$

Pour $(t, x) \in]0, T] \times \mathbb{R}$, on définit :

$$u(t, x) = w_R\left(\frac{x - x_j}{t}, v_{j-1}, v_j\right), \quad \text{si } x \in \left] \left(j - \frac{1}{2}\right)h, \left(j + \frac{1}{2}\right)h \right], \quad j \in \mathbb{Z},$$

et on pose $u(0, x) = u_0(x)$. Alors u est une solution entropique de (1) sur l'intervalle de temps $[0, T]$. De plus, u vérifie le principe du maximum :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad \inf_{j \in \mathbb{Z}} v_j \leq u(t, x) \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}} v_j,$$

et si u_0 est à variations bornées, alors pour tout $t \in [0, T]$, $u(t, \cdot)$ est à variations bornées, et la variation totale de $u(t, \cdot)$ est constante :

$$\forall t \in [0, T], \quad \text{TV}(u(t, \cdot)) = \text{TV}(u_0) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |v_j - v_{j-1}|.$$

En supposant toujours que u_0 est à variations bornées, on a l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq \max_K |a| \text{TV}(u_0) (t - s),$$

pour tous temps $0 \leq s \leq t \leq T$.

La démonstration du théorème 8 est similaire à la démonstration du théorème 7 et à la démonstration de la proposition 4. L'idée principale est que, en vertu de la restriction sur le temps final T , les ondes de choc ou de détente émanant de deux problèmes de Riemann voisins n'ont pas le temps d'interagir avant le temps T . La solution u construite dans l'énoncé du théorème 8 est continue à travers chaque point $(j + 1/2)h$, $j \in \mathbb{Z}$. La démonstration se déroule ainsi de la même manière que pour le théorème 7. Remarquons juste qu'il est important que les v_j appartiennent à un même intervalle compact, sans quoi on ne pourrait pas nécessairement trouver un temps $T > 0$ tel que la condition :

$$T \sup_{v \in [v_j, v_{j+1}]} |a(v)| \leq \frac{h}{2},$$

soit vérifiée pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On pourrait par ailleurs supposer que les points de discontinuité de la donnée initiale ne sont pas équidistants, mais il faudrait alors supposer que l'écart entre deux points consécutifs est borné inférieurement uniformément, ceci afin d'assurer l'existence d'un intervalle de temps $[0, T]$ sur lequel les ondes issues de deux problèmes de Riemann voisins n'interagissent pas.

6 Schéma de Glimm

La résolution du problème de Riemann est à la base des théorèmes d'existence de solutions pour les équations de la forme (1). Le principe sous-jacent est le suivant : une donnée initiale discontinue peut être approchée par une fonction en escaliers, et on construit alors une solution approchée en résolvant des problèmes de Riemann. Il faut ensuite gérer les interactions d'ondes provenant de deux problèmes de Riemann voisins. Cette stratégie est à la base du schéma de Glimm, qui a été introduit pour résoudre l'équation (1) dans le cas d'une donnée initiale u_0 dans l'espace $BV(\mathbb{R})$. Énonçons maintenant le résultat principal d'existence pour (1) :

Théorème 9 (Théorème de Glimm). *Supposons que f'' ne s'annule pas. Soit $u_0 \in BV(\mathbb{R})$. Alors il existe une solution entropique $u \in L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ de (1) avec la donnée initiale u_0 , et cette solution vérifie les propriétés suivantes :*

- i) *Principe du maximum : $\inf u_0 \leq u(t, x) \leq \sup u_0$ pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$.*
- ii) *Variation totale décroissante : pour tout $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$ est à variations bornées sur \mathbb{R} , et l'application $(t \mapsto TV(u(t, \cdot)))$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.*
- iii) *Continuité en temps : il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de la donnée initiale u_0 telle que pour tous temps $t \geq s \geq 0$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq C TV(u_0) (t - s).$$

La constante C ne dépend que de l'intervalle dans lequel u_0 prend ses valeurs.

La démonstration du théorème 9 est schématisée à la figure 4. On part de la donnée initiale u_0 , et on l'approche par une fonction constante par morceaux. C'est la procédure d'échantillonnage. La précision de cette approximation est mesurée en fonction d'un petit paramètre. Une fois obtenue cette fonction constante par morceaux, on résout l'équation (1) sur un intervalle de temps $[0, T_1]$ suffisamment court. Cela est possible grâce au théorème 8, pourvu que T_1 soit bien choisi. Au temps T_1 , la solution obtenue n'est plus constante par morceaux car elle peut contenir des ondes de détente. On approche donc, à nouveau, la solution obtenue au temps T_1 par une fonction constante par morceaux. Puis on résout l'équation (1) sur l'intervalle de temps $[T_1, T_1 + T_2]$ etc. Le but est de montrer que, lorsque le paramètre mesurant les approximations successives tend vers 0, alors la suite de solutions approchées ainsi construites converge bien vers une limite qui est solution de (1) avec la donnée initiale u_0 . Cela pose plusieurs problèmes, le premier étant de s'assurer que pour un paramètre d'approximation fixé, le processus défini ci-dessus permet bien de définir une solution approchée définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ (avec les notations introduites ci-dessus, il faut s'assurer qu'on peut choisir les temps T_k de sorte que la série des T_k diverge). Une fois ce premier problème résolu, le second problème est de montrer que la suite des solutions approchées converge bien vers une limite et dans ce cas, de préciser dans quel sens la convergence a lieu. Il s'agit d'un problème de compacité pour une suite de fonctions. Enfin, le dernier problème consiste à montrer que la limite obtenue est effectivement une solution entropique de (1) pour la donnée initiale u_0 , et que cette solution vérifie les propriétés énoncées au théorème 9. En d'autres termes, il faut montrer que le schéma d'approximation est *consistant* avec l'équation (1). La base de la démonstration est bien sûr que toutes les propriétés énoncées au théorème 9 sont vraies pour la solution du problème de Riemann, ainsi que pour la solution d'une juxtaposition de problèmes de Riemann.

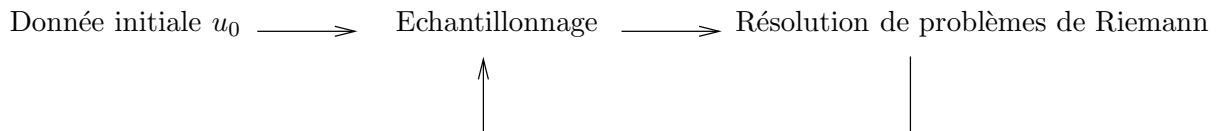


FIG. 4 – Schéma de construction des solutions approchées.

Le paragraphe suivant est consacré à la définition du schéma de Glimm proprement dit, c'est-à-dire à la construction des solutions approchées de (1). Cette construction repose sur une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que l'on se donne au préalable. La convergence de la suite de solutions approchées ainsi construites est liée à certaines propriétés de cette suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous verrons plus loin que l'équirépartition de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une condition nécessaire pour assurer la convergence du schéma de Glimm (la notion d'équirépartition d'une suite est rappelée plus loin). Pour finir, on étudiera la convergence du schéma de Glimm, et on démontrera le théorème 9.

On rappelle la convention adoptée ici de ne considérer que des fonctions à variations bornées qui sont continues à gauche.

6.1 Définition des solutions approchées

On se donne un nombre $\Delta x > 0$, et on se donne $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'intervalle ouvert $] -1, 1[$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on note I_j l'intervalle $](j-1)\Delta x, (j+1)\Delta x]$, de sorte que :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I_{2j} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I_{2j+1}.$$

Dans les deux cas, on a une union d'intervalles deux-à-deux disjoints. Dans tout ce qui suit, on note $2\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers pairs, et $1+2\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers impairs. Plus généralement, si $p \in \mathbb{Z}$, on note $p+2\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $k-p \in 2\mathbb{Z}$. On note K l'intervalle compact $[\inf u_0, \sup u_0]$, et on se fixe un nombre $\lambda > 0$ vérifiant la condition :

$$\lambda \sup_{w \in K} |a(w)| \leq 1. \quad (46)$$

On définit alors $\Delta t = \lambda \Delta x > 0$, de sorte que (46) se réécrit :

$$\Delta t \sup_K |a| \leq \Delta x.$$

Dans tout ce qui suit, Δx peut être vu comme le paramètre mesurant l'approximation que l'on fait entre la solution exacte u de (1) avec la donnée initiale u_0 (dont on cherche à montrer l'existence) et la fonction v que l'on va construire. Le but final sera de montrer que quand Δx tend vers 0, le nombre $\lambda > 0$ étant fixé, la fonction v (dont la définition dépend de Δx) tend, en un certain sens que l'on précisera plus loin, vers une solution entropique de (1). Pour le moment, on se concentre sur la définition de la fonction v . Le paramètre Δx étant fixé, on omet pour l'instant de préciser la dépendance de v par rapport à Δx .

On va définir, par récurrence sur l'entier n , la fonction v sur la bande $[0, n\Delta t] \times \mathbb{R}$. Pour $n = 0$, on définit $v(0, x)$ comme suit :

$$\forall j \in 2\mathbb{Z}, \quad \forall x \in I_j, \quad v(0, x) = u_0((j + a_0)\Delta x), \quad (47)$$

de sorte que $v(0, \cdot)$ est une fonction constante sur chaque intervalle de la forme I_j , avec j pair. Les sauts de $v(0, \cdot)$ sont donc localisés en des points équidistants, de pas $2\Delta x$. Les points $(j + a_0)\Delta x$, $j \in 2\mathbb{Z}$, sont les points d'échantillonnage de la donnée initiale.

Détaillons maintenant la première étape de la récurrence. Autrement dit, construisons la fonction v sur la bande $[0, \Delta t] \times \mathbb{R}$. Tout d'abord, on remarque que les valeurs prises par $v(0, \cdot)$ appartiennent toutes à l'intervalle compact K défini plus haut car ces valeurs sont calculées comme limites d'éléments de K . En vertu de la condition (46), le théorème 8 montre que l'on sait construire une solution entropique w , sur l'intervalle de temps $[0, \Delta t]$, du problème :

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w) = 0, & t \in [0, \Delta t], x \in \mathbb{R}, \\ w(0, x) = v(0, x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (48)$$

On définit alors v sur l'intervalle ouvert $]0, \Delta t[$ comme suit :

$$\forall t \in]0, \Delta t[, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v(t, x) = w(t, x).$$

On note également $v(\Delta t^-, \cdot)$ la fonction $w(\Delta t, \cdot)$, c'est-à-dire la valeur au temps Δt de la solution de (48) fournie par le théorème 8. Comme on l'a remarqué plus tôt, la fonction $v(\Delta t^-, \cdot)$ ainsi définie n'est pas constante par morceaux car elle peut contenir des ondes de détente. Le point crucial est qu'on ne va pas définir la solution approchée v au temps Δt comme étant $v(\Delta t^-, \cdot)$, car sinon on ne saurait pas comment prolonger v sur l'intervalle $[\Delta t, 2 \Delta t]$. En effet, pour l'instant on ne sait résoudre l'équation aux dérivées partielles (1) que pour des données initiales en escaliers. Au lieu de définir v au temps Δt comme étant $v(\Delta t^-, \cdot)$, on applique une nouvelle procédure d'échantillonnage. On définit donc la fonction v au temps Δt de la manière suivante :

$$\forall j \in 1 + 2\mathbb{Z}, \quad \forall x \in I_j, \quad v(\Delta t, x) = v(\Delta t^-, (j + a_1) \Delta x),$$

Noter que les points d'échantillonnage sont maintenant les points $(j + a_1) \Delta x$ avec $j \in 1 + 2\mathbb{Z}$. Les fonctions $v(\Delta t, \cdot)$ et $v(0, \cdot)$ sont donc constantes sur des grilles qui sont décalées de Δx l'une par rapport à l'autre. Par ailleurs, en utilisant le théorème 8, on voit que $v(t, x)$ prend ses valeurs dans K pour tout $t \in [0, \Delta t[$, et même pour $t = \Delta t$ car la fonction que l'on a notée $v(\Delta t^-, \cdot)$ prend ses valeurs dans K , et donc $v(\Delta t, \cdot)$ prend aussi ses valeurs dans K .

Passons maintenant au cas général de la récurrence. Supposons que v a été construite sur l'ensemble $[0, n \Delta t] \times \mathbb{R}$ et que, sur cet ensemble de définition, v vérifie les propriétés suivantes :

- i) $v(0, \cdot)$ est définie par (47).
- ii) v prend ses valeurs dans l'intervalle K .
- iii) Sur tout intervalle $[k \Delta t, (k + 1) \Delta t[$, avec $k \in \{0, \dots, n - 1\}$, v coïncide avec la solution entropique w_k du problème :

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w) = 0, & t \in [k \Delta t, (k + 1) \Delta t], x \in \mathbb{R}, \\ w(k \Delta t, x) = v(k \Delta t, x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (49)$$

dont on sait qu'elle existe sur l'intervalle de temps $[k \Delta t, (k + 1) \Delta t]$. On notera $v((k + 1) \Delta t^-, \cdot)$ la valeur de la solution entropique w_k de ce problème au temps $(k + 1) \Delta t$.

- iv) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, et pour tout $x \in I_j$, $j \in k + 2\mathbb{Z}$, on a :

$$v(k \Delta t, x) = v(k \Delta t^-, (j + a_k) \Delta x).$$

Pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, il suffit de remarquer que $v(n \Delta t, \cdot)$ est une fonction en escaliers prenant ses valeurs dans K , et dont les sauts sont localisés en des points équidistants, de pas $2 \Delta x$. Le théorème 8 permet de construire une solution entropique w_n sur l'intervalle de temps $[n \Delta t, (n + 1) \Delta t]$ du problème :

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w) = 0, & t \in [n \Delta t, (n + 1) \Delta t], x \in \mathbb{R}, \\ w(n \Delta t, x) = v(n \Delta t, x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (50)$$

On pose alors :

$$\forall t \in]n \Delta t, (n + 1) \Delta t[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad v(t, x) = w_n(t, x).$$

On note également $v((n + 1) \Delta t^-, \cdot)$ la fonction $w_n((n + 1) \Delta t, \cdot)$, c'est-à-dire la valeur au temps $(n + 1) \Delta t$ de la solution entropique w_n de (50). On applique ensuite la procédure d'échantillonnage : pour tout $j \in n + 1 + 2\mathbb{Z}$ et pour tout $x \in I_j$, on pose :

$$v((n + 1) \Delta t, x) = v((n + 1) \Delta t^-, (j + a_{n+1}) \Delta x).$$

Il est clair que v prend ses valeurs dans K (on applique encore le théorème 8), et les autres points de la récurrence sont immédiats d'après la construction.

