

Mécanique des milieux continus

Nicolas Moes

▶ **To cite this version:**

Nicolas Moes. Mécanique des milieux continus. École d'ingénieur. Nantes, France. 2011, pp.105. cel-00612360v2

HAL Id: cel-00612360
https://cel.hal.science/cel-00612360v2

Submitted on 7 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Nicolas Moës

Mécanique des milieux continus



Centrale Nantes

École Centrale de Nantes — 2011
Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France:
— paternité;
— pas d'utilisation commerciale;
— partage des conditions initiales à l'identique;
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr



Table des matières

Avant-propos

1 Pourquoi la mécanique des milieux continus ?

1.1 Du point matériel aux milieux continus 7
1.2 Mécanique des milieux continus et disciplines de l'ingénieur 8
1.3 Notions de milieu continu et d'échelle d'observation 9
1.4 Principales hypothèses 11
1.5 Système d'unités 11

2 Éléments de calcul tensoriel

2.1 Convention de sommation d'Einstein 13
2.2 Symbole de Kronecker 13
2.3 Symbole de permutation de Lévi-Civita 14
2.4 Changement de base 14
2.5 Scalaire 15
2.6 Vecteur 15
2.7 Tenseur d'ordre deux 16
Tenseur identité, 16 • Tenseurs symétrique et antisymétrique, 17 • Trace d'un tenseur, 17 • Produit contracté, 17 • Produit tensoriel, 18 • Représentation spectrale d'un tenseur, 18.
2.8 Intégration par partie 19
Formule de Green-Ostrogradski, 19 • Formule de Stokes, 20.
2.9 Systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales 20
Coordonnées cartésiennes, 20 • Coordonnées cylindriques, 21 • Coordonnées sphériques, 22 • Autres formules, 24.

3 Cinématique d'un milieu continu

3.1 Trajectoire et dérivées temporelles 25
3.2 Gradient de la transformation 28
3.3 Définition des tenseurs de déformation 30
3.4 Interprétation des composantes des tenseurs de déformations 32
3.5 Décomposition polaire 34
3.6 Changement de volume 36
3.7 Changement de surface 37
3.8 Taux de déformation 37
3.9 Déformations en petites perturbations 38
Formulation de l'hypothèse des petites perturbations, 38 • Simplification des résultats en petites perturbations, 39 • Conditions de compatibilité des déformations, 42 • Directions principales des déformations et cercle de Mohr, 42 • Dépouillement d'une rosette en extensométrie, 44.

4 Lois de bilan

4.1 Forme globale des lois de bilan 47

4.2 Forme locale des lois de bilan 48

4.3 Conséquences des lois de bilan 53

Conséquences de la conservation de la masse, 53 • Conséquences du bilan de quantité de mouvement, 55 • Conséquences du bilan du moment cinétique, 56 • Conséquences du bilan de l'énergie, 56.

5 Tenseur des contraintes

5.1 Introduction du tenseur des contraintes 57

Volume élémentaire au sein du milieu, 58 • Volume élémentaire en surface du milieu, 60.

5.2 Tenseur des contraintes et principe des puissances virtuelles 63

Définition des puissances virtuelles, 63 • Théorème de l'énergie cinétique, 64 • Dualité en mécanique, 65.

5.3 Propriétés locales du tenseur des contraintes 66

Contrainte normale et contrainte de cisaillement, 66 • Contraintes normales principales, 67 • Représentation des contraintes et tricercle de Mohr, 68 • État plan de contrainte, 69 • Tenseur des contraintes sphérique, 70 • Tenseur des contraintes uniaxial, 70 • Tenseur des contraintes de cisaillement simple, 70.

6 Théorie de l'élasticité linéaire isotrope

6.1 Équations 71

Cinématique, 71 • Équilibre, 72 • Comportement élastique isotrope, 73 • Récapitulatif, 77.

6.2 Théorèmes de l'énergie potentielle 78

6.3 Techniques de résolution analytique 80

Approche en déplacement, 80 • Approche en contrainte, 81 • Solide en état plan de déformation, 82 • Solide en état plan de contrainte, 83 • Fonction de contrainte d'Airy, 85.

6.4 Techniques de résolution numérique 85

6.5 Thermoélasticité 86

7 Problèmes classiques d'élasticité

7.1 Cylindre sous pression 89

7.2 Traction d'un barreau prismatique 91

7.3 Torsion d'un barreau prismatique 93

8 Thermodynamique et lois de comportement

8.1 Premier principe 99

8.2 Second principe 100

Bibliographie

Avant-propos

Dans ce cours des milieux continus, une cohérence de contenu a été recherchée avec les autres cours de mécanique dispensés en tronc commun, à savoir :
— dynamique des solides — 1re année ;
— résistance des matériaux — 1re année ;
— matériaux — 1re année ;
— technologie de conception mécanique — 1re année ;
— mécanique des fluides — 2e année ;
— méthode des éléments finis — 2e année ;
— mécanique des vibrations — 2e année.
Cette cohérence a été recherchée également autant que possible pour les notations. Le cas échéant, un choix différent de notation par rapport à un autre cours de tronc commun est indiqué par une note en bas de page.

Rédiger un polycopié sur la mécanique des milieux continus pour un cours de tronc commun d'école d'ingénieurs n'est pas une tâche aisée. J'ai été grandement aidé dans cette entreprise par différents collègues qui ont pris la peine de me donner leur avis sur ce document. Les conseils pédagogiques de Jean-François Sini ont également été très bénéfiques.

L'auteur remercie chaleureusement Mathias Legrand, professeur assistant à l'université McGill, pour sa relecture minutieuse, son travail de mise en forme ainsi que son conséquent travail d'amélioration de toutes les illustrations par rapport à leur versions initiales. Enfin, mes remerciements vont aussi à Grégory Legrain qui a réalisé le site web de ce cours d'une main de maître.

Nantes
octobre 2013
Nicolas Moës

1

Pourquoi la mécanique des milieux continus ?

1.1 Du point matériel aux milieux continus

La mécanique du point matériel permet de prédire le mouvement d'un point soumis à une ensemble de forces. On distingue, dans cette théorie, la description de la *cinématique* — position, vitesse et accélération du point — de la *dynamique* — relation entre force et mouvement, autrement dit, la seconde loi de Newton $\vec{f} = m\vec{a}$. Cette théorie permet, par exemple, de calculer le trajet d'électrons dans un champ magnétique ou de prédire l'orbite d'une planète soumise aux forces gravitationnelles.

La mécanique du point matériel ne permet pas de décrire les rotations d'un corps sur lui-même. En effet, la notion de rotation n'a pas de sens puisqu'un point ne peut tourner sur lui-même. La dynamique d'un point matériel s'écrit simplement en terme de force et d'accélération. Cette théorie n'est donc pas adaptée pour étudier le trajet d'une boule de billard ou pour étudier la rotation d'une planète ou d'un satellite sur lui-même lors de son orbite. Pour cela, il faut la mécanique des solides indéformables qui intègre la notion de rotation, d'inertie et de moment : la somme des moments s'appliquant sur le corps égale, à tout instant, son moment d'inertie multiplié par son accélération angulaire.

La mécanique des solides indéformables (1) permet de résoudre des problèmes importants de l'ingénieur comme ceux issus de la robotique impliquant la notion de chaîne cinématique. En revanche, cette mécanique ne peut traiter les problèmes suivants :

— déterminer la force nécessaire pour emboutir une canette à partir d'un tôle mince ;
— calculer l'écoulement de l'eau sous un pneu en conduite sur route mouillée afin d'optimiser le dessin de ce pneu ;
— déterminer le niveau d'échauffement de l'outil dans un procédé d'usinage. L'usinage est un procédé de fabrication dans lequel une pièce métallique brute est *taillée* à l'aide d'un petit outil. Le contact entre l'outil et la pièce se fait à grande vitesse et génère des copeaux ;
— calculer la pression nécessaire pour souffler les bouteilles plastiques. Deux procédés industriels de soufflage existent : l'extrusion-soufflage et l'injection étirement soufflage. Il laisse sur le fond du culot des bouteilles plastiques deux signes caractéristiques différents : un point ou un trait ;
— étudier la stabilité des talus ;
— déterminer si une fissure détectée dans un réacteur ou sur le fuselage d'un avion est critique ;
— simuler informatiquement les chocs crâniens dans les accidents de la route pour optimiser les airbags et les habitacles des voitures ;

(1) Objet du cours de dynamique des solides de tronc commun 1re année.

— étudier de la résistance d'une coque composite d'un voilier de course soumis aux chocs répétés avec la surface de l'eau. L'impact répété d'une coque sur l'eau est appelé *tossage*.

Pourquoi ces problèmes ne peuvent-ils pas être traités par la mécanique des solides indéformables ? Reprenons chacun des exemples :

— la force nécessaire pour emboutir une canette dépend du matériau dont est constituée la tôle. La notion de *matériau* n'intervient pas en mécanique des solides indéformables : seules la masse et la forme, qui influe sur le moment d'inertie, sont considérées ;
— l'eau est un milieu qui se déforme facilement. Ceci est à l'opposé de la mécanique des solides qui considère les corps comme indéformables [(2)] ;
— la détermination du niveau d'échauffement d'un outil lors d'un procédé d'usinage requiert fait appel à la thermodynamique. L'énergie mécanique dissipée par l'outil dans sa coupe est transformée en chaleur, ce qui produit une élévation de température ;
— le soufflage d'une bouteille fait intervenir des déformations extrêmes ;
— l'étude de la stabilité d'un talus se pose en ces termes : à partir de quelle pression exercée sur le talus, celui-ci glisse-t-il de manière irréversible ? Une préoccupation éloignée de la mécanique des solides indéformables ;
— une fissure est une surface sur laquelle l'intégrité de la matière est perdue. En mécanique des solides les corps sont indivisibles ;
— la modélisation d'un choc crânien est très complexe et entre dans le domaine dit de la biomécanique qui nécessite un travail collaboratif entre mécanicien, neurochirurgien et vétérinaire (analogie homme-animal). Une tête humaine est bien différente (même si l'on a la tête dure) d'un solide indéformable ;
— les coques et mâts de voiliers de course sont réalisés en matériaux composites. Ces matériaux vus de près sont des structures à part entière : il y a des couches (appelées plis) constituées de fibres plongées dans une matrice [(3)]. Les propriétés de ces fibres et de la matrice, la séquence d'empilement, le mode de fabrication du matériau sont autant de facteurs déterminants sur la résistance du matériau. Cette problématique est encore une fois éloignée de la mécanique des solides.

On peut résumer la discussion ci-dessus, en disant que la mécanique des milieux continus doit être utilisée à la place de la mécanique des solides indéformables lorsque [(4)] :

— des déformations interviennent ;
— le comportement du milieu, fluide ou solide, doit être pris en compte. Il faut connaître la relation entre la déformation du corps et les efforts mis en jeu ;
— des phénomènes thermiques interviennent.

1.2 Mécanique des milieux continus et disciplines de l'ingénieur

La mécanique des milieux continus est au centre des disciplines suivantes : le calcul des structures, les procédés de fabrication, la biomécanique, la mécanique des fluides, le génie civil, la conception de nouveaux matériaux (la micro-structure d'un matériau peut être

(2) Il est vrai que la mécanique des solides peut faire intervenir une déformation via des ressorts placés entre des corps rigides mais on est loin de la déformation d'un fluide.
(3) Entre les plis sont insérées des couches minces qui ont la forme de nid d'abeilles.
(4) En réalité, on peut voir la mécanique des solides comme le cas limite de la mécanique des milieux continus lorsque les corps sont pratiquement indéformables. En ce sens, la mécanique des milieux continus contient la mécanique rationnelle comme cas particulier.

vue comme une structure à part entière). Par exemple, pour le calcul des structures, les préoccupations sont les suivantes :

Résistance La pièce ou structure doit pouvoir supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées : « un pont ne doit pas s'écrouler lors du passage d'un camion » ;

Rigidité La pièce ou structure ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée : « un pont ne doit pas s'enfoncer lors du passage d'une voiture » ;

Stabilité Un léger changement des conditions extérieures ne doit pas conduire à une réponse catastrophique de la pièce ou de la structure : « une brise légère ne doit pas conduire à la ruine catastrophique d'un pont » ;

Endurance La pièce ou structure soumise à un chargement cyclique (répété) doit pouvoir sans rupture supporter un nombre important de cycles : « le pont doit soutenir un trafic répété pendant de longues années » ou bien : « un réacteur d'avion doit tenir un maximum possible de vols sans se fissurer. »

Quant à l'optimisation des procédés de fabrication, les préoccupations sont les suivantes :

Économie de matière Comment produire une pièce répondant à un cahier des charges précis avec le moins de matière possible tout en s'assurant de pouvoir effectivement produire ces pièces ? On constate, depuis vingt ans, une réduction importante du poids des canettes et des bouteilles plastiques de soda ;

Durée de vie L'usinage est un procédé de fabrication permettant de façonner des pièces métalliques avec un outil coupant. Soit l'outil, soit la pièce, soit les deux se déplacent à vitesse élevée. L'étude du procédé d'usinage est important pour améliorer la longévité de l'outil et le fini de surface de la pièce usinée. Les préoccupations sont similaires pour les procédés telles que le fraisage, l'emboutissage, le galetage...

La mécanique des milieux continus est un cadre physique et mathématique permettant de modéliser un problème concret. Un fois le modèle mathématique établi, il pourra être résolu par une méthode analytique ou numérique. La modélisation suivie de la résolution du modèle forment ce que l'on appelle la *simulation du problème concret*. Cette simulation devra être validée par des expérimentations lorsque celles-ci sont disponibles et le modèle, corrigé, le cas échéant. Dans certains cas, les expérimentations sont très limitées voire inexistantes d'où l'importance capitale de la simulation. Par exemple, l'étude de la résistance des structures en béton protégeant le cœur des réacteurs nucléaires peut difficilement passer par des expérimentations à l'échelle 1.

La simulation, qui s'affine de plus en plus avec les progrès en modélisation et la puissance des ordinateurs, permet également de réduire le nombre d'essais nécessaires pour mettre au point un produit. C'est le cas notamment de la conception des voitures au crash. Le nombre de voitures sacrifiées en essai a fortement baissé depuis trente ans et les voitures sont néanmoins de plus en plus sûres.

1.3 Notions de milieu continu et d'échelle d'observation

On dit qu'un domaine contient un milieu matériel *continu* si à chaque instant et en chaque point de ce domaine, on peut définir des grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel. La grandeur physique peut être représentée mathématiquement par :

— un scalaire : masse volumique, température, concentration d'un polluant...

— un vecteur : vitesse, accélération, forces volumiques, couples volumiques...
— un tenseur d'ordre deux : déformations, contraintes...
— un tenseur d'ordre supérieur à deux : le tenseur d'élasticité qui est d'ordre quatre.

La grandeur physique donnée à chaque instant et en chaque point forme ce que l'on appelle un *champ*. On parlera par exemple du champ de température dans une pièce automobile à un instant donné ou bien de l'évolution du champ de contrainte dans une tôle lors de son écrasement par une presse.

Savoir si pour un domaine matériel donné, on a affaire à un milieu continu ou non dépend de l'échelle d'observation. Par exemple, l'air enfermé dans un bocal est un milieu continu pour un observateur *macroscopique* (5). Le champ de vitesse observée par exemple avec un vélocimètre laser est nul partout et la pression, uniforme. En revanche, un observateur *microscopique* voit des molécules se déplaçant dans le vide de manière erratique et à grande vitesse (6) et est incapable d'y voir un milieu continu. La différence entre les deux observations provient de l'échelle d'observation. Un point pour l'observateur macroscopique est en fait un petit volume qui contient un grand nombre de molécules. Par exemple un petit volume de $0{,}1\ \mathrm{mm}^3$ — soit un cube de l'ordre d'un demi-millimètre de côté — contient de l'ordre de trois millions de milliards de molécules (7). La vitesse moyenne observée est une moyenne statistique du mouvement brownien.

De même, la notion de pression constante dans le bocal perd son sens à l'échelle microscopique : la pression macroscopique est le résultat statistique moyen de l'impact du mouvement brownien sur la surface sensible du manomètre. Si on disposait d'un micro-manomètre à l'échelle moléculaire, on mesurerait de temps en temps un impact, ce qui est fort loin de la notion de pression constante.

La mécanique des milieux continus est un modèle mathématique qui permet de *moyenner* une réalité complexe et obtenir ainsi un modèle qui peut être traité analytiquement ou informatiquement. À l'opposé, le calcul explicite du mouvement des molécules dans un bocal ne peut absolument pas être traité à l'aide de l'informatique actuelle.

Considérons l'étude d'un barrage construit en béton. Le béton est un matériau composé de sable et de graviers de différentes tailles. Le barrage est un milieu continu dans lequel un point est un volume d'une dizaine à une centaine de centimètres cubes selon la taille des éléments entrant dans la composition du béton. À l'image des molécules dans le bocal, il est exclu de traiter un modèle décrivant le mouvement de chaque petit caillou ou grain de sable constituant le barrage !

Comme dernier exemple, signalons qu'en astronomie, certains modèles considèrent les galaxies comme des fluides. Le point du milieu continu a, dans ce cas, une dimension de l'ordre de mille années-lumière au cube.

Le modélisateur doit donc toujours avoir à l'esprit l'échelle caractéristique du problème traité, particulièrement dans l'interprétation des résultats de simulation obtenus avec le modèle « milieu de continu ». Par exemple, la pression prédite par une simulation numérique en un point du barrage doit être interprétée comme la pression moyenne s'exerçant en réalité sur une surface de quelques centimètres à quelques décimètres carrés. Si l'on souhaite comparer les résultats du modèle avec la réalité faite de mesures *in situ*, il faut que ces mesures utilisent la même échelle que celle du calcul.

(5) Exemple extrait de [3].
(6) Ce qui est communément appelé *mouvement brownien*.
(7) Une môle d'air à 25 °C (22,4 l) contient $6{,}02 \cdot 10^{23}$ molécules.

1.4 Principales hypothèses

Dans les milieux continus de ce cours, on considère que la déformation du milieu est caractérisée par un vecteur déplacement en chaque point. On dit que le milieu est *non polarisé*. L'orientation propre de chaque point est indifférente. Ce n'est pas toujours le cas comme en magnéto-hydrodynamique qui étudie des fluides mécaniquement sensibles aux champs magnétiques car ils transportent des charges électriques et où cette hypothèse est inacceptable.

La mécanique des milieux continus est une théorie qui perd son sens si les vitesses mises en jeux se rapprochent de la vitesse de la lumière ou bien si la taille du système devient très petite (taille atomique). Dans ces cas extrêmes, les mécaniques relativiste et quantique, respectivement, sont plus appropriées.

1.5 Système d'unités

Le système d'unité adopté pour ce cours est le système international. Il comporte sept unités fondamentales que sont :

— l'unité de masse : le kilogramme [kg] ;
— l'unité de mesure : le mètre [m] ;
— l'unité de temps : la seconde [s] ;
— l'unité de température : le kelvin [K] ;
— l'unité de courant électrique : l'ampère [A] ;
— l'unité d'intensité de lumineuse : la candela [cd] ;
— l'unité de quantité de matière : la môle [mol].

Toutes les autres unités peuvent se déduire de ces unités fondamentales et sont introduites par commodité. Par exemple :

— le newton [N] est en fait $[\mathrm{m\,kg^{-1}\,s^{-2}}]$;
— le pascal [Pa] est $[\mathrm{N\,m^{-2}}]$ donc $[\mathrm{m^{-1}\,kg^{-1}\,s^{-2}}]$;
— le joule [J] (unité de travail) est en $[\mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}}]$;
— le watt [W] (unité de puissance) en $[\mathrm{m^2\,kg\,s^{-3}}]$.

2

Éléments de calcul tensoriel

La mécanique des milieux continus fait un usage intensif des champs scalaires, vectoriels et tensoriels. Ces outils mathématiques indispensables permettent non seulement d'établir des résultats fondamentaux indépendamment du référentiel choisi, mais en outre, confèrent aux formules qui les expriment une concision remarquable. Grâce à cela, on peut porter son attention sur les phénomènes physiques qu'elles représentent plutôt que sur les équations elles-mêmes.

Les scalaires, vecteurs et tenseurs ont en effet la propriété d'être invariants lors d'un changement de base. C'est ainsi que grâce à ces quantités, on peut écrire les équations de la mécanique de manière intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment de la base choisie.

Dans ce cours, nous n'aurons pas recours à la forme la plus complète du calcul tensoriel ; nous n'utiliserons que des systèmes de coordonnées orthogonales, éventuellement curvilignes — par exemple, le système de coordonnées cylindriques ou sphériques —, ce qui permet des simplifications considérables sans introduire de restrictions trop gênantes [(1)]. En outre, tout les vecteurs et tenseurs considérés seront toujours à composantes réelles. Cette introduction au calcul tensoriel s'inspire de [2].

2.1 Convention de sommation d'Einstein

Chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans le même monôme, ce monôme représente la somme des trois termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1, 2 et 3. Par exemple, $a_i b_i$ est la notation compacte pour $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. L'indice répété sur lequel on effectue la sommation est appelé *indice muet*. On peut luisubstituer n'importe quel indice pourvu qu'il diffère des autres indices présents dans le monôme. Un indice non muet est dit *franc*. Ainsi, dans $a_{ij} b_j$, l'indice i est franc et l'indice j est muet ; on peut le remplacer par n'importe quel autre indice excepté i. Cette convention de sommation est dite *convention d'Einstein*.

2.2 Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker (on dit aussi le delta de Kronecker) est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{2.1}$$

(1) Lorsque le système de coordonnées n'est pas orthogonal, il faut distinguer les composantes covariantes et contravariantes des vecteurs et des tenseurs. Un présentation plus générale du calcul tensoriel est disponible dans [6].

2.3 Symbole de permutation de Lévi-Civita

Soient i, j et k trois indices ayant des valeurs différentes. On dit qu'ils forment une permutation paire de $1, 2, 3$ si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre pair de permutations. On dit qu'ils forment une permutation impaire de $1, 2, 3$ si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre impair de permutations. Les permutations paires de $1, 2, 3$ sont donc $(1, 2, 3)$, $(3, 1, 2)$ et $(2, 3, 1)$ et les permutations impaires, $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$ et $(3, 2, 1)$. Cela étant, le symbole de permutation est défini par :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux quelconques des indices sont égaux} \\ +1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation paire de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation impaire de } 1, 2, 3 \end{cases} \tag{2.2}$$

2.4 Changement de base

Considérons deux bases orthonormées composées de vecteurs de bases unitaires et orthogonaux entre eux, dont les bases respectives sont notées $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$. Soient P_{ij}, les coefficients caractérisant ce changement de repère :

$$\mathrm{P}_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^* \tag{2.3}$$

Ils peuvent s'interpréter comme composantes de $\vec{e}_i$ dans le repère $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$:

$$\vec{e}_i = \mathrm{P}_{ij}\vec{e}_j^* \tag{2.4}$$

et réciproquement, les coefficients P_{ij} peuvent s'interpréter comme composantes de $\vec{e}_j^*$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{e}_j^* = \mathrm{P}_{ij}\vec{e}_i \tag{2.5}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\vec{e}_j^* = \mathrm{P}_{ji}^\top \vec{e}_i \tag{2.6}$$

car $\mathrm{P}_{ji}^\top = \mathrm{P}_{ij}$. En injectant (2.4) dans (2.6), on a :

$$\vec{e}_j^* = \mathrm{P}_{ji}^\top \mathrm{P}_{ik}\vec{e}_k^* \tag{2.7}$$

donc :

$$\mathrm{P}_{ji}^\top \mathrm{P}_{ik} = \delta_{jk} \tag{2.8}$$

De même, en injectant (2.6) dans (2.4), on a :

$$\vec{e}_i = \mathrm{P}_{ij}\mathrm{P}_{jk}^\top \vec{e}_k \tag{2.9}$$

d'où :

$$\mathrm{P}_{ij}\mathrm{P}_{jk}^\top = \delta_{ik} \tag{2.10}$$

En notant P la matrice contenant les coefficients P_{ij}, les relations (2.9) et (2.10) se réécrivent :

$$\mathrm{P}\mathrm{P}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^\top\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

ce qui indique que la matrice de passage P est une matrice orthogonale : son inverse et sa transposée coïncident.

2.5 Scalaire

Certaines grandeurs, comme la masse volumique ou la température, s'expriment par un seul nombre qui ne dépend pas de la base choisie. Ce sont des *scalaires*. De manière plus mathématique, nous définirons un scalaire comme suit :

Définition 2.1 — Scalaire. Un scalaire s est un être mathématique à une seule composante et invariant lors d'un changement de base.

2.6 Vecteur

Des grandeurs telles que la vitesse ou l'accélération d'un point matériel, un flux de chaleur ou une force sont caractérisées par leur direction, leur sens et leur intensité. Ce sont des *vecteurs*. On les représente par un segment orienté. Un vecteur possède trois composantes qui dépendent du repère choisi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \tag{2.12}$$

En notation indicielle, on écrira plutôt :

$$\vec{a} = a_i\vec{e}_i \tag{2.13}$$

en utilisant la convention de sommation. Si l'on se réfère à la base $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$, on écrira :

$$\vec{a} = a_i^*\vec{e}_i^* \tag{2.14}$$

Il s'agit toujours du même vecteur mais exprimé dans une autre base.

Il est capital de comprendre que lors d'un changement de base, les composantes du vecteur changent alors que le vecteur lui-même ne change pas. En clair, bien que les a_i sont différents des a_i^*, on a :

$$\vec{a} = a_i\vec{e}_i = a_i^*\vec{e}_i^* \tag{2.15}$$

Pour que cela soit possible, il faut que les composantes du vecteur se transforment comme :

$$a_i = \mathrm{P}_{ij}a_j^* \quad ; \quad a_j^* = \mathrm{P}_{ij}a_i \tag{2.16}$$

Cette propriété suggère la définition mathématique suivante :

Définition 2.2 — Vecteur. Un vecteur $\vec{a}$ est un être mathématique qui, lors d'un changement de repère $\vec{e}_i = \mathrm{P}_{ij}\vec{e}_j^*$, se transforme selon la formule $a_i = \mathrm{P}_{ij}a_j^*$.

En utilisant la notation matricielle, on peut réécrire (2.16) comme :

$$[\vec{a}] = \mathrm{P}[\vec{a}]_* \quad ; \quad [\vec{a}]_* = \mathrm{P}^\top[\vec{a}] \tag{2.17}$$

Faisons le point sur ces notations :
— $\vec{a}$ est un vecteur ;
— a_i est la i^{e} composante de cevecteur dans une base donnée ;
— a_i^* est la i^{e} composante de ce même vecteur mais dans une autre base ;

— $[\vec{a}]$ est la matrice colonne regroupant les trois composantes du vecteur $\vec{a}$ dans une base donnée :

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

— $[\vec{a}]_*$ est la matrice colonne regroupant les trois composantes du même vecteur $\vec{a}$ mais dans une autre base :

$$[\vec{a}]_* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Finalement, il faut noter que dans l'équation (2.17), P n'est pas mis entre crochets car c'est déjà une matrice. La matrice de passage comme son nom l'indique est un tableau de nombres. Il ne s'agit pas d'une quantité tensorielle.

2.7 Tenseur d'ordre deux

Un tenseur d'ordre deux s'exprime par $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.

Définition 2.3 — Tenseur. Un tenseur d'ordre deux est un être mathématique à neuf composantes qui, lors d'un changement de base $\vec{e}_i = \mathrm{P}_{ij}\vec{e}_j^*$, se transforme selon les formules :

$$\mathrm{A}_{ij} = \mathrm{P}_{ik}\mathrm{A}_{kl}^*\mathrm{P}_{lj}^\top \quad ; \quad \mathrm{A}_{kl}^* = \mathrm{P}_{ki}^\top \mathrm{A}_{ij}\mathrm{P}_{jl} \tag{2.20}$$

ou sous forme matricielle :

$$[\overline{\overline{\mathrm{A}}}] = \mathrm{P}[\overline{\overline{\mathrm{A}}}]_*\mathrm{P}^\top \quad ; \quad [\overline{\overline{\mathrm{A}}}]_* = \mathrm{P}^\top[\overline{\overline{\mathrm{A}}}]\mathrm{P} \tag{2.21}$$

Nous insistons une nouvelle fois sur le fait que P est une matrice et n'a rien à voir avec un tenseur d'ordre deux. Un tenseur d'ordre est une quantité intrinsèque indépendante de la base choisie alors que P est un tableau de nombres donnant les produits scalaires entre les vecteurs de la première et de la seconde base : $\mathrm{P}_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^*$.

Nous étudions ici en détail les tenseurs d'ordre deux compte tenu de leur importance en mécanique des milieux continus.

2.7.1 Tenseur identité

Le tenseur identité noté $\overline{\overline{\mathrm{I}}}$ est un tenseur particulier car ses composantes sont les mêmes dans toute base orthonormée et donnent la matrice :

$$[\overline{\overline{\mathrm{I}}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

autrement dit $\mathrm{I}_{ij} = \delta_{ij}$.

2.7.2 Tenseurs symétrique et antisymétrique

Un tenseur est symétrique s'il est égal à sa transposée :

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} \text{ symétrique } \Leftrightarrow \overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}}^{\top} \Leftrightarrow \mathrm{A}_{ij} = \mathrm{A}_{ji} \tag{2.23}$$

Un tenseur est antisymétrique s'il est égal à l'opposé de sa transposée :

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} \text{ antisymétrique } \Leftrightarrow \overline{\overline{\mathrm{A}}} = -\overline{\overline{\mathrm{A}}}^{\top} \Leftrightarrow \mathrm{A}_{ij} = -\mathrm{A}_{ji} \tag{2.24}$$

Cela n'est possible que si les termes diagonaux de $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ sont nuls : $\mathrm{A}_{11} = \mathrm{A}_{22} = \mathrm{A}_{33} = 0$. La symétrie ou l'antisymétrie est une propriété intrinsèque d'un tenseur. Si la matrice représentant les composantes d'un tenseur dans une base est (anti)symétrique, elle le restera dans tout autre base.

Tout tenseur d'ordre deux $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ peut s'écrire comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}}^{\mathrm{sym}} + \overline{\overline{\mathrm{A}}}^{\mathrm{asym}} \quad ; \quad \overline{\overline{\mathrm{A}}}^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\mathrm{A}}} + \overline{\overline{\mathrm{A}}}^{\top}) \quad ; \quad \overline{\overline{\mathrm{A}}}^{\mathrm{asym}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\mathrm{A}}} - \overline{\overline{\mathrm{A}}}^{\top}) \tag{2.25}$$

2.7.3 Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur d'ordre deux est la somme de ses termes diagonaux :

$$\mathrm{tr}\,\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}_{ii} \tag{2.26}$$

2.7.4 Produit contracté

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre deux est un tenseur d'ordre deux défini par :

$$\overline{\overline{\mathrm{C}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{B}}} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{C}_{ij} = \mathrm{A}_{ik}\mathrm{B}_{kj} \tag{2.27}$$

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre deux est un scalaire :

$$s = \overline{\overline{\mathrm{A}}} : \overline{\overline{\mathrm{B}}} = \mathrm{A}_{ij}\mathrm{B}_{ij} = \mathrm{A}_{ij}\mathrm{B}^{\top}_{ji} = \mathrm{tr}(\overline{\overline{\mathrm{A}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{B}}}^{\top}) \tag{2.28}$$

Le produit contracté d'un tenseur d'ordre deux et d'un vecteur $\vec{b}$ est un vecteur, on peut post- ou pré-multiplié par un vecteur. Le résultat n'est pas le même à moins que $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ ne soit symétrique :

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} \cdot \vec{b} = \vec{c} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{A}_{ij} b_j = c_i \tag{2.29}$$

$$\vec{b} \cdot \overline{\overline{\mathrm{A}}} = \vec{d} \quad \leftrightarrow \quad b_i \mathrm{A}_{ij} = d_j \tag{2.30}$$

Le produit contracté (appelé plus couramment produit scalaire) de deux vecteurs est un scalaire :

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \leftrightarrow \quad s = a_i b_i \tag{2.31}$$

Le résultat d'un produit contracté est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m, l'ordre du second ($m = 1$ pour un vecteur, $m = 2$ pour un tenseur d'ordre deux...) : le résultat d'un produit simplement contracté est un tenseur d'ordre $n + m - 2$ et le résultat d'un produit doublement contracté est un tenseur d'ordre $n + m - 4$. Par exemple, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre quatre et d'un tenseur d'ordre deux est un tenseur d'ordre deux :

$$\overline{\overline{\mathrm{C}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{\mathrm{A}}}}} : \overline{\overline{\mathrm{B}}} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{C}_{ij} = \mathrm{A}_{ijkl}\mathrm{B}_{kl} \tag{2.32}$$

Le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre deux antisymétrique et un tenseur d'ordre deux symétrique donne toujours le tenseur nul.

2.7.5 Produit tensoriel

Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur d'ordre deux :

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \vec{b} \otimes \vec{c} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{A}_{ij} = b_i c_j \tag{2.33}$$

Le résultat d'un produit tensoriel est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m, l'ordre du second. Le résultat du produit tensoriel est un tenseur d'ordre $n + m$. Par exemple, le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre deux est un tenseur d'ordre quatre :

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\mathrm{A}}}}} = \overline{\overline{\mathrm{B}}} \otimes \overline{\overline{\mathrm{C}}} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{A}_{ijkl} = \mathrm{B}_{ij}\mathrm{C}_{kl} \tag{2.34}$$

2.7.6 Représentation spectrale d'un tenseur

On dit que $\vec{v}$ est une *direction principale*, ou un vecteur propre, du tenseur $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ d'ordre deux si :

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{A}_{ij} v_j = \lambda v_i \tag{2.35}$$

La valeur λ est appelée *valeur principale*, ou valeur propre, de $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ associée à la direction principale $\vec{v}$. Pour trouver $\vec{v}$, on écrit (2.35) sous la forme :

$$(\overline{\overline{\mathrm{A}}} - \lambda \overline{\overline{\mathrm{I}}}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \leftrightarrow \quad (\mathrm{A}_{ij} - \lambda \delta_{ij}) v_j = 0 \tag{2.36}$$

Ces équations constituent un système homogène de trois équations à trois inconnues v_1, v_2 et v_3 qui n'admet de solution non triviale que si le déterminant de la matrice des coefficients s'annule :

$$\det(\overline{\overline{\mathrm{A}}} - \lambda \overline{\overline{\mathrm{I}}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} - \lambda & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} - \lambda & \mathrm{A}_{23} \\ \mathrm{A}_{31} & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.37}$$

L'équation (2.37) donne trois racines λ_{I}, λ_{II} et λ_{III}. On calcule les vecteurs propres correspondants en résolvant (2.36). Par exemple, pour λ_{I}, on aura :

$$(\overline{\overline{\mathrm{A}}} - \lambda_{\mathrm{I}} \overline{\overline{\mathrm{I}}}) \cdot \vec{v}_{\mathrm{I}} = 0 \tag{2.38}$$

ce qui ne détermine les composantes de $\vec{v}_{\mathrm{I}}$ qu'à un coefficient près. On peut choisir ce coefficient de manière à avoir un vecteur $\vec{v}_{\mathrm{I}}$ de norme unitaire.

