utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

NOTES DE COURS DE l'UV MQ41

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

INTRODUCTION AUX CALCULS DES STRUCTURES

Automne 2004

Jérôme BASTIEN

Document compilé le 12 janvier 2011

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/
ou en français
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr

Table des matières

Avant-propos v

Dangers et attraits de la modélisation vii

partie 1. (Ré)-visions 1

Chapitre 1. Rappels de résistance des matériaux 3
1.1. Introduction : principes de la résistance des matériaux et de la mécanique des milieux continus 3
1.2. Le cadre théorique de la RDM dans le cas des poutres 4
1.3. Les équations d'équilibre local en RDM pour les poutres planes 16
1.4. Étude des sollicitations simples 23
1.5. Étude des sollicitations composées 30
1.6. Un mot sur l'aspect isostatique des structures étudiées 30
1.7. Déplacement des sections droites dans le cas de poutres planes 30
1.8. Finalité de la résistance des matériaux 31

Chapitre 2. Cercles de Mohr 33
2.1. Problème tridimensionnel 33
2.2. Problème bidimensionnel 39

partie 2. Élasticité linéaire en petites déformations 43

Chapitre 3. Les théorèmes énergétiques 45
3.1. Introduction 45
3.2. Généralités 45
3.3. Structures isostatiques, hypostatiques et hyperstatiques 56
3.4. Théorèmes énergétiques 58
3.5. Quelques remarques sur les théorèmes énergétiques 77
3.6. Méthodes d'études des structures (méthodes des forces) 81

Chapitre 4. Étude de poutres circulaires 83
4.1. Notations 83
4.2. Étude de l'équilibre local 84
4.3. Applications : étude de différentes structures 84
4.4. Problèmes dans l'espace 92

partie 3. Introduction à la mécanique non linéaire 95

Chapitre 5. Flambement (flambage) 97

Chapitre 6. Critères de plasticité 99
6.1. Introduction 99
6.2. Critères de plasticité 100
6.3. Critère de Tresca 101
6.4. Critère de Von Mises 105
6.5. Comparaison des critères de Tresca et de Von Mises 109
6.6. Exemples d'application 114

Chapitre 7. Une introduction à l'analyse limite 119
7.1. Introduction 119
7.2. Modèles de comportement de matériaux 119
7.3. Un exemple : cas d'un chargement uniaxial 120
7.4. Applications de l'analyse limite 125

Bibliographie 127

partie 4. Annexes 129

Annexe A. Rappels de mécanique des milieux continus, en élasticité linéaire isotrope en petites déformations 133
A.1. Rappel sur la notation de sommation d'Einstein 133
A.2. Transformation finie d'un volume 134
A.3. Le tenseur des déformations 135
A.4. Le tenseur des contraintes 138
A.5. Les directions principales des déformations et des contraintes 140
A.6. La loi de Hooke 140
A.7. Les autres équations de la MMC 143
A.8. Récapitulatif 143

Annexe B. Rappels mathématiques et mécaniques pour l'étude de critères (chapitre 6) 145
B.1. Quelques rappels sur les tenseurs et les matrices 145
B.2. Preuve de quelques résultats énergétiques du chapitre 6 146
B.3. Réduction de coniques (et de quadriques) 149
B.4. Quelques résultats de comparaison entre les critères de Tresca et de Von Mises 151

partie 5. Annexes facultatives 155

Annexe C. Démonstration de l'équilibre local pour les poutres planes 159
C.1. Rappels sur la courbure, le rayon de courbure et le repère de Frenet 159
C.2. Démonstration de la proposition 1.9 160
C.3. Démonstration de la proposition 1.12 162

Annexe D. Rappels des formules de Bresse 165

Annexe E. Un exemple d'étude de cercles de Mohr (sous forme d'exercice corrigé) 167
Énoncé 167

Corrigé 167

Annexe F. Exemple de calcul de flèche par méthode énergétique (sous forme d'exercice corrigé) – Exemple d'application de la théorie des distributions 171
Avertissement 171
Énoncé 171
Corrigé 174

Annexe G. Équivalence des équations (3.84) et (3.85) 189

Annexe H. Exemple d'étude d'une structure circulaire (sous forme d'exercice corrigé) 191
Avertissement : conflit d'orientation 191
Énoncé 191
Corrigé 195

Annexe I. Un exemple de critère (sous forme d'exercice corrigé) 201
Énoncé 201
Corrigé 203

Annexe J. Une introduction à l'étude matricielle des réseaux de poutres 207
Avertissement 207
J.1. Introduction 207
J.2. Hypothèses de calcul et méthodes 207
J.3. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire 209
J.4. Étude complet d'un premier exemple 223
J.5. Assemblage des matrices élémentaires 233
J.6. Modélisation et traitement des conditions d'appui et des chargements appliqués 239
J.7. Étude d'un second exemple 242
J.8. Calcul des efforts et des déplacements dans la structure 245
J.9. Quelques exercices 246

Avant-propos

Ces notes de cours constituent un support de cours pour l'UV MQ41 (Automne 2004).

Ce polycopié de cours est disponible en ligne sur le site `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html` On y trouvera aussi les sujets de TD et des archives de sujets et de corrigés d'examens.

Attention, seuls les chapitres 2, 6 et 7 ainsi que les annexes[1] A et B seront disponibles à la reprographie : ils serviront directement de support de cours pour les interventions de Jérôme Bastien. Les autres chapitres (1, 3 et 4) ne seront pas disponibles à la reprographie : E. Atcholi les présentera et utilisera ses propres supports de cours. Néanmoins, pour mémoire, ces chapitres sont disponible sur le web (`http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`). Le chapitre 5 sera traité en cours par E. Atcholi mais ne figure pas dans ce polycopié.

Le cours se décompose en trois parties :
- Dans la partie 1, nous révisons et approfondissons les bases : après quelques rappels élémentaires (ou découverte) de Résistance des Matériaux (chapitre 1) et de Mécaniques des Milieux Continus (annexe A), nous révisons le cercle de Mohr (chapitre 2), qui sera souvent utilisé au cours de ce semestre (notamment en TP et pour le chapitre 6).
- Dans la partie 2, dans un cadre élastique linéaire, nous donnons les théorèmes énergétiques et leurs applications (chapitre 3), notamment pour des poutres circulaires (chapitre 4).
- Dans la partie 3, nous étudions quelques exemples élémentaires de mécanique non linéaire. Au cours du chapitre 5, nous étudierons le phénomène instable (et fortement destructeur) du flambement. Nous donnerons ensuite quelques éléments sur les critères de défaillance (chapitre 6), puis nous étudierons un exemple de calcul par analyse limite (chapitre 7).

Suivent ensuite les annexes, regroupées en deux autres parties :
- Dans la partie 4, se trouvent les annexes A et B.
- Dans la partie 5, se trouvent des annexes facultatives, qui contiennent des compléments, non traités en cours. Par exemple, on trouvera en annexe J, l'étude des réseaux de poutres. Cette annexe facultative ne sera pas étudiée en cours mais figure pour les curieux qui désignent mieux connaître ce point, utile pour comprendre la façon dont ANSYS[2] traite les réseaux de poutres. Seule une infime partie des différentes études possibles sous ANSYS est évoquée dans cette annexe ! Toutes les annexes de la partie 5 ne sont pas disponibles à la reprographie mais se trouvent sur le web (`http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`).

[1] elles comprennent les preuves ou des compléments de résultats de cours ; leur lecture n'est pas essentielle mais conseillée.

[2] logiciel utilisé en TP.

Ceux qui désirent, par curiosité, lire quelques pages géniales consacrées à un bref historique de la mécanique, pourront consulter les pages 7 à 21 de [**Ger86**].

Dangers et attraits de la modélisation

En cours de mécanique, ou plus généralement en physique, vous avez déjà étudié des ressorts, des poutres, des résistances électriques, des ampèremètres ... Ces divers objets ont souvent un comportement linéaire[3] : le déplacement de l'extrémité du ressort est proportionnel à la force qu'il reçoit, les déplacements et les forces sont proportionnels dans les poutres, la tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle au courant qui la traverse ....

Tout cela est faux ! Le terme «modéliser[4]» contient en lui-même l'idée d'une simplification effectuée par rapport à un système réel étudié. Souvent, la modélisation repose sur une approximation linéaire pour deux motifs ; la simplicité mathématique d'abord : le comportement linéaire d'un système est le plus simple que l'on puisse imaginer. Sur le plan physique ensuite : les différents modèles adoptés prédisent des résultats, aisément contrôlables par des mesures réelles. Les équations obtenues sont linéaires et donc en général plus simples à traiter que les non linéaires. Ces modèles sont irréels mais fournissent des résultats proches du réel. Lorsque des résultats issus des modèles linéaires s'écartent trop de la réalité, on aura recours à des modèles plus complexes, non linéaires ; on les utilise en RDM pour expliquer des phénomènes de flambement ou de plasticité, par exemple.

De façon plus générale, un modèle physique est un concept abstrait, fondé sur un ensemble d'hypothèses, d'origine axiomatique, expérimentale ou autre. Ce modèle abstrait fournit, par le biais d'équations, un certain nombre de prédictions. Le rôle des mathématiciens est d'étudier ces équations, de vérifier qu'elles sont bien posées, éventuellement de les résoudre explicitement, ou alors d'en proposer des approximations numériques. Le rôle des physiciens est de vérifier la cohérence des résultats prédits avec ceux qui sont observés dans le réel, éventuellement de revoir les hypothèses émises, en cas de divergence. Fondamentalement, les physiciens réfléchissent aussi à l'élaboration des modèles, fondée sur la compréhension phénomènologique du réel : ils tentent d'expliquer le «comment» du réel[5]. Plus précisément, ce n'est pas le réel qu'ils expliquent mais des modèles censés représenter le réel. Ces modèles sont de plus en plus précis mais aussi de plus en plus compliqués. En effet, un modèle prédit parfois des phénomènes qui ne sont pas en adéquation avec le réel ; on procède alors à des ajustements grâce à la modification des hypothèses existantes ou la prise en compte de nouvelles hypothèses. Parfois, plus brutalement, des concepts radicalement différents émergent et provoquent de véritables révolutions au sein de la physique. Imaginez les évolutions successives[6] qui ont eu lieu

[3]Pour simplifier, un système admet un comportement linéaire si les grandeurs qui décrivent son état (par exemple contraintes et déformations, forces et déplacements, tension et intensité) sont proportionnelles.

[4]qui signifie représenter sous forme de modèle, c'est-à-dire donner une représentation simplifiée d'un système.

[5]Et non le «pourquoi». Les lois de l'attraction de Newton expliquent ce qui produit la chute de la pomme : elle subit une force en $1/r^2$. Mais ces lois n'expliquent pas pourquoi cette force s'exerce. L'origine de cette force et plus généralement les explications des principes premiers excèdent le domaine de la science et relèvent de celui de la métaphysique.

[6]On pourra consulter les deux petits ouvrages de vulgarisation [**Ali02, Bou02**].

depuis le géocentrisme de Ptolémée jusqu'à la relativité générale d'Einstein ! Pour être admis, un nouveau modèle ou une nouvelle théorie doit non seulement inclure les résultats des théories précédentes lorsqu'ils étaient satisfaisants mais aussi améliorer les points faibles et les incohérences de ces théories. La théorie de la relativité générale d'Einstein contient la mécanique classique de Newton et permet de retrouver les forces d'attraction en $1/r^2$. Elle permet aussi d'expliquer des phénomènes qui ne pouvaient être auparavant décrits par la mécanique classique : pourquoi, par exemple, deux étoiles lointaines semblent se rapprocher lorsqu'un astre massif s'intercale entre elles et la terre. Einstein s'est avéré génial ; il avait une tendance certaine à remettre en cause les vérités qu'on lui voulait lui inculquer. Il fut d'ailleurs un élève médiocre au collège ...

Le monde tel qu'on l'étudie en physique est donc abstrait, correspond plus ou moins au réel, mais n'existe pas en tant que réalité matérielle. La beauté des mathématiques appliquées est de donner un sens à ce monde abstrait, à ces modèles, à ce monde des équations, en s'éloignant parfois tellement du réel que la motivation initiale de description du réel s'estompe très fortement.

Il est essentiel pour l'étudiant de prendre un certain recul par rapport aux modèles proposés. En termes philosophiques, on pourra réfléchir à cette notion de monde abstrait (en adéquation avec le monde des Idées de Platon ?) mais aussi à la beauté de la physique ou des mathématiques, qui cherchent à décrire des objets abstraits, en s'écartant parfois de la motivation «matérielle». La science doit-elle être utile ou utilitaire ? Quels sont les enjeux de la recherche fondamentale, ou plus généralement de tout ce qui n'est pas directement utile à l'homme, comme par exemple l'art dont la science peut faire partie ?

Première partie

(Ré)-visions

CHAPITRE 1

Rappels de résistance des matériaux

Dans ce chapitre, on fera succinctement quelques rappels des notions de résistance des matériaux vues en MQ22 ou en premier cycle (et de façon non exhaustive).

On présentera tout d'abord en section 1.1 le cadre théorique de la résistance des matériaux (dans un cas de poutres) et en section 1.2 les différentes hypothèses simplificatrices faites. Dans la section 1.3, nous présenterons les équations d'équilibre local pour les poutres. Nous étudierons ensuite en section 1.4 les sollicitations simples, puis en section 1.5 les sollicitations composées, en donnant, pour chaque type de sollicitations, l'expression des déformations et des contraintes. Nous indiquons en section 1.7 comment calculer les déformées des structures étudiées, et nous concluons en section 1.8.

Pour ce chapitre, on pourra consulter l'annexe A, l'annexe C et éventuellement l'annexe D.

Quelques exercices de révisions sont donnés. Ils pourront compléter, à titre d'exemples, les exercices donnés au cours des premières séance de TD (TD de rappels). Chacun de ces exercices est accompagné d'éléments de corrections.

1.1. Introduction : principes de la résistance des matériaux et de la mécanique des milieux continus

La Mécanique des Milieux Continus (MMC) a pour objet l'étude de milieux continus ; on suppose connues leurs lois de comportements, qui lient le champ des contraintes et le champ de déformations, lui même lié au champ de déplacement. La MMC est présentée en TE 41. On pourra consulter [**Dub98**] et [**Duv90**] (voir aussi l' annexe A, où sont rappelées quelques notions de MMC).

Un cas particulier de la MMC consiste à étudier un volume donné de matériau, supposé élastique linéaire (la relation entre contraintes et déformations est linéaire). On suppose de plus que cette relation entre contraintes et déformations vérifie certaines hypothèses (vérifiées dans le cas de la loi d'élasticité de Hooke). En écrivant l'équilibre local de la matière, en explicitant les conditions limites (une partie de la surface du volume est soumise à un chargement donné, l'autre est soumise à un déplacement donné, voir figure 1.1 page 4) et en se plaçant sous l'hypothèse des «petites déformations», on peut montrer qu'il existe un unique champ de déplacements, de déformations et de contraintes qui décrit l'équilibre statique de ce volume de matériau. Le problème est dit mathématiquement bien posé. Ce résultat nécessite une certaine abstraction mathématique et demeure assez difficile (on pourra consulter [**Duv90**]) ; néanmoins, il est toujours admis par les mécaniciens.

Malheureusement, si sur le plan théorique, on sait que la solution existe, sur le plan pratique, on ne peut rarement calculer cette solution de façon explicite ; on peut aussi mettre au point des calculs approchés (par exemple, par éléments finis), mais qui exigent l'utilisation de logiciels ainsi que des connaissances d'analyse numérique.

L'ingénieur voudrait pouvoir calculer simplement la distribution des contraintes et des déplacements dans ce volume (afin de vérifier, par exemple, qu'elle ne dépassent pas des seuils imposés).

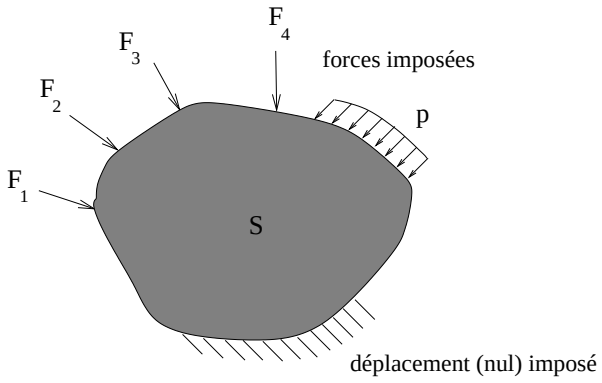


FIG. 1.1. Un problème de MMC

Dans certains cas, le volume étudié présente une dimension négligeable devant les deux autres (coques et plaques) ou deux dimensions négligeables devant la troisième (poutres) ; moyennant un certain nombre d'hypothèses (rappelées en section 1.2), les calculs de la MMC se simplifient : il faut calculer des champs plus simples. On parle alors de Résistance Des Matériaux (RDM ou mécanique des structures).

Ainsi, la RDM est une simplification de la MMC : elle fournit des résultats qui ne sont, en toute rigueur, non exacts mais assez proches de la réalité pour permettre de dimensionner des structures. Certains des résultats de la RDM contredisent même certains principes de la MMC, mais ils s'avèrent suffisamment proches des résultats exacts fournis par la MMC. Bien entendu, les modèles simplifiés de la RDM sont nombreux, plus ou moins proches de la réalité et les résultats présentés dans ce chapitre sont valables dans un cadre théorique bien donné. Dans ce chapitre, on se place dans le cas de poutres ; on en présentera une théorie, mais il ne faut pas oublier qu'il existe un grand nombre d'autres modèles. On prendra garde au fait que certaines conventions de signe sont arbitraires et que certaines formules peuvent différer de celles des ouvrages de références (par exemple [**DG99**]) par leur signe.

En RDM, on utilise les notions de tenseurs de déformations, de contraintes ainsi que la loi de Hooke ; ces notions appartiennent au domaine de la MMC, mais on les utilise cependant et sont donc rappelées en annexe A.

1.2. Le cadre théorique de la RDM dans le cas des poutres

1.2.1. Définition des poutres et des efforts de la RDM ; conventions de signe

Le torseur des efforts de la RDM est aussi appelé le torseur des forces de cohésion.

Une poutre est définie par le déplacement d'une aire de centre gravité G le long d'une fibre moyenne, orientée (voir figure 1.2 page 5). Cette section reste perpendiculaire à la fibre moyenne.

On note s l'abscisse curviligne le long de la poutre.

Par rapport à une section donnée, on distingue une partie droite et une partie gauche.

Soit G un point de la fibre moyenne.

REMARQUE 1.1. Parfois, pour exprimer le fait que le point G dépend de l'abscisse curviligne s, on le notera $G(s)$.

On définit maintenant le repère local de la RDM (G, x, y, z) en tout point de la fibre moyenne :

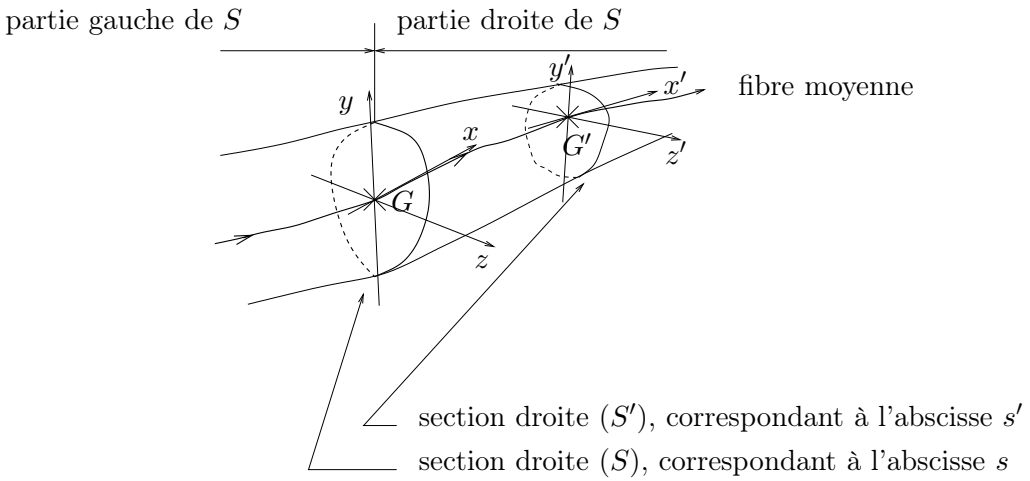


FIG. 1.2. Une poutre

- x est tangent à la fibre moyenne ;
- y et z sont les axes principaux[1] (et orthogonaux) de la section droite ;
- le repère (x, y, z) est orthonormé direct.

Notons (u_x, u_y, u_z) les trois vecteurs[2] orthonormés directs et liés aux trois axes (x, y, z) précédemment défini.

REMARQUE 1.2. Parfois, pour exprimer le fait que les axes x, y et z dépendent de l'abscisse curviligne s, on les notera $x(s)$, $y(s)$ et $z(s)$. De même, on notera $u_x(s)$, $u_y(s)$ et $u_z(s)$ à la place de u_x, u_y et u_z.

On définit le torseur de la RDM pour une section S comme le torseur des forces exercées par la partie droite sur la partie gauche ; ce torseur est défini par sa résultante $\overrightarrow{R_G}$, appliquée en G et son moment $\overrightarrow{\Gamma_G}$, par rapport au point G .

DÉFINITION 1.3. Les six projections de $\overrightarrow{R_G}$ et de $\overrightarrow{\Gamma_G}$ définissent les efforts de la RDM (voir figure 1.3).

On note ainsi :

$$\overrightarrow{R_G} = N u_x + T_y u_y + T_z u_z \ ; \tag{1.1}$$

où

N est l'effort normal,

T_y et T_z sont les efforts tranchants,

et

$$\overrightarrow{\Gamma_G} = M_t u_x + M_y u_y + M_z u_z \ ; \tag{1.2}$$

[1] voir la définition de cette notion un peu plus loin dans le chapitre : section 1.2.4 page 11

[2] Sans flèche par soucis de légèreté.

M_t est le moment de torsion,

T_y et T_z sont les moments fléchissants.

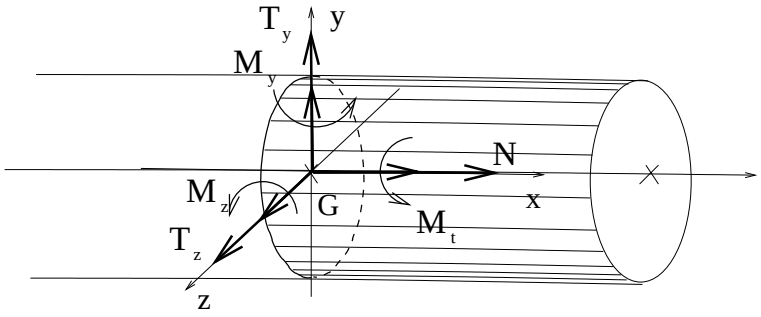


FIG. 1.3. Les efforts de la RDM

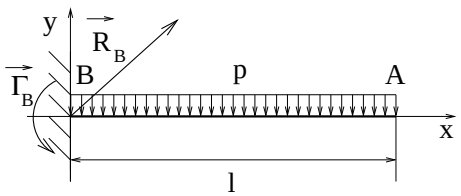
Ces six grandeurs sont définies pour une section droite.

Dans le cas de problèmes plans (par exemple dans le plan (x, y)), on a $T_z = 0$, $M_y = 0$ et $M_t = 0$; dans ce cas, les trois seuls efforts non nuls sont l'effort normal N, l'effort tranchant noté T et le moment fléchissant noté M.

REMARQUE 1.4. Attention, la convention adoptée est très importante pour toute la suite ; on rappelle que l'on a définit le torseur des efforts de la RDM comme **l'action de partie droite de la poutre sur la partie gauche** (ou de la partie aval sur la partie amont) et que **le repère orthonormé** (x, y, z) **est choisi direct**. **Tâchez d'adopter systématiquement cette convention** ou, **sinon, précisez la convention adoptée**.

En effet, quatre types de conventions demeurent possibles (deux pour le choix de la droite ou de la gauche et deux pour le choix de la base directe ou indirecte). Le choix de l'une ou l'autre de ces convention peut introduire ou non des changements de signes dans la plupart des formules de ce cours.

EXERCICE 1.5.



La poutre étudiée n'est soumise qu'à son poids P (on note $p = P/l$ son poids linéique) et est encastrée en B. On choisira les conventions d'orientation et d'axe de la poutre comme indiqué sur la figure (les axes locaux de la poutre sont semblables aux axes globaux). On note respectivement $\overrightarrow{R_B}$ et $\overrightarrow{\Gamma_B}$ la résultante et le moment de la réaction d'appui au point B.

1°) Calculer $\overrightarrow{R_B}$ et $\overrightarrow{\Gamma_B}$.

2°) Calculer les efforts de la RDM dans la poutre.

Éléments de correction de l'exercice 1.5

1°) Dans le repère (x, y, z), on a

$$\overrightarrow{R_B} = (0, pl),$$
$$\overrightarrow{\Gamma_B} = \frac{1}{2} pl^2 \overrightarrow{z}.$$

2°) Pour tout $x \in [0, l]$, on a

$$N(x) = 0,$$
$$T(x) = p(x - l),$$
$$M(x) = -\frac{1}{2} p(x - l)^2.$$

1.2.2. Les hypothèses de la RDM (pour les poutres)

Avant de lire cette section, on poura lire les rappels de MMC sur les contraintes, les déformations et la loi de Hooke en annexe A.

On donne maintenant le cadre théorique (l'ensemble des hypothèses faites et des principes utilisés) de la théorie des poutres.

La première hypothèse faite en RDM est l'

Hypothèse du comportement élastique linéaire du matériau :

Les matériaux constituant les poutres en RDM ont un comportement élastique linéaire, c'est-à-dire que la relation entre contrainte et déformation est linéaire.

On pourra voir les définitions A.16 et A.17 page 140 de l'annexe A.

Pour l'UV MQ41, on fera toujours cette hypothèse, sauf dans la partie relative à des lois de comportements non linéaires (cf. chapitres 6 et 7).

Rappelons une hypothèse très générale (voir aussi l'annexe A, définition A.4, page 135) :

Hypothèse des petites déformations :

Les déformations de la structure étudiée sont «petites». Ainsi, on commet une très petite erreur, en faisant les calculs sur la structure en supposant que les forces extérieures et les réactions d'appuis sont appliquées à la structure non déformée.

Pour l'UV MQ41, on fera toujours cette hypothèse, sauf dans la partie relative au flambement (cf. chapitre 5).

Une conséquence du principe fondamental de la dynamique :

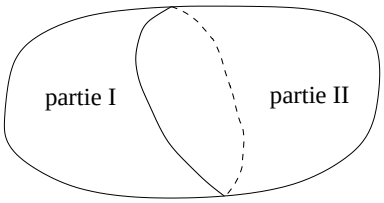


Fig. 1.4. Le principe de l'équivalence

On considère une coupure à travers un volume V (voir figure 1.4) ; la partie I exerce une action (par le biais de l'interface) sur la partie II. Une conséquence immédiate de l'application de la dynamique à l'équilibre statique de la partie I est

Le torseur des forces intérieures représentant l'action de la partie I sur la partie II est équivalent au torseur des forces extérieures s'exerçant sur la partie I.

Autrement dit, les forces extérieures sur la partie I se transmettent à la partie II par l'interface.

Principe de superposition des effets de forces (ou principe de linéarité externe) :

Les effets (contraintes, déformations et déplacements) en un point d'une poutre soumise à plusieurs forces extérieures sont la sommes des contraintes, déformations et déplacements produits en ces mêmes points, par chaque force prise isolément.

Ce principe repose sur l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique linéaire des matériaux étudiés. Il pourra parfois être mis en défaut, par exemple dans l'étude du flambement (cf. chapitre 5).

Ce principe est la base du théorème de Castigliano par exemple. Il nous permettra aussi de découpler certaines sollicitations en sollicitations plus simples, pour les étudier séparément.

Principe de Saint Venant :

Dans une section éloignée des points d'application des forces concentrées (forces données et réactions d'appuis), les contraintes et les déformations ne dépendent que de la résultante et du moment résultant du système de forces dans cette section.

Ce principe a une base expérimentale. Si l'on est proche (c'est à dire à une distance inférieure à la plus grande dimension transversale de la poutre) de points d'application de force, la RDM ne permet plus de décrire l'état des contraintes et des déformations ; seule la MMC permet de le faire correctement. Cependant, en pratique, le principe de Saint Venant est appliqué dans tout la poutre, même très proche de ces zones critiques.

Hypothèse de Navier-Bernoulli :

Après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne restent planes et orthogonales à la fibre déformée.

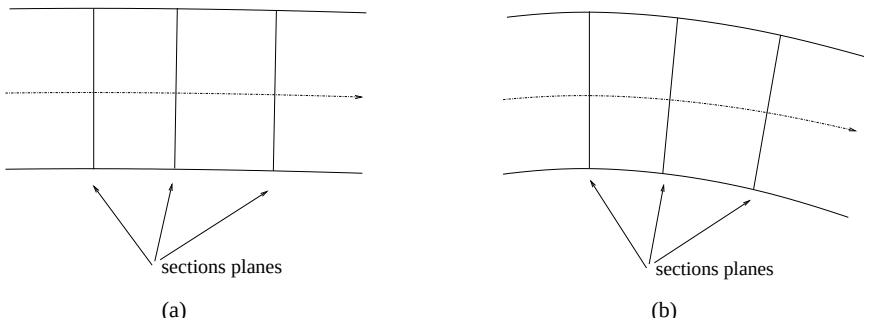


FIG. 1.5. Le principe de Bernoulli : état initial de la poutre (a) et état déformé (b).

Ce principe est parfois mis en défaut (notamment dans l'étude de l'effort tranchant) et est parfois remplacé par un principe un peu plus général.

Domaine pratique de validité des hypothèses de la RDM :

Les caractéristiques géométriques des poutres doivent respecter certaines conditions : l'élancement (rapport de la longueur de la poutre sur la hauteur de la section) ne doit pas être ni trop petit, ni trop grand (entre 5 *et* 40*). Le rayon de courbure des poutres ne doit pas être trop petit. Les variations des caractéristiques des sections droites (aire, moments, inerties ...) doivent être lentes.*

Hypothèse sur les contraintes dans la poutre :

On suppose que la répartition des contraintes est telle que le tenseur de Cauchy s'écrive sous la forme

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce tenseur étant symétrique, en RDM, on utilise alors les notations de Lamé :

$$\boxed{[\sigma] = \begin{pmatrix} n_1 & t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.} \tag{1.3}$$

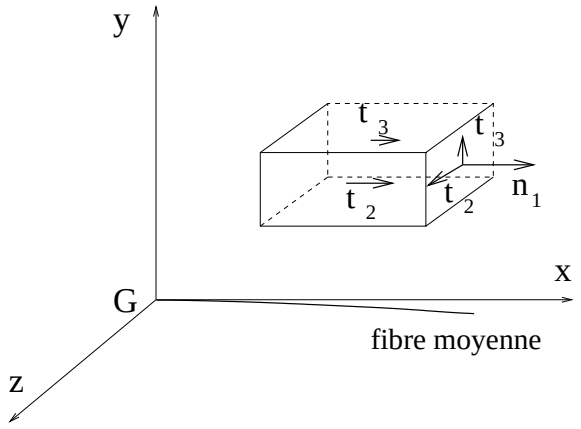


FIG. 1.6. Nullité des contraintes n_2, n_3 et t_1

Voir la figure 1.6, où l'on a représenté les contraintes non nulles, avec les notations de Lamé.
Le tenseur des déformation est noté en général :

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de Lamé, ce tenseur symétrique sera noté, en RDM, sous la forme

$$\boxed{[\varepsilon] = \begin{pmatrix} e_1 & g_3 & g_2 \\ g_3 & e_2 & g_1 \\ g_2 & g_1 & e_3 \end{pmatrix}.}$$

Dans le cas des poutres, dont le matériau a un comportement élastique linéaire, on utilise la loi de Hooke inversée (cf. annexe A, équation (A.7) page 142)

$$\boxed{[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \dfrac{n_1}{E} & \dfrac{t_3}{2G} & \dfrac{t_2}{2G} \\ \dfrac{t_3}{2G} & -\dfrac{\nu n_1}{E} & 0 \\ \dfrac{t_2}{2G} & 0 & -\dfrac{\nu n_1}{E} \end{pmatrix},} \tag{1.4}$$

où l'on rappelle que ν, G et E sont définis par

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \\ E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau élastique linéaire.

Il vient, par définition des torseurs, pour une section S donnée,

$$\boxed{\begin{array}{ll} N = \displaystyle\int_S n_1 dS & M_t = \displaystyle\int_S y t_2 - z t_3 dS \\ T_y = \displaystyle\int_S t_3 dS & M_y = \displaystyle\int_S n_1 z dS \\ T_z = \displaystyle\int_S t_2 dS & M_z = -\displaystyle\int_S n_1 y dS \end{array}}$$

chacune des intégrales doubles étant calculée sur toute la section.

Naturellement, si l'on connaît le tenseur des contraintes $[\sigma]$, on peut alors déterminer les efforts de la RDM. Si on utilise les résultats de la MMC, on connaît donc les efforts de la RDM. Mais justement, la MMC met en jeu des problèmes trop difficiles à résoudre ; si on reste dans le cadre de la RDM, d'après le principe de Saint Venant, la connaissance seule des efforts de la RDM suffit. Il faut donc être capable de déterminer la répartition des contraintes n_1, t_2 et t_3 qui vérifient les équations ci-dessus : c'est là tout l'art de la RDM.

1.2.3. Les divers types d'appuis et leur schématisation

On rappelle ici, pour les problèmes plans, les différents types d'appuis et la convention choisie pour leur représentation.

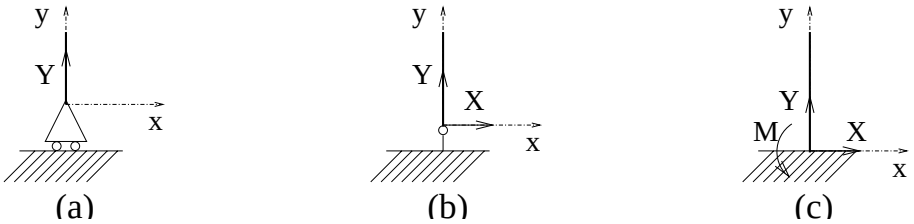


FIG. 1.7. Les différents types d'appuis

Sur la figure 1.7, on a schématisé les trois types possibles d'appuis. Si on considère les axes (x, y) comme indiqué sur cette figure, les trois types d'appuis sont :

- Appui simple (figure 1.7a) : seul le déplacement vertical est contraint à être nul. La seule réaction d'appui est verticale (Y). Le moment est nul ;
- Rotule (ou articulation) (figure 1.7b) : les déplacements horizontal et vertical sont contraints à être nuls. La réaction d'appui admet une composante horizontale (X) et verticale (Y). Le moment est nul ;
- Encastrement (figure 1.7c) : les déplacements horizontal et vertical sont contraints à être nuls, ainsi que la rotation du point d'appui. La réaction d'appui admet une composante horizontale (X) et verticale (Y). Le moment M est non nul.

Cette convention sera adoptée pour tout le cours et les TD.

REMARQUE 1.6. Dans ce cas, les déplacements imposés sont nuls. Il peut aussi exister des appuis du même type, mais où l'on impose des déplacements non nuls.

1.2.4. Rappels sur les caractéristiques des sections planes

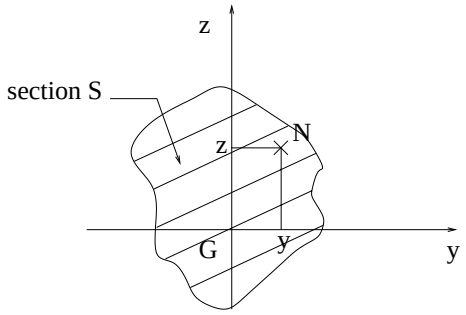


FIG. 1.8. La section étudiée

Une section S est donnée (cf. figure 1.8). On appelle G son centre de gravité et on considère les axes locaux y et z, dont on rappelle qu'ils passent par G.

On appelle I_y et I_z les moments quadratiques (dits parfois abusivement les moments d'inerties) de la section par rapport aux axes y et z :

$$\boxed{\begin{aligned} I_y &= \int_S z^2\, dS, \\ I_z &= \int_S y^2\, dS, \end{aligned}}$$

où l'intégrale double est calculée sur toute la section S.

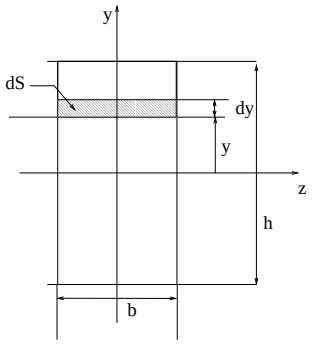


FIG. 1.9. Une section rectangulaire

Pour une section rectangulaire (cf. figure 1.9), de largeur b et de longueur h, on a

$$\boxed{I_y = \frac{hb^3}{12}, \quad I_z = \frac{bh^3}{12}.} \tag{1.5}$$

Pour se rappeler ces formules, penser au fait que si $h > b$, il y a «plus de matière» par rapport à l'axe z que par rapport à l'axe y et donc $I_z > I_y$, et on a bien $bh^3 > hb^3$ (équivalent à $h^2 > b^2$).

Par exemple, calculons I_z (le calcul de I_y s'obtenant en intervertissant les axes y et z et donc b et h). On calcule l'intégrale double I_y en intégrant par «tranche» (cf. figure 1.9), on a

$$dS = b\, dy,$$

et donc

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S y^2 dS, \\ &= \int_{|y|\leq h/2,\, |z|\leq b/2} y^2 dS, \\ &= \int_{|y|\leq h/2} y^2 b\, dy, \\ &= 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy, \\ &= 2b \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}}, \\ &= \frac{bh^3}{12}. \end{aligned}$$

De (1.5), on déduit que pour une section carrée de côté a, on a

$$\boxed{I_y = I_z = \frac{a^4}{12}.} \tag{1.6}$$

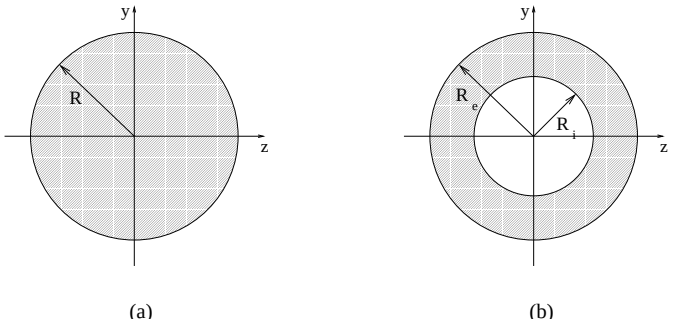


FIG. 1.10. Les deux types de sections circulaires étudiées : section circulaire pleine (a) et creuse (b).

Pour une section circulaire pleine (figure 1.10a), les moments quadratiques I_y et I_z valent

$$\boxed{I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4},}$$

et pour une section creuse (figure 1.10b), ils valent

$$\boxed{I_y = I_z = \frac{\pi}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right).}$$

Calculons par exemple I_y pour une section creuse (pour avoir l'inertie de la section pleine, il suffit de faire $R_i = 0$). Pour cela, on passe en coordonnées polaires, pour lesquelles on a

$$dS = r dr d\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

et donc

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S y^2 dS, \\ &= \int_{R_i \le r \le R_e,\, 0 \le \theta \le 2\pi} (r\sin\theta)^2 r dr d\theta, \\ &= \int_{r=R_i}^{R_e} r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2\theta d\theta, \\ &= \frac{1}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right) \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta. \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on linéarise le carré du sinus :

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right),$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi,$$

et

$$I_z = \frac{\pi}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right).$$

Pour conclure rappelons que, pour une section quelconque, on définit aussi le moment quadratique composé (ou moment produit) :

$$I_{yz} = \int_S yz\, dS.$$

Ce terme est en fait nul ; en effet, parmi tous les systèmes d'axes possibles y et z orthogonaux passant par le point G, il en existe un unique (à $\pi/2$ près) pour lequel $I_{yz} = 0$. Ces axes sont dits principaux et correspondent, si la figure possède des propriétés de symétries axiales, à ces axes de symétrie (c'est le cas des sections rectangulaires ou circulaires étudiées ici).

1.2.5. Une remarque sur la symétrie de certaines structures

Donnons un exemple de simplification de l'étude d'une structure symétrique.

Soit une poutre AB de longueur $2l$, rectiligne et symétrique par rapport à sa médiatrice (cf. figure 1.11). On suppose, pour simplifier la présentation, que la structure est plane. Ces propriétés de symétrie sont naturellement aussi vraies dans l'espace.

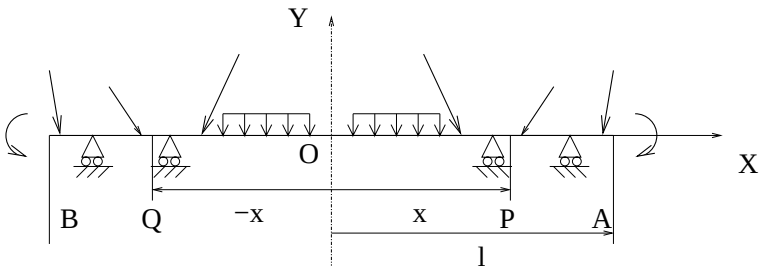


FIG. 1.11. Une poutre symétrique

On suppose que la poutre, les appuis et les forces extérieures (ponctuelles ou linéiques) présentent la même symétrie axiale. On choisit le repère (O, X, Y) comme sur la figure.

Par symétrie, on a (l'abscisse étant définie par rapport au milieu de la poutre), pour tout $x \in [0, l]$

$$\boxed{\begin{array}{l} N(-x) = N(x) \\ T(-x) = -T(x) \\ M(-x) = M(x) \end{array}}$$

Ces formules permettent de n'étudier qu'une moitié de poutre et donc d'obtenir les efforts de la RDM sur l'autre moitié. Elles impliquent de façon évidente, si T est continue en 0, que

$$T(0) = 0. \tag{1.7}$$

REMARQUE 1.7. Attention, dire que T est continue en 0 revient à dire qu'il n'y a pas de force ponctuelle tranchante appliquée au point O. Ainsi (1.7) n'est vraie que s'il n'y a pas de force ponctuelle tranchante appliquée au point O. Dans la cas où une force ponctuelle tranchante T_0 est appliqué en O, il vient, en utilisant par anticipation (1.21b),

$$T(0+0) - T(0-0) = -T_0.$$

D'autre part, puisque T est impair, on a

$$T(0-0)+T(0+0)=0,$$

et donc

$$T(0-0)=\frac{T_0}{2},\quad T(0+0)=-\frac{T_0}{2}. \tag{1.8}$$

Montrons la parité de l'effort normal. Soit $x\in[0,l]$. Par définition, si P (resp. Q) est le point d'abscisse x (resp. $-x$), $N(x)$ est égal à la composante sur X des forces exercée par la partie AP de la poutre sur la section correspondant à P, soit[3]

$$N(x)=\overrightarrow{\mathcal{F}_{AP}}.\overrightarrow{X}, \tag{1.9}$$

où $\overrightarrow{\mathcal{F}_{AP}}$ désigne l'ensemble des forces extérieures (ponctuelles ou linéiques) agissant sur AP. De même, au point d'abscisse $-x$, puisque les efforts de la RDM sont définis comme l'action de la droite sur la gauche et donc comme l'opposé de l'action de la gauche sur la droite, on a,

$$N(-x)=-\overrightarrow{\mathcal{F}_{BQ}}.\overrightarrow{X}, \tag{1.10}$$

où $\overrightarrow{\mathcal{F}_{BQ}}$ désigne l'ensemble des forces extérieures (ponctuelles ou linéiques) agissant sur BQ. Puisque les chargement extérieurs à la structure sont symétriques par rapport à l'axe Y, on a

$$\overrightarrow{\mathcal{F}_{BQ}}.\overrightarrow{X}=-\overrightarrow{\mathcal{F}_{AP}}.\overrightarrow{X}. \tag{1.11}$$

De (1.9), (1.10) et (1.11), on déduit immédiatement la parité de N. L'imparité de T s'établit exactement de la même façon : puisque les chargement extérieurs à la structure sont symétriques par rapport à l'axe Y, on a

$$\overrightarrow{\mathcal{F}_{BQ}}.\overrightarrow{Y}=\overrightarrow{\mathcal{F}_{AP}}.\overrightarrow{Y}. \tag{1.12}$$

Comme (1.9) et (1.10), on a

$$T(x)=\overrightarrow{\mathcal{F}_{AP}}.\overrightarrow{Y}, \tag{1.13}$$

et

$$T(-x)=-\overrightarrow{\mathcal{F}_{BQ}}.\overrightarrow{Y}. \tag{1.14}$$

De (1.12), (1.13) et (1.14), on déduit immédiatement l'imparité de T.

On a (en anticipant sur (1.26c), page 18)

$$\frac{dM}{dx}=-T-m\ ;$$

Par symétrie m est impaire ; ainsi, on déduit la parité de M de l'imparité de T.

On pourra appliquer ces remarques à quelque exercice du TD de révision, pour simplifier les calculs des efforts de la RDM.

Remarque 1.8. Attention, des structures, non rectilignes, peuvent présenter aussi des propriétés de symétrie, mais il faudra prendre garde au fait que les repères locaux liés à chaque poutre ne sont plus nécessairement symétriques. Les efforts ne sont donc pas toujours pairs ou impairs.

[3]On peut aussi retrouver ce calcul en isolant la partie AP et en écrivant son équilibre

1.3. Les équations d'équilibre local en RDM pour les poutres planes

On donne, dans cette section, les équations d'équilibre local pour les poutres de la RDM. Pour en simplifier l'exposé, on supposera qu'elles sont planes. Plus généralement, on pourrait aussi donner les équations d'équilibre local pour des poutres dans l'espace[4] (voir par exemple **[PGa]** où ce calcul est traité).

Nous étudierons en section 1.3.1 le cas général, puis nous appliquerons les résultats au cas des poutres droites en section 1.3.2 puis au cas des poutres circulaires en section 1.3.3.

Ces équations seront utilisées par exemple pour les poutres droites dans la section 1.7 ou pour les poutres circulaires dans le chapitre 4.

1.3.1. Cas général

On reprend les notations vues en section 1.2.1, dans le cas plan. On note donc N l'effort normal, $T = T_y$ l'effort tranchant et $M = M_z$ le moment fléchissant. On a aussi, pour tout s,

$$z(s) = z \text{ et } u_z(s) = u_z. \tag{1.15}$$

On étudie donc une poutre plane soumise à des forces et des couples ponctuels et

$$\text{à une densité linéaire le long de la fibre moyenne } q, \tag{1.16a}$$

$$\text{à une densité linéaire transversale à la fibre moyenne } p, \tag{1.16b}$$

$$\text{à une densité linéaire de couple } m. \tag{1.16c}$$

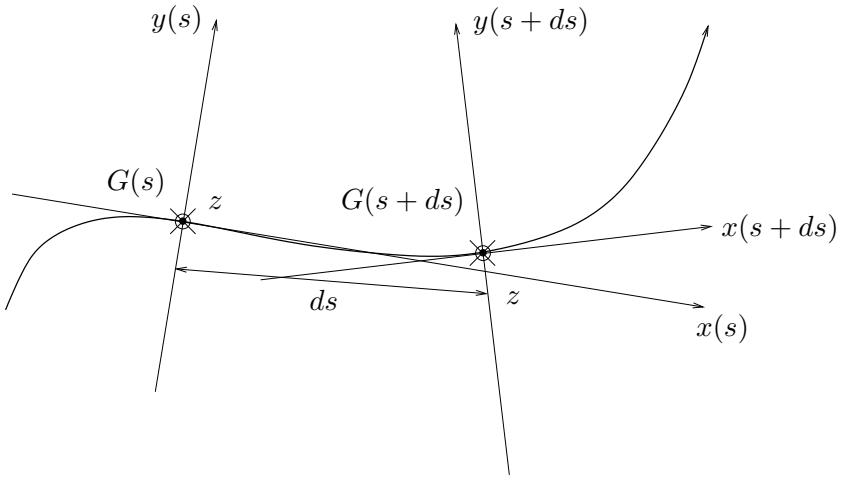


FIG. 1.12. Une portion élémentaire de poutre délimitée par $G(s)$ et $G(s+ds)$

Ces notations signifient qu'une portion élémentaire de poutre, d'épaisseur infinitésimale ds et délimitée par les points $G(s)$ et $G(s+ds)$ (voir figure 1.12) est soumise, en plus des forces et des couples ponctuels, à une force infinitésimale $\overrightarrow{df}$ et à un couple infinitésimal $\overrightarrow{dC}$ tels que

$$\overrightarrow{df} = \big(q(s)u_x(s) + p(s)u_y(s)\big)ds, \tag{1.17a}$$

$$\overrightarrow{dC} = m(s)u_z ds. \tag{1.17b}$$

[4]On pourra aussi consulter **[LFA01]** pour les formules de Frenet dans l'espace.

Notons $R(s)$ le rayon de courbure de la courbe au point $G(s)$. (voir section C.1 de l'annexe C).

PROPOSITION 1.9. *Avec les notations précédentes, nous avons les trois équations d'équilibre local suivantes :*

$$\frac{dT(s)}{ds} + \frac{N(s)}{R(s)} + p(s) = 0, \tag{1.18a}$$

$$\frac{dN(s)}{ds} - \frac{T(s)}{R(s)} + q(s) = 0, \tag{1.18b}$$

$$\frac{dM(s)}{ds} + T(s) + m(s) = 0. \tag{1.18c}$$

DÉMONSTRATION. Pour ne pas alourdir ce chapitre, la preuve est donnée en annexe C, section C.2. □

REMARQUE 1.10. Le lecteur aussi pourra consulter la question 3a page 173 et sa correction page 180 dans l'exercice de l'annexe F, où la preuve est rédigée dans le cas particulier de poutres planes et droites.

De même, le lecteur aussi pourra consulter la question 1 page 192 et sa correction page 195 dans l'exercice de l'annexe H, où la preuve est rédigée dans le cas particulier de poutres circulaires.

REMARQUE 1.11. En toute rigueur, les équations (1.18) ne sont valables qu'aux endroits où aucune force ni couples ponctuels ne sont appliquées. Selon l'hypothèse de Saint-Venant, c'est loin des points d'application des ces forces et couples ponctuels qu'on peut utiliser les relations (1.18). En pratique, on pourra les utiliser entre[5] ces points d'application. Mais la proposition 1.12 fournit un résultat de discontinuité aux points d'applications de forces ou de couple ponctuel.

PROPOSITION 1.12. *On suppose que la portion de poutre comprise entre les abscisses curvilignes s_1 et s_2 n'est soumise qu'à une force ponctuelle $\overrightarrow{F}$ et à un couple $\overrightarrow{\Gamma}$ au point d'abscisse s_0 avec $s_1 < s_0 < s_2$. Si on décompose $\overrightarrow{F}$ sous la forme*

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} N_0 u_x(s_0) \\ T_0 u_y(s_0) \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

et si on pose

$$\overrightarrow{\Gamma} = M_0 u_z, \tag{1.20}$$

alors, si, en s_0, les vecteurs u_x et u_y sont continus,

$$N(s_0 + 0) - N(s_0 - 0) = -N_0, \tag{1.21a}$$

$$T(s_0 + 0) - T(s_0 - 0) = -T_0, \tag{1.21b}$$

$$M(s_0 + 0) - M(s_0 - 0) = -M_0. \tag{1.21c}$$

DÉMONSTRATION. Pour ne pas alourdir ce chapitre, la preuve est donnée en annexe C, section C.3. □

Un conséquence de cette propriété est

COROLLAIRE 1.13. *Si, en s_0, les vecteurs u_x et u_y sont continus, et aucune force ni couple n'est appliqués, alors N, T et M sont continus en s_0.*

[5]En fait, on pourrait aussi englober les forces et les couples ponctuels dans les densités linéaires de forces et de couples, en utilisant la notion de Dirac et de distribution (voir UV MT41 et annexe F).

REMARQUE 1.14. On admettra que les propositions 1.12 et 1.13 sont aussi valables si des densités linéaires de forces ou de couple sont appliquées à la poutre.

1.3.2. Cas des poutres droites

On suppose maintenant que la poutre étudiée est droite. Selon l'exemple C.2 page 160 de l'annexe C, on peut paramétrer par l'abscisse x, le long du segment de droite. On a, pour tout x,

$$x(x) = x \text{ et } u_x(x) = u_x, \tag{1.22}$$
$$y(x) = y \text{ et } u_y(y) = u_y, \tag{1.23}$$
$$z(x) = z \text{ et } u_z(x) = u_z. \tag{1.24}$$

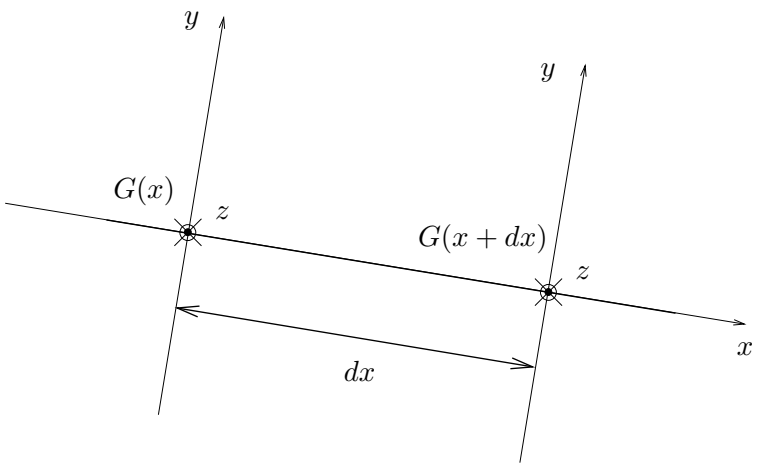


FIG. 1.13. Une portion élémentaire de poutre droite délimitée par $G(x)$ et $G(x + dx)$

Selon les notations (1.16) et (1.17), une portion élémentaire de poutre, d'épaisseur infinitésimale dx et délimitée par les points $G(x)$ et $G(x + dx)$ (voir figure 1.13) est soumise, en plus des forces et des couples ponctuels, à une force infinitésimale $\overrightarrow{df}$ et à un couple infinitésimal $\overrightarrow{dC}$ tels que

$$\overrightarrow{df} = \big(q(x)u_x + p(x)u_y\big)dx, \tag{1.25a}$$
$$\overrightarrow{dC} = m(x)u_z dx. \tag{1.25b}$$

D'après l'équation (C.7) de l'annexe C, la propriété 1.9 devient ici :

PROPOSITION 1.15. *Avec les notations précédentes, nous avons les trois équations d'équilibre local suivantes :*

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \tag{1.26a}$$
$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) = 0, \tag{1.26b}$$
$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) + m(x) = 0. \tag{1.26c}$$

Si la poutre n'est soumise à aucune densité de moment, les équations (1.26a) et (1.26c) se particularisent sous la forme bien connue :

$$\boxed{\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0 \text{ et } \frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0.} \tag{1.27}$$

Exemple 1.16. Pour une poutre droite uniquement soumise à une densité linéaire d'effort tranchant $p(x)$, on a rappelle les équations (1.26)

$$\frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \tag{1.28}$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0, \tag{1.29}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0, \tag{1.30}$$

qui sont valables en dehors de tout point d'application de force et de couple ponctuels. Si on applique des forces et des couples ponctuels, on peut alors utiliser (1.21) :

$$N(s_0 + 0) - N(s_0 - 0) = -N_0, \tag{1.31}$$

$$T(s_0 + 0) - T(s_0 - 0) = -T_0, \tag{1.32}$$

$$M(s_0 + 0) - M(s_0 - 0) = -M_0. \tag{1.33}$$

Appliquons cela à l'étude de la structure de l'exercice de TD 1.3. On a $p = -p$, constant. La poutre est orientée de la gauche vers la droite et l'origine est choisie en zéro. Par symétrie, on n'étudie que la partie droite de cette poutre. Les réactions en B et C sont verticales et égales à $Y = pL$.

L'équation (1.29) nous indique que N est constant et est donc partout nul.

Si on intègre l'équation (1.28) entre y et L pour tout $y \in [l, L]$ (ce qui est légitime puisqu'aucune force ponctuelle n'est appliquée sur $[l, L]$), on a

$$T(L) - T(y) = \int_y^L \frac{dT(x)}{dx} dx = -\int_y^L p(x)dx = p\int_y^L dx = p(L - y),$$

et donc puisque $T(L)$ est nul,

$$\forall y \in [l, L[, \quad T(y) = p(y - L). \tag{1.34}$$

On intègre de nouveau l'équation (1.28) entre y et l pour tout $y \in [0, l]$ (ce qui est légitime puisqu'aucune force ponctuelle n'est appliquée sur $[0, l]$),

$$T(l + 0) - T(y) = -\int_y^l p(x)dx = p(l - y),$$

et donc

$$T(y) = T(l + 0) + p(y - l). \tag{1.35}$$

Pour déterminer $T(l - 0)$ dans (1.35), on utilise (1.32) en $s_0 = l$:

$$T(l + 0) - T(l - 0) = -Y = -pL.$$

Pour déterminer $T(l + 0)$, on utilise (1.34) en $y = l$

$$T(l + 0) = p(l - L).$$

On en déduit que

$$T(l - 0) = pL + T(l + 0) = p(L + l - L) = pl.$$

Ainsi, selon (1.35), on a

$$\forall y \in [0, l[, \quad T(y) = py. \tag{1.36}$$

Conformément à la section 1.2.5, on a $T(0) = 0$.

Enfin, pour calculer M, on peut intègre l'équation (1.30) entre y et L pour tout $y \in [0, L]$ (ce qui est légitime puisqu'aucun couple ponctuel n'est appliqué sur $[0, L]$),

$$M(L) - M(y) = -\int_y^L T(x)dx.$$

On reprend chacune des équations (1.34) et (1.36) et, puisque $M(L)$ est nul :

$$\forall y \in [l, L], \quad M(y) = \int_y^L T(x)dx = \int_y^L p(x - L)dx = \frac{p}{2}\left[(x - L)^2\right]_{x=y}^{x=L} = -\frac{p}{2}(y - L)^2,$$

soit

$$\forall y \in [l, L], \quad M(y) = -\frac{p}{2}(y - L)^2. \tag{1.37}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\forall y \in [0, l], \quad M(y) &= \int_y^L T(x)dx, \\
&= \int_y^l pxdx + \int_l^L p(x - L)dx, \\
&= \frac{p}{2}(l^2 - y^2) - \frac{p}{2}(l - L)^2, \\
&= \frac{p}{2}\left(l^2 - y^2 - l^2 - L^2 + 2lL\right), \\
&= \frac{p}{2}\left(-y^2 - L^2 + 2lL\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall y \in [0, l], \quad M(y) = -\frac{p}{2}\left(y^2 + L^2 - 2lL\right). \tag{1.38}$$

Ce qui fait la difficulté de ces calculs réside dans la discontinuité de T en l. Pour des cas sans forces ponctuelles, les calculs se mènent plus facilement.

Exemple 1.17. On considère une poutre rectiligne au milieu de laquelle, on n'applique qu'un seul couple ponctuel, $M_0 \neq 0$ en x_0. D'après la proposition 1.12 appliquée avec $N_0 = T_0 = 0$, il vient

$$\begin{aligned}
&N(s_0 + 0) - N(s_0 - 0) = 0, \\
&T(s_0 + 0) - T(s_0 - 0) = 0, \\
&M(s_0 + 0) - M(s_0 - 0) = -M_0.
\end{aligned}$$

D'autre part, le cas particulier (1.26c) fournit au sens des distributions (où H est la fonction de Heaviside et δ la «fonction» Dirac, voir annexe C, section C.3) :

$$\begin{aligned}
&\frac{dT(x)}{dx} = 0, \\
&\frac{dN(x)}{dx} = 0, \\
&\frac{dM(x)}{dx} + T(x) + m(x) = 0.
\end{aligned}$$

où

$$m = \frac{d}{dx} M_0 H(x - x_0) = M_0 \delta(x - x_0).$$

On a donc

$$\begin{aligned} T(x) &= T(0), \\ N(x) &= N(0), \\ M(x) &= -T(0)x - M(0) - M_0 H(x - x_0). \end{aligned}$$

1.3.3. Cas des poutres circulaires

On suppose maintenant que la poutre étudiée est circulaire. Selon l'exemple C.3 page 160 de l'annexe C, on peut paramétrer par l'angle θ (voir figure 1.14).