On a donc montré comment construire la fonction v sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Cette fonction vérifie les points **i)**, **ii)**, **iii)**, **iv)** ci-dessus pour tout entier n . La construction de v dépend du choix

de Δx , du choix du paramètre λ , et de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'algorithme permettant de construire v est appelé le schéma de Glimm. A partir de maintenant, on s'intéresse au comportement de v lorsque le paramètre Δx tend vers 0, le paramètre λ ayant été fixé une fois pour toutes vérifiant (46), et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant également fixée. On notera v_Δ la fonction construite par le schéma de Glimm avec le paramètre Δx . Au prochain paragraphe, nous allons voir en quoi la convergence de v_Δ lorsque Δx tend vers 0, le paramètre λ restant fixe, est liée à une propriété dite d'équirépartition de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme λ est fixe, il est clair que Δt tend également vers 0 lorsque Δx tend vers 0.

6.2 Condition nécessaire de convergence : étude d'un cas modèle

Considérons le cas de l'équation de Burgers $f(u) = u^2/2$, et prenons une donnée initiale de la forme :

$$u_0(x) = \begin{cases} 2\alpha, & \text{si } x \leq 0, \\ 0, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est un nombre donné. La solution entropique correspondante est un choc se déplaçant à la vitesse α (voir le théorème 6). Considérons $\Delta x > 0$ et choisissons $\lambda > 0$ tel que (46) soit vérifiée, autrement dit $2\lambda\alpha \leq 1$. On applique le schéma de Glimm à la donnée initiale u_0 .

Au temps 0, on a tout d'abord $v_\Delta(0, x) = 2\alpha$ si $x \in I_j$ avec j pair et $j \leq -2$. On a également $v_\Delta(0, x) = 0$ si $x \in I_j$ avec j pair et $j \geq 2$. Dans le cas où $a_0 > 0$, on a $v_\Delta(0, x) = 0$ si $x \in I_0$, et dans le cas où $a_0 \leq 0$, on a $v_\Delta(0, x) = 2\alpha$ si $x \in I_0$. Posons $j_0 = -2$ dans le cas $a_0 > 0$, et $j_0 = 0$ dans le cas $a_0 \leq 0$. Avec cette définition, on obtient :

$$v_\Delta(0, x) = \begin{cases} 2\alpha, & \text{si } x \in I_j, j \in 2\mathbb{Z} \text{ et } j \leq j_0, \\ 0, & \text{si } x \in I_j, j \in 2\mathbb{Z} \text{ et } j > j_0. \end{cases}$$

Quand on construit v_Δ sur l'intervalle de temps $]0, \Delta t]$, on doit résoudre des problèmes de Riemann entre deux valeurs consécutives prises par la fonction en escaliers $v_\Delta(0, \cdot)$. Trois cas se présentent : soit on doit résoudre un problème de Riemann entre 2α et 2α (cela se passe entre les intervalles I_j et I_{j+1} pour $j \in 2\mathbb{Z}$ et $j < j_0$), soit on doit résoudre un problème de Riemann entre 2α et 0 (cela se passe entre I_{j_0} et I_{j_0+1}), soit on doit résoudre un problème de Riemann entre 0 et 0 (cela se passe entre I_j et I_{j+1} pour $j \in 2\mathbb{Z}$ et $j > j_0$). Le premier et le troisième cas sont triviaux, tandis que le second se résout par un choc de vitesse α .

Au temps Δt , on applique la procédure d'échantillonnage. On remarque tout d'abord que $v_\Delta(\Delta t, x) = 2\alpha$ si $x \in I_j$ avec j impair et $j \leq j_0 - 1$. De même, $v_\Delta(\Delta t, x) = 2\alpha$ si $x \in I_j$ avec j impair et $j \geq j_0 + 3$. La valeur de $v_\Delta(\Delta t, x)$ pour $x \in I_{j_0+1}$ dépend du nombre a_1 . Si $a_1 \Delta x \leq \alpha \Delta t$, on a $v_\Delta(\Delta t, x) = 2\alpha$ pour $x \in I_{j_0+1}$. A l'inverse, si $a_1 \Delta x > \alpha \Delta t$, on a $v_\Delta(\Delta t, x) = 0$ pour $x \in I_{j_0+1}$. On pose alors $j_1 = j_0 + 1$ si $a_1 \Delta x \leq \alpha \Delta t$, et $j_1 = j_0 - 1$ si $a_1 \Delta x > \alpha \Delta t$. Avec cette définition, on a :

$$v_\Delta(\Delta t, x) = \begin{cases} 2\alpha, & \text{si } x \in I_j, j \in 1 + 2\mathbb{Z} \text{ et } j \leq j_1, \\ 0, & \text{si } x \in I_j, j \in 1 + 2\mathbb{Z} \text{ et } j > j_1. \end{cases}$$

Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $j_n \in n + 2\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$v_\Delta(n \Delta t, x) = \begin{cases} 2\alpha, & \text{si } x \in I_j, j \in n + 2\mathbb{Z} \text{ et } j \leq j_n, \\ 0, & \text{si } x \in I_j, j \in n + 2\mathbb{Z} \text{ et } j > j_n, \end{cases}$$

et la suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad j_{n+1} - j_n = \begin{cases} +1, & \text{si } a_{n+1} \Delta x \leq \alpha \Delta t, \\ -1, & \text{si } a_{n+1} \Delta x > \alpha \Delta t. \end{cases}$$

Une telle suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie automatiquement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad j_n = j_0 + n - 2 \operatorname{Card} \left\{ m \in \{1, \dots, n\}, a_m > \alpha \lambda \right\}. \quad (51)$$

Rappelons que la solution exacte que l'on cherche à approcher est un choc de vitesse α . La ligne brisée passant par les points $(n \Delta t, j_n \Delta x)$ est une approximation de la position du choc. Grosso modo, v vaut 2α à gauche de cette ligne brisée, et v_Δ vaut 0 à droite de cette ligne brisée. Quand Δx tend vers 0, λ restant fixe, on souhaite que la fonction v_Δ calculée par le schéma de Glimm se rapproche de la vraie solution entropique. En particulier, il semble relativement intuitif que la ligne brisée doit se "rapprocher" de la droite de pente α quand Δx tend vers 0. Pour que cette ligne brisée ressemble à une droite, il faut tout d'abord que le rapport :

$$\frac{j_n \Delta x - j_0 \Delta x}{n \Delta t} = \frac{j_n - j_0}{n \lambda},$$

tende vers une limite finie quand n tend vers $+\infty$ (autrement la ligne brisée oscillerait ou divergerait, mais dans tous les cas ne ressemblerait pas à une droite). La limite de la quantité $(j_n - j_0)/(n \lambda)$ est, en quelque sorte, la pente moyenne de la ligne brisée. On veut que cette pente moyenne, qui a priori dépend de Δx , tende vers α quand Δx tend vers 0. Or on remarque que la suite (j_n) ne dépend pas de Δx , mais ne dépend que de λ et de la suite (a_n) . Donc la pente moyenne de la ligne brisée ne dépend pas non plus de Δx . Pour que cette pente tende vers α quand Δx tend vers 0, il faut qu'elle soit égale à α . On demande donc que la suite (j_n) vérifie la propriété :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{j_n - j_0}{n \lambda} = \alpha.$$

Compte tenu de la relation (51), cette relation se réécrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card} \left\{ m \in \{1, \dots, n\}, a_m > \alpha \lambda \right\} = \frac{1 - \alpha \lambda}{2}. \quad (52)$$

Nous avons vu au début de ce paragraphe que la restriction sur le nombre λ était $2\alpha\lambda \leq 1$, ce qui n'était rien d'autre que (46) dans le cas particulier $f(u) = u^2/2$, avec la donnée initiale u_0 introduite ci-dessus. La restriction sur λ a pour but d'assurer que les ondes (choc ou détente) issues des différents problèmes de Riemann ne puissent pas parcourir la distance Δx en un temps inférieur à Δt . Dans le cas particulier étudié ici, il n'y a qu'une seule onde qui apparaît lorsqu'on résout les différents problèmes de Riemann, et il s'agit d'une onde de choc de vitesse α . On peut donc relaxer la condition sur λ et ne demander que l'inégalité $\alpha\lambda \leq 1$. Cela n'affecte que la définition du pas de temps Δt . Si on s'autorise toutes les valeurs de $\lambda > 0$ telles que $\alpha\lambda \leq 1$, et si on demande que la relation (52) ait lieu indépendamment des choix de α et λ , on aboutit à la relation :

$$\forall \theta \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card} \left\{ m \in \{1, \dots, n\}, a_m > \theta \right\} = \frac{1 - \theta}{2}. \quad (53)$$

On peut faire la même analyse avec la donnée initiale :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ -2\alpha, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$, cette donnée initiale conduisant à un choc de vitesse $-\alpha$. Au final, cela revient à changer θ en $-\theta$ dans la relation (53).

Pour que le schéma de Glimm approche les solutions entropiques de (1), il semble assez naturel de demander à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vérifier la propriété :

$$\forall \theta \in [-1, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card} \left\{ m \in \{1, \dots, n\}, a_m > \theta \right\} = \frac{1 - \theta}{2}. \quad (54)$$

On dira d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (54) qu'elle est *équirépartie* dans l'intervalle $] - 1, 1[$. Il n'est pas dur de voir que la propriété (54) est équivalente à ce que pour tout intervalle semi-ouvert $I =]a, b] \subset] - 1, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card} \left\{ m \in \{1, \dots, n\}, a_m \in I \right\} = \frac{b-a}{2},$$

où $b - a$ n'est rien d'autre que la mesure de Lebesgue de l'intervalle I . Il n'est pas non plus très difficile de voir que cette propriété est vérifiée pour tous les intervalles semi-ouverts si et seulement si la même propriété est vraie pour tous les intervalles (fermés, ouverts, ou semi-ouverts). Autrement dit, une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie si et seulement si pour tout intervalle $I \subset] - 1, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card} \left\{ m \in \{1, \dots, n\}, a_m \in I \right\} = \frac{\mu(I)}{2}, \quad (55)$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Il faut bien noter que dans ce paragraphe, on n'a pas établi de résultat rigoureux, pour la simple raison que l'on n'a pas précisé ce que l'on entendait par "convergence du schéma de Glimm". En particulier, on n'a pas précisé en quel sens la fonction v_Δ devait tendre vers une limite solution entropique de (1). Néanmoins, l'analyse précédente met en lumière le lien entre la propriété d'équirépartition (55) et le fait que le schéma de Glimm approche bien une solution entropique de (1). En particulier, il semble naturel de demander à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'être équirépartie si l'on espère montrer que la fonction v_Δ converge, quand Δx tend vers 0, vers une solution entropique de (1), et ceci quel que soit le sens que l'on donne à cette notion de convergence. Pour s'en convaincre, l'exercice suivant traite d'un cas simple où une suite qui n'est pas équirépartie conduit à une très mauvaise solution approchée v_Δ :

Exercice 20. Soit $f(u) = u^2/2$, et soit u_0 la donnée initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 0, \\ 0, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Quelle est la solution entropique pour la donnée initiale u_0 ?

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite valant identiquement $3/4$, et soit $\lambda = 1/2$. Soit alors v_Δ la fonction construite à l'aide du schéma de Glimm. Montrer, par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_\Delta(n \Delta t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in I_j, j \in n + 2\mathbb{Z} \text{ et } j \leq -n, \\ 0, & \text{si } x \in I_j, j \in n + 2\mathbb{Z} \text{ et } j > -n. \end{cases}$$

En déduire que v_Δ vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} |v_\Delta(t, x)| dt dx = \frac{3}{4} (\Delta x)^2,$$

et que v_Δ tend vers 0 pour presque-tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ lorsque Δx tend vers 0. La fonction v_Δ constitue-t-elle une bonne approximation de la solution entropique associée à la donnée initiale u_0 ?

6.3 Démonstration du théorème 9

On reprend désormais l'analyse du schéma de Glimm dans le cas général, tel qu'on l'a défini au paragraphe 6.1. En particulier, la solution approchée v_Δ vérifie les points **i)**, **ii)**, **iii)**, **iv)** explicités précédemment. Dans un premier temps, on va montrer des estimations sur la solution v_Δ . Ces estimations permettront d'établir une propriété de compacité sur la suite de solutions

approchées, notée $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$, que l'on obtient en choisissant les valeurs $\Delta x = 2^{-p}$, $p \in \mathbb{N}$. On obtiendra alors la convergence, dans une certaine topologie, d'une sous-suite que l'on notera encore $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Dans un second temps, on montrera que l'erreur de *consistance* du schéma de Glimm tend vers 0 quand le pas Δx tend vers 0. Ainsi on montrera que la limite de la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une solution faible de (1). Cette limite satisfera les autres propriétés énoncées au théorème 9. Pour établir ces propriétés, nous allons utiliser quelques notions de topologie et de théorie de la mesure qu'il est utile de rappeler maintenant.

6.3.1 Quelques rappels d'intégration

L'intervalle ouvert $] - 1, 1[$ est un espace métrique pour la distance $d(x, y) = |y - x|$. Ainsi l'espace produit $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$, qui n'est rien d'autre que l'espace des suites indéxées par \mathbb{N} et à valeurs dans $] - 1, 1[$, est muni naturellement de la *topologie produit*. Cette topologie est définie comme suit : un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ est un ouvert si pour tout élément $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et il existe un nombre $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété :

$$\forall (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in] - 1, 1[^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{j=0}^N |c_j - b_j| < \varepsilon \implies (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}.$$

On vérifie en effet qu'avec une telle définition l'ensemble vide et $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ sont des ouverts, une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, et une intersection finie d'ouverts est un ouvert. L'espace $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ est ainsi muni d'une topologie. A cette topologie est naturellement associée une *tribu* qui est la tribu engendrée par les ouverts : cette tribu est la tribu dite *borélienne*.