Si le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ est réel et symétrique, l'algèbre matricielle nous apprend que les valeurs propres et vecteurs propres sont réels. Si les trois valeurs propres de $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ sont de plus distinctes, les trois vecteurs propres $\vec{v}_{\mathrm{I}}$, $\vec{v}_{\mathrm{II}}$, $\vec{v}_{\mathrm{III}}$, sont mutuellement orthogonaux. Dans le cas où deux valeurs propres sont confondues ($\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda_{\mathrm{II}} \neq \lambda_{\mathrm{III}}$ par exemple), la résolution de (2.38) laisse une indétermination sur les directions de $\vec{v}_{\mathrm{I}}$ et $\vec{v}_{\mathrm{II}}$: ils peuvent prendre une direction quelconque dans le plan de l'espace perpendiculaire à $\vec{v}_{\mathrm{III}}$. Il est alors indiqué de choisir $\vec{v}_{\mathrm{I}}$ et $\vec{v}_{\mathrm{II}}$ orthogonaux entre eux dans ce plan. Enfin, dans le cas où $\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda_{\mathrm{II}} = \lambda_{\mathrm{III}}$, $\vec{v}_{\mathrm{I}}$, $\vec{v}_{\mathrm{II}}$ et $\vec{v}_{\mathrm{III}}$ sont absolument indéterminés ; ils peuvent prendre des directions quelconques de l'espace, mais on peut toujours s'arranger pour les choisir mutuellement orthogonaux. Cette situation particulière n'arrive que si le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ est de la forme $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = s\overline{\overline{\mathrm{I}}}$ où s est un scalaire. On a alors $\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda_{\mathrm{II}} = \lambda_{\mathrm{III}} = s$. Un tel tenseur est appelé un tenseur isotrope. Ses composantes ne sont pas affectées par un changement de base.

En conclusion, nous venons de voir que l'on peut toujours trouver trois vecteurs propres orthogonaux pour un tenseur réel symétrique d'ordre deux. La base formée par ces trois vecteurs est appelée base principale. Dans cette base, les coefficients du tenseur $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ forment une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres :

$$[\overline{\overline{\mathrm{A}}}]_{\mathrm{I,II,III}} = \mathrm{P}^{\top}[\overline{\overline{\mathrm{A}}}]_{1,2,3}\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

La matrice de passage est donnée par :

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \vec{v}_{\mathrm{I}} \cdot \vec{e}_1 & \vec{v}_{\mathrm{II}} \cdot \vec{e}_1 & \vec{v}_{\mathrm{III}} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{v}_{\mathrm{I}} \cdot \vec{e}_2 & \vec{v}_{\mathrm{II}} \cdot \vec{e}_2 & \vec{v}_{\mathrm{III}} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{v}_{\mathrm{I}} \cdot \vec{e}_3 & \vec{v}_{\mathrm{II}} \cdot \vec{e}_3 & \vec{v}_{\mathrm{III}} \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Enfin, on vérifie facilement que le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ peut s'écrire :

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \lambda_{\mathrm{I}}\vec{v}_{\mathrm{I}} \otimes \vec{v}_{\mathrm{I}} + \lambda_{\mathrm{II}}\vec{v}_{\mathrm{II}} \otimes \vec{v}_{\mathrm{II}} + \lambda_{\mathrm{III}}\vec{v}_{\mathrm{III}} \otimes \vec{v}_{\mathrm{III}} \tag{2.41}$$

C'est ce qu'on appelle la décomposition spectrale du tenseur.

2.8 Intégration par partie

On établit en analyse une formule générale d'intégration par parties. On la rappelle ici sans démonstration. Soit dans un repère cartésien un domaine ω délimité par une frontière $\partial\omega$: cela peut être, en trois dimensions, un volume délimité par une ou plusieurs surfaces, ou en deux dimensions, une surface délimitée par une ou plusieurs courbes ou, enfin, en une dimension, un segment délimité par deux points. Soient F et G deux tenseurs définis sur ω et suffisamment continus. Soit, $\vec{n}$, la normale extérieure à $\partial\omega$. On a :

$$\int_{\omega} \mathrm{F}_{ijk\ldots}\partial_q \mathrm{G}_{lmn\ldots} = -\int_{\omega} \partial_q \mathrm{F}_{ijk\ldots}\mathrm{G}_{lmn\ldots} - \int_{\partial\omega} n_q \mathrm{F}_{ijk\ldots}\mathrm{G}_{lmn\ldots} \tag{2.42}$$

La relation (2.42) est valable quel que soit l'ordre des tenseurs F et G. L'indice q peut même également coïncider avec l'un des indices $ijk\ldots$ ou $lmn\ldots$ En particularisant le choix du tenseur F, on obtient les formules importantes en pratique de Green-Ostrogradski et de Stokes.

2.8.1 Formule de Green-Ostrogradski

Soit un volume V de frontière S sur laquelle est définie en tout point régulier la normale unitaire extérieure $\vec{n}$. Soient $\mathcal{A}$, $\vec{\mathcal{A}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{A}}}$ des champs scalaires, vectoriels et tensoriels d'ordre deux, respectivement, continus et dérivables sur V. On a :

$$\int_{\mathrm{S}} \mathcal{A}\,\vec{n}\,\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{V}} \vec{\mathrm{grad}}\,\mathcal{A}\,\mathrm{dV} \quad \leftrightarrow \quad \int_{\mathrm{S}} \mathcal{A}n_i\,\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{V}} \mathcal{A}_{,i}\,\mathrm{dV} \tag{2.43}$$

$$\int_{\mathrm{S}} \vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{A}}\,\mathrm{dV} \quad \leftrightarrow \quad \int_{\mathrm{S}} \mathcal{A}_i n_i\,\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{V}} \mathcal{A}_{i,i}\,\mathrm{dV} \tag{2.44}$$

$$\int_{\mathrm{S}} \overline{\overline{\mathcal{A}}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{V}} \vec{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\mathcal{A}}}\,\mathrm{dV} \quad \leftrightarrow \quad \int_{\mathrm{S}} \mathcal{A}_{ij} n_j\,\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{V}} \mathcal{A}_{ij,j}\,\mathrm{dV} \tag{2.45}$$

La notation $\mathcal{A}_{,i}$ indique la dérivée partielle de $\mathcal{A}$ par rapport à la i^{e} coordonnée.

La formule de Green-Ostrogradski porte aussi le nom de théorème de la divergence dans certains ouvrages. Ces formules sont obtenues à partir de la relation générale (2.42) en prenant F unitaire, si bien que sa dérivée s'annule dans le second membre de (2.42).

2.8.2 Formule de Stokes

Soit une surface plane S de normale $\vec{\mathrm{N}}$ et de contour C. Soit $\vec{t}$, le vecteur tangent sur ce contour. On a la relation :

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{a} \cdot \vec{t}\, \mathrm{d}c = \int_{\mathrm{S}} (\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{a}) \cdot \vec{\mathrm{N}}\, \mathrm{d}s \quad \leftrightarrow \quad \oint_{\mathrm{C}} a_i t_i\, \mathrm{d}c = \int_{\mathrm{S}} \varepsilon_{ijk} a_{k,j} \mathrm{N}_i\, \mathrm{d}s \tag{2.46}$$

2.9 Systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales

Pour établir et discuter les équations et principes généraux de la mécanique des milieux continus, les coordonnées cartésiennes sont adéquates. Toutefois, pour la résolution de certains problèmes particuliers, il est préférable d'utiliser des coordonnées curvilignes (on dit qu'un système de coordonnées est curviligne si la base locale évolue d'un point à l'autre). C'est particulièrement évident dans les problèmes axisymétriques où les coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'imposent (figure 2.1(a)) et les problèmes à symétrie sphérique où les coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) sont indiquées (figure 2.1(b)).

2.9.1 Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes les composantes d'un vecteur sont notées :

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

et celles d'un tenseur d'ordre deux :

$$[\overline{\overline{\mathrm{A}}}] = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \\ \mathrm{A}_{31} & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Les opérateurs différentiels scalaires sont :

$$\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} = a_{,ii} \tag{2.49}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = a_{i,i} \tag{2.50}$$

Les opérateurs différentiels vectoriels sont :

$$\vec{\mathrm{grad}}\, a = \frac{\partial a}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3}\vec{e}_3 \tag{2.51}$$

$$= a_{,i}\vec{e}_i \tag{2.52}$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{a} = \Big(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\Big)\vec{e}_1 + \Big(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\Big)\vec{e}_2 + \Big(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\Big)\vec{e}_3 \tag{2.53}$$

$$= \varepsilon_{ijk} a_{k,j} \vec{e}_i \tag{2.54}$$

$$\vec{\text{div}}\,\overline{\overline{\text{A}}} = \Big(\frac{\partial \text{A}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \text{A}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \text{A}_{13}}{\partial x_3}\Big)\vec{e}_1 + \Big(\frac{\partial \text{A}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \text{A}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \text{A}_{23}}{\partial x_3}\Big)\vec{e}_2 + \Big(\frac{\partial \text{A}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \text{A}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \text{A}_{33}}{\partial x_3}\Big)\vec{e}_3 \tag{2.55}$$

$$= \text{A}_{ij,j} \vec{e}_i \tag{2.56}$$

$$\vec{\Delta}\vec{a} = \Big(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2}\Big)\vec{e}_1 + \Big(\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_3^2}\Big)\vec{e}_2 + \Big(\frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_3^2}\Big)\vec{e}_3 \tag{2.57}$$

$$= a_{i,jj} \vec{e}_i \tag{2.58}$$

et de type tensoriel :

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{a} = {} & \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 \\ & + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 \\ & + \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\ = {} & a_{i,j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\end{aligned} \tag{2.59}$$

2.9.2 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\sin\theta \\ x_3 &= z \end{aligned} \tag{2.60}$$

La base locale en chaque point est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta &= -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2 \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{2.61}$$

La matrice de passage de la base cartésienne à la base cylindrique (base $*$ pour reprendre les notations (2.3)) est donc :

$$\text{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

En coordonnées cylindriques, les composantes d'un vecteur sont notées :

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

et celles d'un tenseur d'ordre deux :

$$[\overline{\overline{\mathrm{A}}}] = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{rr} & \mathrm{A}_{r\theta} & \mathrm{A}_{rz} \\ \mathrm{A}_{\theta r} & \mathrm{A}_{\theta\theta} & \mathrm{A}_{\theta z} \\ \mathrm{A}_{zr} & \mathrm{A}_{z\theta} & \mathrm{A}_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Les opérateurs différentiels scalaires sont alors :

$$\Delta a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial a}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \tag{2.65}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{2.66}$$

Les opérateurs différentiels vectoriels s'écrivent :

$$\vec{\mathrm{grad}}\, a = \frac{\partial a}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{e}_z \tag{2.67}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\Big)\vec{e}_r + \Big(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\Big)\vec{e}_\theta + \Big(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r}\Big)\vec{e}_z \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\mathrm{A}}} = &\Big(\frac{\partial \mathrm{A}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\Big(\mathrm{A}_{rr} - \mathrm{A}_{\theta\theta}\Big) + \frac{\partial \mathrm{A}_{rz}}{\partial z}\Big)\vec{e}_r \\ &+ \Big(\frac{\partial \mathrm{A}_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\mathrm{A}_{\theta r} + \frac{\partial \mathrm{A}_{\theta z}}{\partial z}\Big)\vec{e}_\theta \\ &+ \Big(\frac{\partial \mathrm{A}_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\mathrm{A}_{zr} + \frac{\partial \mathrm{A}_{zz}}{\partial z}\Big)\vec{e}_z \end{aligned} \tag{2.69}$$

et tensoriels :

$$[\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec{a}]_{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} - \dfrac{a_\theta}{r} & \dfrac{\partial a_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{a_r}{r} & \dfrac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial a_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

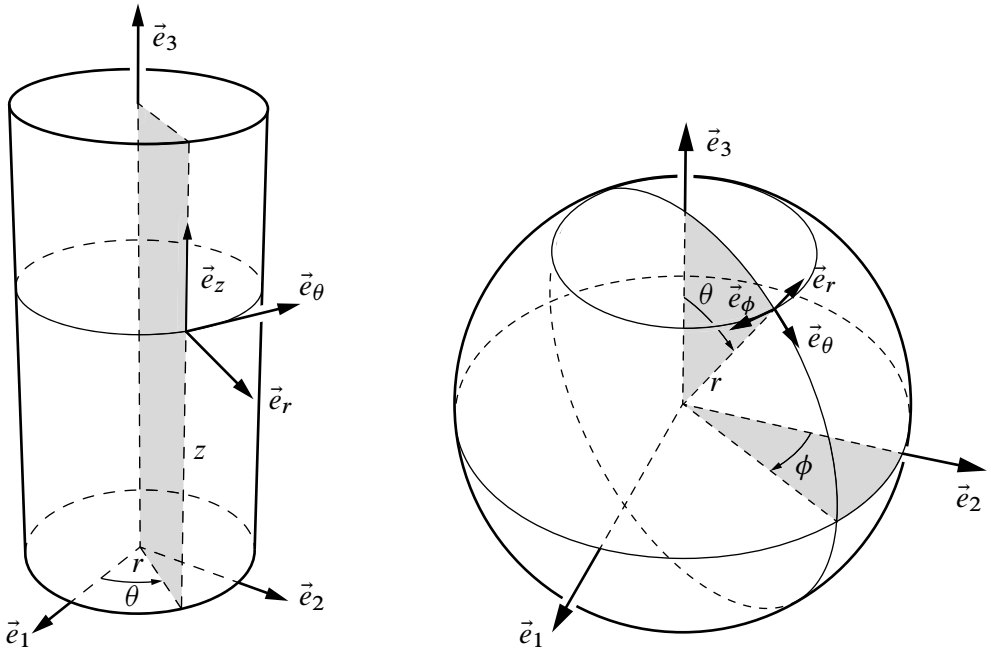
2.9.3 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, les coordonnées deviennent :

$$\begin{aligned} x_1 &= r\sin\theta\sin\phi \\ x_2 &= r\sin\theta\cos\phi \\ x_3 &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{2.71}$$

La base locale en chaque point est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta\sin\phi\vec{e}_1 + \sin\theta\cos\phi\vec{e}_2 + \cos\theta\vec{e}_3 \\ \vec{e}_\phi &= \cos\phi\vec{e}_1 - \sin\phi\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\sin\phi\vec{e}_1 + \cos\theta\cos\phi\vec{e}_2 - \sin\theta\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{2.72}$$



(a) cylindriques (b) sphériques

Figure 2.1 – Systèmes de coordonnées

La matrice de passage de la base cartésienne à la base sphérique est donc :

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\phi & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

En coordonnées sphériques, les composantes d'un vecteur sont notées :

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\phi \\ a_\theta \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

et d'un tenseur d'ordre deux :

$$[\overline{\overline{\mathrm{A}}}] = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{rr} & \mathrm{A}_{r\phi} & \mathrm{A}_{r\theta} \\ \mathrm{A}_{\phi r} & \mathrm{A}_{\phi\phi} & \mathrm{A}_{\phi\theta} \\ \mathrm{A}_{\theta r} & \mathrm{A}_{\theta\phi} & \mathrm{A}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

Les opérateurs différentiels de type scalaire sont :

$$\Delta a = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 a}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial a}{\partial\theta}\right) \tag{2.76}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta a_r) + \frac{\partial}{\partial\phi}(r a_\phi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta a_\theta)\right) \tag{2.77}$$

Les opérateurs différentiels de type vecteur sont :

$$\vec{\operatorname{grad}}\, a = \frac{\partial a}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{a} = {} & \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial \phi}(r a_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta a_\phi)\Big)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta)\Big)\vec{e}_\phi \\ & + \frac{1}{r\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta a_\phi) - \frac{\partial a_r}{\partial \phi}\Big)\vec{e}_\theta\end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}\vec{\operatorname{div}}\,\overline{\overline{\mathrm{A}}} = {} & \Big(\frac{\partial \mathrm{A}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{A}_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(2\mathrm{A}_{rr} - \mathrm{A}_{\phi\phi} - \mathrm{A}_{\theta\theta} + \mathrm{A}_{\theta r}\tan^{-1}\theta)\Big)\vec{e}_r \\ & + \Big(\frac{\partial \mathrm{A}_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{A}_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(3\mathrm{A}_{\phi r} + 2\mathrm{A}_{\phi\theta}\tan^{-1}\theta)\Big)\vec{e}_\phi \\ & + \Big(\frac{\partial \mathrm{A}_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{A}_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\mathrm{A}_{\theta\theta}\tan^{-1}\theta - \mathrm{A}_{\phi\phi}\tan^{-1}\theta + 3\mathrm{A}_{\theta r})\Big)\vec{e}_\theta\end{aligned} \tag{2.80}$$

et de type tensoriel :

$$[\overline{\overline{\operatorname{grad}}}\,\vec{a}]_{(\vec{e}_r,\vec{e}_\phi,\vec{e}_\theta)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial a_r}{\partial \phi} - \dfrac{a_\phi}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} - \dfrac{a_\theta}{r} \\ \dfrac{\partial a_\phi}{\partial r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{a_r}{r} + \dfrac{a_\theta}{r}\tan^{-1}\theta & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_\phi}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial a_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - \dfrac{a_\phi}{r}\tan^{-1}\theta & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{a_r}{r} \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

2.9.4 Autres formules

$$\vec{\operatorname{grad}}(ab) = a\,\vec{\operatorname{grad}}\, b + b\,\vec{\operatorname{grad}}\, a \tag{2.82}$$

$$\operatorname{div}(a\vec{b}) = a\operatorname{div}\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{\operatorname{grad}}\, a \tag{2.83}$$

$$\operatorname{div}(\vec{a}\otimes\vec{b}) = \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} + (\overline{\overline{\operatorname{grad}}}\,\vec{a})\cdot\vec{b} \tag{2.84}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{\operatorname{grad}}\, a = 0, \quad \forall a \tag{2.85}$$

$$\operatorname{div}\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{a} = 0, \quad \forall \vec{a} \tag{2.86}$$

$$\Delta\vec{a} = \vec{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{a} - \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{a} \tag{2.87}$$

3

Cinématique d'un milieu continu

À la différence de la mécanique des solides indéformables, la mécanique des milieux continus permet de prendre en compte les déformations d'un corps et les variations de température qui accompagnent ces déformations. Dans un solide indéformable, la distance entre deux points quelconques ne peut varier avec le temps alors que dans un milieu déformable, cette distance peut évoluer. La cinématique du milieu continu a pour but d'introduire les outils mathématiques pour décrire une cinématique quelconque et ce indépendamment des forces qui l'engendrent.

3.1 Trajectoire et dérivées temporelles

Considérons un milieu continu occupant un volume V à l'instant initial $t = 0$ [(1)], par exemple, une balle en caoutchouc avant son écrasement dans la paume d'une main (figure 3.1). Cette balle peut être vue comme l'assemblage d'une infinité de petits éléments de

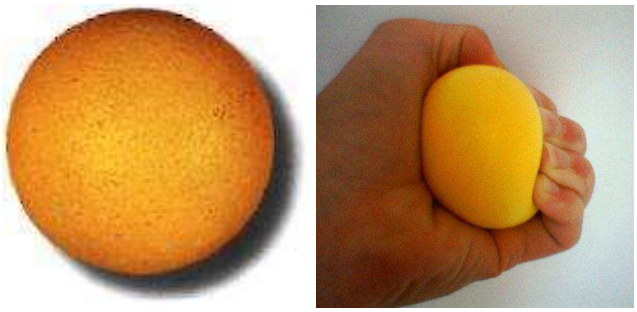


Figure 3.1 – Une balle avant et après déformation

matière appelés *points matériels*. Chaque point matériel va se déplacer et avoir sa propre trajectoire. Cette trajectoire est définie par l'évolution de la position $\vec{x}$ de ce point matériel en fonction du temps :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\text{point matériel}, t) \tag{3.1}$$

L'équation (3.1) donne formellement l'ensemble des trajectoires de tous les points matériels.

Afin de distinguer deux points matériels, il faut donner un nom unique à chaque point. Généralement, on donne comme nom à chaque point matériel ses coordonnées initiales notées $\vec{\mathrm{X}}$. Ces coordonnées dites *matérielles* sont constantes dans le temps, c'est donc une information intrinsèque de la particule. Par contre, les coordonnées spatiales $\vec{x}$ de la particule évoluent dans le temps :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{\mathrm{X}}, t) \tag{3.2}$$

(1) Les notations utilisées dans ce chapitre s'inspirent des notations du livre de référence [1]. Nombre d'exemples de ce chapitre sont également empruntés à ce livre.

Sur le plan mathématique, la transformation $\vec{\phi}$ est une bijection : à chaque point matériel $\vec{\mathrm{X}}$ ne correspond qu'un et un seul point spatial image à tout instant t. De même, deux points matériels différents ne peuvent aboutir à la même position spatiale au même instant. Ainsi, on peut inverser la relation (3.2) et écrire formellement :

$$\vec{\mathrm{X}} = \vec{\phi}^{-1}(\vec{x}, t) \tag{3.3}$$

Étant donnée la bijection qui existe entre les coordonnées spatiales et matérielles, on peut choisir comme variables indépendantes pour décrire le mouvement soit le couple $(\vec{x}, t)$ dit *variables d'Euler*, soit le couple $(\vec{\mathrm{X}}, t)$ dit *variables de Lagrange*. La connaissance de la transformation $\vec{\phi}$ ou de son inverse définit alors complètement le mouvement. En général, la bijection $\vec{\phi}$ est dérivable plusieurs fois. Il y a cependant des exceptions intéressantes :

— la transformation $\vec{\phi}$ est discontinue à travers une fissure puisque celle-ci peut s'ouvrir ;
— lorsque qu'un fluide glisse sur un autre fluide, la transformation $\vec{\phi}$ est discontinue ;
— dans les matériaux composites, la transformation $\vec{\phi}$ est à dérivée discontinue à travers les interfaces entre les différentes phases.

Exemple 3.1 — Transformation uniforme. Considérons un domaine bidimensionnel qui se déforme selon un parallélogramme. Les configurations de référence et à l'instant $t = 1$ sont présentées sur la figure 3.2. La transformation $\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{\mathrm{X}}, t)$ s'écrit :

$$x_1 = (18t + 4\mathrm{X}_1 + 6t\mathrm{X}_2)/4 \tag{3.4}$$
$$x_2 = (14t + (4 + 2t)\mathrm{X}_2)/4 \tag{3.5}$$

On vérifie que pour $t = 0$, on a bien $x_1 = \mathrm{X}_1$ et $x_2 = \mathrm{X}_2$.

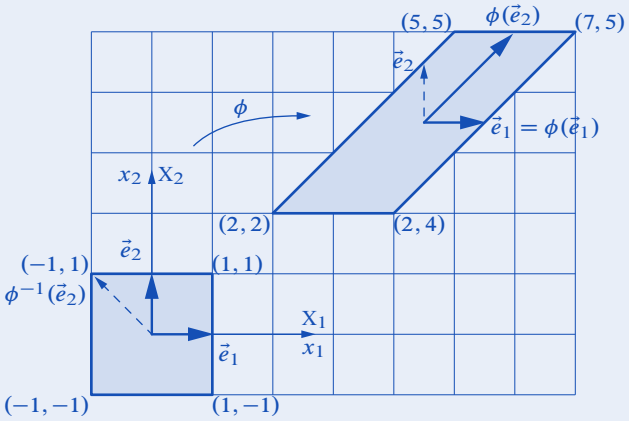


Figure 3.2 – Déformation d'un carré telle que $\phi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$

Une fois la transformation du milieu continu $\vec{\phi}$ définie, il est facile de définir les notions de déplacement, de vitesse et d'accélération :

$$\vec{u}(\vec{\mathrm{X}}, t) = \vec{x}(\vec{\mathrm{X}}, t) - \vec{\mathrm{X}} \tag{3.6}$$
$$\vec{v}(\vec{\mathrm{X}}, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}(\vec{\mathrm{X}}, t) \tag{3.7}$$
$$\vec{a}(\vec{\mathrm{X}}, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(\vec{\mathrm{X}}, t) \tag{3.8}$$

La dérivée temporelle intervenant dans les deux dernières équations s'effectue pour une particule $\vec{\mathrm{X}}$ donnée. C'est une dérivée en temps dite *matérielle*. On parle aussi de *dérivée*

particulaire ou *lagrangienne*. Si on assimile, un milieu continu à une portion d'autoroute et chaque point matériel de ce milieu à une voiture circulant sur l'autoroute, les vitesses et accélérations définies en (3.7) et (3.8) sont les vitesses et accélérations perçues par le conducteur de chaque voiture $\vec{\mathrm{X}}$. La dérivée particulaire est souvent également notée à l'aide d'un point au dessus de la quantité à dériver. Ainsi, on peut réécrire (3.7) et (3.8) avec cette notation compacte :

$$\vec{v} = \dot{\vec{u}} \tag{3.9}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{u}} \tag{3.10}$$

Il existe un autre type de dérivée temporelle dite *eulérienne* qui ne s'effectue non pas pour une particule donnée mais en un point de l'espace donné. En clair, c'est une dérivée temporelle en considérant $\vec{x}$ fixe et non plus $\vec{\mathrm{X}}$ fixe. Pour reprendre l'exemple de la portion d'autoroute, cette dérivée correspond à celle que perçoit le gendarme posté sur le bord de la route : si une voiture roulant lentement passe devant le radar et qu'elle est suivie par une voiture roulant à vive allure, pour le gendarme, le trafic accélère alors que pour les passagers des deux véhicules, l'accélération est nulle (en supposant qu'ils roulent tous les deux à vitesse constante). Si maintenant les automobilistes sont prudents et aperçoivent à temps le radar, celui-ci enregistrera une vitesse constante alors que chaque automobiliste sera en décélération devant le radar.

La dérivée eulérienne est notée $\frac{\partial \bullet}{\partial t}$ pour ne pas la confondre avec la dérivée matérielle $\frac{\mathrm{d}\bullet}{\mathrm{d}t}$. Les dérivées eulérienne et lagrangienne sont reliées. En effet, on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}g(\vec{x},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}g(\vec{x}(\vec{\mathrm{X}},t),t)}{\mathrm{d}t} \quad \leftarrow \text{ dérivée lagrangienne} \tag{3.11}$$

$$= \frac{\partial g(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial g(\vec{x},t)}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}(\vec{\mathrm{X}},t)}{\partial t} \tag{3.12}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial g(\vec{x},t)}{\partial t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{dérivée} \\ \text{eulérienne}}} + \underbrace{\vec{\operatorname{grad}}\, g \cdot \vec{v}}_{\substack{\uparrow \\ \text{terme} \\ \text{d'advection}}} \tag{3.13}$$

Le dernier terme est une dérivée dite *convective*. Afin d'illustrer le calcul des dérivées lagrangiennes et eulériennes, on peut considérer l'extension d'une barre unidimensionnelle dont la température évolue avec le temps.

Exemple 3.2 — Dérivées temporelles eulérienne et lagrangienne. Soit la transformation d'une barre de longueur initiale 2, donnée par $x = (1+t)\mathrm{X}$, figure 3.3. Cette barre est soumise à une élévation de température donnée par $\mathrm{T} = \mathrm{X}t^2$. La dérivée matérielle de la température est donnée par $\dot{\mathrm{T}} = 2\mathrm{X}t$. Pour calculer la dérivée temporelle eulérienne, on exprime la température en fonction des coordonnées spatiales : $\mathrm{T} = xt^2/(1+t)$ et ensuite on dérive par rapport au temps, ce qui donne :

$$\frac{\partial \mathrm{T}(x,t)}{\partial t} = \frac{(2t+t^2)x}{(1+t)^2} \tag{3.14}$$

Quant à la dérivée convective, on obtient :

$$(\vec{\text{grad}}\,\text{T}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial \text{T}(x,t)}{\partial x}\frac{\text{d}x}{\text{d}t} = \frac{t^2}{1+t}\text{X} \tag{3.15}$$

On vérifie que la somme des dérivées eulérienne et convective correspond bien à la dérivée lagrangienne.

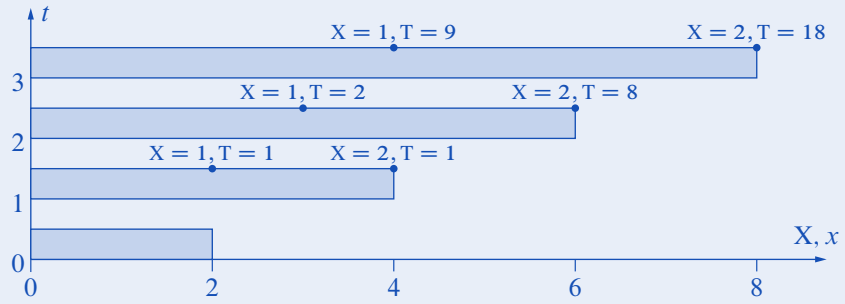


Figure 3.3 – Transformation d'une barre

En notation indicielle [2], on écrit :

$$\dot{g}_i = \frac{\partial g_i}{\partial t} + g_{i,j}\,v_j \tag{3.16}$$

À titre d'exemple, l'accélération d'une particule dans un champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\overline{\vec{\text{grad}}}\,\vec{v}) \cdot \vec{v} \quad \leftrightarrow \quad a_i = \frac{\text{d}v_i}{\text{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}\,v_j \tag{3.17}$$

On note qu'en utilisant la dérivée eulérienne, l'accélération devient une fonction non linéaire de la vitesse par la présence du terme d'advection [3].

3.2 Gradient de la transformation

Une quantité clef dans la description de la déformation d'un corps est le gradient de la transformation noté $\overline{\overline{\text{F}}}$. Ce tenseur d'ordre deux permet de relier la position relative de deux particules voisines avant et après déformation. C'est donc l'ingrédient de base pour définir la déformation d'un corps [4].

Considérons deux points matériels Q_1 et Q_2 situés dans le voisinage d'un point matériel P à l'image de la figure 3.4 [5]. Les positions relatives de Q_1 et Q_2 par rapport à P sont données par les vecteurs élémentaires $\text{d}\vec{\text{X}}_1$ et $\text{d}\vec{\text{X}}_2$:

$$\begin{aligned} \text{d}\vec{\text{X}}_1 &= \vec{\text{X}}_{\text{Q}_1} - \vec{\text{X}}_{\text{P}} \\ \text{d}\vec{\text{X}}_2 &= \vec{\text{X}}_{\text{Q}_2} - \vec{\text{X}}_{\text{P}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Après déformation, les positions des particules P, Q_1 et Q_2 sont données par la transforma-

(2) La notation indicielle est valable uniquement dans un système de coordonnées cartésiennes alors que la notation intrinsèque est indépendante de tout système de coordonnées.
(3) Cette non-linéarité est une des difficultés principales de la mécanique des fluides numérique.
(4) En anglais, déformation se dit *strain* et déplacement se dit *displacement* ou *deformation*. En anglais, le tenseur $\overline{\overline{\text{F}}}$ est donc appelé *deformation gradient*.
(5) À des fins de clarté, la transformation peut paraître trop homogène. Dans la réalité, les transformations sont plus générales et les mailles de la structure déformée sont plus resserrées à certains endroits qu'à d'autres.

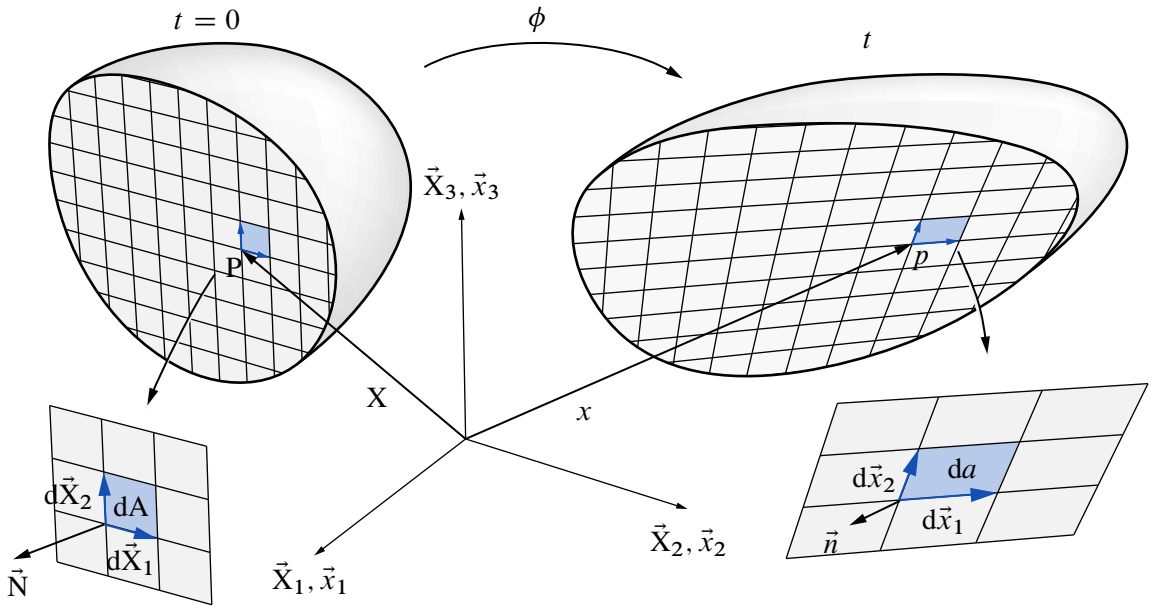


Figure 3.4 – Gradient de la transformation

tion $\vec{\phi}$:

$$\vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_P, t) \quad ; \quad \vec{x}_{q_1} = \vec{\phi}(\vec{X}_{Q_1}, t) \quad ; \quad \vec{x}_{q_2} = \vec{\phi}(\vec{X}_{Q_2}, t) \tag{3.19}$$

Les vecteurs élémentaires $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ sont deviennent donc :

$$d\vec{x}_1 = \vec{x}_{q_1} - \vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_P + d\vec{X}_1, t) - \vec{\phi}(\vec{X}_P, t) \tag{3.20}$$

$$d\vec{x}_2 = \vec{x}_{q_2} - \vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_P + d\vec{X}_2, t) - \vec{\phi}(\vec{X}_P, t) \tag{3.21}$$

Nous définissons le tenseur *gradient de la transformation* par :

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} = \overline{\overline{\text{grad}_0}}\, \vec{\phi} \tag{3.22}$$

Il est parfois également appelé *matrice jacobienne* car c'est la matrice du changement des variables $\vec{X}$ en $\vec{x}$. En effet, le tenseur $\overline{\overline{F}}$ s'écrit aussi :

$$\overline{\overline{F}} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \tag{3.23}$$

et est non symétrique en général. Le jacobien de la transformation est le déterminant de cette matrice. En tenant compte du caractère infinitésimal des vecteurs $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$, on peut écrire le développement de Taylor au premier ordre de (3.20) et (3.21) :

$$\begin{aligned} d\vec{x}_1 &= \overline{\overline{F}}(\vec{X}_P, t) \cdot d\vec{X}_1 \\ d\vec{x}_2 &= \overline{\overline{F}}(\vec{X}_P, t) \cdot d\vec{X}_2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Le tenseur $\overline{\overline{F}}$ transforme un vecteur de la configuration de référence $d\vec{X}$ en un vecteur $d\vec{x}$ de la configuration actuelle. Comme $d\vec{X}$ est infinitésimal, il en sera de même pour $d\vec{x}$. Ce type de tenseur est appelé un tenseur deux-points [(6)].

(6) "two-point tensor" en anglais.

Exemple 3.3 — Transformation des vecteurs de base. Pour illustrer le calcul du tenseur $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ reprenons la transformation de l'exemple 3.1. Le gradient de la transformation se calcule par :

$$[\overline{\overline{\mathrm{F}}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{X}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{X}_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{X}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{X}_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3t \\ 0 & 2+t \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

On note que pour cet exemple, $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ est uniforme, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du point $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ considéré. En général, le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ dépend à la fois du temps et du point considéré. Les vecteurs placés initialement selon les axes $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont transformés à l'instant $t = 1$ en $\overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \vec{e}_1$ et $\overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \vec{e}_2$ donnés par l'application (3.24). En considérant l'instant $t = 1$, on a :

$$[\overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \vec{e}_1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \vec{e}_2] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Dans notre exemple, le vecteur initialement parallèle à l'axe 1 reste donc parallèle à l'axe 1 et ne change pas de taille. Par contre, le vecteur initialement parallèle à l'axe 2 tourne de 45° et voit sa taille multipliée par $3/\sqrt{2}$.