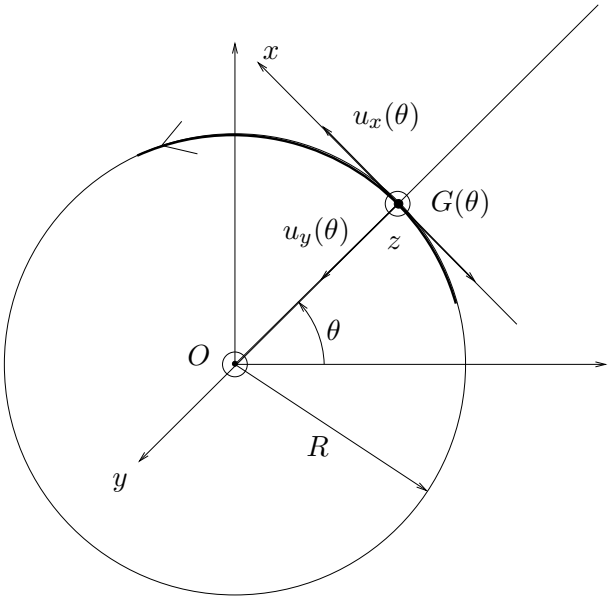


FIG. 1.14. La structure circulaire étudiée

Selon l'équation (C.8) de l'annexe C, on a

$$ds = R d\theta. \tag{1.39}$$

Ainsi, selon les notations (1.16) et (1.17), une portion élémentaire de poutre délimitée par les points $G(\theta)$ et $G(\theta + d\theta)$ (voir figure 1.15) est soumise, en plus des forces et des couples ponctuels, à une force infinitésimale $\overrightarrow{df}$ et à un couple infinitésimal $\overrightarrow{dC}$ tels que

$$\overrightarrow{df} = R\big(q(\theta)u_x(\theta) + p(\theta)u_y(\theta)\big)d\theta, \tag{1.40a}$$

$$\overrightarrow{dC} = Rm(\theta)u_z d\theta. \tag{1.40b}$$

D'après (1.39) et l'équation (C.9) de l'annexe C, la propriété 1.9 devient ici :

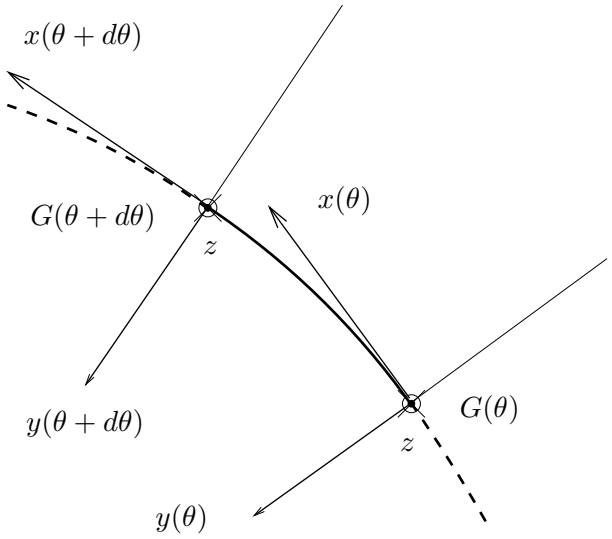


FIG. 1.15. Une portion élémentaire de poutre circulaire délimitée par $G(\theta)$ et $G(\theta + d\theta)$

PROPOSITION 1.18. *Avec les notations précédentes, nous avons les trois équations d'équilibre local suivantes :*

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + N(\theta) + Rp(\theta) = 0, \tag{1.41a}$$

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} - T(\theta) + Rq(\theta) = 0, \tag{1.41b}$$

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} + RT(\theta) + Rm(\theta) = 0. \tag{1.41c}$$

REMARQUE 1.19. Les équations (1.41) seront utilisées souvent dans le chapitre 4 ; elles permettent, en effet, de déterminer par intégration ou dérivations, les trois efforts de la RDM, N, T et M à partir d'un seul de ces trois efforts. Généralement, on déterminera le plus simple d'entre eux à calculer, T ou N.

REMARQUE 1.20. **Attention**, certains auteurs utilisent pour les poutres circulaires les vecteurs polaires $u_r(\theta)$ et $u_\theta(\theta)$ (voir figure 1.16).

Avec ces conventions,

$$\text{le repère local (direct) considéré est } (u_r(\theta), u_\theta(\theta), z), \tag{1.42a}$$

$$\text{l'effort normal est } N(\theta)u_r(\theta), \tag{1.42b}$$

$$\text{l'effort tranchant est } T(\theta)u_\theta(\theta), \tag{1.42c}$$

$$\text{le moment fléchissant est } M(\theta)z, \tag{1.42d}$$

$$\text{la densité linéaire de force est } R\big(q(\theta)u_r(\theta) + p(\theta)u_\theta(\theta)\big)d\theta, \tag{1.42e}$$

$$\text{la densité linéaire de moment est } Rm(\theta)u_z d\theta. \tag{1.42f}$$

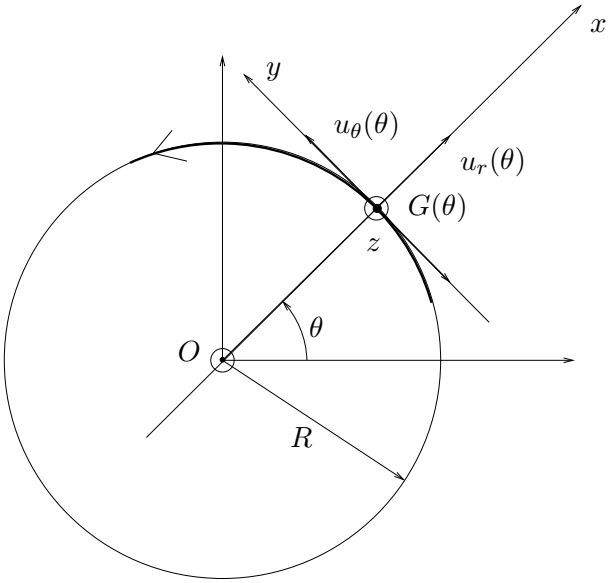


FIG. 1.16. La structure circulaire étudiée avec les vecteurs polaires $u_r(\theta)$ et $u_\theta(\theta)$.

Ainsi, par rapport aux conventions que nous avons choisies, les équations d'équilibres sont valables à conditions de changer

$$T(\theta) \text{ en } -T(\theta), \tag{1.43a}$$
$$p(\theta) \text{ en } -p(\theta). \tag{1.43b}$$

Ainsi, avec les conventions (1.42), les équations (1.41) deviennent :

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} - N(\theta) + Rp(\theta) = 0, \tag{1.44a}$$
$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} + T(\theta) + Rq(\theta) = 0, \tag{1.44b}$$
$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} - RT(\theta) + Rm(\theta) = 0. \tag{1.44c}$$

C'est avec ces conventions que l'étude de l'annexe H, donnée en examen de MQ41, est valide. On attendra d'avoir étudié le chapitre 4 pour étudier l'annexe H.

1.4. Étude des sollicitations simples

En vertu du principe de superposition, une sollicitation composée est la somme de sollicitations simples, étudiées dans cette section (voir leur définition dans le tableau 1.1 page 24, où sont indiqués, pour chaque sollicitation simple, les efforts de la RDM non nuls). On donne quelques résultats pour une sollicitation composée quelconque en section 1.5.

Pour chacune de ces sollicitations, on rappelle la définition et la validité, la distribution des déformations et des contraintes.

type de sollicitation	efforts non nuls de la RDM
traction/compression simple	effort normal (N)
flexion	moment fléchissant (M_y et M_z)
cisaillement	effort tranchant et moment de flexion (T_y , T_z, M_y et M_z)
torsion libre	moment de torsion (M_t)

TAB. 1.1. Définitions des différentes sollicitations simples.

1.4.1. Étude de l'effort normal (traction/compression simple)

DÉFINITION 1.21. La section droite d'une poutre est soumise à l'effort normal (compression ou traction simple) lorsque le système des forces appliquées à gauche se réduit en son centre de gravité G, à une force parallèle à la tangente à la fibre moyenne Gx.

L'état des contraintes est caractérisé par la matrice

$$\boxed{[\sigma] = \begin{pmatrix} \frac{N}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},} \tag{1.45}$$

où N est l'effort normal et S l'aire de la section. La contrainte normale est donc uniforme dans la section.

D'après (1.4), l'état des déformations est caractérisé par

$$\boxed{[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{N}{ES} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu N}{ES} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu N}{ES} \end{pmatrix},}$$

EXERCICE 1.22. La partie utile d'une éprouvette pour un essai de traction est un cylindre de section droite $S_0 = 100$ mm^2. On applique un effort de traction égal à $F = 32000$ N.

Déterminer le tenseur des contraintes au sein du milieux.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 1.22

D'après (1.45), on a un état de contrainte uniforme dans la section :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.46}$$

où

$$\sigma = \frac{F}{S_0} = 320 \text{ MPa}. \tag{1.47}$$

1.4.2. Étude du Moment fléchissant (flexion)

DÉFINITION 1.23. Il y a flexion pure lorsque le système des forces appliquées à gauche se réduit à une composante de moment située dans la section ($M_f = M_y \overrightarrow{y} + M_z \overrightarrow{z}$, $N = T_y = T_z = 0$ et $M_t = 0$).

Si de plus, l'effort tranchant est non nul, la flexion est simple.

Lorsque la flexion est aussi soumise à un effort normal ($N \neq 0$), la flexion est dite composée.

Si le moment fléchissant est dirigé parallèlement à un axe central d'inertie de la section, la flexion est dite droite, sinon elle est déviée ou gauche.

Les trois premiers cas sont résumés sur la figure 1.17 :

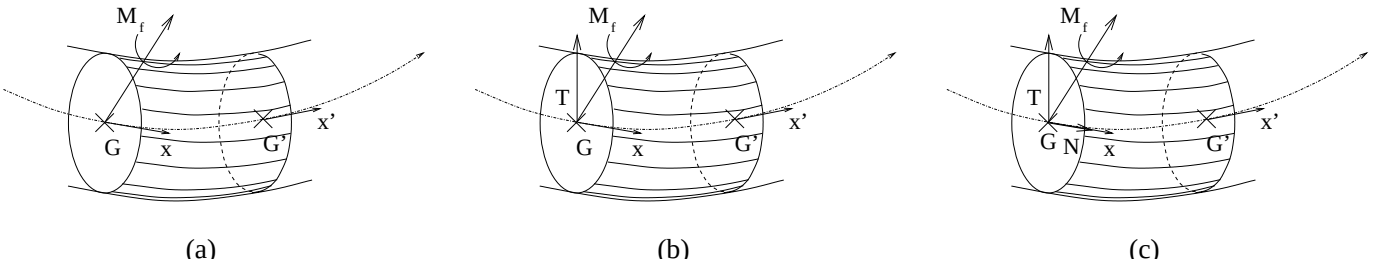


FIG. 1.17. Les différents cas de flexion : flexion pure (a), flexion simple (b), flexion composée (c).

Si l'effort tranchant est nul, l'état des contraintes au point de la section de coordonnée (y, z) est caractérisé par la matrice

$$\boxed{[\sigma] = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } n_1 = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z,} \tag{1.48}$$

où N est l'effort normal, S est l'aire de la section, M_y et M_z sont les moments fléchissants et I_y et I_z les moments d'inertie de la section par rapport aux axes y et z (cf. section 1.2.4).

REMARQUE 1.24. La formule (1.48) est parfois présentée dans le cas de la flexion pure, mais reste valable dans le cas d'une flexion composée (mais sans effort tranchant).

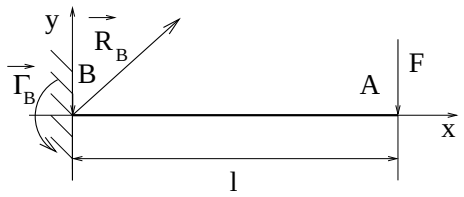
D'après (1.4), l'état des déformations est caractérisé par

$$\boxed{[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu n_1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu n_1}{E} \end{pmatrix}, \text{ où } n_1 = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z.}$$

On appelle l'axe neutre de la section, le lieu des points de contrainte (normale) nulle, d'équation

$$\frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0.$$

EXERCICE 1.25.



La poutre étudiée et représentée ci dessus est soumise à une force ponctuelle d'intensité F appliquée en A et est encastrée en B. On choisira les conventions d'orientation et d'axe de la poutre

comme indiqué sur la figure (les axes locaux de la poutre sont semblables aux axes globaux). On note respectivement $\overrightarrow{R_B}$ et $\overrightarrow{\Gamma_B}$ la résultante et le moment de la réaction d'appui au point B.
1°) Calculer $\overrightarrow{R_B}$ et $\overrightarrow{\Gamma_B}$.
2°) Calculer les efforts de la RDM dans la poutre.
3°) La poutre a une section rectangulaire de largeur b constante et de hauteur variable $h(x)$, où x est l'abscisse (voir figure 1.9). Calculer la contrainte normale maximale en tout point de la poutre, en fonction de l'abscisse x.
4°) On souhaite que la hauteur $h(x)$ soit choisie de telle façon que, quelle que soit la section droite considérée, la contrainte $|\sigma|_{\max}$ soit égale à une constante $\sigma_0 > 0$ donnée. Calculer et représenter h.

Éléments de correction de l'exercice 1.25
1°) Dans le repère (x, y, z), on a

$$\overrightarrow{R_B} = (0, F),$$
$$\overrightarrow{\Gamma_B} = Fl\,\overrightarrow{z}.$$

2°) Pour tout $x \in [0, l]$, on a

$$N(x) = 0,$$
$$T(x) = -F,$$
$$M(x) = -F(l - x).$$

3°) D'après (1.48) et ce qui précède, pour tout (x, y, z),

$$|\sigma(x, y, z)| = \left|\frac{M_z}{I_z} y\right| = \left|\frac{M(x)}{I_z} y\right|.$$

D'où, pour tout x,

$$|\sigma_{\max}(x)| = \frac{F(l - x)h(x)}{2I_z},$$

où $h(x)$ désigne la hauteur de la section (cf. figure 1.9). D'après (1.5), il vient

$$|\sigma_{\max}(x)| = \frac{6F(l - x)}{bh^2(x)}, \tag{1.49}$$

où b désigne la largeur de la section.
4°) Puisque $|\sigma_{\max}(x)| = \sigma_0$, il vient selon (1.49)

$$h(x) = \sqrt{\frac{6F(l - x)}{b\sigma_0}}.$$

1.4.3. Étude de l'effort tranchant (cisaillement)

Définition 1.26. La section droite d'une poutre est soumise à une sollicitation d'effort tranchant lorsque le torseur des efforts de la RDM se réduit à une force $\overrightarrow{T}$ située dans la section droite et un moment de flexion ($N = 0$ et $M_t = 0$).

Les efforts tranchants T_y et T_z jouent un rôle similaire et on peut supposer le problème plan avec $T_z = 0$ et $M_y = 0$. Dans le cas général, d'après le principe de superposition, on étudiera la somme des deux états définis par ($T_y \neq 0$, $T_z = 0$, $M_z \neq 0$ et $M_y = 0$) et ($T_y = 0$, $T_z \neq 0$, $M_z = 0$ et $M_y \neq 0$).

REMARQUE 1.27. Attention, les résultats présentés ici n'obéissent pas au principe de Bernoulli, qui doit être ici remplacé par le principe de Bernoulli généralisé, qui autorise un gauchissement des sections planes de la poutre non déformée. Néanmoins, les résultats permettent d'approcher correctement la valeur de la contrainte tangentielle maximale.

On ne présente ici que le cas de poutres à section pleine et massive. Dans le cas de profilés minces, les formules sont à peine plus compliquées (pour les tubes circulaires, consulter par exemple **[Lar88]**).

On fait l'hypothèse que la contrainte tangentielle t_3 ne dépend que de y dans la section (dans la direction de l'effort tranchant appliqué, voir figure 1.18)

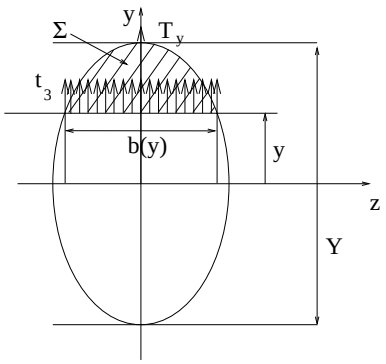


FIG. 1.18. L'effort tranchant et la contrainte t_3

L'état de contraintes au point de la section de coordonnée (y, z) est caractérisé par la matrice

$$\boxed{[\sigma] = \begin{pmatrix} -\dfrac{M_z y}{I_z} & \dfrac{T_y \mu(y)}{I_z b(y)} & 0 \\ \dfrac{T_y \mu(y)}{I_z b(y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},} \tag{1.50}$$

où $\mu(y)$ est le moment statique de la partie de la section Σ située au dessus de la cote y (correspondant à la partie hachurée sur la figure 1.18), dont on rappelle l'expression

$$\boxed{\mu(y) = \int_{\Sigma} y dS,} \tag{1.51}$$

et $b(y)$ est la largeur de la section à la cote y (voir figure 1.18).

D'après (1.4), l'état des déformations est caractérisé par

$$\boxed{[\varepsilon] = \begin{pmatrix} -\dfrac{M_z y}{EI_z} & \dfrac{T_y \mu(y)}{2GI_z b(y)} & 0 \\ \dfrac{T_y \mu(y)}{2GI_z b(y)} & \dfrac{\nu M_z y}{EI_z} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\nu M_z y}{EI_z} \end{pmatrix}.}$$

REMARQUE 1.28. Dans ce cas, les résultats présentés violent les principes de la MMC (aux bords, les contraintes tangentielles devraient être nulles). Néanmoins, les résultats permettent d'approcher correctement la valeur de la contrainte tangentielle maximale.

EXERCICE 1.29. On considère une section de poutre rectangulaire de largeur b et de hauteur h soumise au seul effort tranchant $T = T_y$ (voir figure 1.19). Calculer la répartition des contraintes tangentielles dans la section.

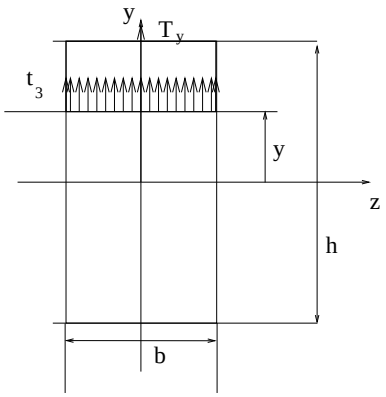


FIG. 1.19. L'effort tranchant et la contrainte t_3 dans une section rectangulaire

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 1.29

Selon (1.50), la seule contrainte tangentielle non nulle est égale à (avec les conventions de la figure 1.19)

$$t(y) = t_3 = \frac{T_y \mu(y)}{I_z b(y)}.$$

On a déjà vu que

$$I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

D'autre part, on a successivement, selon (1.51),

$$\mu(y) = \int_\Sigma y dS = \int_y^{h/2} y b dy = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Ainsi

$$t(y) = \frac{6T\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{bh^3}.$$

1.4.4. Étude du moment de torsion (torsion libre)

Définition 1.30. La section droite d'une poutre est soumise à une torsion libre lorsque, parmi les efforts de la RDM, seul le moment de torsion M_t est non nul.

Le problème de la torsion est complexe et la théorie élémentaire de la RDM ne conduit à des solutions assez précises que dans le cas des poutres droites à sections circulaires, massives ou creuses ou à sections droites tubulaires minces fermées. Dans ces rappels, on n'évoquera que le premier cas (la section étudiée correspond à l'une des deux sections de la figure 1.10, page 13). Pour le second cas, ainsi que pour une approche plus complète, on pourra consulter [**Lar88**].

La seule contrainte non nulle qui s'exerce sur une facette de section droite est une contrainte tangentielle t dirigée suivant la normale au rayon vecteur (voir figure 1.20).

Ainsi, avec les notations de Lamé, seules les composantes t_2 et t_3 du tenseur des contraintes sont non nulles.

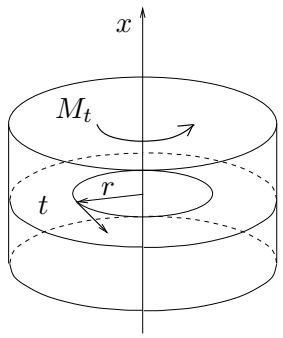


Fig. 1.20. La contrainte tangentielle en torsion libre

Elle ne dépend que de la distance au centre r et vaut :

$$\boxed{t(r) = \frac{rM_t}{J_\rho},} \tag{1.52}$$

où J_ρ est l'inertie polaire de la section, définie par

$$J_\rho = \int_S r^2 dS. \tag{1.53}$$

Dans le cas particulier de la section pleine (figure 1.10a), elle vaut

$$\boxed{J_\rho = \frac{\pi R^4}{2},} \tag{1.54}$$

et pour la section creuse (figure 1.10b), elle vaut

$$\boxed{J_\rho = \frac{\pi}{2}\left(R_e^4 - R_i^4\right).} \tag{1.55}$$

Exercice 1.31. On considère une section de poutre circulaire pleine, de rayon R et soumise au seul moment de torsion M_t. Calculer la répartition des contraintes dans la section.

Éléments de correction de l'exercice 1.31

Selon (1.52), il vient

$$t(r) = \frac{rM_t}{J_\rho},$$

où J_ρ est défini par (1.53). Dans le cas particulier d'une section pleine (figure 1.10a), elle vaut selon (1.54),

$$J_\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

On a donc

$$t(r) = \frac{2rM_t}{\pi R^4}.$$

1.5. Étude des sollicitations composées

Une sollicitation quelconque peut toujours se décomposer en la somme d'un effort normal, d'un moment fléchissant, d'un effort tranchant et d'un moment de torsion. Pour obtenir les contraintes et les potentiels dans le cas général, on additionne, d'après le principe de superposition, les résultats des sections (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3) et (1.4.4).

Pour les contraintes, on utilise les formules (1.45), (1.48), (1.50) et (1.52). Ainsi, dans le cas le plus général, on a, pour la contrainte normale

$$\boxed{n_1 = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z,}$$

En revanche, pour la contraintes tangentielles, on n'a pas de formule générale, puisque les données des contraintes tangentielles définies par (1.45), (1.48), (1.50) et (1.52) ne s'expriment pas dans le même repère.

1.6. Un mot sur l'aspect isostatique des structures étudiées

On donnera au cours du chapitre 3 la définition d'une structure hypostatique, isostatique et hyperstatique (cf. section 3.3, page 56).

Dans ce chapitre de révision, on se contentera d'étudier des structures isostatiques, pour lesquelles on rappelle que l'équilibre suffit à déterminer totalement les efforts de la RDM : *grosso modo*, pour les problèmes plans, il suffit qu'une structure ait moins de trois degrés de liberté bloqués pour être isostatique. Pour les problèmes spatiaux, il suffit qu'une structure ait moins de six degrés de liberté bloqués pour être isostatique.

Pour les structures hyperstatiques, nous verrons au cours du chapitre 3 comment les théorèmes énergétiques permettent de lever cette hyperstaticité.

1.7. Déplacement des sections droites dans le cas de poutres planes

Dans cette section, on rappelle quelques résultat permettant de déterminer, par méthode directe[6], les déplacements des sections des poutres planes étudiées et donc les flèches maximales.

[6] qui s'opposent aux méthodes énergétiques, étudiées au cours des chapitres 3 et 4.

Ces formules s'appuient sur les formules plus générales, qui sont valables pour des poutres quelconques, planes ou gauches. Pour ne pas encombrer ce chapitre, les formules de Bresses sont rappelées en annexe D.

La formule D.4c page 166 de l'annexe D se simplifie dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'à la flèche transversale (supposée être la plus importante, cf. figure 1.21). Elle s'écrit

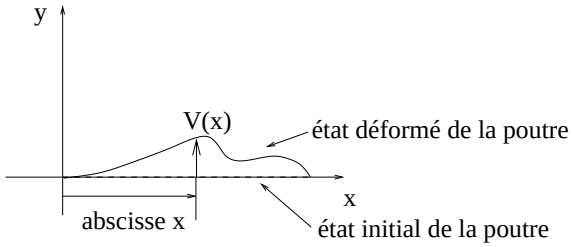


FIG. 1.21. Flèche transversale d'une poutre droite à plan moyen.

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2}(x) = \frac{M}{EI} + \frac{d}{dx}\left(\frac{T}{GS_1}\right).} \tag{1.56}$$

où l'on rappelle que G est le module de Coulomb et S_1 la section réduite d'effort tranchant (définie dans ce cours pour des sections pleines et massives : cf. (3.21) et (3.22) page 54).

Si S et G ne dépendent pas de x, on obtient

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2}(x) = \frac{M}{EI} - \frac{p}{GS_1},} \tag{1.57}$$

où p est la densité linéique de charge transversale à la fibre moyenne (voir section 1.3).

En négligeant la déformation d'effort tranchant, on a

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2}(x) = \frac{M}{EI},} \tag{1.58}$$

ce qui permet de trouver la déformée de la poutre, connaissant M.

Si l'on connaît T ou p, la densité linéique de charge transversale à la fibre moyenne, on peut aussi, en utilisant (1.27), dériver (1.58) pour obtenir l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{d^3V}{dx^3}(x) = -\frac{T}{EI},} \tag{1.59}$$

ou

$$\boxed{\frac{d^4V}{dx^4}(x) = \frac{p}{EI},} \tag{1.60}$$

à laquelle on rajoute les conditions aux limites.

1.8. Finalité de la résistance des matériaux

L'ingénieur étudiera une structure donnée ; elle est définie par
- sa géométrie (sections, inerties, ensemble de poutres, éventuellement coques et plaques) ;
- ses caractéristiques mécaniques (modules d'élasticité des poutres, coefficients de Poisson ...) ;

– ses conditions aux limites (appuis simples, encastrement, rotules ...) ;
– les différents chargements auquels elle est soumise (tabulés ou expérimentaux, avec d'éventuels coefficients de sécurités).

Grâce à tous ces éléments, l'ingénieur détermine les différents efforts de la RDM dans l'ensemble de la structure, à la main, ou le plus souvent avec un logiciel. Il détermine alors les déformées de chacun des éléments de la structure et donc les flèches maximales ainsi que les contraintes maximales (normales et tangentielles).

La structure devra vérifier les deux conditions suivantes pour être correctement conçue :
– les contraintes maximales devront être inférieures à des contraintes seuil (qui dépendent du matériau utilisé)
– les flèches maximales devront être inférieures à des flèches réglementaires.

D'autres types de calculs peuvent aussi être envisagés, comme l'optimisation de structure : déterminer quelle structure peut résister à un chargement donné, tout en minimisant la masse d'acier utilisée ou les inerties, par exemple.

CHAPITRE 2

Cercles de Mohr

Rappelons dans ce chapitre la définition et l'utilisation du cercle de Mohr. On étudie d'abord le problème spatial (section 2.1) puis le problème plan (section 2.2).

Ce chapitre se trouve dans la partie 1, consacrée aux matériaux élastiques linéaires en petites déformations, mais, en toute rigueur, la notion de cercle de Mohr ne dépend pas de la nature de la loi de comportement du matériau étudié.

On pourra consulter [**Duv90**]. On pourra aussi consulter un exemple de problème sur les cercles de Mohr en annexe E (donnée en examen médian à l'Automne 2003).

Pour une étude plus mathématique de la diagonalisation d'une matrice ou d'un tenseur, on pourra aussi consulter les 16 à 20 de [**Bas68**], le polycopié [**Bas03**] ou le sujet de final de MT31 (Automne 2003), disponible sur le web à l'adresse `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`

2.1. Problème tridimensionnel

On se place en un point M (d'un milieu continu) fixé. On exprime le tenseur des contraintes $[\sigma]$ dans le repère (x, y, z) principal ; dans ce repère, on a un tenseur diagonal :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Les contraintes σ_1, σ_2, σ_3 sont les contraintes principales, ne dépendant que du point M et non du repère (x, y, z) (puisqu'elles correspondent aux valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$).

On considère une facette, centrée en M et orientée par le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ (cf. figure 2.1).

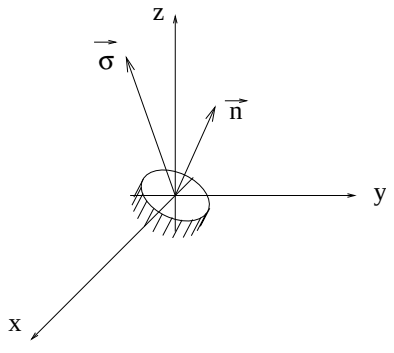


FIG. 2.1. Une facette dans l'espace

On appelle $\overrightarrow{\sigma}$ le vecteur contrainte supportée par la facette (si celle-ci est de surface élémentaire ds, elle est soumise à la force élémentaire $\overrightarrow{\sigma} ds$). On appelle σ et $\overrightarrow{\tau}$ la contrainte normale et la

contrainte tangentielle supportée par la facette, c'est-à-dire les projections respectives de $\overrightarrow{\sigma}$ sur la normale $\overrightarrow{n}$ et sur la plan de la facette (attention, l'une est scalaire, l'autre est vectorielle). On a donc

$$\overrightarrow{\sigma} = \sigma \overrightarrow{n} + \overrightarrow{\tau}, \tag{2.2}$$

$$\sigma = \overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{n}. \tag{2.3}$$

On pose

$$\tau = |\overrightarrow{\tau}|. \tag{2.4}$$

Ainsi, à chaque normale correspond une unique contrainte $\overrightarrow{\sigma}$, à laquelle on associe un unique couple de réel (σ, τ) (attention, par définition σ est de signe quelconque et τ est positif ou nul). Le scalaire σ correspond à une contrainte de traction ou de compression et le scalaire τ correspond à l'intensité d'une contrainte de cisaillement (on verra en section 2.2 que dans les problèmes plans, on peut définir un signe pour τ).

Le principe du diagramme de Mohr est de représenter graphiquement, de façon plane, l'évolution du couple de scalaires (σ, τ) quand $\overrightarrow{n}$ varie (c'est-à-dire quand la facette tourne autour du point M).

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{n}$ (par rapport au repère (x, y, z)) sont notées

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Puisque $\overrightarrow{n}$ est unitaire, nous avons

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + = 1. \tag{2.6}$$

D'autre part, on rappelle que

$$\overrightarrow{\sigma} = [\sigma]\overrightarrow{n}. \tag{2.7}$$

D'après (2.2), (2.3) et (2.4) et le théorème de Pythagore, on a

$$\sigma = \overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{n}, \tag{2.8}$$

$$\tau^2 = |\overrightarrow{\sigma}|^2 - \sigma^2. \tag{2.9}$$

Bref, à tout triplet de réel n_1, n_2, n_3 vérifiant (2.6), on peut associer un unique couple $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ défini par (2.7), (2.8) et (2.9). Compte tenu de (2.1), on vérifie aisément que

$$\overrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} n_1\sigma_1 \\ n_2\sigma_2 \\ n_3\sigma_3 \end{pmatrix},$$

et donc que (2.7), (2.8) et (2.9) sont équivalents à

$$\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma \tag{2.10}$$

$$\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2. \tag{2.11}$$

Il est clair que (2.6), (2.10) et (2.11) sont équivalents au système matriciel

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \end{pmatrix}.} \tag{2.12}$$

Ainsi, à tout triplet de réel (n_1, n_2, n_3) on peut associer un unique couple $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ défini par (2.12).

On cherche l'ensemble des couples $(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ vérifiant (2.12) quand (n_1,n_2,n_3) décrit $\mathbb{R}^3$ (les trois réels $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ sont fixés). On se donne donc maintenant $(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ et on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ vérifiant (2.12), qui fait intervenir une matrice de Vandermonde. On cherche donc maintenant à exprimer n_1, n_2 et n_3 en fonction de (σ,τ) grâce à (2.12).

La matrice de Vandermonde peut s'inverser ainsi [1] : on introduit le polynôme du second degré

$$P(x)=x^2+ax+b.$$

On multiplie la première ligne de (2.12) par b, la deuxième ligne de (2.12) par a et la troisième deuxième ligne de (2.12) par 1 ; par sommation, il vient

$$n_1^2P\left(\sigma_1\right)+n_2^2P\left(\sigma_2\right)+n_3^2P\left(\sigma_3\right)=\tau^2+P\left(\sigma\right). \tag{2.13}$$

Pour éliminer n_2 et n_3 de cette équation, il suffit de choisir P tel que $P\left(\sigma_2\right)=P\left(\sigma_3\right)=0$, c'est-à-dire

$$P(x)=\left(x-\sigma_2\right)\left(x-\sigma_3\right). \tag{2.14}$$

D'après (2.13), on donc

$$n_1^2\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\left(\sigma_1-\sigma_3\right)=\tau^2+\left(\sigma-\sigma_2\right)\left(\sigma-\sigma_3\right).$$

Par permutation circulaire, on obtient donc

$$\left\{\begin{array}{l} n_1^2\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\left(\sigma_1-\sigma_3\right)=\tau^2+\left(\sigma-\sigma_2\right)\left(\sigma-\sigma_3\right),\\ n_2^2\left(\sigma_2-\sigma_1\right)\left(\sigma_2-\sigma_3\right)=\tau^2+\left(\sigma-\sigma_1\right)\left(\sigma-\sigma_3\right),\\ n_3^2\left(\sigma_3-\sigma_1\right)\left(\sigma_3-\sigma_2\right)=\tau^2+\left(\sigma-\sigma_1\right)\left(\sigma-\sigma_2\right), \end{array}\right. \tag{2.15}$$

système équivalent à (2.12). Puisqu'apparaissent les quantités $\sigma_1-\sigma_2$, $\sigma_1-\sigma_3$ et $\sigma_2-\sigma_3$, on a une discussion sur les valeurs relatives de σ_1, σ_2 et σ_3. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a choisi les directions principales telles que

$$\sigma_1\leq\sigma_2\leq\sigma_3.$$

Attention, parfois la convention contraire est choisie !

2.1.1. Premier cas : $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$

Ainsi, (2.15) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} n_1^2=\dfrac{\tau^2+\left(\sigma-\sigma_2\right)\left(\sigma-\sigma_3\right)}{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\left(\sigma_1-\sigma_3\right)},\\ \\ n_2^2=\dfrac{\tau^2+\left(\sigma-\sigma_1\right)\left(\sigma-\sigma_3\right)}{\left(\sigma_2-\sigma_1\right)\left(\sigma_2-\sigma_3\right)},\\ \\ n_3^2=\dfrac{\tau^2+\left(\sigma-\sigma_1\right)\left(\sigma-\sigma_2\right)}{\left(\sigma_3-\sigma_1\right)\left(\sigma_3-\sigma_2\right)}. \end{array}\right. \tag{2.16}$$

[1] Il existe une autre méthode, plus rapide, fondée sur l'utilisation du polynôme d'interpolation de Lagrange : voir, le cas échéant, le TD de MT40 ou [**BM03**]. Un peu de reflexion nous montre qu'en fait cette méthode est similaire à celle utilisant les polynômes de Lagrange. Nul en σ_2 et σ_3, le polynôme P, défini par (2.14), est proportionnel au polynôme de Lagrange l_1 défini par rapport au support $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$.

Puisqu'apparaissent des carrés à gauche, les nombres n_1 n_2 et n_3 existent si et seulement si les quantités de droite sont positives, c'est à dire, compte tenu de $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

$$\begin{cases} \tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0, \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) \leq 0, \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geq 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

On remarque, que dans le demi-plan (σ, τ) correspondant à $\tau \geq 0$, l'équation

$$\tau^2 + (\sigma - X_a)(\sigma - X_b) = 0,$$

correspond à un demi cercle centré sur l'axe x et passant par les points de coordonnées $(0, X_a)$ et $(0, X_b)$. Ainsi (2.17) définit dans le demi-plan (σ, τ) correspondant à $\tau \geq 0$ une région, constitué de l'intersection de trois régions, délimitée chacune par un demi-cercle. On note C_1 le demi cercle passant par les points $(0, \sigma_2)$ et $(0, \sigma_3)$ d'équation

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0, \tag{2.18}$$

C_2 le demi cercle passant par les points $(0, \sigma_1)$ et $(0, \sigma_3)$ d'équation

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) = 0, \tag{2.19}$$

et C_3 le demi cercle passant par les points $(0, \sigma_1)$ et $(0, \sigma_2)$ d'équation

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) = 0. \tag{2.20}$$

La région M est représentée sur la figure (cf. figure 2.2). Elle est délimitée par les trois demi cercles C_1, C_2 et C_3 appelés tricercle de Mohr. Ces trois demi cercles sont entièrement définis à partir des valeurs des contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3.

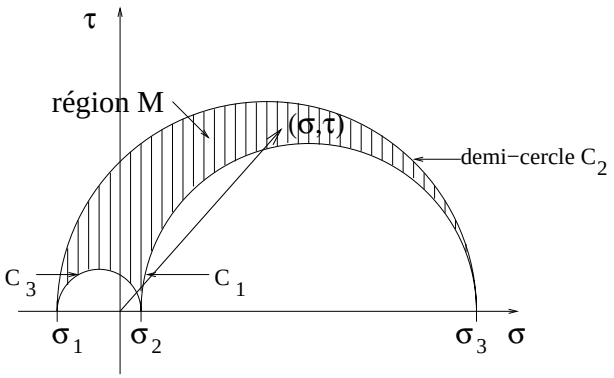


FIG. 2.2. Le tricercle de Mohr dans le cas où $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

Conventionnellement, on représente sur cette figure le vecteur dont les coordonnées sont (σ, τ) et qui représente le vecteur contrainte. Quand la facette tourne autour du point M, ce vecteur décrit donc la région M.

On peut remarquer que, d'après (2.16) et (2.20) P appartient à C_3 si et seulement si $n_3^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{n}$ appartient au plan dirigé par (x, y). On exploitera ce

résultat plus précisément en section 2.2. On retiendra que $\overrightarrow{n}$ appartient au plan dirigé par (x, y) si et seulement si $P \in C_3$.

De même, P appartient à C_2 (resp. C_1) si et seulement si $\overrightarrow{n}$ appartient au plan dirigé par (x, z) (resp. (y, z)). Ainsi $P \in C_1 \cap C_2$, si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est porté par l'axe z. Graphiquement $C_1 \cap C_2$ est le point de coordonnées $(\sigma_3, 0)$. On retrouve donc le fait que la direction z correspond à la direction principale associée à σ_3 ; dans ce cas, on a bien $\sigma = \sigma_3$ et $\tau = 0$; l'état de contrainte est une traction ou une compression pure.

Par ailleurs, sur la figure 2.3, on constate que, pour tout point P de la région M, on a

$$\boxed{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_3.}$$

Ainsi σ_1 et σ_3 correspondent aux contraintes normales extrémales ; elles sont atteintes sur les directions principales x et z. De même, graphiquement, on constate que, pour tout point P de la région M, on a

$$0 \leq \tau \leq \tau_{\max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \tag{2.21}$$

La contrainte normale correspondant à ce point (noté A sur la figure 2.3) vaut

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}.}$$

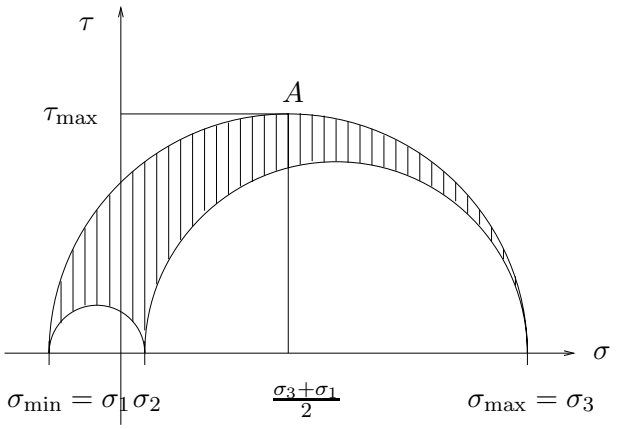


FIG. 2.3. Extremums des contraintes

Puisque le point correspondant A appartient au demi cercle C_2, le vecteur $\overrightarrow{n}$ correspondant appartient au plan dirigé par (x, z). On peut montrer à partir des formules (2.16) que, pour le point A,

$$n_2 = 0 \text{ et } n_1 = \pm n_3.$$

La contrainte maximale tangentielle est donc obtenue pour un vecteur $\overrightarrow{n}$ porté par la bissectrices des deux directions principales correspondant aux contraintes principales extrémales.

Cela explique par exemple, pourquoi lors d'un essai en traction, le plan de cisaillement maximal (le plus fragile) le long duquel se provoquent les ruptures est en dents de scie (cf. figure 2.4). On pourra consulter l'exercice 1.22 page 24 du chapitre 1. et l'exercice 2.2 page 42.

Le cercle de Mohr permet donc d'avoir accès à un certain nombre de renseignements sur l'état des contraintes en un point et ce, de façon graphique ou analytique.

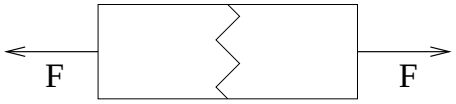


FIG. 2.4. Plan de cisaillement maximal

2.1.2. Deuxième cas : $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$

Le demi cercle C_3 est réduit à un point et la région M est réduite au demi cercle C_1 (égal à C_2), c'est-à-dire :

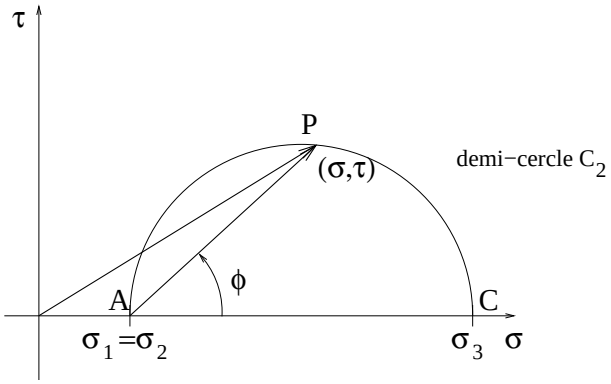


FIG. 2.5. Le tricercle de Mohr dans le cas où $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$

Si on appelle ϕ l'angle entre la $\overrightarrow{n}$ et la direction principale z (cf. figure 2.6), on admet que cet angle se retrouve sur le cercle de Mohr (cf. figure 2.5), égal à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}})$).

On retrouve des propriétés concernant les contraintes extrémales analogue au premier cas.

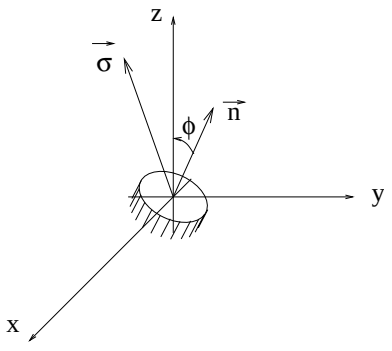


FIG. 2.6. L'angle ϕ

2.1.3. Troisième cas : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

Le diagramme de Mohr est réduit à un point (cf. figure 2.7)

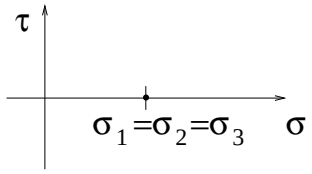


FIG. 2.7. Le tricercle de Mohr dans le cas où $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

Dans ce cas, toute direction $\overrightarrow{n}$ est direction principale, associée à la contrainte principale σ_1. Le tenseur des contraintes est diagonal :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Quelle que soit l'orientation de la facette, la contrainte normale est égale à σ_1 et la contrainte tangentielle est nulle. C'est le cas de la pression hydrostatique.

2.2. Problème bidimensionnel

En reprenant l'état de contrainte spatial, on a, pour $\sigma_3 = 0$,

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est le cas de la surface libre d'un solide exempte de contrainte ou de plaques minces chargées dans leur plan.

Le vecteur contrainte $\overrightarrow{\sigma}$ appartient au plan (x, y) et on peut paramétrer le vecteur $\overrightarrow{n}$ par l'angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{n}})$, comme indiqué sur la figure 2.8. Dans ce cas, on peut aussi définir les grandeurs σ et τ de façon algébrique.

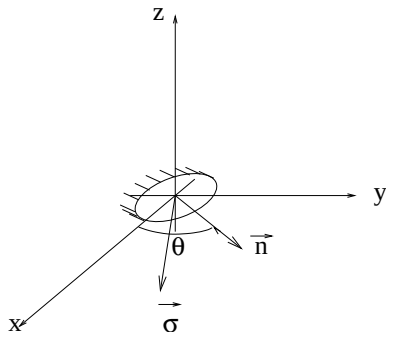


FIG. 2.8. Une facette dans le plan

Dans le plan (x, y), on considère un repère $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{t})$ direct (cf. figure 2.9).

On écrit

$$\overrightarrow{\sigma} = \sigma \overrightarrow{n} + \tau \overrightarrow{t}, \tag{2.23}$$

et on cherche l'évolution du couple (σ, τ) quand θ décrit $[0, 2\pi[$.

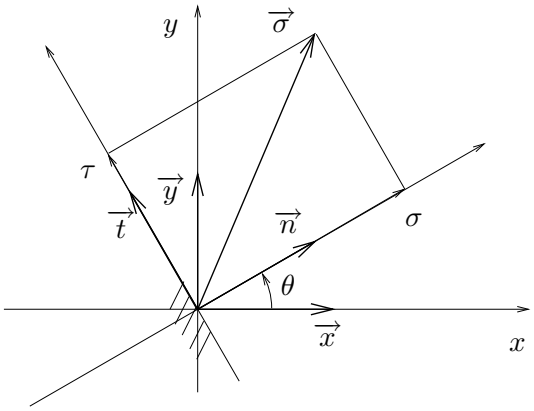


FIG. 2.9. Une facette dans le plan

Dans le repère (x, y, z), on a toujours

$$\overrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} n_1\sigma_1 \\ n_2\sigma_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui implique

$$\overrightarrow{\sigma} = \sigma_1 n_1 \overrightarrow{x} + \sigma_2 n_2 \overrightarrow{y}.$$

Compte tenu de

$$\overrightarrow{x} = \cos\theta \overrightarrow{n} - \sin\theta \overrightarrow{t},$$
$$\overrightarrow{y} = \sin\theta \overrightarrow{n} + \cos\theta \overrightarrow{t},$$

il vient

$$\overrightarrow{\sigma} = \left(\sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta\right) \overrightarrow{n} + (\sigma_2 - \sigma_1) \cos\theta \sin\theta \overrightarrow{t},$$

ce qui implique

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta,$$
$$\tau = (\sigma_2 - \sigma_1) \cos\theta \sin\theta \ ;$$

En utilisant les lignes trigonométriques de l'arc double

$$\cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta,$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1),$$
$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} (-\cos 2\theta + 1),$$

on a donc

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta,} \tag{2.24}$$

et

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta.} \tag{2.25}$$

Le système (2.24)-(2.25) est équivalent à (2.23). On suppose que

$$\sigma_2 \leq \sigma_1. \tag{2.26}$$

Attention, parfois la convention contraire est choisie ! Ainsi, (2.24)-(2.25) est équivalent à

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos(-2\theta), \tag{2.27}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin(-2\theta). \tag{2.28}$$

Dans le plan (σ, τ), on note Ω, le point de coordonnées $\left((\sigma_1 + \sigma_2)/2, 0\right)$ et P le point de coordonnées (σ, τ). Ainsi, (2.27)-(2.28) est équivalent à

$$\overrightarrow{\Omega P} = R\begin{pmatrix}\cos(-2\theta)\\ \sin(-2\theta)\end{pmatrix},$$

où

$$R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \geq 0.$$

On a donc

$$\boxed{-2\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega P}}) \quad [2\pi].} \tag{2.29}$$

Quand θ décrit $\mathbb{R}$, le point P décrit donc le cercle de Mohr C (cf. figure 2.10 page 41) Sur cette figure, on a $\sigma > 0$, $\tau < 0$ et $\theta > 0$.

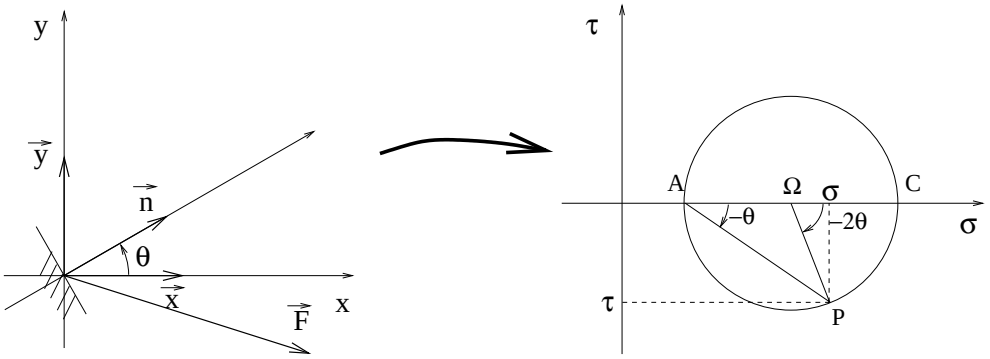


FIG. 2.10. Le cercle de Mohr plan

Comme dans la section 2.1, on a donc montré que le point représentatif de l'état de contrainte associé à une facette définie par l'angle θ décrit le cercle C. De plus, on a montré que l'angle θ se retrouve sur ce cercle de Mohr (selon (2.29)). D'après (2.29) et compte tenu de la propriété de l'angle au centre,

$$\boxed{-\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}}) \quad [2\pi].} \tag{2.30}$$

Sur la figure 2.10, on constate que l'état de contrainte tangentielle maximale correspond à $2\theta = \pm\pi/2$, soit $\theta = \pm\pi/4$; on retrouve donc le fait que cette facette est dirigée par l'une des deux bissectrices de x et de y.

Remarque 2.1. Les propriétés (2.29) et (2.30) sont fondamentales ; elles permettent de caractériser, de façon purement géométrique, l'état de contraintes sur la facette définie par l'angle θ. En TD et en TP, on s'efforcera, pour les interprétations géométriques, d'exploiter au mieux ces propriétés, sans faire de calculs.

Exercice 2.2. On reprend l'exercice 1.22 page 24 du chapitre 1.

On considère, au sein du milieu, une facette quelconque de normale $\overrightarrow{n}$ faisant un angle α avec la fibre moyenne. Au cours de l'essai, quelle est la valeur maximale atteinte en module pour la contrainte tangentielle subie par cette facette (quand α varie) ? Pour quelle valeur de α ?

Éléments de correction de l'exercice 2.2

Vu la forme de l'état de contraintes (1.46), on peut se placer dans le cas de la section 2.1 avec $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 < \sigma_3 = \sigma$ ou dans le cas de la section 2.2 avec $\sigma_2 = 0 < \sigma_1 = \sigma$. On choisit de se placer dans le dernier cas.

Ainsi, avec les notations de la section 2.2, on peut se placer dans tout plan passant par la fibre moyenne avec $\alpha = \theta$. Ainsi, selon (2.25) avec

$$\sigma_2 = 0,$$
$$\sigma_1 = \sigma,$$

il vient

$$|\tau| = \frac{1}{2}\sigma \left|\sin 2\alpha\right|.$$

Cette valeur est maximale pour

$$\alpha = \frac{\pi}{4},$$

et la module de la contrainte tangentielle correspondant est égal à

$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2}\sigma.$$

C'est ce qui explique l'allure en dent de scie de la figure 2.4 page 38.

Avec la valeur numérique (1.47), on a

$$|\tau_{\max}| = 160 \text{ MPa}.$$

Exercice 2.3. Voir l'exercice corrigé en annexe E.

Deuxième partie

Élasticité linéaire en petites déformations

CHAPITRE 3

Les théorèmes énergétiques

3.1. Introduction

Pour déterminer les déplacements dans une structure, (ou pour lever l'hyperstaticité[1] d'une structure, en utilisant une méthode déplacement), on peut utiliser les formules de Bresse (voir annexe D). Cependant cette méthode est très rapidement lourde quand la structure se complique.

Dans ce chapitre, on présente des théorèmes qui permettent, en utilisant l'énergie emmagasinée dans une structure, de calculer des déplacements (mais aussi de lever l'hyperstaticité d'une structure). Ces méthodes sont d'un usage plus agréable.

De plus, on verra, à la fin du semestre (introduction aux éléments finis) que les notions et les méthodes énergétiques restent valables pour l'étude de systèmes, dit à nombre de degrés de liberté infinis (à l'opposé des structures, qui possèdent un nombre fini de degrés de liberté).

Nous donnerons d'abord quelques résultats généraux sur l'énergie (dans le domaine de la MMC puis de la RDM) en section 3.2. Après avoir fait quelques rappels sur les notions d'hypostaticité, d'isostaticité et d'hyperstaticité en section 3.3, nous donnerons les trois grands théorèmes énergétiques (théorèmes de Maxwell-Betti, de Castigliano et de Ménabréa) en section 3.4. Nous ferons quelques remarques sur les théorèmes vus (cf. section 3.5) puis nous donnerons, en section 3.6, un plan très succinct d'une méthode générale d'étude de structure.

3.2. Généralités

Dans cette section, nous présentons d'abord quelques propriétés dans le cadre de la MMC (section 3.2.1) puis nous nous restreindrons au cadre de la RDM (section 3.2.2).

3.2.1. Généralités dans le cadre de la MMC

On étudie un solide soumis à des forces extérieurs et reposant sur des appuis (cf. figure 3.1). On supposera que

- Les forces extérieures sont appliquées progressivement de façon à n'induire que des déplacements lents (transformations réversibles), sans accélération ;
- On se place dans le cadre de petites déformations ;
- Le matériau est élastique linéaire ;
- Les appuis sont «parfaits», c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottements.

Remarque 3.1. On peut aussi étudier des solides dits auto-équilibrés, c'est-à-dire, sans aucune condition aux limites, mais soumis à des forces opposées, qui le maintiennent équilibre.

[1] On précisera cette notion au cours de ce chapitre

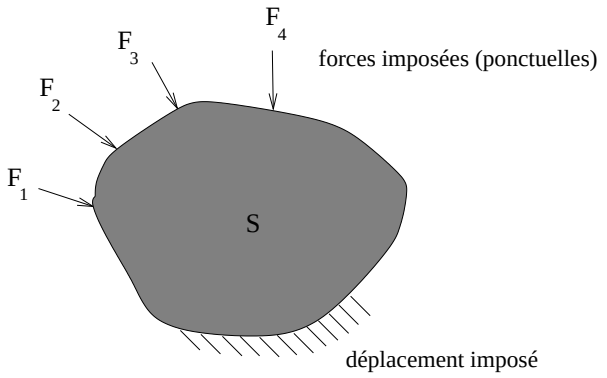


FIG. 3.1. Un solide élastique étudié

On admet le principe énergétique suivant, qui demeure très général et qui traduit la conservation de l'énergie d'un système :

$$\Delta W_e - \Delta W_i = \Delta U. \tag{3.1}$$

Ici,

- Δ désigne la différence des grandeurs entre l'état initial et l'état final ;
- W_e désigne le travail des forces extérieures ;
- W_i désigne le travail des forces intérieures ;
- U désigne l'énergie interne.

Outre la conservation d'énergie, (3.1) traduit aussi le fait que, seuls les états initiaux et finaux importent, et ce, indépendamment des états intermédiaires.

En l'absence de frottements et d'apports de chaleur (qui sont étudiés dans le cadre de la thermodynamique), l'énergie interne est constante et le principe (3.1) s'écrit

$$\Delta W_e = \Delta W_i. \tag{3.2}$$

On donne les définitions suivantes :

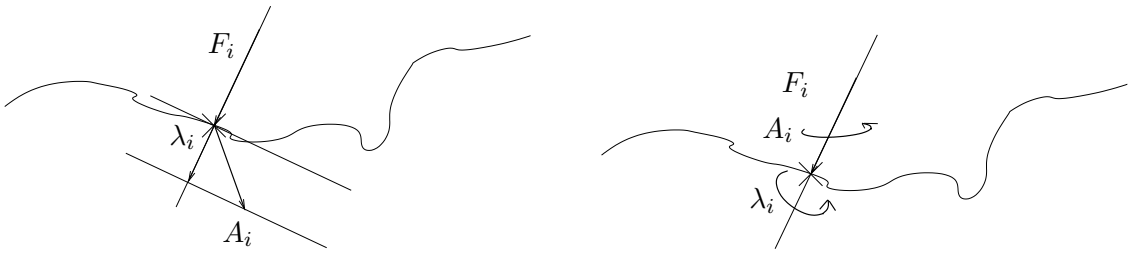
DÉFINITION 3.2. . On appelle une force généralisée, soit une force, soit un moment et dans les deux cas caractérisée par son point d'application, sa direction d'action et son intensité.

Une force généralisée F_i sera donc la composante dans une direction donnée de l'action extérieure appliquée au point A_i.

REMARQUE 3.3. Si la force appliqué est un couple seul (par exemple dans le cas d'un torseur à résultante nulle) l'effet de ce couple est indépendant de son point d'application, qui, en toute rigueur, n'a pas besoin d'apparaître dans la définition 3.2. Cependant, ce point d'application est important, car à chaque force généralisée, on associe un déplacement généralisé : celui du point d'application, comme dans la définition suivante.

DÉFINITION 3.4. On appelle déplacement associé à une force généralisée, soit le déplacement (translation) du point d'application de cette force projeté sur l'axe de la composante de la force, soit la rotation du point projetée sur l'axe du moment.

Dans les deux cas, le déplacement associé est algébrique et il peut être positif (déplacement dans le même sens que la force) soit négatif (déplacement dans le sens opposé à la force).



(a) cas d'une translation (b) cas d'une rotation

FIG. 3.2. λ_i : déplacement généralisé associé à la force F_i, de point d'application A_i.

Pour la suite, on note λ_i le déplacement généralisé associé à la force F_i, dont le point d'application est le point A_i (cf. figure 3.2).

On peut alors montrer le

THÉORÈME 3.5 (théorème de Clapeyron). *Si le solide étudié, contraint à partir de l'état au repos, est soumis à n forces généralisées extérieures $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ (qui peuvent être soit des résultantes soit des moments), appliquées aux points $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ et associés aux déplacements généralisés $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, alors l'énergie (ou le travail) de ces forces est égale à*

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\lambda_i.} \tag{3.3}$$

REMARQUE 3.6. L'énoncé de ce théorème suppose que le solide est initialement au repos : ce solide étant élastique, les déplacements et les contraintes dans ce solide sont nuls. On peut donc identifier l'énergie des forces extérieures et la variation de cette énergie, puisqu'elle est initialement nulle.

REMARQUE 3.7. Ici, les forces extérieures en présence sont supposées être ponctuelles. S'il s'agit de densités volumiques, surfaciques ou linéiques de forces, il faut rajouter des termes intégraux.

REMARQUE 3.8. Dans l'équation (3.3), on a utilisé le symbole somme. Pour tout ce chapitre, on utilisera la convention de sommation d'Einstein (voir section A.1 de l'annexe A, page 133). Avec cette convention, on a

$$W_e = \frac{1}{2}F_i\lambda_i. \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.5. Cette démonstration permet de comprendre que la notion d'énergie correspond à la notion usuelle «force × déplacement» et de saisir l'origine du facteur 1/2.

Par linéarité, on peut supposer que l'on applique une seule force F_i, les autres étant nulles.

Le chargement appliqué à la structure est réversible et chaque force généralisée (résultante ou moment) peut être supposée croissante entre l'état initial elle vaut zéro (puisque qu'il est contraint à partir de l'état sans contraintes, où les forces sont nulles ; cf. remarque 3.6) et l'état final ou elle vaut F_i. On peut donc écrire que, lors du chargement, on a

$$F_i(\rho) = \rho F_i, \tag{3.5}$$

où ρ croît de 0 à 1. On supposera, sans perte de généralité, que la force généralisée appliquée est une résultante (voir figure 3.3). Notons μ_i le déplacement réel (ici une translation) du point A_i qui passe de la position $A_{i,\text{initial}}$ à $A_{i,\text{final}}$ et notons λ_i le déplacement généralisé du point A_i. Ce déplacement croît

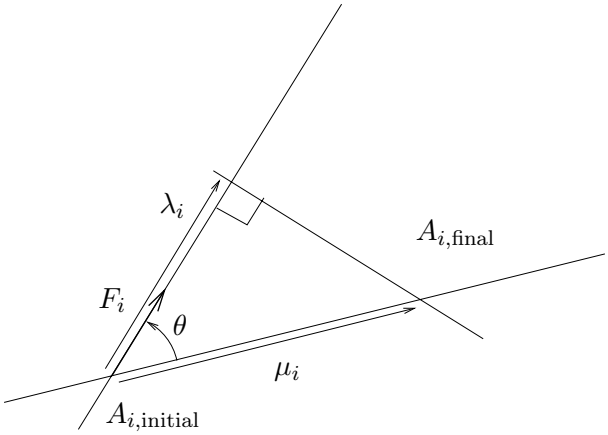


FIG. 3.3. Calcul du travail dû à la force F_i

lui aussi de zéro à sa valeur finale λ_i (puisque qu'il est contraint à partir de l'état sans contraintes, où les forces et donc les déplacements sont nuls ; cf. remarque 3.6). Le solide a un comportement élastique linéaire et donc, lors du chargement, on a

$$\mu_i(\rho) = \rho\mu_i, \tag{3.6}$$

où ρ croît de 0 à 1.

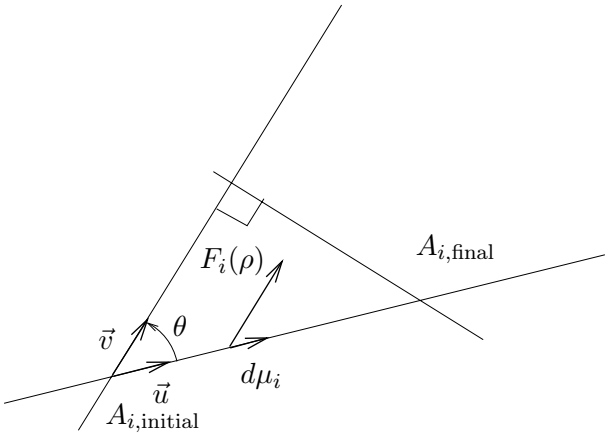


FIG. 3.4. Calcul du travail dû à la force F_i sur le trajet élémentaire $d\mu_i$.