Par ailleurs, on sait que pour tout entier p , le produit fini $] - 1, 1[^p$ est également muni de sa tribu borélienne, et de la mesure de probabilités :

$$\nu_p = 2^{-p} \underbrace{\mu \otimes \cdots \otimes \mu}_{p \text{ fois}},$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $] - 1, 1[$. On voudrait en quelque sorte prendre la limite $p \rightarrow +\infty$ dans cette dernière relation, et munir le produit infini $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ d'une mesure de probabilités qui serait la "limite" des mesures ν_p . Une telle opération est effectivement réalisable ; il s'agit d'un résultat délicat de théorie de l'intégration. Ce résultat peut se formuler comme suit : il existe une unique mesure borélienne de probabilités, notée ν , sur l'espace $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ (il s'agit donc d'une mesure définie sur la tribu borélienne de $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$, de masse totale égale à 1) telle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction g positive et mesurable sur $] - 1, 1[^p$ on a la relation :

$$\int_{]-1, 1[^{\mathbb{N}}} g \, d\nu = \int_{]-1, 1[^p} g \, d\nu_p = 2^{-p} \int_{]-1, 1[^p} g(a_0, \dots, a_{p-1}) \, da_0 \dots da_{p-1}. \quad (56)$$

Expliquons en détails ce que signifie la relation (56). Si g est une fonction positive et mesurable sur $] - 1, 1[^p$, alors on peut également voir g comme une fonction définie sur le produit infini $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ mais ne dépendant que d'un nombre fini d'arguments. Autrement dit, on identifie les deux applications :

$$(a_0, \dots, a_{p-1}) \in] - 1, 1[^p \mapsto g(a_0, \dots, a_{p-1}), \quad \text{et} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in] - 1, 1[^{\mathbb{N}} \mapsto g(a_0, \dots, a_{p-1}).$$

Le point important est que l'application g , vue comme application définie sur $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ est mesurable pour la tribu borélienne de $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ à partir du moment où g est mesurable par rapport à la tribu borélienne de $] - 1, 1[^p$ et réciproquement. La relation (56) indique alors que l'intégrale de la fonction g , vue comme fonction sur $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$, pour la mesure ν est égale à l'intégrale de g , vue comme fonction sur $] - 1, 1[^p$, pour la mesure ν_p . Si cette dernière intégrale est finie, autrement dit si g est intégrable sur $] - 1, 1[^p$, alors la fonction g est également intégrable sur $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ pour la mesure ν .

La mesure ν est appelée la mesure produit sur $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$. Pour alléger les notations, nous noterons \mathcal{A} l'ensemble des suites à valeurs dans $] - 1, 1[$.

6.3.2 Une caractérisation des solutions entropiques

Dans la démonstration du théorème 9, on aura besoin du résultat suivant qui donne une caractérisation des solutions entropiques bornées de (1) :

Proposition 5 (Caractérisation des solutions entropiques). *Soit $u \in L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ une solution faible de (1). Alors u est une solution entropique de (1) si et seulement si pour tout nombre rationnel k et pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive, on a l'inégalité :*

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u - k| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(u - k) (f(u) - f(k)) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - k| \varphi(0, x) \, dx \geq 0. \quad (57)$$

On rappelle que sgn désigne la fonction signe, nulle en 0, égale à +1 pour les nombres strictement positifs et égale à -1 pour les nombres strictement négatifs. La proposition 5 montre qu'une solution faible est une solution entropique si et seulement si elle vérifie les inégalités d'entropie (25) pour toutes les entropies de Kruzkov $|u - k|$, où k décrit l'ensemble des nombres rationnels.

Démonstration de la proposition 5. La démonstration est similaire à celle du théorème 3 et utilise des arguments que nous avons déjà invoqués à cette occasion. On suppose dans un premier temps que $u \in L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ est une solution entropique de (1). On se donne un nombre rationnel k et une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive. On va montrer que l'inégalité (57) a lieu. Pour $\varepsilon > 0$, on définit le couple entropie-flux :

$$\eta_\varepsilon(v) = \sqrt{\varepsilon + (v - k)^2}, \quad q_\varepsilon(v) = \int_k^v \frac{f'(w)(w - k)}{\sqrt{\varepsilon + (w - k)^2}} \, dw.$$

On a déjà vu dans la démonstration du théorème 3 les faits suivants :

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \eta_\varepsilon(v) = |v - k|, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q_\varepsilon(v) = \operatorname{sgn}(v - k) (f(v) - f(k)).$$

On part de l'inégalité d'entropie satisfaite par u :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta_\varepsilon(u) \partial_t \varphi + q_\varepsilon(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq 0,$$

puis on passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Par le théorème de convergence dominée, en utilisant que u et u_0 sont bornées, on obtient l'inégalité (57).

On suppose désormais que u est une solution faible bornée de (1) vérifiant l'inégalité (57) pour tout nombre rationnel k et pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive. On va montrer que u est une solution entropique de (1). Pour cela, on se donne un couple entropie-flux (η, q) et on se donne une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive. On note K un intervalle compact de \mathbb{R} dans lequel u et u_0 prennent leurs valeurs. On utilise le résultat suivant qui est un très léger raffinement du lemme 2 et que le lecteur démontrera sans peine avec des arguments totalement similaires :

Lemme 3. *Pour tout $\delta > 0$ il existe un entier N , des nombres réels a, b, d , des nombres rationnels k_1, \dots, k_N , et des nombres réels positifs c_1, \dots, c_N tels que si l'on définit :*

$$\eta_\delta(v) = a + b v + \sum_{j=1}^N c_j |v - k_j|, \quad q_\delta(v) = d + b f(v) + \sum_{j=1}^N c_j \operatorname{sgn}(v - k_j) (f(v) - f(k_j)),$$

alors on a :

$$\sup_{v \in K} |\eta(v) - \eta_\delta(v)| + \sup_{v \in K} |q(v) - q_\delta(v)| \leq \delta.$$

Pour montrer que u vérifie l'inégalité d'entropie (25), on approche η et q , au sens de la convergence uniforme sur K , par des suites (η_p) et (q_p) ayant la forme donnée au lemme 3. Ces suites font intervenir des nombres rationnels k_1, \dots, k_{N_p} , et des coefficients positifs c_1, \dots, c_{N_p} . En appliquant l'inégalité (57) pour chaque k_j et le fait que u est solution faible de (1), on obtient tout d'abord :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \eta_p(u) \partial_t \varphi + q_p(u) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta_p(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq 0,$$

ce qui donne (25) par passage à la limite $p \rightarrow +\infty$. On a bien montré que u est une solution entropique de (1) si u vérifie les inégalités (57). \square

Il est clair que dans la proposition 5, on peut considérer des nombres réels k au lieu des nombres rationnels et le résultat reste vrai. L'avantage de ne considérer que des nombres rationnels, comme on le verra plus loin, est qu'on ne doit vérifier qu'un ensemble dénombrable d'inégalités pour chaque fonction test φ .

Le résultat de la proposition 5 admet un analogue immédiat dans le cas des solutions entropiques sur un intervalle de temps borné :

Proposition 6 (Caractérisation des solutions entropiques sur un intervalle de temps borné). *Soit $T_1 < T_2$, et soit $u \in L^\infty([T_1, T_2] \times \mathbb{R})$ une solution faible de (43) sur l'intervalle de temps $[T_1, T_2]$. Alors u est une solution entropique de (43) sur l'intervalle de temps $[T_1, T_2]$ si et seulement si pour tout nombre rationnel k et pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[T_1, T_2] \times \mathbb{R}$ et positive, on a l'inégalité :*

$$\begin{aligned} \int_{[T_1, T_2] \times \mathbb{R}} |u - k| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(u - k) (f(u) - f(k)) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} |\underline{u}(x) - k| \varphi(T_1, x) \, dx \\ \geq \int_{\mathbb{R}} |u(T_2, x) - k| \varphi(T_2, x) \, dx. \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons mis en place tous les outils nécessaires à la démonstration du théorème 9, revenons à l'étude des solutions approchées v_Δ obtenues par le schéma de Glimm.

6.3.3 Bornes sur la suite des solutions approchées

On montre tout d'abord que l'on peut contrôler la variation totale de la solution approchée $v_\Delta(t, \cdot)$ pour tout temps $t \geq 0$, uniformément par rapport à Δx :

Lemme 4 (Bornes sur la variation totale). *Pour tout $t \geq 0$, la fonction $v_\Delta(t, \cdot)$ est à variations bornées sur \mathbb{R} et l'application $(t \mapsto \operatorname{TV}(v_\Delta(t, \cdot)))$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus, la variation totale de $v_\Delta(0, \cdot)$ est inférieure à la variation totale de u_0 .*

Démonstration du lemme 4. Il suffit de montrer par récurrence que pour tout entier n , on a la propriété suivante : pour tout $t \in [0, n \Delta t]$, la fonction $v_\Delta(t, \cdot)$ est à variations bornées sur \mathbb{R} , et l'application $(t \mapsto \operatorname{TV}(v_\Delta(t, \cdot)))$ est décroissante sur $[0, n \Delta t]$.

Commençons par montrer cette propriété pour $n = 0$. La fonction $v_\Delta(0, \cdot)$ est une fonction en escaliers constante sur chaque intervalle $I_j =](j-1) \Delta x, (j+1) \Delta x]$, $j \in 2\mathbb{Z}$. Pour montrer que $v_\Delta(0, \cdot)$ est à variations bornées, il suffit donc de montrer que les sommes partielles :

$$\sum_{k=-N}^N |v_\Delta(0, 2(k+1) \Delta x) - v_\Delta(0, 2k \Delta x)|$$

sont bornées indépendamment de N . Rappelons que la valeur de $v_\Delta(0, \cdot)$ sur l'intervalle I_j , $j \in 2\mathbb{Z}$, est donnée par l'échantillonnage (47). On se propose donc de majorer la somme :

$$\sum_{k=-N}^N \left| u_0((2k+2+a_0) \Delta x) - u_0((2k+a_0) \Delta x) \right|.$$

Comme la suite $(-2N + a_0) \Delta x, \dots, (2N + 2 + a_0) \Delta x$ est croissante, on a :

$$\sum_{k=-N}^N \left| u_0((2k + 2 + a_0) \Delta x) - u_0((2k + a_0) \Delta x) \right| \leq \text{TV}(u_0),$$

ce qui montre que la fonction en escaliers $v_\Delta(0, \cdot)$ est à variations bornées, et que sa variation totale est inférieure à celle de u_0 .

Supposons donc vérifiée jusqu'à l'entier n la propriété : pour tout $t \in [0, n \Delta t]$, la fonction $v_\Delta(t, \cdot)$ est à variations bornées sur \mathbb{R} , et l'application $(t \mapsto \text{TV}(v_\Delta(t, \cdot)))$ est décroissante sur $[0, n \Delta t]$. Grâce au théorème 8, on sait que la solution entropique du problème (50) est de variation totale constante pour $t \in [n \Delta t, (n + 1) \Delta t]$. On en déduit que pour tout $t \in]n \Delta t, (n + 1) \Delta t[$, la variation totale de $v_\Delta(t, \cdot)$ est constante égale à la variation totale de $v_\Delta(n \Delta t, \cdot)$. De plus, l'analyse ci-dessus pour $v_\Delta(0, \cdot)$ montre que la procédure d'échantillonnage diminue la variation totale, et on a donc :

$$\text{TV}(v_\Delta((n + 1) \Delta t, \cdot)) \leq \text{TV}(v_\Delta((n + 1) \Delta t^-, \cdot)) = \text{TV}(v_\Delta(n \Delta t, \cdot)).$$

ce qui conclut la récurrence. \square

A l'aide du lemme 4, on va montrer une autre estimation sur la solution approchée v_Δ :

Lemme 5 (Continuité en temps). *Pour tous temps $t \geq s \geq 0$, on a l'inégalité :*

$$\int_{\mathbb{R}} |v_\Delta(t, x) - v_\Delta(s, x)| dx \leq \left(\max_K |a| + \frac{2}{\lambda} \right) \text{TV}(u_0) (t - s) + 2 \text{TV}(u_0) \Delta x. \quad (58)$$

Démonstration du lemme 5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $E(\alpha)$ la partie entière de α . Supposons dans un premier temps que $E(t/\Delta t) = E(s/\Delta t) = n$. Autrement dit, on a l'encadrement :

$$n \Delta t \leq s \leq t < (n + 1) \Delta t.$$

On peut alors appliquer le théorème 8 ainsi que le lemme 4, et en déduire :

$$\int_{\mathbb{R}} |v_\Delta(t, x) - v_\Delta(s, x)| dx \leq \max_K |a| \text{TV}(v_\Delta(n \Delta t, \cdot)) (t - s) \leq \max_K |a| \text{TV}(u_0) (t - s). \quad (59)$$

En particulier, l'inégalité (58) est vraie dans le cas $E(t/\Delta t) = E(s/\Delta t)$. Le théorème 8 et le lemme 4 donnent aussi l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}} |v_\Delta((n + 1) \Delta t^-, x) - v_\Delta(s, x)| dx \leq \max_K |a| \text{TV}(u_0) ((n + 1) \Delta t - s). \quad (60)$$

Traitons maintenant le cas $E(t/\Delta t) > E(s/\Delta t)$. On note $n = E(s/\Delta t)$, et $n + p = E(t/\Delta t)$, avec $p \geq 1$. On utilise l'inégalité triangulaire pour essayer de se ramener au premier cas traité ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |v_\Delta(t, x) - v_\Delta(s, x)| dx \\ & \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |v_\Delta(t, x) - v_\Delta((n + p) \Delta t, x)| dx}_{\clubsuit} + \sum_{j=1}^p \int_{\mathbb{R}} |v_\Delta((n + j) \Delta t, x) - v_\Delta((n + j) \Delta t^-, x)| dx \\ & \quad + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |v_\Delta((n + k + 1) \Delta t^-, x) - v_\Delta((n + k) \Delta t, x)| dx}_{\diamond} \\ & \quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |v_\Delta((n + 1) \Delta t^-, x) - v_\Delta(s, x)| dx}_{\diamond}. \end{aligned}$$

Le terme ♣ se majore en utilisant l'inégalité (59) tandis que les termes ◇ se majorent en utilisant (60). On trouve :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |v_{\Delta}(t, x) - v_{\Delta}(s, x)| dx \\
& \leq \max_K |a| \text{TV}(u_0) \left(t - (n+p) \Delta t + (p-1) \Delta t + (n+1) \Delta t - s \right) \\
& \quad + \sum_{j=1}^p \int_{\mathbb{R}} |v_{\Delta}((n+j) \Delta t, x) - v_{\Delta}((n+j) \Delta t^-, x)| dx \\
& \leq \max_K |a| \text{TV}(u_0) (t-s) + \underbrace{\sum_{j=1}^p \int_{\mathbb{R}} |v_{\Delta}((n+j) \Delta t, x) - v_{\Delta}((n+j) \Delta t^-, x)| dx}_{\heartsuit}.
\end{aligned}$$