Si l'on considère deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ *actuellement* orientés parallèlement aux axes, on peut se demander quelle était l'orientation de ces vecteurs dans la configuration initiale. Ces orientations sont données par :

$$[\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-1} \cdot \vec{e}_1] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-1} \cdot \vec{e}_2] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

3.3 Définition des tenseurs de déformation

La section précédente a introduit le tenseur gradient de la transformation $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$. Ce tenseur est la dérivée des positions actuelles par rapport aux positions initiales. Nous allons montrer que ce tenseur n'est pas une bonne mesure de déformation. En revanche, à partir de ce tenseur nous allons bâtir deux tenseurs de déformation.

Considérons un corps se déplaçant de manière rigide. Ce mouvement s'écrit :

$$\vec{x}(\vec{\mathrm{X}}, t) = \overline{\overline{\mathrm{R}}}(t) \cdot \vec{\mathrm{X}} + \vec{c}(t) \tag{3.28}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{R}}}$ est un tenseur orthogonal c'est-à-dire que sa transposée coïncide avec son inverse :

$$\overline{\overline{\mathrm{R}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{R}}}^{\top} = \overline{\overline{\mathrm{R}}}^{\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{R}}} = \overline{\overline{\mathrm{I}}} \tag{3.29}$$

Il représente la rotation rigide du corps et le vecteur $\vec{c}$ représente la translation rigide. Le gradient d'une telle transformation est clairement :

$$\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \overline{\overline{\mathrm{R}}} \tag{3.30}$$

Autrement dit pour un mouvement de corps rigide, le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ n'est pas nul et est égal au tenseur de rotation. Clairement, le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ n'est donc pas une bonne mesure de déformation puisqu'il est non nul pour des transformations n'impliquant aucune déformation.

Pour arriver à la définition d'un tenseur de déformation, écrivons le changement de produit scalaire entre deux vecteurs élémentaire $\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1$ et $\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2$ lorsqu'ils se transforment en

$\mathrm{d}\vec{x}_1$ et $\mathrm{d}\vec{x}_2$ — figure 3.4. Exprimons le produit scalaire des vecteurs après déformation en fonction des vecteurs avant déformation :

$$\mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2 = \left(\overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1\right) \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2\right) = \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1 \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2 = \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1 \cdot \overline{\overline{\mathrm{C}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2 \tag{3.31}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{C}}} = \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}}$ est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit. Il s'agit d'un tenseur symétrique du deuxième ordre dit matériel car il opère sur des vecteurs matériels.

Inversement, on peut exprimer le produit scalaire des vecteurs élémentaires dans la configuration de référence à partir des vecteurs dans la configuration actuelle :

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2 = \left(\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-1} \cdot \mathrm{d}\vec{x}_1\right) \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-1} \cdot \mathrm{d}\vec{x}_1\right) = \mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-1}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2 = \mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \overline{\overline{b}}^{-1} \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2 \tag{3.32}$$

où $\overline{\overline{b}}$ est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche [(7)] :

$$\overline{\overline{b}} = \overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{\top} \tag{3.33}$$

Il s'agit d'un tenseur symétrique du deuxième ordre dit tenseur spatial car il opère sur des vecteurs spatiaux.

Remarque — Tout comme $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$, $\overline{\overline{b}}$ et $\overline{\overline{\mathrm{C}}}$ ne sont pas des mesures de déformations car pour un mouvement de corps rigide, on a $\overline{\overline{\mathrm{C}}} = \overline{\overline{b}} = \overline{\overline{\mathrm{I}}}$.

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange $\overline{\overline{\mathrm{E}}}$ est défini par :

$$\frac{1}{2}(\mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2 - \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1 \cdot \overline{\overline{\mathrm{C}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2 - \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1 \cdot \overline{\overline{\mathrm{I}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2) = \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1 \cdot \overline{\overline{\mathrm{E}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2 \tag{3.34}$$

où $\overline{\overline{\mathrm{I}}}$ est le tenseur identité. Le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{E}}}$ est un tenseur symétrique matériel du deuxième ordre. Il se calcule en terme de $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ par la relation suivante :

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{C}}} - \overline{\overline{\mathrm{I}}}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}} - \overline{\overline{\mathrm{I}}}\right) \tag{3.35}$$

On définit également le tenseur de déformation d'Euler-Almansi $\overline{\overline{e}}$:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2 - \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \overline{\overline{\mathrm{I}}} \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2 - \mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \overline{\overline{b}}^{-1} \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2) = \mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \overline{\overline{e}} \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2 \tag{3.36}$$

Le tenseur $\overline{\overline{e}}$ est un tenseur spatial symétrique du deuxième ordre qui s'exprime en fonction de $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ par :

$$\overline{\overline{e}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \overline{\overline{b}}^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-1}\right) \tag{3.37}$$

Les tenseurs de Green-Lagrange et de Euler-Almansi sont de bonnes mesures de déformation car ils sont nuls pour des transformations rigides. En effet, prenant en compte $\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \overline{\overline{\mathrm{R}}}$, pour une transformation rigide, il vient :

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{R}}}^{\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{R}}} - \overline{\overline{\mathrm{I}}}\right) = \overline{\overline{0}} \tag{3.38}$$

$$\overline{\overline{e}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \overline{\overline{\mathrm{R}}}^{-\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{R}}}^{-1}\right) = \overline{\overline{0}} \tag{3.39}$$

du fait de la définition (3.29) d'un tenseur orthogonal.

(7) Dans le tenseur de Cauchy-Green droit $\overline{\overline{\mathrm{C}}} = \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}}$, $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ est à droite alors que dans le tenseur de Cauchy-Green gauche $\overline{\overline{b}} = \overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{\top}$, $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ est à gauche.

Exemple 3.4 — Déformations de Green-Lagrange et Euler-Almansi. Toujours pour la transformation donnée dans l'exemple 3.1, on peut calculer les déformations pour $t = 1$. D'abord, écrivons les tenseurs droit et gauche de Cauchy-Green :

$$[\overline{\overline{C}}] = [\overline{\overline{F}}^{\top} \cdot \overline{\overline{F}}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\overline{\overline{b}}] = [\overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{F}}^{\top}] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

et ensuite les déformations de Green-Lagrange et Euler-Almansi :

$$[\overline{\overline{E}}] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\overline{\overline{e}}] = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

3.4 Interprétation des composantes des tenseurs de déformations

Afin d'interpréter physiquement les composantes des tenseurs de déformation $\overline{\overline{E}}$ et $\overline{\overline{e}}$, nous allons considérer des vecteurs matériels particuliers. Tout d'abord, considérons que les deux vecteurs $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ sont identiques et notés $d\vec{X}$. Après déformation, ce vecteur se trouvera en $d\vec{x} = d\vec{x}_1 = d\vec{x}_2$. La relation (3.34) donne :

$$\frac{1}{2}(d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{X} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot \overline{\overline{E}} \cdot d\vec{X} \tag{3.42}$$

Décomposons les vecteurs $d\vec{X}$ et $d\vec{x}$ selon leur norme et leur orientation :

$$d\vec{X} = dL\,\vec{N} \quad ; \quad d\vec{x} = d\ell\,\vec{n} \tag{3.43}$$

On peut alors simplifier (3.42) en :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\ell^2 - dL^2}{dL^2}\right) = \vec{N} \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \vec{N} \tag{3.44}$$

En considérant en particulier, un vecteur $\vec{N}$ selon l'axe $\vec{e}_1$, le membre de droite de l'équation (3.44) est simplement E_{11} car :

$$\vec{e}_1 \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{11} \tag{3.45}$$

Les éléments diagonaux du tenseur $\overline{\overline{E}}$ donnent donc les changements relatifs de longueur, au sens du premier membre de (3.44), de vecteurs élémentaires *initialement* dirigés selon les axes.

Concernant l'interprétation du tenseur de Euler-Almansi, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\ell^2 - dL^2}{d\ell^2}\right) = \vec{n} \cdot \overline{\overline{e}} \cdot \vec{n} \tag{3.46}$$

Les termes diagonaux du tenseur $\overline{\overline{e}}$ sont donc les changements relatifs de longueur de vecteurs élémentaires *actuellement* dirigés selon les axes [8].

(8) Attention aux notations : $\overline{\overline{e}}$ est le tenseur de déformation de Euler-Almansi, $\vec{e}_1$ est le premier vecteur de base et e_{11} est la composante 11 du tenseur $\overline{\overline{e}}$ dans le repère donné par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Exemple 3.5 — Interprétation physique des tenseurs de déformation. Revenons à la transformation de l'exemple 3.1. Les déformations à l'instant $t = 1$ ont été obtenues dans l'exemple 3.3. On note que la composante E_{11} est nulle. Cela indique qu'un vecteur élémentaire placé selon l'axe 1 dans la configuration initiale ne voit pas sa taille évoluer. Ceci est en accord avec le vecteur $\overline{\overline{F}} \cdot \vec{e}_1$ obtenu dans l'exemple 3.3 qui est bien de même norme que $\vec{e}_1$. La composante E_{22} vaut 7/4. Ceci est cohérent car un vecteur initialement selon $\vec{e}_2$ et de norme $d\ell = 1$ devient le vecteur $\overline{\overline{F}} \cdot \vec{e}_2 = [1{,}5 \;\; 1{,}5]^\top$ de norme $3/\sqrt{2}$ et on a bien :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\ell^2 - dL^2}{d\ell^2}\right) = \frac{7}{4} \tag{3.47}$$

Nous venons d'interpréter les termes diagonaux des tenseurs $\overline{\overline{E}}$ et $\overline{\overline{e}}$ comme la mesure des changements de longueur des vecteurs élémentaires initialement ou actuellement dirigés selon les vecteurs de base. Quant aux termes non diagonaux, ils peuvent s'interpréter comme des changements d'angle. Considérons deux vecteurs $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ initialement orthogonaux. Après déformation, ces deux vecteurs ferons un angle $\pi/2 - \gamma$ où γ est la réduction d'angle entre les deux vecteurs. En décomposant les vecteurs $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ selon leur norme et leur direction :

$$d\vec{X}_1 = dL_1 \vec{N}_1 \quad ; \quad d\vec{X}_2 = dL_2 \vec{N}_2 \tag{3.48}$$

la relation (3.34) devient :

$$\frac{1}{2}\sin\gamma \frac{d\ell_1}{dL_1}\frac{d\ell_2}{dL_2} = \vec{N}_1 \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \vec{N}_2 \tag{3.49}$$

Si on choisit les deux vecteurs $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$ comme vecteurs de base, par exemple $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\sin\gamma \frac{d\ell_1}{dL_1}\frac{d\ell_2}{dL_2} = E_{12} \tag{3.50}$$

La composante E_{12} du tenseur $\overline{\overline{E}}$ est donc liée au changement d'angle *que vont subir* deux vecteurs élémentaires *initialement* placés selon les vecteurs de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

Considérons maintenant deux vecteurs élémentaires $d\vec{x}_1$ et $d\vec{x}_2$ *actuellement* orthogonaux. Avant déformation, ces deux vecteurs formaient un angle que nous noterons $\pi/2 + \gamma'$. La relation (3.36) devient :

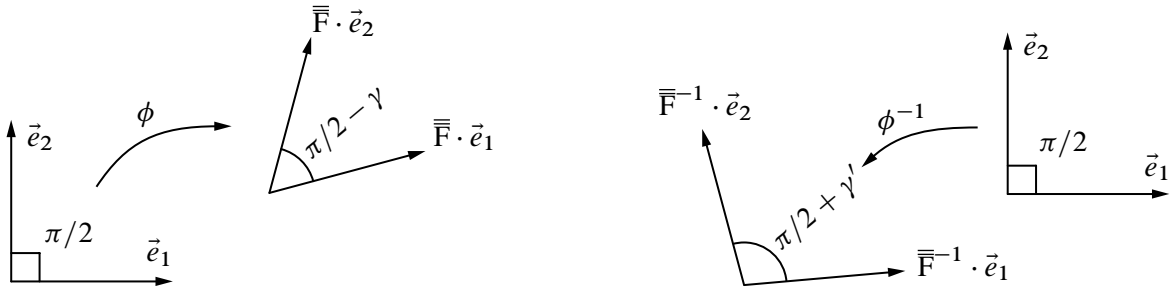
$$\frac{1}{2}\sin\gamma' \frac{dL_1}{d\ell_1}\frac{dL_2}{d\ell_2} = \vec{n}_1 \cdot \overline{\overline{e}} \cdot \vec{n}_2 \tag{3.51}$$

où on a utilisé la décomposition :

$$d\vec{x}_1 = d\ell_1 \vec{n}_1 \quad ; \quad d\vec{x}_2 = d\ell_2 \vec{n}_2 \tag{3.52}$$

La composante e_{12} du tenseur $\overline{\overline{e}}$ est donc liée au changement d'angle *qu'ont subi* deux vecteurs élémentaires *actuellement* dirigés selon les vecteurs de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. La différence entre les angles γ et γ' est illustrée sur la figure 3.5. Finalement, notons bien que les deux tenseurs de déformation précédents ne sont pas indépendants. Ils sont reliés l'un à l'autre par les relations :

$$[\overline{\overline{E}}]_{(\vec{e}_I,\vec{e}_{II},\vec{e}_{III})} = \begin{bmatrix} E_I & & \\ & E_{II} & \\ & & E_{III} \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{\overline{e}} = \overline{\overline{F}}^{-\top} \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \overline{\overline{F}}^{-1} \quad ; \quad \overline{\overline{E}} = \overline{\overline{F}}^{\top} \cdot \overline{\overline{e}} \cdot \overline{\overline{F}} \tag{3.53}$$



(a) transformation directe (b) transformation inverse

Figure 3.5 – Interprétation des déformations

3.5 Décomposition polaire

Nous avons vu dans la section précédente le rôle primordial joué par le tenseur $\overline{\overline{F}}$ dans la définition des tenseurs de déformation. Ce tenseur fait passer un vecteur élémentaire $d\vec{X}$ de la configuration initiale à un vecteur $d\vec{x}$ de la configuration actuelle. Ce passage peut être décomposé en une opération dite d'extension suivie d'une opération de rotation. Cette terminologie deviendra claire dans la suite.

D'un point de vue purement mathématique, on peut montrer que tout tenseur d'ordre deux peut s'écrire comme le produit d'un tenseur orthogonal $\overline{\overline{R}}$ et d'un tenseur symétrique $\overline{\overline{U}}$:

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{U}} \tag{3.54}$$

Dans une déformation générale du milieu continu, la décomposition ci-dessus diffère en chaque point $\vec{X}$ et à chaque instant. On devrait donc écrire pour être précis :

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \overline{\overline{R}}(\vec{X}, t) \cdot \overline{\overline{U}}(\vec{X}, t) \tag{3.55}$$

Pour obtenir les tenseurs $\overline{\overline{R}}$ et $\overline{\overline{U}}$ à partir du tenseur $\overline{\overline{F}}$, partons du tenseur droit de Cauchy-Green :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^{\top} \cdot \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{U}}^{\top} \cdot \overline{\overline{R}}^{\top} \cdot \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{U}} = \overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{U}} \tag{3.56}$$

Le tenseur $\overline{\overline{U}}$ est donc la racine carrée du tenseur $\overline{\overline{C}}$. Pour prendre la racine d'un tenseur, il faut l'écrire sous une forme dire propre :

$$\overline{\overline{C}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \vec{N}_\alpha \otimes \vec{N}_\alpha \tag{3.57}$$

Les λ_α^2 et $\vec{N}_\alpha$ sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres de $\overline{\overline{C}}$ [(9)].

Remarque — Dans le cas particulier d'une transformation rigide, le tenseur $\overline{\overline{R}}$ est le même pour tous les points matériels du corps (rotation d'ensemble) et le tenseur $\overline{\overline{U}}$ est l'identité, donc (3.55) devient :

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \overline{\overline{R}}(t) \tag{3.58}$$

(9) Puisque $\overline{\overline{C}}$ s'écrit sous la forme $\overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{U}}$, $[\overline{\overline{C}}]$ est une matrice positive, *i.e.* $\vec{A} \cdot \overline{\overline{C}} \cdot \vec{A} \geqslant 0$, $\forall \vec{A}$, et toutes ses valeurs propres sont positives et réelles puisque $\overline{\overline{C}}$ est symétrique et réel.

Le tenseur $\overline{\overline{U}}$ s'écrit alors en prenant la racine carrée des valeurs propres (on choisit les racines carrées positives $\lambda_\alpha \geqslant 0$) :

$$\overline{\overline{U}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \vec{N}_\alpha \otimes \vec{N}_\alpha \tag{3.59}$$

Finalement :

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{U}}^{-1} \tag{3.60}$$

Exemple 3.6 — Décomposition polaire. Soit la transformation suivante :

$$x_1(X_1, X_2, t) = \big(4X_1 + (9 - 3X_1 - 5X_2 - X_1X_2)t\big)/4 \tag{3.61}$$
$$x_2(X_1, X_2, t) = \big(4X_2 + (16 + 8X_1)t\big)/4 \tag{3.62}$$

Pour $\vec{X} = (0, 0)$ et $t = 1$, le gradient de la transformation et le tenseur droit de Cauchy-Green s'écrivent :

$$[\overline{\overline{F}}] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\overline{\overline{C}}] = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 65 & 27 \\ 27 & 41 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Les extensions λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres et vecteurs propres donnés par :

$$\lambda_1 = 2{,}2714 \quad ; \quad \lambda_2 = 1{,}2107 \quad ; \quad [\vec{N}_1] = \begin{bmatrix} 0{,}8385 \\ 0{,}5449 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\vec{N}_2] = \begin{bmatrix} -0{,}5449 \\ 0{,}8385 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

Finalement, en utilisant (3.59) et $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{U}}^{-1}$, le tenseur d'extension et de rotation sont :

$$[\overline{\overline{U}}] = \begin{bmatrix} 1{,}9564 & 0{,}4846 \\ 0{,}4846 & 1{,}5257 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\overline{\overline{R}}] = \begin{bmatrix} 0{,}3590 & -0{,}9333 \\ 0{,}0333 & 0{,}3590 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

Interprétons maintenant la décomposition :

$$d\vec{x} = \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X} = \overline{\overline{R}} \cdot (\overline{\overline{U}} \cdot d\vec{X}) \tag{3.66}$$

Le tenseur $\overline{\overline{U}}$ réalise une extension de $d\vec{X}$ et une rotation $\overline{\overline{R}}$ est ensuite appliquée. Soient dX_α, $\alpha = 1, 2, 3$, les composantes de $d\vec{X}$ dans la base propre $\vec{N}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$:

$$d\vec{X} = \sum_{\alpha=1}^{3} dX_\alpha \vec{N}_\alpha \tag{3.67}$$

L'application de $\overline{\overline{U}}$ donne :

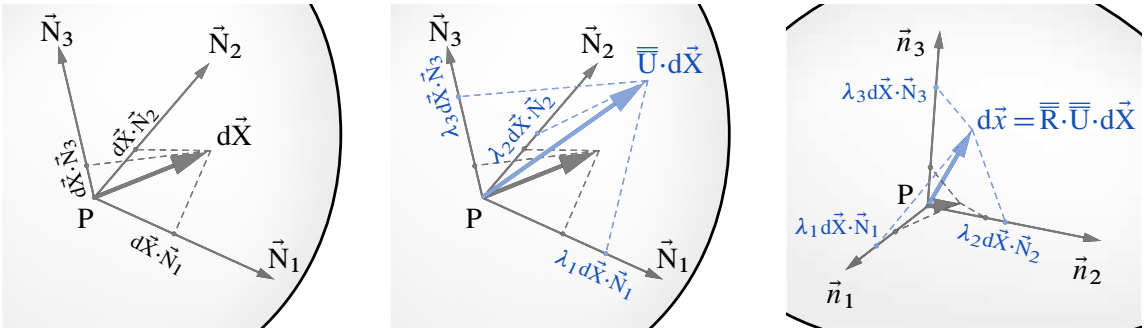
$$\overline{\overline{U}} \cdot d\vec{X} = \sum_{\alpha=1}^{3} dX_\alpha \overline{\overline{U}} \cdot \vec{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} dX_\alpha \lambda_\alpha \vec{N}_\alpha \tag{3.68}$$

Les composantes de $d\vec{X}$ sont donc multipliées (étendues) par les coefficients λ_α. Si le vecteur $d\vec{X}$ coïncide avec l'un des vecteurs de base, $\vec{N}_\alpha$, il préservera sa direction suite à

l'application de $\overline{\overline{\mathrm{U}}}$, pour devenir $\lambda_\alpha \vec{\mathrm{N}}_\alpha$ (pas de sommation sur les indices). Avec l'application de $\overline{\overline{\mathrm{R}}}$, il tournera pour devenir un vecteur noté $\lambda_\alpha \vec{n}_\alpha$ sur la figure 3.6. Ceci s'exprime mathématiquement comme suit :

$$\overline{\overline{\mathrm{F}}} \cdot \vec{\mathrm{N}}_\alpha = \overline{\overline{\mathrm{R}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{U}}} \cdot \vec{\mathrm{N}}_\alpha = \lambda_\alpha \overline{\overline{\mathrm{R}}} \cdot \vec{\mathrm{N}}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{n}_\alpha \tag{3.69}$$

Les vecteurs $\vec{\mathrm{N}}_\alpha$ et $\vec{n}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, forment des trièdres propres matériels et spatials, respectivement. Le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{U}}}$ est un tenseur matériel et $\overline{\overline{\mathrm{R}}}$, tout comme $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$, un tenseur deux-



(a) vecteur initial $\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}$ projeté dans la base des vecteurs propres de $\overline{\overline{\mathrm{U}}}$

(b) vecteur $\overline{\overline{\mathrm{U}}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}$ projeté dans la base des vecteurs propres de $\overline{\overline{\mathrm{U}}}$

(c) vecteur $\overline{\overline{\mathrm{R}}}\cdot\overline{\overline{\mathrm{U}}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}$ projeté dans la base des vecteurs propres de $\overline{\overline{\mathrm{R}}}\cdot\overline{\overline{\mathrm{U}}}$

Figure 3.6 – Décomposition polaire

points. Notons qu'il est également possible de décomposer $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ en terme du même tenseur de rotation suivi d'un tenseur d'extension dans la configuration spatiale noté $\overline{\overline{\mathrm{V}}}$:

$$\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \overline{\overline{\mathrm{V}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{R}}} \tag{3.70}$$

Les tenseurs de déformation s'expriment selon les tenseurs $\overline{\overline{\mathrm{U}}}$ et $\overline{\overline{\mathrm{V}}}$ comme suit :

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{U}}}^2 - \bar{\bar{\mathrm{I}}}\right) \quad ; \quad \overline{\overline{e}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{\mathrm{I}}} - \overline{\overline{\mathrm{V}}}^{-2}\right) \tag{3.71}$$

Puisque les bases propres des tenseurs $\overline{\overline{\mathrm{U}}}$ et $\overline{\overline{\mathrm{E}}}$ sont identiques ainsi que les bases propres des tenseurs $\overline{\overline{\mathrm{V}}}$ et $\overline{\overline{e}}$, on peut également écrire :

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - 1)\vec{\mathrm{N}}_\alpha \otimes \vec{\mathrm{N}}_\alpha \quad ; \quad \overline{\overline{e}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(1 - \lambda_\alpha^{-2})\vec{n}_\alpha \otimes \vec{n}_\alpha \tag{3.72}$$

3.6 Changement de volume

Un élément de volume dV de la configuration de référence se transforme en un élément dv dans la configuration actuelle. Le jacobien de la transformation $\mathrm{J} = \det \overline{\overline{\mathrm{F}}}$ donne le changement de volume :

$$dv = \mathrm{J}\, \mathrm{dV} \tag{3.73}$$

Le jacobien de la transformation est utile pour la transformation des intégrales de volume de la configuration actuelle vers la configuration de référence :

$$\int_v a(\vec{x})\, dv = \int_{\mathrm{V}} a\left(\vec{x}\,(\vec{\mathrm{X}}, t)\right) \mathrm{J}\, \mathrm{dV} \tag{3.74}$$

3.7 Changement de surface

Considérons un élément de surface dans la configuration initiale $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\,\vec{N}$ qui, après déformation, devient $\mathrm{d}\vec{a} = \mathrm{d}a\,\vec{n}$ — voir figure 3.4. Afin d'obtenir une relation entre ces deux vecteurs, considérons le vecteur matériel $\mathrm{d}\vec{L}$ qui après déformation devient $\mathrm{d}\vec{\ell}$. Les volumes initiaux et actuels sont :

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\vec{L}\cdot\mathrm{d}\vec{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}\vec{\ell}\cdot\mathrm{d}\vec{a} \tag{3.75}$$

Par (3.73) et le fait que $\mathrm{d}\vec{\ell} = \overline{\overline{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{L}$, nous pouvons écrire :

$$\mathrm{d}\vec{\ell}\cdot\mathrm{d}\vec{a} = J\,\mathrm{d}\vec{L}\cdot\mathrm{d}\vec{A} \quad \Rightarrow \quad (\overline{\overline{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{L})\cdot\mathrm{d}\vec{a} = J\,\mathrm{d}\vec{L}\cdot\mathrm{d}\vec{A} \tag{3.76}$$

La relation (3.76) devant être vérifiée pour tout $\mathrm{d}\vec{L}$, il vient :

$$\mathrm{d}\vec{a} = J\overline{\overline{F}}^{-\top}\cdot\mathrm{d}\vec{A} \tag{3.77}$$

qui exprime la relation entre l'aire (et l'orientation) d'un petit élément de surface après et avant déformation en fonction du gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}$.

3.8 Taux de déformation

Jusqu'ici nous avons introduit deux mesures de déformations dans les configurations initiale et actuelle. Il nous reste à introduire la vitesse de ces déformations appelée *taux de déformation*.

Le tenseur taux de déformation (matériel) est la dérivée particulaire du tenseur de déformation de Green-Lagrange, soit $\dot{\overline{\overline{E}}}$. Ce tenseur donne, pour une particule donnée, le taux de variation de sa déformation au cours du temps. C'est clairement une quantité lagrangienne.

De même, nous introduirons le tenseur taux de déformation spatial noté $\overline{\overline{D}}$. Celui-ci est relié à $\dot{\overline{\overline{E}}}$ par la même relation (3.53) qui relie $\overline{\overline{e}}$ à $\overline{\overline{E}}$:

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{F}}^{-\top}\cdot\dot{\overline{\overline{E}}}\cdot\overline{\overline{F}}^{-1} \quad ; \quad \dot{\overline{\overline{E}}} = \overline{\overline{F}}^{\top}\cdot\overline{\overline{D}}\cdot\overline{\overline{F}} \tag{3.78}$$

Le tableau 3.1 reprend les tenseurs de déformation et leur taux. Sur la base de la formule (3.78), on peut dégager l'expression du tenseur taux de déformation spatial en terme des vitesses :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec{v} + (\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec{v})^{\top}\right) \quad \leftrightarrow \quad D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{3.79}$$

Il est à noter que cette relation est linéaire par rapport à la vitesse.

	matériel (lagrangien)	spatial (eulérien)
tenseur de déformation	$\overline{\overline{E}}$	$\overline{\overline{e}}$
tenseur taux de déformation	$\dot{\overline{\overline{E}}}$	$\overline{\overline{D}}$

Tableau 3.1 – Tenseurs de déformation et taux de déformation

3.9 Déformations en petites perturbations

3.9.1 Formulation de l'hypothèse des petites perturbations

Les outils mathématiques pour décrire des déformations quelconques entre un domaine de référence V et un domaine actuel v viennent d'être introduits. Cette déformation peut être faible ou énorme (crash de voiture par exemple). Il faut bien comprendre que les déformations de Green-Lagrange et Euler-Almansi dépendent des déplacements de manière non-linéaire. En effet, reprenons la définition du tenseur de Green-Lagrange :

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{C}}} - \overline{\overline{\mathrm{I}}}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}} - \overline{\overline{\mathrm{I}}}\right) \tag{3.80}$$

Le gradient de la transformation $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ peut s'exprimer en fonction du gradient des déplacements en utilisant (3.6) :

$$\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} = \frac{\partial(\vec{\mathrm{X}} + \vec{u})}{\partial \vec{\mathrm{X}}} = \overline{\overline{\mathrm{I}}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} \tag{3.81}$$

et donc $\overline{\overline{\mathrm{E}}}$ s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right) \tag{3.82}$$

qui est une expression non-linéaire (quadratique) des déplacements.

Dans certains cas, cette cinématique peut être linéarisée ce qui simplifie grandement la résolution finale du problème. C'est le cas des petites perturbations. L'hypothèse des petites perturbations (HPP) se formule comme suit : les déplacements entre la configuration de référence et la configuration actuelle sont très petits et le gradient des déplacements est également petit. Voici une certain nombre d'exemples pour lesquels cette hypothèse est justifiée :

— un immeuble se déplace peu entre sa position non chargée (absence de gravité et de vent) et chargée (on applique la gravité et le vent) ;
— les ondes sismiques font intervenir des déplacements de faible amplitude par rapport à la taille des immeubles touchés (malgré cette faible amplitude, elles restent néanmoins très néfastes !) ;
— la mise en extension d'une éprouvette métallique dans un essai de traction fait intervenir des déplacements et des déformations faibles par rapport à la taille de l'éprouvette dans le régime élastique et même le début de la zone plastique : ces déplacements ne sont d'ailleurs pas visibles à l'œil nu.

À l'inverse, voici des exemples où l'hypothèse des petites perturbations n'est pas justifiée :

— l'étude des déformations d'une balle de golf suite à l'impact d'un club ;
— la déformation d'une planche de plongeoir sous l'action d'un nageur ;
— la phase de striction d'une éprouvette dans un essai de traction ;
— la mise en forme d'une canette à partir d'une tôle ;
— l'écoulement de tout fluide ne rentre pas dans le cadre des petites perturbations puisque les configurations initiale et finale sont très différentes : les particules fluides se déplacent beaucoup. Même si c'est toujours la même section du tuyau qui est étudiée au cours du temps, cela ne veut pas dire que l'hypothèse est applicable. En effet, cette portion de tuyau est sans cesse remplie par d'autres particules de fluide. Le cadre des petites perturbations, au contraire, impose que les particules bougent très peu par rapport à la taille du domaine d'étude et se déforment peu.

Finalement, notons que l'hypothèse des petites perturbations se formule entièrement en fonction de quantités cinématiques. Quant aux efforts nécessaires pour engendrer ces déplacements, ils peuvent être quelconques.

3.9.2 Simplification des résultats en petites perturbations

Déduisons maintenant les conséquences de l'hypothèse des petites perturbations sur la description de la cinématique. Cette dernière permet de négliger le terme quadratique dans l'expression de Green-Lagrange (3.82). Il reste :

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top}\right) \tag{3.83}$$

Le membre de droite est le tenseur des déformations en petites perturbations [(10)], noté $\overline{\overline{\epsilon}}$:

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{F}}} + \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{\top}\right) - \overline{\overline{\mathrm{I}}} \tag{3.84}$$

Le tenseur de déformation d'Euler-Almansi se confond également, au premier ordre, avec le tenseur de déformation $\overline{\overline{\epsilon}}$ issu de l'hypothèse des petites perturbations. On a en effet :

$$\overline{\overline{e}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-\top} \cdot \overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{-\top} \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{-1}\right) \tag{3.85}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top} \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)\right) \tag{3.86}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top} - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right) \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top}\right) = \overline{\overline{\epsilon}} \tag{3.87}$$

Pour passer de (3.85) à (3.86), nous nous servons du résultat $(1+x)^{-1} \simeq 1 - x$ pour x petit devant 1. En conclusion, dans l'hypothèse HPP, nous avons :

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} \simeq \overline{\overline{\epsilon}} \simeq \overline{\overline{e}} \tag{3.88}$$

Exemple 3.7 — Tenseur des déformations en petites perturbations. Calculons les déformations de Green-Lagrange, Euler-Almansi et celles des petites perturbations pour la transformation de l'exemple 3.1 et montrons que ces trois tenseurs coïncident lorsque la déformation est petite. On a :

$$[\overline{\overline{\mathrm{F}}}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3t \\ 0 & 2+t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overline{\overline{\mathrm{F}}}^{-1}] = \frac{1}{2+t}\begin{bmatrix} 2+t & -3t \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

donc :

$$[\overline{\overline{\mathrm{E}}}] = \begin{bmatrix} 0 & 3t/4 \\ 3t/4 & t/2 + 5t^2/4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overline{\overline{e}}] = \frac{1}{(2+t)^2}\begin{bmatrix} 0 & 3t + 3t^2/2 \\ 3t + 3t^2/2 & 2t - 4t^2 \end{bmatrix} \tag{3.90}$$

Concernant $\overline{\overline{\epsilon}}$, la transformation (3.4-3.5) conduit aux déplacements :

$$u_1 = \frac{1}{4}(18t + 6t\mathrm{X}_2) \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{4}(14t + 2t\mathrm{X}_2) \tag{3.91}$$

(10) En raccourci, on dit également tenseur des déformations HPP.

Les tenseurs du gradient du déplacement et des déformations sont :

$$\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overline{\overline{\epsilon}}] = \begin{bmatrix} 0 & 3t/4 \\ 3t/4 & t/2 \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

On vérifie bien que lorsque la déformation est faible, *i.e.* $t \ll 1$, les trois tenseurs $\overline{\overline{E}}$, $\overline{\overline{e}}$ et $\overline{\overline{\epsilon}}$ coïncident.