Ainsi, pour le trajet infinitésimal[2] $d\mu_i$ (voir figure 3.4), le travail de la force $F_i(\rho)$ est égal à :

$$dW = \big(F_i(\rho)\vec{v}\big).d\mu_i\vec{u},$$

[2]On rappelle que si un point matériel, soumis à une force $\overrightarrow{F}$, décrit un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$, le travail élémentaire de cette force vaut

$$dW = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}.$$

où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires. Soit encore[3], grâce à (3.5) et (3.6),

$$dW = F_i \rho d\mu_i \vec{u}.\vec{v},$$

Puisque $d\mu_i = d(\rho\mu_i) = \mu_i d\rho$, on a donc

$$dW = F_i \mu_i \rho d\rho \vec{u}.\vec{v},$$

En intégrant, il vient

$$W(F_i) = \int_{\rho=0}^{1} dW = F_i \mu_i \vec{u}.\vec{v} \int_{\rho=0}^{1} \rho d\rho = \frac{1}{2} F_i \mu_i \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2} F_i \mu_i \cos\theta = \frac{1}{2} F_i \lambda_i.$$

En sommant tous ces travaux, le travail des forces extérieures $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ est donc égal à

$$W = \sum_{i=1}^{n} W(F_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i \lambda_i.$$

□

REMARQUE 3.9. Dans ce théorème, nous supposons que nous n'avons pas de «force suiveuse», c'est-à-dire dont la direction suit la structure (cf. figure 3.5). La direction est fixée et indépendante de l'état de la structure, ce qui justifie les calculs précédents.

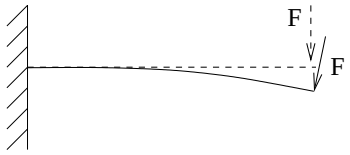


FIG. 3.5. Une structure soumise à une force suiveuse

On peut montrer le théorème suivant (on renvoie à l'annexe A pour la définition du champ de déplacement et des tenseurs des contraintes et des déformations)

THÉORÈME 3.10. *Si le solide élastique linéaire (occupant le volume V) a un champ de déplacement $\overrightarrow{u}$, un tenseur de contrainte σ_{ij} et un tenseur de déformation ε_{ij}, alors l'énergie de déformation (ou l'énergie potentielle de déformation ou travail des forces intérieures) emmagasinée par ce solide est égale à*

$$\boxed{W_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ji} \, dV,} \tag{3.7}$$

où l'intégrale[4] est calculée sur tout le volume V.

REMARQUE 3.11. Ici est encore utilisée la convention de sommation d'Einstein ; la somme (double puisqu'elle porte sur les deux indices i et j) $\sigma_{ij}\varepsilon_{ji}$ est appelée le produit contracté des deux tenseurs $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$.

[3] sans sommation d'Einstein cette fois

[4] Conformément à l'usage répandu en mathématiques, on note indifféremment les intégrales simples, doubles et triples.

Tous les théorèmes de ce chapitre proviendront du principe de conservation d'énergie (3.2) qui s'écrit, compte tenu de (3.3) et de (3.7),

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ji}\,dV = \frac{1}{2}F_i\lambda_i,} \tag{3.8}$$

où W désigne l'énergie potentielle emmagasinée par le solide. L'égalité (3.8) peut être montrée à partir de la loi de l'équilibre local et de la loi de comportement du solide élastique.

3.2.2. Restriction au cadre de la RDM

On suppose maintenant que le solide étudié est une poutre, reposant sur des appuis et soumis à des forces extérieures généralisées $(F_i)_{1\leq i\leq n}$.

On appelle s l'abscisse curviligne le long de la fibre moyenne de cette poutre.

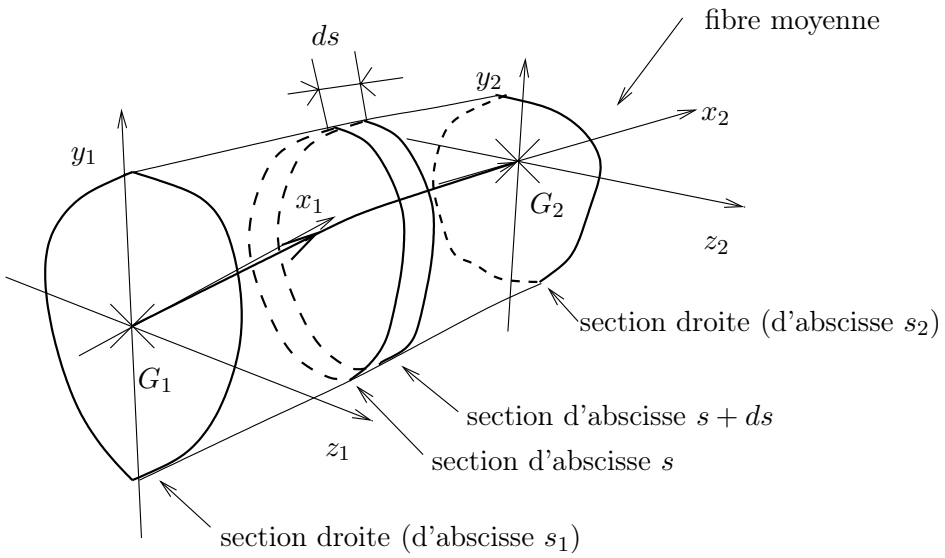


FIG. 3.6. La poutre étudiée, entre les abscisses s_1 et s_2

Le volume V total du corps considéré est donc défini par deux abscisses curvilignes s_1 et s_2 : voir figure 3.6.

Puisque cette poutre est totalement définie par sa fibre moyenne, le volume élémentaire dV est égal à

$$dV = dS\,ds,$$

où dS est l'aire infinitésimale de la section S et ds est la variation infinitésimale de l'abscisse curviligne s. L'expression de l'énergie potentielle emmagasinée par la poutre est donc :

$$W = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_S \sigma_{ij}\varepsilon_{ji}\,dS\right)ds, \tag{3.9}$$

où $\sigma_{ij}\varepsilon_{ji}$ est intégré sur toute la section S (à l'abscisse s) (intégrale double), puis le résultat obtenu est intégré entre s_1 et s_2 (intégrale simple).

Compte tenu de la loi de Hooke inversée, on peut exprimer ε_{ji} en fonction de σ_{ji} (cf. annexe A, équation (A.7), page 142) ; il vient[5]

$$W = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_S \sigma_{ij}\left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ji} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll}\delta_{ji}\right)\,dS\right)ds,$$

ce qui s'écrit encore

$$W = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_S \frac{1+\nu}{E}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}^2 - \frac{\nu}{E}\left(\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}\right)^2 dS\right)ds.$$

REMARQUE 3.12. Réfléchissez au fait, qu'ici, il est indispensable de réutiliser les conventions de sommations ordinaires.

Compte tenu des hypothèses faites en RDM, le tenseur des contraintes a une structure particulière (cf. chapitre 1, équation (1.3), page 9). Ainsi, il vient successivement, en utilisant les notations de Lamé,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_S \frac{1+\nu}{E}\left(n_1^2 + 2t_2^2 + 2t_3^2\right) - \frac{\nu}{E}n_1^2\,dS\right)ds, \\ &= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_S \frac{n_1^2}{E} + 2\frac{1+\nu}{E}\left(t_2^2+t_3^2\right)\,dS\right)ds. \end{aligned}$$

En utilisant le module de Coulomb (défini par (A.8), page 142), il vient donc

$$W = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_S \frac{n_1^2}{E} + \frac{1}{G}\left(t_2^2+t_3^2\right)\,dS\right)ds.$$

On a donc montré

PROPOSITION 3.13. *L'énergie potentielle emmagasinée par une poutre*
- *d'abscisse curviligne s ;*
- *dont les abscisses curviligne de début et de fin sont s_1 et s_2 ;*
- *de section (en un point d'abscisse s) S ;*
- *de modules d'Young E et de Poisson G ;*

est égal à

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_S \frac{n_1^2}{E} + \frac{1}{G}\left(t_2^2+t_3^2\right)\,dS\right)ds.} \tag{3.10}$$

REMARQUE 3.14. Attention, dans cette formule, n_1, t_2, t_3 G, E peuvent dépendre de s, mais aussi de l'endroit de la section où l'on intègre. Cependant, on fait l'hypothèse suivante, très courante :
Hypothèse des sections uniformes :
Les caractéristiques mécaniques sont uniformes sur toute une section (mais ils peuvent dépendre de l'abscisse curviligne s), c'est-à-dire, G et E sont constants dans toute la section.

Ainsi, on peut sortir E et G de l'intégrale double et écrire (3.10) sous la forme

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{1}{E}\int_S n_1^2\,dS + \frac{1}{G}\int_S t_2^2 + t_3^2\,dS\right)ds.} \tag{3.11}$$

[5] toujours avec la notation d'Einstein ...

On note usuellement (3.11) sous la forme

$$\boxed{W = \int_{s_1}^{s_2} dW} \tag{3.12}$$

où dW est l'énergie potentielle de la section de poutre d'épaisseur ds, défini par

$$\boxed{dW = \frac{ds}{2}\left(\frac{1}{E}\int_S n_1^2\, dS + \frac{1}{G}\int_S t_2^2 + t_3^2\, dS\right).} \tag{3.13}$$

REMARQUE 3.15. Parfois, on n'intégrera que sur une travée (c'est-à-dire une portion de la poutre étudiée) et on écrira

$$W_{\text{travée}} = \int_{\text{travée}} dW.$$

où l'intégrale est calculée sur la travée étudiée.

REMARQUE 3.16. En considérant (3.12) et (3.13), on constate que l'énergie potentielle est une quantité toujours positive ; de plus, elle n'est nulle que si n_1, t_2 et t_3 sont identiquement nuls, c'est-à-dire, si le tenseur des contraintes $[\sigma]$ est identiquement nul. Cette remarque n'est valable que sous l'hypothèse de la remarque 3.6, puisqu'en toute rigueur, l'énergie est définie à une constante additive près.

3.2.3. Étude des sollicitations simples

Dans cette section, qui peut être omise en première lecture (on peut passer directement à la section 3.2.4, pour le résultat final), nous calculons l'énergie potentielle élémentaire dW pour les différentes sollicitations simples rappelées dans le chapitre 1.4 (cf. sections 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3 et 1.4.4). Ce calcul est possible, puisque pour chacune des sollicitations simples, nous connaissons l'état des contraintes dans la section.

3.2.3.1. Étude de l'effort normal (traction/compression simple).

Pour l'effort normal seul, d'après l'état de contraintes (1.45) (page 24), il vient, selon (3.13),

$$dW = \frac{ds}{2E}\int_S \left(\frac{N}{S}\right)^2 dS.$$

Puisque que N est uniforme sur toute la section, on a donc

$$\begin{aligned} dW &= \frac{ds}{2E}\frac{N^2}{S^2}\int_S dS, \\ &= \frac{ds}{2E}\frac{N^2}{S^2}S. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{dW = \frac{1}{2}\frac{N^2}{ES}\, ds,} \tag{3.14}$$

où N est l'effort normal et S est l'aire de la section d'abscisse s.

REMARQUE 3.17. Si N, E et S sont constants sur une travée de longueur l, on a donc

$$W_{\text{travée}} = \frac{1}{2}\frac{N^2}{ES}\, l.$$

3.2.3.2. Étude du Moment fléchissant (flexion).

Pour la flexion (si l'effort tranchant est nul), d'après l'état de contraintes (1.48) (page 25), il vient, selon (3.13),

$$dW = \frac{ds}{2E}\int_S n_1^2\, dS \tag{3.15}$$

où

$$n_1 = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z,$$

Calculons l'intégrale double figurant dans (3.15).

$$\begin{aligned}\int_S n_1^2\, dS &= \int_S \left(\frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z\right)^2 dS,\\ &= \int_S \frac{N^2}{S^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}y^2 + \frac{M_y^2}{I_y^2}z^2 - 2\,\frac{N}{S}\,\frac{M_z}{I_z}\,y + 2\,\frac{N}{S}\,\frac{M_y}{I_y}\,z - 2\frac{M_z}{I_z}\,\frac{M_y}{I_y}\,yz\, dS.\end{aligned}$$

Puisque chacun des termes N, S, M_z, I_z ... est constant dans la section, on a donc

$$\begin{aligned}\int_S n_1^2\, dS = \frac{N^2}{S^2}\int_S dS + \frac{M_z^2}{I_z^2}\int_S y^2 dS + \frac{M_y^2}{I_y^2}\int_S z^2 dS\\ - 2\,\frac{N}{S}\,\frac{M_z}{I_z}\int_S y dS + 2\,\frac{N}{S}\,\frac{M_y}{I_y}\int_S z dS - 2\frac{M_z}{I_z}\,\frac{M_y}{I_y}\int_S yz dS.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Or, par définition des moments d'inertie de la section par rapport aux axes y et z (cf. section 1.2.4, page 11, chapitre 1), il vient

$$\int_S y^2 dS = I_z, \tag{3.17a}$$

$$\int_S z^2 dS = I_y. \tag{3.17b}$$

D'autre part, puisque, G est le centre de gravité de la section

$$\int_S y dS = 0, \tag{3.17c}$$

$$\int_S z dS = 0. \tag{3.17d}$$

Enfin, puisque les axes y et z sont principaux (cf. section 1.2.4, page 11), il vient

$$\int_S yz dS = 0. \tag{3.17e}$$

Ainsi, (3.16) se simplifie notablement et devient

$$\int_S n_1^2\, dS = \frac{N^2}{S^2}\times S + \frac{M_z^2}{I_z^2}\times I_z + \frac{M_y^2}{I_y^2}\times I_y,$$

soit encore

$$\int_S n_1^2\, dS = \frac{N^2}{S} + \frac{M_z^2}{I_z} + \frac{M_y^2}{I_y}.$$

D'après (3.15), on a donc

$$\boxed{dW = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y}\right) ds.} \tag{3.18}$$

où N est l'effort normal, S est l'aire de la section, M_y et M_z sont les moments fléchissants et I_y et I_z les moments d'inertie de la section par rapport aux axes y et z.

REMARQUE 3.18. Ces calculs ont été menés de façon exhaustive surtout pour montrer que le choix des axes locaux y et z (principaux, c'est-à-dire passant par le centre de gravité de la section G et annulant l'inertie produit I_{yz}, cf. simplifications (3.17)), simplifie énormément l'expression de dW. Si on n'avait pas eu ces simplifications, l'expression de dW aurait été du type

$$dW = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} - 2A\,\frac{NM_z}{SI_z} + 2B\,\frac{NM_y}{SI_y} - 2C\,\frac{M_zM_y}{I_zI_y}\right) ds, \tag{3.19}$$

où A, B et C sont des réels, non nécessairement nuls, qui dépendent éventuellement de s. Cette expression est plus compliquée que (3.18) ; elle fait, de plus, apparaître un couplage entre les différents efforts de la RDM, N, M_z et M_y (c'est-à-dire, des produits deux à deux) alors que ces efforts n'apparaissent que par leurs carrés dans (3.18).

On a donc choisi des axes qui assure ce découplage des efforts de la RDM, découplage qui simplifiera beaucoup les calculs.

3.2.3.3. Étude de l'effort tranchant (cisaillement).

On admet, dans cette section, après des calculs similaires à ceux de la précédentes, que d'après l'état de contraintes (1.50) (page 27), pour un tronçon de poutre de longueur ds, l'énergie de déformation est égale à

$$\boxed{dW = \frac{1}{2}\,\frac{T_y^2}{GS_{1,y}}\, ds.} \tag{3.20}$$

Ici,

- T_y est l'effort tranchant (porté par l'axe y) ;
- G est le module de Coulomb du matériau (défini par (A.8) page 142) ;
- $S_{1,y}$ est la section réduite d'effort tranchant définie par

$$\boxed{S_{1,y} = I_z^2\left(\int_Y \frac{\mu^2(y)}{b(y)}dy\right)^{-1},} \tag{3.21}$$

où l'intégrale est étendue à toute la hauteur de la section. Pour la définition du moment statique $\mu(y)$ et de la largeur $b(y)$, on renvoie à la figure 1.18 page 27 et à (1.51) page 27).

Ce calcul est valable sous des hypothèses fortement simplificatrices et qui mènent à des résultats qui violent en fait les principes de la MMC ; cependant, les résultats obtenus seront considérés comme une bonne approximation des résultats prévus par la MMC.

REMARQUE 3.19. Souvent, la définition de la section réduite d'effort tranchant (3.21) est remplacée par

$$\boxed{S_{1,y} = \frac{S}{k_y},} \tag{3.22}$$

où k_y est un coefficient tabulé (sans dimension) pour des formes types de sections. Ce coefficient est calculé de façon très précise, sans utiliser la formule (3.21) et fournit donc des résultats plus précis.

Ainsi, (3.20) s'écrit

$$\boxed{dW = \frac{1}{2}\, k_y \frac{T_y^2}{GS}\, ds,} \tag{3.23}$$

En pratique, k_y est souvent proche de un ; ainsi, la section réduite est proche de la section S pour les sections massives.

3.2.3.4. Étude du moment de torsion (torsion libre).

Dans cette section, l'expression de l'énergie de déformation n'est valable que pour les sections circulaires pleines ou creuses (cf. figure 1.10 page 13).

On admet, dans cette section, après des calculs similaires à ceux de la précédentes, que d'après l'état de contraintes (1.52) (page 29), pour un tronçon de poutre de longueur ds, l'énergie de déformation est égale à

$$\boxed{dW = \frac{1}{2}\, \frac{M_t^2}{GJ_\rho}\, ds,} \tag{3.24}$$

où

- M_t est le moment de torsion ;
- G est le module de Coulomb du matériau (défini par (A.8) page 142) ;
- J_ρ est l'inertie polaire de la section, définie par (1.54) et (1.55) page 29.

3.2.4. Étude des sollicitations composées

Pour l'énergie potentielle de déformation d'un tronçon de poutre d'épaisseur ds, on peut montrer, que grâce aux choix des axes principaux, il n'y a pas de couplage entre les différents efforts de la RDM (il n'y a que des carrés et pas de produit deux à deux) et que l'on peut, par un principe de superposition, sommer les différentes expressions (3.14), (3.18), (3.20) et (3.24), pour avoir l'expression de dW :

$$\boxed{dW = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{ES} + \frac{T_y^2}{GS_{1,y}} + \frac{T_z^2}{GS_{1,z}} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_t^2}{GJ_\rho}\right) ds.} \tag{3.25}$$

La présence des termes T_y et T_z n'est pas compatible avec l'hypothèse de Bernoulli.

Comme pour la remarque 3.19, on remplace souvent l'expression de l'énergie potentielle par

$$dW = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{ES} + k_y\frac{T_y^2}{GS} + k_z\frac{T_z^2}{GS} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_t^2}{GJ_\rho}\right) ds, \tag{3.26}$$

où k_y et k_z sont des coefficients tabulés.

Cette formule n'est valable que sous la condition la plus contraignante pour chacune des formules (3.14), (3.18), (3.20) et (3.24), c'est-à-dire, en toute rigueur, dans le cas de sections circulaires (pleines ou creuses). Cependant pour des sections quelconques, on admettra que la formule (3.26) reste valable, quitte à remplacer le terme $M_t^2/(GJ_\rho)$ par $k_t M_t^2/(GJ_\rho)$ où k_t est un coefficient, lui même tabulé, pour différents types de section.

Bref, on a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 3.20. *L'énergie de déformation emmagasinée par la section de poutre d'épaisseur ds et*

- *de section S ;*
- *de modules d'Young E et de Coulomb G ;*
- *d'inerties par rapports aux axes y et z, I_y et I_z ;*
- *avec k_y et k_z, coefficients tabulés ;*

est égal à

$$\boxed{dW = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{ES} + k_y\frac{T_y^2}{GS} + k_z\frac{T_z^2}{GS} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_t^2}{GJ_\rho}\right) ds.} \tag{3.27}$$

Dans le cas général, si l'élancement de la poutre est suffisamment grand et hormis quelques cas exceptionnels, on peut négliger les contributions des efforts tranchants, voire ceux de l'effort normal. S'il n'y pas de torsion, on a donc une approximation de l'énergie de déformation :

PROPOSITION 3.21. *En négligeant les effets des efforts normaux et tranchants, l'énergie emmagasinée par section de poutre d'épaisseur ds et*

- *de module d'Young E ;*
- *d'inerties par rapports aux axes y et z, I_y et I_z ;*

est égal à

$$\boxed{dW \approx \frac{1}{2}\left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y}\right) ds.} \tag{3.28}$$

REMARQUE 3.22. Attention, cette approximation n'est pas toujours valable : par exemple, s'il n'y a que de l'effort normal, il est abusif de négliger les effets de l'effort normal par rapport aux effets de flexion, qui sont nuls. Par ailleurs, il se peut aussi que N soit très grand, rendant impossible le fait de négliger le terme $N^2/(ES)$.

PROPOSITION 3.23. *Pour les structures planes, en négligeant les effets des efforts normaux et tranchants, l'énergie de déformation emmagasinée par la section de poutre d'épaisseur ds et*

- *de module d'Young E ;*
- *d'inertie I ;*

est égale à

$$\boxed{dW \approx \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI} ds.} \tag{3.29}$$

3.3. Structures isostatiques, hypostatiques et hyperstatiques

Avant de donner en section 3.4, les théorèmes énergétiques proprement dits, rappelons les notions d'hypostaticité, d'isostaticité et d'hyperstaticité.

Il existe deux types de définitions de ces notions. Dans les cas les plus usuels (les plus souvent étudiés dans cette UV), l'hyperstaticité d'une structure apparaît à cause de ses réactions d'appuis avec l'extérieur : on parle d'hyperstaticité externe (cf. section 3.3.1). Dans d'autres cas, ce sont les efforts internes qui rendent la structure interne (cf. section 3.3.2).

3.3.1. Hyperstaticité externe

Soit une structure soumise à un chargement et avec des conditions aux limites (encastrement, rotule, ...). On appelle p le nombre de réactions d'appuis (ou de liaisons) et q le nombre d'équations

indépendantes fournies par l'équilibre de la structure. q est égal au maximal à 6 pour un problème tridimensionnel et 3 pour les problèmes plans.

Définition 3.24. La structure est dite
– hypostatique si $p < q$ (on parle aussi de mécanisme) ;
– isostatique si $p = q$;
– hyperstatique si $p > q$ (d'ordre $p - q$).

Dans le cas où la structure est hypostatique, elle est instable, car il n'y a pas assez d'appuis pour la maintenir en équilibre. Pour continuer l'étude, il faut rajouter des appuis.

Par la suite, on supposera systématiquement que les structures étudiées ne sont pas hypostatiques (elles sont donc isostatiques ou hyperstatiques).

Définition 3.25. Une structure isostatique ou hyperstatique sera dite au moins isostatique.

Pour une structure isostatique, les équations d'équilibre suffisent à calculer tous les efforts de la RDM. Pour une structure hyperstatique, il faut d'abord lever l'hyperstaticité, c'est-à-dire, trouver des équations supplémentaires pour déterminer les $p - q$ réactions d'appuis manquantes. Ces équations viendront de la loi de comportement élastique de la structure. En utilisant les théorèmes énergétiques de ce chapitre, on pourra déterminer ces équations manquantes et «lever l'hyperstaticité» de la structure.

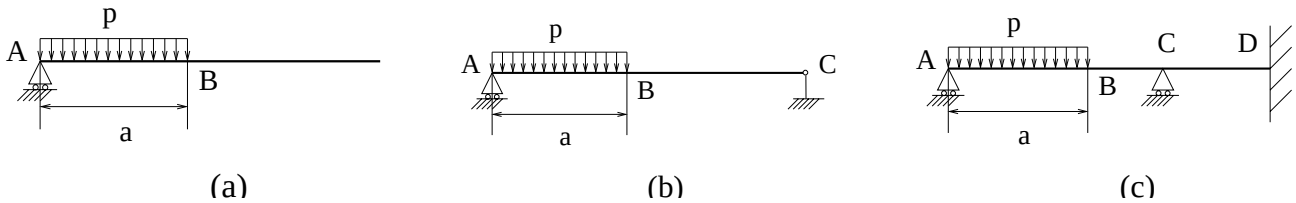


Fig. 3.7. Exemples de structure hypostatique (a), isostatique (b) et hyperstatique (c)

Pour la poutre de la figure 3.7a, on a $p = 1$ et $q = 3$; elle est donc hypostatique. Pour la poutre de la figure 3.7b, on a $p = 3$ et $q = 3$; elle est donc isostatique. Pour la figure 3.7c, on a $p = 5$ et $q = 3$; elle est donc hyperstatique d'ordre 2.

3.3.2. Hyperstaticité interne

La structure de la figure 3.8 est apparemment extérieurement isostatique ($p = q = 2$). Néanmoins, même en connaissant les deux réactions d'axes R_1 et R_2, on ne peut déterminer les efforts de la RDM de la structure. Les efforts internes sont inconnus. On parle d'hyperstaticité interne.

Définition 3.26. Les structures hyperstatiques externes sont des structures où les inconnues hyperstatiques sont des réactions d'appuis du système avec l'extérieur.

Les structures hyperstatiques internes sont des structures où les inconnues hyperstatiques sont des actions (ou des efforts) de cohésion internes au système.

En général, une structure complexe est hyperstatique interne et externe à la fois. On parle donne donc la définition :

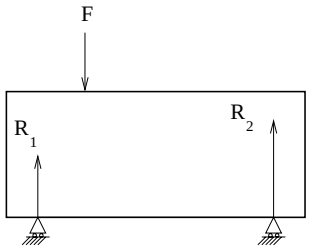


FIG. 3.8. Structure extérieurement isostatique et intérieurement hyperstatique.

DÉFINITION 3.27. Pour une structure hyperstatique (quelconque), on distingue les inconnues hyperstatiques externes, qui sont des réactions d'appuis du système avec l'extérieur et les inconnues hyperstatiques internes qui sont des actions (ou des efforts) de cohésion internes au système.

Dans ce cas général, la définition (3.24) se généralise pour des structures hyperstatiques internes et externes ; on admet que le degré d'hyperstaticité d'une structure quelconque est donné par

$$h = I_s + m - E_s, \tag{3.30}$$

où

- I_s est le nombre d'inconnues de liaisons, internes ou externes ;
- m est le nombre de paramètres cinématiques (déplacements) indépendants ;
- I_s est le nombre d'équations d'équilibre indépendantes.

Comme pour l'hyperstaticité externe, grâce aux théorèmes énergétiques de ce chapitre, on pourra déterminer ces équations manquantes et «lever l'hyperstaticité» de la structure.

3.4. Théorèmes énergétiques

Donnons maintenant quelques théorèmes énergétiques (Théorèmes de Maxwell-Betti, de Castigliano et de Ménabréa) très utiles pour étudier des structures. Il en existe d'autres que nous ne donnons pas ici (théorème de la force unitaire, par exemple).

Pour chacun des trois théorèmes donnés, nous donnerons un exemple d'application, en présentant une petite structure à étudier.

3.4.1. Théorème de Maxwell-Betti

Ce théorème fait partie du domaine de la MMC, puisqu'il s'applique à un corps élastique linéaire quelconque, qui n'est pas nécessairement une poutre de la RDM.

THÉORÈME 3.28 (Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti). *Soit un corps élastique linéaire, reposant sur des appuis (de telle sorte qu'il soit au moins isostatique) et contraint à partir de l'état au repos à deux ensembles distincts de forces généralisées $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(P_j)_{1\leq j\leq m}$ (qui sont des résultantes ou des moments). On note $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ les points d'application des forces généralisées $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(B_j)_{1\leq j\leq m}$ les points d'application des forces généralisées $(P_j)_{1\leq j\leq m}$.*

On considère les déplacements généralisés suivants :

- *$(\lambda'_i)_{1\leq i\leq n}$ sont les projections orthogonales sur la ligne d'action des forces F_i des déplacements généralisés des points A_i, sous l'action des forces $(P_j)_{1\leq j\leq m}$ seules ;*

- $\left(\mu'_j\right)_{1\leq j\leq m}$ *sont les projections orthogonales sur la ligne d'action des forces* P_j *des déplacements généralisés des points* B_j*, sous l'action des forces* $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ *seules.*

On alors la relation suivante :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i F_i = \sum_{j=1}^{m} \mu'_j P_j.} \tag{3.31}$$

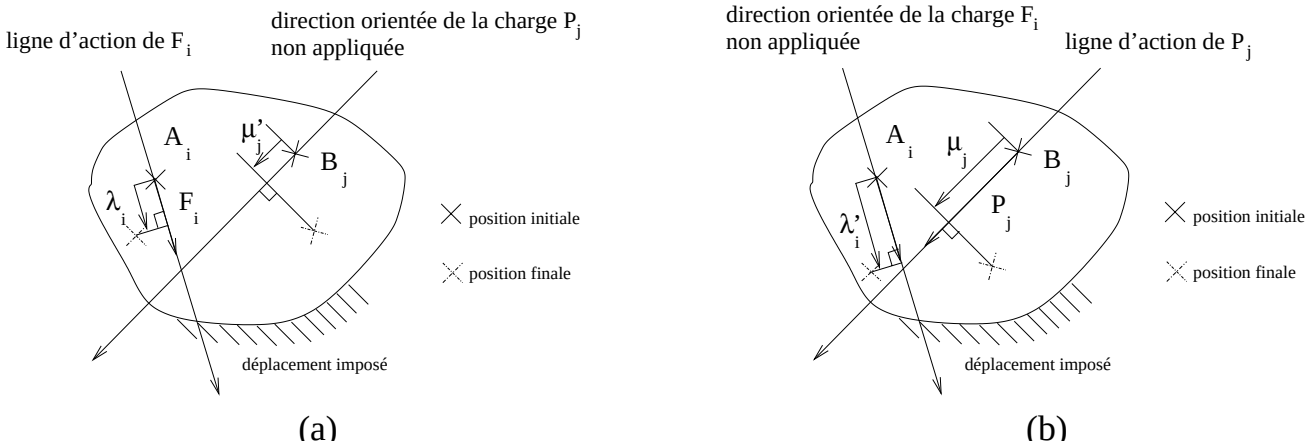


FIG. 3.9. Les hypothèses d'application du Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti : solide soumis aux forces $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ seules (a) et solide soumis aux forces $(P_j)_{1\leq j\leq m}$ seules (b).

La situation de ce théorème est expliquée sur la figure 3.9.

REMARQUE 3.29. Sur la figure 3.9, nous avons distingué les positions des points initialement et finalement ; il ne faut pas oublier que, d'après les hypothèses des petites déformations, on peut confondre les deux configurations.

REMARQUE 3.30. Pour se rappeler mnémotechniquement la formule (3.31), on se rappellera[6] :

$$\mu'_j P_j = \lambda'_i F_i. \tag{3.32}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.28. Conformément à la figure 3.9, on considère les déplacements généralisés suivants :

- $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ les déplacements généralisés associés aux forces généralisées $(F_i)_{1\leq i\leq n}$;
- $(\mu_j)_{1\leq j\leq m}$ les déplacements généralisés associés aux forces généralisées $(P_j)_{1\leq j\leq m}$.

On part de l'état au repos, non chargé. On applique progressivement

- Les forces généralisées $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ (les forces $(P_j)_{1\leq j\leq m}$ n'étant alors pas appliquées) : c'est la phase I ;
- Puis, les forces généralisées $(P_j)_{1\leq j\leq m}$ (les forces $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ restant alors appliquées et constantes) : c'est la phase II.

Calculons alors la variation totale d'énergie.

[6]De plus, grâce à la convention d'Einstein, (3.32) est encore vraie.

D'après le théorème de Clapeyron (cf. théorème 3.5), le travail des forces $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ pendant la phase I est égal à

$$W_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\lambda_i, \tag{3.33}$$

puisque les forces F_i sont associées aux déplacement généralisés λ_i.

Pendant la phase II, les déplacements généralisés associés aux forces P_j sont μ_j ; pendant cette même phase, les déplacements généralisés associés aux forces F_i (qui restent constante mais pour lesquelles les points d'application bougent) sont les déplacements λ_i'. Ainsi, le travail des forces extérieures pendant cette phase II est égal, d'après le théorème de Clapeyron, à

$$W_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} P_j\mu_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\lambda_i'. \tag{3.34}$$

D'après le principe de conservation d'énergie (3.2), la variation d'énergie emmagasinée par le solide au cours des phases I et II et donc égale à

$$\Delta W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\lambda_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} P_j\mu_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\lambda_i'. \tag{3.35}$$

Par ailleurs, la variation d'énergie ne dépend que des états initiaux et finaux et est indépendante du chemin parcouru ; ainsi, on arrive au même état (avec les deux chargement F_i et P_j appliqués) en partant de l'état au repos, puis en appliquant d'abord les forces P_j, puis les forces F_i. Par un raisonnement identique à celui que l'on vient de faire, on montre que

$$\Delta W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} P_j\mu_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\lambda_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} P_j\mu_j'. \tag{3.36}$$

En comparant les deux expressions (3.35) et (3.36), on arrive donc à la conclusion. □

Donnons un exemple d'application :

EXEMPLE 3.31. Déterminer le déplacement vertical f au milieu d'une poutre reposant sur un appui simples et une rotule et soumise à une charge verticale P, appliquée au point C, quelconque de la poutre (cf. figure 3.10).

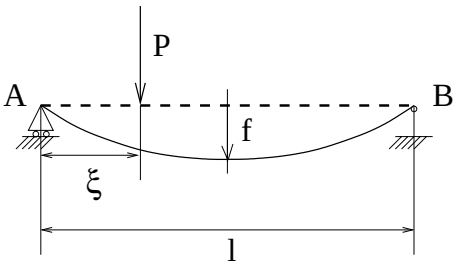


FIG. 3.10. Poutre reposant sur une rotule et un appui simple

REMARQUE 3.32. On a dessiné sur cette figure la déformée de la poutre, par clarté, mais on n'oubliera pas que l'on calcule les efforts de la RDM dans la configuration non déformée.

On pourrait utiliser la méthode directe : en négligeant les effets de l'effort tranchant, on utilise l'équation différentielle usuelle du second ordre donnant déformée de la poutre

$$v'' = \frac{M}{EI}, \tag{3.37}$$

et on l'intégre compte tenu des conditions aux limites, mais le calcul est pénible car la situation n'est pas symétrique. On va voir comment, en utilisant le théorème de Maxwell-Betti, on se ramène à une situation plus symétrique, où l'intégration de l'équation différentielle (3.37) est plus facile.

L'utilisation de ce théorème ne nous dispense pas, pour l'instant, de résoudre l'équation différentielle (3.37) ; on verra ensuite que le théorème de Castigliano nous dispensera de sa résolution.

On considère la même poutre soumise aux deux chargements distincts définis par la figure 3.11.

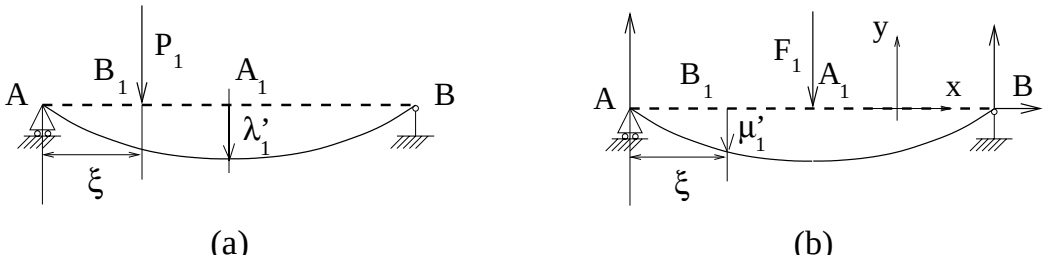


FIG. 3.11. la poutre étudiée soumise aux deux chargements suivants : chargement P_1 (a) et chargement où F_1 est appliqué au milieu de la poutre (b).

Le premier chargement correspond à la situation étudiée. le second chargement est plus symétrique car la force appliquée est appliquée au milieu de la poutre.

D'après le théorème de Maxwell-Betti (avec $m = n = 1$), il vient

$$\lambda_1' F_1 = \mu_1' P_1. \tag{3.38}$$

Il nous suffit donc, pour calculer $f = \lambda_1'$, de déterminer μ_1'. Sur la figure 3.11b, on a indiqué les axes choisis x et y, ainsi que les réactions d'appuis R_{Ay} (en A) et R_{Bx} et R_{By} (en B). On vérifie que cette structure est isostatique.

Sur cette figure, on a choisi $F_1 < 0$.

Par symétrie, on a

$$R_{Ay} = R_{By}, \tag{3.39}$$

et l'équilibre global de la poutre nous donne

$$R_{Ay} + R_{By} + F_1 = 0. \tag{3.40}$$

Ainsi, d'après (3.39) et (3.40), on a

$$R_{Ay} = -\frac{F_1}{2}. \tag{3.41}$$

De même, par symétrie, il vient

$$R_{Bx} = 0. \tag{3.42}$$

De (3.41) et (3.42), on déduit le moment fléchissant $M(x)$ sur AA_1 :

$$M(x) = -\frac{xF_1}{2}. \tag{3.43}$$

En négligeant l'effort tranchant, l'équation différentielle (3.37) nous donne donc :

$$v''(x) = -\frac{xF_1}{2EI}.$$

On suppose I et E constants ; ainsi, par intégration,

$$v'(x) = -\frac{x^2F_1}{4EI} + C,$$

où C est une constante. Par symétrie, $v'(l/2) = 0$. On détermine la valeur de C et on obtient

$$v'(x) = \frac{F_1}{4EI}\left(-x^2 + \frac{l^2}{4}\right).$$

Par intégration, il vient

$$v(x) = \frac{F_1}{4EI}\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{l^2}{4}x + D\right),$$

où D est une constante. En utilisant $v(0) = 0$, on obtient

$$v(x) = \frac{F_1}{4EI}\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{l^2}{4}x\right).$$

On en déduit donc

$$\mu_1' = v(\xi) = \frac{F_1\xi}{48EI}\left(-4\xi^2 + 3l^2\right),$$

quantité dont on vérifie qu'elle est négative. D'après (3.38), il vient donc

$$\lambda_1' = \frac{\mu_1' P_1}{F_1} = \frac{P_1\xi}{48EI}\left(-4\xi^2 + 3l^2\right).$$

Cette expression n'est valable que pour $\xi \in [0, l/2]$. Si $\xi \in [l/2, l]$, on raisonne par symétrie. Bref, on a donc trouvé l'expression de f

$$\boxed{f = \frac{P_1\xi}{48EI}\left(-4\xi^2 + 3l^2\right).}$$

3.4.2. Une conséquence du Théorème de Maxwell-Betti : étude de la matrice de souplesse et de rigidité

Comme pour le théorème de Maxwell-Betti, la propriété de ce paragraphe sera utilisée en RDM, mais elle s'applique en fait à tout solide élastique linéaire, qui n'est pas nécessairement une poutre de la RDM.

Cette propriété sera fondamentale pour l'étude matricielle des réseaux de poutres (cf. annexe J).

PROPOSITION 3.33. *Soit un corps élastique linéaire, reposant sur des appuis (de telle sorte qu'il soit au moins isostatique), et contraint à partir de l'état au repos à n forces généralisées $(F_i)_{1\leq i\leq n}$. On note $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ les déplacements généralisés associés à ces forces généralisées. Alors, il existe C, une matrice carrée de taille n, dite matrice de souplesse, telle que, si l'on pose*

$$\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_n\end{pmatrix}$$

alors,

$$\boxed{\Lambda = CF.} \tag{3.44}$$

Les coefficients de cette matrice dépendent des sens, directions et points d'application des forces $(F_i)_{1\leq i\leq n}$, mais pas de leur intensité.

De plus, si on note$(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ les coefficients de la matrice C (dits coefficients de souplesse ou d'influence), alors c_{ij} désigne le déplacement (ou la rotation) algébrique du point d'application de la force F_i lorsque toutes les forces $(F_k)_{1\leq k\leq n}$ sont nulles sauf F_j, égale à un.

Enfin, la matrice C est inversible et symétrique.

DÉMONSTRATION. D'après le principe de linéarité, chacun des déplacements λ_i est une combinaison linéaire des valeurs algébriques $(F_k)_{1\leq k\leq n}$. il existe donc n coefficients $(c_{ik})_{1\leq k\leq n}$ tels que

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} F_k. \tag{3.45}$$

Cette équation étant vraie pour tout i, on a donc, si C désigne la matrice carré de taille n des coefficients c_{ij}, matriciellement (3.44). Les coefficients d'influence c_{ij} dépendent de la distribution des forces F_i (et donc des sens, direction et point d'application) mais, par linéarité, pas de leur valeur elle-même. Dans (3.45), si on choisit un indice j tel que $F_j = 1$ et pour tout $k \neq j$, $F_k = 0$, on a

$$\lambda_i = c_{ij},$$

ce qui est la dernière assertion de la proposition 3.33.

On admet que la matrice C est inversible. Cela est équivalent à

$$\Lambda = 0 \Longrightarrow F = 0,$$

ce qui traduit que les seuls déplacements nuls correspondent à des chargements nuls (ce n'est vrai que si, au repos, le solide n'est pas contraint).

Démontrons l'aspect symétrique de la matrice C, qui est une conséquence directe du Théorème de Maxwell-Betti.

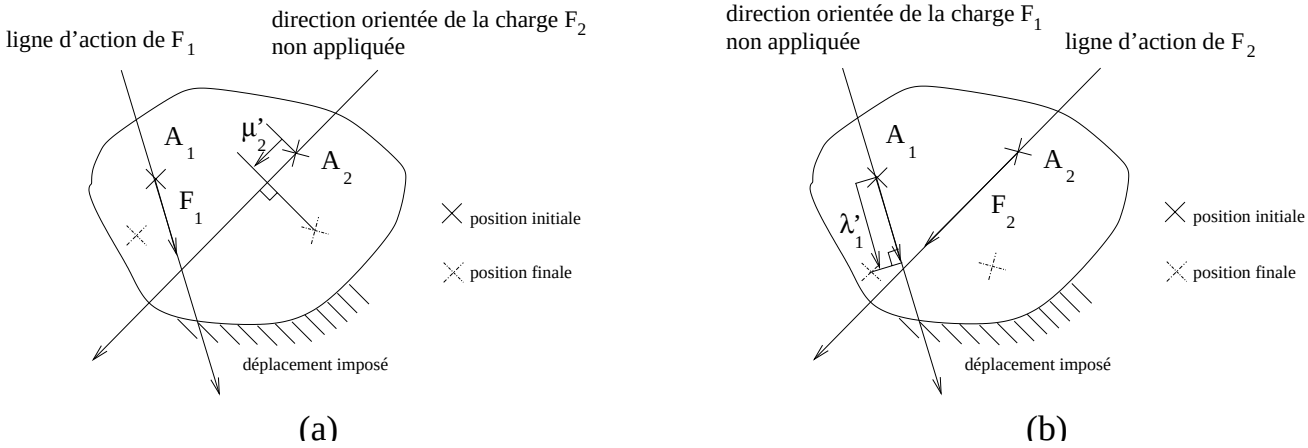


FIG. 3.12. Le solide soumis à la force F_1 seule (a) et à la force F_2 seule (b).

On considère les deux chargements distincts (voir la figure 3.12) :

- Chargement I : on applique uniquement la force F_1, appliquée au point A_1 (toutes les autres forces étant nulles) ;

- Chargement II : on applique uniquement la force F_2, appliquée au point A_2 (toutes les autres forces étant nulles).

On note μ_2' et λ_1' les déplacements des points A_1 et A_2, dans les deux chargements I et II, conformément aux notations du théorèmes de Maxwell-Betti (cf. théorème 3.28). D'après ce théorème, on a

$$\lambda_1' F_1 = \mu_2' F_2. \tag{3.46}$$

Pour le chargement 1, on a F_1 quelconque, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, ..., $F_n = 0$; ainsi, d'après (3.45), puisque μ_2' désigne le déplacement du point A_2, sous le chargement F_1,

$$\mu_2' = \sum_{k=1}^{n} c_{2k} F_k = c_{21} F_1 + c_{22} F_2 + ... + c_{2n} F_n = c_{21} F_1,$$

et donc

$$\mu_2' = c_{21} F_1. \tag{3.47}$$

De même, pour le chargement II,

$$\lambda_1' = \sum_{k=1}^{n} c_{1k} F_k = c_{11} F_1 + c_{12} F_2 + ... + c_{1n} F_n = c_{12} F_2,$$

et donc

$$\lambda_1' = c_{12} F_2. \tag{3.48}$$

Ainsi, d'après (3.46), (3.47) et (3.48), on a

$$c_{12} F_2 F_1 = c_{21} F_1 F_2. \tag{3.49}$$

Puisque les coefficients d'influence ne dépendent pas de la valeur des forces F_1 et F_2, on peut choisir arbitrairement F_1 et F_2 tous non nuls et donc

$$c_{12} = c_{21}.$$

Le raisonnement fait est valable pour tout couple (i, j) et donc on , de même,

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \quad c_{ij} = c_{ji},$$

ce qui traduit que C est symétrique. □

Puisque la matrice C est inversible et symétrique, on pose $K = C^{-1}$, qui est elle aussi, inversible et symétrique. On l'appelle la matrice de rigidité et d'après (3.44), on a donc

$$\boxed{F = K\Lambda.} \tag{3.50}$$

On récapitule ces résultats sous la proposition suivante

PROPOSITION 3.34. *Les matrices de souplesse C et de rigidité K sont symétriques définies positives et l'on a*

$$\boxed{\Lambda = CF, \quad F = K\Lambda, \quad K = C^{-1}.} \tag{3.51}$$

REMARQUE 3.35. On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad {}^t x M x \geq 0.$$

Une matrice est dite définie positive si et seulement si elle est positive et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad {}^t x M x > 0.$$

On rappelle aussi qu'une matrice réelle symétrique est diagonalisable et que, pour une matrice symétrique réelle, être positive (respectivement définie positive) est équivalent à avoir toutes ses valeurs propres positives (respectivement strictement positives).

Remarque 3.36. On verra au cours de l'annexe J que cet aspect symétrique défini positif sera fondamental pour la résolution des systèmes linéaires mis en jeu.

Remarque 3.37. Cette propriété est en partie vraie si la structure est un mécanisme, auquel cas on a

$$F = K\Lambda,$$

où la matrice de rigidité K n'est pas inversible. Mais, dans ce cas, on ne peut parler de matrice de souplesse, puisque K^{-1} n'existe pas. Cette propriété sera utilisée au cours du chapitre J.

On a aussi la proposition suivante

Proposition 3.38. *Soit un corps élastique linéaire, reposant sur des appuis, et contraint à partir de l'état au repos à n forces généralisées $(F_i)_{1\leq i\leq n}$. L'énergie W de déformation emmagasinée par ce solide est égale à*

$$\boxed{W = \frac{1}{2}{}^tFCF = \frac{1}{2}{}^t\Lambda K\Lambda.} \tag{3.52}$$

Démonstration. D'après (3.8), on a[7]

$$W = \frac{1}{2}F_i\lambda_i,$$

c'est-à-dire,

$$W = \frac{1}{2}{}^tF\Lambda.$$

D'après (3.50), on a donc

$$W = \frac{1}{2}{}^t\left(K\Lambda\right)\Lambda = \frac{1}{2}{}^t\Lambda{}^tK\Lambda = \frac{1}{2}{}^t\Lambda K\Lambda,$$

puisque K est symétrique.

De même, on a, d'après (3.51), on a

$$W = \frac{1}{2}{}^t\Lambda K\Lambda = \frac{1}{2}{}^t\left(CF\right)KCF = \frac{1}{2}{}^tF{}^tCKCF = \frac{1}{2}{}^tFCKCF,$$

puisque C est symétrique. Enfin, puisque C et K sont inverses l'une de l'autre, on a

$$W = \frac{1}{2}{}^tFICF = \frac{1}{2}{}^tFCF.$$

□

Remarque 3.39. L'équation (3.51) et l'expression de l'énergie de déformation du solide (3.52) ne sont pas inhabituelles ; on rappelle que pour un ressort de raideur k, soumis à la force f et dont l'extrémité a un déplacement λ (qui correspond au déplacement généralisé associé à f, puisqu'ils sont tous les deux dans la même direction) et non contraint lorsque $\lambda = 0$, la loi de comportement du ressort s'écrit

$$f = k\lambda. \tag{3.53}$$

[7] avec la convention de sommation d'Einstein

L'énergie (potentielle) emmagasinée par ce ressort est égale à

$$E = \frac{1}{2}k\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda k\lambda. \tag{3.54}$$

On note l'analogie totale pour la relation force déplacement entre (3.51) et (3.53) et, pour l'expression de l'énergie, entre (3.52) et (3.54). Le problème avec n forces généralisées est donc une simple généralisation du problème à un degré de liberté (système formé par un unique ressort), la généralisation se faisant très commodément par l'usage des matrices.

L'énergie W apparaît donc, soit comme une fonction de Λ, soit comme une fonction de F. Plus précisément, les sens, directions et points d'applications des forces sont fixés et seules sont considérées comme variables les grandeurs F_1, F_2, ..., F_n (ou λ_1, λ_2, ..., λ_n). Puisque les matrices K et C sont symétriques définies positives, on a la proposition

PROPOSITION 3.40. *L'énergie $W(F)$ est une forme quadratique définie positive de F. L'énergie $W(\Lambda)$ est une forme quadratique définie positive de Λ.*

Pour la notion de forme quadratique définie positive, on pourra consulter, par exemple, [**RDO87**] page 23.

3.4.3. Théorème de Castigliano

On rentre maintenant dans le vif du sujet avec le théorème fondamental en RDM : le théorème de Castigliano (qui est, dans l'ordre académique, le second théorème) :

THÉORÈME 3.41 (Second théorème de Castigliano). *Soit une structure élastique linéaire, reposant sur des appuis (de telle sorte qu'elle soit au moins isostatique), contrainte à partir de l'état au repos et soumise à un système de forces généralisées indépendantes $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ dont les déplacements généralisés associés sont $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$. Si W désigne l'énergie de déformation, alors*

$$\boxed{\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \frac{\partial W}{\partial F_i} = \lambda_i.} \tag{3.55}$$

REMARQUE 3.42. Les forces doivent être indépendantes. Si deux forces extérieures appliquées ont la même intensité F, il est nécessaire de les renommer F_1 et F_2 (*a priori* différentes), de calculer les λ_i voulus, puis de faire $F_1 = F_2 = F$ dans les formules obtenues.

REMARQUE 3.43. Pour un système isostatique, les forces indépendantes du théorème de Castigliano sont toutes les forces et les couples extérieurs, à l'exclusion des forces et des moments d'appuis.

Pour un système hyperstatique de d'ordre $h = p - q$ (voir définition 3.24), il s'agit de même de toutes les forces et couples extérieurs ; mais il s'agit en plus des h composantes de réactions surabondantes, c'est-à-dire les h qui subsistent sur les p qui existent, après élimination de q d'entre elles à partir des q relations générales d'équilibre du système .

REMARQUE 3.44. Le théorème de Castigliano ne permet pas encore de lever l'hyperstaticité d'une structure hyperstatique. En pratique, il ne s'applique donc qu'à des structures isostatiques (ou dont on a préalablement levé l'hyperstaticité : cf. remarque 3.58 page 73).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.41. On peut en trouver une démonstration fondée sur des chargements progressifs de forces, page 45 de [**DG99**].

On peut aussi utiliser directement la relation (3.52), qui s'écrit, avec l'habituelle convention de sommation d'Einstein,

$$W = \frac{1}{2} c_{ij} F_i F_j.$$

Ainsi, en dérivant, il vient[8], pour tout $k \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial F_k} \left(c_{ij} F_i F_j \right), \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial c_{ij}}{\partial F_k} F_i F_j + \frac{1}{2} c_{ij} \frac{\partial F_i}{\partial F_k} F_j + \frac{1}{2} c_{ij} F_i \frac{\partial F_j}{\partial F_k}. \end{aligned}$$

Les coefficients d'influence c_{ij} ne dépendent pas des valeurs des forces F_i ; ainsi

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial F_k} = 0.$$

Puisque les forces F_i sont indépendantes, on a

$$\forall i, k \in \{1, ..., n\}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial F_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k, \end{cases}$$

ce qui se traduit par

$$\frac{\partial F_i}{\partial F_k} = \delta_{ik},$$

où δ_{ik} est l'indice de Kronecker (défini par (A.6) page 141). On a donc

$$\frac{\partial W}{\partial F_k} = \frac{1}{2} c_{ij} \delta_{ik} F_j + \frac{1}{2} c_{ij} F_i \delta_{jk}.$$

On peut vérifier que

$$c_{ij} \delta_{ik} F_j = c_{kj} F_j.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial W}{\partial F_k} = \frac{1}{2} c_{kj} F_j + \frac{1}{2} c_{ik} F_i,$$

et puisque l'indice j est muet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F_k} &= \frac{1}{2} c_{ki} F_i + \frac{1}{2} c_{ik} F_i, \\ &= \frac{1}{2} \left(c_{ki} + c_{ik} \right) F_i. \end{aligned}$$

La matrice C étant symétrique, on a donc

$$\frac{\partial W}{\partial F_k} = c_{ki} F_i,$$

quantité égale à λ_k, d'après (3.45). □

On peut noter, dans cette preuve, la facilité d'emploi de la convention de sommation d'Einstein (ce qui m'a évité de taper quelques signes sommes !).

On pourrait montrer, exactement de même façon, le premier théorème de Castigliano, qui, sous les mêmes hypothèses, nous dit que, de façon duale à (3.55),

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = F_i. \tag{3.56}$$

[8] attention, ici l'indice k est non muet et les indices i et j sont muets

Nous n'utiliserons pas cette formule dans ce chapitre ; en effet, nous utiliserons essentiellement une méthode de forces (les inconnues considérées sont les forces) pour lever l'hyperstaticité et c'est la formule (3.55) que nous utiliserons (cf. section 3.6). La formule (3.56) serait à utiliser pour une méthode déplacements (les inconnues considérées sont les déplacements).

Donnons un exemple d'application :

EXEMPLE 3.45. Déterminer le déplacement vertical du point C pour la structure de la figure 3.13, en négligeant les contributions des efforts normaux et tranchants par rapport au moment fléchissant.

Les deux poutres AB et BC ont les mêmes caractéristiques (E, G, S, I, ...) qui sont constantes, et on pose $l = AB = BC$.

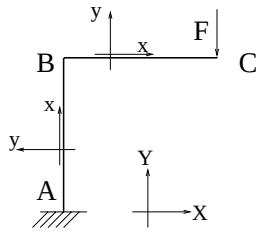


FIG. 3.13. Calcul d'un déplacement par l'utilisation du théorème de Castigliano

Cette structure est isostatique (problème plan et trois réactions d'appuis). On cherche, dans cet exemple, le déplacement généralisé associé à F, qui est dirigé dans le même sens que F (on a choisi, par rapport aux axes globaux (X, Y), indiqués sur la figure, $F < 0$, mais on aurait pu faire le choix opposé).

Sur chaque poutre, calculons le moment fléchissant, par rapport aux axes locaux (x, y), indiqués sur la figure. Comme d'habitude, pour la poutre AB, l'origine choisie est A et BC, l'origine choisie est B. On a orienté la structure de façon à ne pas avoir besoin des réactions d'appui (que l'on pourrait déterminer) pour calculer les efforts de la RDM : on oriente la poutre à partir de l'appui. Après calculs, il vient

$$\text{pour la poutre } AB, \quad M(x) = Fl, \tag{3.57}$$

$$\text{pour la poutre } BC, \quad M(x) = F(l - x). \tag{3.58}$$

On pourrait intégrer l'équation différentielle (3.37) sur chaque travée, mais on utilise le théorème de Castigliano, beaucoup plus léger d'emploi. En effet, d'après (3.29), l'énergie potentielle de déformation est égale à

$$W = \int_{\text{structure}} dW = \frac{1}{2} \int_{\text{structure}} \frac{M^2}{EI}\, ds,$$

et puisque la structure est rectiligne, on a $ds = dx$, où x est l'abscisse sur chacune des travées rectilignes :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{structure}} \frac{M^2}{EI}\, dx. \tag{3.59}$$

Compte tenu de (3.57) et (3.58), on pourrait expliciter M et calculer ensuite $\partial M/\partial F$, mais, en pratique, on dérive sous le signe somme pour ne pas avoir à intégrer le carré de M (dérivation sous le signe somme légitime, puisque toutes les fonctions sont dérivables et leurs dérivées sont intégrables) :

ainsi, on écrit, d'après (3.59) et puisque, d'après l'hypothèse des petites déformations, on peut calculer les forces par rapport à l'état initial de la structure (non déformée),

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{2}\int_{\text{structure}} \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{M^2}{EI}\right) dx.$$

Or, E et I sont constants ; d'où, d'après (3.57) et (3.58)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial F} &= \frac{1}{EI}\int_{\text{structure}} M\frac{\partial M}{\partial F}\, dx,\\
&= \frac{1}{EI}\left(\int_0^l Fl \times l\, dx + \int_0^l F(l-x)\times(l-x)\, dx\right),\\
&= \frac{1}{EI}\left(Fl^3 + F\int_0^l (l-x)^2\, dx\right),\\
&= \frac{1}{EI}\left(Fl^3 + F\int_0^l u^2\, du\right),\\
&= \frac{1}{EI}\left(Fl^3 + F\times\frac{l^3}{3}\right),\\
&= \frac{4}{3}\frac{Fl^3}{EI}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Castigliano, le déplacement généralisé associé à F est égal à

$$\lambda = \frac{4}{3}\frac{Fl^3}{EI}.$$

Ce déplacement est orienté comme F ; on a choisi $F < 0$ donc la ligne d'action de F est orientée vers le haut de la figure et λ correspond au déplacement vertical du point C par rapport aux axes globaux (X, Y). Ainsi,

$$\boxed{y_C = \frac{4}{3}\frac{Fl^3}{EI}.}$$

On retiendra de cet exemple le fait qu'il faut, pour calculer la dérivée de l'énergie de déformation, d'abord calculer la dérivée par rapport à la force, puis l'intégrale sur la structure. D'après (3.27), on calculera donc, si F est une force généralisée, pour les problèmes plans,

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial F} = \int_{\text{structure}} \frac{1}{EI}M\frac{\partial M}{\partial F} + \frac{1}{ES}N\frac{\partial N}{\partial F} + \frac{k}{GS}T\frac{\partial T}{\partial F}\, ds,} \tag{3.60}$$

et pour les problèmes spatiaux,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial F} = \int_{\text{structure}} &\frac{1}{EI_z}M_z\frac{\partial M_z}{\partial F} + \frac{1}{EI_y}M_y\frac{\partial M_y}{\partial F} + \frac{1}{ES}N\frac{\partial N}{\partial F} +\\
&\frac{1}{GJ_\rho}M_t\frac{\partial M_t}{\partial F} + \frac{k_z}{GS}T_z\frac{\partial T_z}{\partial F} + \frac{k_y}{GS}T_y\frac{\partial T_y}{\partial F}\, ds,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

en faisant les approximations usuelles.

Donnons un autre exemple d'application :

Exemple 3.46. Déterminer le déplacement vertical du point A pour la structure de la figure 3.14. Les deux poutres AB et BC ont les mêmes caractéristiques (E, G, S, I, ...) qui sont constantes, et on pose $l = AB = AC$.

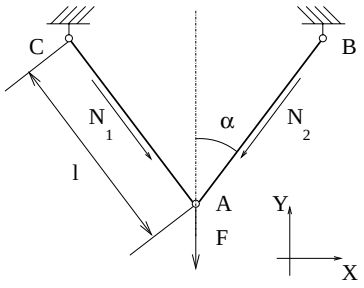


FIG. 3.14. Calcul d'un déplacement par l'utilisation du théorème de Castigliano

Cette structure est un treillis :
– à chaque nœud, il n'y a que des rotules ;
– les forces sont ponctuelles et ne sont appliquées qu'aux nœuds.

On sait, que dans un treillis, les efforts M et T sont nuls et les efforts normaux sont constants dans chacune des poutres. Ainsi, pour le treillis de la figure 3.14, il n'y a que deux efforts normaux inconnus, notés N_1 pour la barre CA (orientée de C vers A) et N_2 pour la barre BA (orientée de B vers A). On vérifie que cette structure est isostatique. Par symétrie $N = N_1 = N_2$. Pour calculer N, on écrit l'équilibre du point A, projeté sur l'axe Y (on a choisi $F < 0$). Il vient donc

$$-2N\cos\alpha - F = 0$$

et donc

$$N = -\frac{F}{2\cos\alpha}. \tag{3.62}$$

On a choisi $F < 0$ donc $N > 0$, ce qui correspond bien à un effort de traction. Le déplacement vertical de A correspond au déplacement généralisé associé à F et d'après, (3.60), on a

$$y_A = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{\text{structure}} \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial F} + \frac{1}{ES} N \frac{\partial N}{\partial F} + \frac{k}{GS} T \frac{\partial T}{\partial F}\, ds.$$

Ici, on ne fait plus d'approximation, puisque M et T sont nuls (si on négligeait l'effort normal, on aurait $W = 0$, donc $y_A = 0$, ce qui est faux). Puisque N est constant, on a, par symétrie, d'après (3.62),

$$\begin{aligned} y_A &= \int_{\text{structure}} \frac{1}{ES} N \frac{\partial N}{\partial F}\, ds, \\ &= 2l \times \frac{1}{ES} N \frac{\partial N}{\partial F}, \\ &= \frac{Fl}{2ES\cos^2\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{y_A = \frac{Fl}{2ES\cos^2\alpha}.}$$

Cette quantité est bien négative puisque $F < 0$.

3.4.4. Théorème de la charge fictive

Dans l'exemple 3.45, on constate, qu'avec le théorème de Castigliano, on ne peut calculer le déplacement horizontal du point C (figure 3.13), puisque ce point C n'est soumis à aucune force horizontale ; pour calculer le déplacement de ce point, il suffit de rajouter une force fictive horizontale, d'appliquer le théorème de Castigliano, puis de faire tendre cette force fictive vers zéro ; c'est l'objet du théorème suivant, qui est immédiat à démontrer.