Pour les termes ♡, on se donne un entier $m \in \{n+1, \dots, n+p\}$, et on majore, sans grande finesse, comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |v_{\Delta}(m \Delta t, x) - v_{\Delta}(m \Delta t^-, x)| dx \\
& = \sum_{k \in m+2\mathbb{Z}} \int_{I_k} |v_{\Delta}(m \Delta t, x) - v_{\Delta}(m \Delta t^-, x)| dx \\
& = \sum_{k \in m+2\mathbb{Z}} \int_{I_k} |v_{\Delta}(m \Delta t^-, (k+a_m) \Delta x) - v_{\Delta}(m \Delta t^-, x)| dx \\
& \leq \sum_{k \in m+2\mathbb{Z}} \int_{I_k} \text{TV}(v_{\Delta}(m \Delta t^-, \cdot); I_k) dx \\
& = 2 \Delta x \sum_{k \in m+2\mathbb{Z}} \text{TV}(v_{\Delta}(m \Delta t^-, \cdot); I_k) \leq 2 \Delta x \text{TV}(v_{\Delta}(m \Delta t^-, \cdot)) \leq 2 \Delta x \text{TV}(u_0).
\end{aligned}$$

Dans cette suite d'inégalités, on a utilisé les propriétés :

$$\begin{aligned}
& \forall k \in m+2\mathbb{Z}, \quad \forall x \in I_k, \\
& |v_{\Delta}(m \Delta t^-, (k+a_m) \Delta x) - v_{\Delta}(m \Delta t^-, x)| \leq \text{TV}(v_{\Delta}(m \Delta t^-, \cdot); I_k),
\end{aligned}$$

et :

$$\sum_{k \in m+2\mathbb{Z}} \text{TV}(v_{\Delta}(m \Delta t^-, \cdot); I_k) \leq \text{TV}(v_{\Delta}(m \Delta t^-, \cdot)),$$

qui découlent facilement de la définition de la variation totale (voir l'appendice A), et on a également utilisé le lemme 4.

Finalement, on a obtenu l'estimation :

$$\int_{\mathbb{R}} |v_{\Delta}(t, x) - v_{\Delta}(s, x)| dx \leq \max_K |a| \text{TV}(u_0) (t-s) + 2p \Delta x \text{TV}(u_0).$$

Pour conclure, on utilise l'inégalité :

$$p = E \left(\frac{t}{\Delta t} \right) - E \left(\frac{s}{\Delta t} \right) \leq \frac{t-s}{\Delta t} + 1,$$

et on aboutit à (58). □

6.3.4 Analyse de consistance du schéma de Glimm

On s'intéresse maintenant à la définition et à l'estimation de l'erreur de consistance du schéma de Glimm. Autrement dit, on va définir une quantité, dont on cherchera à montrer qu'elle est petite, et qui mesurera à quel point la solution approchée v_Δ vérifie l'équation (1).

Lemme 6 (Définition et décomposition de l'erreur de consistance). *Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et soit e la quantité :*

$$e = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} v_\Delta \partial_t \varphi + f(v_\Delta) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx .$$

Alors e se décompose sous la forme :

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n ,$$

où les termes e_n sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} e_0 &= \int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - v_\Delta(0, x)) \varphi(0, x) \, dx , \\ \forall n \geq 1, \quad e_n &= \int_{\mathbb{R}} (v_\Delta(n \Delta t^-, x) - v_\Delta(n \Delta t, x)) \varphi(n \Delta t, x) \, dx . \end{aligned}$$

La quantité e mesure bien une erreur car cette quantité doit être nulle si v_Δ est une solution faible de (1). Nous montrerons plus loin que la quantité e tend vers 0 quand Δx tend vers 0, ce qui traduit le fait que v_Δ a de plus en plus tendance à vérifier l'équation (1).

Démonstration du lemme 6. On commence par décomposer e sous la forme :

$$e = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[k \Delta t, (k+1) \Delta t] \times \mathbb{R}} v_\Delta \partial_t \varphi + f(v_\Delta) \partial_x \varphi \, dt \, dx ,$$

la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes car φ est à support compact (et donc $\partial_t \varphi(t, x) = \partial_x \varphi(t, x) = 0$ pour t suffisamment grand). On rappelle que sur chaque intervalle de temps $[k \Delta t, (k+1) \Delta t]$, v_Δ coïncide avec la solution entropique, notée w_k , du problème (49). On sait qu'une telle solution existe sur l'intervalle de temps fermé $[k \Delta t, (k+1) \Delta t]$ grâce au théorème 8. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\begin{aligned} & \int_{[k \Delta t, (k+1) \Delta t] \times \mathbb{R}} v_\Delta \partial_t \varphi + f(v_\Delta) \partial_x \varphi \, dt \, dx \\ &= \int_{[k \Delta t, (k+1) \Delta t] \times \mathbb{R}} w_k \partial_t \varphi + f(w_k) \partial_x \varphi \, dt \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} w_k((k+1) \Delta t, x) \varphi((k+1) \Delta t, x) \, dx - \int_{\mathbb{R}} w_k(k \Delta t, x) \varphi(k \Delta t, x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} v_\Delta((k+1) \Delta t^-, x) \varphi((k+1) \Delta t, x) \, dx - \int_{\mathbb{R}} v_\Delta(k \Delta t, x) \varphi(k \Delta t, x) \, dx . \end{aligned}$$

Il suffit alors de sommer ces égalités par rapport à $k \in \mathbb{N}$ puis de réindexer certains termes pour obtenir la décomposition de e . \square

A partir de maintenant, nous allons montrer que l'erreur e tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation Δx tend vers 0 (et donc Δt tend également vers 0). Il sera utile de préciser les quantités dont dépend l'erreur e . Cette erreur dépend bien sûr de la fonction test φ mais aussi de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et du pas de discrétisation Δx . L'erreur e dépend également du paramètre λ que l'on s'est fixé et qui vérifie (46). Cependant, le paramètre λ reste fixe dans toute l'analyse

et on omettra de préciser la dépendance de e par rapport à λ . En résumé, l'erreur e dépend de la fonction test φ , de la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que du pas d'espace Δx , et on notera donc $e(a, \varphi, \Delta x)$. De même, chaque terme e_n intervenant dans la décomposition de e dépend de φ , de a et de Δx . On peut être un peu plus précis et remarquer que l'erreur e_n ne dépend pas de toute la suite a mais seulement de ses premiers termes (a_0, \dots, a_n) car les fonctions $v_\Delta(n \Delta t^-, \cdot)$ et $v_\Delta(n \Delta t, \cdot)$ ne dépendent respectivement que de (a_0, \dots, a_{n-1}) et de (a_0, \dots, a_n) . On notera $e_n(a, \varphi, \Delta x)$ plutôt que $e_n(a_0, \dots, a_n, \varphi, \Delta x)$ afin d'alléger les notations, mais on gardera en mémoire que e_n ne dépend pas de toute la suite a .

Dans le lemme suivant, on s'intéresse à majorer chacun des termes $e_n(a, \varphi, \Delta x)$. On utilisera une majoration uniforme par rapport à la suite a et une estimation moyennée par rapport à la suite a :

Lemme 7 (Estimation des termes d'erreur e_n). *Soit $e(a, \varphi, \Delta x)$ l'erreur de consistance, dont la décomposition est donnée au lemme 6. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes $e_n(a, \varphi, \Delta x)$ sont des fonctions mesurables par rapport à leur argument $a \in \mathcal{A}$, et vérifient les inégalités suivantes :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |e_n(a, \varphi, \Delta x)| \leq 2 \Delta x \text{TV}(u_0) \|\varphi\|_{L^\infty}, \quad (61)$$

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 e_n(a, \varphi, \Delta x) da_n \right| \leq 2 (\Delta x)^2 \text{TV}(u_0) \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty}. \quad (62)$$

Démonstration du lemme 7. Commençons par montrer (61) dans le cas $n = 0$, où e_0 est défini au lemme 6. On a :

$$\begin{aligned} |e_0(a, \varphi, \Delta x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - v_\Delta(0, x)) \varphi(0, x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k \in 2\mathbb{Z}} \int_{I_k} (u_0(x) - u_0((k + a_0) \Delta x)) \varphi(0, x) dx \right| \\ &\leq \sum_{k \in 2\mathbb{Z}} \int_{I_k} |u_0(x) - u_0((k + a_0) \Delta x)| |\varphi(0, x)| dx \\ &\leq \sum_{k \in 2\mathbb{Z}} 2 \Delta x \text{TV}(u_0; I_k) \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 2 \Delta x \text{TV}(u_0) \|\varphi\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

où on a, comme au lemme 5, utilisé les deux propriétés suivantes :

$$|u_0(x) - u_0((k + a_0) \Delta x)| \leq \text{TV}(u_0; I_k), \quad \text{et} \quad \sum_{k \in 2\mathbb{Z}} \text{TV}(u_0; I_k) \leq \text{TV}(u_0).$$

Pour $n \geq 1$, la démonstration de (61) se déroule de manière analogue et donne :

$$|e_n(a, \varphi, \Delta x)| \leq 2 \Delta x \text{TV}(v_\Delta(n \Delta t^-, \cdot)) \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 2 \Delta x \text{TV}(u_0) \|\varphi\|_{L^\infty},$$

où pour finir on a utilisé le lemme 4. Cela conclut la démonstration de l'estimation (61).

Soit désormais $n \geq 1$, et montrons (62). Il s'agit tout d'abord de montrer que chacune des fonctions e_n est mesurable par rapport à $a \in \mathcal{A}$. On commence par remarquer qu'il suffit de montrer que les deux applications :

$$(x, a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[^n \mapsto v_\Delta(n \Delta t^-, x, a_0, \dots, a_{n-1}),$$

et :

$$(x, a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[^{n+1} \mapsto v_\Delta(n \Delta t, x, a_0, \dots, a_n),$$

sont mesurables. On a rajouté ici la dépendance de ces fonctions par rapport aux premiers éléments de la suite a . La mesurabilité de ces applications s'établit par récurrence sur n , en utilisant à chaque étape que l'application w_R (solveur de Riemann) est mesurable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Chaque erreur e_n se présente donc comme l'intégrale, par rapport à x , d'une fonction mesurable par rapport au couple (a, x) . On en déduit que les e_n sont mesurables par rapport à $a \in \mathcal{A}$. En particulier, l'application partielle $(a_n \mapsto e_n(a_n))$ est mesurable, et on sait également qu'elle est bornée grâce à (61). Elle est donc intégrable sur $] - 1, 1[$, ce qui donne un sens à l'inégalité (62).

On montre désormais l'estimation (62). On commence pour cela par calculer :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e_n(a, \varphi, \Delta x) da_n \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) - v_{\Delta}(n \Delta t, x) \right) \varphi(n \Delta t, x) dx \right) da_n \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k \in n+2\mathbb{Z}} \int_{I_k} \left(v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) - v_{\Delta}(n \Delta t^-, (k + a_n) \Delta x) \right) \varphi(n \Delta t, x) dx \right) da_n . \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e_n(a, \varphi, \Delta x) da_n \\ &= \sum_{k \in n+2\mathbb{Z}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{I_k} \left(v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) - v_{\Delta}(n \Delta t^-, (k + a_n) \Delta x) \right) \varphi(n \Delta t, x) dx da_n . \end{aligned} \quad (63)$$

On va réécrire les termes intervenant dans la somme du membre de droite de (63). Pour cela, on observe que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{I_k} v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) \varphi(n \Delta t, x) dx da_n &= \int_{I_k} v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) \varphi(n \Delta t, x) dx \\ &= \frac{1}{2 \Delta x} \int_{I_k \times I_k} v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) \varphi(n \Delta t, x) dx dy , \end{aligned} \quad (64)$$

où on a utilisé le fait que la fonction $v_{\Delta}(n \Delta t^-, \cdot)$ ne dépend que de a_0, \dots, a_{n-1} et pas de a_n . Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{I_k} v_{\Delta}(n \Delta t^-, (k + a_n) \Delta x) \varphi(n \Delta t, x) dx da_n \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v_{\Delta}(n \Delta t^-, (k + a_n) \Delta x) da_n \right) \int_{I_k} \varphi(n \Delta t, x) dx \\ &= \left(\frac{1}{2 \Delta x} \int_{I_k} v_{\Delta}(n \Delta t^-, y) dy \right) \int_{I_k} \varphi(n \Delta t, x) dx \\ &= \frac{1}{2 \Delta x} \int_{I_k \times I_k} v_{\Delta}(n \Delta t^-, y) \varphi(n \Delta t, x) dx dy . \end{aligned} \quad (65)$$

On reporte les résultats de (64) et (65) dans (63), et on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e_n(a, \varphi, \Delta x) da_n \\ &= \frac{1}{2 \Delta x} \sum_{k \in n+2\mathbb{Z}} \int_{I_k \times I_k} \left(v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) - v_{\Delta}(n \Delta t^-, y) \right) \varphi(n \Delta t, x) dx dy \\ &= \frac{1}{4 \Delta x} \sum_{k \in n+2\mathbb{Z}} \int_{I_k \times I_k} \left(v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) - v_{\Delta}(n \Delta t^-, y) \right) \left(\varphi(n \Delta t, x) - \varphi(n \Delta t, y) \right) dx dy . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in I_k, \quad |\varphi(n \Delta t, x) - \varphi(n \Delta t, y)| \leq \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} |x - y| \leq 2 \Delta x \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} ,$$

on peut obtenir la majoration :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 e_n(a, \varphi, \Delta x) da_n \right| &\leq \frac{\|\partial_x \varphi\|_{L^\infty}}{2} \sum_{k \in n+2\mathbb{Z}} \int_{I_k \times I_k} |v_\Delta(n \Delta t^-, x) - v_\Delta(n \Delta t^-, y)| dx dy \\
&\leq \frac{\|\partial_x \varphi\|_{L^\infty}}{2} \sum_{k \in n+2\mathbb{Z}} \int_{I_k \times I_k} \text{TV}(v_\Delta(n \Delta t^-, \cdot); I_k) dx dy \\
&= 2(\Delta x)^2 \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} \sum_{k \in n+2\mathbb{Z}} \text{TV}(v_\Delta(n \Delta t^-, \cdot); I_k) \\
&= 2(\Delta x)^2 \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} \text{TV}(v_\Delta(n \Delta t^-, \cdot)) \leq 2(\Delta x)^2 \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} \text{TV}(u_0).
\end{aligned}$$

On a donc bien montré l'estimation (62), ce qui conclut la démonstration du lemme 7. \square

Les lemmes 6 et 7 sont à la base de la proposition suivante qui est l'estimation d'erreur principale :

Proposition 7 (Estimation de l'erreur de consistance). *Soit $e(a, \varphi, \Delta x)$ l'erreur de consistance du schéma de Glimm définie au lemme 6, et soit $T > 0$ fixé de sorte que le support de la fonction φ soit inclus dans $[0, T] \times \mathbb{R}$. Alors e est une fonction mesurable de $a \in \mathcal{A}$, et vérifie l'estimation :*

$$\int_{\mathcal{A}} e(a, \varphi, \Delta x)^2 d\nu(a) \leq 4 \|\varphi\|_{L^\infty} \text{TV}(u_0)^2 \left(\frac{T}{\lambda} + \Delta x \right) \left[\frac{T}{\lambda} \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi\|_{L^\infty} \right] \Delta x,$$

où l'on rappelle que ν est la mesure produit sur l'espace $\mathcal{A} =]-1, 1]^{\mathbb{N}}$.