Nous avions interprété les composantes du tenseur de Green-Lagrange dans la section 3.4. Reprenons cette interprétation à la lumière de l'hypothèse HPP. Introduisons la notation ϵ qui représente l'allongement relatif du segment dL :

$$\epsilon = \frac{d\ell - dL}{dL} \tag{3.93}$$

L'équation (3.44) s'écrit maintenant :

$$\frac{1}{2}\left((1+\epsilon)^2 - 1\right) = \vec{N} \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \vec{N} \tag{3.94}$$

Utilisons maintenant l'hypothèse des petites perturbations : le terme en ϵ^2 peut être négligé devant ϵ et on peut remplacer $\overline{\overline{E}}$ par $\overline{\overline{\epsilon}}$. On a :

$$\epsilon = \frac{d\ell - dL}{dL} = \vec{N} \cdot \overline{\overline{\epsilon}} \cdot \vec{N} \tag{3.95}$$

Les composantes diagonales du tenseur des déformations en petites perturbations sont donc les allongements relatifs des vecteurs élémentaires dirigés selon les axes. Il est intéressant de comparer (3.95) et (3.44). On note que $\frac{d\ell - dL}{dL}$ est le développement au premier ordre de $\frac{d\ell^2 - dL^2}{2\,dL^2}$ puisqu'en effet :

$$\frac{1}{2}\frac{d\ell^2 - dL^2}{dL^2} = \left(\frac{d\ell - dL}{dL}\right)\left(\frac{d\ell + dL}{2\,dL}\right) \simeq \frac{d\ell - dL}{dL} \tag{3.96}$$

Concernant les termes hors-diagonale, partons de l'expression (3.49) et posons :

$$\epsilon_1 = \frac{d\ell_1 - dL_1}{dL_1} \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{d\ell_2 - dL_2}{dL_2} \tag{3.97}$$

On obtient :

$$\frac{1}{2}\sin\gamma(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2) = \vec{N}_1 \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \vec{N}_2 \tag{3.98}$$

Soit, au premier ordre :

$$\frac{\gamma}{2} = \vec{N}_1 \cdot \overline{\overline{\epsilon}} \cdot \vec{N}_2 \tag{3.99}$$

Choisissons les deux vecteurs $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$ comme deux vecteurs de base, par exemple le premier et le second vecteur de base. Il vient alors :

$$\frac{\gamma}{2} = \epsilon_{12} \tag{3.100}$$

Les termes hors-diagonaux du tenseur des déformations en petites perturbations sont donc directement la moitié de la réduction d'angle entre les vecteurs de base. Il est intéressant de comparer (3.100) et (3.50). Que devient la décomposition polaire dans le cadre de l'hypothèse HPP ? Pour rappel, la décomposition polaire du gradient de la transformation revient à écrire :

$$\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \overline{\overline{\mathrm{R}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{U}}} \tag{3.101}$$

ou :

$$\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \overline{\overline{\mathrm{V}}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{R}}} \tag{3.102}$$

Partons de l'expression (3.81) de $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ pour écrire :

$$\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \overline{\overline{\mathrm{I}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top}\right)}_{\overline{\overline{\epsilon}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top}\right)}_{\overline{\overline{\omega}}} = \overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\epsilon}} + \overline{\overline{\omega}} \tag{3.103}$$

Nous retrouvons le tenseur des déformations en HPP $\overline{\overline{\epsilon}}$ et nous définissons un tenseur $\overline{\overline{\omega}}$. Ce tenseur est antisymétrique et est appelé le tenseur de rotation en HPP. Vu les hypothèses HPP, on peut écrire :

$$\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\epsilon}} + \overline{\overline{\omega}} \simeq \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\epsilon}}\right) \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\omega}}\right) \simeq \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\omega}}\right) \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\epsilon}}\right) \tag{3.104}$$

En comparant avec (3.101) et (3.102), on voit qu'en HPP :

$$\overline{\overline{\mathrm{U}}} \simeq \overline{\overline{\mathrm{V}}} \simeq \overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\epsilon}} \quad ; \quad \overline{\overline{\mathrm{R}}} \simeq \overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\omega}} \tag{3.105}$$

Voici l'expression générale d'une transformation rigide dans l'hypothèse des petites perturbations :

$$\vec{x} = \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\omega}}(t)\right) \cdot \vec{\mathrm{X}} + \vec{c}(t) \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \overline{\overline{\omega}}(t) \cdot \vec{\mathrm{X}} + \vec{c}(t) \tag{3.106}$$

où $\vec{c}(t)$ est le mode de translation rigide. La déformation associée est nulle :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\omega}} + \overline{\overline{\omega}}^{\top}\right) = \overline{\overline{0}} \tag{3.107}$$

puisque le tenseur de rotation $\overline{\overline{\omega}}$ est antisymétrique sous l'hypothèse des petites perturbations.

Il est ici important de comparer les modes rigides du cas général (3.28), et du cas HPP (3.106). Le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{R}}}$ caractérisant la rotation est orthogonal dans le cas général alors que, $\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\omega}}$ n'est orthogonal qu'au premier ordre. En effet, en se servant de l'antisymétrie de $\overline{\overline{\omega}}$:

$$\left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\omega}}\right)^{\top} \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\omega}}\right) = \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} - \overline{\overline{\omega}}\right) \cdot \left(\overline{\overline{\mathrm{I}}} + \overline{\overline{\omega}}\right) = \overline{\overline{\mathrm{I}}} - \overline{\overline{\omega}} \cdot \overline{\overline{\omega}} \simeq \overline{\overline{\mathrm{I}}} \tag{3.108}$$

Notons que (3.106) peut aussi s'écrire :

$$\vec{u} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{\mathrm{X}} + \vec{c}(t) \tag{3.109}$$

où le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ reprend les composantes non-nulles du tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$.

Enfin, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, le changement de volume est donné par :

$$j = \det \overline{\overline{\mathrm{F}}} \simeq \mathrm{tr}\, \overline{\overline{\epsilon}} \tag{3.110}$$

On peut, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, confondre les variables d'Euler $(\vec{x}, t)$ et celles de Lagrange $(\vec{\mathrm{X}}, t)$ pour le calcul d'une fonction et de ses dérivées. Les deux écritures suivantes sont donc identiques :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}}\right)^{\top}\right) \tag{3.111}$$

Une conséquence importante est que l'écriture des équations et des conditions aux limites peut s'effectuer directement sur la configuration de référence. Dans le cadre des petites perturbations, les configurations initiale et actuelle sont considérées confondues.

3.9.3 Conditions de compatibilité des déformations

La relation déformation-déplacement s'écrit en HPP :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\mathrm{X}}}\right)^{\top}\right) \tag{3.112}$$

En notation indicielle, cela s'écrit :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3.113}$$

À tout champ de déplacement, on peut faire correspondre un champ de déformation HPP par (3.113). Par contre, existe-t-il pour un champ de déformation quelconque, un champ de déplacement associé ? La réponse est non en général [(11)]. Pour que la réponse soit positive, il faut que les déformations vérifient des équations dites *de compatibilité*, au nombre de six, en comptant les permutations :

$$\varepsilon_{ikr}\varepsilon_{jls}\epsilon_{ij,kl} = 0 \tag{3.114}$$

où ε_{ijk} est le symbole de permutation défini en (2.2). Elles s'écrivent aussi comme suit :

$$\epsilon_{ij,kk} + \epsilon_{kk,ij} - (\epsilon_{ik,jk} + \epsilon_{jk,ik}) = 0 \tag{3.115}$$

3.9.4 Directions principales des déformations et cercle de Mohr

Le tenseur des déformations $\overline{\overline{\epsilon}}$ étant un tenseur symétrique d'ordre deux, nous savons, d'après la sous-section 2.7.6, qu'il existe une base privilégiée dite *base propre* ou *base principale* dans laquelle les composantes de ce tenseur forment une matrice diagonale. Cette base propre est orthonormée et sera notée $(\vec{e}_{\mathrm{I}}, \vec{e}_{\mathrm{II}}, \vec{e}_{\mathrm{III}})$:

$$[\overline{\overline{\epsilon}}]_{(\vec{e}_{\mathrm{I}},\vec{e}_{\mathrm{II}},\vec{e}_{\mathrm{III}})} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

(11) La raison intuitive est le fait qu'il y a six composantes de déformations et seulement trois de déplacements.

Pour calculer l'allongement relatif ϵ du vecteur $\vec{e}_{\mathrm{I}}$ lors de la déformation, on se sert de la formule (3.95) :

$$\epsilon = \vec{e}_{\mathrm{I}} \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{I}} = \epsilon_{\mathrm{I}} \tag{3.117}$$

Les valeurs propres ϵ_{I}, ϵ_{II} et ϵ_{III} représentent donc les allongements relatifs de segments élémentaires placés dans les trois directions de la base propre.

Calculons maintenant la variation d'angle γ entre deux vecteurs de la base propre lors de la déformation par la formule (3.99) :

$$\frac{\gamma}{2} = \vec{e}_{\mathrm{I}} \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{II}} = \epsilon_{\mathrm{II}} \vec{e}_{\mathrm{I}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{II}} = 0 \tag{3.118}$$

Les vecteurs de base restent donc orthogonaux entre eux lors de la déformation. La base propre du tenseur des déformations HPP est une base orthonormée qui reste orthogonale lors de la déformation mais pas nécessairement orthonormée car les vecteurs de base peuvent s'allonger ou se rétrécir.

Pour illustrer cette propriété de la base propre des déformations, considérons un bloc en caoutchouc sur la surface duquel a été gravé un réseau orthogonal. Si cette surface est libre d'effort lors de la déformation, on peut montrer que la normale à cette surface est un des vecteurs propre que l'on notera $\vec{e}_{\mathrm{III}}$ [(12)]. Si, lors de la déformation, le réseau gravé reste orthogonal, cela indique que ce réseau était orienté selon les deux autres vecteurs propres $\vec{e}_{\mathrm{I}}$ et $\vec{e}_{\mathrm{II}}$. Si, par contre, le réseau perd son orthogonalité, c'est qu'il n'était pas aligné selon la base propre. Étudions ceci quantitativement. Donnons-nous un vecteur $\vec{n}$ sur la surface

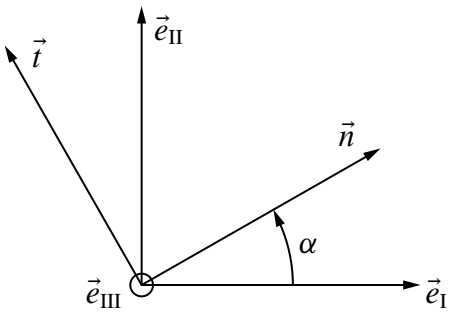


Figure 3.7 – Directions principales

qui fait un angle α avec le premier vecteur de base propre $\vec{e}_{\mathrm{I}}$ à l'image de ce qu'indique la figure 3.7. Prenons un second vecteur $\vec{t}$ orthogonal à $\vec{n}$ et tel que $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{e}_{\mathrm{III}})$ forme une base directe :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \cos\alpha \vec{e}_{\mathrm{I}} + \sin\alpha \vec{e}_{\mathrm{II}} \\ \vec{t} &= -\sin\alpha \vec{e}_{\mathrm{I}} + \cos\alpha \vec{e}_{\mathrm{II}} \end{aligned} \tag{3.119}$$

L'allongement relatif selon $\vec{n}$ se calcule par :

$$\epsilon_n = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} + \epsilon_{\mathrm{II}}}{2} + \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} - \epsilon_{\mathrm{II}}}{2} \cos(-2\alpha) \tag{3.120}$$

(12) Ceci sera clair lorsque nous verrons le concept de contraintes et de comportement élastique.

De même, la réduction d'angle entre les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ se calcule par :

$$\frac{\gamma}{2} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & \epsilon_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix} = \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} - \epsilon_{\mathrm{II}}}{2}\sin(-2\alpha) \tag{3.121}$$

Le point $(\epsilon_n, \gamma/2)$ parcourt un cercle de centre $(\frac{\epsilon_{\mathrm{I}}+\epsilon_{\mathrm{II}}}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{\epsilon_{\mathrm{I}}-\epsilon_{\mathrm{II}}}{2}$ [13]. Lorsque l'angle α varie de 0 à π, le point décrit complètement le cercle, comme indiqué sur la figure 3.8. Les directions angulaires pour lesquelles les distorsions angulaires γ sont extrémales sont $\alpha = \pi/4$ et $\alpha = 3\pi/4$. Ces directions correspondent aux bissectrices des directions principales.

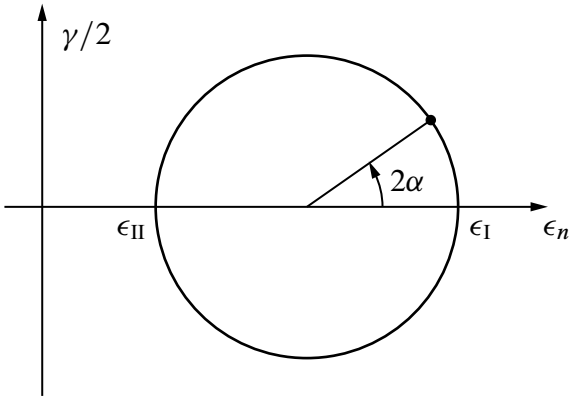


Figure 3.8 – Cercle de Mohr

3.9.5 Dépouillement d'une rosette en extensométrie

Pour connaître les déformations dans le plan d'une surface qui se déforme, on peut coller une *rosette* sur cette surface. Une rosette, constituée de trois *jauges de déformation*, mesure les allongements relatifs dans trois directions différentes du plan, soit à 45° pour les rosettes dites à 45°, ou à 60° pour les rosettes dites à 60° comme décrit sur la figure 3.9.

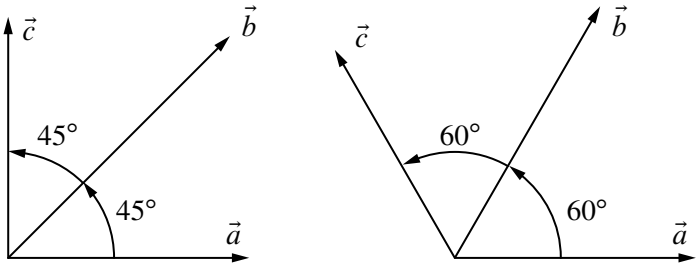


Figure 3.9 – Rosettes

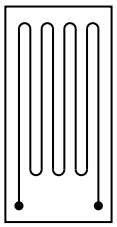


Figure 3.10 – Jauge de déformation

Une jauge de déformation, comme celle de la figure 3.10, peut être assimilée à une résistance métallique constituée d'un fil rectiligne très fin que l'on colle sur la surface de la structure étudiée. On transmet ainsi les déformations de la structure au fil, ce qui induit une variation de sa longueur et une variation de sa résistance. Cette variation est mesurée à l'aide d'un pont de Wheatstone. On peut ainsi obtenir avec précision l'allongement relatif ϵ_x dans la direction $\vec{x}$ de la jauge.

(13) On suppose que l'ordre des valeurs propres est tel que $\epsilon_{\mathrm{I}} \geqslant \epsilon_{\mathrm{II}}$

À partir de ϵ_a, ϵ_b et ϵ_c, il est possible de trouver les déformations propres et les vecteurs propres dans le plan. Notons a, l'angle que fait la jauge dans la direction $\vec{a}$ par rapport au vecteur propre (inconnu) $\vec{e}_{\mathrm{I}}$: l'allongement relatif ϵ_a dans la direction $\vec{a}$ est donné par (3.120) :

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} + \epsilon_{\mathrm{II}}}{2} + \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} - \epsilon_{\mathrm{II}}}{2}\cos(2a) \tag{3.122}$$

De même, si α est l'angle de la rosette, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon_b &= \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} + \epsilon_{\mathrm{II}}}{2} + \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} - \epsilon_{\mathrm{II}}}{2}\cos 2(a+\alpha) \\ \epsilon_c &= \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} + \epsilon_{\mathrm{II}}}{2} + \frac{\epsilon_{\mathrm{I}} - \epsilon_{\mathrm{II}}}{2}\cos 2(a+2\alpha) \end{aligned} \tag{3.123}$$

Pour résoudre ces trois équations à trois inconnues, on pose $d = (\epsilon_{\mathrm{I}} + \epsilon_{\mathrm{II}})/2$ et $r = (\epsilon_{\mathrm{I}} - \epsilon_{\mathrm{II}})/2$. Pour la rosette à 45°, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= d + r\cos(2a) \\ \epsilon_b &= d + r\cos(2a + \pi/2) \\ \epsilon_c &= d + r\cos(2a + \pi) \end{aligned} \tag{3.124}$$

d'où l'on extrait :

$$\begin{aligned} d &= \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} \\ r &= \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon_c - \epsilon_a)^2 + (\epsilon_a + \epsilon_c - 2\epsilon_b)^2} \\ \tan 2a &= \frac{\epsilon_b - d}{\epsilon_a - d} \end{aligned} \tag{3.125}$$

Concernant la rosette à 60°, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= d + r\cos(2a) \\ \epsilon_b &= d + r\cos(2a + 2\pi/3) \\ \epsilon_c &= d + r\cos(2a + 4\pi/3) \end{aligned} \tag{3.126}$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned} d &= \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} \\ r &= \frac{1}{3}\sqrt{(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)^2 + 3(\epsilon_c - \epsilon_b)^2} \\ \tan 2a &= \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\epsilon_c - \epsilon_b}{\epsilon_a - d} \end{aligned} \tag{3.127}$$

Enfin, à partir de d et r, on obtient :

$$\epsilon_{\mathrm{I}} = d + r \quad ; \quad \epsilon_{\mathrm{II}} = d - r \tag{3.128}$$

4

Lois de bilan

Nous venons d'introduire le bagage permettant de décrire la cinématique d'un milieu continu. Pour résoudre un problème concret de mécanique des milieux continus, il faut trois types d'équations :

— les équations de la cinématique, objet du chapitre 3 ;
— les lois de bilan, objet du présent chapitre ;
— la ou les lois de comportement du milieu s'il y a plusieurs matériaux en présence.

Dans ce cours, nous verrons en détail un comportement particulier qui est le comportement élastique.

Les lois de la physique classique sont d'un type général que l'on appelle loi de bilan. Ces lois ont été obtenues par l'expérience et ne sont jamais mises en défaut si l'on reste dans les hypothèses de la physique classique, à savoir vitesse faible devant la vitesse de la lumière et taille « raisonnable » du système. Ces lois sont également toujours vérifiées quel que soit le milieu : solide, fluide ou gazeux. Du fait de leur généralité, elles sont souvent appelées *lois universelles*. Par contre, les lois de comportement, comme le nom l'indique, dépendent du milieu considéré et ne sont donc pas universelles.

Quatre lois de bilan sont à notre disposition [(1)] :

— la conservation de la masse ;
— le bilan de la quantité de mouvement ;
— le bilan du moment cinétique ;
— le bilan de l'énergie.

La loi de bilan de la quantité de mouvement introduit une quantité centrale en mécanique qui est la contrainte. Compte tenu de l'importance de cette quantité, un chapitre complet lui est dédié.

4.1 Forme globale des lois de bilan

Avant de décrire en détail chacune des quatres lois de bilan, nous allons d'abord étudier le caractère général d'une loi de bilan. Ce bilan s'applique à tout domaine ω intérieur au domaine v [(2)] étudié [(3)]. Nous supposerons ici pour fixer les idées que les domaines v et ω sont tridimensionnels comme décrit par la figure 4.1. Toute loi de bilan s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\omega}\mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega}\alpha\,\mathrm{d}s + \int_{\omega}\mathrm{A}\,\mathrm{d}v \tag{4.1}$$

(1) Ces quatres lois sont les lois utiles pour la mécanique. D'autres lois existent pour l'électromagnétisme comme la loi de conservation de la charge électrique.
(2) Le domaine est noté v et non V car on s'intéresse au domaine actuellement occupé par le milieu et non initialement occupé par le milieu.
(3) Nous suivons ici la présentation de [4].

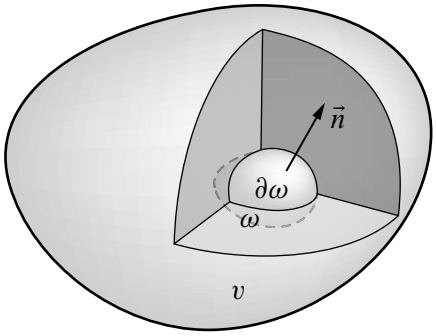


Figure 4.1 – Domaines et loi de bilan

Le symbole $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ désigne la dérivée matérielle, déjà introduite en section 3.1, et $\mathcal{A}$, α ainsi que A représentent trois grandeurs associées dans l'énoncé de la loi :
— $\mathcal{A}$ est la *densité volumique* de la quantité à laquelle on s'intéresse ;
— α est le taux de *densité surfacique* reçu à travers la surface $\partial\omega$;
— A est le taux de production volumique de la quantité d'intérêt.
Nous supposerons que α est une fonction du point $\vec{x}$ considéré sur la surface $\partial\omega$ et du vecteur unitaire de la normale extérieure $\vec{n}$, à cette surface en $\vec{x}$. Nous écrirons donc $\alpha(\vec{x}, \vec{n}, t)$. La relation (4.1) s'interprète comme suit : ce que l'on fournit en volume dans ω ou à travers la surface $\partial\omega$, c'est-à-dire le membre de droite de (4.1), sert à faire varier la quantité d'intérêt, membre de gauche. Voilà pourquoi une relation de type (4.1) est appelée loi de bilan : tout ce qui est fourni sert à faire varier la quantité.

Il est important de noter que la dérivée intervenant dans le membre de gauche est une dérivée matérielle, c'est-à-dire que l'on s'intéresse à la variation d'une quantité en suivant un ensemble donné de matière. Le domaine ω se déplace mais contient toujours les mêmes particules. C'est un domaine matériel et, par conséquent, aucun flux de matière ne traverse $\partial\omega$.

Le tableau 4.1 donne la signification mécanique des quantités $\mathcal{A}$, α et A pour les quatres lois de bilan. On note que ces quantités sont scalaires pour la conservation de la masse et le bilan de l'énergie et vectorielles pour les deux autres lois. Lorsque $\alpha = 0$ et $\mathrm{A} = 0$, on parle de loi de conservation plutôt que de bilan. C'est le cas de la conservation de la masse.

4.2 Forme locale des lois de bilan

Les lois de bilan ont été formulées pour n'importe quel domaine matériel ω. Cette forme offre une interprétation physique intéressante mais n'est pas propice à la résolution analytique ou numérique de problèmes concrets. Pour cela, la *forme locale* des lois de bilan est plus adaptée parce qu'elle génère un ensemble d'équations aux dérivées partielles.

Pour passer de la forme globale à la forme locale, nous allons jouer sur le fait que la loi de bilan (4.1) est valable pour tout domaine ω. Si nous arrivons à transformer (4.1) et l'écrire sous la forme :

$$\int_{\omega} \text{“quelque chose”}\, \mathrm{d}v = 0 \qquad \forall \omega \subset v \tag{4.2}$$

nous pourrons en déduire :

$$\text{“quelque chose”} = 0 \qquad \text{en tout point } \vec{x} \text{ de } v \tag{4.3}$$

Loi de conservation de la masse	
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\omega \rho \,\mathrm{d}v = 0$$	
$\mathcal{A} = \rho$	masse volumique
Loi de bilan de la quantité de mouvement	
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\omega \rho\vec{v} \,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega} \vec{\mathrm{T}} \,\mathrm{d}s + \int_\omega \vec{f} \,\mathrm{d}v$$	
$\vec{\mathcal{A}} = \rho\vec{v}$	quantité de mouvement volumique
$\vec{\alpha} = \vec{\mathrm{T}}$	force surfacique
$\vec{\mathrm{A}} = \vec{f}$	force volumique
Loi de bilan du moment cinétique	
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\omega \vec{x}\wedge\rho\vec{v} \,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega} \vec{x}\wedge\vec{\mathrm{T}} \,\mathrm{d}s + \int_\omega \vec{x}\wedge\vec{f} \,\mathrm{d}v$$	
$\vec{\mathcal{A}} = \vec{x}\wedge\rho\vec{v}$	moment cinétique volumique
$\vec{\alpha} = \vec{x}\wedge\vec{\mathrm{T}}$	moment des forces surfaciques
$\vec{\mathrm{A}} = \vec{x}\wedge\vec{f}$	moment des forces volumiques
Loi de bilan de l'énergie	
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\omega \rho\Big(e + \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\Big) \,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega} (q + \vec{\mathrm{T}}\cdot\vec{v}) \,\mathrm{d}s + \int_\omega (r + \vec{f}\cdot\vec{v}) \,\mathrm{d}v$$	
$\mathcal{A} = \rho(e + \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})$	énergie volumique totale énergie interne volumique ρe + énergie cinétique $\frac{1}{2}\rho\vec{v}\cdot\vec{v}$
$\alpha = q + \vec{\mathrm{T}}\cdot\vec{v}$	densité surfacique du taux de chaleur reçue q et puissance fournie par les forces surfaciques $\vec{\mathrm{T}}\cdot\vec{v}$
$\mathrm{A} = r + \vec{f}\cdot\vec{v}$	source volumique de chaleur r et puissance fournie par les forces volumiques $\vec{f}\cdot\vec{v}$

Tableau 4.1 – Quantités $\mathcal{A}$, α et A pour les lois de bilan de la mécanique des milieux continus

puisque si l'intégrale d'une quantité sur n'importe quel domaine est nulle, cette quantité est nulle partout [4].

Pour mettre la loi générale de bilan (4.1) sous la forme (4.2), il faut faire entrer la dérivée sous le signe « intégrale » et transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume. Le théorème 4.1 permet de faire passer la dérivée sous le signe intégrale. Il est important de remarquer que le domaine ω sur lequel on intègre dépend du temps puisqu'il suit un ensemble donné de particules. On ne peut donc pas simplement permuter les signes dérivée et intégrale.

Théorème 4.1 — théorème de transport. Si $\mathcal{A}$ est une quantité scalaire, nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\omega \mathcal{A} \,\mathrm{d}v = \int_\omega \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} \,\mathrm{d}v + \int_{\partial\omega} \mathcal{A}\vec{v}\cdot\vec{n} \,\mathrm{d}s \tag{4.4}$$

$$= \int_\omega \Big(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{A}\vec{v})\Big) \,\mathrm{d}v \tag{4.5}$$

$$= \int_\omega \Big(\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}\operatorname{div}\vec{v}\Big) \,\mathrm{d}v \tag{4.6}$$

Si $\vec{\mathcal{A}}$ est une quantité vectorielle, nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\omega \vec{\mathcal{A}}\,\mathrm{d}v = \int_\omega \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \int_{\partial\omega} \vec{\mathcal{A}}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}s \tag{4.7}$$

$$= \int_\omega \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\mathcal{A}}\otimes\vec{v})\right)\mathrm{d}v \tag{4.8}$$

$$= \int_\omega \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{A}}}{\mathrm{d}t} + \vec{\mathcal{A}}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\mathrm{d}v \tag{4.9}$$

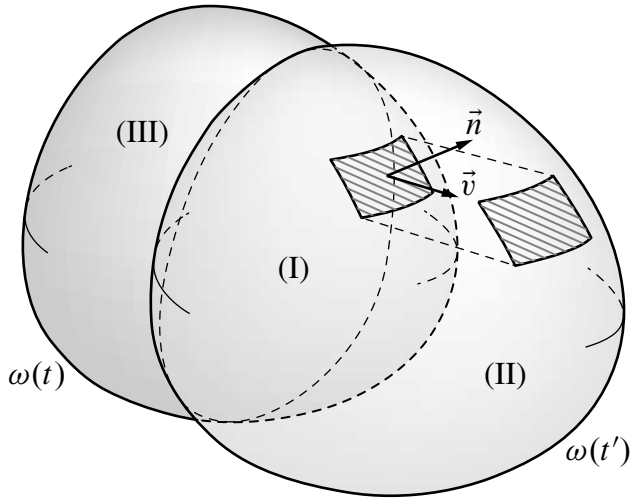


Figure 4.2 – Théorème de transport — (I) $\equiv \{\omega(t)\}\cap\{\omega'(t)\}$, (II) $\equiv \{\omega'(t)\}\backslash\{\omega(t)\}$ et (III) $\equiv \{\omega'(t)\}\backslash\{\omega(t)\}$

Pour démontrer ce théorème, écrivons la dérivée comme une limite illustrée figure 4.2 :

$$\lim_{t'\to t}\frac{1}{t'-t}\left(\int_{\omega(t')}\mathcal{A}(\vec{x},t')\,\mathrm{d}v - \int_{\omega(t)}\mathcal{A}(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v\right) \tag{4.10}$$

Trois zones apparaissent sur la figure 4.2. La limite (4.10) peut se réécrire :

$$\lim_{t'\to t}\int_{(\mathrm{I})}\frac{\mathcal{A}(\vec{x},t')-\mathcal{A}(\vec{x},t)}{t'-t}\,\mathrm{d}v + \lim_{t'\to t}\int_{(\mathrm{II})}\frac{\mathcal{A}(\vec{x},t')}{t'-t}\,\mathrm{d}v - \lim_{t'\to t}\int_{(\mathrm{III})}\frac{\mathcal{A}(\vec{x},t)}{t'-t}\,\mathrm{d}v \tag{4.11}$$

L'intégrant de (4.11) n'est autre que la dérivée eulérienne de $\mathcal{A}$:

$$\lim_{t'\to t}\frac{\mathcal{A}(\vec{x},t')-\mathcal{A}(\vec{x},t)}{t'-t}\,\mathrm{d}v = \frac{\partial\mathcal{A}(\vec{x},t)}{\partial t} \tag{4.12}$$

À la limite $t'\to t$, le domaine (I) coïncide avec ω. Le premier terme de (4.11) nous donne donc le premier terme du théorème :

$$\int_\omega \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}\,\mathrm{d}v \tag{4.13}$$

Il nous reste à obtenir le second terme du théorème. Un élément de volume $\mathrm{d}v$ de (II) compris entre les deux surfaces hachurées sur la figure 4.2, s'écrit au premier ordre :

$$\mathrm{d}v = \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s(t'-t) \tag{4.14}$$

De même, un élément de (III) s'écrit $\mathrm{d}v = -\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s(t'-t)$. Ainsi, la limite (4.10) est égale à :

$$\int_\omega \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \int_{\partial\omega} \mathcal{A}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_\omega \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{A}\vec{v})\,\mathrm{d}v \tag{4.15}$$

en utilisant la formule de Green-Ostrogradski (2.43). Finalement, pour démontrer la dernière partie du théorème, on utilise la relation entre dérivées lagrangienne et eulérienne (3.13) et la formule de la divergence d'un produit (2.83) :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{A}\vec{v}) = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \vec{\operatorname{grad}}\,\mathcal{A}\cdot\vec{v} + \mathcal{A}\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}\operatorname{div}\vec{v} \tag{4.16}$$

La version vectorielle du théorème de transport se démontre de manière similaire. Il nous reste maintenant à transformer l'intégrale $\int_{\partial\omega}\alpha\,\mathrm{d}s$ en une intégrale de volume. Pour cela nous disposons du théorème suivant :

Théorème 4.2 Le taux de densité surfacique $\alpha(\vec{x},t,\vec{n})$ apparaissant dans la loi de bilan est linéaire dans la normale $\vec{n}$. Il existe, donc un vecteur $\vec{a}$ tel que :

$$\alpha(\vec{x},t,\vec{n}) = \vec{a}(\vec{x},t)\cdot\vec{n} \tag{4.17}$$

On en déduit par la formule de Green-Ostrogradski, les égalités suivantes :

$$\int_{\partial\omega}\alpha\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_\omega \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}v \tag{4.18}$$

Si le taux de densité surfacique est un vecteur $\vec{\alpha}(\vec{x},t,\vec{n})$, ce vecteur est linéaire dans la normale $\vec{n}$. Il existe donc un tenseur du second ordre $\overline{\overline{a}}$ tel que :

$$\vec{\alpha}(\vec{x},t,\vec{n}) = \overline{\overline{a}}(\vec{x},t)\cdot\vec{n} \tag{4.19}$$

et on en déduit, par la formule de Green-Ostogradski :

$$\int_{\partial\omega}\vec{\alpha}\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\omega}\overline{\overline{a}}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_\omega \vec{\operatorname{div}}\,\overline{\overline{a}}\,\mathrm{d}v \tag{4.20}$$

Pour démontrer l'existence du vecteur $\vec{a}$ et du tenseur $\overline{\overline{a}}$, on considère le trièdre de la figure 4.3 dont trois faces sont orthogonales et orientées selon les axes. Les normales extérieures aux quatre faces du trièdre sont $-\vec{e}_1$, $-\vec{e}_2$, $-\vec{e}_3$ et $\vec{n}$. Le volume du trièdre est noté $\mathrm{d}v$ et les aires des surfaces sont notées $\mathrm{d}s_1$, $\mathrm{d}s_2$, $\mathrm{d}s_3$ et $\mathrm{d}s$.

En écrivant la loi de bilan sur ce trièdre nous obtenons [(4)] :

$$0 = \alpha(-\vec{e}_1)\,\mathrm{d}s_1 + \alpha(-\vec{e}_2)\,\mathrm{d}s_2 + \alpha(-\vec{e}_3)\,\mathrm{d}s_3 + \alpha(\vec{n})\,\mathrm{d}s + \mathrm{A}\,\mathrm{d}v \tag{4.21}$$

On a seulement écrit explicitement la dépendance de α dans la normale. La dépendance dans la position a peu d'importance puisque nous prendrons la limite pour un trièdre tendant homothétiquement vers un point. Nous avons les relations géométriques :

$$\mathrm{d}s_1 = \vec{e}_1\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s \quad ; \quad \mathrm{d}s_2 = \vec{e}_2\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s \quad ; \quad \mathrm{d}s_3 = \vec{e}_3\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s \tag{4.22}$$

(4) Le membre de gauche de la loi de bilan a été omis. Il se révèle en effet négligeable lorsque l'on fait tendre le trièdre vers un point. Il en sera de même pour le terme source A.

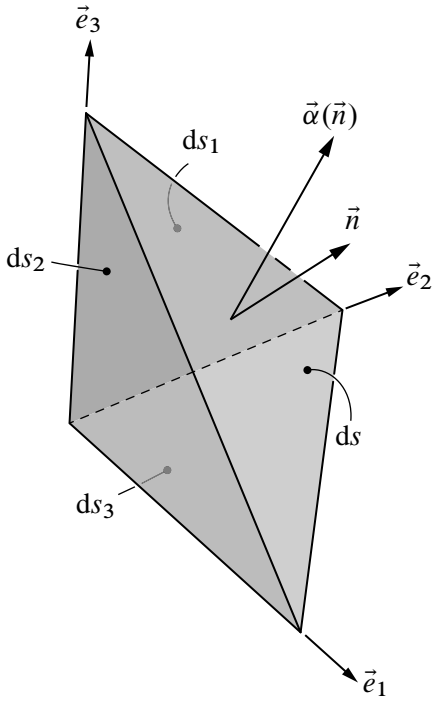


Figure 4.3 – Trièdre générique

et la relation (4.23) que nous justifierons plus tard :

$$\alpha(-\vec{n}) = -\alpha(\vec{n}) \tag{4.23}$$

donc :

$$0 = -\alpha(\vec{e}_1)\vec{e}_1 \cdot \vec{n} - \alpha(\vec{e}_2)\vec{e}_2 \cdot \vec{n} - \alpha(\vec{e}_3)\vec{e}_3 \cdot \vec{n} + \alpha(\vec{n}) + \mathrm{A}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \tag{4.24}$$

En effectuant maintenant le passage à la limite pour le trièdre tendant homothétiquement vers un point, on obtient :

$$\alpha(\vec{n}) = \big(\alpha(\vec{e}_1)\vec{e}_1 + \alpha(\vec{e}_2)\vec{e}_2 + \alpha(\vec{e}_3)\vec{e}_3\big) \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} \tag{4.25}$$

La démonstration pour une quantité $\vec{\alpha}$ vectorielle est similaire, on a :

$$0 = -\vec{\alpha}(\vec{e}_1)(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) - \vec{\alpha}(\vec{e}_2)(\vec{e}_2 \cdot \vec{n}) - \vec{\alpha}(\vec{e}_3)(\vec{e}_3 \cdot \vec{n}) + \vec{\alpha}(\vec{n}) + \vec{\mathrm{A}}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \tag{4.26}$$

et le passage à la limite donne :

$$\vec{\alpha}(\vec{n}) = \big(\vec{\alpha}(\vec{e}_1) \otimes \vec{e}_1 + \vec{\alpha}(\vec{e}_2) \otimes \vec{e}_2 + \vec{\alpha}(\vec{e}_3) \otimes \vec{e}_3\big) \cdot \vec{n} = \overline{\overline{a}} \cdot \vec{n} \tag{4.27}$$

Il nous reste à justifier la relation (4.23). Considérons la figure 4.4 illustrant un domaine ω constitué de deux sous-domaines ω_1 et ω_2 et écrivons la loi de bilan pour chacun de ces trois domaines :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\omega} \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega} \alpha\,\mathrm{d}s + \int_{\omega} \mathrm{A}\,\mathrm{d}v \tag{4.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\omega_1} \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega_1} \alpha\,\mathrm{d}s + \int_{\partial\Gamma} \alpha(\vec{n})\,\mathrm{d}s + \int_{\omega_1} \mathrm{A}\,\mathrm{d}v \tag{4.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\omega_2} \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega_2} \alpha\,\mathrm{d}s + \int_{\partial\Gamma} \alpha(-\vec{n})\,\mathrm{d}s + \int_{\omega_2} \mathrm{A}\,\mathrm{d}v \tag{4.30}$$

En soustrayant (4.29) et (4.30) de (4.28), il reste :

$$\int_{\partial\Gamma} \big(\alpha(\vec{n}) + \alpha(-\vec{n})\big)\,\mathrm{d}s = 0 \tag{4.31}$$

Cette relation devant être vraie pour tout domaine ω et donc pour toute surface Γ, il vient (4.23).