THÉORÈME 3.47 (Théorème de la charge fictive). *Soit une structure élastique linéaire, reposant sur des appuis (de telle sorte qu'elle soit au moins isostatique), contrainte à partir de l'état au repos et soumise à un système de forces généralisées indépendantes $(F_i)_{1\leq i\leq n}$. On applique en en point non chargé une force généralisé fictive $\mathcal{F}$, de direction fixée. Si $F(\mathcal{F}, F_1, F_2, ..., F_n)$ désigne l'énergie de déformation, alors le déplacement généralisé de ce point (selon la direction de $\mathcal{F}$) est égal à*

$$\boxed{\lambda = \lim_{\mathcal{F}\to 0} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}}(\mathcal{F}, F_1, F_2, ..., F_n).} \tag{3.63}$$

REMARQUE 3.48. Quand la quantité $\mathcal{F}$ tend vers zéro, la direction de la charge fictive reste fixée.

REMARQUE 3.49. Comme le théorème de Castigliano, le Théorème de la charge fictive ne s'applique en pratique qu'à des structures isostatiques (ou dont on a préalablement levé l'hyperstaticité : cf. remarque 3.58 page 73).

REMARQUE 3.50. Comme pour les formules (3.60) et (3.61), on aura intérêt à intervertir l'intégrale et le passage à la limite ; ainsi, pour un problème plan, on aura, en ne prenant, par exemple, que les effets des moments fléchissants,

$$\lambda = \int_{\text{structure}} \frac{1}{EI} \lim_{\mathcal{F}\to 0} \left(M(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n) \frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}}(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n) \right) ds,$$

où $M(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n)$ désigne le moment dans la structure sous le chargement $(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n)$. Ce moment est continu par rapport à tous ses arguments et on a donc

$$\lim_{\mathcal{F}\to 0} M(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n) = M(\mathcal{F} = 0, F_1, ..., F_n),$$

quantité qui correspond, en fait, au moment dans la structure non soumise à la charge fictive $\mathcal{F}$. De même,

$$\lim_{\mathcal{F}\to 0} \frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}}(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n) = \left[\frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}}(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n) \right]_{\mathcal{F}=0}$$

Ainsi, on a, en négligeant les effets des efforts tranchants et normaux,

$$\boxed{\lambda = \int_{\text{structure}} \frac{1}{EI} M(\mathcal{F} = 0, F_1, ..., F_n) \left[\frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}}(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n) \right]_{\mathcal{F}=0} ds.} \tag{3.64}$$

Cette formule se généralise naturellement si on prend aussi en compte les effets des efforts tranchants et normaux.

Attention, cependant à ne pas pousser le raisonnement trop loin et écrire l'aberration suivante

$$\left[\frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}}(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n) \right]_{\mathcal{F}=0} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{F}} M(0, F_1, ..., F_n) = 0.$$

Autrement dit, il faut d'abord dériver $F(\mathcal{F}, F_1, ..., F_n)$ par rapport $\mathcal{F}$, puis y faire $\mathcal{F} = 0$.

REMARQUE 3.51. Ce théorème permet, soit de calculer un déplacement d'un point non chargé, soit un déplacement d'un point chargé dans une autre direction comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 3.52. On reprend l'exemple 3.45 (cf. figure 3.13), mais on cherche maintenant le déplacement horizontal de C.

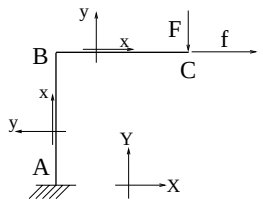


FIG. 3.15. Calcul d'un déplacement par l'utilisation du théorème de la force fictive

On rajoute une force horizontale fictive f, comme sur la figure 3.15. Sur cette figure, avec les conventions choisies, $F < 0$ et $f > 0$. Cette structure demeure naturellement isostatique.

On calcule alors le moment fléchissant dans cette structure, comme précédemment :

$$\text{pour la poutre } AB, \quad M(x, F, f) = Fl - f(l - x), \tag{3.65}$$

$$\text{pour la poutre } BC, \quad M(x, F, f) = F(l - x). \tag{3.66}$$

D'après (3.64), on a donc, puisque E et I sont constants,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \int_{\text{structure}} \frac{1}{EI} M\left(x, F, f = 0\right) \left[\frac{\partial M}{\partial f}\left(x, F, f\right)\right]_{f=0} dx, \\
&= \frac{1}{EI}\left(\int_0^l \left(Fl\right) \times \left[-(l - x)\right]_{f=0} dx + \int_0^l F(l - x) \times 0 \, dx\right), \\
&= \frac{1}{EI}\left(\int_0^l Fl(x - l)\, dx + 0\right), \\
&= -\frac{Fl^3}{2EI}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{x_C = -\frac{Fl^3}{2EI}.}$$

Cette quantité est positive, puisque $F < 0$.

EXEMPLE 3.53. On pourra consulter l'annexe F où est présentée l'étude de calcul de flèche sous forme d'un exercice corrigé (donnée en sujet d'examen[9] pour l'UV MQ41 au Printemps 2003). Cette annexe a aussi été rédigée dans le but de donner un exemple d'application de la théorie des distributions (vue en MT41).

[9] considéré comme difficile !

3.4.5. Levée d'hyperstaticité : le Théorème de Ménabréa

Donnons maintenant une conséquence très importante du théorème de Castigliano : le théorème de Ménabréa qui permet de lever l'hyperstaticité de toute structure hyperstatique :

THÉORÈME 3.54 (Théorème de Ménabréa). *Soit une structure élastique linéaire, reposant sur des appuis (de telle sorte qu'elle soit hyperstatique) et contrainte à partir de l'état au repos. On suppose que cette structure possède $h \in \mathbb{N}^*$ inconnues hyperstatiques indépendantes (externes ou internes, cf. définition 3.27 page 58), notées $(\Phi_i)_{1\leq i\leq h}$. Si W désigne l'énergie potentielle totale, alors*

$$\boxed{\forall i \in \{1, ..., h\}, \quad \frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = 0.} \tag{3.67}$$

REMARQUE 3.55. Les grandeurs ϕ_i sont des forces généralisées et peuvent être des résultantes ou des moments.

Ce théorème s'applique à une structure hyperstatique. Si cette structure possède $m \geq h$ inconnues de liaison (internes ou externes). L'équilibre fournira $m-h$ équations et les relations (3.67) fourniront h équations. Ainsi, on dispose de m équations qui permettront de trouver toutes les inconnues de liaison $(\Phi_i)_{1\leq i\leq m}$. Les équations linéaires relatives aux h inconnues hyperstatiques se mettent sous la forme

$$A\Phi = b,$$

où A est une matrice de taille h, b un vecteur connu de $\mathbb{R}^h$et Φ un vecteur de $\mathbb{R}^h$, dont les composantes sont les h inconnues hyperstatiques. On peut montrer que cette matrice est inversible si les grandeurs Φ_1, Φ_2, ... Φ_h sont indépendantes ; on obtient donc l'expression unique des inconnues hyperstatiques. En utilisant les $m-h$ relations provenant de l'équilibre, on peut alors calculer les autres inconnues.

Notons que, la matrice A est symétrique définie positive.

REMARQUE 3.56. On verra que si la structure possède m inconnues de liaison $(\Phi_i)_{1\leq i\leq m}$ (interne ou externe) et est hyperstatique d'ordre h, on peut choisir tout à fait arbitrairement, parmi ces m inconnues, les h d'entre elles qui auront le statut d'être hyperstatique. Les $m-h$ autres peuvent être déterminées soit directement par l'équilibre soit une fois que les h premières auront été déterminées. On étudiera bien l'exemple 3.60 et la démonstration des théorèmes 3.54 et 3.59.

REMARQUE 3.57. En pratique, pour calculer $\partial W/\partial \Phi_i$, on ferra comme précédemment : on dérivera sous le signe somme.

REMARQUE 3.58. Une fois que l'on a levé l'hyperstaticité, toutes les réactions d'appuis sont déterminées et la structure est «devenue isostatique». On peut donc déterminer totalement les efforts de la RDM, calculer complètement W et calculer les déplacements en tout point de cette structure grâce aux théorèmes de Castigliano ou de la charge fictive.

Le théorème 3.54 ne s'applique qu'à des structures contraintes à partir de l'état au repos. Si ce n'est pas le cas, cela signifie que l'on impose à la structure des déplacements généralisés non nuls : chaque inconnue hyperstatique externe est donc associée à un déplacement μ_i, non nécessairement nul. Le théorème de Ménabréa s'écrit alors :

THÉORÈME 3.59 (Théorème de Ménabréa (état initial de la structure quelconque)). *Soit une structure élastique linéaire, reposant sur des appuis (de telle sorte qu'elle soit hyperstatique). On*

suppose que cette structure possède $h \in \mathbb{N}^*$ inconnues hyperstatiques indépendantes (externe, soumise à un déplacement μ_i, ou interne), notées $(\Phi_i)_{1\leq i\leq h}$. Si W désigne l'énergie potentielle totale, alors

$$\boxed{\forall i \in \{1,...,h\}, \quad \frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = \begin{cases} 0 & \text{si l'inconnue } \Phi_i \text{ est interne,} \\ \mu_i & \text{si l'inconnue } \Phi_i \text{ est externe.} \end{cases}} \tag{3.68}$$

Démonstration des théorèmes 3.54 et 3.59. Il suffit d'appliquer le théorème de castigliano à la structure isostatique associée, que l'on définit dans cette preuve.

On appelle h, l'ordre d'hyperstaticité de la structure et $(\Phi_i)_{1\leq i\leq m}$ les inconnues de liaison (interne ou externe). On peut supposer, sans perte de généralité, que les $m-h$ inconnues $(\Phi_i)_{h+1\leq i\leq m}$ peuvent être déterminées par l'équilibre. Ainsi, les inconnues hyperstatiques sont les grandeurs $(\Phi_i)_{1\leq i\leq h}$.

Définissons maintenant la structure suivante : chaque liaison associée à l'inconnue hyperstatique Φ_i, pour $i \in \{1,...,h\}$, est «liberée» de la façon suivante :

- Cas I : si Φ_i est hyperstatique externe, la liaison est donc un appui sur l'extérieur ; on débloque le degré de liberté de cet appui et on considère que Φ_i n'est plus une réaction d'appui mais une force imposée par l'extérieur (cf. figure 3.16). On considère λ_i le déplacement généralisé associé à Φ_i, qui est maintenant une inconnue (et non plus un déplacement imposé, puisqu'on a libéré l'appui).

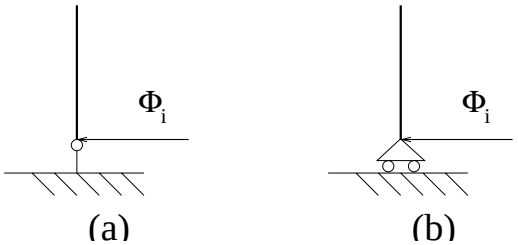


Fig. 3.16. Libération de l'appui associé à un inconnue hyperstatique externe : appui initial (a) et appui libéré (b).

- Cas II : si Φ_i est hyperstatique interne, on introduit une coupure interne et on laisse les deux lèvres de la coupure libres. On suppose que Φ_i n'est plus une force interne, mais une force imposée par l'extérieur. Sur une des deux lèvres, on impose la force ϕ_i (associée au déplacement généralisé devenu inconnu, λ_i) et sur l'autre lèvres, la force ϕ_i' (associée au déplacement généralisé devenu inconnu, λ_i') (cf. figure 3.17).

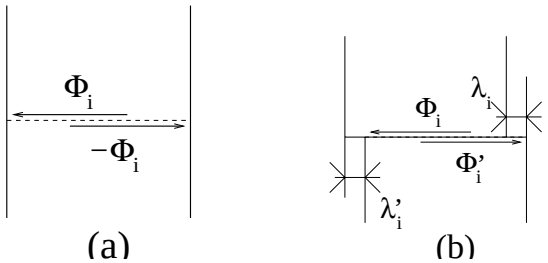


Fig. 3.17. Création d'une coupure associée à un inconnue hyperstatique interne : structure initiale (a) et structure avec la coupure introduite (b).

Pour que les deux structures soit équivalentes, il est nécessaire que chaque force imposée soit telle que :

- Cas I : la force Φ_i soit exactement telle que le déplacement λ_i soit celui imposé, μ_i :

$$\lambda_i = \mu_i. \tag{3.69}$$

- Cas II : les forces Φ_i et Φ'_i soient telle que les deux lèvres de la coupure se referment :

$$\lambda_i + \lambda'_i = 0. \tag{3.70}$$

La nouvelle structure associée a donc la même énergie de déformation que la structure hyperstatique initiale W et est donc hypostatique, puisque que chaque force inconnue ϕ_i est considérée comme une force extérieure. On peut donc appliquer le théorème de Castigliano à cette nouvelle structure, qui nous donne

- Cas I :

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = \lambda_i. \tag{3.71}$$

- Cas II :

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = \lambda_i \text{ et } \frac{\partial W}{\partial \Phi'_i} = \lambda'_i. \tag{3.72}$$

D'après (3.69) et (3.71), on a donc, dans le cas I,

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = \mu_i. \tag{3.73}$$

Dans le cas II, l'équilibre de deux lèvres qui se referment nous donne

$$\Phi_i + \Phi'_i = 0,$$

et d'après (3.70) et (3.72),

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = \lambda_i + \lambda'_i = 0. \tag{3.74}$$

Dans les deux cas, (3.73) et (3.74) impliquent bien (3.67) et (3.68). □

Donnons un exemple d'utilisation du théorème de Ménabréa :

Exemple 3.60.

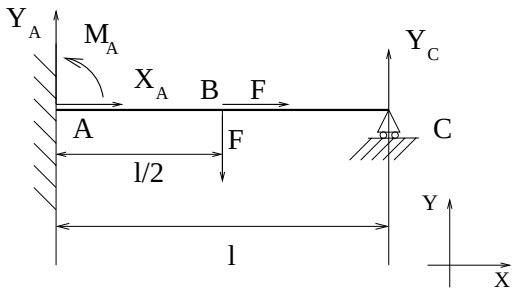


Fig. 3.18. Levée d'hyperstaticité par l'utilisation du théorème de Ménabréa.

On considère la poutre homogène encastrée en A, reposant sur un appui simple en C et soumise en son milieu, B, à une force horizontale F et à une force verticale de même intensité F, où par convention $F > 0$. (cf. figure 3.18).

On cherche à calculer les réactions d'appuis, qui sont (par rapport aux axes indiqués sur la figure) les réactions en A : X_A, Y_A et M_A et l'unique réaction en C : Y_C.

On a quatre inconnues et trois réactions d'équilibre (problème plan). On a donc une structure hyperstatique, d'ordre un et de façon externe.

On quatre liaisons d'appui, X_A, Y_A, M_A et Y_C. Trois d'entre elles peuvent être déterminées par l'équilibre et la quatrième par le théorème de Ménabréa.

La méthode standard consiste à choisir arbitrairement l'une d'entre elles, de calculer les trois autres en fonctions de celle-ci, (par l'équilibre) d'exprimer l'énergie de déformation de la structure en fonction de notre unique inconnue hyperstatique ; le théorème de Ménabréa nous fournit alors $h = 1$ équation(s) supplémentaire(s), en dérivant l'énergie, qui nous permet alors de calculer l'inconnue hyperstatique.

Le choix de l'inconnue hyperstatique parmi X_A, Y_A, M_A et Y_C n'est pas tout à fait arbitraire. Ici, puisqu'on a orienté la poutre de A vers C, on constate que, pour calculer les efforts de la RDM, seule la connaissance de Y_C est nécessaire (puisqu'ils sont égaux à l'action de la droite sur la gauche). On choisit donc comme inconnue hyperstatique Y_C.

On aurait pu en prendre une autre, mais cet autre choix nous oblige, avant de calculer W, à écrire l'équilibre de la structure et à calculer Y_C en fonction de cette autre inconnue.

Le calcul de W (qui dépend donc de la réaction d'appui Y_C et de la force extérieure) est immédiat. On ne considère que les effets du moment fléchissant, égal à :

$$\text{pour la partie } AB, \quad M = F\left(x - \frac{l}{2}\right) + Y_c(l - x), \tag{3.75}$$

$$\text{pour la partie } BC, \quad M = Y_c(l - x). \tag{3.76}$$

On a donc, d'après (3.60), on ne prenant en compte que les effets du moment fléchissant M,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial Y_C} &= \int_{\text{structure}} \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial Y_C}\, ds, \\
&= \frac{1}{EI}\left(\int_0^{\frac{l}{2}} \left(F\left(x - \frac{l}{2}\right) + Y_C(l - x)\right)(l - x)\, dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \left(Y_c(l - x)\right)(l - x)\, dx,\right), \\
&= \frac{l^3}{EI}\left(\frac{Y_C}{3} - \frac{5F}{48}\right).
\end{aligned}$$

Le point C a un déplacement vertical nul ; ce déplacement est associé à la force généralisée Y_C. Ainsi, d'après le théorème de Ménabréa,

$$\frac{\partial W}{\partial Y_C} = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{l^3}{EI}\left(\frac{Y_C}{3} - \frac{5F}{48}\right) = 0, \tag{3.77}$$

et donc

$$\boxed{Y_C = \frac{5}{16}F.}$$

On a donc levée l'hyperstaticité du problème. L'équilibre de la structure nous donne les trois équations suivantes : projection sur l'axe X

$$X_A + F = 0, \tag{3.78}$$

projection sur l'axe Y

$$Y_A + Y_C - F = 0 \tag{3.79}$$

nullité du moment par rapport au point A

$$lY_C + M_A - \frac{lF}{2} = 0. \tag{3.80}$$

De ce système, on tire donc la valeurs des trois inconnues X_A, Y_A et M_A :

$$\begin{cases} X_A = -F, \\ Y_A = \dfrac{11F}{16}, \\ M_A = \dfrac{3Fl}{16}. \end{cases} \tag{3.81}$$

Notons que le système a quatre inconnues de liaisons, que l'équilibre nous fournit trois équations (les équations (3.78), (3.79) et (3.80)) et le théorème de Ménabréa l'équation supplémentaire (3.77).

On peut, à partir de (3.75) et (3.76), déterminer totalement la distribution des effort de la RDM :

$$\text{pour la partie } AB, \quad M = \frac{1}{16}F\left(11x - 3l\right), \tag{3.82}$$

$$\text{pour la partie } BC, \quad M = \frac{5}{16}F(l - x). \tag{3.83}$$

La structure est «devenue isostatique» et à partir du théorème de castigliano ou de la charge fictive, on peut déterminer totalement les déplacements en tout point. Les forces généralisées auxquelles est soumise la structure sont les deux forces horizontales de même intensité F.

Attention, conformément à la remarque 3.42, il faut que les forces soient indépendantes et **il est indispensable de renommer chacune des composantes horizontale et verticale de la force extérieure F, de façon différente F_1 et F_2**, de calculer $\partial W/\partial F_1$ et $\partial W/\partial F_2$, pour obtenir respectivement les déplacements horizontaux et verticaux de B, puis de faire $F_1 = F_2 = F$. À vous de faire les calculs !

Il faudra bien prendre garde au fait que puisque l'on a choisi $F > 0$, la ligne d'action de F est dirigée vers le bas et que le déplacement généralisé du point B par rapport à cette force sera lui aussi calculé par rapport à cette direction. Ainsi le déplacement vertical de B sera l'opposé du déplacement généralisé obtenu. Le déplacement horizontal de B sera lui égal au déplacement généralisé par rapport à la composante F_1.

3.5. Quelques remarques sur les théorèmes énergétiques

3.5.1. Structures comportant des ressorts

On a vu que les liaisons étaient des appuis simples, des rotules, des encastrements, ... mais elles peuvent être aussi constituées de ressorts élastiques linéaires, de raideur k (cf. exercice du TD correspondant). Dans ce cas, il faut rajouter à l'énergie potentielle W de la structure l'énergie de déformation emmagasinée par les ressorts (cf. aussi remarque 3.39, page 65).

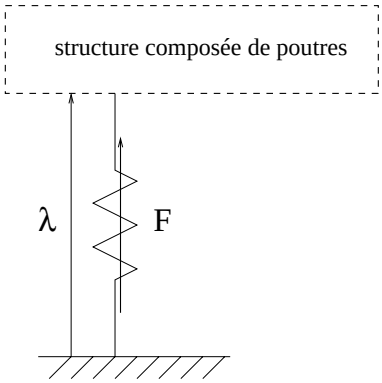


FIG. 3.19. Une liaison de type ressort

On appelle F la réaction d'appui exercée par le ressort et λ le déplacement généralisé associé (cf. figure 3.19). On sait que la loi de comportement du ressort élastique linéaire de raideur k s'écrit

$$F = k\lambda$$

L'énergie de déformation du ressort est égale à

$$\boxed{W_{\text{ressort}} = \frac{1}{2}k\lambda^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}.}$$

On admet que les théorèmes énergétiques demeurent valables si les structures sont aussi soumises à des chargements répartis (densité linéique de force) : voir en TD.

3.5.2. Structures symétriques

Il existe un certain nombre de situations, où compte tenu de la symétrie du problème (configuration géométrique et chargement), on décomposera la structure en parties symétriques, plus petites, quitte à introduire, en son sein, des nouvelles conditions aux limites. On étudiera quelques exemples de simplification par symétrisation en TD (voir aussi section 1.2.5 page 14).

3.5.3. Influence de la température

Par curiosité, on donne aussi la généralisation de Flamard qui permettrait d'étudier des structures soumise, en outre, à des variations de température. Celles ci ont pour effet de dilater les poutre et, à l'énergie potentielle de déformation, il faut rajouter le terme

$$\boxed{W_{\text{temp}} = \int_{\text{structure}} \alpha N \Delta T \, ds,}$$

où

- α est le coefficient de dilatation linéaire ;
- ΔT est la variation de température
- N est l'effort normal.

3.5.4. Détermination de déplacements pour des structures hyperstatiques

Précisons comment déterminer des déplacements dans des structures hyperstatique. Il est dit qu'une fois levée l'hypersaticité d'une structure, on utilise le théorème de Castigliano ou de la force

fictive. Dans l'expression de l'énergie de déformation, chacune des forces est déterminée (force extérieures, réactions d'appuis déterminées par l'équilibre de la structure, réactions d'appuis déterminées par levée d'hyperstaticité) et on peut donc dériver cette énergie par rapport à chacune des forces extérieures appliquées, pour calculer le déplacements généralisés associés aux forces appliquées. Précisons ce calcul.

D'après le théorème de la charge fictive, on peut toujours supposer que tous les déplacements recherchés sont associés à des chargements réels (non fictifs).

Soit une structure élastique linéaire, reposant sur des appuis, hyperstatique d'ordre $h \geq 1$ et soumise à un système de forces généralisées indépendantes $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ (qui sont toutes des forces extérieures, appliquées à la structure) dont les déplacements généralisés associés sont $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$. Pour simplifier la présentation, on peut supposer que les déplacements imposés à cette structure sont nuls.

On pourra supposer de plus, que la structure peut être soumise à des forces réparties.

On pose

$$F = {}^t(F_1, ..., F_p),$$
$$\Lambda = {}^t(\Lambda_1, ..., \Lambda_p),$$

et

$$\Phi = {}^t(\Phi_1, ..., \Phi_h),$$

où $(\Phi_i)_{1\leq i\leq h}$ désigne les inconnues hyperstatiques (internes ou externes). On suppose que l'on a exprimé les réactions d'appuis non hyperstatiques en fonction de R et des chargements imposés.

On peut déterminer Λ, de l'une des deux façons suivantes :

– On exprime le potentiel $W(\Phi, F)$ sous la forme $W(\Phi(F), F)$ (ne dépendant que F). **Puis**, on dérive le potentiel par rapport aux F_i pour obtenir les déplacements généralisés :

$$\boxed{\forall i \in \{1, ..., p\}, \quad \lambda_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}(\Phi(F), F).} \tag{3.84}$$

– On dérive **d'abord** le potentiel $W(\Phi, F)$ exprimé en fonction des chargements F et des inconnues Φ (non exprimées en fonction de F), par rapport à F_i, Φ étant fixé. Puis, en exprime, dans le résultat obtenu, Φ en fonction de F :

$$\boxed{\forall i \in \{1, ..., p\}, \quad \lambda_i = \left.\frac{\partial W}{\partial F_i}(\Phi, F)\right|_{\Phi=\Phi(F)}.} \tag{3.85}$$

Rappelons tout d'abord d'où provient (3.85). Dans la démonstration du théorème de Ménabréa, nous avons introduit une structure isostatique équivalente. Si maintenant, nous cherchons à déterminer les déplacements Λ, nous pouvons utiliser le théorème de Castigliano, appliqué à cette structure isostatique associée, pour laquelle les forces F et les inconnues hyperstatiques Φ sont considérées comme des chargements extérieurs et donc indépendants. Puisque ces forces sont indépendantes, on peut calculer le déplacements des associés aux forces Φ et les déplacements associés aux forces F. Ces déplacements λ_i sont donc déterminés par

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \quad \lambda_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}(\Phi, F),$$

où Φ est quelconque. Par définition de la structure isostatique équivalente, on applique les forces $\Phi(F)$ et les λ_i sont donc déterminés par (3.85).

Il est évident qu'il y a équivalence entre (3.84) et (3.85). La preuve est rédigée en annexe G.

Donnons un exemple très simple et montrons sur cet exemple que (3.84) et (3.85) donnent les mêmes résultats, mais que (3.85) est un peu plus rapide.

EXEMPLE 3.61. On étudie la poutre de la figure 3.20, encastrée en A, reposant sur un appui simple C, soumise à une force extérieure F en C (on choisit $F > 0$). On choisit (x, y), comme indiqué sur la figure, qui sert à la fois de repère local et global.

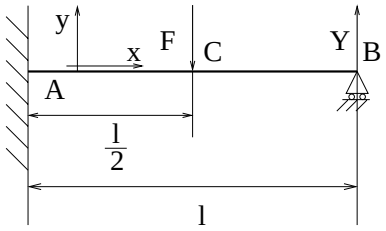


FIG. 3.20. Une poutre hyperstatique

Il est clair que cette structure est hyperstatique de degré 1. On choisit Y, l'unique réaction d'appui en B, comme inconnue hyperstatique. Le moment fléchissant M est défini par

$$\text{Dans } AC,\ M(x) = F\left(x - \frac{l}{2}\right) + Y(l - x),$$
$$\text{Dans } CB,\ M(x) = Y\,(l - x)\,.$$

On a, en ne prenant en compte que les effets du moment fléchissant

$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{structure}} \frac{M^2(x)}{EI} dx.$$

Après calculs, en supposant E et I constants, il vient

$$W = \frac{l^3}{48EI}\left(8Y^2 - 5FY + F^2\right). \tag{3.86}$$

On détermine la réaction Y en écrivant que $\partial W/\partial Y$ est nul, c'est-à-dire

$$16Y - 5F = 0,$$

et donc

$$Y = \frac{5}{16}F. \tag{3.87}$$

Pour déterminer le déplacement vertical du point C, égal à (puisque $F > 0$)

$$y_C = -\frac{\partial W}{\partial F},$$

en utilisant (3.84), on écrit

$$y_C = -\frac{\partial W}{\partial F}\left(Y(F), F\right).$$

On remplace donc Y par sa valeur dans W :

$$W = \frac{l^3}{48EI}\left(8 \times \frac{25F^2}{256} - 5F \times \frac{5}{16}F + F^2\right) = \frac{7F^2l^3}{1488EI}.$$

Ainsi, on a

$$y_C = -\frac{\partial W}{\partial F}\left(Y(F), F\right) = -\frac{\partial}{\partial F}\frac{7F^2l^3}{1536EI},$$

et donc

$$\boxed{y_C = -\frac{7Fl^3}{768EI}.} \tag{3.88}$$

Si, au contraire, on utilise (3.85), on écrit, à Y fixé, selon (3.86),

$$\frac{\partial W}{\partial F}(Y, F) = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{l^3}{48EI}\left(8Y^2 - 5FY + F^2\right)\right) = \frac{l^3}{48EI}\left(-5Y + 2F\right).$$

En remplaçant Y par sa valeur, on obtient donc

$$\frac{\partial W}{\partial F}(Y(F), F) = \frac{l^3}{48EI}\left(-5 \times \frac{5}{16}F + 2F\right) = \frac{7Fl^3}{768EI},$$

et on retrouve donc l'expression (3.88).

On aura pu aussi calculer plus simplement, en intégrant sous le signe somme,

$$\frac{\partial W}{\partial F}(Y, F) = \frac{l^3}{48EI}\left(-5F + 16Y\right).$$

Dans ce cas, on peut calculer la valeur de Y. Si on utilise (3.84), on retrouve (3.88). Si, au contraire, on utilise (3.85), on calcule, à Y fixé

$$\frac{\partial W}{\partial F}(Y, F) = \frac{l^3}{48EI}\left(2F - 5Y\right).$$

En y remplaçant l'expression de Y, on aboutit à (3.88).

Retenons que la méthode (3.85) est, en général, plus rapide que (3.84).

3.6. Méthodes d'études des structures (méthodes des forces)

On donne très schématiquement une méthode générale de résolution de problème de poutres.

- Étude géométrique : détermination de :
  - repère global (dans lequel on écrira les relations d'équilibre) ;
  - ligne moyenne des poutres ;
  - sections droites, sections réduites, inerties polaires, inerties et axes principaux des poutres (pour chaque poutre droite, il faudra définir un repère local (x, y, z)).
- Étude de l'équilibre : on déterminera les réactions d'appuis que l'on pourra et l'on déterminera quelles sont les inconnues hyperstatiques.
- Calcul des inconnues hyperstatiques (le cas échéant) grâce au théorème de Ménabréa (cf. théorèmes 3.54 et 3.59) ;
- Calcul du torseur des efforts de la RDM ;
- Calcul des déplacements (en utilisant les formules de Bresse (section 1.7, page 30 dans le chapitre 1), pour les structure simples ou le théorème de Castigliano 3.41 ou de la charge fictive 3.47 dès que les structures se compliquent (cf remarque 3.58) ;
- Éventuellement, calcul des contraintes (cf. sections 1.4 et 1.5 pages 23 et 30 dans le chapitre 1).

REMARQUE 3.62. La méthode proposée est une méthode dite de forces, puisque les inconnues considérées sont des forces. Il existe d'autres méthodes, appelées méthodes des déplacements, où les inconnues considérés sont les déplacements, mais que l'on évoquera pas ici.

Le calcul des contraintes et des déplacements sera fondamental pour l'ingénieur qui devra vérifier, pour que la structure soit correctement dimensionnée, que les contraintes maximales sont inférieures à des contraintes seuil (qui dépendent du matériau utilisé) et les flèches maximales sont inférieures à des flèches réglementaires.

CHAPITRE 4

Étude de poutres circulaires

Les résultats présentés ne doivent être en aucun cas appris par cœur : cela serait inutile et trop difficile ! En revanche, il faut comprendre comment ils ont été établis et être capable de les retrouver dans des cas simples.

On pourra aussi consulter l'annexe H où figure une étude de structure circulaire (donnée en examen).

4.1. Notations

Dans tout ce chapitre, nous étudierons une poutre plane (excepté en section 4.4, où nous fournirons quelques indications sommaires pour des problèmes spatiaux) à ligne moyenne circulaire, de centre O, de rayon R et d'arc λ (voir figure 4.1).

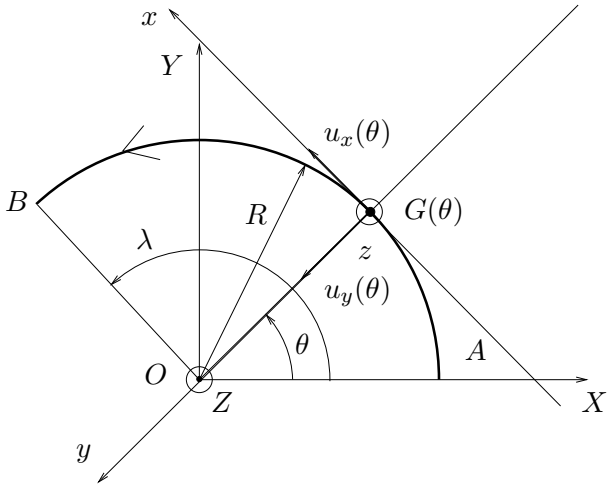


FIG. 4.1. La structure circulaire étudiée

Conformément aux conventions adoptées au cours du chapitre 1 (voir sections 1.2.1, 1.3.1 et 1.3.3), nous notons (X, Y, Z) le repère global et, en tout point courant $G(\theta)$ de la fibre moyenne, défini par l'angle $\theta \in [0, \lambda]$, le repère local est (x, y, z) ; à ce repère sont associés les vecteurs $\big(u_x(\theta), u_y(\theta), u_z\big)$

On oriente la poutre comme sur la figure 4.1. Comme dans la section 1.3.3 page 21, pour tout θ, les efforts de la RDM en $G(\theta)$, représentent les actions de la partie amont sur la partie aval de la poutre. On note $N(\theta)$, $T(\theta)$ et $M(\theta)$, les composantes de cette action dans le repère local $(u_x(\theta), u_y(\theta), z)$; voir figure 4.2.

On suppose que cette poutre circulaire est soumise, outre des forces ponctuelles, à une densité de force $\overrightarrow{df}/d\theta$ et à une densité de couple $\overrightarrow{dC}/d\theta$, définis par (1.40) page 21.

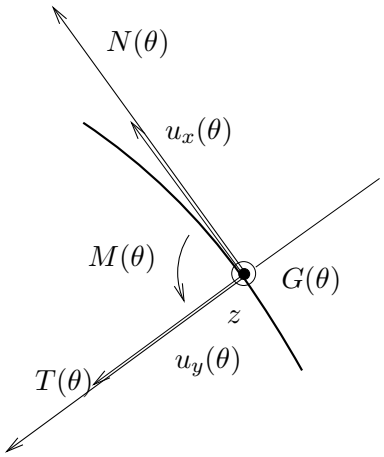


FIG. 4.2. les efforts de la RDM : $N(\theta)$, $T(\theta)$ et $M(\theta)$

4.2. Étude de l'équilibre local

Nous rappelons la proposition 1.18 déjà vue dans le chapitre 1.

Dans ce chapitre[1], excepté la section 4.3.3, nous supposerons que toutes les densités linéaires de forces et de moments p, q et m, sont nulles. La proposition 1.18 se simplifie alors :

PROPOSITION 4.1. *Nous avons les trois d'équations d'équilibre local suivantes :*

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + N(\theta) = 0, \tag{4.1a}$$

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} - T(\theta) = 0. \tag{4.1b}$$

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} + RT(\theta) = 0. \tag{4.1c}$$

4.3. Applications : étude de différentes structures

4.3.1. Étude d'une poutre encastrée

On étudie dans cette section la poutre circulaire de la figure 4.1, encastrée en A et soumise au point B à une force $\overrightarrow{F}$, de composantes X et Y (dans le repère (X, Y)) et à un couple $\overrightarrow{C} = C\vec{Z}$ (voir figure 4.3).

On peut calculer le moment de flexion de la poutre en tout point $G(\theta)$ de deux façons différentes que l'on donne ici.

- Première façon : on écrit

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{G(\theta)B} \wedge \overrightarrow{F}. \tag{4.2}$$

On décompose

$$\overrightarrow{G(\theta)B} = \overrightarrow{G(\theta)O} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OG(\theta)} + \overrightarrow{OB} = -R\left(\cos\theta\vec{X} + \sin\theta\vec{Y}\right) + R\left(\cos\lambda\vec{X} + \sin\lambda\vec{Y}\right).$$

[1]Mais en TD, nous traiterons des cas où p sera non nul.

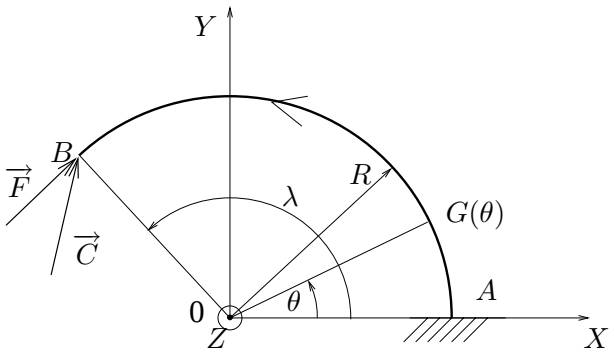


FIG. 4.3. La poutre circulaire étudiée

On a donc

$$\overrightarrow{M} = C\vec{Z} + R\left((-\cos\theta + \cos\lambda)\,\vec{X} + (-\sin\theta + \sin\lambda)\,\vec{Y}\right) \wedge \left(X\vec{X} + Y\vec{Y}\right).$$

En développant, on a donc

$$\overrightarrow{M} = C\vec{Z} + R\,(-\cos\theta + \cos\lambda)\,Y\vec{Z} - R\,(-\sin\theta + \sin\lambda)\,X\vec{Z},$$

et on a donc

$$\boxed{M(\theta) = C + RX(\sin\theta - \sin\lambda) - RY(\cos\theta - \cos\lambda).} \tag{4.3}$$

- Seconde façon : on utilise les équations d'équilibre local : calculons l'effort normal $N(\theta)$ égal à

$$N(\theta) = \overrightarrow{F}.u_x(\theta) = {}^t(X \quad Y).{}^t(-\sin\theta \quad \cos\theta).$$

On en déduit donc

$$N(\theta) = -X\sin\theta + Y\cos\theta. \tag{4.4}$$

On déduit de (4.1b) et de (4.1c)

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} = -RT(\theta) = -R\frac{dN(\theta)}{d\theta},$$

et donc

$$\frac{d}{d\theta}\left(M(\theta) + RN(\theta)\right) = 0.$$

Il existe donc une constante c telle que, pour tout θ,

$$M(\theta) + RN(\theta) = c.$$

Puisque $M(\lambda) = C$, on a donc, selon (4.4), le moment de flexion de la poutre au point $G(\theta)$ est égal à

$$M(\theta) = C + RX(\sin\theta - \sin\lambda) - RY(\cos\theta - \cos\lambda).$$

On retrouve donc bien (4.3). Cette façon de procéder est plus lourde mais parfois, notamment quand les chargements sont plus compliqués[2], elle peut simplifier les calculs.

[2]voir par exemple la section 4.3.3.

On suppose que E et I sont uniformes dans la poutre et que l'on peut négliger les effets dus aux efforts normaux et tranchants[3]. L'énergie de déformation de la poutre vaut donc

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^\lambda M^2 ds,$$

et donc puisque $ds = Rd\theta$

$$W = \frac{R}{2EI}\int_0^\lambda M^2 d\theta. \tag{4.5}$$

La structure est isostatique ; on en déduit donc, grâce au théorème de Castigliano les déplacements x_B, y_B et la rotation ω_B du point B :

$$x_B = \frac{\partial W}{\partial X}, \quad y_B = \frac{\partial W}{\partial Y}, \quad \omega_B = \frac{\partial W}{\partial C}.$$

On pourrait donc, après calculs[4], déterminer les composantes x_B, y_B et ω_B.

Naturellement, pour $\lambda = 0$, on trouve $x_B = y_B = \omega_B = 0$.

Pour $\lambda = \pi/2$, on trouve

$$x_B = \frac{R^2}{4EI}\Big((3R - 8R\pi)X + 2RY + (4 - 2\pi)C\Big), \tag{4.7a}$$

$$y_B = \frac{R^2}{4EI}\Big(2RX + RY\pi - 4\,C\Big), \tag{4.7b}$$

$$\omega_B = \frac{R}{2EI}\Big((2R - R\pi)X - 2RY + C\pi\Big). \tag{4.7c}$$

Pour $\lambda = \pi$, on trouve

$$x_B = \frac{R^2}{2EI}\Big(RX\pi - 4\,RY + 4\,C\Big), \tag{4.8a}$$

$$y_B = \frac{R^2}{2EI}\Big(-4\,RX + 3\,RY\pi - 2\,C\pi\Big), \tag{4.8b}$$

$$\omega_B = \frac{R}{EI}\Big(2\,RX - RY\pi + C\pi\Big). \tag{4.8c}$$

[3] ce qui n'est pas toujours légitime, voir exercices de TD ou l'exemple de l'annexe H.

[4] Pour les courageux, ou les utilisateurs de logiciels de calculs formels, on obtiendrait :

$$x_B = \frac{R^2}{2EI}\Big(\big(3\,R\lambda - 2\,R\lambda\,\cos^2\lambda + 3\,R\cos\lambda\sin\lambda - 4\,R\sin\lambda\big)X + \big(R - 3\,R\cos^2\lambda - 2\,R\lambda\cos\lambda\sin\lambda + 2\,R\cos\lambda\big)Y + \big(-2\,\cos\lambda - 2\,\lambda\sin\lambda + 2\big)C,\Big), \tag{4.6a}$$

$$y_B = \frac{R^2}{2EI}\Bigg(\big(R - 3\,R\cos^2\lambda - 2\,R\lambda\cos\lambda\sin\lambda + 2\,R\cos\lambda\big)X + \big(R\lambda + 2\,R\lambda\cos^2\lambda - 3\,R\cos\lambda\sin\lambda\big)Y + \big(-2\,\sin\lambda + 2\,\lambda\cos\lambda\big)C\Bigg), \tag{4.6b}$$

$$\omega_B = \frac{R}{EI}\Big(\big(-R\cos\lambda - R\lambda\sin\lambda + R\big)X + \big(-R\sin\lambda + R\lambda\cos\lambda\big)Y + \lambda C\Big). \tag{4.6c}$$

Pour $\lambda = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, on trouve

$$x_B = \frac{R^3 k\pi X}{EI}, \tag{4.9a}$$

$$y_B = \frac{R^2 k\pi}{EI}\left(3\,RY + 2\,C\right), \tag{4.9b}$$

$$\omega_B = \frac{2Rk\pi}{EI}\left(RY + C\right). \tag{4.9c}$$

Cherchons maintenant à déterminer les déplacements $x(\theta)$, $y(\theta)$ et la rotation $\omega(\theta)$ du point $G(\theta)$. Il suffit de remarquer que la partie $BG(\theta)$ de la poutre est en équilibre. Ainsi, le point $G(\theta)$ est soumis à la force $\overrightarrow{F}$ et au couple $M(\theta)$ où $M(\theta)$ est défini par (4.3). On est donc ramené à l'étude d'une poutre d'arc θ : il suffit d'utiliser les formules (4.6) en remplaçant λ par θ et C par $M(\theta)$, défini par (4.3). On peut donc déterminer[5] $x(\theta)$, $y(\theta)$ et $\omega(\theta)$.

Naturellement, on peut vérifier que si on remplace θ par λ dans les expressions (4.10), on retrouve les expressions de x_B, y_B et ω_B données par (4.6).

4.3.2. Autres exemples

Étudions maintenant plusieurs exemples où l'on utilise les résultats des sections 4.2 et 4.3.1.

Exemple 4.2 (Anneau dynamométrique). Soit la structure circulaire auto-équilibrée, soumise à deux forces d'intensité F, appliquées en A et A' et représentée sur la figure 4.4. On cherche à déterminer la variation des diamètres $[AA']$ et $[BB']$.

On peut, en fait, se ramener au cas de la structure étudiée dans la section 4.3.1.

Orientons la structure étudiée de façon arbitraire (avec une origine arbitraire). Puisque la structure possède une symétrie (en géométrie, chargement et conditions aux limites, inexistantes ici), par rapport à l'axe (BB'), on peut montrer, exactement comme dans la section 1.2.5 du chapitre 1, que l'effort tranchant est antisymétrique par rapport à l'axe (BB') et que (1.7) est toujours vrai :

$$T(B) = T(B') = 0.$$

[5] On aurait

$$x(\theta) = \frac{R^2}{2EI}\Bigg(\big(R\theta + R\cos\theta\sin\theta + 2\,R\cos\theta\sin\lambda + 2\,R\theta\sin\theta\sin\lambda - 2\,R\sin\theta - 2\,R\sin\lambda\big)X$$
$$+\big(RY - RY\cos^2\theta - 2\,RY\cos\theta\cos\lambda - 2\,RY\theta\sin\theta\cos\lambda + 2\,RY\cos\lambda\big)Y + \big(-2\,\cos\theta - 2\,\theta\sin\theta + 2\big)C\Bigg), \tag{4.10a}$$

$$y(\theta) = \frac{R^2}{2EI}\Bigg(\big(-R - R\cos^2\theta + 2\,R\sin\theta\sin\lambda - 2\,R\theta\cos\theta\sin\lambda + 2\,R\cos\theta\big)X$$
$$+\big(R\theta - R\cos\theta\sin\theta - 2\,R\sin\theta\cos\lambda + 2\,R\theta\cos\theta\cos\lambda\big)Y + \big(-2\,\sin\theta + 2\,\theta\cos\theta\big)C\Bigg), \tag{4.10b}$$

$$\omega(\theta) = \frac{R}{EI}\Bigg(\big(-R\theta\sin\lambda - R\cos\theta + R\big)X + \big(R\theta\cos\lambda - R\sin\theta\big)Y + C\theta\Bigg). \tag{4.10c}$$

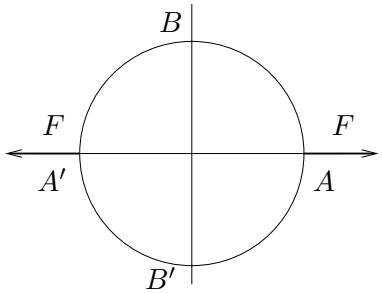


FIG. 4.4. un anneau dynamométrique

L'effort normal et le moment fléchissant en revanche n'ont aucune raison d'être nuls en B et B'. Par symétrie[6] l'effort normal est égal en B à $\pm F/2$ (selon l'orientation choisie). D'autre part, par symétrie, on peut remarquer que le déplacement de A est porté par (AA') et celui de B par (BB') ; de plus, la tangente en A reste parallèle à (BB') et la tangente en B reste parallèle à (AA').

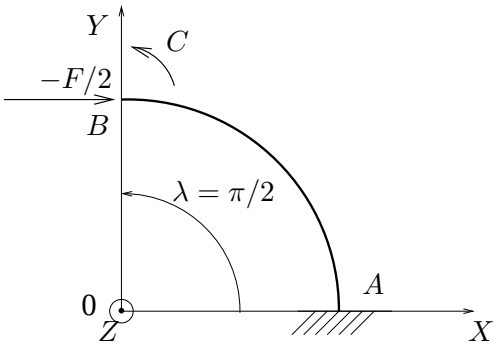


FIG. 4.5. La poutre circulaire étudiée équivalente

Compte tenu de tous ces éléments, on peut remplacer la structure de la figure 4.4 par celle de la figure 4.5, où le point A est encastré, le point B est soumis à la force de composantes $X = 0$ (effort tranchant nul) et $Y = -F/2$ (symétrie) dans le repère (X, Y), et à un couple $\overrightarrow{C} = CZ$, où C n'est pas connu[7] ; les variations $\delta_{AA'}$ et $\delta_{BB'}$ des diamètres $[AA']$ et $[BB']$ (pour la figure 4.4) valent alors

$$\delta_{AA'} = -2x_B, \tag{4.11}$$

$$\delta_{BB'} = 2y_B, \tag{4.12}$$

[6]Plus précisément, cela découle de l'équilibre de la partie BB' (demi-cercle de droite par exemple) puisque l'effort tranchant est nul en B et B'.

[7]c'est ce couple qui assure que la tangente en B reste selon (AA').

où x_B et y_B désignent les déplacements du point B pour la figure 4.5. On est donc dans le cadre déjà étudié en section 4.3.1 avec

$$\lambda = \frac{\pi}{2}, \tag{4.13}$$

$$X = -\frac{F}{2}, \tag{4.14}$$

$$Y = 0, \tag{4.15}$$

$$\omega_B = 0. \tag{4.16}$$

On utilise alors les formules (4.7) : les équations (4.7c) et (4.14), (4.15),(4.16), fournissent la valeur de C :

$$0 = \frac{R}{2EI}\left(C\pi + \frac{FR\pi}{2} - RF\right),$$

ce qui donne

$$C = \frac{2-\pi}{2\pi}FR. \tag{4.17}$$

En réinjectant la valeur de C donnée par (4.17) dans (4.7a) et (4.7b), on obtient donc

$$x_B = \frac{FR^3}{EI}\,\frac{8-\pi^2}{8\pi}, \tag{4.18}$$

$$y_B = \frac{FR^3}{EI}\,\frac{\pi-4}{4\pi}. \tag{4.19}$$

De (4.11) et (4.12), on déduit donc

$$\delta_{AA'} = \frac{FR^3}{EI}\,\frac{\pi^2-8}{4\pi}, \tag{4.20}$$

$$\delta_{BB'} = \frac{FR^3}{EI}\,\frac{\pi-4}{2\pi}. \tag{4.21}$$

Exemple 4.3. Soit la structure circulaire soumise à une force d'intensité F, appliquée en B, encastrée en A et C et représentée sur la figure 4.6. On cherche à déterminer le déplacement vertical

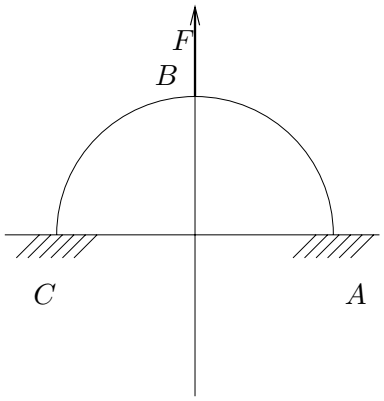


Fig. 4.6. une structure circulaire

de B.

Cette structure est *a priori* hyperstatique. On pourrait lever cette hyperstaticité, mais cela exige beaucoup de calculs. Il est plus simple, comme dans l'exemple 4.2, de se ramener à la structure déjà étudiée en section 4.3.1.

Par symétrie, le déplacement horizontal de B est nul, la tangente à la poutre en B reste horizontale ; l'effort tranchant en B est, contrairement[8] à l'exemple 4.2, non nul.

Orientons la poutre de C vers A et choisissons l'origine des angles en B. Ainsi, par symétrie (comme dans l'exemple 4.2), on peut montrer que (1.8) page 15 est toujours valable :

$$T(B-0) = -\frac{F}{2}, \quad T(B+0) = \frac{F}{2}. \tag{4.22}$$

Remarque 4.4. Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ! La formule (4.22) peut aussi se démontrer[9] de la façon suivante : la symétrie du problème et l'équilibre de la structure nous indiquent que les réactions d'appui verticale en A et C valent $-F/2$; l'équilibre de la partie AB (qui s'arrête «juste avant» B) nous permet donc d'affirmer que $T(B-0) = -F/2$. De même, l'équilibre de la partie BC (qui s'arrête «juste après» B) nous permet donc d'affirmer que $T(B+0) = F/2$.

L'effort normal et le moment fléchissant en B sont inconnus[10]. On peut donc se ramener à l'étude de la section 4.3.1 avec

$$\lambda = \frac{\pi}{2}, \tag{4.23}$$

$$Y = \frac{F}{2}, \tag{4.24}$$

$$x_B = 0, \tag{4.25}$$

$$\omega_B = 0. \tag{4.26}$$

et on cherche à déterminer y_B. Grâce aux équations (4.7a) et (4.7c), la nullité de x_B et ω_B fournit un système linéaire en X et C. Après calculs, on a

$$X = \frac{\pi - 4}{\pi^2 - 8}\, F,$$
$$C = \frac{2\pi - 6}{\pi^2 - 8}\, FR.$$

On en déduit alors le déplacement vertical de B :

$$y_B = \frac{FR^3}{EI}\, \frac{\pi^3 - 20\pi + 32}{8\pi^2 - 64}.$$

Exemple 4.5. On pourra consulter l'annexe H où est présentée l'étude d'une structure circulaire sous forme d'un exercice corrigé (donnée en sujet d'examen pour l'UV MQ41).

Attention, dans cette annexe, il y a un conflit d'orientation avec ce chapitre ! Voir remarque 1.20 page 22 et page 191.

4.3.3. Un dernier problème

Dans cette section, nous étudions un problème similaire à ceux de la section 4.3, mais nous utilisons une méthode légèrement différentes pour le calcul du moment fléchissant.

[8] et ce à cause de l'application d'une force ponctuelle en B ; voir remarque 1.7 page 14.

[9] remarque suggérée par un étudiant.

[10] Ce sont eux qui assurent la nullité de x_B et de ω_B.

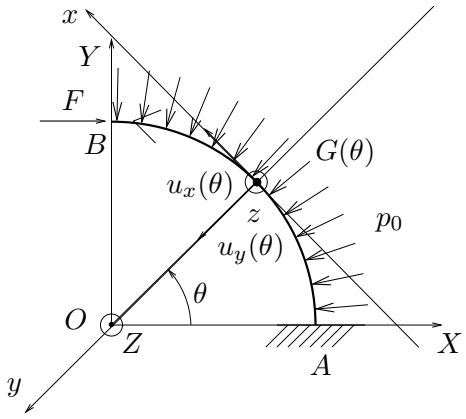


FIG. 4.7. La structure circulaire étudiée

On considère la structure de la figure 4.7, pour laquelle on cherche à calculer le déplacement horizontal x_B de B.

La poutre est orientée comme sur la figure. Elle est portée par un quart de cercle, encastrée en A, soumise en B à une force F et à densité linéaire de force radiale, centripète et constante, égale à p_0. D'après les équations 1.41 page 22, on a donc, pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$,

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + N(\theta) + Rp_0 = 0, \tag{4.27a}$$

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} - T(\theta) = 0, \tag{4.27b}$$

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} + RT(\theta) = 0. \tag{4.27c}$$

Plutot que de calculer N comme dans la section 4.3.1, ce qui nous obligerait à intégrer la densité linéaire p_0, on va établir une équation différentielle qui porte uniquement sur T ; on en déduira directement M.

De (4.27a) et (4.27b), on tire

$$\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{dN(\theta)}{d\theta} = -T(\theta),$$

et donc

$$\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2} + T(\theta) = 0. \tag{4.28}$$

Par intégration, on a donc, pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$,

$$T(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta \tag{4.29}$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions aux limites, que l'on détermine à partir des forces extérieures appliquées en B :

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -F, \tag{4.30}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{4.31}$$

Selon (4.29), on a

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = B. \tag{4.32}$$

Grâce à (4.27a) et (4.29), on a

$$\frac{dT(\pi/2)}{d\theta} = -A = -N\left(\frac{\pi}{2}\right) - Rp_0 \tag{4.33}$$

En comparant (4.30) et (4.32), ainsi que (4.31) et (4.33), on a donc

$$A = -F + Rp_0 \text{ et } B = 0,$$

ce qui implique

$$T(\theta) = (Rp_0 - F)\cos\theta. \tag{4.34}$$

Selon (4.27c), on a donc

$$M(\theta) = R(F - Rp_0)\sin\theta + C, \tag{4.35}$$

où C est une constante. Puisque $M(\pi/2) = 0$, il vient

$$M(\theta) = R(F - Rp_0)(\sin\theta - 1). \tag{4.36}$$

D'après le théorème de Castigliano, on a donc

$$x_B = \frac{\partial W}{\partial F}.$$

On ne prend que les termes dus au moment fléchissant : selon (4.35), on a donc :

$$x_B = \frac{1}{2EI}\int_0^{\pi/2} \frac{\partial M^2}{\partial F} R d\theta = \frac{R}{EI}\int_0^{\pi/2} M\frac{\partial M}{\partial M} d\theta = \frac{R^3(F - Rp_0)}{EI}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta - 1)^2 d\theta.$$

Après calculs, on a

$$\int_0^{\pi/2} (\sin\theta - 1)^2 d\theta = \frac{3\pi}{4} - 2,$$

et donc

$$x_B = \left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)\frac{R^3(F - Rp_0)}{EI}. \tag{4.37}$$

4.4. Problèmes dans l'espace

Nous ne traiterons pas les problèmes spaciaux aussi complétement que dans le plan, ce qui formellement n'est guère plus difficile mais exige plus de calculs. Nous nous contenterons de reprendre sommairement l'étude de la poutre plane étudiée dans la section 4.3.1, en la considérant, dans toute cette section, comme poutre dans l'espace.

Ainsi (voir figure 4.3), on suppose que la poutre circulaire est encastrée en A et soumise au point B à une force $\overrightarrow{F}$ et à un couple, respectivement égaux à (dans le repère (X, Y, Z)) :

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Cherchons à déterminer les trois déplacements de B (x_B, y_B, z_B) ainsi que ses trois rotations ($\omega_{1,B}$, $\omega_{2,B}$, $\omega_{3,B}$), par rapport au repère (X, Y, Z).

Pour simplifier, décomposons en deux termes cette sollicitation extérieure afin d'utiliser les calculs déjà évoqués en section 4.3.1. D'après le principe de superposition évoqué au chapitre 1, les trois

déplacements et ses trois rotations sont égaux à la somme des déplacements et des rotations dus à l'application respective de la force $\overrightarrow{F_1}$ et du couple $\overrightarrow{C_1}$, ainsi que de la force $\overrightarrow{F_2}$ et du couple $\overrightarrow{C_2}$, avec

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

et

$$\overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C_2} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Remarquons que la sollicitation par $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{C_1}\right)$ correspond au problème plan déjà étudié en section 4.3.1 et que les deux déplacements de B (dans le plan (X,T)) et sa rotation (par rapport à l'axe Z) sont déjà connus. Il suffit donc d'étudier la sollicitation par $\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{C_2}\right)$.

On peut donc supposer que

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Comme précédemment, on oriente la poutre comme sur la figure 4.1 ; pour tout θ, les efforts de la RDM en $G(\theta)$, représentent les actions de la partie amont sur la partie aval de la poutre.

Selon les notations du chapitre 1 on note $(N(\theta), T_y(\theta), T_z(\theta))$ et $(M_t(\theta), M_y(\theta), M_z(\theta))$, les composantes de cette action dans le repère local $(u_x(\theta), u_y(\theta), u_z)$.

Pour déterminer $(M_t(\theta), M_y(\theta), M_z(\theta))$, on pourrait démontrer les formules d'équilibre local dans l'espace. Ici, on utilisera directement la formule (4.2) que l'on rappelle ici

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{G(\theta)B} \wedge \overrightarrow{F}.$$

Compte tenu de (4.41), on obtient, après calculs, l'expression de $\overrightarrow{M}$ dans le repère global (X,Y,Z) :

$$\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} A + ZR\,(\sin\lambda - \sin\theta) \\ B - ZR\,(\cos\lambda - \cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Après changement de base, on a donc l'expression de $\overrightarrow{M}$ dans le repère $(u_x(\theta), u_y(\theta), z)$:

$$\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} A\cos\theta + B\sin\theta - ZR\sin(\theta-\lambda) \\ -B\cos\theta + A\sin\theta - ZR(1-\cos(\theta-\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

autrement dit, on a

$$M_t(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta - ZR\sin(\theta-\lambda),, \tag{4.43}$$

$$M_y(\theta) = -B\cos\theta + A\sin\theta - ZR(1-\cos(\theta-\lambda)), \tag{4.44}$$

$$M_z(\theta) = 0. \tag{4.45}$$

Utilisons la proposition 3.20 page 55 du chapitre 3 ; on néglige les effets dus à l'effort normal et aux efforts tranchants et on considère E, I_y, I_z, G et J_ρ constants sur toute la poutre. Ainsi

$$W = \frac{R}{2EI_z}\int_0^\lambda M_z^2(\theta)\,d\theta + \frac{R}{2EI_y}\int_0^\lambda M_y^2(\theta)\,d\theta + \frac{R}{2GJ_\rho}\int_0^\lambda M_t^2(\theta)\,d\theta. \tag{4.46}$$

Grâce au théorème de Castigliano, on peut donc en déduire les déplacements de B sur les directions où $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{C}$ sont non nuls :

$$z_B = \frac{\partial W}{\partial Z}, \quad \omega_{1,B} = \frac{\partial W}{\partial A}, \quad \omega_{2,B} = \frac{\partial W}{\partial B}. \tag{4.47}$$

Pour obtenir les autres déplacements (x_B, y_B, et $\omega_{3,B}$), il faudrait utiliser le théorème de la force virtuelle.

Troisième partie

Introduction à la mécanique non linéaire

CHAPITRE 5

Flambement (flambage)

Chapitre non dactylographié.

CHAPITRE 6

Critères de plasticité

Ce chapitre est inspiré de la partie 4 de [**Dub98**] (pages 478 à 488) et du chapitre correspondant de [**Atc**].

Pour ce chapitre, quelques rappels mathématiques et mécaniques seront faits en annexe B.

On pourra aussi consulter l'annexe I où figure une étude de critère (donnée en examen final à l'Automne 2003).

6.1. Introduction

Dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations (chapitres 1, 3 et 4), la loi de Hooke prévoit la proportionnalité entre les contraintes et les déformations ainsi qu'entre les forces et les déplacements.

Nous avions vu au cours du chapitre 5 que le principe de linéarité externe provenait de l'hypothèse des petites déformations et de la loi de comportement élastique linéaire du matériau étudié. Dans le cadre du flambement nous avions conservé la loi de comportement élastique linéaire, mais le cas étudié nous montrait que l'on ne pouvait plus faire l'hypothèse des petites déformations (plus précisément, on ne peut plus assimiler la configuration au repos et la configuration déformée). Dans d'autre cas, c'est la loi de comportement élastique linéaire qui est mise en défaut, comme dans ce chapitre. Un solide trop sollicité subira un phénomène de plasticité : le solide se déforme et, non contraint, il ne reprend plus sa configuration initiale.