Démonstration de la proposition 7. Définissons $N = E(T/\Delta t)$, où E désigne la partie entière. Avec cette définition de N , on voit que $T < (N+1)\Delta t$, et les termes d'erreur e_n sont nuls dès que $n \geq N+1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} e(a, \varphi, \Delta x)^2 d\nu(a) &= \int_{\mathcal{A}} \left(\sum_{n=0}^N e_n(a, \varphi, \Delta x) \right)^2 d\nu(a) \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^N \int_{\mathcal{A}} e_n(a, \varphi, \Delta x)^2 d\nu(a)}_{\clubsuit} + 2 \sum_{0 \leq m < n \leq N} \underbrace{\int_{\mathcal{A}} e_m(a, \varphi, \Delta x) e_n(a, \varphi, \Delta x) d\nu(a)}_{\diamond}. \quad (66)
\end{aligned}$$

Pour majorer la somme \clubsuit , on utilise l'estimation (61) et le fait que ν est une mesure de probabilités :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N \int_{\mathcal{A}} e_n(a, \varphi, \Delta x)^2 d\nu(a) &\leq \sum_{n=0}^N 4(\Delta x)^2 \|\varphi\|_{L^\infty}^2 \text{TV}(u_0)^2 \\
&= 4(N+1)(\Delta x)^2 \|\varphi\|_{L^\infty}^2 \text{TV}(u_0)^2 \\
&\leq 4 \left(\frac{T \Delta x}{\Delta t} + \Delta x \right) \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty}^2 \text{TV}(u_0)^2 \\
&= 4 \left(\frac{T}{\lambda} + \Delta x \right) \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty}^2 \text{TV}(u_0)^2. \quad (67)
\end{aligned}$$

Pour majorer chacun des termes \diamond , on observe que pour $m < n$ le produit $e_m e_n$ ne dépend que de a_0, \dots, a_n ce qui permet d'utiliser la relation (56) :

$$\int_{\mathcal{A}} e_m(a, \varphi, \Delta x) e_n(a, \varphi, \Delta x) d\nu(a) = \int_{]-1, 1]^{[n+1}} e_m(a, \varphi, \Delta x) e_n(a, \varphi, \Delta x) \frac{da_0 \dots da_n}{2^{n+1}}.$$

Or si $m < n$, e_m ne dépend que de a_0, \dots, a_m et pas de a_n . On applique le théorème de Fubini, puis on utilise l'estimation (62) :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathcal{A}} e_m(a, \varphi, \Delta x) e_n(a, \varphi, \Delta x) d\nu(a) \right| \\
&= \left| \int_{]-1,1[^n} e_m(a, \varphi, \Delta x) \left(\int_{-1}^1 e_n(a, \varphi, \Delta x) \frac{da_n}{2} \right) \frac{da_0 \dots da_{n-1}}{2^n} \right| \\
&\leq \int_{]-1,1[^n} |e_m(a, \varphi, \Delta x)| \left| \int_{-1}^1 e_n(a, \varphi, \Delta x) \frac{da_n}{2} \right| \frac{da_0 \dots da_{n-1}}{2^n} \\
&\leq 2 (\Delta x)^2 \text{TV}(u_0) \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} \int_{]-1,1[^n} |e_m(a, \varphi, \Delta x)| \frac{da_0 \dots da_{n-1}}{2^n}.
\end{aligned}$$

Pour majorer cette dernière intégrale, on utilise l'estimation (61), et on trouve :

$$\left| \int_{\mathcal{A}} e_m(a, \varphi, \Delta x) e_n(a, \varphi, \Delta x) d\nu(a) \right| \leq 4 (\Delta x)^3 \text{TV}(u_0)^2 \|\varphi\|_{L^\infty} \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty}.$$

On compte $(N+1)N/2$ termes distincts \diamond dans le membre de droite de (66), ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
2 \sum_{0 \leq m < n \leq N} \int_{\mathcal{A}} e_m(a, \varphi, \Delta x) e_n(a, \varphi, \Delta x) d\nu(a) \\
\leq 4(N+1)N (\Delta x)^3 \text{TV}(u_0)^2 \|\varphi\|_{L^\infty} \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} \\
\leq 4 \left(\frac{T}{\lambda} + \Delta x \right) \frac{T}{\lambda} \Delta x \text{TV}(u_0)^2 \|\varphi\|_{L^\infty} \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty}. \quad (68)
\end{aligned}$$

En utilisant (67) et (68) dans la décomposition (66), on aboutit au résultat annoncé. \square

Le point crucial dans la démonstration de la proposition 7 est qu'on utilise l'estimation moyennée (62) qui fait gagner un facteur Δx supplémentaire. En effet, si on utilise directement l'estimation uniforme (61), on voit que l'erreur e se décompose comme la somme de $N+1$ termes, chacun étant de l'ordre de Δx . Il n'est donc a priori pas évident que l'erreur e tende vers 0 dans une topologie à préciser - quand Δx tend vers 0. L'estimation en moyenne fait gagner un facteur Δx supplémentaire qui permet de montrer que e tend bien vers 0 quand Δx tend vers 0.

Enonçons tout de suite la conséquence immédiate de la proposition 7 :

Corollaire 2. *Pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 et à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N}_\varphi \subset \mathcal{A}$ tel que pour toute suite $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{N}_\varphi$, l'erreur $e(a, \varphi, \Delta x)$ tend vers 0 quand Δx tend vers 0^+ .*

6.3.5 Inégalités d'entropie

Au paragraphe précédent, nous avons mesuré comment la solution approchée v_Δ tend à satisfaire l'équation (1) lorsque Δx tend vers 0. On va maintenant introduire une quantité analogue à l'erreur de consistance $e(a, \varphi, \Delta x)$ et qui va mesurer comment la solution approchée v_Δ tend à satisfaire les inégalités d'entropie (57). Le lemme suivant est l'analogue du lemme 6 :

Lemme 8 (Définition et décomposition de l'erreur d'entropie). *Soit k un nombre rationnel, et soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive. Soit $\mathcal{E}_k(a, \varphi, \Delta x)$ la quantité :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_k(a, \varphi, \Delta x) = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |v_\Delta - k| \partial_t \varphi + \text{sgn}(v_\Delta - k) (f(v_\Delta) - f(k)) \partial_x \varphi dt dx \\
+ \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - k| \varphi(0, x) dx.
\end{aligned}$$

Alors l'erreur d'entropie \mathcal{E}_k vérifie l'inégalité :

$$\mathcal{E}_k(a, \varphi, \Delta x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{E}_{k,n}(a, \varphi, \Delta x),$$

où les termes $\mathcal{E}_{k,n}$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{k,0} &= \int_{\mathbb{R}} (|u_0(x) - k| - |v_{\Delta}(0, x) - k|) \varphi(0, x) dx, \\ \forall n \geq 1, \quad \mathcal{E}_{k,n} &= \int_{\mathbb{R}} (|v_{\Delta}(n \Delta t^-, x) - k| - |v_{\Delta}(n \Delta t, x) - k|) \varphi(n \Delta t, x) dx. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 8. On commence par écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k &= \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - k| \varphi(0, x) dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{[j \Delta t, (j+1) \Delta t] \times \mathbb{R}} |v_{\Delta} - k| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(v_{\Delta} - k) (f(v_{\Delta}) - f(k)) \partial_x \varphi dt dx. \end{aligned}$$

Sur chaque intervalle de temps $[j \Delta t, (j+1) \Delta t]$, v_{Δ} est égale à la solution entropique w_j du problème (49). On peut appliquer la proposition 6 ci-dessus à w_j et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k &\geq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - k| \varphi(0, x) dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |v_{\Delta}((j+1) \Delta t^-, x) - k| \varphi((j+1) \Delta t, x) dx - \int_{\mathbb{R}} |v_{\Delta}(j \Delta t, x) - k| \varphi(j \Delta t, x) dx. \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient en réindexant les termes. □

En suivant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du lemme 7, et en utilisant également le fait que la fonction ($v \in \mathbb{R} \mapsto |v - k|$) est 1-lipschitzienne, on montre les estimations suivantes sur les termes $\mathcal{E}_{k,n}$ (la démonstration de ce résultat est laissée en exercice au lecteur) :

Lemme 9 (Estimation des termes d'erreur $\mathcal{E}_{k,n}$). *Soit $\mathcal{E}_k(a, \varphi, \Delta x)$ l'erreur d'entropie vérifiant l'inégalité du lemme 8. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes $\mathcal{E}_{k,n}(a, \varphi, \Delta x)$ sont des fonctions mesurables par rapport à leur argument $a \in \mathcal{A}$, et vérifient les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\mathcal{E}_{k,n}(a, \varphi, \Delta x)| &\leq 2 \Delta x \operatorname{TV}(u_0) \|\varphi\|_{L^\infty}, \\ \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 \mathcal{E}_{k,n}(a, \varphi, \Delta x) da_n \right| &\leq 2 (\Delta x)^2 \operatorname{TV}(u_0) \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Comme dans l'analyse de l'erreur de consistance, les lemmes 8 et 9 sont à la base de la proposition suivante qui est l'estimation de l'erreur d'entropie (la démonstration est à nouveau laissée en exercice au lecteur) :

Proposition 8 (Estimation de l'erreur d'entropie). *Soit $\mathcal{E}_k(a, \varphi, \Delta x)$ l'erreur d'entropie du schéma de Glimm définie au lemme 8, et soit $T > 0$ fixé de sorte que le support de la fonction φ soit inclus dans $[0, T] \times \mathbb{R}$. Alors \mathcal{E}_k est une fonction mesurable de $a \in \mathcal{A}$, et vérifie l'estimation :*

$$\int_{\mathcal{A}} \left(\sum_{n \geq 0} \mathcal{E}_{k,n}(a, \varphi, \Delta x) \right)^2 d\nu(a) \leq 4 \|\varphi\|_{L^\infty}^2 \operatorname{TV}(u_0)^2 \left(\frac{T}{\lambda} + \Delta x \right) \left[\frac{T}{\lambda} \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi\|_{L^\infty} \right] \Delta x.$$

En particulier, la proposition 8 admet la conséquence immédiate suivante :

Corollaire 3. *Pour tout nombre rationnel k et pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 et à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive, il existe un ensemble négligeable $\widetilde{\mathcal{N}}_{k,\varphi} \subset \mathcal{A}$ tel que pour toute suite $a \in \mathcal{A} \setminus \widetilde{\mathcal{N}}_{k,\varphi}$, l'erreur d'entropie $\mathcal{E}_k(a, \varphi, \Delta x)$ vérifie :*

$$\liminf_{\Delta x \rightarrow 0^+} \mathcal{E}_k(a, \varphi, \Delta x) \geq 0.$$

6.3.6 Fin de la démonstration du théorème 9

On récapitule les différents points montrés ci-dessus. On commence par se donner un nombre $\lambda > 0$ vérifiant l'inégalité (46). On se donne une suite de pas d'espace $\Delta x = 2^{-p}$, $p \in \mathbb{N}$. Les pas de temps correspondants sont donnés par la relation $\Delta t = \lambda \Delta x$. Pour chaque entier p et pour chaque suite $a \in \mathcal{A}$, le schéma de Glimm fournit une solution approchée, que l'on note dorénavant v_p^a , prenant ses valeurs dans l'intervalle compact K et vérifiant les bornes uniformes des lemmes 4 et 5, c'est-à-dire :

$$\forall t \geq s \geq 0, \quad \text{TV}(v_p^a(t, \cdot)) \leq \text{TV}(v_p^a(s, \cdot)) \leq \text{TV}(u_0),$$

et :

$$\forall t \geq s \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} |v_p^a(t, x) - v_p^a(s, x)| dx \leq \left(\max_K |a| + \frac{2}{\lambda} \right) \text{TV}(u_0) (t - s) + 2^{1-p} \text{TV}(u_0).$$

Le corollaire 2 montre que l'erreur de consistance :

$$e(a, \varphi, p) = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} v_p^a \partial_t \varphi + f(v_p^a) \partial_x \varphi dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx, \quad (69)$$

tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, pourvu que a ne soit pas dans un ensemble négligeable $\mathcal{N}_\varphi \subset \mathcal{A}$, cet ensemble dépendant a priori de la fonction test φ . Le corollaire 3 montre que pour tout nombre rationnel k et pour toute fonction test positive φ , l'erreur d'entropie :

$$\mathcal{E}_k(a, \varphi, p) = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |v_p^a - k| \partial_t \varphi + \text{sgn}(v_p^a - k) (f(v_p^a) - f(k)) \partial_x \varphi dt dx + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - k| \varphi(0, x) dx, \quad (70)$$

a une limite inférieure positive lorsque p tend vers $+\infty$, pourvu que a ne soit pas dans un ensemble négligeable $\widetilde{\mathcal{N}}_{k,\varphi} \subset \mathcal{A}$, cet ensemble dépendant a priori du nombre k et de la fonction test positive φ .