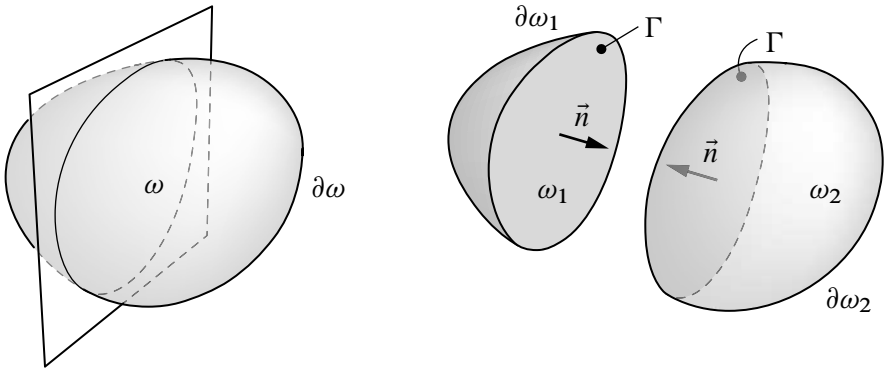


Figure 4.4 – Loi de bilan : domaine et sous-domaines

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la loi de bilan générique sous forme locale. En effet, en utilisant les théorèmes 4.1 et 4.2, la forme globale :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\omega} \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega} \alpha\,\mathrm{d}s + \int_{\omega} \mathrm{A}\,\mathrm{d}v \tag{4.32}$$

devient :

$$\int_{\omega} \Big(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathcal{A}\vec{v})\Big)\,\mathrm{d}v = \int_{\omega} \mathrm{div}\,\vec{a}\,\mathrm{d}v + \int_{\omega} \mathrm{A}\,\mathrm{d}v \tag{4.33}$$

d'où on déduit la forme locale :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathcal{A}\vec{v}) = \mathrm{div}\,\vec{a} + \mathrm{A} \tag{4.34}$$

Le tableau 4.2 reprend les formes globales et locales des quatre lois de bilan ainsi que la signification des quantités $\vec{a}$ et $\overline{\overline{a}}$.

4.3 Conséquences des lois de bilan

4.3.1 Conséquences de la conservation de la masse

La loi de conservation de la masse s'écrit sous forme locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \tag{4.35}$$

Cette équation est appelée *l'équation de continuité*. Elle est écrite en variables eulériennes. Par exemple, si l'on étudie l'écoulement sanguin dans un tronçon de 10 cm d'une artère,

Loi de conservation de la masse	
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\omega \rho\,\mathrm{d}v = 0$
forme locale	$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0$
Loi de bilan de la quantité de mouvement	
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\omega \rho\vec{v}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega}\vec{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}s + \int_\omega \vec{f}\,\mathrm{d}v$
$\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\sigma}}$	tenseur des contraintes
forme locale	$\dfrac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \vec{\mathrm{div}}(\rho\vec{v}\otimes\vec{v}) = \vec{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{\partial\rho v_i}{\partial t} + (\rho v_i v_j)_{,j} = \sigma_{ij,j} + f_i$
Loi de bilan du moment cinétique	
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\omega \vec{x}\wedge\rho\vec{v}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega}\vec{x}\wedge\vec{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}s + \int_\omega \vec{x}\wedge\vec{f}\,\mathrm{d}v$
$\overline{\overline{a}} = \vec{x}\wedge\overline{\overline{\sigma}}$	
forme locale	$\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{x}\wedge\rho\vec{v}) + \vec{\mathrm{div}}((\vec{x}\wedge\rho\vec{v})\otimes\vec{v}) = \vec{\mathrm{div}}(\vec{x}\wedge\overline{\overline{\sigma}}) + \vec{x}\wedge\vec{f}$ $\dfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k) + (\varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k v_l)_{,l} = (\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl})_{,l} + \varepsilon_{ijk}x_j f_k$
Loi de bilan de l'énergie	
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\omega \rho\Big(e + \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\Big)\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\omega}(q + \vec{\mathrm{T}}\cdot\vec{v})\,\mathrm{d}s + \int_\omega (r + \vec{f}\cdot\vec{v})\,\mathrm{d}v$
$\vec{a} = -\vec{q} + \vec{v}\cdot\overline{\overline{\sigma}}$	$\vec{q}$ est le vecteur courant de chaleur
forme locale	$\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho(e + \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})) + \mathrm{div}(\rho(e + \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})\vec{v}) = -\vec{\mathrm{div}}\,\vec{q} + \mathrm{div}(\vec{v}\cdot\overline{\overline{\sigma}}) + r + \vec{f}\cdot\vec{v}$ $\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho(e + \frac{1}{2}v_i v_i)) + (\rho(e + \frac{1}{2}v_j v_j)v_i)_{,i} = -q_{i,i} + \mathrm{div}(v_i\sigma_{ij})_{,j} + r + f_i v_i$

Tableau 4.2 – Formes globales et locales des lois de bilan

cette équation doit être vérifiée en chaque point de l'artère. Il existe une forme lagrangienne de l'équation de continuité qui s'écrit :

$$\rho(\vec{\mathrm{X}},t)\mathrm{J}(\vec{\mathrm{X}},t) = \rho_0(\vec{\mathrm{X}},t) \tag{4.36}$$

où ρ_0 est la densité initiale de la particule $\vec{\mathrm{X}}$. Pour rappel J est le jacobien de la transformation (3.73) :

$$\mathrm{J}(\vec{\mathrm{X}},t) = \det\overline{\overline{\mathrm{F}}}(\vec{\mathrm{X}},t) \tag{4.37}$$

Il donne le changement de volume de la particule $\vec{\mathrm{X}}$. L'équation (4.36) nous dit simplement que la densité est inversement proportionnelle au changement de volume. Pour reprendre l'exemple de l'écoulement sanguin, l'équation lagrangienne (4.36) doit être vérifiée pour chaque goutte de sang que l'on suit dans son écoulement alors que l'équation eulérienne (4.35) doit être vérifié en chaque point fixe de l'écoulement. Il est clair que pour l'étude de l'écoulement dans un tronçon donné, l'équation eulérienne est plus simple à utiliser. Par contre, pour modéliser un problème de crash de voiture, on préférera l'équation lagrangienne car on connaît le domaine initial V mais pas forcément le domaine final v qui est une inconnue.

Théorème 4.3 Soit $\mathcal{A}$ une quantité quelconque (scalaire, vectorielle ou tensorielle) et ω un domaine matériel quelconque, la conservation de la masse implique l'égalité suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\omega}\rho\mathcal{A}\,\mathrm{d}\omega = \int_{\omega}\rho\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\omega \tag{4.38}$$

Pour démontrer ce théorème, servons-nous successivement :
— de la loi de conservation de la masse ;
— du théorème de transport 4.1 en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\rho\mathcal{A}$;
— de l'équation locale de la conservation de la masse (4.35) ;
— et enfin de la relation entre dérivées lagrangienne et eulérienne.
Il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\omega}\rho\mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \int_{\omega}\Big(\frac{\partial(\rho\mathcal{A})}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathcal{A}\vec{v})\Big)\,\mathrm{d}v \tag{4.39}$$

$$= \int_{\omega}\rho\Big(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + \vec{\mathrm{grad}}\,\mathcal{A}\cdot\vec{v}\Big) + \mathcal{A}\Big(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v})\Big)\,\mathrm{d}v \tag{4.40}$$

$$= \int_{\omega}\rho\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}v \tag{4.41}$$

La démonstration pour une quantité vectorielle ou tensorielle est similaire.

4.3.2 Conséquences du bilan de quantité de mouvement

Le bilan de la quantité de mouvement s'écrit sous forme locale :

$$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t} + (\rho v_i v_j)_{,j} = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{4.42}$$

Ces équations sont appelées *les équations du mouvement* ; elles sont écrites en variables eulériennes [5]. Dans le cas où le système est en équilibre (absence de mouvement), elles se réduisent à :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{4.43}$$

dites *équations d'équilibre*. En écrivant au premier membre de (4.42) :

$$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t}v_i \quad\leftrightarrow\quad (\rho v_i v_j)_{,j} = v_i(\rho v_j)_{,j} + \rho v_j v_{i,j} \tag{4.44}$$

et en tenant compte de l'équation de continuité (4.35), on obtient :

$$\rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}v_j\Big) = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{4.45}$$

Le premier membre de (4.45) n'est autre que $\rho a_i = \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$ où $\vec{a}$ désigne l'accélération de la particule $\vec{\mathrm{X}}$, voir (3.17). Si bien que l'on peut écrire aussi :

$$\rho a_i = \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{4.46}$$

Les équations (4.46) représentent une généralisation de l'équation fondamentale de la dynamique du point $\vec{\mathrm{F}} = m\vec{a}$. Cette analogie sera suivie en détail au chapitre 5.

(5) La forme lagrangienne de cette équation est plus complexe et ne sera pas introduite dans ce cours.

4.3.3 Conséquences du bilan du moment cinétique

Exploitons maintenant les équations de bilan du moment cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k) + (\varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k v_l)_{,l} = (\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl})_{,l} + \varepsilon_{ijk}x_j f_k \tag{4.47}$$

Sachant que $\frac{\partial x_j}{\partial t} = 0$, $x_{j,l} = \delta_{jl}$ et $\varepsilon_{ilk}v_k v_l = 0$, on a :

$$\varepsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \varepsilon_{ijk}x_j(\rho v_k v_l)_{,l} = \varepsilon_{ijk}x_j(\sigma_{kl,l}) + \varepsilon_{ilk}\sigma_{kl} + \varepsilon_{ijk}x_j f_k \tag{4.48}$$

Du fait de l'équation du mouvement (4.42), il reste $\varepsilon_{ilk}\sigma_{kl} = 0$. En développant cette expression, on obtient trois relations :

$$\varepsilon_{123}\sigma_{32} + \varepsilon_{132}\sigma_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{32} = \sigma_{23} \tag{4.49}$$
$$\varepsilon_{231}\sigma_{13} + \varepsilon_{213}\sigma_{31} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \tag{4.50}$$
$$\varepsilon_{312}\sigma_{21} + \varepsilon_{321}\sigma_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} \tag{4.51}$$

Ces relations montrent que :

$$\forall\ i, j \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{4.52}$$

La bilan du moment cinétique implique donc la symétrie du tenseur des contraintes.

4.3.4 Conséquences du bilan de l'énergie

Le bilan de l'énergie donne sous forme locale

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho(e + \frac{1}{2}v_i v_i)\Big) + \Big(\rho(e + \frac{1}{2}v_j v_j)v_i\Big)_{,i} = -q_{i,i} + \mathrm{div}(v_i\sigma_{ij})_{,j} + r + f_i v_i \tag{4.53}$$

Cette équation peut être grandement simplifiée en la combinant avec le bilan de la quantité de mouvement (4.42). Il reste :

$$\rho\Big(\frac{\partial e}{\partial t} + e_{,i}v_i\Big) = -q_{i,i} + r + \sigma_{ij}v_{i,j} \tag{4.54}$$

Cette équation a une interprétation simple : la variation de l'énergie interne est due à la puissance des efforts intérieurs ($\sigma_{ij}v_{i,j}$) et à un apport de chaleur (volumique r et par conduction $q_{i,i}$).

5

Tenseur des contraintes

Le concept de contrainte joue un rôle central en mécanique. Selon le type d'ouvrage, ce concept est introduit de trois manières différentes :

— introduction par le biais de la loi de bilan de la quantité de mouvement tel que cela a été fait au chapitre 4. Cette présentation a le mérite d'être rapide et d'être reliée aux lois universelles de la physique. Par contre, elle occulte la signification mécanique des contraintes ;

— introduction par une extension des concepts de la mécanique des solides indéformables ;

— introduction par la puissance intérieure et le principe des travaux virtuels : cette approche est intéressante car elle met en évidence la relation entre effort et mouvement.

Il est difficile de décider, parmi ces différentes présentations celle qui est la plus pertinente. Nous avons donc décidé de les présenter toutes dans ce cours. Ces différents éclairages devraient permettre à chacun selon son baguage de trouver la présentation initiale qui lui parle le plus et ensuite de cerner les autres présentations.

5.1 Introduction du tenseur des contraintes par extension de la mécanique des solides indéformables

Le mouvement d'un solide indéformable est complètement déterminé dès que l'on connaît à chaque instant deux vecteurs : la force résultante et le moment résultant appliqués sur le solide. En effet, la position du solide est définie par deux vecteurs également — la position de son centre de gravité et la rotation autour de ce centre de gravité — et le principe fondamental de la dynamique permet de relier la force résultante au déplacement du centre de gravité et le moment résultant à la rotation autour du centre de gravité. Dans le cas d'un milieu déformable, deux choses importantes vont changer :

— la position du milieu n'est plus définie par deux vecteurs mais par une infinité de vecteurs (on parle alors de champ de vecteurs) : il faut connaître à tout instant la position de *chaque* point matériel ;

— la position n'étant plus définie par deux vecteurs mais par une infinité de vecteurs, les deux équations que donnent le principe fondamental pour les solides indéformables ne vont plus suffire. En effet, deux équations vectorielles ne peuvent prédire le mouvement d'une infinité de particules ! Il faut autant d'équations du mouvement qu'il y a d'inconnues soit une infinité : on parle alors d'équations aux dérivées partielles qui représentent les équations du mouvement de *chaque* particule de matière.

Le premier point est clair et a déjà été détaillé au chapitre 3 sur la cinématique d'un milieu continu. Concernant le second point, nous allons isoler par la pensée un petit élément de matière quelconque dv et écrire le principe fondamental. Quels sont les efforts qui agissent sur ce petit élément de matière ? Il y a des efforts volumiques à longue portée comme la gravité. Si on note $\vec{f}$ la force par unité de volume (par exemple $\vec{f} = \rho\vec{g}$), la force totale

agissant sur $\mathrm{d}v$ est $\vec{f}\,\mathrm{d}v$. Ensuite, il y a des forces de surface appliquées sur la surface extérieure de $\mathrm{d}v$. Pour caractériser ces efforts, il faut considérer deux cas : soit le domaine élémentaire $\mathrm{d}v$ est complètement à l'intérieur du milieu, soit il est en surface du milieu. Dans le premier cas, les efforts de surface viennent des particules voisines. Par exemple, lorsqu'un pneu est comprimé sur la route, une particule de caoutchouc à l'intérieur du pneu est comprimée par ses voisines et subit donc une force ; par le principe de l'action-réaction la particule agit également sur ses voisines.

5.1.1 Volume élémentaire au sein du milieu

Prenons un domaine élémentaire $\mathrm{d}v$ en forme de cube aligné selon les axes, figure 5.1. Nous avons noté $\vec{\mathrm{F}}_1$ la force appliquée à la face de normale extérieure $\vec{e}_1$ et par $\vec{\mathrm{F}}'_1$, la force appliquée à la face de normale extérieure $-\vec{e}_1$. De même pour les indices 2 et 3.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique [5]. Ce principe impose l'égalité entre le torseur dynamique et le torseur des efforts extérieurs. Dans un premier temps, nous écrirons l'équation du mouvement en translation puis en rotation. La somme des forces appliquées au volume élémentaire doit être égale à la masse de ce volume fois son accélération. La masse est $\rho\,\mathrm{d}v$ et $\vec{a}$ est l'accélération du centre de gravité du cube. Il vient :

$$\vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}'_1 + \vec{\mathrm{F}}_2 + \vec{\mathrm{F}}'_2 + \vec{\mathrm{F}}_3 + \vec{\mathrm{F}}'_3 + \vec{f}\,\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}v\vec{a} \tag{5.1}$$

La force $\vec{\mathrm{F}}'_1$ se distingue de la force $\vec{\mathrm{F}}_1$ par le fait qu'elle agit sur une facette d'orientation

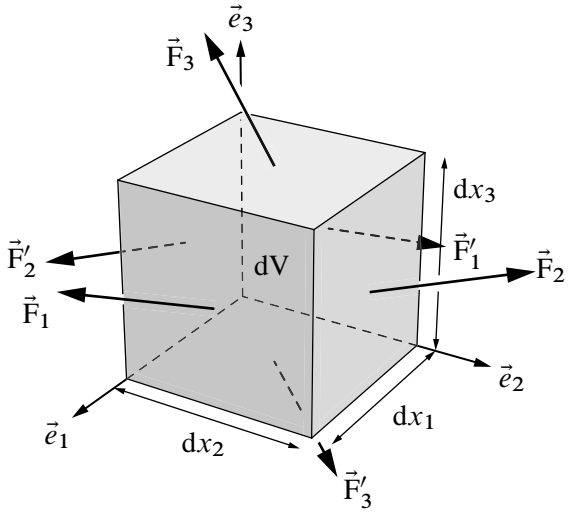


Figure 5.1 – Efforts élémentaires

opposée ($-\vec{e}_1$ et non $\vec{e}_1$) et que de plus cette facette est en x_1 et non $x_1 + \mathrm{d}x_1$. Pour bien mettre en évidence la dépendance des forces à la position et à l'orientation de la facette, nous écrirons :

$$\vec{\mathrm{F}}_1 = \vec{\mathrm{F}}(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) \tag{5.2a}$$
$$\vec{\mathrm{F}}'_1 = \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_1) \tag{5.2b}$$
$$\vec{\mathrm{F}}_2 = \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, x_3, \vec{e}_2) \tag{5.2c}$$
$$\vec{\mathrm{F}}'_2 = \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_2) \tag{5.2d}$$
$$\vec{\mathrm{F}}_3 = \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3 + \mathrm{d}x_3, \vec{e}_3) \tag{5.2e}$$
$$\vec{\mathrm{F}}'_3 = \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_3) \tag{5.2f}$$

Par action-réaction, nous pouvons écrire :

$$\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_1) = -\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) \tag{5.3}$$

En effet la force, ressentie par le volume $\mathrm{d}v$ à travers la facette de normale $-\vec{e}_1$ est l'opposée de la force qu'applique $\mathrm{d}v$ sur son voisin à travers la facette de normale $\vec{e}_1$. Cette action-réaction est illustrée sur la figure 5.2. Nous pouvons donc réécrire l'équilibre (5.1) sous la

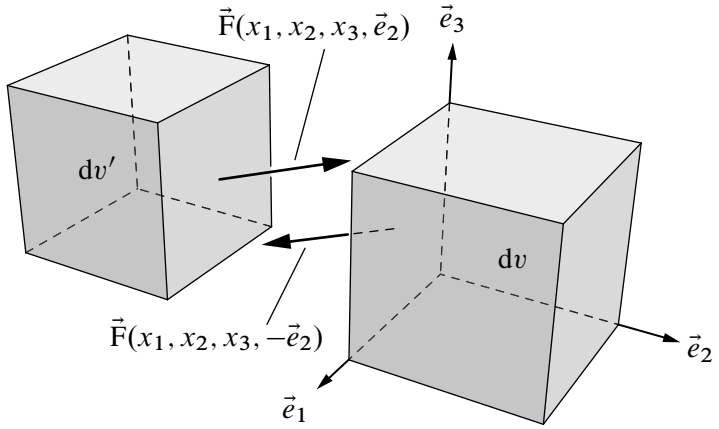


Figure 5.2 – Équilibre d'action-réaction : $\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_2) = -\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)$

forme :

$$\begin{aligned} &\vec{\mathrm{F}}(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) - \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) \\ &\quad + \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, x_3, \vec{e}_2) - \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2) \\ &\qquad \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3 + \mathrm{d}x_3, \vec{e}_3) - \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)\, \vec{f}\, \mathrm{d}v = \rho\, \mathrm{d}v \vec{a} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Il nous reste à faire tendre le volume élémentaire $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3$ vers 0. En divisant (5.4) par $\mathrm{d}v$ et en prenant la limite pour $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3 \to 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)}{\partial x_3} + \vec{f} = \rho \vec{a} \tag{5.5}$$

Nous nous sommes servi de la définition de la dérivée :

$$\lim_{\mathrm{d}x_1 \to 0} \frac{\vec{\mathrm{F}}(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) - \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\partial \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)}{\partial x_1} \tag{5.6a}$$

$$\lim_{\mathrm{d}x_2 \to 0} \frac{\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, x_3, \vec{e}_2) - \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)}{\mathrm{d}x_2} = \frac{\partial \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)}{\partial x_2} \tag{5.6b}$$

$$\lim_{\mathrm{d}x_3 \to 0} \frac{\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3 + \mathrm{d}x_3, \vec{e}_3) - \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)}{\mathrm{d}x_3} = \frac{\partial \vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)}{\partial x_3} \tag{5.6c}$$

et nous avons introduit la notation :

$$\lim_{\mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3 \to 0} \frac{\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)}{\mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3} = \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) \tag{5.7a}$$

$$\lim_{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_3 \to 0} \frac{\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)}{\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_3} = \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2) \tag{5.7b}$$

$$\lim_{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \to 0} \frac{\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)}{\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2} = \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3) \tag{5.7c}$$

Le vecteur $\vec{\mathrm{T}}$ est appelé vecteur contrainte. c'est la limite de la force divisée par la surface d'application lorsque cette surface tend vers zéro. L'unité de $\vec{\mathrm{T}}$ est le Newton par mètre carré [$\mathrm{N\,m^{-2}}$] aussi appelé le Pascal [Pa]. Écrivons maintenant la seconde partie du principe fondamental de la dynamique à savoir l'équation du mouvement en rotation. Le moment résultant appliqué sur le volume élémentaire doit être égal au moment d'inertie fois l'accélération angulaire. Évaluons l'ordre de grandeur de ces deux termes. Si on note $\mathrm{d}x$ la dimension caractéristique du cube, alors :

— le moment des forces surfaciques est d'ordre $\mathcal{O}(\mathrm{d}x^3)$ car le bras de levier est en $\mathcal{O}(\mathrm{d}x)$ et la force est proportionnelle à la surface donc en $\mathcal{O}(\mathrm{d}x^2)$;
— le moment des forces de volume est en $\mathcal{O}(\mathrm{d}x^4)$ car le bras de levier est en $\mathcal{O}(\mathrm{d}x)$ et la force de volume est proportionnelle au volume donc en $\mathcal{O}(\mathrm{d}x^3)$;
— enfin, le moment d'inertie du volume élémentaire est en $\mathcal{O}(\mathrm{d}x^5)$.

Lorsque l'on fait tendre la taille du volume élémentaire vers zéro, le seul terme qui importe est donc le moment des forces surfaciques. Imposons donc que le moment résultant des forces surfaciques soit nul :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x_1}{2}\vec{e}_1 \wedge \left(\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\vec{\mathrm{T}}(x_1+\mathrm{d}x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)\right) - \frac{\mathrm{d}x_1}{2}\vec{e}_1 \wedge \left(\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_1)\right) + \\
&\frac{\mathrm{d}x_2}{2}\vec{e}_2 \wedge \left(\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3\vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2+\mathrm{d}x_2, x_3, \vec{e}_2)\right) - \frac{\mathrm{d}x_2}{2}\vec{e}_2 \wedge \left(\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3\vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_2)\right) + \\
&\frac{\mathrm{d}x_3}{2}\vec{e}_3 \wedge \left(\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3+\mathrm{d}x_3, \vec{e}_3)\right) - \frac{\mathrm{d}x_3}{2}\vec{e}_3 \wedge \left(\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_3)\right) = \vec{0}
\end{aligned}$$

d'où on tire, au premier ordre et en prenant en compte (5.3) :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) + \vec{e}_2 \wedge \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2) + \vec{e}_3 \wedge \vec{\mathrm{T}}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3) = \vec{0} \qquad (5.8)$$

5.1.2 Volume élémentaire en surface du milieu

Étudions maintenant le cas d'un volume élémentaire situé en surface du milieu. Prenons comme volume élémentaire un trièdre dont la face inclinée correspond à une partie de la surface extérieure du milieu. Sur cette facette agit une force $\vec{\mathrm{F}}$ et sur les trois autres facettes des forces $\vec{\mathrm{F}}'_1$, $\vec{\mathrm{F}}'_2$ et $\vec{\mathrm{F}}'_3$ comme illustré sur la figure 5.3. L'équation de mouvement en translation s'écrit :

$$\vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{F}}'_1 + \vec{\mathrm{F}}'_2 + \vec{\mathrm{F}}'_3 + \vec{f}\,\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}v\vec{a} \qquad (5.9)$$

En reprenant les arguments et notations utilisés dans le cas du cube, nous pouvons écrire :

$$\vec{\mathrm{T}}(\vec{n})\,\mathrm{d}s - \vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_1)\,\mathrm{d}s_1 - \vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_2)\,\mathrm{d}s_2 - \vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_3)\,\mathrm{d}s_3 + \vec{f}\,\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}v\vec{a} \qquad (5.10)$$

où $\mathrm{d}s_i$ est l'aire de la surface élémentaire de normale $\vec{e}_i$ et $\mathrm{d}s$ l'aire de la facette inclinée. Il reste à passer à la limite pour $\mathrm{d}v \to 0$. On remarque que les termes ayant le volume élémentaire $\mathrm{d}v$ comme facteur sont d'un ordre supérieur aux termes ayant une aire élémentaire comme facteur. De plus, on a :

$$\mathrm{d}s_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s \quad ; \quad \mathrm{d}s_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s \quad ; \quad \mathrm{d}s_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s \qquad (5.11)$$

À limite du trièdre tendant homothétiquement vers un point, la relation (5.10) devient :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathrm{T}}(\vec{n}) &= \vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_1)(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) + \vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_2)(\vec{e}_2 \cdot \vec{n}) + \vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_3)(\vec{e}_3 \cdot \vec{n}) \\
&= \left(\vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_1) \otimes \vec{e}_1 + \vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_2) \otimes \vec{e}_2 + \vec{\mathrm{T}}(\vec{e}_3) \otimes \vec{e}_3\right) \cdot \vec{n}
\end{aligned} \qquad (5.12)$$

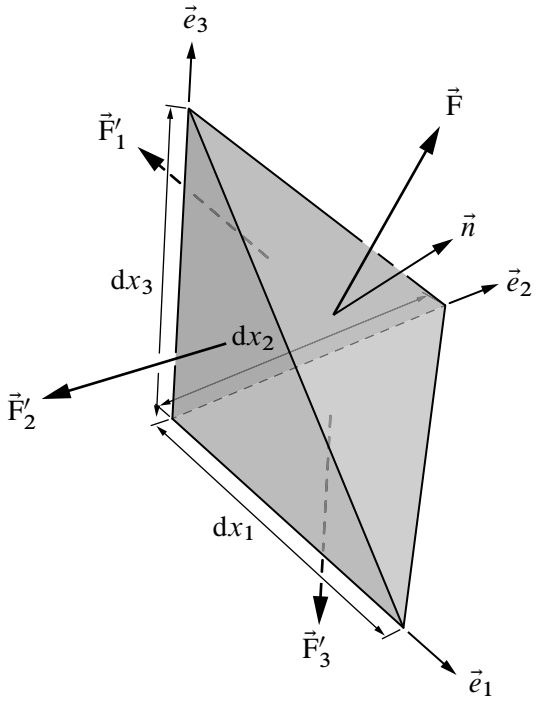


Figure 5.3 – Surface du milieu

La relation (5.12) doit être comprise comme suit : le vecteur contrainte sur une facette de normale $\vec{n}$ en un point dépend linéairement de l'orientation de cette normale. Les vecteurs contraintes $\vec{T}(\vec{e}_1)$, $\vec{T}(\vec{e}_2)$ et $\vec{T}(\vec{e}_3)$ peuvent être décomposés selon les vecteurs de base. On notera σ_{ij} la composante i du vecteur traction agissant sur la facette de normale $\vec{e}_j$:

$$\vec{T}(\vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3 \tag{5.13a}$$

$$\vec{T}(\vec{e}_2) = \sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3 \tag{5.13b}$$

$$\vec{T}(\vec{e}_3) = \sigma_{13}\vec{e}_1 + \sigma_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \tag{5.13c}$$

En introduisant ces décompositions dans (5.12), il vient :

$$\begin{aligned}\vec{T}(\vec{n}) = (&\sigma_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 \\ &+ \sigma_{21}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 \\ &+ \sigma_{31}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3) \cdot \vec{n}\end{aligned} \tag{5.14}$$

soit, sous formes intrinsèque et indicielle :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \quad \leftrightarrow \quad T_i = \sigma_{ij} n_j \tag{5.15}$$

Le tenseur du second ordre $\overline{\overline{\sigma}}$ est appelé tenseur des contraintes. Il regroupe les composantes des trois vecteurs contraintes agissant sur les facettes normales aux trois vecteurs de base. La relation (5.15) indique que le vecteur contrainte agissant sur une facette d'orientation quelconque est connu si l'on connaît le tenseur contrainte en ce point et l'orientation de la facette. De plus la dépendance dans l'orientation est linéaire. Insistons sur la signification mécanique des composantes du tenseur des contraintes. La composante σ_{ij} est la force par unité de surface agissant sur une la facette de normale $\vec{e}_j$ dans la direction i. La figure 5.4

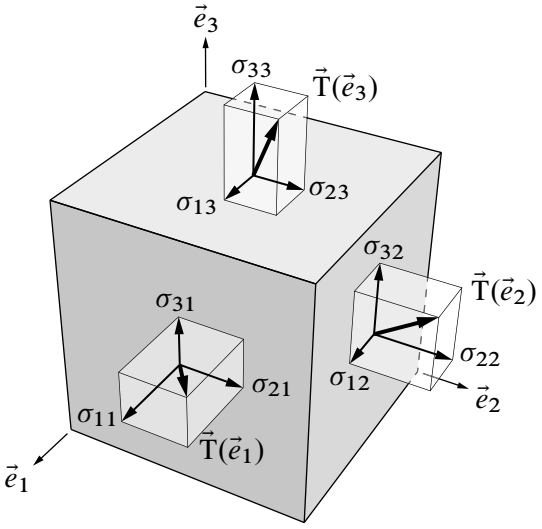


Figure 5.4 – Composantes du tenseur des contraintes

illustre cette idée. Bien sûr, le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ est en général différent en chaque point $\vec{x}$ du milieu continu. Si l'on combine l'équilibre en rotation (5.8) et l'existence du tenseur des contraintes (5.13), on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \wedge (\sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3) \\ + \vec{e}_2 \wedge (\sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3) \\ + \vec{e}_3 \wedge (\sigma_{13}\vec{e}_1 + \sigma_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3) = \vec{0}\end{aligned} \tag{5.16}$$

d'où on déduit :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad ; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad ; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \tag{5.17}$$

Autrement dit, le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}^{\top} \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{5.18}$$

Cette propriété de symétrie des contraintes est aussi appelée *réciprocité des contraintes de cisaillement*. Elle est illustrée sur la figure 5.5 qui représente deux facettes orthogonales au même point $\vec{x}$. La composante 1 du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale $\vec{e}_2$ est égale à la composante 2 du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale $\vec{e}_1$. Finalement, l'équation du mouvement (5.21) s'écrit en terme des contraintes :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho a_1 \tag{5.19a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = \rho a_2 \tag{5.19b}$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho a_3 \tag{5.19c}$$

Sous formes intrinsèque et indicielle, les relations deviennent :

$$\vec{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \rho\vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho a_i \tag{5.20}$$

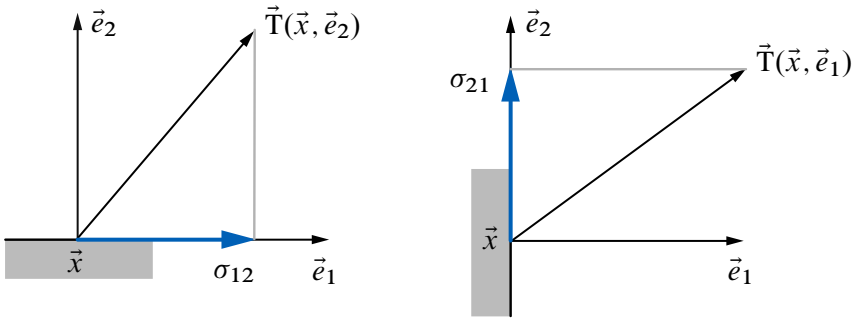


Figure 5.5 – Illustration de l'égalité $\sigma_{12} = \sigma_{21}$

5.2 Introduction du tenseur des contraintes par le principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles est une formulation intégrale équivalente aux équations locales (5.20) et (5.15). Il intervient également en mécanique des solides indéformables [5] où il est équivalent au principe fondamental de la dynamique. Ce principe s'énonce comme suit : la puissance virtuelle des quantités d'accélération $\delta\mathcal{P}^{\mathrm{a}}$ est égale à la différence des puissances virtuelles des efforts extérieurs $\delta\mathcal{P}^{\mathrm{e}}$ et intérieurs $\delta\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ quelque soit le champ de vitesse virtuelle $\delta\vec{v}$:

$$\delta\mathcal{P}^{\mathrm{a}} = \delta\mathcal{P}^{\mathrm{e}} - \delta\mathcal{P}^{\mathrm{i}}, \quad \forall\delta\vec{v} \tag{5.21}$$

Ce principe reste le même en mécanique des milieux continus mais la définition des différentes puissances doit être revue. Certains ouvrages [5, 7] écrivent le principe des puissance virtuelles comme $\delta\mathcal{P}^{\mathrm{a}} = \delta\mathcal{P}^{\mathrm{e}} + \delta\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ car une convention de signe opposée est choisie dans la définition de la puissance intérieure. Nous avons opté pour la forme (5.21), très prisée chez les anglo-saxons, car elle permet d'interpréter plus facilement les transferts de puissance, comme nous le verrons en section 5.2.2 et au chapitre 8 sur la thermodynamique et les lois de comportement.