L'exemple le plus simple est la traction d'une éprouvette, pour laquelle on peut lier σ à F et ε à u, l'allongement (voir figure 6.1) de la façon suivante :

$$\sigma = \frac{F}{S}, \tag{6.1}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{6.2}$$

Ici, S désigne la section de la zone de mesure de l'allongement (où l'état de contrainte est celui d'une sollicitation normale), Δl désigne la variation de la longueur de cette zone et l longueur initiale.

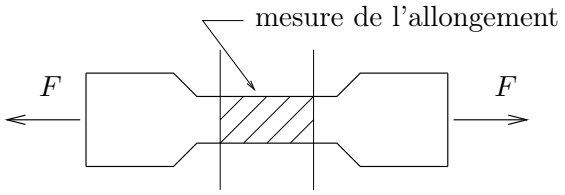


FIG. 6.1. traction d'une éprouvette

Si on trace la courbe (ε, σ) au cours du chargement, on observe un graphe identique à celui de la figure 6.2.

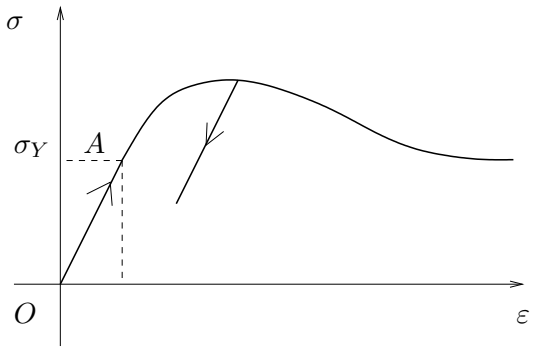


FIG. 6.2. Graphe (ε, σ)

La partie $[OA]$ est linéaire. Plus précisément, selon le chapitre 3, on a la relation

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{6.3}$$

En revanche, si

$$\sigma > \sigma_Y, \tag{6.4}$$

la relation entre ε et σ n'est plus linéaire : on quitte le domaine élastique linéaire. L'étude au delà du point A est trop difficile. De plus, la plasticité est caractérisée par un phénomène d'hystéresis : la courbe de charge n'est pas identique à la courbe de décharge (voir figure 6.2). On se contente d'essayer de prévoir la valeur σ_Y au delà de laquelle l'entrée en plasticité se produit.

De façon plus générale, en MMC, il existe un domaine D, sous ensemble des tenseurs (ou des matrices) symétriques vérifiant, en chaque point, la propriété suivante : si $[\sigma]$ appartient à D, le comportement est élastique linéaire ; sinon, la plasticité se manifeste. Cette étude locale, s'oppose à l'étude globale du chapitre 7.

Soit un solide soumis à un chargement croissant, initialement nul. En un point, si la plasticité apparaît, la loi de Hooke n'est plus valable et pour étudier le comportement d'un tel solide, il faudrait faire une étude de comportement compliquée. Nous ne traiterons pas cette étude dans ce chapitre ; nous nous contenterons d'étudier l'apparition de ce début de plasticité.

Les critères feront souvent intervenir les contraintes tangentielles et non normales : un matériau se détériore et entre entre plasticité en se «déchirant» et non par compression ou traction.

Nous étudierons tout d'abord au cours de la section 6.2 la définition des critères de plasticité. Puis, nous étudierons au cours des sections 6.3 et 6.4 les critères de Tresca et de Von Mises, que l'on comparera en section 6.5. Enfin, nous étudierons quelques exemples dans la section 6.6.

6.2. Critères de plasticité

Dans tout ce chapitre, nous faisons l'hypothèse des petites déformations et de l'élasticité linéaire (cette dernière est valable, tant que l'on ne quitte pas le domaine élastique linéaire).

Pour tout ce chapitre, σ_Y désigne un réel positif ou nul.

DÉFINITION 6.1. En tout point d'un solide, il existe une contrainte équivalente σ_{eq} qui dépend du tenseur des contraintes $[\sigma]$ et une contrainte limite σ_Y vérifiant la propriété suivante : le comportement est élastique linéaire tant que

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}}([\sigma]) < \sigma_Y.} \tag{6.5}$$

On dira de façon équivalente que la plasticité apparaît dès que

$$\sigma_{\text{eq}}([\sigma]) = \sigma_Y. \tag{6.6}$$

Pour toute la suite, on fera l'hypothèse du principe d'isotropie : en un point donné, un critère ne dépend pas du choix du repère orthonormé. Naturellement, un critère n'est pas nécessairement homogène. Sous cette hypothèse, on admettra que la contrainte équivalente ne dépend que des valeurs principales du tenseur des contraintes $[\sigma]$, notée σ_1, σ_2 et σ_3. Autrement dit, un critère de plasticité est la donnée

- d'une contrainte équivalente $\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (plus précisément, σ_{eq} est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+$) ;
- et d'une contrainte limite σ_Y, qui caractérise le comportement élastique linéaire tant que

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y.} \tag{6.7}$$

DÉFINITION 6.2. Notons D le domaine d'un critère, c'est-à-dire l'ensemble des points $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vérifiant (6.7).

La frontière[1] de D est l'ensemble des points vérifiant $\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_Y$.

La détermination d'un critère est un problème ardu qui mêle empirisme, modélisation, expérimentation (mais peu de poésie). La détermination de la fonction σ_{eq} fait partie du domaine de la modélisation tandis que la détermination de σ_Y est plutôt du ressort de l'expérimentation.

Il existe beaucoup de critères, valables pour tel ou tel type de matériaux : matériaux très plastiques, métal recuit, métaux.... Pour les métaux, les deux critères les plus utilisés sont le critère de Von Mises (1913) et celui de Tresca (1864).

Dans ce chapitre, nous n'étudierons que le critère de Tresca (voir section 6.3) et celui de Von Mises (voir section 6.4).

Il en existe d'autres ; les plus connus sont celui de Mohr Coulomb (valable pour des matériaux ou des frottements sont mis en jeu : béton, rocs, sols) qui date de 1773 ou celui de Drucker-Prager (1952). Il existe aussi des critères non isotropes. Pour plus de détails, on consultera par exemple **[Dub98]**. Le critère de Mohr-Coulomb est étudié dans l'annexe I, sous forme d'un exerice corrigé (donnée en examen final à l'Automne 2003).

6.3. Critère de Tresca

6.3.1. Énoncé

DÉFINITION 6.3. En un point, la plasticité est atteinte dès que la valeur absolue de la contrainte de cisaillement atteint une valeur critique.

[1] C'est-à-dire, l'adhérence de D ôtée de l'intérieur de D.

6.3.2. Calcul de σ_{eq}

Nous avons au cours du chapitre 2 que, en trois dimensions, on avait (voir (2.21) page 37) :

$$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \tag{6.8}$$

sous l'hypothèse :

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3. \tag{6.9}$$

Ainsi, si les contraintes principales ne sont pas nécessairement ordonnées selon (6.9), (6.8) s'écrit

$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \max_{\substack{i,j\in\{1,2,3\} \\ i\neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| . \tag{6.10}$$

Voir figure 6.3 (relative au chapitre 2). Notons $\sigma_Y/2$ la valeur maximale de la contrainte σ_{eq} :

$$\sigma_{\text{eq,max}} = \frac{\sigma_Y}{2}. \tag{6.11}$$

Voir en remarque 6.12, ce qui justifie un tel choix.

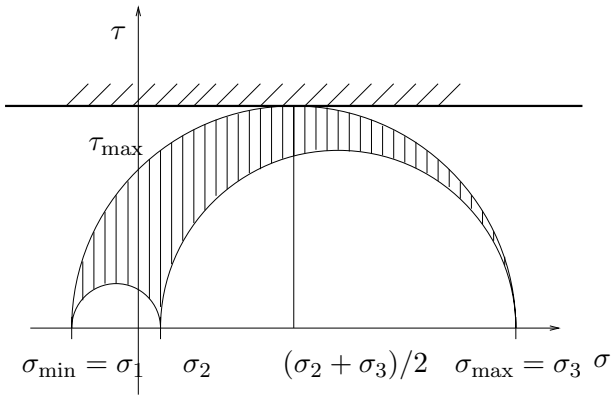


FIG. 6.3. La contrainte dans le plan de Mohr.

Ainsi,

$$\boxed{\text{Le critère de Tresca s'écrit : } \max_{\substack{i,j\in\{1,2,3\} \\ i\neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| < \sigma_Y.} \tag{6.12}$$

Autrement dit, la contrainte équivalente de Tresca est égale à :

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max_{\substack{i,j\in\{1,2,3\} \\ i\neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| .} \tag{6.13}$$

6.3.3. Représentation graphique

Fixons $\sigma_Y \geq 0$. Puisque $\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y$ représente le domaine d'élasticité, on se place dans l'espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (qui n'a aucune réalité physique). On trace, dans cet espace, le domaine D (voir définition 6.2).

6.3.3.1. Représentation graphique pour un problème plan.

Pour simplifier, supposons tout d'abord que l'on se place dans le plan (σ_1, σ_2) avec $\sigma_3 = 0$. Dans ce cas, selon (6.13), on a

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_2 - \sigma_1|, |\sigma_1|, |\sigma_2|).$$

Les inéquations définissant le domaine sont donc

$$-\sigma_Y < \sigma_1 < \sigma_Y, \tag{6.14a}$$
$$-\sigma_Y < \sigma_2 < \sigma_Y, \tag{6.14b}$$
$$-\sigma_Y < \sigma_2 - \sigma_1 < \sigma_Y. \tag{6.14c}$$

Les frontières du domaine de Tresca sont donc définies par

$$\sigma_1 = \pm\sigma_Y, \tag{6.15a}$$
$$\sigma_2 = \pm\sigma_Y, \tag{6.15b}$$
$$\sigma_2 - \sigma_1 = \pm\sigma_Y. \tag{6.15c}$$

On a tracé ces frontières sur la figure 6.4.

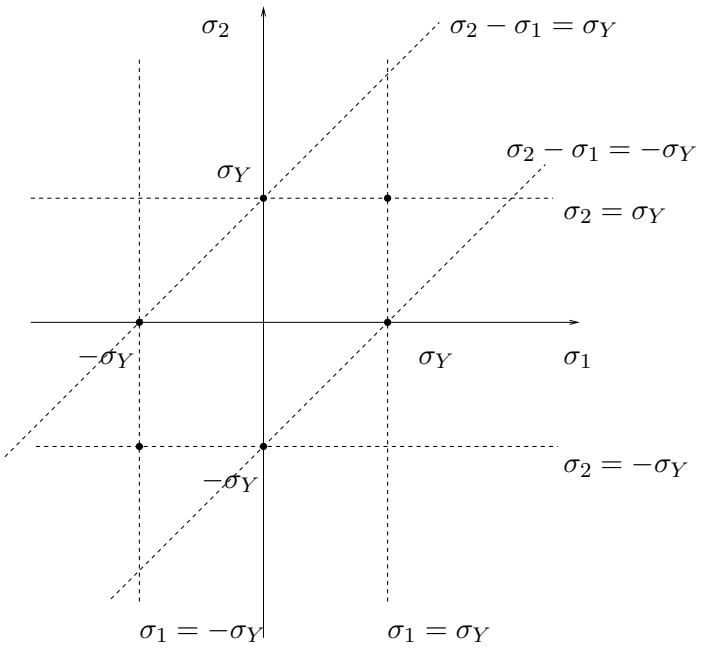


FIG. 6.4. Les frontières du domaine de Tresca plan.

Le domaine de Tresca (plan) est donc limité par l'hexagone plan représenté sur la figure 6.5 page suivante.

6.3.3.2. Représentation graphique pour un problème spatial.

REMARQUE 6.4. Remarquons tout d'abord que si σ_Y est nul, l'ensemble des réels $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vérifiant $\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0$ est réduit à l'ensemble vide. L'ensemble des réels vérifiant $\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ est réduit à la droite d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

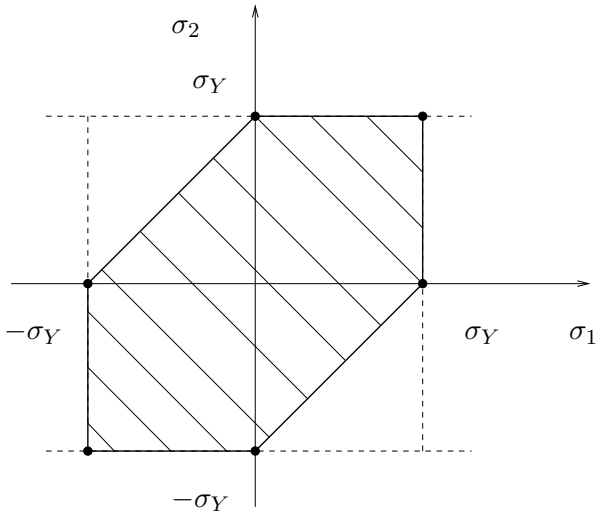


FIG. 6.5. L'hexagone de Tresca plan.

Cherchons maintenant à déterminer dans l'espace l'ensemble D des points vérifiant (6.12), c'est-à-dire

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_2 - \sigma_1|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) < \sigma_Y. \tag{6.16}$$

On peut déjà remarquer que l'intersection de ce domaine D avec le plan d'équation $\sigma_3 = 0$ est l'hexagone déjà étudié dans la section 6.3.3.1. On admet que l'intersection de D avec les plans d'équation $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = 0$ sont aussi des hexagones similaire. On peut aussi remarquer que l'intersection de ce domaine D avec le plan d'équation $\sigma_3 = 0$ contient les points $(A_i)_{1\leq i\leq 6}$ (qui correspondent aux sommets de l'hexagone de Tresca) de coordonnées respectives :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sigma_Y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \sigma_Y \\ \sigma_Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -\sigma_Y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -\sigma_Y \\ -\sigma_Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma_Y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

On peut aussi remarquer que la frontière du domaine D contient les droites parallèles à la droite portée par le vecteur de composante $(1, 1, 1)$ et passant par chacun des points A_i. En effet un point de composantes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ appartient à l'une de ces droites si et seulement si il existe $i \in \{1, ..., 6\}$ et un réel σ tels que

$$\sigma_1 = x_{A_i} + \sigma, \quad \sigma_2 = y_{A_i} + \sigma, \quad \sigma_3 = \sigma.$$

Ainsi, on a

$$\max(|\sigma_2 - \sigma_1|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) = \max(|y_{A_i} - x_{A_i}|, |y_{A_i}|, |x_{A_i}|) = \sigma_Y,$$

puisque chacun des points A_i appartient à l'hexagone de Tresca.

Par ailleurs, on peut constater que la frontière du domaine D est incluse dans les six plans d'équations

$$\sigma_i - \sigma_j = \pm\sigma_Y, \text{ pour } i \neq j. \tag{6.18}$$

Notons Δ la droite passant par l'origine et portée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Compte tenu des différentes remarques faites ci-dessus, D est un prisme d'axe Δ (voir figure 6.6 page suivante).

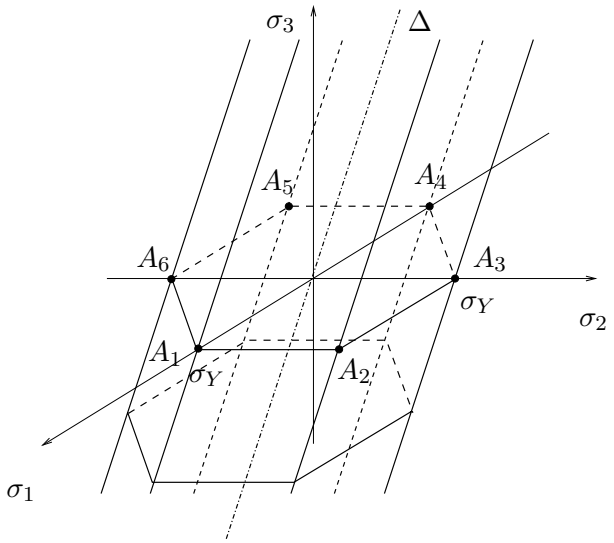


FIG. 6.6. Le prisme de Tresca .

On montrera en TD (voir exercice 6.4 du TD 6) la propriété suivante : on se place dans le repère orthonormé (u_1, u_2, u_3), où u_3 est défini par

$$u_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \tag{6.19}$$

et u_1 et u_2 sont perpendiculaires à u_3. On note Π le plan porté par (u_1, u_2). L'intersection du cylindre de Tresca avec Π est un hexagone régulier de centre l'origine. Voir figure 6.7 page suivante

6.4. Critère de Von Mises

6.4.1. Énoncé

Pour des rappels mathématiques, on pourra consulter l'annexe B, section B.1.

Rappelons le théorème suivant (voir chapitre 3, page page 49 et équation (3.7)) : si le solide élastique linéaire (occupant le volume V) a un champ de déplacement $\overrightarrow{u}$, un tenseur de contrainte $[\sigma] = \sigma_{ij}$ et un tenseur de déformation $[\varepsilon] = \varepsilon_{ij}$, alors l'énergie de déformation emmagasinée par ce solide est égale à

$$W = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ji}\, dV. \tag{6.20}$$

Autrement dit, la densité volumique d'énergie est égale à

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = [\sigma] : [\varepsilon]. \tag{6.21}$$

Dans ce cas, on montrera en notant $[\widetilde{\varepsilon}]$ et $[\widetilde{\sigma}]$ les déviateurs des tenseurs $[\varepsilon]$ et $[\sigma]$ (voir annexe B, définition B.1 et proposition B.2) que

$$\boxed{\mathcal{W} = \frac{1}{6}\big(\text{tr }([\varepsilon])\,\text{tr }([\sigma])\big) + \frac{1}{4\mu}\text{tr }\left([\widetilde{\sigma}]^2\right)}. \tag{6.22}$$

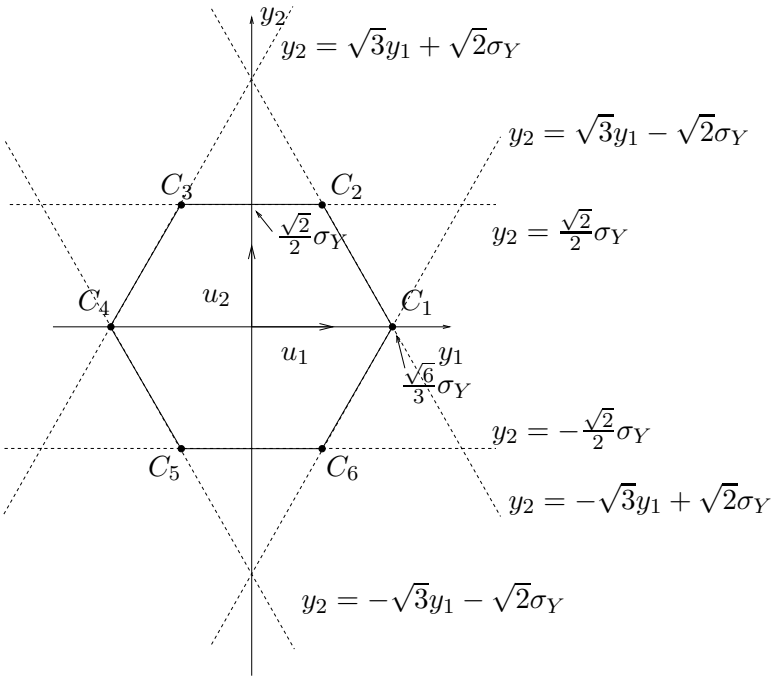


FIG. 6.7. L'intersection du cylindre de Tresca avec le plan Π.

Voir preuve en annexe B, section B.2.

On peut aussi montrer que si dV_0 désigne un volume infinitésimal en configuration initiale et dV ce même volume en configuration déformée (cf. section A.2, annexe A), alors la variation de volume est égale à

$$\boxed{\frac{dV - dV_0}{dV_0} = \operatorname{tr}([\varepsilon]).} \tag{6.23}$$

Voir preuve en annexe B, section B.2.

On peut donc écrire, selon (6.22),

$$\boxed{\mathcal{W} = \mathcal{W}_d + \mathcal{W}_c,} \tag{6.24}$$

avec

$$\boxed{\mathcal{W}_d = \frac{1}{6}\big(\operatorname{tr}\,([\varepsilon])\operatorname{tr}\,([\sigma])\big) \text{ et } \mathcal{W}_c = \frac{1}{4\mu}\operatorname{tr}\,\big([\widetilde{\sigma}]^2\big)\,.} \tag{6.25}$$

Selon (6.23) et (6.25), si le chargement se fait à volume constant, la trace de $[\varepsilon]$ est nulle est l'énergie $\mathcal{W}_d$ est nulle.

Le terme $\mathcal{W}_c$ est appelé énergie de cisaillement et, selon la remarque que l'on vient de faire, il ne fait pas intervenir de variation de volume. Le terme $\mathcal{W}_d$ est appelé l'énergie de dilatation.

On énonce alors le critère de Von Mises sous la forme suivante :

DÉFINITION 6.5. En un point, la plasticité est atteinte dès que l'énergie de cisaillement $\mathcal{W}_c$ définie par (6.25) atteint une valeur critique.

6.4.2. Calcul de σ_{eq}

Notons $\sigma_Y^2/(6\mu)$ la valeur maximale de l'énergie de cisaillement

$$\mathcal{W}_{c,\max} = \frac{\sigma_Y^2}{6\mu}. \tag{6.26}$$

Voir en remarque 6.12, ce qui justifie un tel choix.

Dans ce cas, la définition 6.5 est équivalente à :

$$\boxed{\text{Le critère de Von Mises s'écrit : } \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} < \sigma_Y.} \tag{6.27}$$

Voir preuve en annexe B, section B.2.

Autrement dit, la contrainte équivalente de Von Mises est égale à :

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}} \tag{6.28}$$

ou encore

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1}.} \tag{6.29}$$

On montrera en TD (voir TD 6, exercice 6.3) que pour un état de contraintes planes quelconque (correspondant à $\sigma_3 = 0$) on a

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+3\sigma_{12}^2}.} \tag{6.30}$$

et que pour un état de contraintes spatiales quelconque

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2\right)}.} \tag{6.31}$$

6.4.3. Représentation graphique

6.4.3.1. Représentation graphique pour un problème plan.

Pour simplifier, supposons tout d'abord que l'on se place dans le plan (σ_1,σ_2) avec $\sigma_3 = 0$. Dans ce cas, selon (6.28), on a

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

L'inéquation définissant le domaine est donc

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2 < \sigma_Y^2. \tag{6.32}$$

On trace dans le plan (σ_1,σ_2) la courbe d'équation

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2 = \sigma_Y^2. \tag{6.33}$$

On renvoie à la section B.3 de l'annexe B.

Le domaine de Von Mises (plan) est donc limité par l'ellipse plane représentée sur la figure 6.8 page suivante. Voir l'exemple B.7 de l'annexe B.

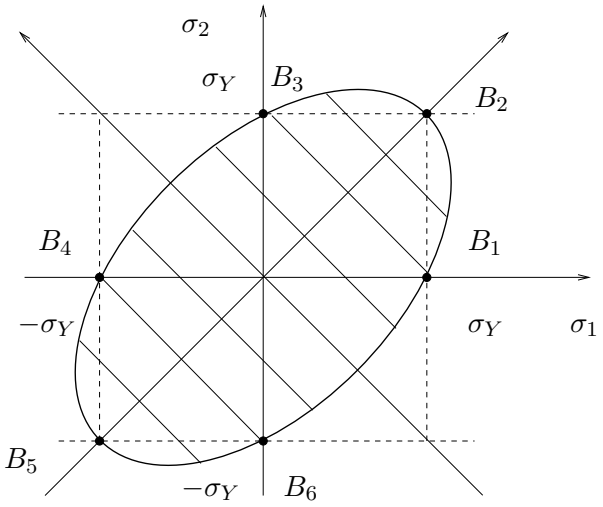


FIG. 6.8. L'ellipse de Von Mises plane.

Les axes de cette ellipse sont les deux bissectrices principales et ses demi axes sont égaux à $\sqrt{2}\sigma_Y$ et $\sqrt{2/3}\sigma_Y$. De plus, elle passe par les points $(B_i)_{1\leq i\leq 6}$ de coordonnées :

$$B_1 = \begin{pmatrix}\sigma_Y\\0\end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix}\sigma_Y\\\sigma_Y\end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix}0\\\sigma_Y\end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix}-\sigma_Y\\0\end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix}-\sigma_Y\\-\sigma_Y\end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix}0\\-\sigma_Y\end{pmatrix}. \tag{6.34}$$

6.4.3.2. Représentation graphique pour un problème spatial.

REMARQUE 6.6. Remarquons tout d'abord que si σ_Y est nul, l'ensemble des réels $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vérifiant $\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0$ est réduit à l'ensemble vide. L'ensemble des réels vérifiant $\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ est réduit à la droite d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Cherchons maintenant à déterminer dans l'espace l'ensemble D des points vérifiant (6.28), c'est-à-dire

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 < \sigma_Y^2. \tag{6.35}$$

Voir l'exemple B.8 de l'annexe B.

On peut déjà remarquer que l'intersection de ce domaine D avec le plan d'équation $\sigma_3 = 0$ est l'ellipse déjà étudiée dans la section 6.4.3.1. On admet que l'intersection de D avec les plans d'équation $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = 0$ sont aussi des ellipses similaires. On peut aussi remarquer que l'intersection de ce domaine D avec le plan d'équation $\sigma_3 = 0$ contient les points $(A_i)_{1\leq i\leq 6}$ de coordonnées respectives définies par (6.17).

On peut aussi remarquer que la frontière du domaine D contient les droites parallèles à la droite portée par le vecteur de composante $(1, 1, 1)$ et passant par chacun des points A_i. En effet un point de composante $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ appartient à l'une de ces droites si et seulement si il existe $i \in \{1, ..., 6\}$ et un réel σ tels que

$$\sigma_1 = x_{A_i} + \sigma, \quad \sigma_2 = y_{A_i} + \sigma, \quad \sigma_3 = \sigma.$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x_{A_i} - y_{A_i})^2 + y_{A_i}^2 + x_{A_i}^2} = \sigma_Y,$$

puisque chacun des points A_i appartient à l'ellipse de Von Mises.

Notons Δ la droite passant par l'origine et portée par le vecteur $(1,1,1)$.

Compte tenu des différentes remarques faites ci-dessus et de l'exemple B.8 de l'annexe B, D est un cylindre d'axe Δ et de rayon $\sqrt{2/3}\sigma_Y$ (voir figure 6.9).

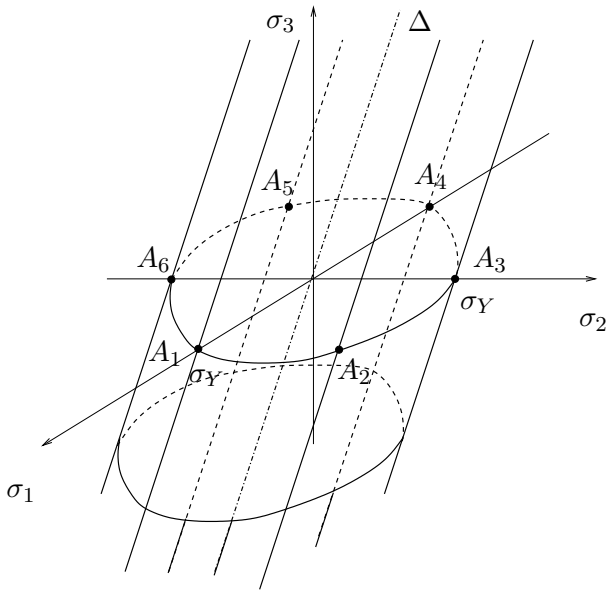


FIG. 6.9. Le prisme de Von Mises.

D'après l'exemple B.8 de l'annexe B, on se place dans le repère orthonormé (u_1, u_2, u_3), où u_3 est défini par (6.19) et u_1 et u_2 sont perpendiculaires à u_3. On appelle Π le plan porté par (u_1, u_2). L'intersection du cylindre de Von Mises avec Π est un cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt{2/3}\sigma_Y$. Voir figure 6.10

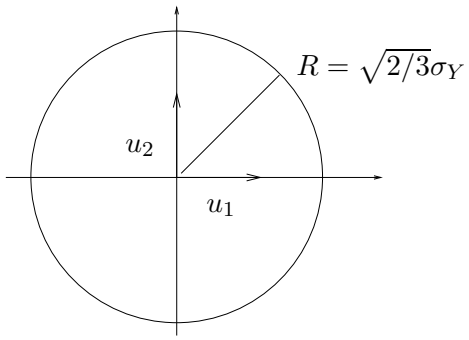


FIG. 6.10. L'intersection du cylindre de Von Mises avec le plan Π.

6.5. Comparaison des critères de Tresca et de Von Mises

Cette comparaison est plutôt mathématique : quand on étudie un matériau, seul un des critères sera utilisé.

On considère la contrainte équivalente de Tresca définie par (6.13)

$$\sigma_{\text{eq}}^{T}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\max_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i\neq j}}|\sigma_i-\sigma_j|\,, \tag{6.36}$$

et la contrainte équivalente de Von Mises définie par (6.28)

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}, \tag{6.37}$$

ainsi que les deux domaines D^T et D^{VM} associés (voir définition 6.2).

REMARQUE 6.7. Remarquons tout d'abord que, selon les remarques 6.4 et 6.6, si σ_Y est nul, les contraintes équivalentes de Tresca et de Von Mises sont toutes les deux nulles sur la droite d'équation $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$.

Pour toute cette section, on supposera donc que σ_Y est strictement positif.

On donne le lemme suivant :

LEMME 6.8. *Pour tout $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\mathbb{R}^3$, on a*

$$\boxed{\sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\leq\sigma_{eq}^{T}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\,.} \tag{6.38}$$

Voir preuve en annexe B, section B.4.

Remarquons qu'en majorant naïvement, chacun des carrés par le maximum, on aurait

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\leq\sqrt{\frac{3}{2}}\max_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i\neq j}}|\sigma_i-\sigma_j|\,,$$

ce qui est trop grossier.

On a alors :

PROPOSITION 6.9. *Le critère de Tresca est plus sévère que celui de Von Mises, c'est-à-dire D^T est inclus dans D^{VM}. Cela est équivalent à : pour tout $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\mathbb{R}^3$, on a*

$$\boxed{\sigma_{eq}^{T}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)<\sigma_Y\Longrightarrow\sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)<\sigma_Y.} \tag{6.39}$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du lemme 6.8, puisque

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\leq\sigma_{\text{eq}}^{T}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)<\sigma_Y.$$

□

On peut démontrer de la même façon que pour tout $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\sigma_{\text{eq}}^{T}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\sigma_Y\Longrightarrow\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\leq\sigma_Y, \tag{6.40}$$

ce qui traduit que la frontière de D^T est incluse dans l'adhérence de D^{VM}.

Plus précisément, on a le lemme suivant :

LEMME 6.10. *Pour tout $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\mathbb{R}^3$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

$$\sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\sigma_Y\ \text{ et }\sigma_{eq}^{T}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\sigma_Y, \tag{6.41}$$

et

$$\exists i\in\{1,...,6\},\quad\exists\sigma\in\mathbb{R},\quad\sigma_1=x_{A_i}+\sigma,\quad\sigma_2=y_{A_i}+\sigma,\quad\sigma_3=\sigma, \tag{6.42}$$

où les points A_i sont définis par (6.17) *page 104.*

Cela signifie que l'intersection des frontières des domaines de Tresca et de Von Mises est la réunion des six droites passant par les six points A_i et portée par $(1, 1, 1)$.

Voir preuve en annexe B, section B.4.

Compte tenu de tous ces éléments, on peut remarquer que dans le plan $\sigma_3 = 0$, l'hexagone de Tresca et l'ellipse de Von Mises coïncident au sommet de l'hexagone, comme l'indique la figure 6.11.

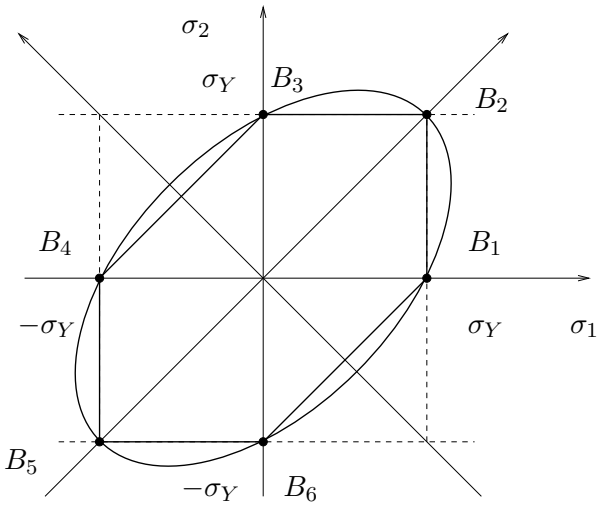


FIG. 6.11. L'ellipse de Von Mises plane et l'hexagone de Tresca plan.

On constate aussi que l'hexagone est inclus dans l'ellipse, ce qui est un cas particulier du lemme 6.8, appliqué avec $\sigma_3 = 0$.

On trace sur une même figure l'intersection du cylindre de Tresca avec le plan Π (qui est un hexagone régulier, voir figure 6.7 page 106) et l'intersection du cylindre de Von Mises avec le plan Π (qui est cercle, voir figure 6.10 page 109). On constate encore que le cercle et l'hexagone ont six sommets communs. Voir figure 6.12. Cela sera montré dans l'exercice 6.4 du TD 6.

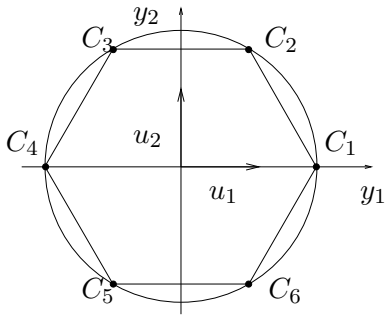


FIG. 6.12. L'intersection du cylindre de Tresca avec le plan Π et l'intersection du cylindre de Von Mises avec le plan Π.

Remarquons aussi que le domaine de Tresca et celui de Von Mises sont «proches» l'un de l'autre. Justifions cette dernière remarque de façon quantitative.

Pour cela, dans le plan $\sigma_3 = 0$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on considère l'intersection de la frontière du domaine de Tresca et de la demi droite faisant un angle θ avec l'axe σ_1, définie par $t_1(\theta)$ (voir figure 6.13). On définit de même $t_2(\theta)$ pour le domaine de Von Mises.

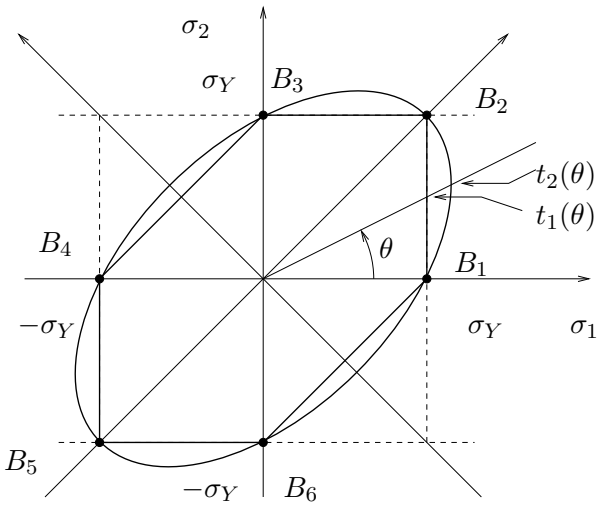


FIG. 6.13. L'angle θ, $t_1(\theta)$ et $t_2(\theta)$ pour l'ellipse de Von Mises plane et l'hexagone de Tresca plan.

On a alors la définition explicite de t_1 puisque $\sigma_1 = t_1 \cos\theta$ et $\sigma_2 = t_1 \sin\theta$, on a

$$\sigma_{\text{eq}}^T (t_1 \cos\theta, t_1 \sin\theta, 0) = \sigma_Y. \tag{6.43}$$

De même, on a

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM} (t_2 \cos\theta, t_2 \sin\theta, 0) = \sigma_Y. \tag{6.44}$$

Par symétrie, on peut supposer $\theta \in [0, \pi]$.

Sur la figure 6.13, on constate que l'on peut distinguer trois cas :

- si $\theta \in [0, \pi/4]$, on a $\sigma_{\text{eq}}^T (t_1 \cos\theta, t_1 \sin\theta, 0) = t_1 \cos\theta$ et donc, selon (6.43), on a $t_1 = \sigma_Y / \cos\theta$.
- si $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$, on a $\sigma_{\text{eq}}^T (t_1 \cos\theta, t_1 \sin\theta, 0) = t_1 \sin\theta$ et donc, selon (6.43), on a $t_1 = \sigma_Y / \sin\theta$.
- si $\theta \in [\pi/2, \pi]$, on a $\sigma_{\text{eq}}^T (t_1 \cos\theta, t_1 \sin\theta, 0) = |t_1 \cos\theta - t_1 \sin\theta|$ et donc, selon (6.43), on a $t_1 = \sigma_Y / |\cos\theta - \sin\theta|$.

Bref, on a donc, pour tout $\theta \in [0, \pi]$,

$$t_1(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_Y}{\cos(\theta)} & \text{si } \theta \in [0, \pi/4], \\ \dfrac{\sigma_Y}{\sin(\theta)} & \text{si } \theta \in [\pi/4, \pi/2], \\ \dfrac{\sigma_Y}{|\cos(\theta) - \sin(\theta)|} & \text{si } \theta \in [\pi/2, \pi]. \end{cases} \tag{6.45}$$

Pour le critère de Von Mises, le calcul est plus simple puisque

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM} (t_2 \cos\theta, t_2 \sin\theta, 0) = t_2^2 \cos^2\theta + t_2^2 \sin^2\theta - t_2^2 \cos\theta \sin\theta = t_2^2 (1 - (\sin 2\theta)/2),$$

et donc (6.44), implique

$$t_2(\theta) = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta}}. \tag{6.46}$$

On peut donc tracer les fonctions $t_1(\theta)/\sigma_Y$, $t_2(\theta)/\sigma_Y$ et surtout l'écart relatif $(t_2(\theta) - t_1(\theta))/t_1(\theta)$ comme l'indiquent les figures 6.14 et 6.15.

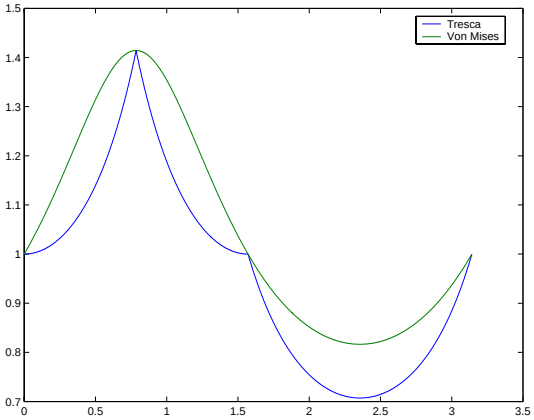


FIG. 6.14. tracé des fonctions t_1/σ_Y et t_2/σ_Y sur $[0, \pi]$

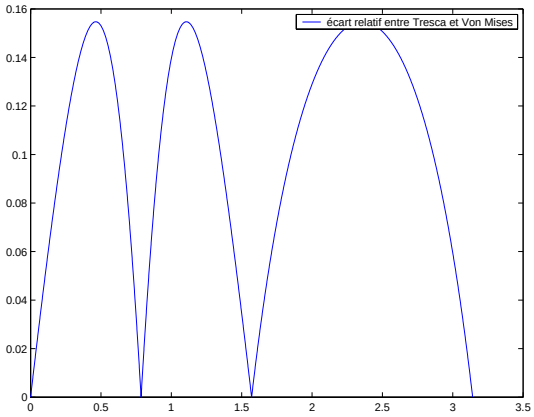


FIG. 6.15. tracé de la fonction $(t_2 - t_1)/t_1$ sur $[0, \pi]$

Comme l'avaient prévu les observations précédentes, on constate sur cette courbe que $t_2 - t_1 \geq 0$: l'ellipse contient l'hexagone. La quantité $t_2 - t_1$ est nulle si θ appartient à $\{0, \pi/4, \pi/2, \pi\}$, ce qui correspond aux sommets de l'hexagone de Tresca. De plus, on a de façon plus précise

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \frac{t_2(\theta) - t_1(\theta)}{t_1(\theta)} \in [0, G], \tag{6.47}$$

où numériquement

$$G \approx 0.1547 \approx 15,5\%, \tag{6.48}$$

ce qui confirme que les deux critères sont «proches».

REMARQUE 6.11. Concluons cette section par la remarque suivante (extraite de la page 484 de [**Dub98**]). La loi de comportement utilisant le critère de Von Mises pour les matériaux plastiques donne de meilleurs résultats, que celle utilisant le critère de Tresca, au début de l'entrée dans la zone de plasticité, c'est l'inverse ensuite quand les chargements croissent. Pour mieux décrire les résultats expérimentaux relatifs à d'autres matériaux, Edelman et Drucker ont proposé un critère intermédiaire mais d'emploi moins aisé. C'est finalement le critères de Von Mises qui reste le plus utilisé en fonction de sa facilité d'emploi[2] mais il n'est pas universel[3].

6.6. Exemples d'application

Dans cette section, nous présentons quelques situations physiques simples et nous étudierons, selon la valeur du chargement, l'entrée en plasticité du matériau. Nous comparerons les résultats fournis par le critère de Tresca et de Von Mises

6.6.1. Chargement uniaxial

Chargeons une barre par une force normale F (algébrique). D'après les résultats de la section 1.4.1 du chapitre 1, la forme du tenseur des contraintes est donnée par (1.45) :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{6.49}$$

Ainsi, le tenseur $[\sigma]$ est diagonal et ses valeurs propres sont égales à $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Selon (6.13), la contrainte équivalente de Tresca est égale à :

$$\sigma_{\text{eq}}^{T}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| = |\sigma|. \tag{6.50}$$

Selon (6.29), la contrainte équivalente de Von Mises est égale à :

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = |\sigma|. \tag{6.51}$$

Selon (6.50) et (6.51), on constate que les deux critères de Tresca et de Von Mises coïncident. On en déduit que, selon (6.5), le comportement est élastique linéaire tant que

$$|\sigma| < \sigma_Y.$$

On dira de façon équivalente, en utilisant (6.6), que la plasticité apparaît dès que

$$|\sigma| = \sigma_Y.$$

Ainsi, pour les deux critères, le comportement est élastique linéaire tant que

$$|F| < S\sigma_Y.$$

On dira de façon équivalente que la plasticité apparaît dès que

$$|F| = S\sigma_Y.$$

[2] pas de différents cas à distinguer, comme le critère de Tresca.

[3] rien n'est universel !!

La valeur du chargement F définie par

$$F = \pm S\sigma_Y, \tag{6.52}$$

(en traction ou en compression) définit donc la valeur limite de chargement avant l'entrée en plasticité.

REMARQUE 6.12. En traction-compression simple, les deux critères de Tresca et de Von Mises fournissent la même contrainte équivalente. C'est ce qui justifie *a posteriori* le choix de la valeur limite $\sigma_Y/2$ (voir (6.11) page 102) pour le critère de Tresca et de la valeur limite $\sigma_Y^2/(6\mu)$ pour le critère de Von Mises (voir (6.26) page 107). Ces deux critères sont définis par une unique valeur limite.

Par ailleurs, ce choix des constantes assure que les domaines de Tresca et de Von Mises coïncident[4] aux sommets de l'hexagone de Tresca.

On choisit l'expérience la plus simple (chargement unilatéral) pour caler cette valeur limite. Ce calage permet aussi, de façon expérimentale, de déterminer cette valeur limite, grâce à (6.52).

6.6.2. Pression hydrostatique

Étudions maintenant un milieu correspondant au cas de la pression hydrostatique (voir chapitre 2, section 2.1.3, équation (2.22)). On a

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le tenseur $[\sigma]$ est diagonal et ses valeurs propres sont égales à $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$. Selon (6.13), la contrainte équivalente de Tresca est égale à :

$$\sigma_{\text{eq}}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max_{\substack{i,j\in\{1,2,3\} \\ i\neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| = 0. \tag{6.55}$$

Selon (6.28), la contrainte équivalente de Von Mises est égale à :

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 0. \tag{6.56}$$

Selon (6.55) et (6.56), on constate que les deux contraintes équivalentes sont nulles. Ainsi, les deux critères prédisent, que pour tout chargement, le comportement demeure élastique linéaire.

Cette lacune de chacun des deux critères provient du fait qu'ils sont tous les deux fondés sur la contrainte tangentielle : un chargement équivalent à une pression hydrostatique n'intervient donc pas pour ces deux critères.

Cela pourrait inciter aussi à tronquer les domaines de Tresca et de Von Mises, de façon à limiter la valeur maximale des contraintes normales supportées.

[4] Un problème (ouvert ?) pourrait être le suivant : on pose pour la contrainte équivalente de Tresca :

$$\sigma_{\text{eq}}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max_{\substack{i,j\in\{1,2,3\} \\ i\neq j}} |\sigma_i - \sigma_j|, \tag{6.53}$$

et pour la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\sigma_{\text{eq},\alpha}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \alpha\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}, \tag{6.54}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On choisit alors α_0 de tel sorte que, pour $\sigma_3 = 0$,

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} \left|\sigma_{\text{eq}}^T(\cos\theta, \sin\theta, 0) - \sigma_{\text{eq},\alpha_0}^{VM}(\cos\theta, \sin\theta, 0)\right| = \min_{\alpha\in\mathbb{R}_+} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left|\sigma_{\text{eq}}^T(\cos\theta, \sin\theta, 0) - \sigma_{\text{eq},\alpha}^{VM}(\cos\theta, \sin\theta, 0)\right|.$$

Cela qui pourrait abaisser la valeur de l'écart maximal (6.48) entre les deux critères.

6.6.3. Chargement par effort tranchant

Étudions maintenant un milieu où seule la contrainte de cisaillement intervient. On consultera le chapitre 1, section 1.4.3. On reprend l'exercice 1.29 page 28 avec les notations de la figure 1.19 page 28. Si $M_z = 0$, on a donc, selon (1.50),

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{T_y \mu(y)}{I_z b(y)} & 0 \\ \dfrac{T_y \mu(y)}{I_z b(y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On a, selon les résultats de l'exercice 1.29, la valeur de la contrainte de cisaillement

$$\tau(y) = \frac{6T\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{bh^3}, \tag{6.57}$$

et

$$[\sigma(y)] = \begin{pmatrix} 0 & \tau(y) & 0 \\ \tau(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À $y \in [-h/2, h/2]$ fixé, le tenseur $[\sigma(y)]$ n'est pas diagonal. On le diagonalise et on trouve ses valeurs propres

$$\sigma_1(y) = -\tau(y), \quad \sigma_2(y) = \tau(y), \quad \sigma_3(y) = 0. \tag{6.58}$$

Ainsi, selon (6.13), la contrainte équivalente de Tresca est égale à :

$$\sigma_{\text{eq}}^T(\sigma_1(y), \sigma_2(y), \sigma_3(y)) = \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |\sigma_i(y) - \sigma_j(y)| = \max\left(|2\tau(y)|, |\tau(y)|\right),$$

soit

$$\sigma_{\text{eq}}^T(\sigma_1(y), \sigma_2(y), \sigma_3(y)) = 2|\tau(y)|. \tag{6.59}$$

Selon (6.28), la contrainte équivalente de Von Mises est égale à :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1(y), \sigma_2(y), \sigma_3(y)) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1(y) - \sigma_2(y))^2 + (\sigma_2(y) - \sigma_3(y))^2 + (\sigma_3(y) - \sigma_1(y))^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4\tau^2(y) + \tau^2(y) + \tau^2(y)},\end{aligned}$$

soit

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1(y), \sigma_2(y), \sigma_3(y)) = \sqrt{3}|\tau(y)|. \tag{6.60}$$

On vérifie que la fonction $y \mapsto h^2/4 - y^2$, définie sur $[-h/2, h/2]$ est maximale en $y = 0$ et y vaut $h^2/4$. Ainsi, selon(6.57) et (6.59), on a la plus grande valeur (dans la section) de la contrainte équivalente de Tresca

$$\sigma_{\text{eq,max}}^T = \frac{3}{bh}|T|. \tag{6.61}$$

De même, selon(6.57) et (6.60), on a la plus grande valeur (dans la section) de la contrainte équivalente de Von Mises

$$\sigma_{\text{eq,max}}^{VM} = \frac{3\sqrt{3}}{2bh} |T| . \tag{6.62}$$

Ainsi, pour le critère de Tresca, la valeur du chargement T définie par

$$T^T = \pm \frac{1}{3} bh\sigma_Y, \tag{6.63}$$

définit donc la valeur limite de chargement avant l'entrée en plasticité. De même, pour le critère de Von Mises, la valeur du chargement T définie par

$$T^{VM} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} bh\sigma_Y, \tag{6.64}$$

définit donc la valeur limite de chargement avant l'entrée en plasticité.

Puisque $1/3 < 2\sqrt{3}/9$, l'entrée en plasticité selon le critère de Tresca se fera avant l'entrée en plasticité selon le critère de Von Mises (ce qui est conforme aux résultats de la section 6.5).

CHAPITRE 7

Une introduction à l'analyse limite

Ce chapitre est inspiré du chapitre correspondant de [**Atc**].

7.1. Introduction

La plupart des problèmes précédemment traités en RDM étudiaient le comportement élastique des matériaux. Cependant, nous avons vu au cours du chapitre 6 que les lois de comportement élastiques linéaires ne sont pas toujours valables.

Nous avons étudié des critères qui permettent de déterminer, si, localement, la plasticité est atteinte. Un ingénieur devra prévoir si une structure plastifie de façon locale.

Lors des sollicitations exceptionnelles ou accidentelles (fluctuation de pressions, de températures, tremblement de terre), des contraintes supérieures aux limites élastiques ou limites d'écoulement du matériau, peuvent se produire, en entraînant des déformations permanentes alors que la structure doit résister sans effondrement. Il est donc important de prévoir lors des calculs de dimensionnement, ces situations anormales et de s'assurer que les éléments mécaniques d'une structure puissant réagir sans déformation excessives. De plus, ce calcul se fera de façon globale : plutôt que d'étudier localement (comme au chapitre 6) l'apparition locale de la plasticité, le raisonnement est global.

L'étude des notions essentielles de la capacité portante d'une structure en matériau ductile soumis à une charge statique entraînant l'écoulement du matériau s'appelle l'analyse limite en RDM.

En RDM, et plus généralement en MMC, l'analyse limite est associée au calcul à la rupture, qui permet, via des résultats d'analyse convexe assez difficiles, de prévoir des estimations par défaut et par excès des capacité portante de structure. Nous n'aborderons pas cette ce type de calcul, mais nous ne donnerons qu'un exemple très simple de calcul d'analyse limite.

7.2. Modèles de comportement de matériaux

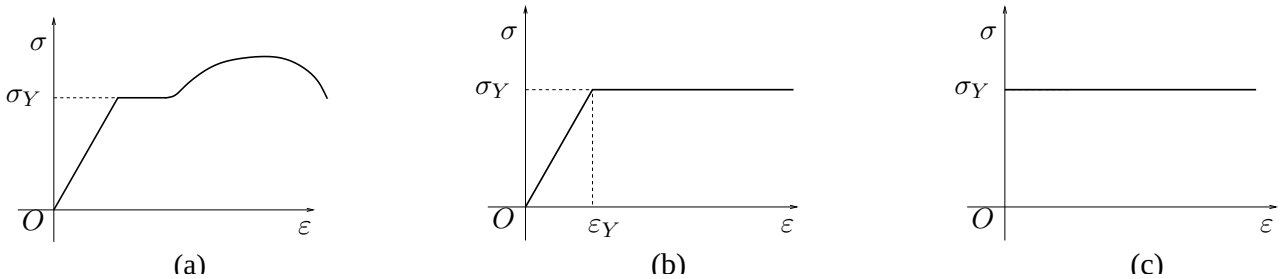


FIG. 7.1. lois de comportement : matériau ductile (a), matériau élastique parfaitement plastique (b), matériau rigide parfaitement plastique (c)

Nous avons déjà vu lors du chapitre 6 des lois de comportement liant ε et σ, comme indiqué sur la courbe 7.1a.

La limite élastique voisine de la limite d'écoulement σ_Y constitue la caractéristique essentielle en analyse limite. Le modèle de base utilisé est la courbe de la figure 7.1a où la déformation de la limite d'écoulement est infinie. Par conséquent, on se préoccupe pas des conséquences de l'écrouissage du matériau comme dans le cas 7.1b. Pour cette courbe, la loi de comportement s'écrit :

$$\boxed{\sigma = \phi_E(\varepsilon),} \tag{7.1}$$

où la fonction ϕ_E est donnée par

$$\phi_E(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{si } \varepsilon \in [0, \varepsilon_Y], \\ \sigma_Y, & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon_Y. \end{cases} \tag{7.2}$$

Ici, E est le module d'Young du matériaux étudié et ε_Y est la déformation à partir de laquelle se produit l'écoulement plastique. Puisque $E\varepsilon_Y = \sigma_Y$, la fonction ϕ_E est aussi donnée par :

$$\boxed{\phi_E(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{si } \varepsilon \in [0, \sigma_Y/E], \\ \sigma_Y, & \text{si } \varepsilon \geq \sigma_Y/E. \end{cases}} \tag{7.3}$$

En analyse limite, on néglige le comportement élastique qui n'a aucune incidence sur l'évaluation de la capacité portante d'une structure. Pour simplifier, on utilise la courbe 7.1c. Pour cette courbe, la loi de comportement s'écrit correspond à (7.1) et (7.3) où E tend vers l'infini, c'est-à-dire :

$$\boxed{\sigma = \phi_\infty(\varepsilon),} \tag{7.4}$$

avec

$$\boxed{\phi_\infty(\varepsilon) = \begin{cases} \text{non déterminé}, & \text{si } \varepsilon = 0, \\ \sigma_Y, & \text{si } \varepsilon \neq 0. \end{cases}} \tag{7.5}$$

Pour déterminer cette capacité maximale d'une structure, deux types d'approche peuvent être envisagés :

- soit, on étudie la structure chargée progressivement et on détermine l'apparition progressive de la plasticité en utilisant la courbe 7.1b et la loi de comportement (7.1)-(7.3). Nous procéderons ainsi dans la section 7.3.1 ;
- soit, on étudie la structure en supposant que la plasticité est immédiatement atteinte en utilisant la courbe 7.1c et la loi de comportement (7.4)-(7.5). Nous procéderons ainsi dans la section 7.3.2.

7.3. Un exemple : cas d'un chargement uniaxial

Soit une structure constituée de trois barres, de même section S, de module élastique E, articulée aux extrémités A, B, C et D (cf. figure 7.2a).

Soit δ la flèche du point d'application A de la charge F. Soient N_1 et N_2 les efforts normaux dans les barres 1 et 2.

Donnons les différentes équations qui décrivent ce système mécanique. L'équilibre du point d'application de la force F fournit :

$$F = N_1 + \sqrt{2}N_2. \tag{7.6a}$$

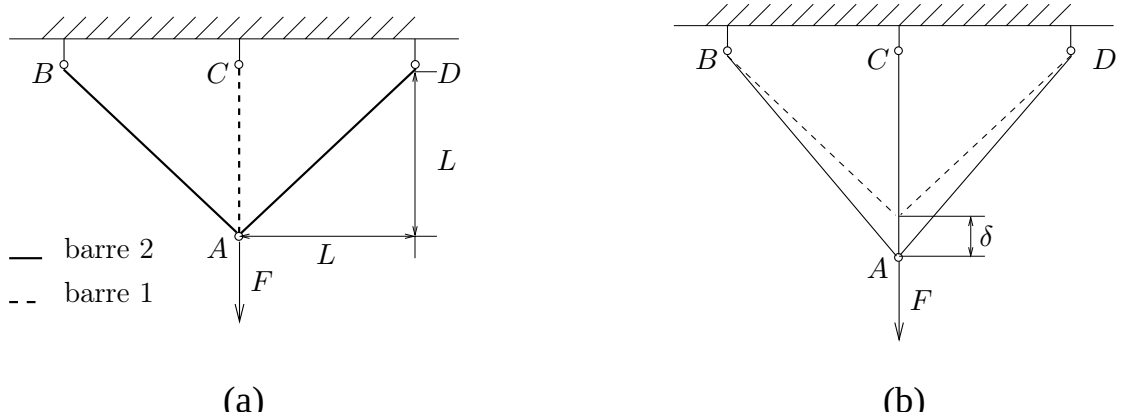


FIG. 7.2. Structure constituée de trois barres élastoplastiques : structure au repos (a), structure déformée (b).

La compatibilité des déplacements implique

$$\delta_1 = \delta \text{ et } \delta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta, \tag{7.6b}$$

pour δ faible par rapport à L. Puisque la barre travaille en traction compression, la relation (1.45) page 24 du chapitre 1 donne

$$\sigma_i = \frac{N_i}{S}, \text{ pour } i = 1, 2. \tag{7.6c}$$

Par définition, on a

$$\varepsilon_i = \frac{\delta_i}{L_i}, \text{ pour } i = 1, 2, \tag{7.6d}$$

avec $L_1 = L$ et $L_2 = \sqrt{2}L$. Pour chacune des deux barres, on écrit la loi de comportement sous la forme

$$\sigma_i = \phi_E\left(\varepsilon_i\right), \text{ pour } i = 1, 2, \tag{7.6e}$$

où E est fini pour l'analyse élastique (voir équations (7.1)-(7.3)) et E est infini pour l'analyse limite (voir équations (7.4)-(7.5)).

Dans la section 7.3.1, nous utiliserons les équations (7.6d) et (7.1)-(7.3) et dans la section 7.3.2, nous utiliserons les équations (7.6d) et (7.4)-(7.5).

Auparavant, simplifions l'ensemble des équations (7.6).

D'après (7.6a), (7.6c), (7.6e) et (7.6d), on peut écrire successivement

$$\begin{aligned} F &= N_1 + \sqrt{2}N_2, \\ &= S\sigma_1 + \sqrt{2}S\sigma_2, \\ &= S\left(\phi_E\left(\varepsilon_1\right) + \sqrt{2}\phi_E\left(\varepsilon_2\right)\right), \\ &= S\left(\phi_E\left(\frac{\delta_1}{L}\right) + \sqrt{2}\phi_E\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{2}L}\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, selon (7.6b) , il vient

$$\boxed{F(\delta) = S\left(\phi_E\left(\frac{\delta}{L}\right) + \sqrt{2}\phi_E\left(\frac{\delta}{2L}\right)\right).} \tag{7.7}$$

Nous cherchons à déterminer la courbe $F(\delta)$, quand δ varie, selon les hypothèses faites.

REMARQUE 7.1. Les équations (7.6) comme les équations (7.7) sont toujours vraies, quelque soit la loi de comportement ϕ_E.

7.3.1. Analyse élastique

Le comportement du matériaux est élastique parfaitement plastique et sa limite d'écoulement est σ_Y (cf. courbe 7.1b) et loi de comportement est donnée par (7.1)-(7.3). δ reste faible dans les limites du comportement élastique et croît à l'infini quand F augmente (cf. figure 7.2b).

7.3.1.1. Comportement purement élastique.

D'après (7.3) et (7.7), si

$$\frac{\delta}{L} \leq \frac{\sigma_Y}{E} \text{ et } \frac{\delta}{2L} \leq \frac{\sigma_Y}{E},$$

alors,

$$F(\delta) = S\left(E\,\frac{\delta}{L} + \sqrt{2}E\,\frac{\delta}{2L}\right).$$

Autrement dit, si

$$\boxed{\delta \in [0, L\sigma_Y/E],} \tag{7.8a}$$

alors

$$\boxed{F(\delta) = k_1\delta,} \tag{7.8b}$$

où

$$\boxed{k_1 = \frac{SE}{L}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).} \tag{7.8c}$$

La valeur maximale de F prise dans ce cas correspond à $\delta = L\sigma_Y/E$, c'est-à-dire

$$\boxed{F_Y = S\sigma_Y\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).} \tag{7.9}$$

7.3.1.2. Comportement mixte (élastique et plastique).

Au-delà de la limite imposée par la relation (7.8a), la barre 1 a déjà atteint sa limite d'écoulement et se serait allongée indéfiniment si elle était seule à être sollicitée. Or, à ce stade, les barres 2 ne sont qu'à la moitié de la limite subie par la barre 1.

Plus précisément, selon (7.3) et (7.7), si

$$\frac{\sigma_Y}{E} \leq \frac{\delta}{L} \leq \frac{2\sigma_Y}{E},$$

alors

$$F(\delta) = S\left(\sigma_Y + \sqrt{2}E\,\frac{\delta}{2L}\right).$$

Autrement dit, si

$$\boxed{\delta \in [L\sigma_Y/E, 2L\sigma_Y/E],} \tag{7.10a}$$

alors

$$\boxed{F(\delta) = k_2\delta + S\sigma_Y,} \tag{7.10b}$$

où

$$\boxed{k_2 = \frac{SE\sqrt{2}}{2L}.} \tag{7.10c}$$

La valeur maximale de F prise dans ce cas correspond à $\delta = 2L\sigma_Y/E$, c'est-à-dire

$$\boxed{F_L = S\sigma_Y\left(1+\sqrt{2}\right).} \tag{7.11}$$

7.3.1.3. Comportement au-delà du domaine élastique.

Au-delà de la limite imposée par la relation (7.10a), les deux barres ont plastifié.