On veut maintenant construire une solution faible u de (1). Pour cela, on commence par rappeler le résultat de densité suivant :

Proposition 9 (Séparabilité de l'espace des fonctions test). *Soit Φ des fonctions test φ de classe \mathcal{C}^1 et à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et soit Φ_+ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \Phi$ qui sont positives. L'espace Φ est muni de la norme :*

$$\forall \varphi \in \Phi, \quad \|\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty} + \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty} + \|\partial_x \varphi\|_{L^\infty}.$$

Alors il existe une suite $(\varphi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ dans Φ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. pour toute fonction $\varphi \in \Phi$, il existe un compact $[0, T] \times [-R, R]$ et il existe une sous-suite $(\varphi_{\sigma(\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier ℓ , la fonction $\varphi_{\sigma(\ell)}$ est à support dans $[0, T] \times [-R, R]$, et la suite $(\|\varphi - \varphi_{\sigma(\ell)}\|)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. pour toute fonction $\varphi \in \Phi_+$, il existe un compact $[0, T] \times [-R, R]$ et il existe une sous-suite $(\varphi_{\sigma(\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier ℓ , la fonction $\varphi_{\sigma(\ell)}$ appartient à Φ_+ , est à support dans $[0, T] \times [-R, R]$, et la suite $(\|\varphi - \varphi_{\sigma(\ell)}\|)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour chaque entier ℓ , on note \mathcal{N}_ℓ le sous-ensemble négligeable de \mathcal{A} tel que pour toute suite $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{N}_\ell$, l'erreur $e(a, \varphi_\ell, p)$ définie par (69) tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. Pour chaque nombre rationnel k et chaque entier j tel que $\varphi_j \in \Phi_+$, on note $\widetilde{\mathcal{N}}_{k,j}$ le sous-ensemble négligeable de \mathcal{A} tel que pour toute suite $a \in \mathcal{A} \setminus \widetilde{\mathcal{N}}_{k,j}$, l'erreur d'entropie $\mathcal{E}_k(a, \varphi_j, p)$ définie par (70) a une limite inférieure positive lorsque p tend vers $+\infty$. La réunion \mathcal{N} des ensembles \mathcal{N}_ℓ , lorsque ℓ parcourt \mathbb{N} , et des ensembles $\widetilde{\mathcal{N}}_{k,j}$ lorsque j parcourt l'ensemble des entiers tels que $\varphi_j \in \Phi_+$ et k parcourt l'ensemble des nombres rationnels, est un ensemble négligeable car c'est une union dénombrable d'ensembles négligeables. En particulier, on peut choisir une suite a qui n'appartient pas à \mathcal{N} . On se donne une telle suite a , que l'on se fixe une fois pour toute. On considère, pour cette suite a , la suite de solutions approchées $(v_p^a)_{p \in \mathbb{N}}$ fournies par le schéma de Glimm.

En vertu des bornes uniformes sur la suite de fonctions $(v_p^a)_{p \in \mathbb{N}}$, on peut appliquer le critère de compacité du théorème 11 (voir l'appendice A) : il existe une fonction u définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et il existe une sous-suite, toujours notée $(v_p^a)_{p \in \mathbb{N}}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- u est mesurable et à valeurs dans l'intervalle compact K ,
- pour tout $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$ est à variations bornées, continue à gauche, et l'application $(t \mapsto \text{TV}(u(t, \cdot)))$ est décroissante, majorée par $\text{TV}(u_0)$,
- pour tous temps $t \geq s \geq 0$, on a l'estimation de continuité :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq \left(\max_K |a| + \frac{2}{\lambda} \right) \text{TV}(u_0) (t - s),$$

- la sous-suite $(v_p^a)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers u presque-partout dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, ainsi que dans l'espace $L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$.

On va (enfin!) montrer que u est une solution entropique de (1). Pour commencer, on sait que la sous-suite (v_p^a) , resp. $(f(v_p^a))$, converge presque-partout dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ vers u , resp. $f(u)$, et prend ses valeurs dans K , resp. $f(K)$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que pour tout entier ℓ , on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} e(a, \varphi_\ell, p) = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi_\ell + f(u) \partial_x \varphi_\ell dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi_\ell(0, x) dx.$$

Comme a n'appartient pas à l'ensemble \mathcal{N} , il n'appartient à aucun des ensembles \mathcal{N}_ℓ , donc la suite $(e(a, \varphi_\ell, p))$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, ce qui donne la propriété :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi_\ell + f(u) \partial_x \varphi_\ell dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi_\ell(0, x) dx = 0.$$

On se donne maintenant une fonction test $\varphi \in \Phi$ que l'on approche, comme cela est précisé dans la proposition 9, par une sous-suite $(\varphi_{\sigma(\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ dont chaque fonction a son support dans un compact fixe $[0, T] \times [-R, R]$. Le théorème de convergence dominée permet alors de montrer :

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi_{\sigma(\ell)} + f(u) \partial_x \varphi_{\sigma(\ell)} dt dx = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi dt dx.$$

Pour toute fonction test $\varphi \in \Phi$, on obtient donc la relation :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx = 0.$$

En d'autres termes, on vient de démontrer que u est une solution faible de (1).

On montre maintenant que u est une solution entropique. Tout d'abord, u est bornée car u prend ses valeurs dans l'intervalle K . Soit k un nombre rationnel. Si j est un indice tel que $\varphi_j \in \Phi_+$, alors la limite inférieure lorsque p tend vers $+\infty$ des erreurs d'entropie $\mathcal{E}_k(a, \varphi_j, p)$

est positive. Par ailleurs, la convergence presque-partout de la suite (v_p^a) et le théorème de convergence dominée donnent :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_k(a, \varphi_j, p) &= \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u - k| \partial_t \varphi_j + \operatorname{sgn}(u - k) (f(u) - f(k)) \partial_x \varphi_j \, dt \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - k| \varphi_j(0, x) \, dx, \end{aligned}$$

et on en déduit que cette dernière quantité est positive. En appliquant le résultat de densité de la proposition 9, on montre que pour toute fonction test $\varphi \in \Phi_+$ et pour tout nombre rationnel k , l'inégalité d'entropie (57) a lieu. Par conséquent, la proposition 5 assure que u est une solution entropique de (1). Par ailleurs, la fonction u vérifie toutes les propriétés énoncées dans le théorème 9.

Avant d'aborder au paragraphe suivant la question de l'unicité des solutions entropiques, arrêtons nous sur la démonstration du théorème 9 et sur le rôle de l'équirépartition de la suite a dans la convergence du schéma de Glimm. Nous avons vu ci-dessus que, pour une fonction test φ fixée, l'erreur de consistance $e(a, \varphi, \Delta x)$ tend vers 0 dans $L^2(\mathcal{A}, d\nu)$ lorsque Δx tend vers 0^+ . L'exercice 20 indique qu'en général on ne peut pas espérer que pour toute suite a , l'erreur $e(a, \varphi, \Delta x)$ tend vers 0 lorsque Δx tend vers 0^+ . Cette propriété est vraie pour presque toutes les suites, mais certaines suites peuvent s'avérer pathologiques. Ce phénomène est à rapprocher de l'estimaton (61). Pour une suite a quelconque, l'erreur de consistance e se décompose comme la somme de $N + 1$ termes d'ordre Δx , avec $N \Delta x = O(1)$. On peut appliquer le critère de compacité à la suite (v_p^a) et obtenir une valeur d'adhérence u . La sous-suite des erreurs admet alors une limite, grâce au théorème de convergence dominée, mais il n'y a pas de moyen de montrer que cette limite est nulle.

Pour conclure, on mentionne le fait que, au sens de la mesure produit ν , presque-toute suite de \mathcal{A} est équirépartie. Une question naturelle est de savoir si, à partir du moment où a est une suite équirépartie, les valeurs d'adhérence de la suite de solutions approchées (v_p^a) sont des solutions entropiques de (1). Autrement dit, on se demande si l'ensemble négligeable \mathcal{N} défini ci-dessus ne contient aucune suite qui soit équirépartie. La réponse à cette question est positive. Il s'agit d'un résultat difficile, dû à Liu, dont on n'abordera pas la démonstration.

7 Unicité des solutions entropiques

On aborde dans ce dernier paragraphe la question de l'unicité des solutions entropiques. On rappelle que les solutions entropiques sont caractérisées par les inégalités d'entropie de Kruzkov (57) de la proposition 5. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 10. *Soient $u, v \in L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ deux solutions entropiques de l'équation :*

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = 0, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R},$$

associées respectivement aux données initiales $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que u et v sont continues comme applications de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$:

$$\forall R > 0, \forall t_0 \geq 0, \quad \lim_{t \geq 0, t \rightarrow t_0} \int_{-R}^R |u(t, x) - u(t_0, x)| \, dx = \lim_{t \geq 0, t \rightarrow t_0} \int_{-R}^R |v(t, x) - v(t_0, x)| \, dx = 0.$$

Si K est un intervalle compact dans lequel u et v prennent leurs valeurs, et si on note de plus $M = \sup_K |f'|$, alors pour tout $R > 0$ et pour tout $T \geq 0$, on a l'inégalité :

$$\int_{-R}^R |u(T, x) - v(T, x)| \, dx \leq \int_{-R-MT}^{R+MT} |u_0(x) - v_0(x)| \, dx. \quad (71)$$

En particulier, si $u_0 = v_0$, alors $u = v$.

Avant de démontrer le théorème 10, on va démontrer un résultat préliminaire, la proposition 10 ci-dessous, sur les solutions entropiques de (1). On aura besoin pour cela de deux résultats généraux de théorie de l'intégration qu'on démontre maintenant. On se fixe, une fois pour toute, deux fonctions ψ et θ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , positives, et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall t \notin [-1, 0], \quad \psi(t) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1, \quad (72)$$

$$\forall x \notin [-1, 1], \quad \theta(x) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \theta(x) dx = 1. \quad (73)$$

Pour tout $\delta \in]0, 1]$, on définit alors une fonction χ_δ sur \mathbb{R}^2 par la formule :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \chi_\delta(t, x) = \frac{1}{\delta^2} \psi\left(\frac{t}{\delta}\right) \theta\left(\frac{x}{\delta}\right). \quad (74)$$

En particulier, chaque fonction χ_δ est de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans \mathbb{R}^2 et positive. Avec ces définitions, on a le résultat suivant :

Lemme 10. *Soient $u, v \in L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, et soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. Alors pour toute fonction φ continue et à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} F(u(t, x), v(s, y)) \varphi(t, x) \chi_\delta(t - s, x - y) dt dx ds dy \\ = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} F(u(t, x), v(t, x)) \varphi(t, x) dt dx. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 10. On commence par remarquer que pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$, les propriétés (72), (73) des fonctions ψ et θ permettent de montrer la relation :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \chi_\delta(t - s, x - y) ds dy = 1.$$

Il suffit donc de montrer que l'intégrale :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} \left(F(u(t, x), v(s, y)) - F(u(t, x), v(t, x)) \right) \varphi(t, x) \chi_\delta(t - s, x - y) dt dx ds dy,$$

tend vers 0 lorsque δ tend vers 0^+ . Comme u et v prennent leurs valeurs dans un intervalle compact K , et comme F est lipschitzienne sur $K \times K$, on a une borne :

$$\left| F(u(t, x), v(s, y)) - F(u(t, x), v(t, x)) \right| \leq L |v(s, y) - v(t, x)|,$$

pour une certaine constante $L > 0$ indépendante de (t, x, s, y) . On s'aperçoit à ce stade que pour démontrer le lemme 10, il suffit de montrer que pour toute fonction bornée v , et pour toute fonction φ continue à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive, l'intégrale :

$$I_\delta(v) = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} |v(t, x) - v(s, y)| \varphi(t, x) \chi_\delta(t - s, x - y) dt dx ds dy, \quad (75)$$

tend vers 0 lorsque δ tend vers 0^+ .

On se donne un temps $T > 0$ et un réel $R > 0$ tels que le support de φ soit inclus dans $[0, T] \times [-R, R]$. On étend v par zéro pour $t < 0$, autrement dit si $t < 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v(t, x) = 0$. Ainsi v est mesurable et bornée sur \mathbb{R}^2 . La propriété (72) de ψ fait que pour $t \geq 0$ et $s < 0$, on a $\psi((t - s)/\delta) = 0$. Ainsi l'intégrale (75) se réécrit :

$$I_\delta(v) = \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} |v(t, x) - v(s, y)| \varphi(t, x) \chi_\delta(t - s, x - y) dt dx ds dy,$$

et par un changement de variables, on obtient :

$$\begin{aligned} I_\delta(v) &= \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |v(t,x) - v(t-\delta\tau, x-\delta z)| \varphi(t,x) \psi(\tau) \theta(z) dt dx d\tau dz \\ &= \int_{[0,T]\times[-R,R]\times[-1,0]\times[-1,1]} |v(t,x) - v(t-\delta\tau, x-\delta z)| \varphi(t,x) \psi(\tau) \theta(z) dt dx d\tau dz. \end{aligned} \quad (76)$$

On part de (76) et on majore :

$$\begin{aligned} I_\delta(v) &\leq \int_{[0,T]\times[-R,R]\times[-1,0]\times[-1,1]} |v(t,x)| \varphi(t,x) \psi(\tau) \theta(z) dt dx d\tau dz \\ &\quad + \int_{[0,T]\times[-R,R]\times[-1,0]\times[-1,1]} |v(t-\delta\tau, x-\delta z)| \varphi(t,x) \psi(\tau) \theta(z) dt dx d\tau dz \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|v\|_{L^1([0,T]\times[-R,R])} \\ &\quad + \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{[-1,0]\times[-1,1]} \psi(\tau) \theta(z) \left(\int_{[0,T]\times[-R,R]} |v(t-\delta\tau, x-\delta z)| dt dx \right) d\tau dz \\ I_\delta(v) &\leq 2 \|\varphi\|_{L^\infty} \|v\|_{L^1([0,T+1]\times[-R-1,R+1])}. \end{aligned} \quad (77)$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. On se fixe une fonction w continue et à support compact dans $[0, T+1] \times [-R-1, R+1]$, vérifiant :

$$\|v - w\|_{L^1([0,T+1]\times[-R-1,R+1])} \leq \frac{\varepsilon}{1 + 4 \|\varphi\|_{L^\infty}}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire $I_\delta(v) \leq I_\delta(v - w) + I_\delta(w)$, ainsi que la majoration (77) appliquée à la fonction bornée $v - w$, on obtient :

$$I_\delta(v) \leq \frac{\varepsilon}{2} + I_\delta(w),$$

l'intégrale $I_\delta(w)$ étant donnée par la formule (76) où l'on remplace v par w . En appliquant le théorème de convergence dominée et en utilisant la continuité de la fonction w , on montre que l'intégrale $I_\delta(w)$ tend vers 0 quand δ tend vers 0^+ . Ainsi, pour un certain $\delta_0 > 0$, on a $I_\delta(w) \leq \varepsilon/2$ dès que $\delta \leq \delta_0$, et cela implique $I_\delta(v) \leq \varepsilon$. On a bien montré que l'intégrale (75) tend vers 0 quand δ tend vers 0^+ , ce qui finit de démontrer le lemme 10. \square

On aura aussi besoin du résultat suivant :

Lemme 11. Soient $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, et soit $v \in L^\infty([0, +\infty[\times\mathbb{R})$ vérifiant la propriété :

$$\forall R > 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-R}^R |v(t,x) - v_0(x)| dx = 0. \quad (78)$$

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. Alors pour toute fonction φ continue et à support compact dans \mathbb{R} , on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}\times[0,+\infty[\times\mathbb{R}} F(u_0(x), v(s,y)) \varphi(x) \chi_\delta(-s, x-y) dx ds dy = \int_{\mathbb{R}} F(u_0(x), v_0(x)) \varphi(x) dx.$$

Démonstration du lemme 11. Tout comme dans la démonstration du lemme 10, on utilise la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}} \chi_\delta(-s, x-y) ds dy = 1,$$

et la borne lipschitz sur F pour se rendre compte qu'il suffit d'établir :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}\times[0,+\infty[\times\mathbb{R}} |v_0(x) - v(s,y)| \varphi(x) \chi_\delta(-s, x-y) dx ds dy = 0,$$

lorsque φ est continue à support compact et positive.