5.2.1 Définition des puissances virtuelles

La puissance virtuelle des quantités d'accélération s'écrit :

$$\delta\mathcal{P}^{\mathrm{a}} = \int_v \rho\vec{a}\cdot\delta\vec{v}\,\mathrm{d}v \tag{5.22}$$

où $\delta\vec{v}$ est un champ de vitesse virtuelle c'est-à-dire un champ de vitesse quelconque à l'instant considéré. La puissance virtuelle des efforts extérieurs fournie via le volume ou via la surface extérieure :

$$\delta\mathcal{P}^{\mathrm{e}} = \int_v \vec{f}\cdot\delta\vec{v}\,\mathrm{d}v + \int_{\partial v} \vec{\mathrm{T}}\cdot\delta\vec{v}\,\mathrm{d}s \tag{5.23}$$

La puissance virtuelle intérieure s'écrit :

$$\delta\mathcal{P}^{\mathrm{i}} = \int_v \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\mathrm{D}}}(\delta\vec{v})\,\mathrm{d}v \tag{5.24}$$

où le taux de déformation virtuelle est donné par (voir section 3.8) :

$$\overline{\overline{\mathrm{D}}}(\delta\vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\delta\vec{v} + \left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\delta\vec{v}\right)^{\top}\right) \tag{5.25}$$

C'est sur le signe devant l'intégrale (5.24) que les ouvrages divergent. Ici, nous avons choisi le signe $+$. L'expression de la puissance intérieure (5.24) permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.1 Le principe des puissances virtuelles :

$$\delta\mathcal{P}^{\mathrm{a}} = \delta\mathcal{P}^{\mathrm{e}} - \delta\mathcal{P}^{\mathrm{i}}, \quad \forall\delta\vec{v} \tag{5.26}$$

est équivalent aux équations locales (5.20) et (5.15) :

$$\vec{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \rho\vec{a} \quad \text{sur } v \tag{5.27}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}\cdot\vec{n} = \vec{\mathrm{T}} \quad \text{sur } \partial v \tag{5.28}$$

Pour démontrer ce théorème, transformons l'expression de la puissance virtuelle intérieure :

$$\delta\mathcal{P}^{\mathrm{i}} = \int_v \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\mathrm{D}}}(\delta\vec{v})\,\mathrm{d}v = \int_v \sigma_{ij}\frac{1}{2}(\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i})\,\mathrm{d}v = \int_v \sigma_{ij}\delta v_{i,j}\,\mathrm{d}v \tag{5.29}$$

$$= \int_v (\sigma_{ij}\delta v_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}\delta v_i\,\mathrm{d}v \tag{5.30}$$

$$= \int_{\partial v} \sigma_{ij}n_j\delta v_i\,\mathrm{d}s - \int_v \sigma_{ij,j}\delta v_i\,\mathrm{d}v \tag{5.31}$$

$$= \int_{\partial v} (\overline{\overline{\sigma}}\cdot\vec{n})\cdot\delta\vec{v}\,\mathrm{d}s - \int_v \vec{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}}\cdot\delta\vec{v}\,\mathrm{d}v \tag{5.32}$$

Pour obtenir (5.29), nous avons utilisé la symétrie du tenseur des contraintes et pour (5.31) le théorème de Gauss-Ostrogradski (2.44). Le principe des puissances virtuelles s'écrit maintenant :

$$\int_v \rho\vec{a}\cdot\delta\vec{v}\,\mathrm{d}v = \int_v \vec{f}\cdot\delta\vec{v}\,\mathrm{d}v + \int_{\partial v} (\vec{\mathrm{T}} - \overline{\overline{\sigma}}\cdot\vec{n})\cdot\delta\vec{v}\,\mathrm{d}s + \int_v \vec{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}}\cdot\delta\vec{u}\,\mathrm{d}v \quad \forall\delta\vec{v} \tag{5.33}$$

En jouant sur le caractère arbitraire de la vitesse virtuelle, on obtient (5.28), ce qui conclut la démonstration du théorème.

5.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique s'obtient en appliquant le principe des puissances virtuelles au mouvement réel c'est-à-dire en posant $\delta\vec{v} = \vec{v}$.

Théorème 5.2 La variation de l'énergie cinétique du système est égale à la somme des puissances intérieures et extérieures du système :

$$\frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}^{\mathrm{e}} - \mathcal{P}^{\mathrm{i}} = \int_v \vec{f}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}v + \int_{\partial v} \vec{\mathrm{T}}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}s - \int_v \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\mathrm{D}}}(\vec{v})\,\mathrm{d}v \tag{5.34}$$

où l'énergie cinétique est donnée par :

$$\mathrm{K} = \int_v \frac{1}{2}\rho\vec{v}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}v \tag{5.35}$$

Le seul point à justifier pour la démonstration est le passage de la puissance des quantités d'accélération à la dérivée de l'énergie cinétique, à savoir l'égalité :

$$\int_v \rho\vec{a}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \frac{1}{2}\rho\vec{v}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}v \tag{5.36}$$

Cette égalité provient du théorème 4.3 et de :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\vec{a} \tag{5.37}$$

Si l'on écrit le théorème de l'énergie cinétique sous la forme :

$$\mathcal{P}^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}^{\mathrm{i}} \tag{5.38}$$

on obtient une interprétation mécanique intéressante de ce théorème : la puissance extérieure fournie à un milieu continu se transforme pour partie, en mouvement (variation de l'énergie cinétique) et pour partie, en déformation. La puissance intérieure est reliée à la déformation du milieu car elle fait intervenir le taux de déformation $\overline{\overline{\mathrm{D}}}$. On peut montrer que si le milieu se déplace de manière rigide, la puissance intérieure est nulle (car le taux de déformation $\overline{\overline{\mathrm{D}}}$ est identiquement nul en tout point).

Considérons différents cas :

— si le milieu est indéformable, la puissance intérieure sera toujours nulle (excepté si plusieurs corps indéformables interagissent [5]) auquel cas toute la puissance extérieure fournie sert à mettre en mouvement le corps. C'est le cas d'une boule de billard suite à l'impact de la queue. L'impulsion fournie est transformée en mouvement et aucune déformation n'apparaît ;

— la puissance extérieure fournie est transformée en puissance intérieure sans changement de l'énergie cinétique du milieu. Imaginons une balle en caoutchouc comprimée lentement dans les doigts d'une main. La puissance extérieure fournie se transforme en déformation et très peu en énergie cinétique ;

— la puissance extérieure est transmise à la fois sous forme de variation de l'énergie cinétique et de déformation. C'est le cas dans un crash voiture, les modifications d'énergie cinétique et les déformations mises en jeu sont toutes deux importantes.

En conclusion, la répartition entre mouvement et déformation dépend de la rapidité avec laquelle la sollicitation est appliquée et la capacité ou non du milieu de se déformer facilement. Notons que dans le cas des solides indéformables, la puissance intérieure n'intervient que par le biais de ressorts placés entre les corps ou dans les relations de contact-frottement.

5.2.3 Dualité en mécanique

Il est intéressant de comparer l'expression de la puissance extérieure pour le point matériel, le solide indéformable et le milieu continu. Dans la mécanique de point matériel, la cinématique est complètement définie par un seul vecteur : la position du point au cours du temps ou

sa vitesse $\vec{V}$. Concernant, les efforts, il n'y également qu'un seul vecteur capable de faire évoluer la position du point : la résultante des forces $\vec{R}$ au point considéré. La puissance développée par cette force dans la vitesse est donnée par le produit scalaire :

$$\mathcal{P}^{(e)} = \vec{R} \cdot \vec{V} \tag{5.39}$$

Passons maintenant à la mécanique des solides indéformables. La cinématique d'un corps indéformable est complètement fixée par l'évolution dans le temps de deux quantités vectorielles : la vitesse du centre de gravité du corps $\vec{V}_o$ et le vecteur rotation de ce corps autour de son centre de gravité $\vec{\Omega}_o$ [(1)]. Quels sont maintenant, les efforts permettant de faire évoluer cette cinématique ? Et bien ce sont deux vecteurs également ! Le premier est la résultante des forces $\vec{R}$ appliquées sur le corps et le second, $\vec{m}_o$, le moment résultant calculé par rapport au centre de gravité. La puissance développée par les efforts dans le mouvement s'écrit :

$$\mathcal{P}^{(e)} = \vec{R} \cdot \vec{V}_o + \vec{m}_o \cdot \vec{\Omega}_o \tag{5.40}$$

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, la cinématique est donnée par un nombre infini de paramètres : la vitesse $\vec{v}$ en chaque point du domaine v [(2)]. Les efforts possibles peuvent être également infiniment variés : il y a des forces volumiques $\vec{f}$, en chaque point et des forces surfaciques $\vec{F}$, en chaque point de la surface. La puissance extérieure développée est une intégrale :

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_v \vec{f} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}v + \int_{\partial v} \vec{F} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}s \tag{5.41}$$

Les équations (5.39), (5.40) et (5.41) donnent l'expression de la puissance extérieure pour des cinématiques de plus en plus riches, du point matériel au milieu continu en passant par le solide indéformable. Ces trois puissances s'écrivent comme un produit entre quantités cinématiques et efforts pour donner chaque fois un scalaire. C'est ce que l'on appelle une dualité. Mettre deux « espaces » en dualité, c'est simplement définir un produit qui pour un couple quelconque composé d'un élément du premier espace et un élément du deuxième espace rend un scalaire. La puissance met en dualité l'espace des vitesses et celui des efforts. Nous nous sommes intéressés à la puissance extérieure mais des conclusions similaires sont obtenues avec la puissance intérieure ou des quantités d'accélération.

5.3 Propriétés locales du tenseur des contraintes

5.3.1 Contrainte normale et contrainte de cisaillement

Soit $\overline{\overline{\sigma}}$, le tenseur des contraintes en un point $\vec{x}$ du domaine. Ce tenseur permet de donner, pour toute facette de normale unitaire $\vec{n}$, le vecteur contrainte agissant sur cette facette :

$$\vec{T} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \tag{5.42}$$

Ce vecteur peut-être décomposé en une composante σ selon la normale et un vecteur tangentiel, $\vec{\tau}$, à la facette :

$$\vec{T} = \sigma \vec{n} + \vec{\tau} \tag{5.43}$$

(1) Les notations sont en accord avec le polycopié de mécanique des solides [5].
(2) Ne pas confondre v, le domaine actuel occupé par le milieu et $\vec{v}$, la vitesse en chaque point de ce milieu.

La contrainte normale et la contrainte de cisaillement se calcule comme suit à partir de $\vec{\mathrm{T}}$:

$$\sigma = \vec{\mathrm{T}} \cdot \vec{n} \quad ; \quad \vec{\tau} = \vec{\mathrm{T}} - \sigma\vec{n} \tag{5.44}$$

On peut également décomposer la contrainte de cisaillement selon son module τ et sa direction $\vec{t}$:

$$\vec{\mathrm{T}} = \sigma\vec{n} + \tau\vec{t} \tag{5.45}$$

Cette décomposition est illustrée sur la figure 5.6. Par définition, σ peut être de signe

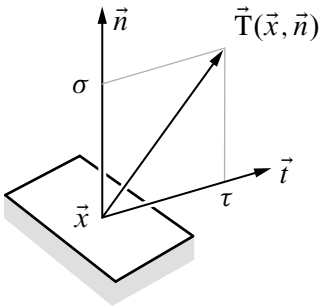


Figure 5.6 – Décomposition de l'effort en effort normal et effort de cisaillement

quelconque alors que τ est toujours supérieur ou égal à zéro puisqu'il s'agit du module de $\vec{\tau}$. Pour une facette donnée, on distingue différents cas :

— $\sigma > 0$, la facette est en traction, en effet le vecteur contrainte "tire" sur la facette puisqu'il est dirigé selon la normale à la facette ;
— $\sigma < 0$, la facette est en compression, en effet le vecteur contrainte "pousse" sur la facette ;
— $\tau = 0$, la facette est soumise à de la traction pure si $\sigma > 0$ ou de la compression pure si $\sigma < 0$;
— $\sigma = 0$ et $\tau \neq 0$, la facette est soumise à du cisaillement pur ;
— $\sigma = 0$ et $\tau = 0$, la facette est libre.

5.3.2 Contraintes normales principales

Le tenseur des contraintes étant un tenseur symétrique d'ordre 2, nous savons d'après la section 2.7.6, qu'il existe une base privilégiée dite base propre (ou base principale) dans laquelle les composantes du tenseur forment une matrice diagonale. Cette base propre sera notée $(\vec{e}_{\mathrm{I}}, \vec{e}_{\mathrm{II}}, \vec{e}_{\mathrm{III}})$:

$$[\overline{\overline{\sigma}}]_{(\vec{e}_{\mathrm{I}},\vec{e}_{\mathrm{II}},\vec{e}_{\mathrm{III}})} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

Les trois facettes dont les normales sont un des vecteurs de la base $(\vec{e}_{\mathrm{I}}, \vec{e}_{\mathrm{II}}, \vec{e}_{\mathrm{III}})$ ne subissent aucun cisaillement et sont donc en traction ou compression pure. Par exemple, si $\sigma_{\mathrm{II}} > 0$, la facette de normale $\vec{e}_{\mathrm{II}}$ est soumise à de la traction pure. Pour justifier le fait que les facettes selon $\vec{e}_{\mathrm{I}}$, $\vec{e}_{\mathrm{II}}$ ou $\vec{e}_{\mathrm{III}}$ ne sont soumises à aucun cisaillement, il suffit de montrer que le vecteur contrainte sur la facette, disons $\vec{e}_{\mathrm{I}}$, est bien aligné avec $\vec{e}_{\mathrm{I}}$:

$$\vec{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{I}} = \sigma_{\mathrm{I}}\vec{e}_{\mathrm{I}} \tag{5.47}$$

La relation (5.47) est vraie puisque $\vec{e}_{\mathrm{I}}$ est un vecteur propre.

5.3.3 Représentation des contraintes et tricercle de Mohr

Les cercles de Mohr permettent de visualiser le tenseur des contraintes en un point sous la forme de trois cercles. Plaçons nous dans les axes propres et prenons une facette quelconque

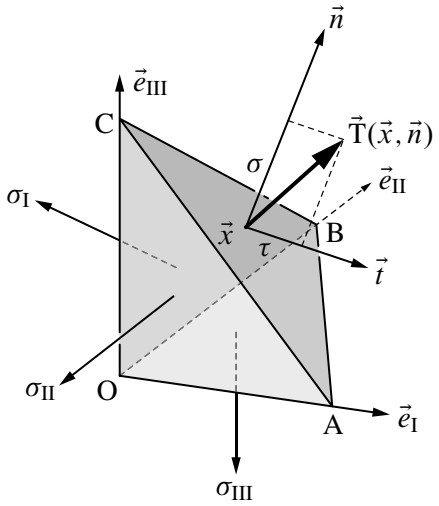


Figure 5.7 – Axes de Mohr

de normale $\vec{n}$ dont les composantes sont n_I, n_{II} et n_{III} dans la base propre. Le vecteur contrainte agissant sur cette facette est :

$$[\vec{T}]_{(\vec{e}_I,\vec{e}_{II},\vec{e}_{III})} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_I \\ n_{II} \\ n_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I n_I \\ \sigma_{II} n_{II} \\ \sigma_{III} n_{III} \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

Les contraintes normales et tangentielles valent :

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} = \sigma_I n_I^2 + \sigma_{II} n_{II}^2 + \sigma_{III} n_{III}^2 \tag{5.49}$$

$$\tau^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} - \sigma^2 = (\sigma_I n_I)^2 + (\sigma_{II} n_{II})^2 + (\sigma_{III} n_{III})^2 - \sigma^2 \tag{5.50}$$

Si l'on tient compte de la relation :

$$n_I^2 + n_{II}^2 + n_{III}^2 = 1 \tag{5.51}$$

et que l'on résout (5.49), (5.50) et (5.51) par rapport à n_I, n_{II} et n_{III}, on trouve :

$$n_I^2 = \frac{(\sigma_{II} - \sigma)(\sigma_{III} - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_I)} \tag{5.52}$$

$$n_{II}^2 = \frac{(\sigma_{III} - \sigma)(\sigma_I - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_{III} - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{II})} \tag{5.53}$$

$$n_{III}^2 = \frac{(\sigma_I - \sigma)(\sigma_{II} - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_{III})} \tag{5.54}$$

Ces formules permettent de déterminer l'orientation de la facette sur laquelle agissent une contrainte normale σ et une contrainte tangentielle τ. Pour un ensemble de facettes telles que $n_I = C^{te}$, l'équation (5.49) donne :

$$(\sigma_{II} - \sigma)(\sigma_{III} - \sigma) + \tau^2 = (n_I)^2(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_I) \tag{5.55}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$(\sigma - a_{\mathrm{I}})^2 + \tau^2 = \mathrm{R}_{\mathrm{I}}^2 \tag{5.56}$$

$$a_{\mathrm{I}} = \frac{\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2} \tag{5.57}$$

$$\mathrm{R}_{\mathrm{I}}^2 = (n_{\mathrm{I}})^2(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{I}})(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}}) + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2}\right)^2 \tag{5.58}$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle dans le plan (σ, τ) de centre $(a_{\mathrm{I}}, 0)$ et de rayon R_{I}. En particulier pour un ensemble de facettes d'axes $\vec{e}_{\mathrm{I}}$ pour lesquelles $n_{\mathrm{I}} = 0$, on obtient le cercle I tracé sur la figure 5.8. Ainsi, lorsqu'on fait pivoter une facette autour de l'axe $\vec{e}_{\mathrm{I}}$, le point (σ, τ) représentant l'état de contrainte sur cette facette, parcourt le cercle I. De manière similaire, on trouve pour des facette telles que $n_{\mathrm{II}} = \mathrm{C^{te}}$:

$$(\sigma - a_{\mathrm{II}})^2 + \tau^2 = \mathrm{R}_{\mathrm{II}}^2 \tag{5.59}$$

$$a_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2} \tag{5.60}$$

$$\mathrm{R}_{\mathrm{II}}^2 = (n_{\mathrm{II}})^2(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}) + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2}\right)^2 \tag{5.61}$$

ce qui donne le cercle II lorsque $n_{\mathrm{II}} = 0$. Enfin pour les facettes telles que $n_{\mathrm{III}} = \mathrm{C^{te}}$:

$$(\sigma - a_{\mathrm{III}})^2 + \tau^2 = \mathrm{R}_{\mathrm{III}}^2 \tag{5.62}$$

$$a_{\mathrm{III}} = \frac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}}}{2} \tag{5.63}$$

$$\mathrm{R}_{\mathrm{III}}^2 = (n_{\mathrm{III}})^2(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}) + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}}{2}\right)^2 \tag{5.64}$$

ce qui donne le cercle III lorsque $n_{\mathrm{III}} = 0$. La construction de la figure 5.8 porte le nom de *tricercle de Mohr*. Quelles que soient les valeurs de n_{I}, n_{II} et n_{III}, on montre facilement que le point (σ, τ) restera dans la zone grisée :

— si une des composantes de la normale est nulle, le point (σ, τ) se trouve sur un des cercles ;
— si deux des composantes sont nulles, autrement dit la troisième composante vaut 1, le point (σ, τ) se trouve sur l'axe σ soit en $(\sigma_{\mathrm{I}}, 0)$, $(\sigma_{\mathrm{II}}, 0)$ ou $(\sigma_{\mathrm{III}}, 0)$. Par exemple, si $n_{\mathrm{I}} = n_{\mathrm{III}} = 0$ et $n_{\mathrm{II}} = 1$, alors $(\sigma, \tau) = (\sigma_{\mathrm{II}}, 0)$.

D'après la figure 5.8, on trouve que le cisaillement maximal agissant sur une facette est :

$$\tau = \frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2} \tag{5.65}$$

Sur cette facette, $\sigma = (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})/2$. En injectant τ et σ dans (5.49) et (5.50), on voit que la facette sur laquelle agit le cisaillement maximal est donnée par $n_{\mathrm{I}}^2 = n_{\mathrm{III}}^2 = 1/2$ et $n_{\mathrm{II}} = 0$. La normale est donc la bissectrice des vecteurs $\vec{e}_{\mathrm{I}}$ et $\vec{e}_{\mathrm{III}}$.

5.3.4 État plan de contrainte

Le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ est un tenseur de contraintes planes dans le plan x_3 si :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \tag{5.66}$$

Tout vecteur contrainte $\vec{\mathrm{T}}$ sera alors situé dans le plan $x_3 = 0$. D'une manière générale, un tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ est un tenseur de contraintes planes si, et seulement si, l'une des contraintes normales principales (une des valeurs propres en bref) est nulle. Le plan des contraintes planes est alors donné par la direction propre associée.

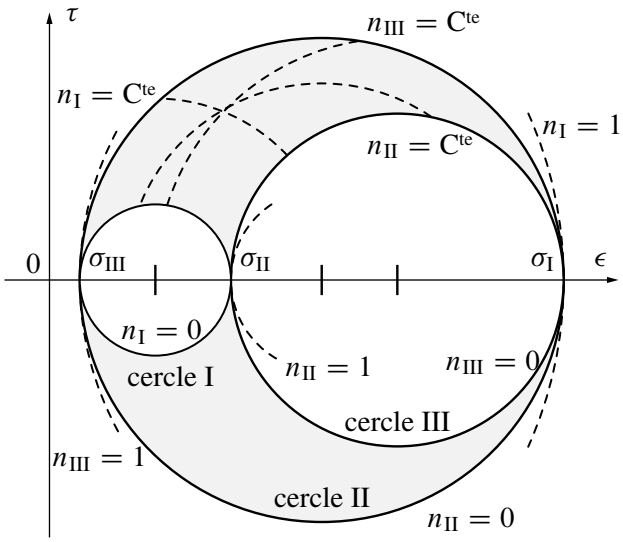


Figure 5.8 – Tricercle de Mohr

5.3.5 Tenseur des contraintes sphérique

Un tenseur des contraintes est dit sphérique si ses trois valeurs propres sont identiques. Dans ce cas, toutes les facettes ne sont qu'en traction ou compression pure selon le signe de la valeur propre. Un liquide au repos (ou un fluide parfait même en mouvement) est soumis en chaque point à une tenseur des contraintes sphérique dont la valeur propre est l'opposée de la pression.

5.3.6 Tenseur des contraintes uniaxial

Un tenseur des contraintes est dit uniaxial si deux de ses valeurs propres sont nulles. C'est l'hypothèse classique faite en chaque point dans une éprouvette mise en traction. La valeur propre non nulle est dans ce cas la force appliquée divisée par la section de l'éprouvette.

5.3.7 Tenseur des contraintes de cisaillement simple

Un tenseur des contraintes est un tenseur de cisaillement simple si, et seulement si, l'une des contraintes principales est nulle, les deux autres étant opposées.

6

Théorie de l'élasticité linéaire isotrope

On s'intéresse à l'évolution d'un système mécanique qui, à partir d'un état initial non chargé où les contraintes sont nulles en tout point, va atteindre un nouvel état d'équilibre sous l'action de sollicitations extérieures. Ces sollicitations extérieures peuvent être :
— des forces volumiques, par exemple la gravité ou des forces de Coriolis ;
— des vecteurs contraintes appliqués en surface ;
— des déplacements imposés en surface.
On se place dans le cadre des hypothèses suivantes :
— l'hypothèse des petites perturbations est applicable : l'état final est très proche de l'état initial et le gradient des déplacements est faible ;
— les effets dynamiques ne sont pas pris en compte : on suppose que le chargement est imposé lentement ;
— le comportement du matériau est élastique isotrope.

6.1 Équations

6.1.1 Cinématique

L'hypothèse de petites perturbations étant d'application, on ne doit pas distinguer le domaine initial V et le domaine final v et on peut écrire toutes les équations sur le domaine V dont la surface sera notée S. La partie de la surface sur laquelle des déplacements $\vec{u}_\mathrm{d}$ sont imposés sera notée $\mathrm{S_u}$. Finalement, le point courant sera $\vec{x}$. Les équations de la cinématique s'écrivent :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec{u} + (\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec{u})^\top\right) \quad \text{sur} \quad \mathrm{V} \tag{6.1}$$

$$\vec{u} = \vec{u}_\mathrm{d} \quad \text{sur} \quad \mathrm{S_u} \tag{6.2}$$

La première équation donne la relation entre déformation et déplacement en tout point du domaine, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, *ie*, petits déplacements et petites déformations. Cette équation est souvent appelée *équation de compatibilité*. La seconde équation fixe les déplacements là où ils sont imposés. Cette équation est souvent appelée *condition limite en déplacement*. La figure 6.1 illustre différents types de conditions en déplacement. La figure 6.2 rappelle les possibilités de mouvement de corps rigide respectives. Il est important de noter que sur la surface $\mathrm{S_u}$ toutes les composantes du déplacements peuvent être fixées ou seulement quelques unes. Par exemple, si seule la composante 2 du déplacement est nulle sur $\mathrm{S_u}$, on écrira :

$$u_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{S_u} \tag{6.3}$$

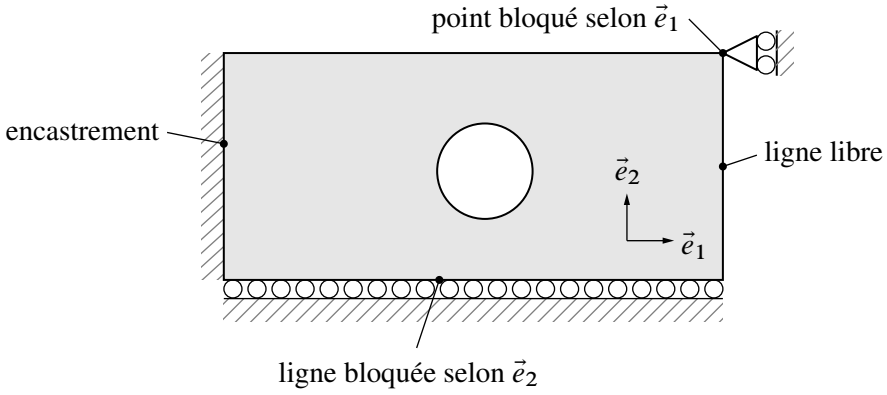
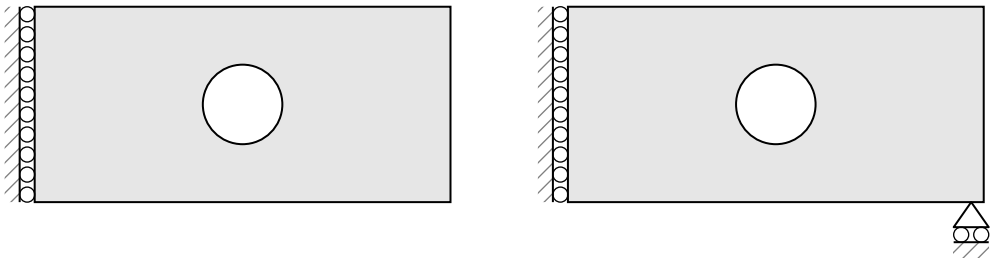


Figure 6.1 – Conditions aux limites

L'expression (6.2) doit donc être aménagée pour chaque cas. Il se peut également que la surface S_u doive être décomposée en différentes parties S_{u1}, S_{u2}, ...



(a) non bloqué (b) bloqué

Figure 6.2 – Mouvement de corps rigide

6.1.2 Équilibre

Les équations d'équilibre [1] s'écrivent :

$$\vec{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f}_d = \vec{0} \quad \text{sur} \quad V \tag{6.4a}$$

$$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d \quad \text{sur} \quad S_T \tag{6.4b}$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}^{\top} \quad \text{sur} \quad V \tag{6.4c}$$

La surface S_T est la partie de la surface extérieure sur laquelle des vecteurs contraintes $\vec{T}_d$ sont imposés. Les équations (6.4a) et (6.4b) découlent de la loi de bilan de la quantité de mouvement et l'équation (6.4c) découle de la loi de bilan du moment cinétique (symétrie du tenseur des contraintes). Les autres lois de bilan (masse et énergie) n'apportent rien d'intéressant à la formulation d'un problème d'élasticité.

L'équation (6.4b) porte aussi le nom de *condition limite en contrainte* [2]. Dans le cas d'une surface libre, le vecteur contrainte $\vec{T}_d$ est nul. De même, tout comme c'était le cas pour les conditions limite en déplacement il peut arriver que seules certaines composantes

(1) Afin de bien distinguer les inconnues des données du problèmes, ces dernières sont indicées avec d.
(2) Attention, une condition limite en contrainte indique que le vecteur contrainte est imposé et non le tenseur des contraintes.

du vecteur contrainte $\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}$ soient fixées. Par exemple, si seule la première composante de ce vecteur est nulle sur S_T, on écrira :

$$(\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad \text{sur} \quad S_T \tag{6.5}$$

6.1.3 Comportement élastique isotrope

Le comportement relie la contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$ à la déformation $\overline{\overline{\epsilon}}$ en chaque point du domaine :

$$\overline{\overline{\sigma}} = f(\overline{\overline{\epsilon}}) \quad \text{sur} \quad V \tag{6.6}$$

Un comportement élastique isotrope est complètement décrit par deux paramètres matériaux scalaires : les deux coefficients de Lamé λ et μ. Le comportement élastique isotrope s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda \, \mathrm{tr}(\overline{\overline{\epsilon}})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{\epsilon}} \quad ; \quad \sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \tag{6.7}$$

Cette loi est appelée loi de Hooke. Plutôt que d'utiliser les coefficients de Lamé, on peut décrire le comportement en terme du module de Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\epsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)}\epsilon_{ij} \tag{6.8}$$

Les coefficients de Lamé sont liés au module de Young et au coefficient de Poisson par les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6.9}$$

et réciproquement :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{6.10}$$

L'inversion de (6.8) exprime les déformations en fonction des contraintes :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{6.11}$$

Traction pure Considérons un petit élément de matière, figure 6.3, et sollicitons-le par un tenseur des contraintes uniaxial, défini section 5.3.6, selon l'axe x :

$$[\overline{\overline{\sigma}}]_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

La réponse en déformation est :

$$[\overline{\overline{\epsilon}}]_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} = \frac{\sigma}{E}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

La déformation selon l'axe x est égale à la contrainte imposée divisée par le module de Young (la raideur). Cette déformation est positive et correspond donc à un étirement selon l'axe x. On note que les déformations selon les axes y et z sont négatives et correspondent à un rétrécissement de la section selon les axes y et z. C'est l'effet Poisson. On note que si le coefficient de Poisson est nul, la section n'est pas réduite. On montre par des arguments de stabilité que le coefficient ne peut dépasser 1/2. Pour cette valeur, le volume est conservé lors de l'étirement. Finalement, remarquons que la traction sur l'élément de volume ne produit aucun cisaillement. Il n'en est pas de même si vous tirez sur un barreau fait d'un matériau composite. Ce matériau n'est pas isotrope et la traction induit du cisaillement.

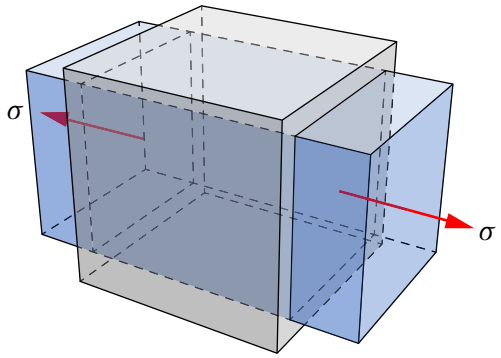


Figure 6.3 – Traction pure

Cisaillement simple Sollicitons maintenant notre élément de volume avec un tenseur de cisaillement simple (section 5.3.7) illustré sur la figure 6.4 :

$$[\overline{\overline{\sigma}}]_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

La déformation correspondante est :

$$[\overline{\overline{\epsilon}}]_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\sigma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{2\mu} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

On note que la contrainte de cisaillement n'entraîne aucune élongation. Par contre un

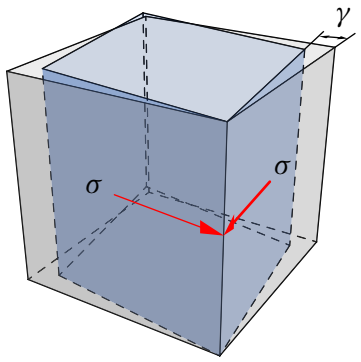


Figure 6.4 – Cisaillement simple

changement d'angle entre les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ intervient :

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\sigma}{\mu} \tag{6.16}$$

Le coefficient de Lamé μ joue donc le rôle d'une raideur de cisaillement. C'est pourquoi le coefficient μ est souvent appelé module de cisaillement.

Pression uniforme Soumettons maintenant notre volume élémentaire à un tenseur de contraintes sphérique de pression p (voir section 5.3.5 et figure 6.5) :

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

La pression p est un nombre positif mais du fait de la direction de la force résultante, un

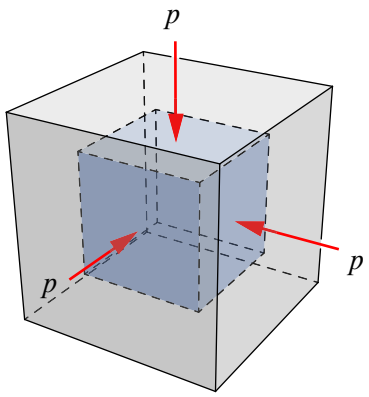


Figure 6.5 – Pression uniforme

signe moins apparaît. La déformation correspondante est :

$$[\boldsymbol{\epsilon}]_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} = \frac{-p(1-2\nu)}{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{-p}{3\mathrm{K}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

où l'on a introduit le module de compressibilité :

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{E}}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{6.19}$$

On note que le cube est réduit de la même manière dans les trois directions du fait de l'isotropie. La réduction relative de volume est la trace du tenseur des déformations — section 3.9.2 :

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = -\frac{p}{\mathrm{K}} \tag{6.20}$$

Le module de compressibilité K relie la pression au changement de volume : c'est une *raideur volumique*. Plus K est élevé moins le volume est réduit pour une pression donnée.

Généralisation Voici deux points importants à retenir sur les matériaux élastiques isotropes :

— dans le comportement élastique isotrope, les cisaillements et élongations sont tout à fait découplés. Ce n'est pas le cas dans les milieux anisotropes comme les matériaux composites ;

— le comportement n'est caractérisé que par deux paramètres scalaires. Ces deux paramètres peuvent être au choix : le module de Young E et le coefficient de Poisson ν, les deux coefficients de Lamé, λ et μ, ou les modules de cisaillement μ et de compressibilité K. Notez que l'on a forcément $-1 \leqslant \nu \leqslant 1/2$.

La loi de Hooke peut se mettre sous la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{\overline{\mathrm{C}}}}} : \overline{\overline{\epsilon}} \quad ; \quad \sigma_{ij} = \mathrm{C}_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad ; \quad \mathrm{C}_{ijkl} = \frac{\mathrm{E}}{1+\nu}\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\mathrm{E}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{6.21}$$

ou sous forme inverse :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \overline{\overline{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}} : \overline{\overline{\sigma}} \quad ; \quad \epsilon_{ij} = \mathrm{D}_{ijkl}\sigma_{kl} \quad ; \quad \mathrm{D}_{ijkl} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\nu}{\mathrm{E}}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{6.22}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{\mathrm{C}}}}}$ d'ordre 4 est le tenseur d'élasticité et $\overline{\overline{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}}$, son inverse.

Ces deux tenseurs s'expriment à l'aide de $3^4 = 81$ composantes. Il n'y a, en fait, que 36 composantes indépendantes car ces tenseurs possèdent les symétries suivantes (qui proviennent de la symétrie des tenseurs $\overline{\overline{\epsilon}}$ et $\overline{\overline{\sigma}}$ ainsi que de l'existence d'une énergie) :

$$\mathrm{C}_{ijkl} = \mathrm{C}_{klij} = \mathrm{C}_{jikl} = \mathrm{C}_{ijlk} \quad ; \quad \mathrm{D}_{ijkl} = \mathrm{D}_{klij} = \mathrm{D}_{jikl} = \mathrm{D}_{ijlk} \tag{6.23}$$

Les 36 composantes peuvent être rangées dans un tableau 6×6 et les lois (6.21) et (6.22) s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

et inversement :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

Compte tenu du caractère isotrope de la loi de Hooke, les tableaux 6×6 seront les mêmes quelle que soit la base orthonormée choisie. Par exemple, ils seront les mêmes pour des coordonnées cylindriques ou sphériques.

Pour terminer, le tableau 6.1 donne les modules élastiques approximatifs de quelques matériaux usuels. La plupart des métaux usuels sont, en bonne approximation, isotropes. Il

matériau	ν	E (MPa)	μ (MPa)	K (MPa)
acier	0,3	205 000	78 800	170 800
aluminium	0,33	70 000	26 300	68 600
verre ordinaire	0,22	60 000	24 600	35 700
béton	0,2	30 000	12 500	16 667
plomb	0,45	17 000	5 860	56 700
plexiglas (résine acrylique)	0,36	3 000	1 100	3 570
bakélite (polypropylène)	0,37	1 000	365	1 280
caoutchouc	0,5	2	0,67	∞

Tableau 6.1 – Modules élastiques approximatifs de quelques matériaux

en va de même pour la pierre, le béton, le verre... et pour les résines armées de fibres réparties uniformément dans toutes les directions. Le module de compressibilité du caoutchouc est infini puisque ce matériau est incompressible.