Plus précisément, selon (7.3) et (7.7), si

$$\frac{\delta}{L} \geq \frac{2\sigma_Y}{E},$$

alors

$$F(\delta) = S\left(\sigma_Y + \sqrt{2}\,\sigma_Y\right).$$

Autrement dit, si

$$\boxed{\delta \geq 2L\sigma_Y/E,} \tag{7.12a}$$

alors

$$\boxed{F(\delta) = S\sigma_Y\left(1+\sqrt{2}\right).} \tag{7.12b}$$

7.3.1.4. Bilan.

Si on trace la courbe $F(\delta)$ donnée par les différentes équations (7.8), (7.10) et (7.12), on obtient la courbe polygonale indiquée sur la figure 7.3, avec

$$\boxed{\delta_Y = \frac{\sigma_Y}{LE},\ \text{et}\ \delta_L = \frac{2\sigma_Y}{LE}.} \tag{7.13}$$

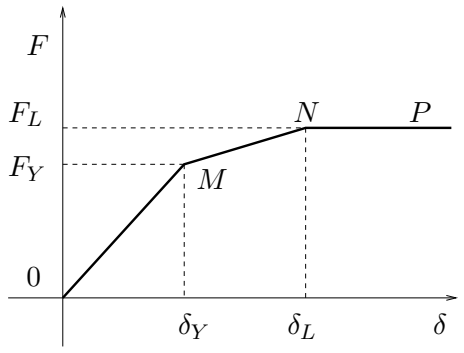


FIG. 7.3. courbe $F(\delta)$ pour la structure étudiée

Sur cette figure, on observe les trois états précédemment prévus :

- Si $\delta \in [0, \delta_Y]$, les deux barres ont un comportement élastique et F est linéaire par rapport à δ avec une raideur k_1.

- Si $\delta \in [\delta_Y, \delta_L]$, la barre 1 a un comportement plastique et la barre 2 a un comportement élastique. La force F est affine par rapport à δ avec une raideur $k_2 < k_1$.
- Si $\delta \geq \delta_L$, F est constant et δ croît indéfiniment : la ruine se produit.

La structure bénéficie donc d'une réserve de résistance représentée par le segment MN sur la courbe $F(\delta)$ (cf. figure 7.3).

Ainsi, en pratique si on impose une force F

- inférieure à F_Y : la structure aura un comportement élastique ;
- comprise entre F_Y et F_L : la structure aura plastifié mais pourra résister, en cas de circonstances exceptionnelles.
- supérieure à F_L : la structure sera ruinée et ne présentera plus aucune résistance.

7.3.2. Analyse limite

Elle permet de déterminer la valeur de la force ou charge limite F_L qui entraîne un effondrement de la structure, c'est-à-dire une déformation acceptable qui se produit lorsque les trois barres sont soumises à une contrainte égale à la limite d'écoulement, égale à F_L.

Pour cela, on suppose que le comportement du matériaux est rigide parfaitement plastique et sa limite d'écoulement est σ_Y (cf. courbe 7.1c) et loi de comportement est donnée par (7.4)-(7.5).

On reprend donc l'ensemble des équations (7.6) et (7.7), qui sont toujours vraies, selon la remarque 7.1. On suppose maintenant, selon (7.4)-(7.5), que $E = +\infty$. Ainsi, si $\delta \neq 0$, il vient

$$\boxed{F(\delta) = S\sigma_Y \left(1 + \sqrt{2}\right).} \tag{7.14}$$

On retrouve donc instantanément la valeur de $F = F_L$, donnée par (7.11).

7.3.3. Comparaison entre l'Analyse élastique et l'analyse limite

Le calcul de F_L n'est utile que si l'on veut connaître la capacité portante ou la résistance de la structure :

$$\frac{F_L}{F_Y} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.414. \tag{7.15}$$

À la limite du comportement élastique, la structure dispose de 41% de réserve avant l'effondrement. F_L est plus facile à calculer que F_Y et exprime de façon réaliste la capacité portante de la structure. Les solutions de l'analyse limite sont utiles lorsqu'elles sont simples. Elles ne sont pas valables en fatigue, en flambement (instabilité) et pour les matériaux ductiles.

7.3.4. Un mot sur les critères de défaillance

En reprenant l'exemple étudié, faisons une petite remarque sur les résultats donné par l'analyse élastique et les critères de défaillance du chapitre 6.

Pour un état de contrainte défini par la traction-compression (voir relation 1.45 page 24 du chapitre 1 et équation (7.6c)), l'une des contraintes principales est, en toute section et uniformément dans la section est égale à $\sigma_1 = N_i/S$; les deux autres contraintes principales sont nulles. Le critère de Tresca vu au cours du chapitre 6 donnerait donc

$$\frac{N_i}{S} \leq \sigma_Y. \tag{7.16}$$

Le critère de Von Mises vu au cours du chapitre 6 donnerait la même relation. La relation (7.16) est donc identique à (7.3).

C'est l'un des rares cas où l'analyse limite (approche globale) et par critères (approche locale) donnent les mêmes résultats : cela provient du fait que la répartition des contraintes est uniforme.

7.4. Applications de l'analyse limite

Dans la majorité des cas pratiques (sauf les chargements uniaxiaux), tous les éléments d'une structure chargée ne sont pas soumis au même état de contrainte. Dans les matériaux (y compris les matériaux élastiques parfaitement plastiques), il existe une réserve de résistance à toute charge au delà du domaine élastique. La charge d'effondrement (ε infini) est sensiblement supérieure à la charge maximale permise dans les limites du comportement élastique. La torsion et la flexion d'une poutre sont les cas les plus intéressants en analyse limite, puisque la répartition des contraintes n'est pas uniforme dans les limites du domaine élastique. On traitera ces deux exemples en TD.

Bibliographie

[AF90] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques, tome 4 : Algèbre bilinéaire et géométrie*. Dunod, 1990.

[Ali02] Jean-Michel Alimi. *Pourquoi la nuit est-elle noire ?* Number 18 in Les Petites Pommes du Savoir. Édition Le Pommier, 2002.

[Atc] K.E. Atcholi. Résistance des matériaux, Introduction aux calculs des structures. Notes de cours de MQ41 de l'UTBM.

[Bas68] J. Bass. *Exercices de mathématiques*. Masson, Paris, 1968. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM sous la cote QA 43 BAS.

[Bas03] Jérôme Bastien. Mathématiques : Applications. Notes de cours de MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT31, 2003.

[Ber01] Maïtine Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Cours et exercices avec solutions*. Dunod, Paris, 2001.

[BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab*. Dunod, Paris, 2003.

[Bou02] Alain Bouquet. *Doit-on croire au big bang ?* Number 23 in Les Petites Pommes du Savoir. Édition Le Pommier, 2002.

[Che89] J. F. Chenard. Mécanique des milieux continus. Polycopié de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État, première année, 1989.

[DG99] P. Duga et P. Guyenot. Éléments de résistance des matériaux. Polycopié du cours de MQ22 de l'UTBM, 1999.

[Dub98] Serge Dubigeon. *Mécanique des milieux continus*. Lavoisier, Tec & Doc, École Centrale de Nantes, 1998. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM : cote QA 802.2 DUB.

[Duv90] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1990.

[Ger86] P. Germain. *Mécanique*, volume 1. Ellipse, École Polytechnique, Palaiseau, 1986. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM : cote QA 805 GER (v.1).

[Lar88] Serge Laroze. *Mécanique des structures, Tome 2, Poutres*. Eyrolles, Masson, Paris, 1988. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM : cote TA 405 LAR.

[LB88] Serge Laroze et Jean-Jacques Barrau. *Mécanique des structures, Tome 1, Solides élastiques, Plaques et coques*. Eyrolles, Masson, Paris, 1988. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM : cote TA 405 LAR.

[LFA01] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès. *Cours de mathématiques, tome 3 : géométrie et cinématique*. Dunod, 2001. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA 445 LEL.

[Pet98] Roger Petit. *L'outil mathématique pour la physique*. Dunod, Paris, 1998. disponible à la biliothèque de l'UTBM sous la cote QC20 PET.

[PGa] M. Prunier et J. Guimbard. Mécanique des solides, tome I : Généralités et efforts de la Résistance des Matériaux. Polycopié de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État, première année.

[PGb] M. Prunier et J. Guimbard. Mécanique des solides, tome II. Polycopié de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État, première année.

[RDO87] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de Mathématiques Spéciales, Tome 2 : algèbre et applications à la géométrie*. Masson, Paris, 1987.

[RL90] J.M. Reynouard et M. Lemaire. Structure, tome II. Polycopié de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État, deuxième année, 1989-1990.

[Rou95] Jean Roux. *Résistance des matériaux par la pratique. Tome 2, Méthodes énergétiques, poutres continues, systèmes réticulés, calcul des ossatures, méthodes matricielles*. Eyrolles, Paris, 1995. disponible à la biliothèque de l'UTBM sous la cote TA405 ROU.

[Sch66] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966. disponible à la biliothèque de l'UTBM sous la cote QA324 SCH.

Quatrième partie

Annexes

Dans cette partie se trouvent des annexes qui comprennent les preuves ou des compléments de résultats de cours.

ANNEXE A

Rappels de mécanique des milieux continus, en élasticité linéaire isotrope en petites déformations

Cette annexe est en grande partie inspirée de [**Che89**].

Après avoir donné la notation d'Einstein pour les sommes (section A.1), nous rappelons dans cette annexe la description d'une transformation finie d'un volume (section A.2), le tenseur des déformations (section A.3), le tenseur des contraintes (section A.4) et la loi de Hooke (section A.6).

Dans cette annexe, on se placera dans un cadre simplifié (simplification aussi utilisée en RDM), celui de l'élasticité linéaire isotrope en petites déformations ; chacun de ces termes sera défini dans cette annexe.

A.1. Rappel sur la notation de sommation d'Einstein

En MMC, on utilise souvent la notation de sommation d'Einstein qui consiste, quand un indice de sommation (dit muet) apparaît deux fois dans une somme, à omettre le symbole somme lié à cet indice.

Par exemple, si $u = (u_1, u_2, u_2)$ et $v = (v_1, v_2, v_2)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est égal à

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i.$$

Avec la notation d'Einstein, il est écrit sous la forme

$$\langle u, v \rangle = u_i v_i.$$

Ici, l'indice i est muet car son nom n'importe pas : on a

$$\langle u, v \rangle = u_i v_i = u_j v_j.$$

Donnons deux autres exemples : si $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et si $u = (u_1, u_2, u_2)$ et $v = (v_1, v_2, v_2)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, si $v = Au$, on a

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad v_i = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} u_j,$$

écrit avec la notation d'Einstein

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad v_i = a_{ij} u_j.$$

Dans cette somme, l'indice j est muet mais pas l'indice i.

Avec cette notation, dès qu'un indice est répété deux fois, on omet le signe somme, et ce pour toutes les paires d'indice. Ainsi, le scalaire

$$ {}^tuAv = \sum_{i,j\in\{1,2,3\}} a_{ij}u_iv_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}u_iv_j, $$

sera écrit

$$ {}^tuAv = a_{ij}u_iv_j. $$

Pour éviter toute ambiguïté, on précisera à chaque fois dans cette annexe quand la notation d'Einstein sera utilisée.

A.2. Transformation finie d'un volume

On considère un volume de matière occupant, au repos, une région Ω_0 de l'espace, dit état de référence. On suppose que, soumis à diverses sollicitations (dont on ne se préoccupe pas pour l'instant), cette matière occupe un nouveau volume, noté Ω, dit état déformé (cf. figure A.1). On est en régime stationnaire (indépendant du temps) et seuls les état initial et déformé comptent ici.

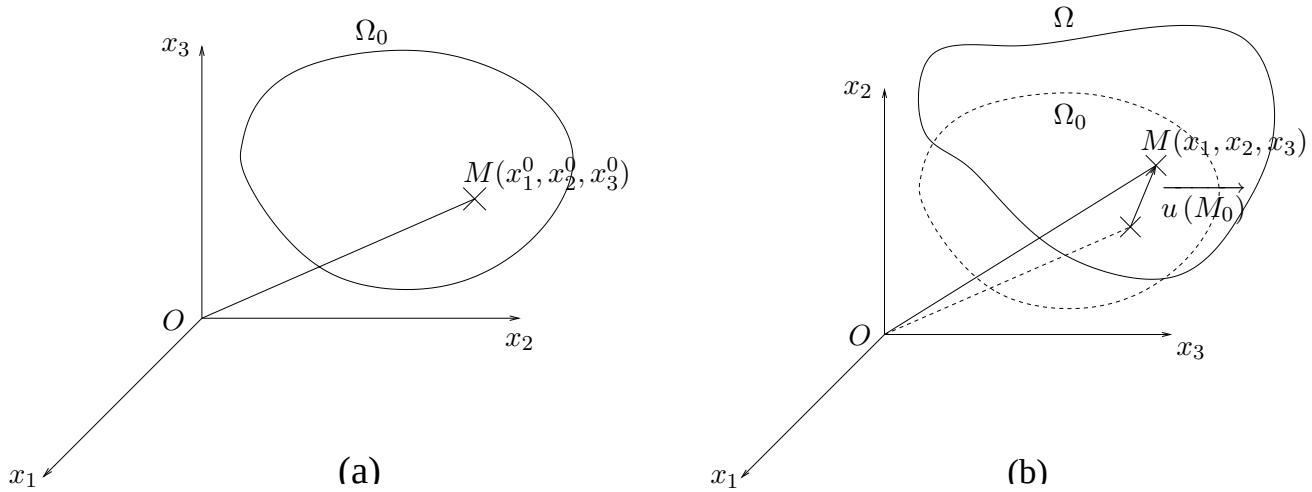


FIG. A.1. L'état de référence (a) et l'état déformé (b).

À chaque point du volume initial M_0 de coordonnées (x_1^0, x_2^0, x_3^0) (par rapport à un système d'axes fixes x_1, x_2, x_3), on peut associer le point correspondant M de coordonnées (x_1, x_2, x_3), après transformation. On dispose donc de la transformation qui à M_0 associe M. Si on note

$$ \overrightarrow{u\,(M_0)} = \overrightarrow{M_0M}, $$

on a donc un champ de vecteur (application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$).

Cette application est appelée transformation finie d'un volume.

On notera par abus de notation $\overrightarrow{u}$ au lieu de $\overrightarrow{u\,(M_0)}$. Si $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ désignent les vecteurs (orthonormés) de base liés au repère x_1, x_2, x_3, on pose

$$ \boxed{\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2} + u_3\overrightarrow{e_3}.} \tag{A.1} $$

DÉFINITION A.1. Le champ de vecteur $\overrightarrow{u}$ est appelé champ de déplacements (associé à la transformation finie du volume Ω).

A.3. Le tenseur des déformations

Puisque $\overrightarrow{u}$ dépend de (x_1^0, x_2^0, x_3^0), on considère les neuf dérivées partielles $\partial u_i/\partial x_j^0$ (pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$).

DÉFINITION A.2. Dans toute la suite, nous noterons l'opérateur de dérivation $\partial/\partial x_j^0$ par ∂_j.

On pose

$$\boxed{\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right).} \tag{A.2}$$

DÉFINITION A.3. ε est appelé tenseur des déformations.

Un tenseur d'ordre deux (car deux indices) est en fait similaire à une matrice. Le tenseur des déformations est symétrique (car $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$).

Attention, dans les équations (A.1) et (A.2), on n'a plus écrit la dépendance en x_1^0, x_2^0, x_3^0, qu'il ne faut pas oublier.

Parfois, on notera aussi, à la place de (A.2),

$$\varepsilon_{ij}\left(\overrightarrow{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right),$$

pour traduire le fait que ε dépend du champ de déplacement $\overrightarrow{u}$.

DÉFINITION A.4. On dira qu'on est en présence d'une petite déformation si et seulement si toutes les dérivées partielles sont petites devant l'unité :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad |\partial_i u_j| \ll 1.$$

REMARQUE A.5. En petites déformations, on a les différentes propriétés suivantes :

– Les points M et M_0 sont «très voisins» et on pourra écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

– Le tenseur des déformations dépend linéairement du champ $\overrightarrow{u}$, ce qui s'écrit, pour tout couple de champs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et pour tout couple de scalaires (α, β)

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad \varepsilon_{ij}\left(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}\right) = \alpha\varepsilon_{ij}\left(\overrightarrow{u}\right) + \beta\varepsilon_{ij}\left(\overrightarrow{v}\right).$$

– On peut confondre les variables d'Euler et de Lagrange.

REMARQUE A.6. Outre ces trois propriétés, l'hypothèse des petites déformations simplifiera énormément la théorie générale.

Cette hypothèse des petites déformations sera aussi faite en RDM.

Donnons maintenant deux propriétés importantes du tenseur de déformation, qui permet de connaître les variations de longueur (dilatations) et les variations d'angles (distorsions).

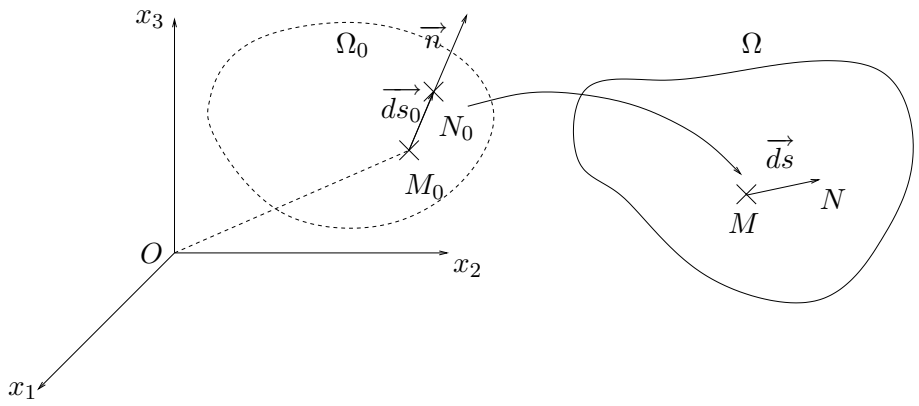


FIG. A.2. Interprétation des variations de longueurs.

A.3.1. Les variations de longueurs : dilatations

On considère un point M_0 dans la configuration initiale et le point associé M en configuration déformée. On considère N_0 un point «infiniment voisin» de M_0 et le point N associé (cf. figure A.2). On pose

$$\overrightarrow{ds_0} = \overrightarrow{M_0N_0}$$

et

$$\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{MN}.$$

On définit $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire de direction $\overrightarrow{ds_0}$.

On définit $\varepsilon(\overrightarrow{n})$ la «dilatation dans la direction $\overrightarrow{n}$» (à ne pas confondre avec la déformation) par :

$$ds = ds_0\,(1 + \varepsilon(\overrightarrow{n}))\,.$$

On montre alors que

$$\varepsilon(\overrightarrow{n}) = \frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2}.$$

et qu'en petites déformations[1] [2]

$$\boxed{\varepsilon(\overrightarrow{n}) = \varepsilon_{ij} n_i n_j} \tag{A.3}$$

Si on note $[\varepsilon]$ le tenseur symétrique des déformations

$$\boxed{[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},}$$

alors (A.3) s'écrit

$$\boxed{\varepsilon(\overrightarrow{n}) = {}^t\overrightarrow{n}\,[\varepsilon]\,\overrightarrow{n}.}$$

[1] avec la notation d'Einstein

[2] Sans cette convention, il faudrait écrire, de manière plus lourde :

$$\varepsilon(\overrightarrow{n}) = \sum_{1 \le i,j \le 3} \varepsilon_{ij} n_i n_j.$$

Si on choisit $n = \overrightarrow{e_1}$, on vérifie que

$$\varepsilon\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \varepsilon_{11}.$$

De même,

$$\varepsilon\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \varepsilon_{33}.$$

REMARQUE A.7. Ainsi, le tenseur de déformation permet donc de calculer la variation relative du carré de la longueur d'un vecteur infiniment petit d'orientation quelconque autour de M_0.

Plus précisément, les termes diagonaux du tenseur des déformations sont les dilatations dans les directions des axes de référence.

A.3.2. Les variations d'angle : distorsions

Avec les notations précédentes, on choisit maintenant deux vecteurs ds_0 et ds_0' orthogonaux et $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ les deux vecteurs unitaires associés (cf. figure A.3)

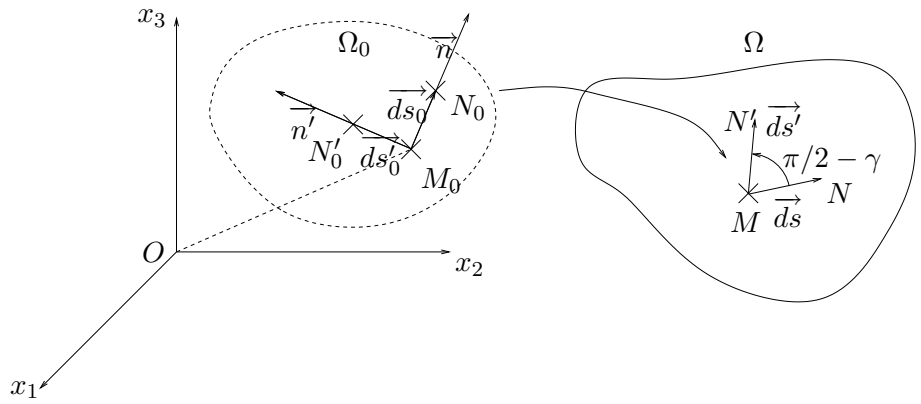


FIG. A.3. Interprétation des variations d'angle.

Soit $\pi/2 - \gamma$ l'angle entre les deux vecteurs transformés. $\gamma\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'}\right)$ est appelé la distorsion entre les directions $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

On montre alors qu'en petites déformations[3],

$$\boxed{\frac{1}{2}\gamma\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'}\right) = \varepsilon_{ij} n_i n_j' = \varepsilon\left(\overrightarrow{n}\right) = {}^t\overrightarrow{n}\,[\varepsilon]\,\overrightarrow{n'}.}$$

Si on choisit $n = \overrightarrow{e_1}$ et $n' = \overrightarrow{e_2}$ on vérifie que

$$\frac{1}{2}\gamma\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right) = \varepsilon_{12}.$$

REMARQUE A.8. Ainsi, le tenseur de déformation permet donc de calculer la variation d'angle entre deux vecteurs initialement orthogonaux.

Plus précisément, les termes non diagonaux du tenseur des déformations sont les semi-distorsion entre les directions des axes de référence pris deux à deux.

REMARQUE A.9. Chacun des coefficients ε_{ij} du tenseur des déformations ne dépend que du point où l'on se place et du repère.

[3] avec la notation d'Einstein

A.4. Le tenseur des contraintes

On considère un solide occupant un volume Ω de l'espace et un point M de ce volume (cf. figure A.4).

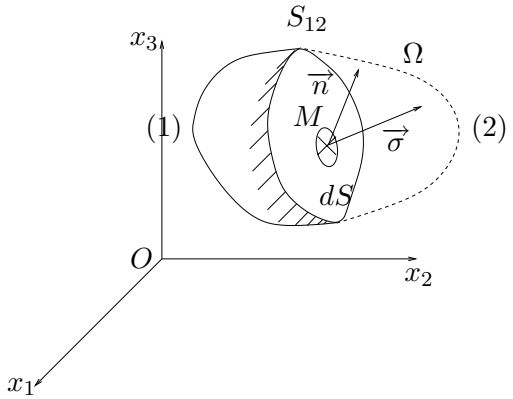


FIG. A.4. Définition du vecteur contrainte.

On coupe le milieu en deux parties (1) et (2) par une surface arbitraire plane S_{12} passant par M. dS est une surface infinitésimale de S_{12}, dirigée par le vecteur unitaire extérieur $\overrightarrow{n}$.

DÉFINITION A.10. Sur la surface dS s'exerce une force infinitésimale $\overrightarrow{df}$ (action de (1) sur (2)). On admet que, lorsque dS tend vers zéro, le rapport $\overrightarrow{df}/dS$ tend vers une limite $\overrightarrow{\sigma}$, appelé vecteur contrainte, associé à $(M, \overrightarrow{n})$. On note donc

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{\sigma}\,(M, \overrightarrow{n})\,.}$$

Ce vecteur dépend de M et de $\overrightarrow{n}$.

D'après le principe d'action et de réaction

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}\left(M, \overrightarrow{-n}\right) = -\overrightarrow{\sigma}\,(M, \overrightarrow{n})\,.}$$

On peut montrer que l'on peut définir le tenseur des contraintes de la façon suivante :

DÉFINITION A.11. Si la facette dS est orientée par le vecteur unitaire extérieur $\overrightarrow{n}$, il existe un tenseur d'ordre deux, noté $[\sigma]$ tel que le vecteur contrainte reçu par cette facette est égal à

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma} = [\sigma]\,\overrightarrow{n}\,.} \tag{A.4}$$

On pourra consulter le chapitre 2 pour l'étude de cette équation par le cercle de Mohr.

Si on note σ_{ij} les composantes du torseur $[\sigma]$, soit

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

σ_i les composantes du vecteur contrainte $\overrightarrow{\sigma}$ et n_i les composantes du vecteur $\overrightarrow{n}$, l'équation (A.4) peut se réécrire [4],

$$\boxed{\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \sigma_i\,(M, \overrightarrow{n}) = \sigma_{ij} n_j.}$$

[4] avec la notation d'Einstein

On peut maintenant interpréter le tenseur de contraintes. On considère une particule parallélépipédique infinitésimale de centre M, dont les facettes sont dirigées par les axes x_i, $1 \leq i \leq 3$, (cf. figure A.5).

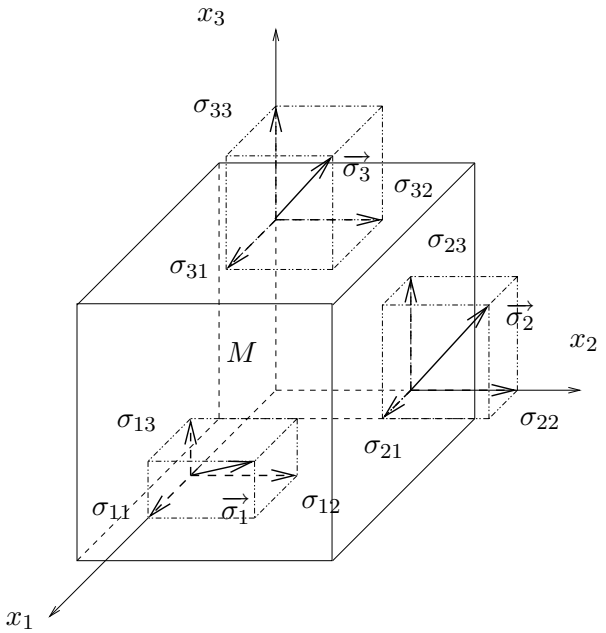


FIG. A.5. Interprétation du tenseur des contraintes.

Soient $\overrightarrow{\sigma_i}$ $(1 \leq i \leq 3)$ les vecteurs contraintes sur les facettes de normales extérieures $\overrightarrow{e_i}$ $(1 \leq i \leq 3)$. Alors, on a les neuf composantes des contraintes définies par

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad \sigma_{ij} = \overrightarrow{\sigma_i}.\overrightarrow{e_j}$$

Dans σ_{ij}, le premier indice est celui de la normale à la facette et le second est celui de la direction sur laquelle on projette la contrainte.

REMARQUE A.12. Par exemple, σ_{11} représente la projection sur l'axe 1 de la contrainte reçue par la facette de normale $\overrightarrow{e_1}$; σ_{12} représente la projection sur l'axe 2 de la contrainte reçue par la facette de normale $\overrightarrow{e_1}$ et σ_{13} représente la projection sur l'axe 3 de la contrainte reçue par la facette de normale $\overrightarrow{e_1}$.

Ainsi, les termes diagonaux du tenseur des contraintes correspondent à des contraintes normales (qui compriment ou tirent sur la facette). Les termes non diagonaux correspondent à des contraintes tangentielles (qui font «glisser» la facette concernée).

On peut montrer la propriété suivante :

PROPOSITION A.13. *Le tenseur des contraintes est symétrique (i.e. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).*

REMARQUE A.14. Chacun des coefficients σ_{ij} du tenseur des contraintes ne dépend que du point où l'on se place et du repère.

A.5. Les directions principales des déformations et des contraintes

On a vu que les tenseurs de contraintes et des déformations sont symétriques. Les matrices associées, symétriques réelles, sont donc diagonalisables. Ainsi, pour chacun des deux tenseurs, il existe un repère orthonormé dans lesquels ces tenseurs sont diagonaux (ces repères sont définis par une rotation des axes x_i). Ces directions sont appelées directions principales (pour les contraintes et pour les déformations).

Ainsi, dans le repère principal pour les déformations, on a

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que les angles droits entre les nouveaux axes sont conservés (puisque toutes les distorsions sont nulles).

Dans le repère principal pour les contraintes, on a

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que les nouvelles facettes ne sont soumises qu'à des contraintes normales (puisque toutes les contraintes tangentielles sont nulles).

On peut diagonaliser ces deux tenseurs de façon graphique grâce au cercle de Mohr (cf. chapitre 2, où on étudie le cercle de Mohr pour les contraintes ; la démarche est identique pour le cercle de Mohr des déformations).

Remarque A.15. *A priori* les directions principales pour les contraintes et pour les déformations ne sont pas identiques. Mais on verra que, sous certaines hypothèses en élasticité, elles coïncident, notamment dans le cadre de la section A.6.

A.6. La loi de Hooke

La loi de Hooke traduit l'elasticité linéaire du matériau étudié.

Définition A.16. On dit qu'un matériau est élastique s'il existe un état de référence sans contrainte et si, après déformation, le tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des déformations calculé à partir de cet état de référence.

Définition A.17. On dit qu'un matériau est élastique linéaire si on a effectué une linéarisation de la loi précédente.

Cette linéarisation est légitime en petite déformation.

On peut montrer que, pour un matériaux élastique linéaire sous l'hypothèse des petites déformations

- on peut calculer le champ des contraintes et des déplacements en considérant que les forces sont appliquées ou bien à l'état initial, ou bien à l'état déformé. Plus exactement, on commet une petite erreur, en considérant que les forces appliquées le sont sur l'état initial. Cette hypothèse, toujours faite cette année en RDM (sauf pour l'étude du flambement) est fondamentale et simplifie beaucoup les calculs ;

– il existe une relation linéaire entre les contraintes et les déformations, cette relation dépendant *a priori* des directions dans lesquelles on se place. Cette relation s'appelle la loi de comportement (élastique linéaire) du matériau.

On simplifiera le dernier point en faisant l'hypothèse suivante :

DÉFINITION A.18. On dit qu'un matériau élastique linéaire est isotrope si sa loi de comportement, en un point donné, est indépendante de la direction des axes choisis.

Attention, cette loi ne dépend pas, en un point donné, de la direction des axes choisi, mais dépend *a priori* du point choisi. Si de plus, cette loi ne dépend pas du point, on dira qu'elle est homogène.

On peut montrer que si la loi de comportement est élastique linéaire isotrope, on a la loi de Hooke :

DÉFINITION A.19 (Loi de Hooke). La loi de Hooke est valable pour un matériaux dont la loi de comportement est élastique linéaire isotrope : en tout point, il existe des coefficients λ et μ, dits coefficients de Lamé (qui dépendent de ce point) tels que [5]

$$\boxed{\forall i,j \in \{1,2,3\}, \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},} \tag{A.5}$$

où δ_{ij} est l'indice de Kronecker défini par

$$\boxed{\forall i,j \in \mathbb{N}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}} \tag{A.6}$$

Si on explicite (A.5), on a, par exemple [6],

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{11}, \\ &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33}, \end{aligned}$$

et

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}.$$

On note parfois (A.5) sous forme matricielle dans $\mathbb{R}^6$ (on utilise alors la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformation)

$$S = AE.$$

[5] avec la notation d'Einstein

[6] sans la notation d'Einstein, même si les indices 1, 2 et 3 sont répétés ; cette fois ci, ce ne sont plus des indices muets.

où les vecteurs S et E de $\mathbb{R}^6$ et la matrice A de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ sont définis par

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}.$$

La loi de Hooke peut aussi s'inverser sous la forme [7]

$$\boxed{\forall i,j \in \{1,2,3\}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll}\delta_{ij},} \tag{A.7}$$

où l'on définit ν est le coefficient de Poisson et E le module d'Young, à partir des coefficients de Lamé λ et μ, par

$$\boxed{\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.}$$

On utilise aussi le coefficient G, appelé module de Coulomb et défini par

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}.} \tag{A.8}$$

Il existe les relations suivantes entres ces coefficients :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Concluons cette section, par un rappel sur l'état de contraintes planes, dont on donne la définition :

DÉFINITION A.20. Un champ de contraintes σ_{ij} est plan (parallèlement au plan (x_1, x_2)) si et seulement si σ_{ij} ne dépend que de x_1 et x_2 et si le tenseur $[\sigma]$ s'écrit

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[7] avec la notation d'Einstein

On pourra aussi consulter le chapitre 2, section 2.2, page 39.

Dans ce cas, on peut montrer la proposition suivante :

PROPOSITION A.21. *Pour un état de contraintes planes et si le matériau est élastique linéaire isotrope, alors on a*

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= 0,\\ \varepsilon_{23} &= 0,\\ \varepsilon_{33} &= \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right),\end{aligned}$$

et

$$\boxed{\forall \alpha,\beta \in \{1,2\}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \lambda^* \left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}.} \tag{A.9}$$

où λ et μ désignent les coefficients de Lamé du matériau élastique linéaire et

$$\boxed{\lambda^* = \frac{2\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}.} \tag{A.10}$$

Par analogie avec la loi de Hooke tridimensionnelle (A.5), (A.9) apparaît comme la loi de Hooke bidimensionnelle suivante

$$\boxed{\forall \alpha,\beta \in \{1,2\}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \lambda^* \varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta},} \tag{A.11}$$

où la convention de sommation d'Einstein sera telle que, dans la sommation $\varepsilon_{\gamma\gamma}$, l'indice γ décrit l'ensemble $\{1,2\}$ (et non l'ensemble $\{1,2,3\}$ comme pour (A.5)).

Cette convention est conforme à l'emploi habituel des indices grecs et non latins, pour des sommations dans $\{1,2\}$.

REMARQUE A.22. Cette loi de Hooke sera utilisée en TP, où les mesures d'extensiométrie se font sur la surface libre d'un solide, où le champ de contraintes est plan.

REMARQUE A.23. Il existe aussi un état de déformations planes :

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

qui conduit formellement à une loi de Hooke similaire à (A.11), mais que nous n'évoquerons pas ici.

A.7. Les autres équations de la MMC

Il existe d'autres équations de la MMC, nécessaires pour résoudre, en théorie, un problème complet : il s'agit de l'équation locale de l'équilibre et des conditions aux limites en forces et déplacements, dont on n'a pas besoin pour la RDM (du moins, dans le cadre de l'UV MQ41).

A.8. Récapitulatif

Récapitulons ici tous les termes évoqués dans le titre et les renvois à leur définition.

– élasticité : cf. définition A.16 ;
– élasticité linéaire : cf. définition A.17 ;
– isotrope : cf. définition A.18 ;

– petites déformations : cf. définition A.4.

ANNEXE B

Rappels mathématiques et mécaniques pour l'étude de critères (chapitre 6)

B.1. Quelques rappels sur les tenseurs et les matrices

Cette section est inspirée des pages 81 à 90 et 511 à 513 de [**Dub98**], que l'on pourra consulter.

Nous faisons quelques rappels sur les tenseurs d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^3$ que nous assimilerons à des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; cet abus de notations n'est pas nuisible à la compréhension de quelques rappels faits.

DÉFINITION B.1. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, nous appelons $\widetilde{A}$, le déviateur à trace nulle de A défini par

$$\boxed{\widetilde{A} = A - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(A)\,I,} \tag{B.1}$$

où I désigne l'identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

PROPOSITION B.2. *Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la trace de $\widetilde{A}$ est nulle et A se décompose sous la forme*

$$\boxed{A = \widetilde{A} + \frac{1}{3}tr\,(A)\,I.} \tag{B.2}$$

DÉMONSTRATION. L'équation (B.2) est naturellement équivalente à (B.1). La trace de $\widetilde{A}$ est égale à

$$\mathrm{tr}\,\widetilde{A} = \mathrm{tr}\,\left(A - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(A)\,I\right) = \mathrm{tr}\,(A) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(A)\mathrm{tr}\,(I) = 0.$$

□

REMARQUE B.3. En anticipant sur les résultats (6.23) et (B.6), on peut donner un sens physique au déviateur à trace nulle. Si on applique (B.2) au tenseur des déformations $[\varepsilon]$, on a, en petites déformations,

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_1] + [\varepsilon_2],$$

où

$$[\varepsilon_1] = \frac{1}{3}\frac{dV - dV_0}{dV_0} I \text{ et } \mathrm{tr}\,([\varepsilon_2]) = \mathrm{tr}\,([\widetilde{\varepsilon}]) = 0.$$

Ainsi, $[\varepsilon_1]$ correspond à une déformation uniquement normale et $[\varepsilon_2]$ correspond à une déformation à variation de volume nulle, qui ne met en jeu que des distortions.

Si on applique (B.2) au tenseur des contraintes $[\sigma]$, on a

$$[\sigma] = [\sigma_1] + [\sigma_2],$$

où

$$[\sigma_1] = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,([\sigma])\,I \text{ et } \mathrm{tr}\,([\sigma_2]) = \mathrm{tr}\,([\widetilde{\sigma}]) = 0.$$

Si on utilise la loi de Hooke (A.5), on a selon (6.23),

$$\text{tr }([\sigma_1]) = \text{tr }([\sigma]) = (3\lambda + 2\mu)\text{tr }([\varepsilon]) = (3\lambda + 2\mu)\frac{dV - dV_0}{dV_0},$$

et, d'après (B.6),

$$\text{tr }([\sigma_2]) = \text{tr }([\widetilde{\sigma}]) = 2\mu\text{tr }([\widetilde{\varepsilon}]) = 0.$$

Ainsi, $[\sigma_1]$ correspond à un tenseur de contraintes équivalent à un état de pression hydrostatique (voir chapitre 2, section 2.1.3) et $[\sigma_2]$ correspond à un état de contrainte associé à une déformation à volume nulle.

Pour toute cette annexe, nous utilisons la notation indicielle d'Einstein (voir annexe A, section A.1).

DÉFINITION B.4. Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ et $(b_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on appelle le produit contracté de A et de B le scalaire défini et noté selon

$$\boxed{A : B = a_{ij}b_{ij}.} \tag{B.3}$$

PROPOSITION B.5. *Pour toute matrice symétrique A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a*

$$\boxed{A : A = tr\left(A^2\right).} \tag{B.4}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de comparer les deux termes, en utilisant la convention d'Einstein. On a

$$A : A = a_{ij}a_{ij},$$

et

$$\text{tr }\left(A^2\right) = \text{tr }\left(\left(a_{ik}a_{kj}\right)_{1\leq i,j\leq 3}\right) = a_{ik}a_{ki} = a_{ik}a_{ik} = A : A.$$

□

B.2. Preuve de quelques résultats énergétiques du chapitre 6

Dans toute cette section, on suppose que l'on fait l'hypothèse des petites déformations et de la loi élastique linéaire (voir loi de Hooke (A.5), de l'annexe A).

DÉMONSTRATION DE L'ÉGALITÉ (6.22). D'après (6.21) et (B.2), on a successivement :

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \frac{1}{2}[\sigma] : [\varepsilon],\\ &= \frac{1}{2}\left([\widetilde{\sigma}] + \frac{1}{3}\text{tr }([\sigma])\, I\right) : \left([\widetilde{\varepsilon}] + \frac{1}{3}\text{tr }([\varepsilon])\, I\right),\end{aligned}$$

et puisque le produit contracté : est linéaire

$$= \frac{1}{2}\left([\widetilde{\sigma}] : [\widetilde{\varepsilon}] + \frac{1}{3}\text{tr }([\sigma])\, I : [\widetilde{\varepsilon}] + \frac{1}{3}\text{tr }([\varepsilon])\, I : [\widetilde{\sigma}] + \frac{1}{9}\left(\text{tr }([\sigma])\text{tr }([\varepsilon])\right)(I : I)\right).$$

Puisque la trace de $[\widetilde{\varepsilon}]$ et $[\widetilde{\sigma}]$ sont nulles, on a $I : [\widetilde{\varepsilon}] = 0$ et $I : [\widetilde{\sigma}] = 0$. Puisque $I : I = 3$, on a donc

$$\mathcal{W} = \frac{1}{6}\left(\text{tr }([\sigma])\text{tr }([\varepsilon])\right) + \frac{1}{2}[\widetilde{\sigma}] : [\widetilde{\varepsilon}]. \tag{B.5}$$

D'après la loi de Hooke (A.5), on a

$$[\sigma] = \lambda\text{tr }([\varepsilon])I + 2\mu[\varepsilon].$$

Ainsi, il vient successivement

$$\begin{aligned}[\widetilde{\sigma}] &= [\sigma] - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,([\sigma])\,I \\ &= \lambda \mathrm{tr}\,([\varepsilon])I + 2\mu[\varepsilon] - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\ (\lambda \mathrm{tr}\,([\varepsilon])I + 2\mu[\varepsilon])\,I, \\ &= 2\mu\left([\varepsilon] - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\ ([\varepsilon])\,I\right),\end{aligned}$$

soit

$$[\widetilde{\sigma}] = 2\mu[\widetilde{\varepsilon}]. \tag{B.6}$$

Ainsi, selon (B.5), on a donc

$$\mathcal{W} = \frac{1}{6}\left(\mathrm{tr}\,([\sigma])\mathrm{tr}\,([\varepsilon])\right) + \frac{1}{4\mu}[\widetilde{\sigma}] : [\widetilde{\sigma}],$$

et donc, selon (B.4), on a

$$\mathcal{W} = \frac{1}{6}\left(\mathrm{tr}\,([\sigma])\mathrm{tr}\,([\varepsilon])\right) + \frac{1}{4\mu}\mathrm{tr}\ \left([\widetilde{\sigma}]^2\right), \tag{B.7}$$

ce qui est (6.22). □

Démonstration de l'égalité (6.23). Si on considère un repère orthonormé formé de trois vecteurs, selon (A.3), on peut écrire que la variation de chacune des longueurs de ces trois vecteurs est égale à

$$\begin{aligned} dl_1 &= dx\varepsilon_{11}, \\ dl_2 &= dy\varepsilon_{22}, \\ dl_3 &= dz\varepsilon_{33}.\end{aligned}$$

Le volume initial est égal à

$$dV_0 = dxdydz,$$

et le volume final vaut

$$dV = (dx + dl_1)(dy + dl_2)(dz + dl_3) = dxdydz(1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})(1+\varepsilon_{33}).$$

Ainsi, on a

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} = (1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})(1+\varepsilon_{33}) - 1.$$

En faisant l'hypothèses des petites déformations, selon la définition A.4, on a, en ne conservant que les termes d'ordre 1

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \mathrm{tr}\,([\varepsilon]).$$

ce qui est (6.23). □

Avant de démontrer (6.27), on donne le lemme suivant :

Lemme B.6. *Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ ses valeurs propres. On note $\widetilde{A}$ le déviateur à trace nulle de A. On a :*

$$tr\left(\widetilde{A}^2\right) = tr\left(A^2\right) - \frac{1}{3}(tr\,A)^2 = \frac{2}{3}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1\right). \tag{B.8}$$

DÉMONSTRATION. On écrit par définition

$$\widetilde{A} = A - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(A)\,I$$

et puisque A et I commutent

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^2 &= \left(A - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(A)\,I\right)^2,\\ &= A^2 - \frac{2}{3}\mathrm{tr}\,(A)\,A + \frac{1}{9}(\mathrm{tr}\,(A))^2 I,\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\left(\widetilde{A}^2\right) &= \mathrm{tr}\,\left(A^2\right) - \frac{2}{3}(\mathrm{tr}\,(A))^2 + \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,(A))^2,\\ &= \mathrm{tr}\,\left(A^2\right) - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,(A))^2.\end{aligned}$$

La première égalité de (B.8) est donc démontrée. Pour en démontrer la seconde, remarquons que l'expression ci-dessus constitue un invariant de A, c'est-à-dire qu'elle est indépendante d'un changement de repère. En effet, pour toute couple de matrices (A, B) on a[1]

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)\,. \tag{B.9}$$

Ainsi, si on change de repère par une matrice de changement de passage Q, on a

$$\mathrm{tr}\,\left(Q^{-1}AQ\right) = \mathrm{tr}\,\left(AQQ^{-1}\right) = \mathrm{tr}\,(A)\,. \tag{B.10}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\mathrm{tr}\,\left(\left(Q^{-1}AQ\right)^2\right) = \mathrm{tr}\,\left(Q^{-1}AQQ^{-1}AQ\right) = \mathrm{tr}\,\left(Q^{-1}AAQ\right)$$

et donc en utilisant de nouveau (B.9)

$$\mathrm{tr}\,\left(\left(Q^{-1}AQ\right)^2\right) = \mathrm{tr}\,\left(A^2\right) \tag{B.11}$$

De (B.10) et (B.11), on déduit que

$$\mathrm{tr}\,\left(\left(Q^{-1}AQ\right)^2\right) - \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\,\left(Q^{-1}AQ\right)\right)^2 = \mathrm{tr}\,\left(A^2\right) - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,(A))^2. \tag{B.12}$$

Puisque A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et peut choisir Q telle que

$$Q^{-1}AQ = D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \tag{B.13}$$

On vérifie que

$$\mathrm{tr}\,\left(D^2\right) = \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^2\right) = \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{diag}\left(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\right)\right) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

De même, on vérifie que

$$(\mathrm{tr}\,(D))^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3\lambda_1.$$

[1] On peut démontrer cette égalité en utilisant la convention d'Einstein :

$$\mathrm{tr}\,(AB) = a_{ik}b_{ki} = b_{ik}a_{ki} = \mathrm{tr}\,(BA)\,.$$

Ainsi, d'après (B.12) et (B.13), on a

$$\begin{aligned}\text{tr}\left(A^2\right) - \frac{1}{3}(\text{tr}\,(A))^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \frac{1}{3}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3\lambda_1\right), \\ &= \frac{2}{3}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1\right).\end{aligned}$$

□

Démontrons maintenant (6.27).

Démonstration de (6.27). Selon la définition 6.5 et le choix de la valeur limite (voir section 6.4.2), le critère de Von Mises s'écrit :

$$\frac{1}{4\mu}\text{tr}\,\left([\widetilde{\sigma}]^2\right) < \frac{\sigma_Y^2}{6\mu},$$

C'est-à-dire, d'après le lemme B.6 (appliqué à $[\sigma]$ dont les valeurs propres sont $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$),

$$\frac{1}{4\mu}\left(\frac{2}{3}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right)\right) < \frac{\sigma_Y^2}{6\mu}.$$

Cela est équivalent à

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 < \sigma_Y^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right) < \sigma_Y^2.$$

Cela est donc équivalent à (6.27) (puisque la quantité écrite sous la racine est positive ou nulle). □

B.3. Réduction de coniques (et de quadriques)

On pourra consulter par exemple [**RDO87**] ou [**LFA01**].

Soient n un entier naturel non nul, un réel C et A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On trace dans $\mathbb{R}^n$ la courbe d'équation[2]

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = C, \tag{B.14}$$

où

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = {}^tXAX = {}^t(x_1, ..., x_n)A(x_1, ..., x_n). \tag{B.15}$$

On rappelle que, puisque A est symétrique réelle, elle est diagonalisable : il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et une matrice orthogonale[3] Q telle que

$$D = {}^tQAQ. \tag{B.16}$$

Ainsi, on pose

$$Y = Q^{-1}X, \tag{B.17}$$

et l'équation (B.14) est équivalente à

$${}^t(QY)AQY = C,$$

soit encore

$${}^tYDY = C. \tag{B.18}$$

[2] appelée aussi isovaleur de Φ.

[3] c'est-à-dire vérifiant ${}^tQQ = I$ ou $Q{}^tQ = I$ ou encore ${}^tQ = Q^{-1}$.

Puisque D est diagonale, cela est équivalent à

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = C. \tag{B.19}$$

où

$$Y = {}^t(y_1, ..., y_n). \tag{B.20}$$

La courbe d'équation (B.20) est plus facile à étudier que (B.15). De plus, si le repère initial est orthonormé, alors le nouveau repère (celui dans lequel on définit Y) est lui aussi orthonormal.

Exemple B.7. On étudie dans $\mathbb{R}^2$ la courbe d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = \sigma_Y^2. \tag{B.21}$$

Ici, on a $n = 2$ et

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{B.22}$$

On peut diagonaliser A à la main ou sous matlab. Pour cela, il suffit de taper, par exemple :

```
A=[2 -1;-1 2]/2;
[V,D]=eigs(A);
```

ou encore en symbolique

```
A=sym([2 -1;-1 2]/2);
[V,D]=eig(A);
```

On obtient alors (à une permutation près)

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.23}$$

Ainsi, dans le repère orthonormé lié aux deux bissectrices principales, on obtient une ellipse d'équation

$$\frac{1}{2} y_1^2 + \frac{3}{2} y_2^2 = \sigma_Y^2, \tag{B.24}$$

dont le demi-grand axe est égal à $\sqrt{2}\sigma_Y$ et le demi petit axe est égal à $\sqrt{2/3}\sigma_Y$. On vérifie aussi que cette ellipse passe par les points $(B_i)_{1\leq i\leq 6}$ de coordonnées (définis dans le repère usuel)

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sigma_Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \sigma_Y \\ \sigma_Y \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_Y \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -\sigma_Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} -\sigma_Y \\ -\sigma_Y \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma_Y \end{pmatrix}. \tag{B.25}$$

Exemple B.8. On étudie dans $\mathbb{R}^3$ la courbe d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 = \sigma_Y^2. \tag{B.26}$$

Ici, on a $n = 3$ et

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{B.27}$$

Comme précédemment, on diagonalise A. On trouve alors

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.28}$$

Le nouveau repère est définie par une direction

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{B.29}$$

et deux autres qui lui sont orthogonales. Ainsi, dans le nouveau repère l'équation devient

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}\sigma_Y^2. \tag{B.30}$$

Cette courbe est donc un cylindre de rayon $\sqrt{2/3}\sigma_Y$ et d'axe Δ, droite passant par l'origine et portée par le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$.

B.4. Quelques résultats de comparaison entre les critères de Tresca et de Von Mises

Démonstration du lemme 6.8. Définissons

$$x = \sigma_1 - \sigma_3,$$
$$y = \sigma_2 - \sigma_3.$$

Puisque $x - y = \sigma_1 - \sigma_2$, (6.38) est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-y)^2 + y^2 + x^2} \leq \max\left(|x-y|, |x|, |y|\right).$$

Il nous faut donc démontrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 - xy \leq \max\left(x^2 + y^2 - 2xy, x^2, y^2\right). \tag{B.31}$$

Remarque B.9. On peut constater cela de façon empirique en traçant la fonction définie par

$$\Psi(x, y) = \max\left(x^2, y^2, x^2 + y^2 - 2xy\right) - x^2 - y^2 + xy. \tag{B.32}$$

Voir la figure B.1.

De plus, sur ce graphe, on constate que Ψ est nulle si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = y$.

Pour démontrer (B.31), on considère deux cas.

- Premier cas : $xy \leq 0$

  Alors, on a

  $$x^2 - 2xy + y^2 \geq x^2 + y^2 \geq x^2.$$

  De même, on a

  $$x^2 - 2xy + y^2 \geq y^2.$$

  Ainsi,

  $$\max\left(x^2, y^2, x^2 + y^2 - 2xy\right) = x^2 + y^2 - 2xy,$$

  et (B.31) est équivalent à

  $$x^2 + y^2 - xy \leq x^2 + y^2 - 2xy, \tag{B.33}$$

  équivalent à $xy \leq 0$.

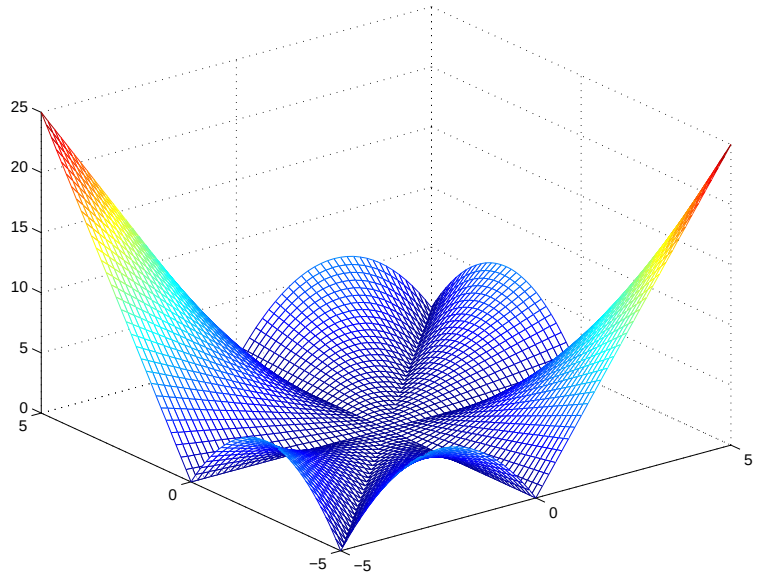


FIG. B.1. tracé de la fonction Ψ sur $[-5,5]^2$

- Second cas : $xy > 0$

  Puisque x et y sont de même signe, on a

$$|x-y| \leq \max\left(|x|,|y|\right),$$

  et donc

$$x^2+y^2-2xy \leq \max\left(x^2,y^2\right),$$

  et d'où

$$\max\left(x^2,y^2,x^2+y^2-2xy\right) = \max\left(x^2,y^2\right).$$

  Ainsi, (B.31) est équivalent à

$$x^2+y^2-xy \leq \max\left(x^2,y^2\right). \tag{B.34}$$

  D'autre part, on peut vérifier que (si $xy>0$)

$$\min\left(x^2,y^2\right) \leq xy, \tag{B.35}$$

  et donc, il vient

$$-xy+\min\left(x^2,y^2\right)+\max\left(x^2,y^2\right) \leq \max\left(x^2,y^2\right).$$

  Puisque

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad \min(a,b)+\max(a,b) = a+b, \tag{B.36}$$

  on a donc

$$-xy+x^2+y^2 \leq \max\left(x^2,y^2\right).$$

□

Avant de démontrer le lemme 6.10, donnons le lemme suivant :

LEMME B.10. *En utilisant les notations* (6.36) *et* (6.37)*, on a pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*,*

$$\left(\sigma_{eq}^{T}(x, y, 0) = \sigma_{eq}^{VM}(x, y, 0)\right) \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } x = y. \tag{B.37}$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat a déjà été observé dans la remarque B.9.

On laisse au lecteur le sens de la droite vers la gauche. Démontrons l'autre sens, en réutilisant la preuve du lemme 6.8. Si $xy \leq 0$, on a alors, d'après (B.33), $xy = 0$ d'où $x = 0$ ou $y = 0$. Si $xy > 0$, on a alors

$$\max\left(x^2, y^2\right) = x^2 + y^2 - xy,$$

et donc, en réutilisant (B.36),

$$\max\left(x^2, y^2\right) = \min\left(x^2, y^2\right) + \max\left(x^2, y^2\right) - xy,$$

ce qui implique

$$\min\left(x^2, y^2\right) = xy.$$

On vérifie que cela implique que $x = y$. □

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.10. La preuve de (6.42) implique (6.41) est laissée au lecteur.

Démontrons l'autre sens. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\sigma_3 = 0$ et montrer que

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, 0) = \sigma_Y \text{ et } \sigma_{\text{eq}}^{T}(\sigma_1, \sigma_2, 0) = \sigma_Y \tag{B.38}$$

implique

$$\exists \sigma \in \mathbb{R}, \quad \exists i \in \{1, ..., 6\}, \quad \sigma_1 = x_{A_i}, \quad \sigma_2 = y_{A_i}. \tag{B.39}$$

D'après le lemme B.10, (B.38) implique que $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_2 = 0$ ou $\sigma_1 = \sigma_2$. On conclut en remarquant que l'intersection de la frontière de D^T avec ces points correspond aux sommets de l'hexagone de Tresca. □

Cinquième partie

Annexes facultatives

Dans cette partie se trouvent des annexes facultatives, qui contiennent des compléments, non traités en cours.

ANNEXE C

Démonstration de l'équilibre local pour les poutres planes

C.1. Rappels sur la courbure, le rayon de courbure et le repère de Frenet

Pour plus de compléments, le lecteur pourra consulter [**AF90**] ou [**LFA01**].

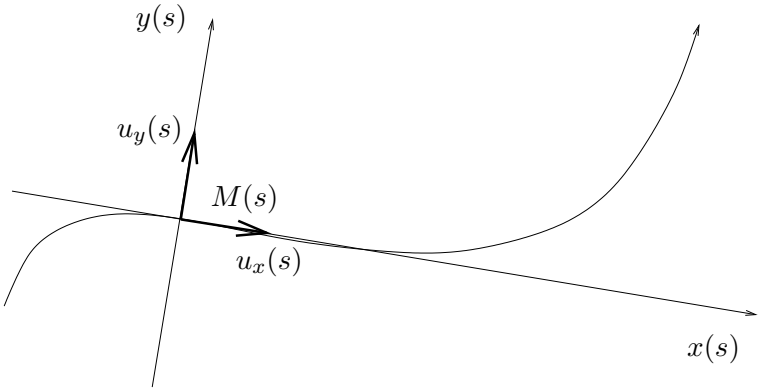


FIG. C.1. Une courbe paramétrée

Soit O l'origine du plan.

On se donne une courbe plane paramétrée, c'est-à-dire définie par un paramétrage[1] $t \in I$ (I intervalle de $\mathbb{R}$), $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big) = OM(t)$. Soit $t \mapsto s(t)$ une abscisse curviligne.

Pour toute la suite, on suppose que la courbe est paramétrée par s.

Le vecteur unitaire tangent en un point $M(s)$ de cette courbe est donné par

$$u_x(s) = \frac{dOM(s)}{ds}. \tag{C.1}$$

On appelle $u_y(s)$ le vecteur unitaire déduit de $u_x(s)$ par une rotation de $\pi/2$.

Le repère $\big(M(s), u_x(s), u_y(s)\big)$ est appelé repère de Frenet en le paramètre s.

Il existe un unique nombre, appelé courbure algébrique associée à la courbe paramétrée et noté $\rho(s)$ tel que

$$\frac{du_x(s)}{ds} = \rho(s) u_y(s). \tag{C.2}$$

On a aussi

$$\frac{du_y(s)}{ds} = -\rho(s) u_x(s). \tag{C.3}$$

[1] supposé suffisamment régulier, c'est-à-dire suffisamment dérivable.

On note[2]

$$R(s) = \frac{1}{\rho(s)}. \tag{C.4}$$

Ce nombre est appelé rayon de courbure.

Avec ces notations, on réécrit les équations (C.2) et (C.3) sous la forme des formules de Frenet :

$$\frac{du_x(s)}{ds} = \frac{1}{R(s)}\, u_y(s), \tag{C.5a}$$

$$\frac{du_y(s)}{ds} = -\frac{1}{R(s)}\, u_x(s). \tag{C.5b}$$

REMARQUE C.1. Dans l'espace, on a des formules analogues en introduisant la notion de torsion. On pourra par exemple consulter **[LFA01]** pour les formules de Frenet dans l'espace.

EXEMPLE C.2. Pour un segment de droite, une abscisse curviligne est

$$s = s_0 + x, \tag{C.6}$$

où x désigne l'abscisse le long du segment de droite.

Le rayon de courbure est constant et infini :

$$R(s) = +\infty. \tag{C.7}$$

EXEMPLE C.3. Pour une portion de cercle de centre $\Omega = (x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon R, le paramétrage est défini par

$$x(t) = R\cos t + x_\Omega,$$
$$x(t) = R\sin t + y_\Omega.$$

Une abscisse curviligne est

$$s = s_0 + R\theta. \tag{C.8}$$

Le rayon de courbure est constant :

$$R(s) = R. \tag{C.9}$$

C.2. Démonstration de la proposition 1.9

On rappelle que, conformément au chapitre 1, la fibre moyenne d'une poutre plane est paramétrée par une abscisse curviligne et les résultat de la section C.1 s'appliquent avec $M(s) = G(s)$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.9. Démontrons les trois équations (1.18).

Ces trois relations ne font que traduire l'équilibre d'une portion élémentaire de poutre délimitée par $G(s)$ et $G(s + ds)$ (voir figure 1.12, page 16 du chapitre 1).

En vertu de la remarque 1.11 page 17 du chapitre 1, on peut supposer que cette portion de poutre est soumise à aucune force ponctuelle, ni aucun couple ponctuel. En revanche, avec les notations (1.16), cette portion élémentaire de poutre, est soumise, à une force infinitésimale $\overrightarrow{df}$ et à un couple infinitésimal $\overrightarrow{dC}$ vérifiant (1.17a) et (1.17b) (voir page 16).

On pose

$$\overrightarrow{F(s)} = q(s)u_x(s) + p(s)u_y(s). \tag{C.10}$$

[2] si ce nombre existe.