Les arguments développés dans la démonstration du lemme 10 (changement de variables, approximation sur un compact par une fonction continue, puis utilisation du théorème de convergence dominée) permettent de montrer de la même manière qu'on a la propriété :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} |v(s, x) - v(s, y)| \varphi(x) \chi_\delta(-s, x - y) dx ds dy = 0.$$

Par l'inégalité triangulaire, il suffit donc d'établir :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} |v_0(x) - v(s, x)| \varphi(x) \chi_\delta(-s, x - y) dx ds dy = 0.$$

Soit J_δ l'intégrale ci-dessus dont on cherche à montrer qu'elle tend vers 0 quand δ tend vers 0^+ . On calcule J_δ en intégrant tout d'abord par rapport à y et en utilisant la définition (74) de χ_δ :

$$\begin{aligned} J_\delta &= \int_{\mathbb{R} \times [0, +\infty[} |v(s, x) - v_0(x)| \varphi(x) \frac{\psi(-s/\delta)}{\delta} dx ds \\ &= \int_{[-R, R] \times [0, 1]} |v(\delta \tau, x) - v_0(x)| \varphi(x) \psi(-\tau) dx d\tau, \end{aligned}$$

où on a fixé $R > 0$ tel que le support de φ est inclus dans $[-R, R]$. On peut donc majorer :

$$\begin{aligned} J_\delta &\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{[-R, R] \times [0, 1]} |v(\delta \tau, x) - v_0(x)| \psi(-\tau) dx d\tau \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \int_0^1 \psi(-\tau) \left(\int_{-R}^R |v(\delta \tau, x) - v_0(x)| dx \right) d\tau \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \sup_{t \in]0, \delta]} \int_{-R}^R |v(t, x) - v_0(x)| dx. \end{aligned}$$

L'hypothèse faite sur v assure que la quantité à droite de l'inégalité tend vers 0 quand δ tend vers 0^+ , ce qui conclut la démonstration du lemme 11. \square

Les lemmes 10 et 11 sont à la base du résultat suivant :

Proposition 10. *Soit $u, v \in L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ deux solutions entropiques de l'équation :*

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = 0, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R},$$

associées respectivement aux données initiales $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que v vérifie la propriété de continuité (78). Alors pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive, on a l'inégalité :

$$\int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u - v| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(u - v) (f(u) - f(v)) \partial_x \varphi dt dx + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v_0(x)| \varphi(0, x) dx \geq 0. \quad (79)$$

Démonstration de la proposition 10. On rappelle que les fonctions ψ, θ vérifient les propriétés (72) et (73) et que la fonction χ_δ est définie par (74). Pour φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive, on définit la fonction de 4 variables :

$$\forall (t, x, s, y) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad \Phi_\delta(t, x, s, y) = \varphi(t, x) \chi_\delta(t - s, x - y).$$

Pour tout $(s, y) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ fixé, la fonction :

$$(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longmapsto \Phi_\delta(t, x, s, y),$$

est de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive. De même, pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ fixé, la fonction :

$$(s, y) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longmapsto \Phi_\delta(t, x, s, y),$$

est de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et positive.

Comme u et v sont des solutions entropiques, la proposition 5 montre que u et v vérifient les inégalités d'entropie de Kruzkov (57). En particulier, pour tout $(s, y) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u(t, x) - v(s, y)| \partial_t \Phi_\delta(t, x, s, y) \\ & \quad + \operatorname{sgn}(u(t, x) - v(s, y)) (f(u(t, x)) - f(v(s, y))) \partial_x \Phi_\delta(t, x, s, y) dt dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v(s, y)| \Phi_\delta(0, x, s, y) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Le théorème de Fubini assure que la fonction intervenant dans le membre de gauche de (80) est intégrable par rapport à $(s, y) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On intègre donc par rapport à (s, y) et on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u(t, x) - v(s, y)| \partial_t \Phi_\delta \\ & \quad + \operatorname{sgn}(u(t, x) - v(s, y)) (f(u(t, x)) - f(v(s, y))) \partial_x \Phi_\delta dt dx ds dy \\ & \quad + \int_{\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u_0(x) - v(s, y)| \Phi_\delta(0, x, s, y) dx ds dy \geq 0. \end{aligned} \quad (81)$$

De la même manière, pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ fixé, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |v(s, y) - u(t, x)| \partial_s \Phi_\delta(t, x, s, y) \\ & \quad + \operatorname{sgn}(v(s, y) - u(t, x)) (f(v(s, y)) - f(u(t, x))) \partial_y \Phi_\delta(t, x, s, y) ds dy \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x) - u(t, x)| \Phi_\delta(t, x, 0, y) dy \geq 0, \end{aligned}$$

qui se simplifie en remarquant qu'on a $\Phi_\delta(t, x, 0, y) = 0$ en raison de la condition (72) sur ψ . On intègre cette inégalité par rapport à (t, x) et on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u(t, x) - v(s, y)| \partial_s \Phi_\delta \\ & \quad + \operatorname{sgn}(u(t, x) - v(s, y)) (f(u(t, x)) - f(v(s, y))) \partial_y \Phi_\delta dt dx ds dy \geq 0. \end{aligned} \quad (82)$$

En sommant (81) et (82), on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u(t, x) - v(s, y)| (\partial_t \Phi_\delta + \partial_s \Phi_\delta) \\ & \quad + \operatorname{sgn}(u(t, x) - v(s, y)) (f(u(t, x)) - f(v(s, y))) (\partial_x \Phi_\delta + \partial_y \Phi_\delta) dt dx ds dy \\ & \quad + \int_{\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u_0(x) - v(s, y)| \Phi_\delta(0, x, s, y) dx ds dy \geq 0. \end{aligned} \quad (83)$$

L'expression de la fonction Φ_δ donne les relations :

$$\begin{aligned} \forall (t, x, s, y), \quad & (\partial_t \Phi_\delta + \partial_s \Phi_\delta)(t, x, s, y) = \partial_t \varphi(t, x) \chi_\delta(t - s, x - y), \\ & (\partial_x \Phi_\delta + \partial_y \Phi_\delta)(t, x, s, y) = \partial_x \varphi(t, x) \chi_\delta(t - s, x - y). \end{aligned}$$

Le comportement asymptotique quand δ tend vers 0^+ de la première intégrale intervenant dans (83) relève donc du lemme 10 car les fonctions $\partial_t \varphi, \partial_x \varphi$ sont continues à support compact dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Le comportement asymptotique de la seconde intégrale intervenant dans (83) relève du lemme 11 car on a fait l'hypothèse adéquate sur v , et car $\Phi_\delta(0, x, s, y) = \varphi(0, x) \chi_\delta(-s, x - y)$. En faisant donc tendre δ vers 0^+ dans (83), on obtient l'inégalité (79). \square

On passe maintenant à la démonstration du théorème 10 :

Démonstration du théorème 10. La démonstration consiste à choisir dans l'inégalité (79) la "fonction test" φ qui est la fonction caractéristique du trapèze :

$$\mathcal{T}_{R,T} = \left\{ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad |x| \leq R + M(T - t) \right\}.$$

Une telle fonction caractéristique n'est bien évidemment pas de classe \mathcal{C}^1 , donc on aura recours à un argument de régularisation et on passera à la limite.

On se donne u, v vérifiant les hypothèses du théorème 10. En particulier, u et v satisfont les hypothèses de la proposition 10 et on peut donc appliquer l'inégalité (79). On se donne également $R > 0, T > 0$ et M la constante définie dans l'énoncé du théorème 10. Le trapèze $\mathcal{T}_{R,T}$ est alors défini comme ci-dessus. On se fixe une fonction ζ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , positive, croissante et vérifiant :

$$\zeta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 1, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon \in]0, 1]$ et $\delta \in]0, 1]$, on définit la fonction :

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad \varphi_{\varepsilon, \delta}(t, x) = \zeta\left(\frac{T-t}{\varepsilon}\right) \zeta\left(\frac{(R+M(T-t))^2 - x^2}{\delta}\right).$$

On vérifie sans peine que $\varphi_{\varepsilon, \delta}$ est positive, de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans la trapèze $\mathcal{T}_{R,T}$. On applique l'inégalité (79) à la fonction test $\varphi_{\varepsilon, \delta}$. En regroupant les termes en $1/\varepsilon$ et les termes en $1/\delta$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\delta} \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} \zeta\left(\frac{T-t}{\varepsilon}\right) \zeta'\left(\frac{(R+M(T-t))^2 - x^2}{\delta}\right) \\ & \quad \left\{ (R+M(T-t)) M |u-v| + x \operatorname{sgn}(u-v) (f(u) - f(v)) \right\} dt dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u-v| \zeta'\left(\frac{T-t}{\varepsilon}\right) \zeta\left(\frac{(R+M(T-t))^2 - x^2}{\delta}\right) dt dx \\ & \leq \zeta\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v_0(x)| \zeta\left(\frac{(R+MT)^2 - x^2}{\delta}\right) dx. \end{aligned}$$

On remarque que la première intégrale dans le membre de gauche de l'inégalité est positive. En effet, ζ est positive et croissante, la fonction intégrée est supportée dans le trapèze $\mathcal{T}_{R,T}$, et de plus on a :

$$|x \operatorname{sgn}(u-v) (f(u) - f(v))| \leq (R+M(T-t)) |f(u) - f(v)| \leq (R+M(T-t)) M |u-v|,$$

en tout point du trapèze $\mathcal{T}_{R,T}$. On obtient donc l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_{[0, +\infty[\times \mathbb{R}} |u-v| \zeta'\left(\frac{T-t}{\varepsilon}\right) \zeta\left(\frac{(R+M(T-t))^2 - x^2}{\delta}\right) dt dx \\ & \leq \zeta\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v_0(x)| \zeta\left(\frac{(R+MT)^2 - x^2}{\delta}\right) dx. \end{aligned} \quad (84)$$

On commence par passer à la limite en δ dans l'inégalité (84) en appliquant le théorème de convergence dominée :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathcal{T}_{R,T}} |u-v| \zeta'\left(\frac{T-t}{\varepsilon}\right) dt dx \leq \zeta\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \int_{-R-MT}^{R+MT} |u_0(x) - v_0(x)| dx. \quad (85)$$

Sous les hypothèses faites sur u et v , on remarque ensuite que la fonction :

$$h : t \in [0, T] \longmapsto \int_{-R-M(T-t)}^{R+M(T-t)} |u(t, x) - v(t, x)| dx,$$

est continue. Par ailleurs, en appliquant le théorème de Fubini et en effectuant un changement de variables dans le membre de gauche de (85), on obtient :

$$\int_0^{T/\varepsilon} h(T - \varepsilon s) \zeta'(s) ds \leq \zeta\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) h(0).$$

On peut alors faire tendre ε vers 0^+ en appliquant le théorème de convergence dominée. On obtient $h(T) \leq h(0)$, ce qui n'est rien d'autre que (71). \square

A Fonctions à variations bornées

Cet appendice est consacré à la définition et aux principales propriétés des fonctions à variations bornées. Pour simplifier, et comme c'est le cas qui nous intéresse dans ce texte, on se restreindra aux fonctions à valeurs réelles.

Définition 7 (Fonctions à variations bornées). *Si u est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et si I désigne un intervalle de \mathbb{R} , on définit la quantité :*

$$\mathrm{TV}(u; I) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})|; \quad N \geq 1, (x_0, \dots, x_N) \in I^{N+1}, x_0 \leq \dots \leq x_N \right\}.$$

On note simplement $\mathrm{TV}(u)$ la quantité définie ci-dessus dans le cas $I = \mathbb{R}$.

Une fonction u est dite à variations bornées, resp. à variations bornées sur I , si la quantité $\mathrm{TV}(u)$, resp. $\mathrm{TV}(u; I)$, est finie. L'ensemble des fonctions à variations bornées est notée $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$. La quantité $\mathrm{TV}(u)$ est la variation totale de u .