6.1.4 Récapitulatif

Le tableau 6.2 résume les équations à notre disposition pour résoudre un problème d'élasticité linéaire isotrope en notation intrinsèque et indicielle. Les frontières S_u et S_T doivent

Équations cinématiques	
compatibilité	
$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{u} + (\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{u})^\top)$ sur V	$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
conditions limites en déplacement	
$\vec{u} = \vec{u}_d$ sur S_u	$u_i = u_{di}$
Équations d'équilibre	
équilibre en volume	
$\vec{\text{div}}\,\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f}_d = \vec{0}$ sur V	$\sigma_{ij,j} + f_{di} = 0$
équilibre en surface : conditions limites en contrainte	
$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d$ sur S_T	$\sigma_{ij} n_j = T_{di} + T_{di}$
symétrie des contraintes	
$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}^\top$ sur V	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
Équations de comportement	
$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda\,\text{tr}(\overline{\overline{\epsilon}})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{\epsilon}}$ sur V	$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$

Tableau 6.2 – Équations d'un problème d'élasticité linéaire isotrope

vérifier les conditions suivantes pour *chaque* direction de l'espace :

$$S_u \cap S_T = \varnothing \tag{6.26}$$

$$S_u \cup S_T = S \tag{6.27}$$

La relation (6.26) indique qu'en chaque point de la surface S_u, on ne peut prescrire à la fois un déplacement et un vecteur contrainte sauf pour des composantes différentes. Par exemple, sur une surface de normale $\vec{e}_1$, on ne peut fixer à la fois T_1 et u_1. Par contre, il est possible de fixer T_1 et u_2. La relation (6.27) indique qu'en chaque point de la surface S et pour chaque composante, il faut prescrire soit le déplacement, soit le vecteur contrainte. En clair, on ne peut pas ne rien imposer sur une partie de S .

Comptons le nombre d'équations et le nombre d'inconnues sur V. Le nombre d'inconnues sur V est listé comme suit :
— trois pour $\vec{u}$;
— neuf pour $\overline{\overline{\sigma}}$;
— neuf pour $\overline{\overline{\epsilon}}$.
soit un total de 21 inconnues. Concernant les équations sur V, nous avons :
— neuf équations de compatibilité (6.1) ;
— trois équations d'équilibre (6.4a) ;
— trois conditions de symétrie du tenseur des contraintes (6.4c) ;
— neuf équations de comportement (6.7).
soit un total de 24 équations. En réalité, seules 21 de ces équations sont indépendantes car compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes, seules six équations de comportement sont nécessaires.

Les données de $\vec{u}_d, \vec{T}_d, \vec{f}_d$ forment ce que l'on appelle le chargement. Toutes les équations apparaissant dans le problème d'élasticité sont linéaires. Ainsi si le chargement double, la solution double dans toutes ses quantités (déplacement, déformation et contraintes). De même, si $(\vec{u}, \overline{\overline{\epsilon}}, \overline{\overline{\sigma}})_1$ est la solution du problème pour un chargement $(\vec{u}_d, \vec{T}_d, \vec{f}_d)_1$ et $(\vec{u}, \overline{\overline{\epsilon}}, \overline{\overline{\sigma}})_2$ est la solution pour un autre chargement $(\vec{u}_d, \vec{T}_d, \vec{f}_d)_2$. La solution correspondant à la somme des deux chargement est la somme des solutions 1 et 2 par le principe de superposition qui s'applique à tout système linéaire.

Le problème d'élasticité linéaire admet toujours une solution unique pour autant que les modes rigides aient été fixés.

6.2 Théorèmes de l'énergie potentielle

Nous allons montrer que les solutions en déplacement et en contrainte vérifient des principes de minimum. D'abord, nous définirons la notion d'admissibilité.

Définition 6.1 Un champ de déplacement est cinématiquement admissible (CA) s'il vérifie toutes les équations cinématiques.

Autrement dit, ce champ vérifie les déplacements imposés — voir le tableau 6.2.

Définition 6.2 Un champ de contrainte est statiquement admissible (SA) s'il vérifie toutes les équations d'équilibre.

Si l'on dispose d'un champ de déplacement admissible et d'un champ de contrainte admissible, a-t-on la solution du problème d'élasticité ? La réponse est *non*. Il faut en plus que le couple déformation-contrainte vérifie les équations de comportement, tableau 6.2, que nous écrirons sous la forme [3] :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{6.28}$$

La loi de comportement (6.28) est équivalente à :

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ij}C_{ijkl}\epsilon_{kl} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}C^{-1}_{ijkl}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij} = 0 \tag{6.29}$$

On vérifie aisément que (6.28) entraîne (6.29) et vice-versa. Notons, de plus, que le premier membre de (6.29) est toujours positif ou nul pour un couple $(\overline{\overline{\epsilon}}, \overline{\overline{\sigma}})$ arbitraire. La vérification du comportement en chaque point du domaine est donc équivalente à l'annulation de l'intégrale de (6.29) sur le domaine :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad \forall \vec{x} \in V \Leftrightarrow \int_V \frac{1}{2}\epsilon_{ij}C_{ijkl}\epsilon_{kl} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij}\, dV = 0 \tag{6.30}$$

L'intégrale ci-dessus étant toujours plus grande ou égale à zéro quel que soit le couple $(\overline{\overline{\epsilon}}, \overline{\overline{\sigma}})$, on a le théorème suivant :

(3) Les trois théorèmes que nous allons démontrer sont valables que le comportement soit isotrope ou non et même linéaire ou non.

Théorème 6.3 Le problème d'élasticité résumé dans le tableau 6.2 est identique au problème suivant : trouver le champ de déplacement admissible ($\vec{u}$ CA) et le champ de contrainte admissible ($\overline{\overline{\sigma}}$ SA) qui minimise :

$$\min_{\vec{u}\ \text{CA},\,\overline{\overline{\sigma}}\ \text{SA}} \int_{\mathrm{V}} \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\vec{u})\mathrm{C}_{ijkl}\epsilon_{ij}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\mathrm{C}_{ijkl}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\vec{u}) \right) \mathrm{dV} \tag{6.31}$$

L'intégrale est appelée erreur en relation de comportement car elle est non nulle si le couple $(\overline{\overline{\epsilon}}, \overline{\overline{\sigma}})$ ne vérifie pas le comportement en chaque point du domaine.

Le dernier terme de l'intégrale (6.31) couple le champ de déplacement et le champ de contrainte. Compte tenu des propriétés d'admissibilité des déplacements et des contraintes, nous allons pouvoir éliminer ce couplage. Il vient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{V}} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\vec{u})\,\mathrm{dV} &= \int_{\mathrm{V}} \sigma_{ij}u_{i,j}\,\mathrm{dV} && (6.32)\\
&= \int_{\mathrm{V}} (u_i\sigma_{ij})_{,j} - \sigma_{ij,j}u_i\,\mathrm{dV} && (6.33)\\
&= \int_{\mathrm{S}} u_i\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{dS} + \int_{\mathrm{V}} f_{\mathrm{d}i}u_i\,\mathrm{dV} && (6.34)\\
&= \int_{\mathrm{S_u}} u_{\mathrm{d}i}\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{dS} + \int_{\mathrm{S_T}} \mathrm{T}_{\mathrm{d}i}u_i\,\mathrm{dS} + \int_{\mathrm{V}} f_{\mathrm{d}i}u_i\,\mathrm{dV} && (6.35)
\end{aligned}$$

Chacune des égalités ci-dessus méritent d'être justifiée :

— l'égalité (6.32) découle de la définition de la déformation (6.1) et de la symétrie du tenseur des contraintes, ce qui donne :

$$\sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{j,i} = \sigma_{ij}u_{i,j} \tag{6.36}$$

— l'égalité (6.33) provient de la formule de la divergence d'un produit ;

— le premier terme de l'égalité (6.34) provient du théorème de Gauss-Ostrogradski (2.44) et le second, de l'équilibre en volume (6.4a) ;

— l'égalité (6.35) découle des conditions aux limites en déplacement (6.2) et en contrainte (6.4b).

Le découplage obtenu dans (6.2) permet de réécrire la minimisation (6.31) sous la forme :

$$\min_{\vec{u}\ \text{CA},\,\overline{\overline{\sigma}}\ \text{SA}} \quad \mathrm{W}(\vec{u}) - \mathrm{W}^*(\overline{\overline{\sigma}}) \tag{6.37}$$

où l'on a défini l'énergie potentielle en déplacement $\mathrm{W}(\vec{u})$ et l'énergie potentielle en contrainte $\mathrm{W}^*(\overline{\overline{\sigma}})$ par :

$$\mathrm{W}(\vec{u}) = \int_{\mathrm{V}} \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\vec{u})\mathrm{C}_{ijkl}\epsilon_{kl}(\vec{u}) - \int_{\mathrm{S_T}} \mathrm{T}_{\mathrm{d}i}u_i\,d\mathrm{S} - \int_{\mathrm{V}} f_{\mathrm{d}i}u_i\,d\mathrm{V} \tag{6.38}$$

$$\mathrm{W}^*(\overline{\overline{\sigma}}) = -\int_{\mathrm{V}} \frac{1}{2}\sigma_{ij}\mathrm{C}^{-1}_{ijkl}\sigma_{kl}\,d\mathrm{V} + \int_{\mathrm{S_u}} u_{\mathrm{d}i}\sigma_{ij}n_j\,d\mathrm{S} \tag{6.39}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer deux théorèmes importants appelés théorèmes de l'énergie potentielle.

Théorème 6.4 L'énergie potentielle d'un champ cinématiquement admissible est toujours supérieure ou égale à celle d'un champ statiquement admissible. Il n'y a égalité que si le champ de déplacement et le champ de contrainte sont les champs solutions.

Ceci découle du fait que $\mathrm{W}(\vec{u}) - \mathrm{W}^*(\overline{\overline{\sigma}})$ est toujours positif ou égal à zéro quels que soient $\vec{u}$ et $\overline{\overline{\sigma}}$ admissibles.

Théorème 6.5 Le champ de déplacement solution minimise l'énergie potentielle de tous les champs cinématiquement admissibles ; le champ des contraintes solution maximise l'énergie potentielle de tous les champs statiquement admissibles.

Ceci découle du fait que le problème (6.37) peut se réécrire comme deux problèmes indépendants :

$$\min_{\vec{u}\ \mathrm{CA}} \mathrm{W}(\vec{u}) \qquad \text{et} \qquad \max_{\overline{\overline{\sigma}}\ \mathrm{SA}} \mathrm{W}^*(\overline{\overline{\sigma}}) \tag{6.40}$$

Les deux théorèmes peuvent se résumer en une ligne mathématique. Soient $\vec{u}^{\,\mathrm{ex}}$ et $\overline{\overline{\sigma}}^{\,\mathrm{ex}}$ les solutions exactes en déplacements et en contraintes du problème d'élasticité et $\vec{u}^{\,\mathrm{CA}}$ et $\overline{\overline{\sigma}}^{\,\mathrm{SA}}$, des champs admissibles quelconques. On a :

$$\mathrm{W}^*(\overline{\overline{\sigma}}^{\,\mathrm{SA}}) \leqslant \mathrm{W}^*(\overline{\overline{\sigma}}^{\,\mathrm{ex}}) = \mathrm{W}(\vec{u}^{\,\mathrm{ex}}) \leqslant \mathrm{W}(\vec{u}^{\,\mathrm{CA}}) \tag{6.41}$$

6.3 Techniques de résolution analytique

6.3.1 Approche en déplacement

Cette approche consiste à choisir le champ de déplacement comme inconnue principale. Dans la pratique, on se donne une certaine forme pour ce champ et on cherche à vérifier toutes les équations du problème. Ce champ doit aussi satisfaire les conditions limites en déplacement. Ensuite, on calcule les déformations à partir de la relation de compatibilité puis les contraintes à partir de la loi de comportement. Il ne reste plus qu'à vérifier si ces contraintes sont en équilibre sur le volume et satisfont les conditions limites en contrainte. Ceci revient à éliminer les inconnues $\overline{\overline{\sigma}}$ et $\overline{\overline{\epsilon}}$ dans le tableau 6.2 pour conserver uniquement l'inconnue en déplacement. Exprimons l'équilibre de volume en fonction de $\vec{u}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \lambda\epsilon_{kk,j}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij,j} = \lambda\epsilon_{kk,i} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) \\ &= \lambda\epsilon_{kk,i} + \mu(u_{i,jj} + (u_{j,j})_{,i}) = (\lambda+\mu)(u_{k,k})_{,i} + \mu u_{i,kk} \end{aligned} \tag{6.42}$$

On s'est servi dans la dernière égalité du fait que $\epsilon_{kk} = u_{k,k}$. L'équation d'équilibre en volume s'écrit donc en terme des déplacements :

$$(\lambda+\mu)\,\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} + \vec{f}_{\mathrm{d}} = \vec{0} \qquad (\lambda+\mu)(u_{k,k})_{,i} + \mu u_{i,kk} + f_{\mathrm{d}i} = 0 \tag{6.43}$$

Ces trois équations sont appelées *équations de Lamé-Navier*. En se servant de la formule du laplacien (2.87), ces équations peuvent être réécrites sous la forme :

$$(\lambda+2\mu)\,\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{u}) - \mu\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} + \vec{f}_{\mathrm{d}} = \vec{0} \tag{6.44}$$

Cette forme est avantageuse pour la résolution lorsque l'on sait que le champ de déplacement est irrotationnel, autrement dit $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = \vec{0}$.

Le processus de résolution avec l'approche en déplacement est donc :

— postuler la forme du champ de déplacement ;
— vérifier les conditions limites en déplacement ;
— vérifier les équations de Lamé-Navier (6.44) ;
— calculer les déformations puis les contraintes ;
— vérifier les conditions limites en contrainte.

Cette approche en déplacement est utilisée pour résoudre le problème du cylindre sous pression à la section 7.1.

6.3.2 Approche en contrainte

L'approche en contrainte consiste à partir d'un champ de contrainte vérifiant les équations d'équilibre. La relation de comportement (6.8) inversée permet de trouver les déformations en fonction des contraintes :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{6.45}$$

Ces déformations doivent ensuite être intégrées pour obtenir les déplacements :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{6.46}$$

Les conditions d'intégrabilité de (6.46) sont données en (3.115) et s'expriment aussi en contraintes comme suit :

$$\Big(\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{kk}\delta_{ij}\Big)_{,mm} + \frac{1-2\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{kk,ij} - \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}) + \frac{\nu}{\mathrm{E}}(\sigma_{mm,ik}\delta_{jk} + \sigma_{mm,jk}\delta_{ik}) = 0$$

ou encore :

$$(1+\nu)\sigma_{ij,mm} - \nu\sigma_{kk,mm}\delta_{ij} + \sigma_{kk,ij} - (1+\nu)(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}) = 0 \tag{6.47}$$

En utilisant l'équilibre (6.48) et une conséquence (6.49) de la loi de comportement :

$$\sigma_{ij,j} + f_{\mathrm{d}i} = 0 \tag{6.48}$$

$$\sigma_{kk,mm} = \frac{\mathrm{E}}{1-2\nu}\epsilon_{kk,mm} \tag{6.49}$$

les équations (6.47) se simplifient en :

$$\Delta\,\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}f_{\mathrm{d}k,k}\delta_{ij} + f_{\mathrm{d}j,i} + f_{\mathrm{d}i,j} = 0 \tag{6.50}$$

Ces six équations sont appelées les équations de Beltrami-Michell.

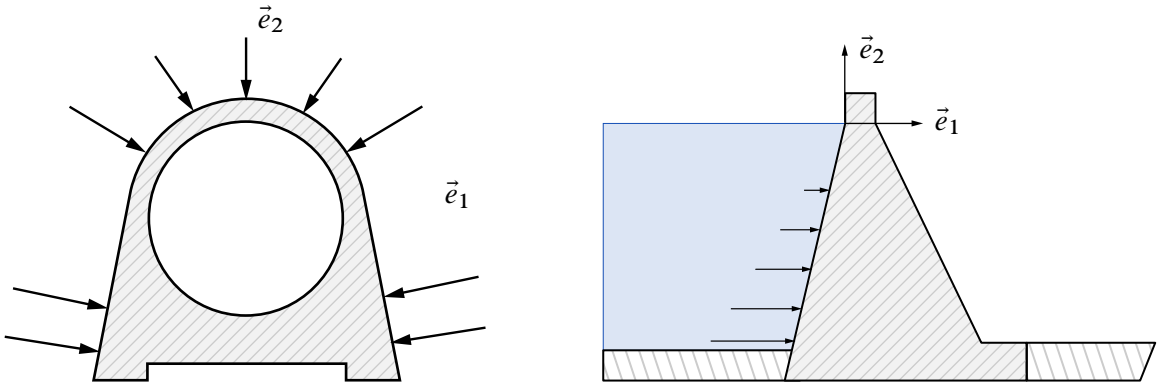
Le processus de résolution avec l'approche en contrainte est donc :

— postuler un champ de contrainte ;
— vérifier les conditions d'équilibre en volume ;
— vérifier les conditions limites en contrainte ;
— vérifier les équations de Beltrami-Michell (6.50) ;
— calculer les déformations puis les déplacements à partir des contraintes ;
— vérifier les conditions limites en déplacement.

Remarques — On note que lorsque toutes les forces volumiques sont constantes ou nulles, tout champ de contrainte constant ou linéaire par rapport aux variables d'espace satisfait les équations de Beltrami-Michell. Si les forces volumiques sont nulles, tout champ de contrainte constant vérifie à la fois les équations d'équilibre et les équations de Beltrami-Michell.

6.3.3 Solide en état plan de déformation

Lorsqu'un solide prismatique très long est sollicité par des forces perpendiculaires à ses génératrices, et si ces forces restent constantes le long de celles-ci, toute portion du solide située à une distance suffisante de ses extrémités se déforme uniquement dans un plan perpendiculaire aux génératrices et l'on peut considérer que les déformations dans le sens de la génératrice sont nulles. Les sections transversales du solide restent donc planes et il suffit d'étudier une tranche d'épaisseur unitaire. De nombreux problèmes d'importance pratique peuvent être étudiés en état plan de déformation. C'est le cas, par exemple, d'une galerie ou d'un tunnel horizontal revêtus d'un soutènement continu résistant à la poussée des terrains environnants, figure 6.6(a). On peut aussi citer le cas d'un barrage poids, figure 6.6(b), d'une digue ou d'un talus de hauteur constante. Dans un tel cas, on choisira le vecteur de base $\vec{e}_3$,



(a) tunnel (b) barrage

Figure 6.6 – Ouvrages d'art

perpendiculaire à la tranche unitaire étudiée. Mathématiquement, un solide est en état plan de déformation si le champ de déplacement à la forme :

$$\vec{u} = u_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 \tag{6.51}$$

Les déformations correspondantes (6.1) ont la forme :

$$[\bar{\bar{\epsilon}}]_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}(x_1,x_2) & \epsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \epsilon_{12}(x_1,x_2) & \epsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2u_{1,1} & u_{1,2}+u_{2,1} & 0 \\ u_{1,2}+u_{2,1} & 2u_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.52}$$

En introduisant ces déformations dans la loi de Hooke (6.8), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

et :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad ; \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{6.54}$$

La relation inverse de (6.53) peut également être utile en pratique :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

Les équations de Lamé-Navier se réduisent à deux équations :

$$(\lambda+\mu)(u_{1,1}+u_{2,2})_{,1} + \mu(u_{1,11}+u_{1,22}) + f_{\mathrm{d}1} = 0 \tag{6.56}$$

$$(\lambda+\mu)(u_{1,1}+u_{2,2})_{,2} + \mu(u_{2,11}+u_{2,22}) + f_{\mathrm{d}2} = 0 \tag{6.57}$$

et les équations de Beltrami-Michell à une seule équation :

$$(\sigma_{11}+\sigma_{22})_{,11} + (\sigma_{11}+\sigma_{22})_{,22} + \frac{1}{1-\nu}(f_{\mathrm{d}1,1} + f_{\mathrm{d}2,2}) = 0 \tag{6.58}$$

6.3.4 Solide en état plan de contrainte

Il arrive fréquemment que l'on ait à étudier l'état de contrainte dans des tôles planes de faible épaisseur sollicitée dans leur plan. Il est alors pertinent de choisir le vecteur de base $\vec{e}_3$ perpendiculaire à la tôle, comme indiqué sur la figure 6.7. Les contraintes σ_{13}, σ_{23} et σ_{33}

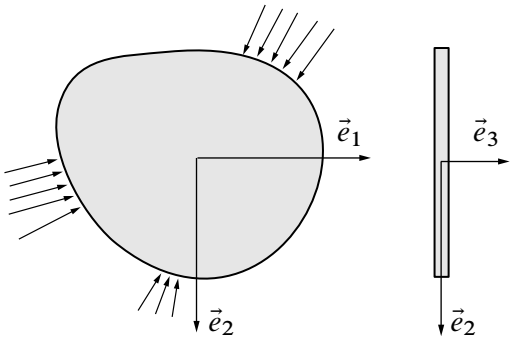


Figure 6.7 – Tôle plane de faible épaisseur

sont évidemment nulles sur les deux faces de la tôle. Par raison de continuité, elles ne peuvent prendre, à l'intérieur de la tôle, que des valeurs très faibles et l'on ne commet donc pas d'erreur importante en affirmant qu'elles y sont nulles. Pour la même raison, il est certain que les trois composantes non nulles σ_{11}, σ_{12} et σ_{22} ne dépendent pratiquement pas de x_3. On admettra qu'elles sont constantes sur l'épaisseur de la tôle. En résumé, l'hypothèse de l'état plan de contrainte s'écrit :

$$[\overline{\overline{\sigma}}]_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

En introduisant (6.59) dans la loi de Hooke (6.25), il vient :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{6.60}$$

et :

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \tag{6.61}$$

L'inversion de (6.60) donne :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

Les équations de Lamé-Navier se réduisent aux deux équations suivantes :

$$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}(u_{1,1} + u_{2,2})_{,1} + \mu(u_{1,11} + u_{1,22}) + f_{\mathrm{d}1} = 0 \tag{6.63}$$

$$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}(u_{1,1} + u_{2,2})_{,2} + \mu(u_{2,11} + u_{2,22}) + f_{\mathrm{d}2} = 0 \tag{6.64}$$

Quant aux équations de Beltrami-Michell, quatre équations apparaissent :

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} + (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} + (1+\nu)(f_{\mathrm{d}1,1} + f_{\mathrm{d}2,2}) = 0 \tag{6.65a}$$

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} = 0 \tag{6.65b}$$

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} = 0 \tag{6.65c}$$

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,12} = 0 \tag{6.65d}$$

Les contraintes doivent vérifier à la fois les équations (6.65) et les équations d'équilibre. En général, il n'y a aucune solution et c'est pourquoi on n'impose pas les équations (6.65) [(4)] mais seulement (6.65a). L'hypothèse de l'état plan de contrainte viole donc les équations du problème tri-dimensionnel mais cela reste une très bonne approximation pour autant que la pièce étudiée est de faible épaisseur.

Remarque — Si les forces volumiques sont constantes ou nulles, les équations (6.58) et (6.65a) sont identiques. Si de plus les conditions aux limites ne font pas apparaître de conditions aux limites en déplacement (si ce n'est le blocage des modes rigides), on obtient les mêmes contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} que le solide soit en état plan de déformation ou en état plan de contrainte. En plus, ces contraintes sont indépendantes des propriétés du matériau. Par contre, la contrainte σ_{33}, les déformations et les déplacements sont, eux, différents en état plan de déformation et de contrainte et dépendent des propriétés du matériau.

En comparant les lois de Hooke (6.53) et (6.62), on constate que l'on passe de l'une à l'autre par une simple substitution de modules élastiques : pour passer de l'état plan de contrainte à l'état plan de déformation, il suffit d'effectuer les substitutions :

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}'}{1-\nu'^2} \quad ; \quad \nu = \frac{\nu'}{1-\nu'} \tag{6.66}$$

puis de supprimer les primes. Pour passer de l'état plan de déformation à l'état plan de contrainte, il suffit d'effectuer les substitutions :

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}'(1+2\nu')}{(1+\nu')^2} \quad ; \quad \nu = \frac{\nu'}{1+\nu'} \tag{6.67}$$

puis de supprimer les primes. Ces substitutions ne modifient pas μ.

(4) Ces équations imposent à la trace des contraintes d'être linéaire ce qui est trop restrictif.

6.3.5 Fonction de contrainte d'Airy

En l'absence de forces de volume, nous avons vu que l'équation de Beltrami-Michell était la même en état plan de contrainte ou de déformation :

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} + (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} = 0 \tag{6.68}$$

Les équations d'équilibre en volume sont également les mêmes :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \tag{6.69a}$$
$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \tag{6.69b}$$

La méthode la plus commode pour vérifier ces équations est d'introduire une fonction de contrainte $\phi(x_1, x_2)$, dite *fonction d'Airy*, telle que :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \quad ; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad ; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{6.70}$$

On vérifie immédiatement que, quelle que soit la fonction ϕ, les contraintes calculées selon (6.70) satisfont l'équilibre en volume (6.69). En introduisant (6.70) dans (6.68), on trouve que la fonction d'Airy doit satisfaire l'équation biharmonique :

$$\Delta\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}\right) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{6.71}$$

Ainsi, la solution d'un problème d'élasticité plane qui ne comporte pas de force de volume se réduit à rechercher une solution de l'équation (6.71) qui satisfasse les conditions limites, en contrainte ou en déplacement selon les données du problème.

L'utilisation d'une fonction d'Airy sera illustrée dans le problème de la traction d'un barreau prismatique à la section 7.2.

6.4 Techniques de résolution numérique

Les techniques analytiques sont vite dépassées lorsque le problème devient un peu complexe, il faut alors recourir à des approches numériques. On distingue trois grandes familles d'approches numériques pour la mécanique des milieux continus :

— les éléments finis ;
— les différences finies ;
— les éléments de frontière.

La première approche a le mérite d'être applicable quelle que soit la géométrie du milieu. Elle est donc utilisée pour tous les problèmes de mécaniques faisant intervenir des géométries complexes : crash de voiture, écoulement sanguin, étude vibratoire de fusée, conception de puce électronique contre l'échauffement excessif... Les codes industriels les plus connus sont *Samcef*, *Abaqus*, *Nastran* et *Ansys*. La méthode des différences finies nécessite des domaines de formes simples. Elle est particulièrement utilisé en météorologie, puisque l'atmosphère a une forme simple, et pour l'étude d'écoulement. Enfin, la méthode des éléments frontières permet la prise en compte simple d'un milieu infini ou semi-infini mais ce milieu doit être linéaire.

6.5 Thermoélasticité

Nous considérons maintenant le cas où les déformations sont causées non seulement par des contraintes mais également par des élévations de température. C'est le phénomène de *thermoélasticité*. Une élévation de température a tendance, en général [5], à faire gonfler les corps et une diminution, à les contracter. Une relation thermoélastique isotrope s'écrit :

$$\epsilon_{ij} = \underbrace{\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{kk}\delta_{ij}}_{\substack{\text{déformations}\\ \text{d'origine mécanique}}} + \underbrace{\frac{\alpha}{3}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\delta_{ij}}_{\substack{\text{déformations}\\ \text{d'origine thermique}}} \tag{6.72}$$

La température T_0 est la température à l'état naturel. Le coefficient α est appelé coefficient de dilatation thermique. Il relie la variation de volume à l'élévation de température. En effet, en considérant les contraintes nulles et en prenant la trace de (6.72), on obtient :

$$\mathrm{tr}\,\overline{\overline{\epsilon}} = \alpha(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0) \tag{6.73}$$

En inversant la relation (6.72), on a :

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} - \frac{\mathrm{E}\alpha}{1-2\nu}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\delta_{ij} \tag{6.74}$$

La résolution d'un problème de thermoélasticité ne diffère d'un problème d'élasticité que par la loi de comportement, si le champ de température T est supposée connu. Ainsi, toutes les équations du tableau 6.2 sont à résoudre, excepté le comportement qui doit être remplacé par (6.74).

On peut aussi voir la thermoélasticité comme un problème d'élasticité classique tel que donné dans le tableau 6.2 avec un chargement d'origine thermique supplémentaire qui s'exprime par :

— un vecteur contrainte supplémentaire sur $\mathrm{S_T}$ — voir (6.4b) — de valeur [6] :

$$\vec{\mathrm{T}}_{\mathrm{d}}^{*} = \frac{\mathrm{E}\alpha(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)}{1-2\nu}\vec{n} \tag{6.75}$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à la surface $\mathrm{S_T}$;

— une force de volume supplémentaire sur V :

$$\vec{f}_{\mathrm{d}}^{*} = -\frac{\mathrm{E}\alpha}{1-2\nu}\,\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T} \tag{6.76}$$

On remarquera que ces forces volumiques dérivent du potentiel :

$$-\frac{\mathrm{E}\alpha}{1-2\nu}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0) \tag{6.77}$$

Ce chargement supplémentaire est à ajouter au chargement réel $\vec{\mathrm{T}}_{\mathrm{d}}$ et $\vec{f}_{\mathrm{d}}$. Le problème de thermoélasticité est résumé dans le tableau 6.3. La contrainte réelle est donnée par :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*} - \frac{\mathrm{E}\alpha}{1-2\nu}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\delta_{ij} \tag{6.78}$$

(5) Le contre-exemple classique est celui de l'eau dont la densité est maximale à 4 °C.

(6) Ne pas confondre le vecteur contrainte $\vec{\mathrm{T}}$ et la température T.

Équations cinématiques	
compatibilité	
$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{u} + (\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{u})^{\top})$ sur V	$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
conditions limites en déplacement	
$\vec{u} = \vec{u}_{\text{d}}$ sur S_{u}	$u_i = u_{\text{d}i}$
Équations d'équilibre	
équilibre en volume	
$\vec{\text{div}}\,\overline{\overline{\sigma}}^{*} + \vec{f}_{\text{d}} + \vec{f}^{*}_{\text{d}} = \vec{0}$ sur V	$\sigma^{*}_{ij,j} + f_{\text{d}i} + f^{*}_{\text{d}i} = 0$
équilibre en surface : conditions limites en contrainte	
$\overline{\overline{\sigma}}^{*} \cdot \vec{n} = \vec{\text{T}}_{\text{d}} + \vec{\text{T}}^{*}_{\text{d}}$ sur S_{T}	$\sigma^{*}_{ij} n_j = \text{T}_{\text{d}i} + \text{T}^{*}_{\text{d}i}$
symétrie des contraintes	
$\overline{\overline{\sigma}}^{*} = \overline{\overline{\sigma}}^{*\top}$ sur V	$\sigma^{*}_{ij} = \sigma^{*}_{ji}$
Équations de comportement	
$\overline{\overline{\sigma}}^{*} = \lambda\,\text{tr}(\overline{\overline{\epsilon}})\overline{\overline{\text{I}}} + 2\mu\overline{\overline{\epsilon}}$ sur V	$\sigma^{*}_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$

Tableau 6.3 – Équations d'un problème de thermoélasticité linéaire isotrope

7

Problèmes classiques d'élasticité

Les problèmes détaillés dans ce chapitre permettent d'illustrer les techniques de résolution du chapitre précédent.

7.1 Cylindre sous pression

On considère le cylindre se section circulaire et de rayons intérieur a et extérieur b indiqué sur la figure 7.1. Il est soumis à l'action de pressions interne p_i et externe p_e uniformément réparties.

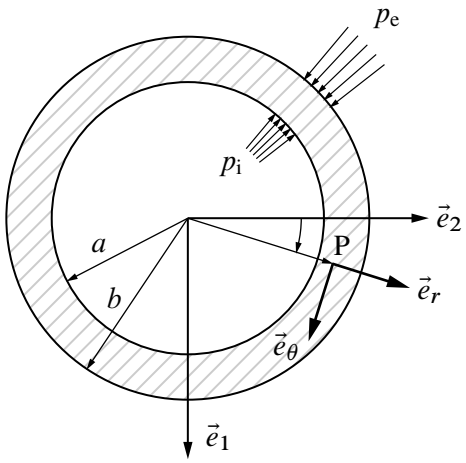


Figure 7.1 – Cylindre sous pression

Résolution Si le cylindre est suffisamment long, il est raisonnable de faire l'hypothèse de l'état plan de déformation. Il est également tout indiqué de choisir des coordonnées cylindriques, le vecteur $\vec{e}_z$ coïncidant avec celui du cylindre. Par symétrie, le déplacement d'un point quelconque ne peut être que radial et indépendant de θ et z :

$$\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r \tag{7.1}$$

On en déduit par la formule du rotationnel en coordonnées cylindriques (2.68) que $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = \vec{0}$. Les équations d'équilibre en déplacements (6.44) donnent :

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ru_r)\right) + f_r = 0 \tag{7.2}$$

En l'absence de force de volume, cette équation s'intègre facilement. On obtient :

$$u_r(r) = \mathrm{C}_1 r + \frac{\mathrm{C}_2}{r} \tag{7.3}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. Pour les déterminer, il nous reste à imposer les conditions limites en contrainte. Il faut d'abord calculer les déformations puis les contraintes associées au champ de déplacement. Les déformations sont la partie symétrique du gradient des déplacements. En utilisant la formule du gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques (2.70), on obtient :

$$\epsilon_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad ; \quad \epsilon_{\theta\theta} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad ; \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{rz} = \epsilon_{\theta z} = 0 \tag{7.4}$$

Il n'y a donc pas de déformation de cisaillement, ce qui était évident *a priori* du fait de la symétrie du problème. En appliquant la loi de Hooke (6.53), il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{C_1}{1-2\nu} + \frac{C_2}{r^2}\right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\nu E C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

La condition limite en contrainte s'exprime par :

$$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d \tag{7.6}$$

avec, sur la face intérieure [(1)] :

$$\vec{n} = -\vec{e}_r \quad ; \quad \vec{T}_d = p_i \vec{e}_r \tag{7.7}$$

En utilisant (7.7), la relation (7.6) s'écrit sous forme matricielle, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{rr}(r=a) = -p_i \tag{7.8}$$

Pour la face extérieure, on a :

$$\vec{n} = \vec{e}_r \quad ; \quad \vec{T}_d = -p_e \vec{e}_r \tag{7.9}$$

et :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{rr}(r=a) = -p_e \tag{7.10}$$

Les deux conditions sur σ_{rr} fournissent les deux constantes. Tous calculs faits, on obtient :

$$C_1 = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{b^2 - a^2} \quad ; \quad C_2 = \frac{1+\nu}{E} \frac{p_i - p_e}{1/a^2 - 1/b^2} \tag{7.11}$$

(1) Il est essentiel de comprendre l'origine des signes.

Les contraintes non nulles valent donc :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{a^2 p_\mathrm{i} - b^2 p_\mathrm{e}}{b^2 - a^2} - \frac{p_\mathrm{i} - p_\mathrm{e}}{r^2/a^2 - r^2/b^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{a^2 p_\mathrm{i} - b^2 p_\mathrm{e}}{b^2 - a^2} + \frac{p_\mathrm{i} - p_\mathrm{e}}{r^2/a^2 - r^2/b^2} \\ \sigma_{zz} &= 2\nu \frac{a^2 p_\mathrm{i} - b^2 p_\mathrm{e}}{b^2 - a^2}\end{aligned} \tag{7.12}$$

Pour le déplacement u_r, on trouve enfin :

$$u_r = \frac{1}{2\mu(b^2 - a^2)}\left((1-2\nu)(a^2 p_\mathrm{i} - b^2 p_\mathrm{e})r + a^2 b^2 (p_\mathrm{i} - p_\mathrm{e})\frac{1}{r}\right) \tag{7.13}$$

Cette exemple a permis d'illustrer l'approche en déplacement (voir section 6.3.1) qui part d'une forme du champ de déplacement et impose toutes les conditions sur ce champ.