Ainsi, selon (1.17a), on a

$$\overrightarrow{df} = \overrightarrow{F(s)}ds. \tag{C.11}$$

D'après le principe d'action et de réaction, la partie en amont de la portion de poutre comprise entre les points $G(s)$ et $G(s+ds)$, exerce sur cette portion de poutre l'effort (voir définition 1.3 page 5).

$$-\overrightarrow{R_{G(s)}} \tag{C.12}$$

La partie en aval de cette portion de poutre exerce sur cette portion de poutre l'effort

$$\overrightarrow{R_{G(s+ds)}} \tag{C.13}$$

Le milieu extérieur exerce sur cette portion de poutre l'effort

$$\overrightarrow{F(s)}ds. \tag{C.14}$$

Ainsi, compte tenu de (C.12), (C.13) et (C.14), l'équilibre fournit l'équation

$$-\overrightarrow{R_{G(s)}} + \overrightarrow{R_{G(s+ds)}} + \overrightarrow{F(s)}ds = 0. \tag{C.15}$$

On ne conserve maintenant que les termes du premier ordre en ds, c'est-à-dire, pour une fonction scalaire ou vectorielle $f(s)$:

$$f(s+ds) \approx f(s) + \frac{df}{ds}ds. \tag{C.16}$$

Ainsi, on a

$$\overrightarrow{R_{G(s+ds)}} = \overrightarrow{R_{G(s)}} + \frac{d\overrightarrow{R_{G(s)}}}{ds}ds, \tag{C.17}$$

et (C.15) s'écrit

$$\frac{d\overrightarrow{R_{G(s)}}}{ds} + \overrightarrow{F(s)} = 0. \tag{C.18}$$

Explicitons maintenant les différentes composantes de (C.18) sur $u_x(s)$ et $u_y(s)$. Pour une poutre plane, selon (1.1) page 5, on a

$$\overrightarrow{R_{G(s)}} = N(s)u_x(s) + T(s)u_y(s),$$

et donc

$$\frac{d\overrightarrow{R_{G(s)}}}{ds} = \frac{dN(s)}{ds}u_x(s) + N(s)\frac{du_x(s)}{ds} + \frac{dT(s)}{ds}u_y(s) + T(s)\frac{du_y(s)}{ds}. \tag{C.19}$$

D'après les formules de Frenet (C.5), l'équation (C.19) est équivalente à :

$$\frac{d\overrightarrow{R_{G(s)}}}{ds} = \frac{dN(s)}{ds}u_x(s) + \frac{N(s)}{R(s)}u_y(s) + \frac{dT(s)}{ds}u_y(s) - \frac{T(s)}{R(s)}u_x(s). \tag{C.20}$$

D'après (C.10) et (C.20), l'équation (C.18) est équivalente à

$$\frac{dN(s)}{ds}u_x(s) + \frac{N(s)}{R(s)}u_y(s) + \frac{dT(s)}{ds}u_y(s) - \frac{T(s)}{R(s)}u_x(s) + q(s)u_x(s) + p(s)u_y(s) = 0, \tag{C.21}$$

ce qui donne, en projetant sur $u_x(s)$ et sur $u_y(s)$, les deux équations

$$\frac{dN(s)}{ds} - \frac{T(s)}{R(s)} + q(s) = 0,$$
$$\frac{dT(s)}{ds} + \frac{N(s)}{R(s)} + p(s) = 0.$$

Ces deux équations ne sont autres que (1.18a) et (1.18b).

De même, faisons le bilan des couples exercés sur la portion de poutre comprise entre les points $G(s)$ et $G(s+ds)$ et calculés par rapport au point $G(s+ds)$:

$$\overrightarrow{G(s+ds)G(s)} \wedge \Big(-N(s)u_x(s) - T(s)u_y(s)\Big) + \Big(M(s+ds) - M(s)\Big)u_z + m(s)u_z ds + d\mathcal{Q}_1(s) + d\mathcal{Q}_2(s) = 0,$$

où $d\mathcal{Q}_1(s)$ et $d\mathcal{Q}_2(s)$ désignent respectivement les moments élémentaires des densités linéaires de force $q(s)$ et $p(s)$; $d\mathcal{Q}_1(s)$ et $d\mathcal{Q}_2(s)$ sont nécessairement d'ordre deux en ds, puisque le bras de levier est proportionnel à ds et les forces élémentaires sont aussi proportionnelles à ds. On peut donc négliger d'emblée ces termes et on obtient donc

$$\overrightarrow{G(s+ds)G(s)} \wedge \Big(-N(s)u_x(s) - T(s)u_y(s)\Big) + \Big(M(s+ds) - M(s)\Big)u_z + m(s)u_z ds = 0. \quad \text{(C.22)}$$

Au premier ordre en ds, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G(s)G(s+ds)} &= \overrightarrow{OG(s+ds)} - \overrightarrow{OG(s)} \\ &= ds\,\frac{d}{ds}\overrightarrow{OG(s)},\end{aligned}$$

et, selon (C.1) appliqué à $M(s) = G(s)$, on a donc

$$\overrightarrow{G(s)G(s+ds)} = u_x(s)ds. \quad \text{(C.23)}$$

Au premier ordre en ds, on a

$$M(s+ds) - M(s) = ds\,\frac{dM(s)}{ds}. \quad \text{(C.24)}$$

Ainsi, selon (C.22), (C.23) et (C.24), il vient

$$ds\,\left(u_x(s) \wedge \Big(N(s)u_x(s) + T(s)u_y(s)\Big) + \frac{dM(s)}{ds}u_z + m(s)u_z\right) = 0,$$

ce qui implique

$$T(s)u_x(s) \wedge u_y(s) + \frac{dM(s)}{ds}u_z + m(s)u_z = 0,$$

soit

$$\frac{dM(s)}{ds} + T(s) + m(s) = 0,$$

ce qui n'est autre que (1.18c). □

C.3. Démonstration de la proposition 1.12

On donne deux preuves différentes de cette proposition ; l'une est mécanique, l'autre mathématique et repose sur les équations d'équilibre (1.18).

Première démonstration de la proposition 1.12. Si on isole la section de la poutre correspondant à l'absicsse s_0, on constate que la somme des forces appliquées à cette section est égale à

$$\big(N(s_0+0) - N(s_0-0) + N_0\big)u_x(s_0) + \big(T(s_0+0) - T(s_0-0) + T_0\big)u_y(s_0)$$

Cette section est en équilibre et la nullité de ce vecteur fournit donc (1.21a) et (1.21b). L'égalité (1.21c) s'obtient en écrivant l'équilibre des moments. □

Seconde démonstration de la proposition 1.12. Puisque l'équation (C.18) n'est valable qu'en dehors des points d'application de forces et couple ponctuel, on peut donc écrire :

$$\forall s \in]s_1, s_0[, \quad \frac{d\overrightarrow{R_{G(s)}}}{ds} + \overrightarrow{F(s)} = 0, \tag{C.25a}$$

$$\forall s \in]s_0, s_2[, \quad \frac{d\overrightarrow{R_{G(s)}}}{ds} + \overrightarrow{F(s)} = 0. \tag{C.25b}$$

Nous allons étudier maintenant l'équation différentielle (C.25) au sens des distributions et en introduisant des fonctions Dirac et Heaviside (voir UV MT41 ou annexe F). Au sens des distributions, une force ponctuelle est modélisée par un Dirac et les équations (C.25) s'écrivent sur tout l'intervalle $]s_1, s_2[$

$$\forall s \in]s_1, s_2[, \quad \frac{d\overrightarrow{R_{G(s)}}}{ds} + \overrightarrow{F(s)} = 0. \tag{C.26}$$

Cela est vrai à condition d'écrire que la densité linéaire de force $\overrightarrow{df}$ (voir équation (1.17a)) soit égale à

$$\overrightarrow{df} = \big(q(s)u_x(s) + p(s)u_y(s)\big)ds \tag{C.27}$$

où

$$q(s) = N_0\delta_{s_0} \tag{C.28}$$

$$p(s) = T_0\delta_{s_0}. \tag{C.29}$$

Ici δ_{s_0} est la «fonction» Dirac[3] ; voir annexe F. Dans ce cas, on a, selon (C.11),

$$\overrightarrow{F(s)} = \frac{\overrightarrow{df}}{ds} = N_0\delta_{s_0}u_x(s) + T_0\delta_{s_0}u_y(s). \tag{C.30}$$

Vérifions que la solution de (C.26) est donnée par

$$\overrightarrow{R_{G(s)}} = -H(s - s_0)\begin{pmatrix} N_0u_x(s_0) \\ T_0u_y(s_0) \end{pmatrix}, \tag{C.31}$$

où H est la «fonction» de Heaviside (voir UV MT41 ou annexe F). En dérivant (C.31), il vient

$$\frac{d}{ds}\left(\overrightarrow{R_{G(s)}}\right) = -\begin{pmatrix} N_0u_x(s_0) \\ T_0u_y(s_0) \end{pmatrix}\frac{dH(s - s_0)}{ds} = -\begin{pmatrix} N_0u_x(s_0) \\ T_0u_y(s_0) \end{pmatrix}\delta_{s_0},$$

et donc, selon (C.30), l'équation (C.26) est vérifiée. Si on considère maintenant $\overrightarrow{R_{G(s)}}$ comme une fonction, on a alors, selon (C.31), puisque en s_0, les vecteurs u_x et u_y sont continus,

$$\overrightarrow{R_{G(s_0+0)}} - \overrightarrow{R_{G(s_0-0)}} = -\begin{pmatrix} N_0u_x(s_0) \\ T_0u_y(s_0) \end{pmatrix}\big(H(0+0) - H(0-0)\big) = -\begin{pmatrix} N_0u_x(s_0) \\ T_0u_y(s_0) \end{pmatrix}$$

ce qui en décomposant sur u_x et u_y fournit (1.21a) et (1.21b). L'équation (1.21c) s'obtiendrait de la même façon. □

[3] qui est en fait une distribution.

ANNEXE D

Rappels des formules de Bresse

Les équations rappelées ici sont utilisées dans la section 1.7 du chapitre 1.

Ces formules proviennent de l'intégration le long d'une partie d'une poutre des relations qui lient contraintes et déformations (loi de Hooke). Seuls les résultats sont rappelés ici.

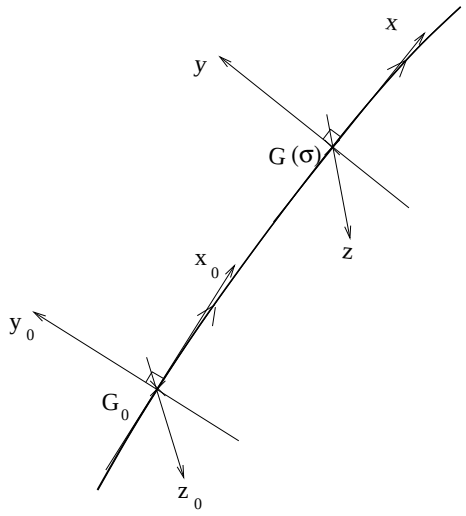


FIG. D.1. Déplacement des fibres pour une poutre tridimensionnelle.

On considère une poutre tridimensionnelle (cf. figure D.1). La section droite de centre $G(s)$ (s est l'abscisse curviligne du point G le long de la fibre moyenne) a subi une translation relative (par rapport à son état au repos) définie par le vecteur $\overrightarrow{\lambda}(s)$ et une rotation relative définie par le vecteur $\overrightarrow{\omega}(s)$; on montre que sous une sollicitation quelconque, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\lambda}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{N}{ES} \\ \dfrac{T_y}{GS_{1,y}} \\ \dfrac{T_z}{GS_{1,z}} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\omega}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{M_t}{GJ_\rho} \\ \dfrac{M_y}{EI_y} \\ \dfrac{M_z}{EI_z} \end{pmatrix},} \tag{D.1}$$

où les grandeurs E, S, ... ont été définies dans les sections précédentes (sauf $S_{1,y}$ et $S_{1,z}$, pour lesquelles on renvoie à (3.21) et (3.22) page 54).

Par intégration, on obtient les équations générales de Bresse, qui permettent de déterminer la translation $\overrightarrow{\Lambda}(G)$ et la rotation $\overrightarrow{\Omega}(G)$ de la section de centre de gravité G, par rapport à un point G_0

de référence (supposé à translation et rotation relatives connues et notée $\overrightarrow{\Lambda}(G_0)$ et $\overrightarrow{\Omega}(G_0)$) :

$$\boxed{\overrightarrow{\Lambda}(G) = \overrightarrow{\Lambda}(G_0) + \overrightarrow{\Omega}(G_0) \wedge \overrightarrow{G_0G} + \int_{S_0}^{S} \overrightarrow{\lambda}(s)ds + \int_{S_0}^{S} \overrightarrow{\omega}(s)ds \wedge \overrightarrow{\Gamma(s)G},} \tag{D.2}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(G) = \overrightarrow{\Omega}(G_0) + \int_{S_0}^{S} \overrightarrow{\omega}(s)ds,} \tag{D.3}$$

où S, S_0 et s sont les abscisses curvilignes des points G_0, G et Γ de la fibre moyenne (dans cette formule d'intégrale, G_0 et G sont fixes et Γ varie).

Dans le cas particulier des poutres droites à plan moyen (c'est-à-dire quand la fibre moyenne est rectiligne, parallèle à l'axe x, on note $(U(G), V(G))$ le déplacement (plan) du point G et $\omega(G)$ la rotation (selon l'axe orthogonal au plan de la poutre) du point G. En considérant les efforts plans de la RDM, notés N, T et M, il vient

$$\boxed{\omega(G) = \omega(G_0) + \int_{X_0}^{X} \frac{M(\xi)}{EI} d\xi,} \tag{D.4a}$$

$$\boxed{U(G) = U(G_0) + \int_{X_0}^{X} \frac{N(\xi)}{ES} d\xi,} \tag{D.4b}$$

et

$$\boxed{V(G) = V(G_0) + \omega(G_0)(X - X_0) + \int_{X_0}^{X} \frac{M(X-\xi)}{EI} d\xi + \int_{X_0}^{X} \frac{T(\xi)}{GS_1} d\xi} \tag{D.4c}$$

où X, X_0 et ξ sont les abscisses des point G_0, G et du point où l'on calcule la valeur de l'intégrante.

ANNEXE E

Un exemple d'étude de cercles de Mohr (sous forme d'exercice corrigé)

Cet exercice a déjà été donné en examen de MQ41 (médian Automne 2003).

Énoncé

(1) Soit un état de contrainte plan défini par le tenseur (exprimé en Mpa) :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les contraintes principales $\sigma_2 \leq \sigma_1$ de $[\sigma]$ par le calcul.

(b) Retrouver ces contraintes principales de façon géométrique, en utilisant le cercle de Mohr.

(2) Soit maintenant un état de contrainte spatial défini par le tenseur (exprimé en Mpa) :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}. \tag{E.1}$$

(a) Tracer les cercles de Mohr associés à ce tenseur.

(b) Déterminer les contraintes principales $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ de $[\sigma]$.

(c) Déterminer la contrainte tangentielle maximale.

(d) Tracer le repère principal, par rapport au repère (x, y, z) dans lequel est défini le tenseur $[\sigma]$ (par (E.1)).

Corrigé

(1) On étudie le tenseur :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{E.2}$$

(a) Les contraintes principales sont les valeurs propres de $[\sigma]$. On a

$$\det\left([\sigma] - XI\right) = \det \begin{pmatrix} 6-X & 2 \\ 2 & 3-X \end{pmatrix} = X^2 - 9X + 14.$$

On calcule les deux racines du trinôme $X^2 - 9X + 14$ et on en déduit (en Mpa)

$$\boxed{\sigma_2 = 2, \quad \sigma_1 = 7.} \tag{E.3}$$

(b) À un état de contrainte plan est associé un cercle de Mohr. Puisque la première colonne de $[\sigma]$ est égale à ${}^t(6,2)$, l'état de contrainte du point M_1 est défini par

$$\sigma(M_1) = 6, \quad \tau(M_1) = 2. \tag{E.4}$$

On connaît donc le point de coordonnées $M_1(6,2)$ du cercle de Mohr. De même, puisque la seconde colonne de $[\sigma]$ est égale à ${}^t(2,3)$, l'état de contrainte du point M_2 est défini par

$$\sigma(M_2) = 3, \quad \tau(M_2) = -2. \tag{E.5}$$

On connaît donc le point de coordonnées $M_2(3,-2)$ du cercle de Mohr.

On reporte ces deux points et on déduit le cercle de Mohr, de centre Ω d'ordonnée nulle, comme l'indique la figure E.1.

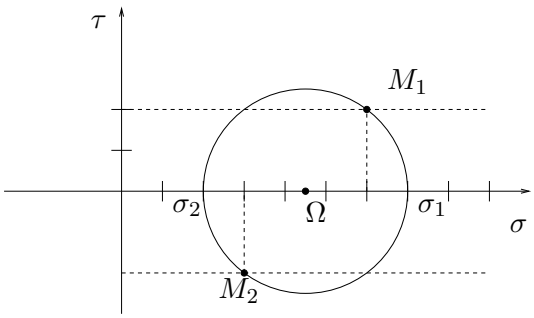


FIG. E.1. Le cercle de Mohr (plan).

(2) On étudie le tenseur :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}. \tag{E.6}$$

(a) Pour le tenseur $[\sigma]$ défini par (E.6), on constate la présence de deux blocs. Le premier correspond au tenseur plan (E.2) et le second à $[-10]$ de valeur propre -10. Ainsi, le tricercle de Mohr de l'état de contrainte (E.6) est constitué de trois cercles ; deux d'entre eux passent par $M_3(-10,0)$ et le troisième est au identique au cercle déjà tracé sur la figure. On en déduit donc les trois cercles, comme indiqué sur la figure E.2 page ci-contre.

(b) D'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\sigma_3 = -10, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_1 = 7.} \tag{E.7}$$

(c) Graphiquement ou par le calcul, on a

$$\boxed{|\tau_{\max}| = 8.5.} \tag{E.8}$$

(d) Notons (X,Y,Z) le repère principal : X est associé à la valeur propre σ_1, Y est associé à la valeur propre σ_2 et Z est associé à la valeur propre σ_3.

Vu la forme de $[\sigma]$ ((E.6)), on a

$$\boxed{Z = z.} \tag{E.9}$$

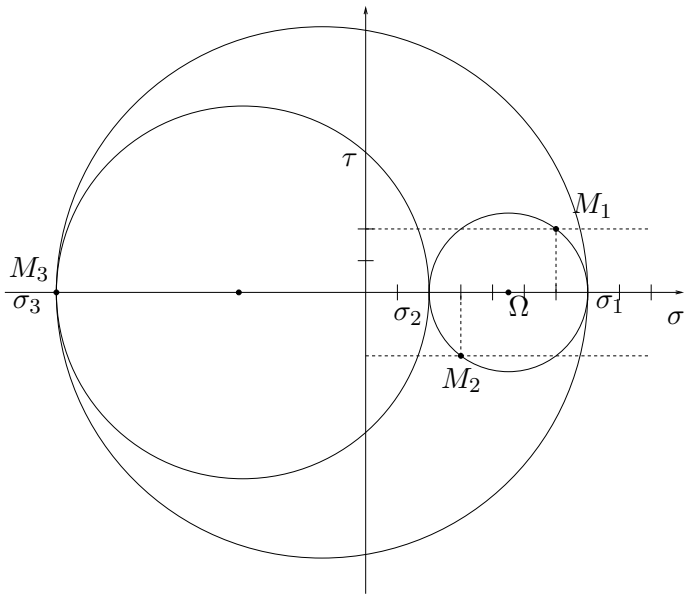


FIG. E.2. Le cercle de Mohr (spatial).

Ainsi le repère (X, Y) est dans le plan (x, y) et on note

$$\boxed{\theta = \widehat{(x, X)}.} \tag{E.10}$$

D'après le cours, on a

$$\phi = -2\theta, \tag{E.11}$$

où $\phi = \left(\widehat{\Omega Q_1, \Omega M_1}\right)$ (voir figure E.3). En utilisant les propriétés de l'angle au centre et

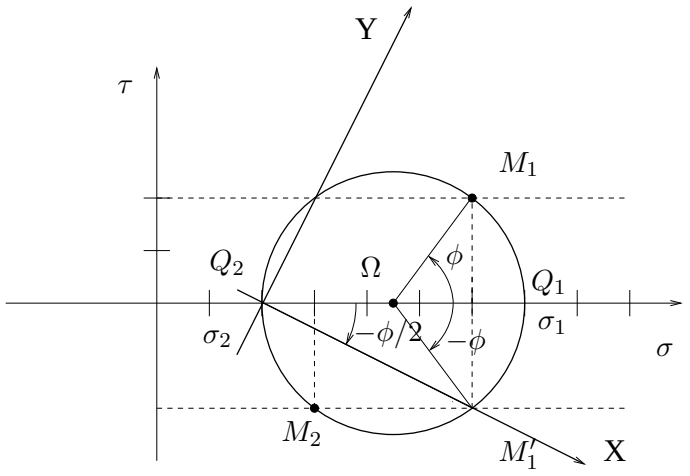


FIG. E.3. Le cercle de Mohr (plan) et les angles θ et ϕ.

de l'angle inscrit, on a

$$\left(Q_2\widehat{Q_1,Q_2}M_1'\right) = \frac{1}{2}\left(\Omega\widehat{Q_1,\Omega}M_1'\right),$$

et on déduit donc de (E.11) que

$$\boxed{\theta = \left(Q_2\widehat{Q_1,Q_2}M_1'\right),} \tag{E.12}$$

ce qui nous permet de tracer le repère (X,Y) sur la figure E.3 page précédente. De plus, selon (E.12), on a

$$\boxed{\theta = -\text{arc}\tan\left(\frac{1}{2}\right) \approx -26,56^{\text{o}}.} \tag{E.13}$$

ANNEXE F

Exemple de calcul de flèche par méthode énergétique (sous forme d'exercice corrigé) – Exemple d'application de la théorie des distributions

Avertissement

Cette annexe propose un exercice donné en examen (UV MQ41, Printemps 2003).

Ce sujet a aussi été rédigé dans le but de donner un exemple d'application de la théorie des distributions (vue en MT41) : voir questions 4e et suivantes.

Énoncé

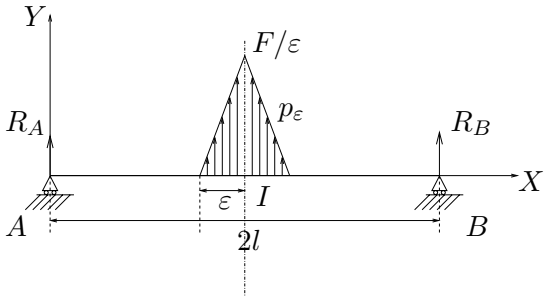


FIG. F.1. La structure étudiée

On étudie la poutre plane, représentée sur la figure F.1. Elle est orientée de A vers B et l'origine est choisie en A. Cette poutre repose sur deux appuis simples en A et B et est soumise à une densité linéique de charge (verticale) p_ε, symétrique par rapport au point d'abscisse l définie par

$$\forall x \in [0, l-\varepsilon], \quad p_\varepsilon(x) = 0 \ ; \tag{F.1a}$$

$$\forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad p_\varepsilon(x) = \frac{x-l+\varepsilon}{\varepsilon^2} F. \tag{F.1b}$$

Par symétrie[1], pour tout cet exercice, nous étudierons cette structure uniquement sur sa partie gauche, c'est-à-dire, pour $x \in [0, l]$.

On a choisi $F > 0$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout cet exercice, F est fixé et ε sera amené à tendre vers zéro.

[1]En effet, on rappelle que, puisque la structure est symétrique, les efforts normaux, le moment fléchissant et la flèche sont symétriques par rapport au point d'abscisse l et l'effort tranchant est antisymétrique.

(1) Afin de déterminer la flèche de cette poutre au point d'abscisse $y \in [0, l-\varepsilon]$, on place deux forces fictives[2] de même intensité f aux points d'abscisses respectives y et $2l-y$ (voir figure F.2). La force fictive $f > 0$ est destinée à tendre vers zéro.

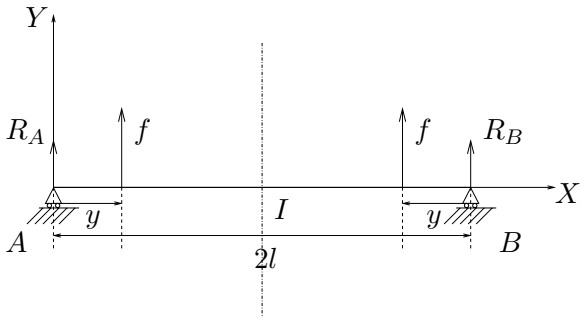


FIG. F.2. Les deux forces fictives d'intensité f

On désigne $M_f^I(x)$ le moment fléchissant de la structure de la figure F.2 et $M_\varepsilon^{II}(x)$ le moment fléchissant de la structure de la figure F.1.

(a) Calculer $M_f^I(x)$ et $M_\varepsilon^{II}(x)$ pour tout $x \in [0, l-\varepsilon]$.

(b) Montrer que

$$\forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad M_\varepsilon^{II}(x) = -\frac{Fx}{2} - \int_{z=0}^{z=x-l+\varepsilon} (z+l-\varepsilon-x) p_\varepsilon(z+l-\varepsilon) dz. \tag{F.2}$$

Attention, ici $p_\varepsilon(z+l-\varepsilon)$ désigne la valeur de la fonction p_ε en $z+l-\varepsilon$.

(c) En observant que la fonction p_ε est bornée par F/ε sur $[0, l]$, montrer que M_ε^{II} est borné sur $[l-\varepsilon, l]$ uniformément en ε, c'est-à-dire :

$$\exists C \geq 0 : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad \left| M_\varepsilon^{II}(x) \right| \leq C. \tag{F.3}$$

(2) Pour la structure de la figure F.1, on note, pour tout $\varepsilon > 0$, $v_\varepsilon(y)$ la flèche en y.

Pour $f > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés, on note $W_{\varepsilon,f}$ l'énergie de déformation dans la partie de gauche (pour $x \in [0, l]$) de la figure de la structure F.1, à laquelle on a rajouté le chargement de la figure F.2. On admet que

$$v_\varepsilon(y) = \lim_{f \to 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f}}{\partial f}. \tag{F.4}$$

(a) Pour toute la suite, on supposera E et I uniformes et on négligera les effets dus aux efforts normal et tranchant dans l'énergie de déformation. Déduire de (F.4) que

$$v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI} \int_0^l M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx. \tag{F.5}$$

[2] pour conserver la symétrie de la structure.

(b) En utilisant (F.3), montrer que, pour la structure de la figure F.1, pour tout $y \in [0, l[$, $v_\varepsilon(y)$ admet une limite quand ε tend vers zéro, notée $v_0(y)$ avec

$$v_0(y) = \frac{1}{EI} \int_0^l M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx, \tag{F.6}$$

où

$$\forall x \in [0, l], \quad M_0^{II}(x) = -\frac{Fx}{2}. \tag{F.7}$$

(c) À quelle structure correspond le déplacement défini par (F.6) et (F.7) ?

(d) En utilisant (F.6) et (F.7), montrer que ,

$$\forall y \in [0, l], \quad v_0(y) = \frac{F}{12EI} \left(-y^3 + 3yl^2 \right). \tag{F.8}$$

(3) **Cette question est indépendante des autres questions.**

On considère une poutre droite soumise à des forces et des couples ponctuels ainsi qu'à une densité linéique de charge p (d'effort tranchant).

(a) Montrer qu'en tout point d'abscisse x où ne sont exercés ni couple ni force ponctuels, on a les équations d'équilibre local :

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0, \tag{F.9a}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = -T(x), \tag{F.9b}$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -p(x). \tag{F.9c}$$

Comme dans le cours, on écrira l'équilibre d'un tronçon élémentaire de poutre compris entre les abscisses x et $x + dx$, où dx est la variation infinitésimale d'abscisse.

(b) Montrer que, si on néglige les effets de l'effort tranchant, on a, en tout point d'abscisse x où ne sont exercés ni couple ni force ponctuels (et en supposant E et I uniformes) :

$$v^{(4)}(x) = \frac{1}{EI} p(x). \tag{F.10}$$

On rappelle que, si on néglige l'effort tranchant, on a

$$v''(x) = \frac{1}{EI} M(x). \tag{F.11}$$

(4) **Question facultative**

(a) Comment pourrait-on, à ε fixé, calculer les efforts de la RDM, $N_\varepsilon(x)$, $T_\varepsilon(x)$ et $M_\varepsilon(x)$ en tout point d'abscisse $x \in [0, l]$ pour la structure de la figure F.1 ?

(b) Comment pourrait on, à ε fixé, calculer $v_\varepsilon(y)$, en tout point d'abscisse $y \in [0, l]$ pour la structure de la figure F.1 ?

(c) Les égalités (F.9) sont elles vérifiées pour p_ε (définie par (F.1)), N_ε, T_ε et M_ε ?

(d) L'égalité (F.10) est-elle vérifiée pour v_ε et p_ε ?

(e) Déterminer en tout point d'abscisse $x \in [0, l]$, $N_0(x)$, $T_0(x)$ et $M_0(x)$, les limites de $N_\varepsilon(x)$, $T_\varepsilon(x)$ et $M_\varepsilon(x)$ quand ε tend vers zéro.

Quelle structure admet cette distribution d'effort de la RDM ?

(f) De même, déterminer en tout point d'abscisse $x \in [0, l]$, $p_0(x)$ la limite de $p_\varepsilon(x)$ quand ε tend vers zéro.

(g) Les fonctions v_0, p_0, N_0, T_0 et M_0 ? vérifient elles les équations différentielles (F.9) et (F.10) ?

(h) (i) On considère la fonction de Heaviside H définie par

$$\forall x \in [0, 2l], \quad H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < l, \\ 1, & \text{si } x > l. \end{cases} \tag{F.12}$$

On considère formellement sa dérivée (appelée «fonction Dirac») définie[3] par

$$\forall x \in [0, 2l], \quad \delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}. \tag{F.13}$$

Montrer que, pour toute fonction u, dérivable sur $[0, 2l]$, nulle en 0 et en $2l$, on peut écrire formellement

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = u(l). \tag{F.14}$$

(ii) Montrer qu'en fait, grâce à (F.14), δ ne peut être une fonction. On pourra faire un intégration par partie.

(iii) Ceux qui connaissent la théorie des distributions, peuvent conclure sur ce paradoxe et expliquer l'intérêt des distributions !

Corrigé

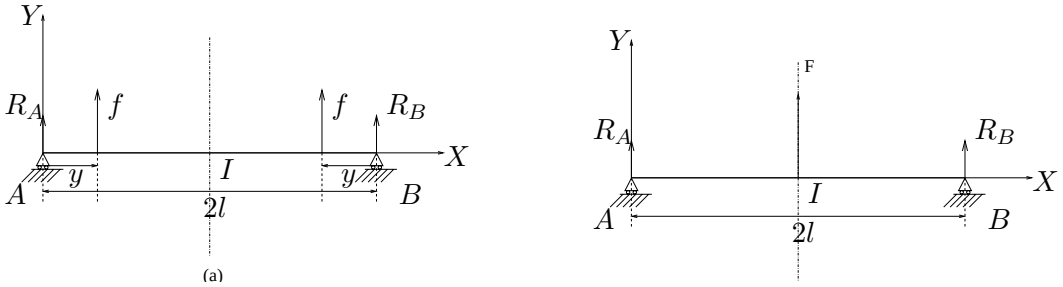


FIG. F.3. les chargements I (a) et II (b).

(1) (a) Par symétrie et d'après l'équlibre de la structure, on montre que, pour la structure de la figure F.3a,

$$R_A = R_B = -f.$$

On en déduit (en calculant le torseur des forces de gauche) que

$$\boxed{\forall x \in [0, l-\varepsilon], \quad M_f^I(x) = \begin{cases} -fx & \text{si } x \in [0, y], \\ -fy & \text{si } x \in [y, l-\varepsilon]. \end{cases}} \tag{F.15}$$

[3] En toute rigueur, H n'est pas continue en $x = l$, donc non dérivable !

Par symétrie, on montre que, pour la structure de la figure F.3b, $R_A = R_B$. La densité linéique de charge a une résultante égale à $F\varepsilon/\varepsilon = F$. On a donc $R_A = R_B = -F/2$. On en déduit en utilisant le torseur de force de gauche que

$$\boxed{\forall x \in [0, l-\varepsilon], \quad M_\varepsilon^{II}(x) = -\frac{Fx}{2}.} \tag{F.16}$$

(b) En tout point d'abscisse $x \in [l-\varepsilon, l]$, les efforts de gauche se réduisent à $R_A = -F/2$ et à la densité linéique de charge $p_\varepsilon(z+l-\varepsilon)$ pour $z \in [0, x-l+\varepsilon]$, de moment élémentaire $(z+l-\varepsilon-x) \times p_\varepsilon(z+l-\varepsilon)dz$; par intégration, il vient donc

$$\boxed{\forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad M_\varepsilon^{II}(x) = -\frac{Fx}{2} - \int_{z=0}^{z=x-l+\varepsilon} (z+l-\varepsilon-x) p_\varepsilon(z+l-\varepsilon)dz.} \tag{F.17}$$

(c) La densité p_ε est affine entre $l-\varepsilon$ et l et vaut 0 et F/ε aux deux extrémités ; ainsi,

$$\forall x \in [0, x-l+\varepsilon], \quad |p_\varepsilon(z+l-\varepsilon)| \leq \frac{F}{\varepsilon}.$$

On en déduit donc successivement, pour tout $x \in [l-\varepsilon, l]$,

$$\begin{aligned}
\left| M_\varepsilon^{II}(x) + \frac{Fx}{2} \right| &= \left| \int_{z=0}^{z=x-l+\varepsilon} p_\varepsilon(z+l-\varepsilon)(z+l-\varepsilon-x)dz \right| \ ; \\
&\leq \int_{z=0}^{z=x-l+\varepsilon} |p_\varepsilon(z+l-\varepsilon)(z+l-\varepsilon-x)|\, dz \ ; \\
&\leq (x-l+\varepsilon) \times \frac{F}{\varepsilon} \times (x-l+\varepsilon) \ ; \\
&\leq \varepsilon F.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad \left| M_\varepsilon^{II}(x) + \frac{Fx}{2} \right| \leq \varepsilon F. \tag{F.18}$$

et puisque

$$\left| M_\varepsilon^{II}(x) \right| \leq \left| M_\varepsilon^{II}(x) + \frac{Fx}{2} \right| + \left| -\frac{Fx}{2} \right| \leq \varepsilon F + \frac{Fl}{2},$$

en posant $C = Fl/2 + \varepsilon F$ (en supposant par exemple $\varepsilon \in]0, 1]$), on a donc

$$\boxed{\exists C \geq 0 : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad \left| M_\varepsilon^{II}(x) \right| \leq C.} \tag{F.19}$$

(2)

Remarque F.1. Pour démontrer, de façon «intuitive» que

$$\boxed{v_\varepsilon(y) = \lim_{f \to 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f}}{\partial f},} \tag{F.20}$$

on peut dire que, par symétrie, l'énergie totale de déformation de la structure (à $f > 0$ fixé) est égale à $2W_{\varepsilon,f}$. Si on charge la structure avec deux forces fictives, induisant une distribution symétrique, il faut diviser le déplacement obtenu par deux.

On peut aussi démontrer ce résultat de façon plus rigoureuse. Notons, à $f_1, f_2 > 0$ fixés, l'énergie W_{ε,f_1,f_2} correspond au chargement fictif de la figure F.4, qui n'est pas nécessairement symétrique.

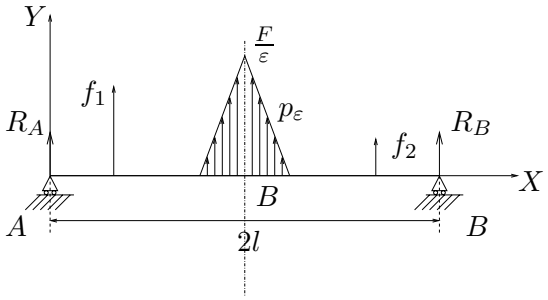


FIG. F.4. Chargement fictif (f_1, f_2) quelconque

Notons que l'énergie de déformation à ($f > 0$ fixé) de la struture complète correspondant aux chargements superposés I et II (voir figure F.3) est égale à $W_{\varepsilon,f,f}$.

D'après le théorème de la force fictive, on sait que la flèche cherchée est égale à

$$v_\varepsilon(y) = \lim_{f_1 \to 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f_1,f_2=0}}{\partial f_1}. \tag{F.21}$$

Avec les notations de l'énoncé, il faut donc démontrer que

$$\lim_{f \to 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f}}{\partial f} = \lim_{f_1 \to 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f_1,f_2=0}}{\partial f_1}. \tag{F.22}$$

Pour toute la suite, on supposera E et I uniformes et on négligera les effets dus aux efforts normal et tranchant dans la l'énergie de déformation (cela simplifiera la preuve, mais on peut s'en affranchir). Ainsi, on a, en notant M_{ε,f_1,f_2} la distribution de moment dans la structure de la figure F.4 :

$$\lim_{f_1 \to 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f_1,f_2=0}}{\partial f_1} = \frac{1}{EI} \int_0^{2l} M_{\varepsilon,0,0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f_1,0}(x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx.$$

On découpe l'intégrale en deux et, dans la seconde intégrale, on pose $\widetilde{x} = 2l - x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\lim_{f_1 \to 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f_1,f_2=0}}{\partial f_1}, \\
&= \frac{1}{EI} \left(\int_0^l M_{\varepsilon,0,0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f_1,0}(x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx + \int_l^{2l} M_{\varepsilon,0,0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f_1,0}(x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx \right), \\
&= \frac{1}{EI} \left(\int_0^l M_{\varepsilon,0,0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f_1,0}(x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^l M_{\varepsilon,0,0}(2l-x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f_1,0}(2l-x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx \right).
\end{aligned}$$

Par symétrie, on a

$$M_{\varepsilon,0,0}(x) = M_{\varepsilon,0,0}(2l - x),$$

et

$$\left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f_1,0}(2l-x)}{\partial f_1}\right]_{f_1=0} = \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,0}(2l-x)}{\partial f}\right]_{f=0} = \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,0,f}(x)}{\partial f}\right]_{f=0}.$$

Ainsi, il vient

$$\lim_{f_1\to 0}\frac{\partial W_{\varepsilon,f_1,f_2=0}}{\partial f_1} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_{\varepsilon,0,0}(x)\left(\left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,0}(x)}{\partial f}\right]_{f=0} + \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,0,f}(x)}{\partial f}\right]_{f=0}\right)dx.$$

Par linéarité, on a

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,0}(x)}{\partial f}\right]_{f=0} + \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,0,f}(x)}{\partial f}\right]_{f=0} &= \left[\frac{\partial}{\partial f}\left(M_{\varepsilon,f,0}(x) + M_{\varepsilon,0,f}(x)\right)\right]_{f=0},\\ &= \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,f}(x)}{\partial f}\right]_{f=0}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\lim_{f_1\to 0}\frac{\partial W_{\varepsilon,f_1,f_2=0}}{\partial f_1} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_{\varepsilon,0,0}(x)\left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,f}(x)}{\partial f}\right]_{f=0}dx.$$

Par définition de $W_{\varepsilon,f}$, on a

$$\lim_{f\to 0}\frac{\partial W_{\varepsilon,f}}{\partial f} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_{\varepsilon,0,0}(x)\left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,f}(x)}{\partial f}\right]_{f=0}dx,$$

ce qui montre l'équation (F.22).

(a) D'après le principe de linéarité externe, on décompose le chargement de structure en un chargement I (voir figure F.3a) et un chargement II (voir figure F.3b). Ainsi, on a

$$\forall x\in[0,l],\quad M_{\varepsilon,f}(x) = M_f^I(x) + M_\varepsilon^{II}(x). \tag{F.23}$$

Selon (F.20)

$$v_\varepsilon(y) = \lim_{f\to 0}\frac{1}{EI}\int_0^l M_{\varepsilon,f}(x)\frac{\partial M_{\varepsilon,f}(x)}{\partial f}dx,$$

il vient, selon (F.23),

$$v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(M_{f=0}^I(x) + M_\varepsilon^{II}(x)\right)\left[\frac{\partial\left(M_f^I(x) + M_\varepsilon^{II}(x)\right)}{\partial f}\right]_{f=0}dx,$$

Puisque M_f^I est nul si $f=0$ et que M_ε^{II} ne dépend pas de f, on en déduit donc que

$$\boxed{v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI}\int_0^l M_\varepsilon^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0}dx.} \tag{F.24}$$

(b) Soit y fixé dans $[0,l[$. On choisit ε assez petit tel que $y < l-\varepsilon$. Découpons l'intégrale de (F.24) en deux :

$$v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{l-\varepsilon} M_\varepsilon^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0}dx + \int_{l-\varepsilon}^l M_\varepsilon^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0}dx\right). \tag{F.25}$$

On définit[4] M_0^{II} par

$$\boxed{\forall x \in [0,l], \quad M_0^{II}(x) = -\frac{Fx}{2}.} \tag{F.26}$$

On a donc

$$v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{l-\varepsilon} M_0^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx + \int_{l-\varepsilon}^{l} M_\varepsilon^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx\right). \tag{F.27}$$

La fonction à intégrer dans la première intégrale de (F.27) est continue sur $[0,l]$ et ne dépend pas de ε ; on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{l-\varepsilon} M_0^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx = \int_0^{l} M_0^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx. \tag{F.28}$$

D'autre part, la fonction $x \mapsto \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0}$ est continue sur $[0,l]$: ainsi, il existe une constante K, indépendante de ε telle que

$$\left|\int_{l-\varepsilon}^{l} M_\varepsilon^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx\right| \leq K\int_{l-\varepsilon}^{l} \left|M_\varepsilon^{II}(x)dx\right| \ ;$$

d'après (F.19), on en déduit que

$$\left|\int_{l-\varepsilon}^{l} M_\varepsilon^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx\right| \leq KC\varepsilon$$

et donc que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{l-\varepsilon}^{l} M_\varepsilon^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx = 0. \tag{F.29}$$

De (F.25), (F.28) et (F.29), on déduit donc

$$\boxed{\forall y \in [0,l[, \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} v_\varepsilon(y) = v_0(y),} \tag{F.30}$$

avec

$$\boxed{v_0(y) = \frac{1}{EI}\int_0^{l} M_0^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx,} \tag{F.31}$$

où M_0^{II} est défini par (F.26).

REMARQUE F.2. On aurait pu expliciter $v_\varepsilon(y)$ et calculer la limite de l'expression obtenue quand ε tend vers 0 ; mais c'est lourd. Les majorations faites précédemment ne sont guère compliquées ; de plus, sous la forme (F.31), on va pouvoir identifier la structure équivalente qui admet une telle flèche.

[4] M_0^{II} est égal M_ε^{II} uniquement sur $[0, l-\varepsilon]$.

(c) Remarquons que M_0^{II} (défini par (F.26)) correspond au moment fléchissant dans une structure où aucune densité de force n'est exercée sur $[0, l[$ et où les réactions d'appuis en A et B valent $-F/2$. La seule structure possible est donc une structure comme représentée sur la figure F.5.

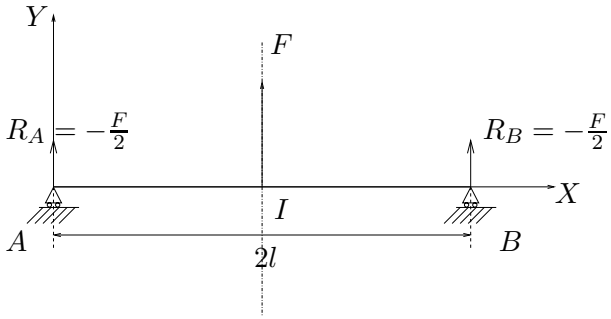


FIG. F.5. La structure équivalente recevant le moment M_0^{II}

Le cas de chargement I étant identique quand ε tend vers zéro, on en déduit donc que le déplacement défini par (F.31) et (F.26) correspond à la flèche au point d'abscisse $y \in [0, l]$ pour la structure de la figure F.5.

REMARQUE F.3. On vient donc de montrer que la densité linéique de force p_ε était équivalente, quand ε tend vers zéro, à une force ponctuelle, de norme F appliquée au point d'abscisse l.

(d) D'après (F.15), (F.26) et (F.31), on a, pour tout $y \in [0, l[$,

$$\begin{aligned}
v_0(y) &= \frac{1}{EI}\int_0^l M_0^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx, \\
&= \frac{1}{EI}\left(\int_0^y M_0^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx + \int_y^l M_0^{II}(x)\left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx\right), \\
&= \frac{1}{EI}\left(\int_0^y -\frac{Fx}{2}(-x)dx + \int_y^l -\frac{Fx}{2}(-y)dx\right), \\
&= \frac{F}{2EI}\left(\int_0^y x^2 dx + y\int_y^l x dx\right), \\
&= \frac{F}{2EI}\left(-y^3 + 3yl^2\right).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite $y \to l$, ce résultat[5] est aussi valable pour $y = l$. On a donc

$$\boxed{\forall y \in [0, l], \quad v_0(y) = \frac{F}{12EI}\left(-y^3 + 3yl^2\right),} \tag{F.32}$$

REMARQUE F.4. Dans le polycopié de cours, ce calcul est fait directement en intégrant l'équation différentielle $v'' = M/EI$

[5] en admettant que v_0 est continue.

(3) (a) Comme dans le cours, on considère un tronçon élémentaire de poutre compris entre les abscisses x et $x+dx$, soumis à aucune force ni aucun couple ponctuels. La partie à gauche de ce tronçon (correspondant à $z \leq x$) exerce les forces respectives (dans le repère (x, y)) $-N(x)$ et $-T(x)$; La partie à droite de ce tronçon (correspondant à $z \leq x + dx$) exerce les forces respectives (dans le repère (x, y)) $N(x + dx)$ et $T(x + dx)$; ce tronçon est soumis aux forces extérieurs égale à 0 et $p(x)dx$. L'équilibre des forces de ce tronçon donne donc les deux équations

$$\begin{aligned} &- T(x) + T(x + dx)dx + p(x)dx = 0, \\ &- N(x) + N(x + dx)dx = 0 \ ; \end{aligned}$$

En ne retenant que les termes du premier ordre en dx et en écrivant :

$$\begin{aligned} T(x + dx) &= T(x) + \frac{dT(x)}{dx}dx, \\ N(x + dx) &= N(x) + \frac{dN(x)}{dx}dx \end{aligned}$$

on obtient après simplification :

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0, \tag{F.33a}$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -p(x). \tag{F.33b}$$

De même, la nullité des moments fournit :

$$\frac{dM(x)}{dx} = -T(x). \tag{F.33c}$$

Remarque F.5. Ces équations sont valables hors des points d'application des forces et des couples ponctuels. En fait, d'après le principe de Saint-Venant, elles sont valables «loin» de ces points. Cependant, on n'hésitera pas à les écrire à droite et à gauche des points d'application, qui introduiront certaines discontinuité.

(b) Si on néglige les effets de l'effort tranchant, on a, en tout point d'abscisse x où ne sont exercés ni couple ni force ponctuels, en utilisant (F.33b) et (F.33c) :

$$v^{(4)}(x) = \frac{1}{EI}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(M(x)\right) = \frac{1}{EI}\frac{d}{dx}\left(-T(x)\right) = \frac{p(x)}{EI}.$$

On a donc

$$\boxed{v^{(4)}(x) = \frac{1}{EI}p(x).} \tag{F.34}$$

Remarque F.6. Comme pour la remarque F.5, on n'hésitera pas à écrire (F.34) à droite et à gauche des points d'application des forces et des couples ponctuels, qui introduiront certaines discontinuité.

(4) Par symétrie, et pour toute la suite, on ne s'intéresse qu'à la partie gauche de la structure.

(a) Puisqu'aucun effort normal n'est imposé, on a, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad N_\varepsilon(x) = 0.} \tag{F.35}$$

En dérivant l'équation (F.16), on a, selon (F.33c),

$$\boxed{\forall x \in [0, l-\varepsilon], \quad T_\varepsilon(x) = \frac{F}{2}.} \tag{F.36}$$

Sur l'intervalle $[l-\varepsilon, l]$, l'effort T_ε peut être déterminé en intégrant (F.33b). La constante d'intégration peut être déterminée grâce à $T(l) = 0$.
Les calculs complets (qui n'étaient pas exigés) donneraient :

$$\boxed{\forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad T_\varepsilon(x) = -\frac{F}{2\varepsilon^2}\left(x^2 + 2(\varepsilon - l)x - 2\varepsilon l + l^2\right).} \tag{F.37}$$

L'effort M_ε est connu sur $[0, l-\varepsilon]$: selon (F.16), on a donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, l-\varepsilon], \quad M_\varepsilon(x) = -\frac{Fx}{2}.} \tag{F.38}$$

Sur l'intervalle $[l-\varepsilon, l]$, l'effort M_ε peut être déterminé en intégrant (F.33c). La constante d'intégration peut être déterminée grâce à la valeur$M_\varepsilon(l-\varepsilon)$ connue d'après (F.38) :

$$M_\varepsilon(l-\varepsilon) = -\frac{F(l-\varepsilon)}{2}.$$

Les calculs complets (qui n'étaient pas exigés) donneraient :

$$\boxed{\forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad M_\varepsilon(x) = \frac{F}{6\varepsilon^2}\left(x^3 + 3(\varepsilon - l)x^2 + 3(l^2 - 2\varepsilon l)x - (l-\varepsilon)^3\right).} \tag{F.39}$$

(b) À $\varepsilon > 0$ fixé, on peut déterminer v_ε sur l'intervalle $[0, l-\varepsilon]$, en explicitant l'expression donnée par (F.25). Les calculs complets (qui n'étaient pas exigés) donneraient :

$$\boxed{\forall y \in [0, l-\varepsilon], \quad v_\varepsilon(y) = \frac{F}{12EI}\left(-y^3 + 3l^2 y\right) + \frac{17Fy}{24EI}\varepsilon^2.} \tag{F.40}$$

Remarque F.7. D'après (F.40), il est immédiat que

$$\forall y \in [0, l-\varepsilon], \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} v_\varepsilon(y) = \frac{F}{12EI}\left(-y^3 + 3l^2 y\right) = v_0(y).$$

Sur l'intervalle $[l-\varepsilon, l]$, on pourrait déterminer v_ε en utilisant de même l'expression (F.25) ; on découperait cette intégrale en trois termes : une intégrale sur $[0, l-\varepsilon]$, une intégrale sur $[l-\varepsilon, y]$ et une intégrale sur $[y, l]$.

Remarque F.8. On pourrait montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon = v_0, \text{uniformément sur } [0, 2l]. \tag{F.41}$$

(c) Naturellement, les égalités (F.33) sont vérifiées pour p_ε, N_ε, $T_\varepsilon(y)$ et $M_\varepsilon(y)$.

(d) On en déduit que l'égalité (F.34) est vérifiée pour v_ε et p_ε puisqu'elle découle de (F.33).

(e) D'après (F.35), on a, à la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad N_0(x) = 0.} \tag{F.42}$$

Remarque F.9. Ici, naturellement, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon = N_0, \text{uniformément sur } [0, 2l]. \tag{F.43}$$

D'après (F.36), on a pour tout $x \in [0, l[$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} T_\varepsilon(x) = \frac{F}{2}. \tag{F.44}$$

D'après (F.37), on a

$$T_\varepsilon(l) = 0. \tag{F.45}$$

Ainsi, selon (F.44) et (F.45), on a

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad T_0(x) = \begin{cases} \frac{F}{2}, & \text{si } x \in [0, l[, \\ 0, & \text{si } x = l. \end{cases}} \tag{F.46}$$

REMARQUE F.10. Ici, la convergence de T_ε vers T_0 n'est pas uniforme sur l'intervalle $[0, l]$, puisque T_ε est continu alors que T_0 ne l'est pas. Nous avons seulement le résultat :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = T_0, \text{simplement sur } [0, 2l]. \tag{F.47}$$

D'après (F.38), on a pour tout $x \in [0, l[$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} M_\varepsilon(x) = -\frac{Fx}{2}. \tag{F.48}$$

D'après (F.39), on a

$$M_\varepsilon(l) = -\frac{Fl}{2} + \frac{\varepsilon}{6},$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} M_\varepsilon(l) = -\frac{Fl}{2}. \tag{F.49}$$

Ainsi, selon (F.48) et (F.49), on a

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad M_0(x) = -\frac{Fx}{2}.} \tag{F.50}$$

REMARQUE F.11. Ici, on peut montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon = M_0, \text{uniformément sur } [0, 2l]. \tag{F.51}$$

En effet, selon (F.18) et (F.38), on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [0, l], \quad |M_\varepsilon(x) - M_0(x)| \leq \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, l - \varepsilon], \\ \varepsilon F, & \text{si } x \in [l - \varepsilon, l]. \end{cases}$$

On remarque que la structure correspondant à la flèche correspondant à $\varepsilon = 0$ (voir figure F.5) admet N_0, T_0 et M_0 comme efforts de la RDM.

On retrouve donc les résultats de la question 2c.

(f) D'après la définition de p_ε :

$$\forall x \in [0, l - \varepsilon], \quad p_\varepsilon(x) = 0 \ ;$$

$$\forall x \in [l - \varepsilon, l], \quad p_\varepsilon(x) = \frac{x - l + \varepsilon}{\varepsilon^2} F \ ;$$

on a pour tout $x \in [0, l[$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} p_\varepsilon(x) = 0. \tag{F.52}$$

et

$$p_\varepsilon(l) = \frac{F}{\varepsilon}. \tag{F.53}$$

Ainsi, selon (F.52) et (F.53), on a

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad p_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq l, \\ +\infty, & \text{si } x = l. \end{cases}} \tag{F.54}$$

On introduit la «fonction[6] Dirac» définie formellement par

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq l, \\ +\infty, & \text{si } x = l. \end{cases}} \tag{F.55}$$

On a donc

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad p_0(x) = F\delta(x).} \tag{F.56}$$

On peut donc écrire formellement :

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad \lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon(x) = F\delta(x).} \tag{F.57}$$

Remarque F.12. Puisque $\infty \times F = \infty$, on aurait pu poser $p_0(x) = \delta(x)$. Cependant, conformément à la conclusion de la question 2c, il faut que la résultante de la densité limite p_0 soit égale à la limite de la résultante p_ε quand ε tend vers zéro, c'est à dire

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2l} p_\varepsilon(z)dz = \int_0^{2l} p_0(z)dz.$$

Cela peut aussi s'écrire

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F = \int_0^{2l} p_0(z)dz.$$

Compte tenu de (F.56), on a donc la condition de normalisation

$$\int_0^{2l} \delta(z)dz = 1. \tag{F.58}$$

Remarque F.13. Si on récapitule, on est passé à la limite $\varepsilon \to 0$: la structure de la figure F.3 est «passée» à la limite vers celle de la figure F.5. Plus précisément, nous avons (avec des convergence simple ou uniforme) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon = v_0, \tag{F.59a}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon = p_0, \tag{F.59b}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = T_0, \tag{F.59c}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon = N_0, \tag{F.59d}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon = M_0. \tag{F.59e}$$

On retrouve donc mathématiquement le résultat signalé dans la remarque F.3.

[6]Nous verrons pourquoi, cette fonction n'est pas une vraie fonction ; nous raisonnement maintenant formellement.

(g) Naturellement,

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (F.33a) est vérifiée.}} \tag{F.60}$$

Puisque M_0 est symétrique par rapport au point d'abscisse l, on a donc, selon (F.50),

$$\forall x \in [0,2l], \quad M_0(x) = \begin{cases} -\frac{Fx}{2}, & \text{si } x \leq l, \\ -\frac{F(2l-x)}{2}, & \text{si } x \geq l. \end{cases}$$

Ainsi, en, dérivant, on a

$$\forall x \in [0,2l], \quad -\frac{dM_0(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{F}{2}, & \text{si } x < l, \\ -\frac{F}{2}, & \text{si } x > l. \end{cases}$$

Pour $x = l$, M_0 n'est pas dérivable, donc on ne peut rien écrire en ce point. On a vu que (par antisymétrie)

$$\forall x \in [0,2l], \quad T_0(x) = \begin{cases} \frac{F}{2}, & \text{si } x < l, \\ 0, & \text{si } x = l, \\ -\frac{F}{2}, & \text{si } x > l. \end{cases} \tag{F.61}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (F.33c) est vraie, sauf en } x = l.} \tag{F.62}$$

De même, si on dérive (F.61), on a :

$$\forall x \in [0,2l], \quad -\frac{dT_0(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{si } x < l, \\ 0, & \text{si } x > l. \end{cases} \tag{F.63}$$

En $x = l$, T_0 n'est pas continue, donc *a fortiori* non dérivable.

Néanmoins, grâce à (F.56), on constate que (F.33b) est vraie à condition de poser formellement

$$\frac{dH(0)}{dx} = \delta(0). \tag{F.64}$$

Nous sommes obligé de tenir compte de cette discontinuité : sinon, selon (F.63) et (F.33b), p serait identiquement nul et la poutre soumise à aucune force ! Ainsi, par définition de H, sa dérivée est nulle sur $[0,2l] \setminus \{l\}$ et on a donc, grâce à (F.64),

$$\boxed{\forall x \in [0,2l], \quad \frac{dH(x)}{dx} = \delta(x).} \tag{F.65}$$

Plus précisément, on introduit H, la fonction de Heaviside définie par

$$\forall x \in [0,2l], \quad H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < l, \\ 1, & \text{si } x > l. \end{cases} \tag{F.66}$$

Sa valeur en $x = l$ n'importe pas.

Ainsi, selon (F.61), on a

$$\forall x \in [0,2l], \quad T_0(x) = -FH(x) + \frac{F}{2}. \tag{F.67}$$

On ne s'occupe pas de ce qui se passe en $x = l$.

Formellement, selon (F.65), on a donc

$$\forall x \in [0, 2l], \quad -\frac{dT_0(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-FH(x) + \frac{F}{2}\right) = F\frac{dH(x)}{dx} = F\delta(x).$$

Puisque p_0 est définie par (F.56),

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (F.33b) est vraie sur tout } [0, 2l],} \tag{F.68}$$

à condition de considérer la règle de dérivation (F.65).

Compte tenu de cette règle de dérivation, on retiendra que l'on peut
– dériver toute fonction continue sur $[0, 2l]$ et dérivable par morceaux, à condition de «ne pas tenir compte de ce qu'il se passe aux points de non dérivabilité»,
– dériver toute fonction dérivable par morceaux, à condition de rajouter des Dirac, aux éventuels points de discontinuité.

Compte tenu de cela,

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (F.33) est vérifiée en tout point de } [0, 2l].} \tag{F.69}$$

Pour vérifier l'équation différentielle (F.34), il suffit de vérifier que

$$v_0''(x) = \frac{1}{EI}M_0(x). \tag{F.70}$$

Compte tenu de (F.32) et de (F.50), on vérifiera que

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (F.70) est vérifiée en tout point de } [0, 2l].} \tag{F.71}$$

(h) (i) Pour calculer l'intégrale proposée, on utilise la définition de δ (que l'on a vue, ici comme «règle de dérivation» (F.65), nécessaire pour expliquer la présence de la force F) :

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = \int_0^{2l} \frac{dH(x)}{dx}u(x)dx,$$

et donc, formellement, par intégration par partie :

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = -\int_0^{2l} \frac{du(x)}{dx}H(x)dx + [uH]_{x=0}^{x=2l}.$$

Puisque $u(0) = u(2l) = 0$, on a

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = -\int_0^{2l} \frac{du(x)}{dx}H(x)dx.$$

On découpe cette intégrale en deux terme et puisque $H = 0$ sur $[0, l[$ et $H = 1$ sur $]l, 2l]$, il vient

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = -\int_l^{2l} \frac{du(x)}{dx}dx = -u(2l) + u(l) = u(l).$$

On a donc :

$$\boxed{\text{pour tout fonction } u, \text{ dérivable sur } [0, 2l], \text{ nulle en 0 et en } 2l, \quad \int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = u(l).} \tag{F.72}$$

(ii) Si δ était une fonction, puisqu'elle est nulle sur $[0, l[$ et sur $]l, 2l]$, on aurait pour tout fonction u, dérivable sur $[0, 2l]$, nulle en 0 et en $2l$,

$$u(l) = \int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = \int_0^{l} \delta(x)u(x)dx + \int_l^{2l} \delta(x)u(x)dx = 0 + 0,$$

ce qui est absurde ! De même, si u était une fonction, (F.58) serait absurde.

(iii) Il faut prendre un peu de recul pour expliquer ce paradoxe.

On a vu qu'une force ponctuelle F était la limite d'une densité linéaire de force, nulle sur $[0, 2l]$ sauf en $x = l$, où elle est infinie.

REMARQUE F.14. Ainsi, en poursuivant l'observation des remarques F.3 et F.13, on constate que les équations différentielles (F.33) et (F.34), vérifiées pour les fonctions v_ε, p_ε, M_ε, T_ε et N_ε, gardent un sens quand ε tend vers zéro et que la densité limite p_0 est définie grâce au Dirac δ, défini comme la dérivée de la fonction de Heaviside H. Ainsi, en englobant d'éventuelles forces ponctuelles dans la densité linéique de charge p, les équations différentielles (F.33) et (F.34) demeurent vraie, même aux points d'application des forces ponctuelles[7].

En fait, la limite (F.57) n'a pas de sens mathématique[8] : l'objet δ n'est pas une fonction : c'est une application linéaire continue, qui a toute fonction u, assez régulière et nulle en 0 et $2l$ associe $u(l)$. On parle aussi parfois d'opérateur. Tous les calculs précédents n'ont pas de sens mathématique, en particulier (F.72), que l'on remplacera[9] par

$$\text{pour tout fonction } u, \text{ dérivable sur } [0, 2l], \text{ nulle en 0 et en } 2l, \quad < \delta, u >= u(l), \tag{F.76}$$

où $< \delta, u >$ est l'image de l'opérateur δ sur u.