Il est immédiat de voir que $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et que la variation totale est une semi-norme sur $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \forall u_1, u_2 \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{TV}(u_1 + u_2) &\leq \mathrm{TV}(u_1) + \mathrm{TV}(u_2), \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{TV}(\lambda u) &= |\lambda| \mathrm{TV}(u). \end{aligned}$$

Par ailleurs, une fonction est de variation totale nulle si et seulement si elle est constante. Le résultat suivant est également immédiat et s'obtient en manipulant la définition 7 (on en laisse la démonstration au lecteur) :

Lemme 12. *Soit u une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Si u est à variations bornées, alors u est à variations bornées sur tout intervalle I de \mathbb{R} et $\mathrm{TV}(u; I) \leq \mathrm{TV}(u)$. Plus précisément, si $(I_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une suite d'intervalles deux-à-deux disjoints, alors on a :*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{TV}(u; I_j) \leq \mathrm{TV}(u).$$

Réciproquement, si u est à variations bornées sur chaque intervalle $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, et si la suite $(\mathrm{TV}(u; [-n, n]))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors u est à variations bornées et on a :

$$\mathrm{TV}(u) = \sup_n \mathrm{TV}(u; [-n, n]).$$

On en vient maintenant à la caractérisation classique des fonctions réelles à variations bornées. On montre tout d'abord le résultat préliminaire suivant :

Lemme 13. *Soit $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $T_u(x) = \mathrm{TV}(u;]-\infty, x])$. Alors pour tous réels $x \leq y$, on a :*

$$|u(y) - u(x)| \leq T_u(y) - T_u(x).$$

En particulier, $u + T_u$ et $T_u - u$ sont des fonctions croissantes.

Démonstration du lemme 13. Soient $x \leq y$ et soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe une suite croissante $x_0 \leq \dots \leq x_N \leq x$ vérifiant :

$$\sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| \geq T_u(x) - \varepsilon.$$

On utilise ensuite les inégalités :

$$T_u(y) \geq |u(y) - u(x)| + |u(x) - u(x_N)| + \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| \geq |u(y) - u(x)| + T_u(x) - \varepsilon,$$

la première minoration provenant du fait que la suite de réels x_0, \dots, x_N, x, y est croissante, majorée par y et donc intervient dans la définition de la quantité $T_u(y)$. Finalement, on a obtenu :

$$|u(y) - u(x)| \leq T_u(y) - T_u(x) + \varepsilon,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, puis on fait tendre ε vers 0. \square

Le lemme 13 permet de montrer facilement le résultat suivant :

Proposition 11 (Caractérisation des fonctions à variations bornées). *Une fonction u est à variations bornées si et seulement si elle s'écrit comme la différence de deux fonctions croissantes et bornées.*

En particulier, toute fonction à variations bornées est mesurable, bornée, et admet une limite à gauche, resp. à droite, en tout point de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, resp. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Enfin toute fonction à variations bornées est continue sauf sur un ensemble au plus dénombrable de points.

Démonstration de la proposition 11. Soit $u \in \text{BV}(\mathbb{R})$. Alors on peut écrire $u = (u+T_u)/2 - (T_u - u)/2$ et le lemme 13 montre que u se décompose ainsi en une différence de fonctions croissantes. La fonction T_u est bornée car elle est positive et majorée par $\text{TV}(u)$ en vertu du lemme 12. La fonction u est également bornée car pour tout réel x , l'inégalité triangulaire fournit directement la majoration :

$$|u(x)| \leq |u(0)| + |u(x) - u(0)| \leq |u(0)| + \text{TV}(u).$$

On a donc bien écrit u comme la différence de deux fonctions croissantes bornées.

Par ailleurs, si u est une fonction croissante bornée, alors u admet une limite finie en $-\infty$, resp. $+\infty$, valant $\inf_{\mathbb{R}} u$, resp. $\sup_{\mathbb{R}} u$. Si $x_0 \leq \dots \leq x_N$ est une famille croissante de réels, on a :

$$\sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^N u(x_j) - u(x_{j-1}) = u(x_N) - u(x_0) \leq \sup_{\mathbb{R}} u - \inf_{\mathbb{R}} u.$$

Donc u est à variations bornées. Comme $\text{BV}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, toute différence de fonctions croissantes bornées est une fonction à variations bornées.

Les propriétés de mesurabilité, de limites à gauche et à droite, et de continuité sont vraies pour les fonctions croissantes bornées, et par conséquent pour les différences de fonctions croissantes bornées. \square

Donnons maintenant quelques exemples de fonctions à variations bornées. Revenons tout d'abord sur le cas des fonctions croissantes bornées. Si u est croissante et bornée, alors la variation totale de u est égale à $\sup_{\mathbb{R}} u - \inf_{\mathbb{R}} u$. En effet, on a vu dans la démonstration de la proposition 11 que la variation totale de u est plus petite que $\sup_{\mathbb{R}} u - \inf_{\mathbb{R}} u$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels $x_0 \leq 0$ et $x_1 \geq 0$ vérifiant :

$$u(x_0) \leq \inf_{\mathbb{R}} u + \frac{\varepsilon}{2}, \quad u(x_1) \geq \sup_{\mathbb{R}} u - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$\text{TV}(u) \geq u(x_1) - u(x_0) \geq \sup_{\mathbb{R}} u - \inf_{\mathbb{R}} u - \varepsilon.$$

On obtient ainsi l'égalité $\text{TV}(u) = \sup_{\mathbb{R}} u - \inf_{\mathbb{R}} u$.

On s'intéresse maintenant aux fonctions en escaliers. Soit $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels, indexée par \mathbb{Z} , strictement croissante, et vérifiant $\lim_{\pm\infty} x_j = \pm\infty$. Soit aussi $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels et définissons la fonction en escaliers :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u(x) = u_j \quad \text{si } x \in]x_j, x_{j+1}].$$

Alors u est à variations bornées si et seulement si la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1} - u_j|$ converge. Dans ce cas, la variation totale de u coïncide avec la somme de la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1} - u_j|$. En effet, supposons dans un premier temps que u est à variations bornées. Alors on a :

$$\sum_{j=-n}^n |u_j - u_{j-1}| = \sum_{j=-n}^n |u(x_{j+1}) - u(x_j)| \leq \text{TV}(u).$$

Par conséquent la série $\sum |u_{j+1} - u_j|$ converge et sa somme est majorée par la variation totale de u .

Supposons désormais que la série $\sum |u_{j+1} - u_j|$ converge et montrons que la fonction en escaliers u est à variations bornées. On se donne une suite croissante $y_0 \leq \dots \leq y_N$, et on range chacun des y_j dans un intervalle $]x_{i_j}, x_{i_j+1}]$, la suite $(i_j)_{0 \leq j \leq N}$ étant croissante. Alors on applique l'inégalité triangulaire et on obtient :

$$\sum_{j=1}^N |u(y_j) - u(y_{j-1})| = \sum_{j=1}^N |u_{i_j} - u_{i_{j-1}}| \leq \sum_{\ell=i_0+1}^{i_N} |u_\ell - u_{\ell-1}| \leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |u_{\ell+1} - u_\ell|.$$

Ainsi u est à variations bornées et sa variation totale est majorée par la somme de la série $\sum |u_{j+1} - u_j|$.

Le dernier exemple que nous traiterons est celui des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors $u \in \text{BV}(\mathbb{R})$ si et seulement si $u' \in L^1(\mathbb{R})$ et dans ce cas la variation totale de u coïncide avec $\|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}$. En effet, supposons pour commencer que u' est intégrable. On se donne une suite croissante $x_0 \leq \dots \leq x_N$, et on majore :

$$\sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^N \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'(y) dy \right| \leq \int_{x_0}^{x_N} |u'(y)| dy \leq \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Ainsi la variation totale de u est majorée par $\|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Supposons désormais que u est à variations bornées. Soit $R > 0$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $|u'|$ est une fonction continue, on a la propriété des sommes de Riemann :

$$\int_{-R}^R |u'(x)| dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2R}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| u' \left(-R + \frac{2Rj}{n} \right) \right|.$$

Comme u' est uniformément continue sur le segment $[-R, R]$, on peut donc se fixer un entier N vérifiant les deux propriétés suivantes : tout d'abord, on a :

$$\int_{-R}^R |u'(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2R}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left| u' \left(-R + \frac{2Rj}{N} \right) \right|, \quad (86)$$

et de plus, on a :

$$x, y \in [-R, R], \quad |x - y| \leq \frac{2R}{N} \implies |u'(x) - u'(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4R}. \quad (87)$$

On part de (86) et on approche la dérivée de u au point $-R + 2Rj/N$ par le taux de variation de u entre les points $-R + 2Rj/N$ et $-R + 2R(j+1)/N$:

$$\int_{-R}^R |u'(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2R}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \frac{u(-R + 2R(j+1)/N) - u(-R + 2Rj/N)}{2R/N} \right| \\ + \frac{2R}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\left| u' \left(-R + \frac{2Rj}{N} \right) - \frac{u(-R + 2R(j+1)/N) - u(-R + 2Rj/N)}{2R/N} \right|}_{\clubsuit}, \quad (88)$$

On majore chaque terme \clubsuit en utilisant l'égalité des accroissements finis ainsi que la continuité uniforme (87) :

$$\left| u' \left(-R + \frac{2Rj}{N} \right) - \frac{u(-R + 2R(j+1)/N) - u(-R + 2Rj/N)}{2R/N} \right| \\ = \left| u' \left(-R + \frac{2Rj}{N} \right) - u' \left(-R + \frac{2R(j+\theta_j)}{N} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4R}, \quad (89)$$

avec $\theta_j \in]0, 1[$. En utilisant (89) dans l'inégalité (88), on trouve :

$$\int_{-R}^R |u'(x)| dx \leq \varepsilon + \sum_{j=0}^{N-1} \left| u \left(-R + \frac{2R(j+1)}{N} \right) - u \left(-R + \frac{2Rj}{N} \right) \right| \leq \varepsilon + \text{TV}(u).$$

On fait d'abord tendre ε vers 0, puis on applique le théorème de Beppo-Levi en faisant tendre R vers $+\infty$. La fonction u' est intégrable, et la norme $\|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}$ est majorée par $\text{TV}(u)$.

On s'intéresse maintenant aux propriétés de compacité des suites de fonctions à variations bornées. On remarque tout d'abord qu'une fonction à variations bornées peut être nulle presque-partout sans pour autant être de variation totale nulle. Par exemple, la fonction :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est de variation totale égale à 2, tout en étant nulle presque-partout. Une telle pathologie vient du point de discontinuité de u . On montre tout d'abord le résultat suivant :

Proposition 12. *Si u est à variations bornées, alors il existe une unique fonction $u_{\#}$ à variations bornées telle que $u_{\#}$ est continue à gauche en tout point et $u = u_{\#}$ sauf sur un ensemble au plus dénombrable de points. De plus, on a $\text{TV}(u_{\#}) \leq \text{TV}(u)$.*

Par ailleurs, si v est à variations bornées et si $v = u$ presque-partout, alors $v_{\#} = u_{\#}$.

Démonstration de la proposition 12. On définit la fonction $u_{\#}$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_{\#}(x) = \lim_{s \rightarrow 0^-} u(x+s).$$

Si x est un point où u est continue, alors $u_{\#}(x) = u(x)$ et donc $u = u_{\#}$ sauf sur un ensemble au plus dénombrable de points. Il est assez facile de montrer que $u_{\#}$ est continue à gauche. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Par définition, on sait qu'il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0[, \quad |u(x) - u_{\#}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit maintenant $x \in]x_0 - \alpha, x_0[$. Alors pour tout n suffisamment grand, on a également $x - 2^{-n} \in]x_0 - \alpha, x_0[$, et on peut majorer :

$$|u_{\#}(x) - u_{\#}(x_0)| \leq |u_{\#}(x) - u(x - 2^{-n})| + |u(x - 2^{-n}) - u_{\#}(x_0)| \leq |u_{\#}(x) - u(x - 2^{-n})| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant n de manière appropriée, on a donc obtenu :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0[, \quad |u_{\#}(x) - u_{\#}(x_0)| \leq \varepsilon,$$

ce qui exprime la continuité à gauche de $u_{\#}$ en x_0 .

On montre maintenant que $u_{\#}$ est unique. En effet, si $\tilde{u}_{\#}$ convient aussi, alors $u_{\#} - \tilde{u}_{\#}$ est une fonction continue à gauche, nulle sauf sur un ensemble au plus dénombrable de points. Il s'en suit que $u_{\#} - \tilde{u}_{\#}$ est nulle partout.

Majorons maintenant la variation totale de $u_{\#}$. On se donne une suite croissante $x_0 \leq \dots \leq x_N$ et on écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |u_{\#}(x_j) - u_{\#}(x_{j-1})| &= \sum_{j=1}^N \left| \lim_{s \rightarrow 0^-} u(x_j + s) - \lim_{s \rightarrow 0^-} u(x_{j-1} + s) \right| \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^-} \sum_{j=1}^N |u(x_j + s) - u(x_{j-1} + s)| \leq \text{TV}(u). \end{aligned}$$

Pour finir, supposons que $v = u$ presque-partout où v est encore à variations bornées. Alors $u - v$ est nulle presque-partout et à variations bornées. Aux points où $u - v$ est continue, on a nécessairement $u - v = 0$. Par conséquent, $(u - v)_{\#} = u_{\#} - v_{\#}$ est nulle sauf sur un ensemble au plus dénombrable et il s'en suit à nouveau que $u_{\#} - v_{\#}$ est nulle partout. \square

Modulo l'égalité presque-partout, on peut donc toujours supposer qu'une fonction à variations bornées est continue à gauche. On énonce maintenant un critère de compacité qui sert dans l'analyse de convergence du schéma de Glimm :

Théorème 11. *Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et vérifiant :*

- *il existe un intervalle compact K dans lequel toutes les fonctions v_n prennent leurs valeurs,*
- *pour tout $t \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t, \cdot)$ est à variations bornées, continue à gauche, et l'application $(t \mapsto \text{TV}(v_n(t, \cdot)))$ est décroissante, majorée par un nombre M_1 indépendant de n ,*
- *il existe une constante $M_2 \geq 0$ et une suite positive $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 telles que pour tous temps $t \geq s \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'estimation de continuité :*

$$\int_{\mathbb{R}} |v_n(t, x) - v_n(s, x)| dx \leq M_2(t - s) + \varepsilon_n,$$

Alors il existe une fonction v définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et il existe une sous-suite, toujours notée $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

- *v est mesurable et à valeurs dans l'intervalle compact K ,*
- *pour tout $t \geq 0$, $v(t, \cdot)$ est à variations bornées, continue à gauche, et l'application $(t \mapsto \text{TV}(v(t, \cdot)))$ est décroissante, majorée par M_1 ,*
- *pour tous temps $t \geq s \geq 0$, on a l'estimation de continuité :*

$$\int_{\mathbb{R}} |v(t, x) - v(s, x)| dx \leq M_2(t - s),$$

- *la sous-suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers v presque-partout dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, ainsi que dans l'espace $L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$.*

On renvoie aux ouvrages déjà mentionnés dans l'introduction pour la démonstration de ce résultat.