> **Remarques —** Les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ dans la section du cylindre sont indépendantes des constantes élastiques. Ceci est en accord avec ce que nous avions observé en section 6.3.4. En clair, que le cylindre soit en plexiglas ou en acier, ces contraintes seront les mêmes [(2)]. La contrainte σ_{zz}, les déformations ainsi que les déplacements dépendent, par contre, des constantes élastiques.
>
> Pour obtenir les résultats correspondant à l'état plan de contrainte, il suffit de poser la forme de σ_{zz} et d'effectuer les substitutions (6.67). Celles-ci ne modifient pas les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ puisqu'elles sont indépendantes des constantes élastiques. Enfin, la déformation ϵ_{zz} se calcule par (6.61).

Si l'épaisseur e du cylindre est faible devant le rayon moyen $\mathrm{R} = (a+b)/2$, on obtient, au premier ordre, les contraintes suivantes en état plan de déformation :

$$\sigma_{rr} \simeq 0 \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} \simeq \frac{p\mathrm{R}}{e} \quad ; \quad \sigma_{zz} \simeq \frac{\nu p\mathrm{R}}{e} \quad ; \quad u_r = \frac{(1-\nu^2)p\mathrm{R}^2}{\mathrm{E}e} \tag{7.14}$$

où $p = p_\mathrm{i} - p_\mathrm{e}$. Ces formules simplifiées permettent notamment de déterminer rapidement les contraintes dans la paroi d'une chaudière cylindrique sous pression.

7.2 Traction d'un barreau prismatique

Considérons le barreau de la figure 7.2 de longueur L, largeur $2h$ et épaisseur unitaire faible devant h et ℓ. Sa section droite a donc une aire $\mathrm{A} = 2h$. Il est soumis à des forces surfaciques d'intensité σ uniformément réparties sur ses extrémités.

Résolution Ce problème illustre l'utilisation d'une fonction de contrainte d'Airy évoquée en section 6.3.5. Considérons une fonction d'Airy de la forme :

$$\phi(x,y) = \mathrm{C}_1 x^2 + \mathrm{C}_2 xy + \mathrm{C}_3 y^2 \tag{7.15}$$

(2) Cette propriété est le fondement de la photo-élasticité qui permet de visualiser des contraintes dans du plexiglas dont les propriétés optiques varient avec la contrainte.

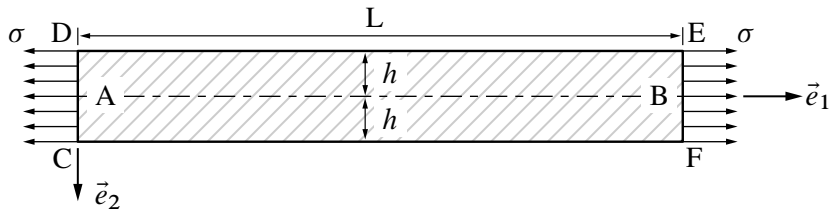


Figure 7.2 – Traction d'un barreau prismatique

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes à déterminer. Cette fonction d'Airy est biharmonique. Les contraintes correspondantes valent :

$$\sigma_{xx} = 2C_3 \quad ; \quad \sigma_{yy} = 2C_1 \quad ; \quad \sigma_{xy} = -C_2 \tag{7.16}$$

Il reste à imposer les conditions aux limites en contrainte $\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d$:
— sur la face EF, $\vec{n} = \vec{e}_x$ et $\vec{T}_d = \sigma \vec{e}_x$, soit :

$$\begin{bmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_3 = \sigma/2, \; C_2 = 0 \tag{7.17}$$

— sur la face CD, $\vec{n} = -\vec{e}_x$ et $\vec{T}_d = -\sigma \vec{e}_x$, soit :

$$\begin{bmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_3 = \sigma/2, \; C_2 = 0 \tag{7.18}$$

— sur la face DE, $\vec{n} = -\vec{e}_y$ et $\vec{T}_d = \vec{0}$, soit :

$$\begin{bmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \; C_1 = 0 \tag{7.19}$$

— sur la face CF, $\vec{n} = \vec{e}_y$ et $\vec{T}_d = \vec{0}$, soit :

$$\begin{bmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \; C_1 = 0 \tag{7.20}$$

Les contraintes sont donc uniformes sur le barreau et valent :

$$\sigma_{xx} = \sigma \quad ; \quad \sigma_{yy} = 0 \quad ; \quad \sigma_{xy} = 0 \tag{7.21}$$

Si les faces avant et arrière du barreau sont libres, on est en état plan de contrainte et les déformations sont données par (6.60) :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E} \quad ; \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{\nu\sigma}{E} \quad ; \quad \epsilon_{xy} = 0 \tag{7.22}$$

Pour obtenir les déplacements, il faut intégrer les relations déformations-déplacements qui s'écrivent ici :

$$\epsilon_{xx} = u_{x,x} \quad ; \quad \epsilon_{yy} = u_{y,y} \quad ; \quad \epsilon_{xy} = \frac{u_{x,y} + u_{y,x}}{2} \tag{7.23}$$

Les deux premières donnent, respectivement :

$$u_x = \frac{\sigma}{\mathrm{E}} x + f(y) \quad ; \quad u_y = -\frac{\nu\sigma}{\mathrm{E}} x + g(x) \tag{7.24}$$

où $f(y)$ et $g(x)$ sont des fonctions quelconques de y et x respectivement. En reportant (7.24) dans la troisième équation de (7.23), il vient :

$$f(y)_{,y} + g(x)_{,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y)_{,y} = c \quad ; \quad g(x)_{,x} = -c \tag{7.25}$$

où c est une constante arbitraire. En intégrant (7.25) puis en reportant dans (7.24), on trouve :

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \frac{\sigma}{\mathrm{E}} x + a + cy \\ u_y(x,y) &= -\frac{\nu\sigma}{\mathrm{E}} x + b - cx \end{aligned} \tag{7.26}$$

où a et b sont également des constantes arbitraires. Les déplacements ne sont déterminés qu'à un mouvement de corps rigide près, représenté par les fonctions $f(y)$ et $g(x)$. Les constantes a et b représentent une translation et c une rotation. Les constantes a, b et c ne peuvent être déterminées qu'en imposant trois conditions d'appui adéquates. Voici un certain nombre de conditions d'appui valides :

— $u_x = u_y = u_{y,x} = 0$ en $(0,0)$: cela fixe le point A et empêche toute rotation autour de ce point ;
— $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_y = 0$ en $(\mathrm{L},0)$: cela fixe le point A et empêche le mouvement du point B selon $\vec{e}_y$;
— $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_x = 0$ en $(0,-h)$: cela fixe le point A et empêche le déplacement du point D selon $\vec{e}_x$.

Voici, par contre, un certain nombre de conditions d'appui non valides car elles ne fixent pas complètement les modes rigides ou empêchent le corps de se déformer :

— $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_x = 0$ en $(\mathrm{L},0)$
— $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_y = 0$ en $(0,-h)$
— $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_x = 0$ en $(\mathrm{L},-h)$
— $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_y = 0$ en $(\mathrm{L},-h)$

Quelles que soient les conditions d'appui valides choisies, celles-ci ne modifient en rien les déformations et contraintes à l'intérieur du barreau.

7.3 Torsion d'un barreau prismatique

On considère, figure 7.3, un barreau de surface latérale $\mathrm{S_e}$ et d'extrémités $\mathrm{S_0}$ et $\mathrm{S_L}$. La surface $\mathrm{S_e}$ est libre. Les déplacements selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont nuls sur la section $\mathrm{S_0}$ et ils sont imposés à $u_x = -\Theta \mathrm{L} y$ et $u_y = \Theta \mathrm{L} x$ sur la section $\mathrm{S_L}$. Ce mode de déplacement correspond à une rotation d'un angle Θ autour de l'axe $\vec{e}_z$ de la surface $\mathrm{S_L}$. La composante z du vecteur contrainte est nulle sur $\mathrm{S_0}$ et $\mathrm{S_L}$.

Résolution C'est Saint-Venant, en 1855, qui s'est le premier intéressé à la résolution de ce problème. Il a postulé la solution sous la forme :

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z) &= -\Theta z y \\ u_y(x,y,z) &= \Theta z x \\ u_z(x,y,z) &= \Theta \psi(x,y) \end{aligned} \tag{7.27}$$

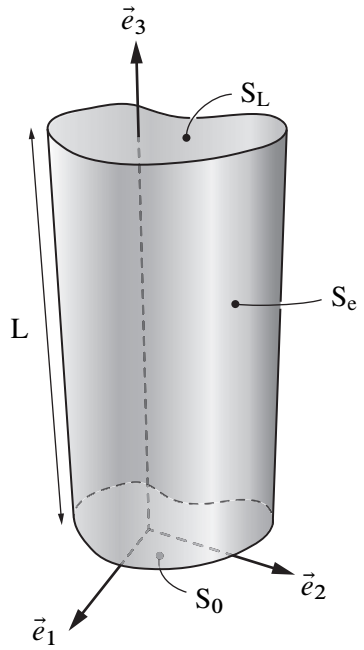


Figure 7.3 – Barreau prismatique

et a montré que cette forme permet de satisfaire toutes les équations. C'est ce que nous allons faire. Le champ de déplacement (7.27) correspond à une rotation de chaque section du barreau. L'angle Θ représente la rotation entre deux sections distantes de un mètre. Cela se voit immédiatement si on exprime (7.27) en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} u_r &= 0 \\ u_\theta &= \Theta z r \\ u_z &= \Theta \psi(x, y) \end{aligned} \tag{7.28}$$

La fonction ψ représente le gauchissement de la section lors de sa rotation.

Essayons maintenant de vérifier toutes les équations du problème élastique. Les déformations associées au champ de déplacement (7.27) sont données par :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = 0 \tag{7.29}$$
$$\epsilon_{xz} = (u_{z,x} + u_{x,z})/2 = \Theta(\psi_{,x} - y)/2 \tag{7.30}$$
$$\epsilon_{yz} = (u_{z,y} + u_{y,z})/2 = \Theta(\psi_{,y} + x)/2 \tag{7.31}$$

Les contraintes correspondantes sont :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \tag{7.32}$$
$$\sigma_{xz} = \mu(u_{z,x} + u_{x,z}) = \mu\Theta(\psi_{,x} - y) \tag{7.33}$$
$$\sigma_{yz} = \mu(u_{z,y} + u_{y,z}) = \mu\Theta(\psi_{,y} + x) \tag{7.34}$$

On note que ces contraintes sont indépendantes de la coordonnées z, la seule équation d'équilibre en volume non triviale est donc :

$$\sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} = 0 \tag{7.35}$$

Cette équation indique que nous pouvons exprimer les contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} à l'aide d'une seule fonction $\phi(x, y)$ appelée *fonction de contrainte de Prandtl* par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \phi_{,y} \\ \sigma_{yz} &= -\phi_{,x} \end{aligned} \tag{7.36}$$

Par les équations (7.34) et (7.36), on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_{,y} &= \mu\Theta(\psi_{,x} - y) \\ -\phi_{,x} &= \mu\Theta(\psi_{,y} + x) \end{aligned} \tag{7.37}$$

En éliminant ψ entre ces deux équations, on trouve que la fonction de contrainte ϕ doit vérifier :

$$\Delta\phi = -2\mu\Theta \tag{7.38}$$

Imposons maintenant l'équilibre en surface sur la surface latérale S_e :

$$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d \tag{7.39}$$

où $\vec{n} = \cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y$ et $\vec{T}_d = \vec{0}$, ce qui entraîne :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xz}\cos\alpha + \sigma_{yz}\sin\alpha = 0 \tag{7.40}$$

L'angle α est l'angle que fait la normale extérieure avec l'axe $\vec{e}_x$ comme indiqué sur la figure 7.4. Soit s, l'abscisse curviligne du contour : on écrit les contraintes selon la fonction

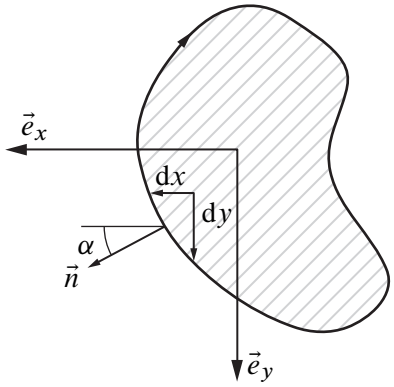


Figure 7.4 – Section d'un barreau prismatique

de contrainte ϕ de (7.36) et la condition de surface libre (7.40) devient :

$$\sigma_{xz}\cos\alpha + \sigma_{yz}\sin\alpha = \sigma_{xz}y_{,s} - \sigma_{yz}x_{,s} = \phi_{,y}y_{,s} + \phi_{,x}x_{,s} = \phi_{,s} = 0 \tag{7.41}$$

Pour vérifier l'équilibre sur la surface latérale, il suffit donc que ϕ soit constant sur cette surface. Concernant les conditions aux limites en contrainte, il faut s'assurer que :

$$(\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_z = 0 \quad \text{sur} \quad S_0 \quad \text{et} \quad S_L \tag{7.42}$$

Ces conditions sont trivialement vérifiées car $\sigma_{zz} = 0$.

Résumons les résultats obtenus. Pour résoudre le problème d'un barreau en torsion de section quelconque, il suffit de trouver une fonction ϕ vérifiant l'équation (7.38) dans la section et s'annulant sur le contour de la section. Une fois ϕ connu, les contraintes sont définies par :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \quad ; \quad \sigma_{xz} = \phi_{,y} \quad ; \quad \sigma_{yz} = -\phi_{,x} \tag{7.43}$$

Nous sommes assurés que ces contraintes vérifient bien l'équilibre en volume et en surface. Finalement, les déformations sont données par [3] :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2\mu}\phi_{,y} \quad ; \quad \epsilon_{yz} = -\frac{1}{2\mu}\phi_{,x} \tag{7.44}$$

Pour trouver les déplacements, il reste à calculer ψ à partir de ϕ en utilisant (7.37).

Dans la formulation du problème de la torsion d'un barreau, nous avons considéré que la surface supérieure tourne d'un angle Θ et que la section inférieure ne tourne pas. Pour parvenir à cette rotation relative, il faut des efforts. Ce sont les réactions correspondant à la cinématique imposée. Calculons la résultante de efforts sur la section supérieure. La force résultante selon $\vec{e}_x$ est :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_x &= \int_{\mathrm{S_L}} (\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x \, \mathrm{dS} = \int_{\mathrm{S_L}} \sigma_{xz} \, \mathrm{dS} \\ &= \int_{\mathrm{S_L}} \phi_{,y} \, \mathrm{dS} = \int_{\mathrm{S_L}} \vec{\mathrm{grad}}\, \phi \cdot \vec{e}_y \, \mathrm{dS} = \oint_{(\mathrm{C})} \phi \cos\alpha \, \mathrm{dC} = 0 \end{aligned} \tag{7.45}$$

On s'est servi de la formule (2.43) ainsi que du fait que ϕ est nul sur le contour (C) de $\mathrm{S_L}$. De même, on montre que la force résultante selon $\vec{e}_y$ est nulle. Bien sûr, la force résultante selon $\vec{e}_z$ est également nulle puisque selon $\vec{e}_z$, la section est libre d'effort.

Concernant le moment résultant $\vec{\mathrm{M}}$ appliqué à la section, il se calcule par :

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{T}} &= \int_{\mathrm{S_L}} \vec{x} \wedge (\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{e}_z) \, \mathrm{dS} = \int_{\mathrm{S_L}} \vec{x} \wedge (\phi_{,y}\vec{e}_x - \phi_{,x}\vec{e}_y) \, \mathrm{dS} \\ &= -\int_{\mathrm{S_L}} (\vec{x} \cdot \vec{\mathrm{grad}}\, \phi)\vec{e}_z \, \mathrm{dS} = \int_{\mathrm{S_L}} (-\operatorname{div}(\phi\vec{x}) + \operatorname{div}(\vec{x})\phi)\vec{e}_z \, \mathrm{dS} \end{aligned} \tag{7.46}$$

La dernière égalité a été obtenue d'après (2.83). Nous pouvons poursuivre en utilisant la formule de Green-Ostrogradski (2.43) et le fait que $\phi = 0$ sur (C) et $\operatorname{div}\vec{x} = 2$:

$$\int_{\mathrm{S_L}} -\operatorname{div}(\phi\vec{x}) + \operatorname{div}(\vec{x})\phi \, \mathrm{dS} = \oint_{(\mathrm{C})} (\phi\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{e}_z \, \mathrm{dC} + 2\int_{\mathrm{S_L}} \phi\vec{e}_z \, \mathrm{dS} = 2\int_{\mathrm{S_L}} \phi \, \mathrm{dS} \, \vec{e}_z \tag{7.47}$$

Le couple imposé est dirigé selon $\vec{e}_z$ et vaut deux fois l'intégrale de ϕ sur la section. Le calcul du moment résultant sur la section $\mathrm{S_0}$ donne le moment opposé. On a donc bien l'équilibre du barreau.

Si on fait le rapport entre le moment de torsion $\mathrm{M_T}$ et l'angle de torsion Θ, on obtient une quantité appelée *rigidité torsionnelle* et notée $\mathrm{R_T}$ qui est une caractéristique dépendant de la géométrie de la section et du matériau.

(3) Il est important de savoir interpréter pourquoi certaines composantes sont nulles et d'autres non nulles à l'aide de la section 3.9.2.

Remarque — L'équation (7.47) n'est valable que si la section du barreau est connexe. Si la section du barreau n'est pas simplement connexe, c'est-à-dire que cette section a des trous, on peut toujours imposer à ϕ d'être nul sur le contour extérieur mais on imposera seulement à ϕ d'être constant sur les autres contours.

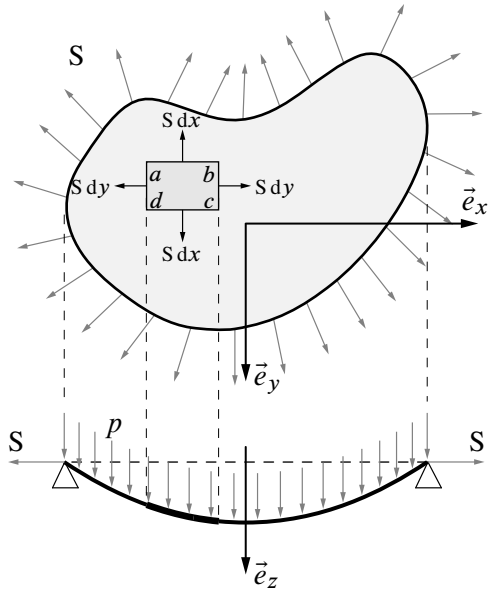


Figure 7.5 – Analogie de la membrane

On peut interpréter les équations que doit satisfaire ϕ par l'analogie dite *de la membrane*. Considérons une membrane de la forme de la section de la poutre et tendue dans son plan par une tension S, selon la figure 7.5. Si une pression p est appliquée sur la membrane, celle-ci s'enfonce verticalement d'un déplacement w solution de l'équation :

$$\Delta w = -\frac{p}{\mathrm{S}} \tag{7.48}$$

En supposant $w = 0$ sur son contour, les équations régissant w sont identiques aux équations régissant ϕ pour autant que l'on remplace $2\mu\Theta$ par p/S. Il faut alors travailler sur la section selon la version intrinsèque de (7.36) :

$$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{e}_z = \vec{\mathrm{grad}}\,\phi \wedge \vec{e}_z \tag{7.49}$$

et la version intrinsèque de (7.37) :

$$\vec{\mathrm{grad}}\,\phi \wedge \vec{e}_z = \mu\Theta(\vec{\mathrm{grad}}\,\psi + \vec{e}_z \wedge \vec{x}) \tag{7.50}$$

À titre d'exemple, prenons le cas d'un barreau à section circulaire illustré sur la figure 7.6. Par symétrie et en ayant à l'esprit l'analogie de la membrane, le champ ϕ ne dépend que de la coordonnée r en coordonnées cylindriques. La formule du laplacien est alors pour la quantité ϕ :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = -2\mu\Theta \tag{7.51}$$

d'où, en tenant compte de la condition $\phi = 0$ en $r = \mathrm{R}$ et en imposant à ϕ de rester fini en $r = 0$:

$$\phi = \frac{\mu\Theta}{2}\left(\mathrm{R}^2 - r^2\right) \tag{7.52}$$

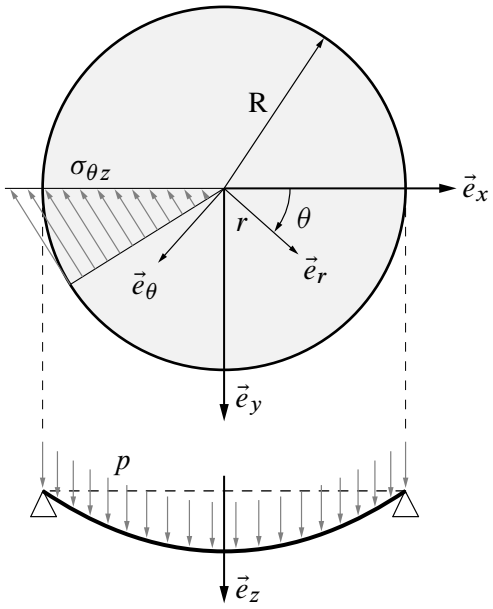


Figure 7.6 – Barreau à section circulaire

L'utilisation de (7.49) en coordonnées cylindriques donne [4] :

$$\sigma_{rz} = 0 \quad ; \quad \sigma_{\theta z} = \mu\Theta r \quad ; \quad \epsilon_{rz} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{\theta z} = \Theta r/2 \tag{7.53}$$

Il reste à calculer le déplacement. Le gauchissement ψ se calcule par (7.50) et on obtient $\psi = 0$. Les déplacements sont donc :

$$\begin{aligned} u_r &= 0 \\ u_\theta &= \Theta z r \\ u_z &= \Theta\psi(x,y) \end{aligned} \tag{7.54}$$

Dans le cas particulier d'un barreau à section circulaire, il n'y a donc pas de gauchissement de la section lors de la torsion. Le moment de torsion est calculé par (7.47) et vaut :

$$\mathrm{M_T} = \mu\Theta\frac{\pi \mathrm{R}^4}{2} \tag{7.55}$$

La rigidité torsionnelle vaut donc :

$$\mathrm{R_T} = \mu\frac{\pi \mathrm{R}^4}{2} \tag{7.56}$$

(4) Il est recommandé de savoir interpréter pourquoi $\epsilon_{rz} = 0$ et $\epsilon_{\theta z} \neq 0$ à la lumière de la section 3.9.2.

8

Thermodynamique et lois de comportement

8.1 Premier principe

La première loi de la thermodynamique (aussi appelée loi de bilan de l'énergie) a déjà été présentée succinctement dans le chapitre 4. Nous reprenons ici cette présentation de manière plus approfondie en faisant ressortir les conséquences mécaniques de cette loi. Cette loi met en relation trois quantités : l'énergie totale du système, le taux de chaleur reçue et la puissance des efforts extérieurs.

Par définition, l'énergie totale d'un système ω est la somme de l'énergie interne E et de l'énergie cinétique K :

$$\mathrm{E}(\omega) + \mathrm{K}(\omega) = \int_\omega \rho\Big(e + \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\Big)\,\mathrm{d}v \tag{8.1}$$

où l'on note e l'énergie interne massique.

Par analogie avec les hypothèses faites pour les efforts extérieurs, il est normal de supposer qu'un système reçoit de la chaleur à travers sa surface ou directement en volume :

$$\dot{\mathrm{Q}}(\omega) = \int_{\partial\omega} q\,\mathrm{d}s + \int_\omega r\,\mathrm{d}v \tag{8.2}$$

où q est la densité *surfacique* de taux de chaleur reçue et r la densité *volumique* du taux de chaleur reçue. La chaleur reçue à travers la frontière est l'analogue de l'action du vecteur contrainte et la chaleur reçue en volume est l'analogue de la force de volume.

La source volumique de chaleur peut venir d'une action à distance, par exemple par le biais de phénomènes électro-magnétiques comme le chauffage par induction ou le four micro-onde, ou bien venir d'un phénomène local non mécanique comme une réaction chimique de combustion ou de changement de phase. La densité surfacique du taux de chaleur reçue q dépend du point considéré sur la surface et la normale à cette surface. Le théorème 4.2 nous apprend que cette dépendance est linéaire :

$$q = -\vec{q}\cdot\vec{n} \tag{8.3}$$

Par définition, $\vec{q}(\vec{x},t)$ est le vecteur courant de chaleur. Le signe négatif s'explique par le fait que $\vec{n}$ est la normale extérieure au système.

Finalement, nous sommes en mesure d'écrire le premier principe de la thermodynamique. À chaque instant, la dérivée particulaire de l'énergie totale (somme des énergies interne et cinétique) est la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système $\mathcal{P}^{\mathrm{e}}$ et du taux de chaleur reçue par le système $\dot{\mathrm{Q}}$:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{E}+\mathrm{K})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}^{\mathrm{e}} + \dot{\mathrm{Q}} \tag{8.4}$$

ou plus explicitement tel que cela est écrit dans le tableau 4.2 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\omega}\rho(e+\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\,)\,\mathrm{d}v=\int_{\partial\omega}(q+\vec{\mathrm{T}}\cdot\vec{v}\,)\,\mathrm{d}s+\int_{\omega}(r+\vec{f}\cdot\vec{v}\,)\,\mathrm{d}v \tag{8.5}$$

La puissance extérieure est fournie au système par les forces imposées et par les réactions sous les déplacements imposés. C'est donc une puissance mécanique fournie au système. Par contre, le terme $\dot{\mathrm{Q}}$ est une puissance fournie au système sous forme de chaleur. Le premier principe de la thermodynamique permet de relier ces deux puissances dans une même équation.

Il est intéressant de combiner le bilan de l'énergie (8.4) au théorème de l'énergie cinétique 5.2 :

$$\mathcal{P}^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{d}t}+\mathcal{P}^{\mathrm{i}} \tag{8.6}$$

pour obtenir :

$$\mathcal{P}^{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t}-\dot{\mathrm{Q}} \tag{8.7}$$

Les équations (8.6) et (8.7) sont illustrées sur la figure 8.1. La puissance extérieure fournie est transformée en mouvement ($\mathrm{dK}/\mathrm{d}t$) et/ou en déformation ($\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$). Ensuite, la déformation du milieu entraîne un changement de l'énergie de ce milieu ($\mathrm{dE}/\mathrm{d}t$) et/ou libère de la chaleur ($-\dot{\mathrm{Q}}$).

La relation (8.7) s'écrit sous forme locale :

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{puissance}\\ \text{intérieure}\\ \text{volumique}}}{\sigma_{ij}v_{i,j}} \quad = \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{variation}\\ \text{d'énergie}\\ \text{interne}}}{\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}} \quad + \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{taux de}\\ \text{chaleur}\\ \text{dégagée}}}{q_{i,i}-r} \tag{8.8}$$

et est communément appelée *équation de la chaleur*.

8.2 Second principe

Le premier principe de la thermodynamique fait intervenir deux concepts : la notion d'énergie interne et de flux de chaleur. De même, le second principe introduit deux nouveaux concepts, à savoir la température et l'entropie.

La température absolue notée T se mesure en Kelvin [K] n'est jamais négative et peut être définie en chaque point du milieu et à chaque instant : si cela n'est pas possible, nous ne sommes pas en présence d'un milieu continu.

L'entropie notée S est une énergie par degré [$\mathrm{J\,K^{-1}}$]. Pour un système, c'est la somme de chacune des parties du système. On suppose qu'en chaque point on est capable de définir une entropie spécifique, c'est-à-dire une entropie par unité de masse, $s(\vec{x},t)$. L'entropie du système ω s'écrit alors :

$$\mathrm{S}=\int_{\omega}\rho s(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v \tag{8.9}$$

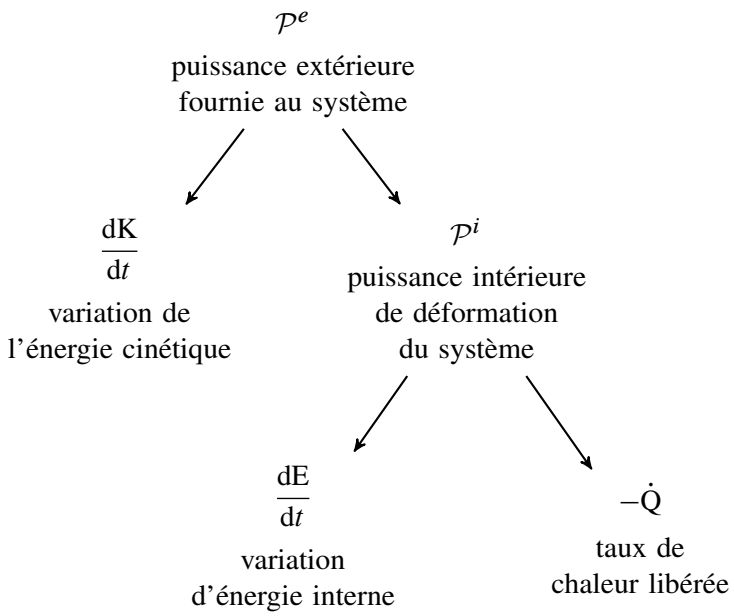


Figure 8.1 – Bilan d'énergie

L'entropie n'est définie qu'à une constante près pour un système donné. Il suffit de fixer s en un point et à un instant pour lever cette indétermination.

Le second principe s'exprime par une inégalité :

$$\frac{dS}{dt} \geqslant \int_\omega \frac{r}{T}\, dv - \int_{\partial\omega} \frac{\vec{q}\cdot\vec{n}}{T}\, ds \tag{8.10}$$

On voit que si T et dS/dt sont fixés, l'inégalité (8.10) fournit une inégalité portant *a priori* sur le taux de chaleur que peut recevoir ω. Si, à l'instant t, la température T est uniforme, la condition (8.10) donne exactement une borne supérieure du taux de quantité de chaleur que peut recevoir ω, à savoir $T\frac{dS}{dt}$.

L'inégalité (8.10) peut encore s'écrire :

$$\int_\omega \left[\rho\frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)\right] dv \geqslant 0 \tag{8.11}$$

en utilisant la formule de Gauss-Ostrogradski et le théorème 4.3 sur la dérivation d'une intégrale prise par rapport à une distribution de masse. Sous forme locale, nous avons :

$$\rho\frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) \geqslant 0 \tag{8.12}$$

Il est souvent intéressant d'exprimer cette inégalité en ne faisant pas apparaître le terme de source de chaleur r. On peut éliminer r en se servant du premier principe (8.8). Comme T est positif, on obtient :

$$\rho\left(T\frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt}\right) + \sigma_{ij}v_{i,j} - \frac{\vec{q}}{T}\cdot\vec{\operatorname{grad}}\,T \geqslant 0 \tag{8.13}$$

Il est aussi indiqué d'introduire l'énergie libre spécifique, définie par :

$$\psi = e - Ts \tag{8.14}$$

qui permet d'écrire (8.13) sous la forme de l'inégalité :

$$-\rho\Big(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}+s\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}\Big)+\sigma_{ij}\,v_{i,j}-\frac{\vec{q}\cdot\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\geqslant 0 \tag{8.15}$$

souvent appelée *inégalité de Clausius-Duheim*. L'énergie libre s'exprime en fonction de l'entropie comme variable indépendante alors que la variable indépendante est la température pour l'énergie libre.

Le membre de gauche de (8.15) est la dissipation notée d. Le second principe nous apprend donc que la dissipation doit toujours être positive. Cette dissipation se compose de deux termes :

— la dissipation intrinsèque (ou mécanique) volumique :

$$d^{\mathrm{m}}=-\rho\Big(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}+s\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}\Big)+\sigma_{ij}\,v_{i,j} \tag{8.16}$$

— la dissipation volumique thermique :

$$d^{\mathrm{th}}=-\frac{\vec{q}\cdot\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T}}{\mathrm{T}} \tag{8.17}$$

Il est d'usage d'imposer indépendamment le caractère positif de ces deux dissipations.

La positivité de la dissipation thermique implique que le produit scalaire du vecteur courant de chaleur $\vec{q}$ et du gradient de température est négatif. Lorsque la conduction est isotrope, la relation liant $\vec{q}$ et $\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T}$ s'écrit :

$$\vec{q}=-k\,\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T} \tag{8.18}$$

où k est le coefficient de conduction. L'équation (8.18) est appelée *loi de Fourier*. Habituellement, on se contente de supposer que k ne dépend que de la température ou même, plus particulièrement encore, que k est une constante.

L'expression de l'énergie libre massique pour un milieu thermoélastique dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations est :

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{T},\bar{\bar{\epsilon}})&=\psi_0-s_0(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\\&\quad+\frac{1}{2\rho_0}\Big(\lambda\epsilon_{kk}^2+2\mu\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}-\frac{2\mathrm{E}}{1-2\nu}\alpha(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\epsilon_{kk}-\frac{\rho_0 c}{\mathrm{T}_0}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)^2\Big)\end{aligned} \tag{8.19}$$

où ψ_0 est l'énergie libre à déformation nulle et température de référence T_0, s_0 est l'entropie à déformation nulle et température de référence T_0 et c est la chaleur spécifique à déformation constante.

Calculons l'expression de la dissipation mécanique pour un matériau thermoélastique. Il vient [(1)] :

$$\begin{aligned}d^{\mathrm{m}}&=-\rho_0\Big(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}+s\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}\Big)+\sigma_{ij}\,v_{i,j}\\&=-\rho_0\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{T}}\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\psi}{\partial\epsilon_{ij}}\dot{\epsilon}_{ij}+s\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}\Big)+\sigma_{ij}\,v_{i,j}\\&=-\Big(\lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\epsilon_{ij}-\frac{\mathrm{E}\alpha}{1-2\nu}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\delta_{ij}\Big)v_{i,j}+\sigma_{ij}\,v_{i,j}=0\end{aligned} \tag{8.20}$$

(1) Nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations et les densités actuelles ρ sont très proches des densités initiales avant déformation ρ_0.

où on s'est servi de $\dot{\epsilon}_{ij} = v_{i,j}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{T}} = -s$ par définition de l'énergie libre ainsi que de la relation de comportement (6.74).

La dissipation mécanique est donc nulle pour un matériau thermoélastique : il est réversible.

Bibliographie

[1] Javier BONET et Richard WOOD. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997. ISBN : 0 521 57272 X (cf. page 25).

[2] Serge CESCOTTO. *Éléments de mécanique des solides déformables*. Université de Liège, 1988 (cf. page 13).

[3] Jean GARRIGUES. *Mécanique des milieux continus*. École Centrale de Marseille, 2002. OAI : `cel.archives-ouvertes.fr:cel-00696063` (cf. page 10).

[4] Paul GERMAIN. *Cours de Mécanique des milieux continus*. Tome 1. Masson, 1973 (cf. pages 47, 49).

[5] Donatien LE HOUËDEC. *Mécanique des solides*. École Centrale de Nantes, 1999 (cf. pages 58, 63, 65, 66).

[6] Leonid SÉDOV. *Mécanique des milieux continus*. Tome 1. MIR, Moscou, 1973 (cf. page 13).

[7] Jean-François SINI. *Mécanique des Fluides*. École centrale de Nantes, 1999. OAI : `cel.archives-ouvertes.fr:cel-00356205` (cf. page 63).