Toutes les autres équations vue précédemment n'ont qu'un sens formel. Cependant, on peut en retenir qui ont un sens rigoureux : les fonctions p_ε, T_ε, N_ε, M_ε, tendent[10] (quand ε tend vers zéro) respectivement vers $F\delta$ (qui n'est pas une fonction) T_0, N_0, M_0 (ces trois dernières sont des fonctions)

[7] D'après l'hypothèse de Saint-Venant, on ne peut étudier sur le plan mécanique ce qui se passe près de ces points, dans un cadre de RDM ; c'est sur le plan mathématique qu'on se donne le droit d'étudier le voisinage de ces points, et ce, grâce aux distributions

[8] Pour ceux qui connaissent les distributions, pour toute la suite, on pose $\Omega =]0, 2l[$; l'égalité (F.57) a lieu au sens des distributions :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon = F\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{F.73}$$

[9] Pour ceux qui connaissent les distributions, on a donc

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < \delta, u >= u(l). \tag{F.74}$$

De façon plus générale, si y désigne un élément quelconque de Ω, on appelle le Dirac en y, la distribution définie par

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < \delta_y, u >= u(y). \tag{F.75}$$

[10] en fait, au sens des distributions.

L'équation (F.65) est vraie : on peut dériver une fonction non dérivable et obtenir un objet qui n'est plus une fonction[11].

Grâce à cette notion de dérivée étendue, on peut conclure que les équations différentielles (F.33) et (F.70) sont vérifiées[12]

Il existe une méthode, dite la quadruple quadrature : on se donne p, une densité linéaire de charge connue. Pour calculer la flèche v, on intègre l'équation différentielle (F.34), en utilisant la fonction de Heaviside et l'opérateur Dirac (voir[13] **[Rou95]**).

Les distributions ont été inventée par Laurent Schwartz dans les années 1950, afin de donner un sens à des équations différentielles dont les solutions présentées des singularités. La théorie de ce grand mathématicien (médaille Fields) a permis de dériver des fonctions, qu'elles soient dérivables ou non (on pourra consulter le cours de MT41 ou **[Pet98, Sch66]**).

Cependant, il faut garder à l'esprit que de telles forces ponctuelles (infinies) ne sont que des objets mathématiques, qui n'existent pas en réalité mais donnent des équations dont la résolution donnent des résultats qui approchent ceux observés de façon empirique.

[11] L'équation (F.65) peut se réécrire :

$$\frac{dH}{dx} = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{F.77}$$

et plus généralement, si on définit la fonction de Heaviside avec un saut en $y \in \Omega$ par

$$\forall x \in [0, 2l], \quad H_y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < y, \\ 1, & \text{si } x > y. \end{cases} \tag{F.78}$$

on a

$$\frac{dH_y}{dx} = \delta_y, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{F.79}$$

[12] au sens des distributions.

[13] Attention, l'auteur y a commis une coquille : page 368, il faut lire «$\delta(x-d) = +\infty$ si $x = d$» à la place de «$\delta(x-d) = 1$ si $x = d$».

ANNEXE G

Équivalence des équations (3.84) et (3.85)

DÉMONSTRATION. On rappelle que si m et q sont deux entiers, si f et g sont deux fonctions définies par

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \\ & (x_1, ..., x_m) \mapsto f(x_1, ..., x_m), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g: \quad & \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m, \\ & (y_1, ..., y_q) \mapsto \big(g_1(y_1, ..., y_q), ..., g_m(y_1, ..., y_q)\big), \end{aligned}$$

alors, $f \circ g$ est définie par

$$\begin{aligned} f \circ g: \quad & \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m, \\ & (y_1, ..., y_q) \mapsto f\big(g_1(y_1, ..., y_q), ..., g_m(y_1, ..., y_q)\big). \end{aligned}$$

On a la formule des dérivées partielles :

$$\forall i \in \{1, ..., q\}, \quad \frac{\partial (f \circ g)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}. \tag{G.1}$$

Ainsi, selon (G.1), on a, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F_i}\big(\Phi_1(F_1, ..., F_n), ..., \Phi_h(F_1, ..., F_n), F_1, ..., F_n\big) = & \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial \Phi_j}{\partial F_i} \frac{\partial W}{\partial \Phi_j}\big(\Phi_1, ..., \Phi_h, F_1, ..., F_n\big) \\ & + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial F_i} \frac{\partial W}{\partial F_j}\big(\Phi_1, ..., \Phi_h, F_1, ..., F_n\big). \end{aligned}$$

Dans le terme de gauche, les forces Φ sont exprimées en fonction des forces F_i et dans le terme de droite, les forces Φ_i sont quelconques. Puisque les forces F_i sont indépendantes, $\frac{\partial F_j}{\partial F_i}$ est égal à 1 si $i = j$ et égal à 0 sinon ; il vient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F_i}\big(\Phi_1(F_1, ..., F_n), ..., \Phi_h(F_1, ..., F_n), F_1, ..., F_n\big) = & \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial \Phi_j}{\partial F_i} \frac{\partial W}{\partial \Phi_j}\big(\Phi_1, ..., \Phi_h, F_1, ..., F_n\big) \\ & + \frac{\partial W}{\partial F_i}\big(\Phi_1, ..., \Phi_h, F_1, ..., F_n\big). \end{aligned} \tag{G.2}$$

Le théorème de Castigliano appliqué à la structure isostatique équivalente à la structure hyperstatique donne :

$$\forall i \in \{1, ..., h\}, \quad \frac{\partial W}{\partial \Phi_i}\big(\Phi_1, ..., \Phi_h, F_1, ..., F_n\big) = 0. \tag{G.3}$$

Si on applique (G.2) aux forces Φ qui vérifient (G.3), il vient

$$\frac{\partial W}{\partial F_i}\big(\Phi_1(F_1, ..., F_n), ..., \Phi_h(F_1, ..., F_n), F_1, ..., F_n\big) = \left.\frac{\partial W}{\partial F_i}\big(\Phi_1, ..., \Phi_h, F_1, ..., F_n\big)\right|_{\Phi=\Phi(F)},$$

ce qui prouve l'équivalence entre (3.84) et (3.85).

On peut aussi exprimer (3.84) ou (3.85) de façon matricielle et retrouver une équivalence souvent utilisée en optimisation : résoudre un système linéaire revient à minimiser une fonctionnelle du second ordre[1].

□

[1]Traduisons de façon matricielle (3.84). On note

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \Phi \\ F \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{h+p}(\mathbb{R}).$$

On a vu dans le cours que, pour la structure isostatique équivalentes, soumises aux $p + h$ forces indépendantes, l'énergie de déformation est égale à

$$W(\Phi, F) = \frac{1}{2}{}^t\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{F},$$

où $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_{h+p,h+p}(\mathbb{R})$ est sa matrice de souplesse. Puisque la matrice $\mathcal{C}$ est symétrique, on écrit par blocs

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathcal{M}_{h,h}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ sont symétriques et B appartient à $\mathcal{M}_{h,p}(\mathbb{R})$. Après un calcul par bloc, on obtient

$$W(\Phi, F) = \frac{1}{2}\left({}^t\Phi A\Phi + {}^t\Phi BF + {}^tF{}^tB\Phi + {}^tFCF.\right)$$

Le réel ${}^t\Phi BF$ est égal à ${}^t\left({}^t\Phi BF\right) = {}^tF{}^tB\Phi$ et ainsi,

$$W(\Phi, F) = \frac{1}{2}{}^t\Phi A\Phi + {}^tF{}^tB\Phi + \frac{1}{2}{}^tFCF. \tag{G.4}$$

Pour F fixé, l'application $\Phi \mapsto W(\Phi, F)$ est une fonctionnelle strictement convexe et coercitive, admettant un unique minimum sur $\mathbb{R}^h$. Des résultats classiques montrent que (G.3) implique, compte tenu de la forme (G.4) de $W(\Phi, F)$

$$\Phi = -A^{-1}BF. \tag{G.5}$$

De façon plus générale, on peut montrer (voir **[Ber01]** ou le cours de MN41) que si A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et c un réel, alors la fonction J de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad J(x) = \frac{1}{2}{}^txAx + {}^t\mathcal{B}x + c, \tag{G.6}$$

est une fonctionnelle strictement convexe et coercitive, admettant un unique minimum sur $\mathbb{R}^m$, solution du système linéaire

$$Ax = \mathcal{B}. \tag{G.7}$$

Il s'agit d'un problème de minimisation très classique. Les deux problèmes (G.6) et (G.7) sont équivalents. On utilise parfois cette propriété pour résoudre (G.7) en minimisant la fonctionnelle J définie par (G.6) (en utilisant par exemple la méthode du gradient conjugué).

D'un point de vue mécanique, la structure est à l'équilibre si son énergie, définie par (G.6) est minimale.

ANNEXE H

Exemple d'étude d'une structure circulaire (sous forme d'exercice corrigé)

Avertissement : conflit d'orientation

Cet exercice a déjà été donné en examen de MQ41. Pour cet examen les conventions sont légèrement différentes de celles vues au chapitre 1 (voir sections 1.2.1, 1.3.1 et 1.3.3) et au chapitre 4.

Les conventions utilisées dans cet examen correspondent aux les conventions (1.42) présentées dans la remarque 1.20 page 22.

Toutes les relations d'équilibre utilisées dans cet exercices sont redémontrées et le conflit d'orientation ne devrait donc pas poser de problème !

Énoncé

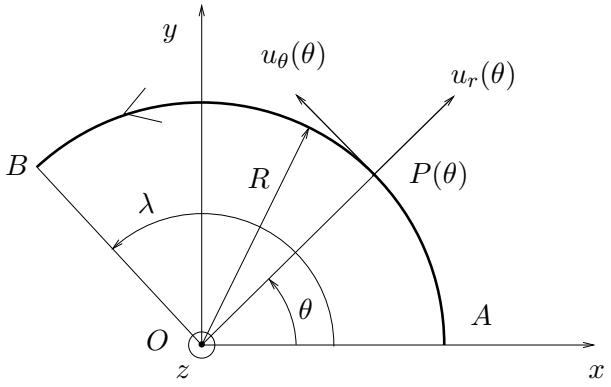


FIG. H.1. La structure circulaire étudiée

On considère une structure circulaire plane représentée sur la figure H.1. Pour l'instant, on ne s'intéresse pas aux conditions d'appui et on suppose que cette structure est en équilibre. En tout point courant $P(\theta)$, défini par l'angle θ, on définit les vecteurs polaires $u_r(\theta)$ et $u_\theta(\theta)$.

On oriente la poutre comme sur la figure H.1. Pour tout θ, les efforts de la RDM en $P(\theta)$, représentent les actions de la partie amont sur la partie aval de la poutre. On note $N(\theta)$, $T(\theta)$ et $M(\theta)$, les composantes de cette action dans le repère[1] local $(u_r(\theta), u_\theta(\theta), z)$; voir figure H.2.

[1]Attention, cette convention n'est pas tout à fait celle du cours pour les poutres planes ; avec les conventions générales, $T(\theta)$ serait porté par $-u_\theta(\theta)$. Cela ne devrait pas produire de gêne, puisque toute les équations utiles seront démontrées ici.

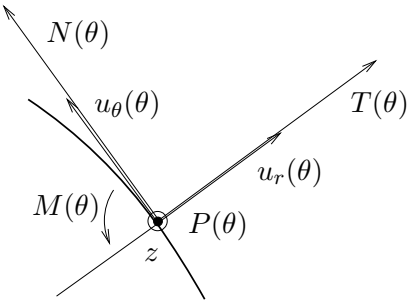


FIG. H.2. les efforts de la RDM : $N(\theta)$, $T(\theta)$ et $M(\theta)$

(1) Étude de l'équilibre local.

On pourra admettre les résultats démontrés dans cette question et traiter directement la question 2.

(a) Montrer que :

$$\frac{du_r(\theta)}{d\theta} = u_\theta(\theta), \tag{H.1}$$

$$\frac{du_\theta(\theta)}{d\theta} = -u_r(\theta). \tag{H.2}$$

(b) On suppose que cette poutre circulaire est soumise, outre des forces ponctuelles, à une densité radiale de force $p(\theta)$ (qui dépend de θ).

On étudie maintenant la portion de poutre comprise entre les points $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$, où $d\theta$ est un angle infiniment petit (voir figure H.3).

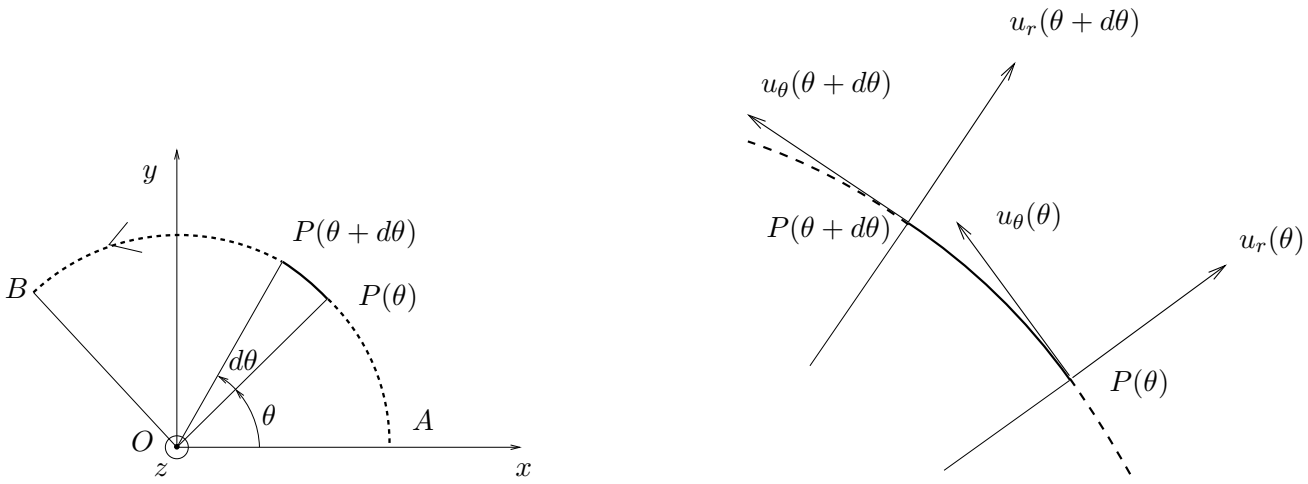


FIG. H.3. Une portion de poutre comprise entre $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$.

On suppose que cette portion de poutre n'est pas soumise à des forces ponctuelles extérieures. Montrer que l'équilibre de cette portion de poutre implique

$$\Big(-T(\theta)u_r(\theta)+T(\theta+d\theta)u_r(\theta+d\theta)\Big) + \Big(-N(\theta)u_\theta(\theta)+N(\theta+d\theta)u_\theta(\theta+d\theta)\Big)+Rd\theta p(\theta)u_r(\theta)=0. \quad \text{(H.3)}$$

(c) On ne conserve dans (H.3), que les infiniment petits du premier ordre en θ, c'est-à-dire, pour une fonction scalaire ou vectorielle $f(\theta)$:

$$f(\theta+d\theta)=f(\theta)+\frac{df}{d\theta}d\theta. \quad \text{(H.4)}$$

Montrer qu'avec l'écriture (H.4), (H.3) s'écrit, en ne conservant que les termes du premier ordre en $d\theta$:

$$\frac{dT}{d\theta}-N(\theta)+Rp(\theta)=0, \quad \text{(H.5a)}$$

$$T(\theta)+\frac{dN}{d\theta}=0. \quad \text{(H.5b)}$$

On admettra que la nullité des moments s'écrit

$$\frac{dM}{d\theta}-RT(\theta)=0. \quad \text{(H.5c)}$$

(d) Quel est l'avantage des équations (H.5) ?

(2) On étudie maintenant la structure autoéquilibrée de la figure H.4. Cette structure ne repose pas sur des appuis et n'est soumise qu'à une densité linéaire de force radiale $p(\theta) = p_0$ ($p_0 > 0$) uniforme.

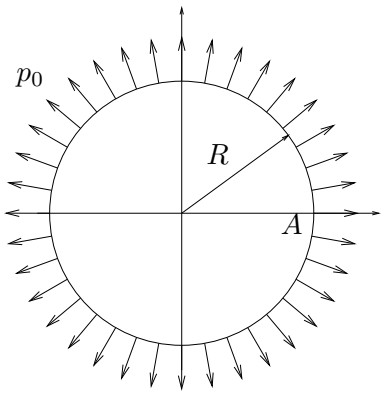


FIG. H.4. La structure circulaire autoéquilibrée

On suppose que les caractéristiques mécaniques de la structure sont uniformes.

Les angles θ seront repérés par rapport au point A.

(a) Pourquoi les efforts de la RDM, $N(\theta)$ $T(\theta)$ et $M(\theta)$ sont-ils indépendants de θ ?

(b) Déduire des équations (H.5) que, pour tout θ,

$$T(\theta) = T_0 = 0, \tag{H.6}$$

$$N(\theta) = N_0 = pR. \tag{H.7}$$

Que pensez-vous du signe de N_0 ?

La valeur de M_0 peut-elle être déterminée directement ?

(3) On introduit dans la structure de la figure H.4, une coupure au point A : de chaque coté de la coupure, on suppose maintenant que la structure repose sur deux appuis A_+ et A_- qui exercent sur la structure les réactions respectivement égales à

$$X = -N_0, \quad Y = -T_0 = 0, \quad \Gamma = -M_0, \tag{H.8}$$

et à

$$-X = N_0, \quad -Y = T_0 = 0, \quad -\Gamma = M_0.$$

Voir figure H.5.

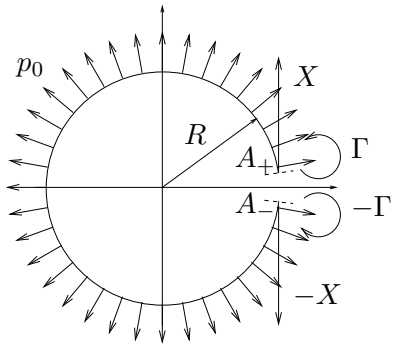


FIG. H.5. La structure circulaire autoéquilibrée avec une coupure interne.

(a) Pour cette nouvelle structure, montrer que l'effort de la RDM, $N(\theta)$ en tout point vérifie

$$N(\theta) = pR(1 - \cos\theta) - X\cos\theta. \tag{H.9}$$

(b) En déduire

$$T(\theta) = -pR\sin\theta - X\sin\theta, \tag{H.10}$$

$$M(\theta) = pR^2(\cos\theta - 1) + RX(\cos\theta - 1) - \Gamma. \tag{H.11}$$

(c) Pourquoi peut-on écrire

$$\frac{\partial W}{\partial \Gamma} = 0 \ ? \tag{H.12}$$

En déduire, selon (H.8), la valeur de M_0. On prendra dans l'expression de l'énergie de déformation, l'influence des trois efforts de la RDM :

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^{2\pi} M^2 R d\theta + \frac{1}{2ES}\int_0^{2\pi} N^2 R d\theta + \frac{1}{2GS}\int_0^{2\pi} T^2 R d\theta.$$

(4) (a) En assimilant la partie de la poutre circulaire de la figure H.4 comprise entre $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$, à un segment infinitésimal de poutre rectiligne, montrer que sa variation élémentaire de longueur est égale à

$$d\lambda = \frac{pR^2}{ES} d\theta. \tag{H.13}$$

(b) En déduire la variation de longueur totale puis la variation de rayon de la structure.

Corrigé

(1) (a) C'est un résultat classique, que l'on peut montrer en se plaçant dans le repère cartésien (x, y) :

$$\begin{aligned}\frac{du_r(\theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\, x + \sin\theta\, y\right), \\ &= \frac{d\cos\theta}{d\theta}\, x + \frac{d\sin\theta}{d\theta}\, y, \\ &= -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y \\ &= u_\theta(\theta)\ ;\end{aligned}$$

de même, on a

$$\frac{du_\theta(\theta)}{d\theta} = -u_r(\theta).$$

(b) D'après le principe d'action et de réaction, la partie en amont de la portion de poutre comprise entre les points $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$, exerce sur cette section de poutre les efforts respectifs

$$\begin{aligned}&- T(\theta)u_r(\theta), \\ &- N(\theta)u_\theta(\theta).\end{aligned}$$

La partie en aval de cette section de poutre exerce sur cette section de poutre les efforts respectifs

$$\begin{aligned}&T(\theta + d\theta)u_r(\theta + d\theta) \\ &N(\theta + d\theta)u_\theta(\theta + d\theta).\end{aligned}$$

La seule force extérieure agissant sur cette portion de poutre (puisqu'il n'y a pas de forces ponctuelles) est la densité radiale $p(\theta)$, par définition égale à

$$p(\theta)u_r(\theta) \times dl,$$

où dl est la longueur de la section de poutre, c'est-à-dire $Rd\theta$. Ainsi, l'équilibre fournit l'équation

$$\begin{aligned}&\Big(-T(\theta)u_r(\theta) + T(\theta + d\theta)u_r(\theta + d\theta)\Big) \\ &\qquad + \Big(-N(\theta)u_\theta(\theta) + N(\theta + d\theta)u_\theta(\theta + d\theta)\Big) + Rd\theta p(\theta)u_r(\theta) = 0.\end{aligned} \tag{H.14}$$

(c) On a, au premier ordre près en $d\theta$,

$$\begin{aligned} T(\theta+d\theta) &= T(\theta) + \frac{dT}{d\theta}d\theta, \\ N(\theta+d\theta) &= N(\theta) + \frac{dN}{d\theta}d\theta, \\ u_r(\theta+d\theta) &= u_r(\theta) + \frac{du_r(\theta)}{d\theta}d\theta, \\ u_\theta(\theta+d\theta) &= u_\theta(\theta) + \frac{du_\theta}{d\theta}d\theta. \end{aligned}$$

D'après les calculs précédents, les deux dernières équations sont équivalentes à

$$\begin{aligned} u_r(\theta+d\theta) &= u_r(\theta) + u_\theta(\theta)d\theta, \\ u_\theta(\theta+d\theta) &= u_\theta(\theta) - u_r(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, en réinjectant ces expressions dans (H.14), on obtient

$$\begin{aligned} -T(\theta)u_r(\theta) + \left(T(\theta)+\frac{dT}{d\theta}d\theta\right)\Big(u_r(\theta)+u_\theta(\theta)d\theta\Big) \\ - N(\theta)u_\theta(\theta) + \left(N(\theta)+\frac{dN}{d\theta}d\theta\right)\Big(u_\theta(\theta)-u_r(\theta)d\theta\Big) + Rd\theta p(\theta)u_r(\theta) = 0 \ ; \end{aligned}$$

en ne conservant que les termes du premier ordre, on a

$$T(\theta)u_\theta(\theta)d\theta + \frac{dT}{d\theta}d\theta u_r(\theta) - N(\theta)u_r(\theta)d\theta + \frac{dN}{d\theta}d\theta u_\theta(\theta) + Rd\theta p(\theta)u_r(\theta) = 0,$$

soit

$$T(\theta)u_\theta(\theta) + \frac{dT}{d\theta}u_r(\theta) - N(\theta)u_r(\theta) + \frac{dN}{d\theta}u_\theta(\theta) + Rp(\theta)u_r(\theta) = 0,$$

ce qui donne, en projetant sur u_r et sur u_θ :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dT}{d\theta} - N(\theta) + Rp(\theta) = 0, \\ \\ T(\theta) + \dfrac{dN}{d\theta} = 0. \end{array}} \tag{H.15}$$

Faisons le bilan des couples exercés sur la portion de poutre comprise entre les points $P(\theta)$ et $P(\theta+d\theta)$ et calculés par rapport au point $P(\theta+d\theta)$:

$$\overrightarrow{P(\theta+d\theta)P(\theta)} \wedge \Big(-T(\theta)u_r(\theta) - N(\theta)u_\theta(\theta)\Big) + \Big(M(\theta+d\theta) - M(\theta)\Big)z + d\mathcal{Q}(\theta) = 0,$$

où $d\mathcal{Q}(\theta)$ désigne le moment élémentaire de la densité linéaire de force $p(\theta)$, nécessairement d'ordre deux en $d\theta$, puisque le bras de levier est proportionnel à $d\theta$ et la force élémentaire est aussi proportionnelle à $d\theta$. On peut donc négliger d'emblée ce terme et on obtient donc

$$\overrightarrow{P(\theta+d\theta)P(\theta)} \wedge \Big(-T(\theta)u_r(\theta) - N(\theta)u_\theta(\theta)\Big) + \Big(M(\theta+d\theta) - M(\theta)\Big)z = 0. \tag{H.16}$$

Au premier ordre en $d\theta$, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P(\theta)P(\theta+d\theta)} &= \overrightarrow{OP(\theta+d\theta)} - \overrightarrow{OP(\theta)}\\ &= d\theta\,\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{OP(\theta)},\\ &= d\theta\,\frac{d}{d\theta}Ru_r(\theta),\\ &= d\theta\,R\frac{d}{d\theta}u_r(\theta),\\ &= d\theta\,Ru_\theta(\theta),\end{aligned}$$

et

$$M(\theta+d\theta) - M(\theta) = d\theta\,\frac{dM}{d\theta}.$$

Ainsi, selon (H.16),

$$d\theta\,\left(Ru_\theta(\theta)\wedge\Big(T(\theta)u_r(\theta)+N(\theta)u_\theta(\theta)\Big)+\frac{dM}{d\theta}z\right)=0,$$

ce qui implique

$$RT(\theta)u_\theta(\theta)\wedge u_r(\theta)+\frac{dM}{d\theta}z=0.$$

On a alors :

$$\boxed{\frac{dM}{d\theta}-RT(\theta)=0.} \tag{H.17}$$

Remarque H.1. Conformément à la remarque 1.20 page 22, les équations (H.5) sont bien identiques aux équations (1.44) page 23 (avec $q=0$ et $m=0$).

(d) L'avantage de ces équations est qu'il suffit d'un seul des trois efforts de la RDM, N, T ou M pour déterminer les deux autres par dérivation ou intégration.

(2) (a) La structure est invariante (appui, puisqu'il y en a pas ..., géométrie et chargement) par toute rotation autour de l'origine O ; il en est donc de même pour les efforts de la RDM, qui sont invariants par toute rotation autour de l'origine O et donc indépendants de θ ; ainsi écrit, pour tout θ :

$$\boxed{\begin{array}{l}N(\theta)=N_0,\\ T(\theta)=T_0,\\ M(\theta)=M_0.\end{array}} \tag{H.18}$$

(b) Si l'on réinjecte (H.18) dans les équations d'équilibre local (4.1) page 84, on a, puisque toutes les dérivées sont nulles, pour tout $\theta\neq 0$ (puisqu'il n'y a pas de forces concentrées ailleurs qu'en A_- et A_+)

$$\begin{aligned}-N_0+Rp_0&=0,\\ T_0&=0,\\ RT_0&=0,\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\begin{array}{l}N_0=pR,\\ T_0=0.\end{array}} \tag{H.19}$$

L'effort normal N_0 est positif, ce qui correspond à un effort de traction, ce qui est physiquement acceptable (force centrifuge).

La valeur de M n'est pas déterminée, puisque la structure est hyperstatique de degré un (de façon interne) ; pour lever cette hyperstaticité, l'équilibre ne suffit plus et nous allons introduire une coupure interne.

(3) (a) Par définition, $N(\theta)$ est l'action de la partie correspondant à $\phi \in [\theta, 2\pi]$ sur la section définie par θ ; c'est aussi l'opposé de la partie de la partie correspondant à $\phi \in [0, \theta]$ sur la section définie par θ. Cette partie est soumise à la densité linéaire de force (pour $\phi \in [0, \theta]$), à la force X et au couple Γ. Si $\phi \in [0, \theta]$, la portion de poutre comprise entre ϕ et $\phi + d\phi$ est soumise à la force élémentaire

$$d\overrightarrow{f}(\phi) = pRu_r(\phi)d\phi,$$

et donc la partie $\phi \in [0, \theta]$ exerce la force

$$\overrightarrow{F}(\theta) = \int_0^\theta pRu_r(\phi)d\phi.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}(\theta) &= -pR\int_0^\phi \frac{du_\theta(\phi)}{d\phi}d\phi,\\ &= -pR[u_\theta(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=\theta},\\ &= -pR\left(u_\theta(\theta) - u_\theta(0)\right),\\ &= -pR\left(u_\theta(\theta) - y\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on a, par projection sur u_θ,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}(\theta).u_\theta &= -pR\left(u_\theta(\theta) - y\right).u_\theta,\\ &= pR\Big(-1 + y.u_\theta\Big),\\ &= pR\Big(-1 + y.(-\sin\theta x + \cos\theta y)\Big),\\ &= pR(-1 + \cos\theta).\end{aligned}$$

Ainsi, en rajoutant réaction d'appui, de projection sur $u_\theta(\theta)$ $X\cos\theta$ et en prenant l'opposé, on a donc

$$\boxed{N(\theta) = pR(1 - \cos\theta) - X\cos\theta.} \tag{H.20}$$

Remarque H.2. Ici, on a intégré le vecteur $u_r(\phi)$; on pouvait aussi (mais c'est plus long et maladroit) repasser en base cartésienne (x, y) et écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}(\theta) &= \int_0^\theta pRu_r(\phi)d\phi,\\ &= pR\int_0^\theta \cos\phi x + \sin\phi y d\phi,\\ &= pR\Big(\sin\theta x + (1 - \cos\theta)y\Big),\end{aligned}$$

que l'on projette sur $u_\theta(\theta) = -\sin\theta x + \cos\theta y$:

$$\overrightarrow{F}(\theta).u_\theta(\theta) = pR\Big(\sin\theta x + (1-\cos\theta)y\Big).(-\sin\theta x + \cos\theta y)$$

et on retrouve en développant et simplifiant l'expression donnée ci-dessus.

(b) D'après l'équation d'équilibre local (4.1b) page 84, on a

$$\begin{aligned} T(\theta) &= -\frac{dN}{d\theta}, \\ &= -\frac{d}{d\theta}\Big(pR(1-\cos\theta) - X\cos\theta\Big), \\ &= -pR\sin\theta - X\sin\theta. \end{aligned}$$

On en déduit donc, d'après (4.1c),

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\theta} &= RT(\theta), \\ &= -pR^2\sin\theta - RX\sin\theta, \end{aligned}$$

et, par intégration,

$$M(\theta) = pR^2\cos\theta + RX\cos\theta + C,$$

où C est une constante. Par définition, on a

$$M(0) = -\Gamma.$$

Ainsi,

$$M(\theta) = pR^2\cos\theta + RX\cos\theta - \Gamma - pR^2 - RX.$$

Bref, on a

$$\boxed{\begin{array}{l} T(\theta) = -pR\sin\theta - X\sin\theta, \\ \\ M(\theta) = pR^2(\cos\theta - 1) + RX(\cos\theta - 1) - \Gamma. \end{array}} \tag{H.21}$$

(c) La coupure introduite doit être telle que la structure introduite est équivalente à la structure initiale. Ainsi, Γ doit être tel que la coupure se referme. Dans la structure introduite (isostatique), la rotation du point A_+ est égale à

$$\frac{\partial W}{\partial \Gamma} = \omega.$$

On a donc

$$\frac{\partial W}{\partial \Gamma} = 0. \tag{H.22}$$

On utilise maintenant les valeurs des réactions d'appuis

$$X = -N_0, \quad Y = -T_0 = 0, \quad \Gamma = -M_0. \tag{H.23}$$

D'après le cours, on peut utiliser (H.22) en utilisant d'abord (H.23) et en dérivant ensuite par rapport à Γ ou en dérivant avant. Il est plus rapide d'utiliser d'abord (H.22). Par

dérivation sous le signe somme, puisque N et T sont indépendants de Γ

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \Gamma} &= \frac{R}{EI}\int_0^{2\pi} M\frac{\partial M}{\partial \Gamma}d\theta,\\ &= -\frac{R}{EI}\int_0^{2\pi}\Big(pR^2(\cos\theta-1)+RX(\cos\theta-1)-\Gamma\Big)d\theta,\\ &= -\frac{R}{EI}\int_0^{2\pi}\Big(pR^2(\cos\theta-1)-RN_0(\cos\theta-1)-\Gamma\Big)d\theta,\end{aligned}$$

et selon (H.19),

$$\begin{aligned}&= -\frac{R}{EI}\int_0^{2\pi}\Big(pR^2(\cos\theta-1)-pR^2(\cos\theta-1)-\Gamma\Big)d\theta,\\ &= \frac{2\pi R\Gamma}{EI}.\end{aligned}$$

Ainsi, selon (H.22), $\Gamma = 0$ et donc

$$\boxed{M_0 = 0.} \tag{H.24}$$

(4) (a) Le seul effort de la RDM non nul est $N = N_0 = pR$. Ainsi la partie de la poutre circulaire comprise entre $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$, subit à un allongement relatif égal

$$d\lambda = \frac{N_0}{ES}dl,$$

où $dl = Rd\theta$ (au premier ordre près en $d\theta$). Ainsi

$$\boxed{d\lambda = \frac{pR^2}{ES}d\theta.} \tag{H.25}$$

Remarque H.3. On remarque ici que l'on ne peut négliger les effets de l'effort normal devant ceux du moment fléchissant, nuls ici !

(b) Par intégration, on a

$$\Delta\Lambda = \int_0^{2\pi} d\lambda,$$

et donc

$$\boxed{\Delta\Lambda = \frac{2\pi pR^2}{ES}.} \tag{H.26}$$

Puisque $\Delta\Lambda = 2\pi\Delta R$, on a donc

$$\boxed{\Delta R = \frac{pR^2}{ES}.} \tag{H.27}$$

ANNEXE I

Un exemple de critère (sous forme d'exercice corrigé)

Cet exercice a déjà été donné en examen de MQ41 (final Automne 2003).

Énoncé

(1) Soit $\sigma_Y \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le demi plan de Mohr (σ, τ) (avec $\tau \geq 0$), représenter le domaine d'élasticité de Tresca, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées (σ, τ) tels que

$$\sigma_{\text{eq}}^T < \sigma_Y. \tag{I.1}$$

(2) On considère $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\phi \in]0, \pi/2[$, fixés pour toute la suite de l'exercice. Représenter l'ensemble des points (σ, τ) du demi-plan de Mohr tels que

$$\tau < c - \sigma \tan \phi. \tag{I.2}$$

Pour toute la suite, on considère le critère de Mohr-Coloumb défini par (I.2).

(3) On considère un état de traction défini en un point par

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{I.3}$$

où $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

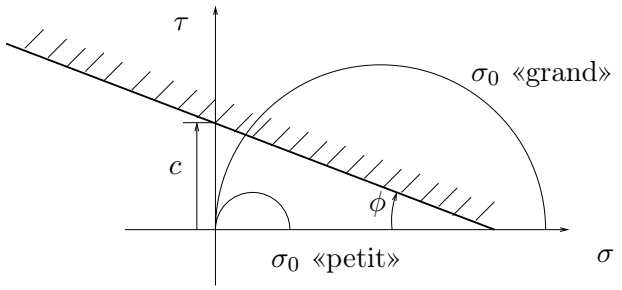
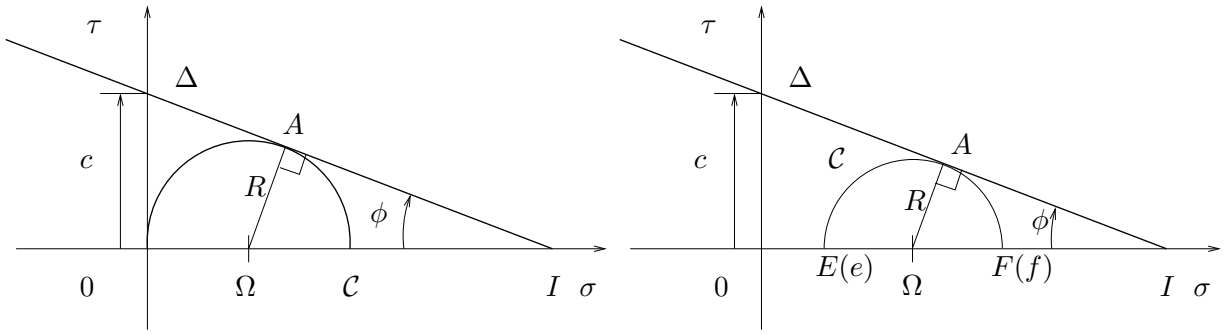


FIG. I.1. un cas de traction.

(a) En s'aidant de la figure I.1, montrer que
- si σ_0 est «petit», on reste dans le domaine élastique de Mohr-Coulomb ;
- si σ_0 est «grand», on quitte le domaine élastique de Mohr-Coulomb.

On rappelle que l'on reste dans le domaine élastique tant que l'ensemble du tricercle de Mohr est compris dans le domaine élastique.



(a) Cas particulier. (b) Cas général.

FIG. I.2. Le cercle $\mathcal{C}$ et la droite Δ sont tangents.

(b) On se reporte à la figure I. 2(a). On suppose que le cercle $\mathcal{C}$ de rayon R et de centre $\Omega(R,0)$ est tangent à la droite Δ, d'équation $\tau = c - \sigma\tan\phi$. Montrer que :

$$R = \frac{c\cos\phi}{1+\sin\phi}.$$

(c) En déduire que, pour l'état de contrainte (I.3), on reste dans le domaine élastique tant que

$$\sigma_0 < \frac{2c\cos\phi}{1+\sin\phi}. \tag{I.4}$$

(4) On se donne maintenant un état de contrainte quelconque, dont les valeurs principales $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ vérifient

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3. \tag{I.5}$$

(a) On se reporte à la figure I. 2(b). Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ et la droite Δ sont tangents si et seulement si :

$$c\cos\phi = R + (e+R)\sin\phi.$$

(b) En déduire que pour l'état de contrainte principal vérifiant (I.5), on reste dans le domaine élastique tant que

$$\frac{1}{2}(\sigma_3-\sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_1)\sin\phi < c\cos\phi. \tag{I.6}$$

(5) On admet que si les contraintes principales ne sont pas ordonnées selon (I.5), (I.6) se réécrit :

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\max}-\sigma_{\min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\max}+\sigma_{\min})\sin\phi < c\cos\phi. \tag{I.7}$$

Peut-on écrire le critère de Mohr-Coulomb (I.7) sous la forme :

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) < \sigma_Y \ ? \tag{I.8}$$

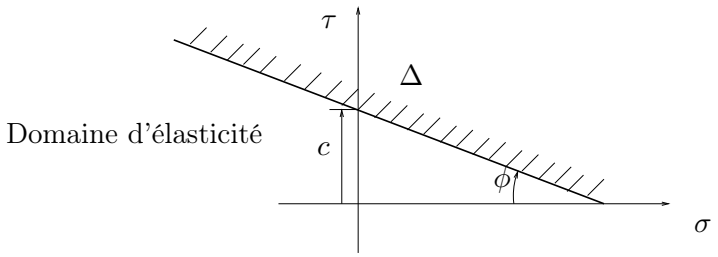


FIG. I.3. Le domaine d'élasticité du critère de Mohr-Coulomb.

Corrigé

On pourra aussi consulter les pages 485 à 488 de **[Dub98]**.

(1) On renvoie à la figure 6.3 page 102.

(2) On considère $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\phi \in]0, \pi/2[$, fixés pour toute la suite de l'exercice. L'ensemble des points du demi-plan de Mohr tels que

$$\tau < c - \sigma \tan \phi, \tag{I.9}$$

admet pour frontière la droite Δ d'équation

$$\boxed{\tau = c - \sigma \tan \phi.} \tag{I.10}$$

On choisissant la bonne partie (celle qui est sous la droite), on en déduit donc une représentation graphique de l'ensemble des points du demi-plan de Mohr vérifiant (I.9). Voir figure I.4. La droite Δ admet pour pente $-\tan\phi < 0$ et pour ordonnée à l'origine c.

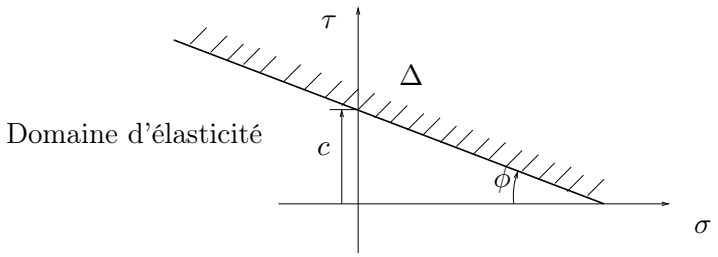


FIG. I.4. Le domaine d'élasticité du critère de Mohr-Coulomb.

(3) On considère un état de traction défini en un point par

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{I.11}$$

où $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) On constate sur la figure I.5 page suivante que
- si σ_0 est «petit», on reste dans le domaine élastique de Mohr-Coulomb, puisque le tricercle de Mohr (réduit à un cercle) est tout entier inclus dans le domaine d'élasticité ;

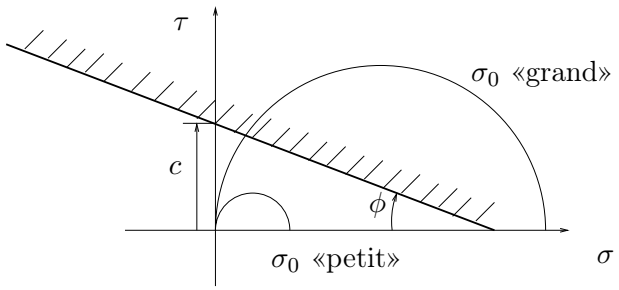
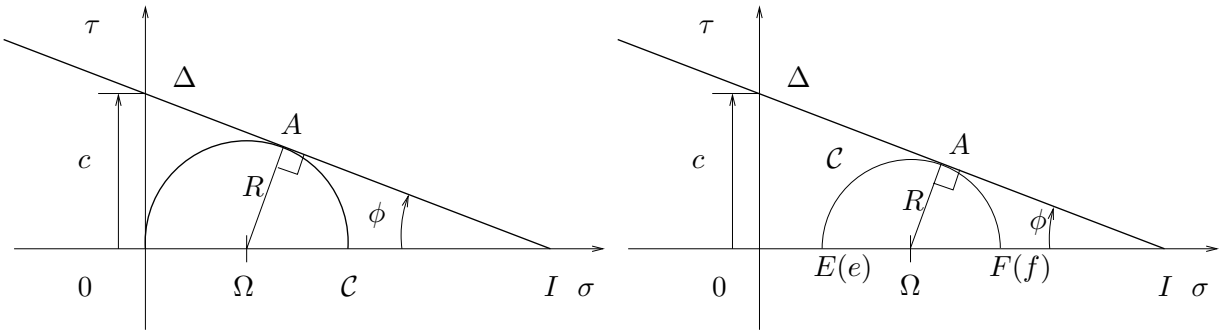


FIG. I.5. un cas de traction.

- en revanche, si σ_0 est «grand», on quitte le domaine élastique de Mohr-Coulomb, puisque le tricercle de Mohr (réduit à un cercle) sort du domaine d'élasticité : il coupe la droite Δ en deux points distincts..

Naturellement, le cas limite, qu'on a va étudier maintenant correspond au cas où le cercle est tangent à Δ.



(a) Cas particulier. (b) Cas général.

FIG. I.6. Le cercle $\mathcal{C}$ et la droite Δ sont tangents.

(b) Sur la figure I. 6(a), on constate que (ΩA) est perpendiculaire à Δ et donc

$$\sin\phi = \frac{\Omega A}{\Omega I} = \frac{\Omega A}{OI - O\Omega}.$$

Puisque

$$\tan\phi = \frac{c}{OI},$$

il vient

$$\sin\phi = \frac{R}{\frac{c}{\tan\phi} - R},$$

soit

$$\boxed{R = \frac{c\cos\phi}{1+\sin\phi}.} \tag{I.12}$$

(c) Il suffit d'écrire que le cercle $\mathcal{C}$ correspondant à l'état de contrainte (I.11) passe par l'origine et que son rayon est égal à $R = \sigma_0/2$; ainsi (I.12) est équivalent à

$$\frac{\sigma_0}{2} = \frac{c\cos\phi}{1+\sin\phi}.$$

On reste donc dans le domaine élastique tant que

$$\boxed{\sigma_0 < \frac{2c\cos\phi}{1+\sin\phi}.} \tag{I.13}$$

(4) On se donne maintenant un état de contrainte quelconque, dont les valeurs principales $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ vérifient

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3. \tag{I.14}$$

(a) On se reporte à la figure I. 6(b) page ci-contre. Comme dans la question 3b, on écrit

$$\sin\phi = \frac{\Omega A}{\Omega I} = \frac{\Omega A}{OI - O\Omega} = \frac{\Omega A}{OI - (e+R)}.$$

Puisque

$$\tan\phi = \frac{c}{OI},$$

il vient

$$\sin\phi = \frac{R}{\frac{c}{\tan\phi} - e - R},$$

et donc

$$\boxed{c\cos\phi = R + (e+R)\sin\phi.} \tag{I.15}$$

(b) Pour l'état de contrainte principal (I.14), le tricercle de Mohr correspond à celui de la figure 2.2 page 36. Sur cette figure, on constate que le plus grand cercle coupe l'axe de σ aux points d'absicsse σ_1 et σ_3. Le tricercle de Mohr est inclus dans le domaine d'élasticité si et seulement le plus grand des demi-cercles est inclus dans le domaine d'élasticité. En comparant les figures 2.2 page 36 et la figure I. 6(b) page précédente, on constate que le cas limite de tangence s'applique avec $e = \sigma_1$ et $R = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$. En réinjectant ces valeurs dans (I.15), on obtient

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\sin\phi - c\cos\phi = 0.$$

On reste donc dans le domaine élastique tant que

$$\boxed{\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\sin\phi < c\cos\phi.} \tag{I.16}$$

(5) On peut réécrire

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})\sin\phi < c\cos\phi,$$

sous la forme

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y, \tag{I.17}$$

en posant conventionnellement :

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})\sin\phi, \tag{I.18}$$

et

$$\sigma_Y = c\cos\phi \tag{I.19}$$

ANNEXE J

Une introduction à l'étude matricielle des réseaux de poutres

Avertissement

Cette annexe ne sera pas traitée dans l'UV MQ41 mais figure dans ce polycopié puisque cette méthode est celle qui est utilisée[1] par ANSYS.

En section J.9, sont proposés quelques exercices (qui ne seront pas traités en TD).

Dans toute cette annexe, on se place de nouveau dans le cadre de la RDM classique, sans flambement ni entrée en plasticité : on admet que les équilibres étudiés sont toujours stables, ont un comportement élastique linéaire et on se place dans le cadre de petites déformations, ce qui justifie, de nouveau, l'étude des structures par rapport à leur position au repos (pour la détermination des efforts de la RDM).

J.1. Introduction

Le but poursuivi dans cette étude est de rechercher la formulation complète d'une théorie générale des réseaux de poutres. C'est la présentation matricielle qui est retenue. Quelques exemples pédagogiques donnent des petits systèmes, résolvables à la main, mais la grande complexité des structures étudiées rend souvent impossible le calcul manuel ; ces méthodes sont conçues pour le calcul automatique.

Le développement informatique et les progrès de l'analyse numérique ont rendu possible la résolution des systèmes linéaires obtenus. Les logiciels de calculs de structures reposent pour la plupart sur cette analyse matricielle. De plus, ils sont aussi dédiés à l'étude des structures continues (à l'opposé des réseaux de poutres, qui ont un nombre fini de degrés de liberté : elles sont dites discrètes) grâce à la méthodes des éléments finis (non évoquée dans ce cours ; voir UV MN41, MN51, MN52).

Dans le but de simplifier l'écriture et l'exposé, nous considérerons essentiellement des structures planes chargées dans leur plan. Le passage au tridimensionnel ne pose pas de problèmes de principes mais seulement des problèmes liés au volume des calculs.

J.2. Hypothèses de calcul et méthodes

J.2.1. Hypothèses de calcul

Les hypothèses de calculs sont celles de la théorie de l'élasticité linéaires en petites déformations et de la théorie des poutres.

En particulier,

– il existe une relation linéaire entre les déplacements et les forces ;

– les déplacements sont infiniment petits ;

[1] De façon transparente ...

– les poutres possèdent une fibre moyenne et les sections restent droites après déformation ;

Afin d'alléger l'exposé, nous supposerons de plus que

– l'effet de l'effort tranchant est négligeable (mais pas celui de l'effort normal) ;
– la fibre moyenne d'une poutre est rectiligne ;
– les forces appliquées sont ponctuelles.

Mais ces trois dernières hypothèses peuvent être aisément affaiblies.

J.2.2. Principe de la méthode des déplacements

On pose le problème de telle sorte que les inconnues soient des déplacements. Il faut chercher pour quelles valeurs de ces déplacements, la structure est en équilibre.

Cette méthode s'oppose à la méthode duale, dite des forces ; la méthode des forces est utilisée quand on lève l'hyperstaticité de structures en utilisant le théorème de Ménabréa par exemple (où les inconnues sont les réactions d'appui que les équations d'équilibre ne suffisent pas à déterminer).

J.2.3. Principe général de la méthode

On considéra donc une structure plane, formée de poutres rectilignes en comportement élastique linéaire et soumise à des forces ponctuelles (ou à des couples) (voir figure J.1).

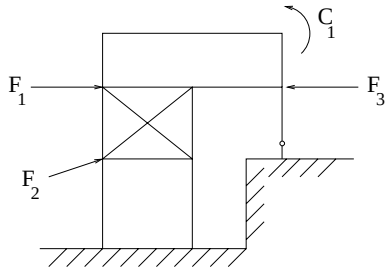


FIG. J.1. Une structure plane

Cette structure est donc un ensemble de poutres rectilignes, chacune d'elle étant soumise à des forces appliquées aux extrémités (en l'absence de charge en travée). Les inconnues du problèmes sont donc les déplacements de chacune de ces extrémités (appelées les nœuds du problème). Les forces appliquées ainsi que les valeurs des déplacements imposés sont des données connues.

En section J.3, nous étudierons, pour chacune des poutres droites, le lien (linéaire) entre les déplacements des extrémités et les forces en ces points. En section J.4, nous étudierons un exemple pour comprendre comment la connaissance de chacune des matrices élémentaires permet d'écrire le problème pour l'ensemble de la structure, en prenant en compte les conditions d'appui ainsi que les chargement imposés. Nous montrerons ensuite en section J.5, pour une structure générale, comment, par un procédé d'assemblage de ces matrices élémentaires, nous pouvons trouver la relation linéaire entre les déplacements et les forces pour l'ensemble de la structure étudiée. Enfin, en section J.6, nous montrerons comment tenir compte des conditions aux limites imposées à la structure et des chargements appliqués. Nous conclurons cette annexe par l'étude d'un deuxième exemple en section J.7.

J.3. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Soit un élément de poutre AB (voir figure J.2). On note L sa longueur, E son module d'Young, S sa section et I son moment quadratique (supposé constants).

On considère le repère local (x, y) lié à cette poutre. La poutre est orientée de A vers B. Par rapport au repère local (x, y), on appelle F_{xA} et F_{yA} les composantes de la force exercée par le nœud A sur la poutre AB et C_A le couple exercé par le nœud A sur la poutre AB (implicitement défini par rapport à un axe z choisi de telle sorte que (x, y, z) définisse un repère orthonormé direct). On définit de même les grandeurs F_{xB}, F_{yB} et C_B, comme l'action du nœud B sur la poutre AB. Ces six efforts sont appelés les forces nodales.

On considère les efforts généralisés associés à ces six forces nodales ; c'est-à-dire, u_A et v_A sont les déplacements du point A (projetés sur l'axe x et sur l'axe y) et ω_A la rotation de la section liée au point A. On définit de même les grandeurs u_B, v_B et ω_B. Ces six déplacements sont appelés les déplacements nodaux.

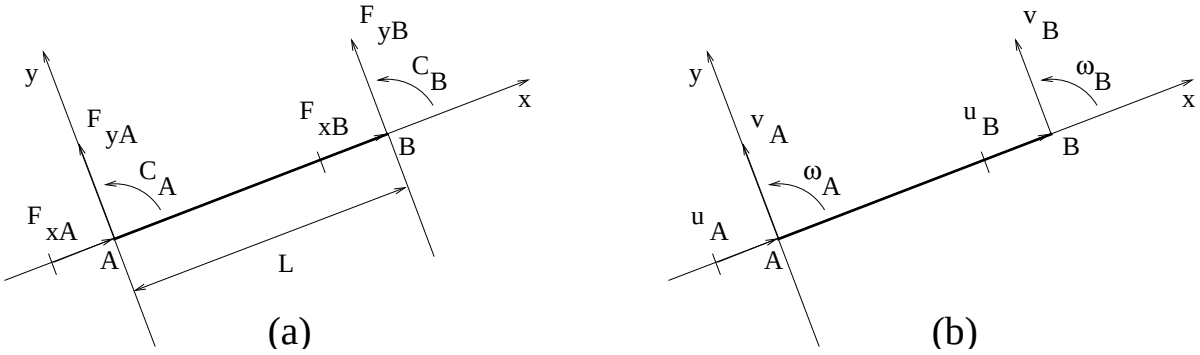


FIG. J.2. Un élément de poutre : forces nodales (a) et déplacements nodaux (b).

On a alors les deux propositions suivantes

PROPOSITION J.1. *Les efforts de la RDM dans la poutre AB sont totalement déterminés par les forces nodales F_{xA}, F_{yA}, C_A, F_{xB}, F_{yB} et C_B.*

DÉMONSTRATION. On considère un point d'abscisse x (choisie nulle en A et donc égale à L en B). On rappelle que les efforts de la RDM en ce point sont égaux à l'action de la partie droite sur la gauche et donc

$$N(x) = F_{xB}, \tag{J.1a}$$

$$T(x) = F_{yB}, \tag{J.1b}$$

$$M(x) = C_B + F_{yB}(L - x), \tag{J.1c}$$

ce qui nous permet de conclure. □

PROPOSITION J.2. *Les déplacements en tout point de la poutre AB sont totalement déterminés par les déplacements nodaux u_A, v_A, ω_A, u_B, v_B et ω_B.*

DÉMONSTRATION. Soient $u(x)$, $v(x)$ les déplacements d'un point M d'abscisse x de la travée AB (par rapport au repère (x, y)) et $\omega(x)$ la rotation de la section liée au point d'abscisse x. D'après

(J.1a), l'effort normal est constant dans la travée AB et la déformation axiale $\varepsilon(x)$ est constante dans la travée et donc

$$\frac{du(x)}{dx} = \varepsilon(x) = C,$$

où C est une constante. Ainsi, $u(x)$ est une fonction affine de x ; compte tenu des conditions aux limites

$$u(0) = u_A,$$
$$u(L) = u_B,$$

il vient

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_A + \frac{x}{L} u_B. \tag{J.2a}$$

Puisque la densité linéique de force appliquée sur la travée AB est nulle, il vient, d'après la relation (1.60) du chapitre 1

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{p}{EI} = 0.$$

Ainsi, v est un polynôme du troisième degré en x

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \tag{J.2b}$$

qui est totalement déterminé par les conditions aux limites :

$$v(0) = v_A, \tag{J.2c}$$
$$v(L) = v_B, \tag{J.2d}$$
$$\frac{dv}{dx}(0) = \omega_A, \tag{J.2e}$$
$$\frac{dv}{dx}(L) = \omega_B. \tag{J.2f}$$

Enfin, on peut donc en déduire

$$\omega(x) = \frac{dv(x)}{dx}. \tag{J.2g}$$

□

On considère les deux vecteurs de $\mathbb{R}^6$ définis respectivement par

$$\boxed{F_e = \begin{pmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ C_A \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ C_B \end{pmatrix} \text{ et } Q_e = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \omega_A \\ u_B \\ v_B \\ \omega_B \end{pmatrix}.} \tag{J.3}$$

D'après les équations de Clapeyron (cf. théorème 3.5 page 47) ainsi que l'étude faite sur la matrice de souplesse et de rigidité dans le chapitre 3 (cf. section 3.4.2 page 62) qui traduisent le comportement linéaire de la poutre AB, on a

PROPOSITION J.3. *il existe une matrice K_e, dite matrice de rigidité, telle que*

$$\boxed{F_e = K_e Q_e.} \tag{J.4}$$

Les propriétés J.1, J.2 et J.3 sont essentielles puisque elles impliquent la proposition suivante

PROPOSITION J.4. *Il est possible de prendre comme inconnues du problème les déplacement nodaux (ce qui justifie le nom de la méthode des déplacements).*

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que si Q_e est connu, en utilisant (J.2), on peut déterminer totalement les déplacements dans la partie AB.

D'autre part, d'après (J.4), F_e est connu. Ainsi, en utilisant (J.1), on peut déterminer totalement les efforts dans la partie AB.

Bref, grâce à Q_e, on connaît toutes les autres données d'après le schéma suivant :

$$Q_e \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x), \\ v(x), \quad \text{pour } x \in [0, L] \quad \text{(grâce à (J.2))}, \\ \omega(x), \end{array} \right.$$

$$Q_e \longrightarrow F_e \quad \text{(grâce à (J.4))},$$

$$F_e \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N(x), \\ M(x), \quad \text{pour } x \in [0, L] \quad \text{(grâce à (J.1))}. \\ T(x), \end{array} \right.$$

□

REMARQUE J.5. Pour les problèmes dans l'espace, chaque nœud possède six degrés de liberté et les matrices élémentaires considérées sont de taille 12×12 mais la méthode reste identique.

REMARQUE J.6. Il existe une théorie simplifiée où seuls les déplacements u_A, v_A, u_B et v_B sont pris en compte. On parle alors de barres et non de poutres ; les matrices de rigidité sont de taille 4×4.

REMARQUE J.7. Pour l'instant, les conditions d'appuis de la poutre AB ne sont pas considérées ; la poutre possède donc bien six degrés de liberté.

REMARQUE J.8. Mathématiquement, avoir six degrés de liberté signifie que le vecteur Q_e (défini par (J.3)) décrit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ en entier, c'est-à-dire que les six déplacements généralisés u_A, v_A, ω_A, u_B, v_B et ω_B sont indépendants. En revanche les six forces généralisées F_{xA}, F_{yA}, C_A, F_{xB}, F_{yB} et C_B ne sont pas indépendantes, puisqu'elles obéissent à l'équilibre global de la structure qui fournit les trois équations [2] :

$$F_{xA} + F_{xB} = 0, \tag{J.5a}$$

$$F_{yA} + F_{yB} = 0, \tag{J.5b}$$

$$C_A + C_B + LF_{yB} = 0. \tag{J.5c}$$

[2] Puisque les trois équations (J.5) sont linéairement indépendantes, mathématiquement le vecteur F_e (défini par (J.3)) décrit donc un sous espace de $\mathbb{R}^6$, de dimension trois. D'après (J.4), cela implique nécessairement que le rang de la matrice K_e est égal à trois, ce que l'on retrouvera dans la proposition J.12 ; on a, en effet, la relation rang-noyau :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(K_e)\big) + \mathrm{rg}(K_e) = \dim(\mathbb{R}^6) = 6.$$

J.3.1. Expression de la matrice dans les axes locaux

Déterminons maintenant l'expression explicite de la matrice de rigidité K_e (qui est définie par rapport aux axes locaux x et y, puisque les efforts et les déplacements nodaux sont définis par rapports à ces axes).

PROPOSITION J.9. *La matrice de rigidité est égale à*

$$K_e = \begin{pmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}. \tag{J.6}$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on écrit, d'après (J.2a),

$$\forall x \in [0, L], \quad u'(x) = \frac{-u_A + u_B}{L}.$$

Puisque

$$u'(x) = \varepsilon(x) = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES},$$

(où E est le module d'Young et S est la section de la poutre) on a

$$\forall x \in [0, L], \quad N(x) = N = \frac{ES}{L}\left(-u_A + u_B\right). \tag{J.7}$$

Déterminons maintenant la flèche v grâce aux équations (J.2b), (J.2c), (J.2d), (J.2e) et (J.2f). D'après (J.2b), il existe a_0, a_1, a_2 et a_3 tels que

$$\forall x \in [0, L], \quad v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Ainsi, les conditions aux limites (J.2c), (J.2d), (J.2e) et (J.2f) s'écrivent

$$\begin{cases} a_0 = v_A, \\ a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = v_B, \\ a_1 = \omega_A, \\ a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2 = \omega_B. \end{cases}$$

On détermine a_2 et a_3 en résolvant un système linéaire. Après calculs, il vient

$$\begin{cases} a_0 = v_A, \\ a_1 = \omega_A, \\ a_2 = \dfrac{3}{L^2}\left(-v_A + v_B\right) - \dfrac{1}{L}\left(2\omega_A + \omega_B\right), \\ a_3 = \dfrac{2}{L^3}\left(v_A - v_B\right) + \dfrac{1}{L^2}\left(\omega_A + \omega_B\right). \end{cases} \tag{J.8}$$

En négligeant les effets des efforts tranchant, on a

$$v'' = \frac{M}{EI},$$

et donc, d'après (J.2b), on a

$$\forall x \in [0, L], \quad M(x) = 2EI\left(a_2 + 3a_3 x\right). \tag{J.9}$$

Puisque

$$T = -\frac{dM}{dx},$$

on a donc

$$\forall x \in [0, L], \quad T(x) = -6EIa_3. \tag{J.10}$$

D'après (J.1a) et (J.7), on a

$$F_{xB} = \frac{ES}{L}\left(-u_A + u_B\right). \tag{J.11}$$

D'après (J.1b) et (J.10), on a

$$F_{yB} = -6EIa_3. \tag{J.12}$$

Enfin, d'après (J.1c) pour $x = L$ et (J.9), on a

$$C_B = 2EI\left(a_2 + 3a_3 L\right). \tag{J.13}$$

En reportant (J.8) dans (J.12) et (J.13), on obtient

$$F_{yB} = -\frac{12EI}{L^3}v_A - \frac{6EI}{L^2}\omega_A + \frac{12EI}{L^3}v_B - \frac{6EI}{L^2}\omega_B, \tag{J.14}$$

$$C_B = \frac{6EI}{L^2}v_A + \frac{2EI}{L}\omega_A - \frac{6EI}{L^2}v_B + \frac{4EI}{L}\omega_B. \tag{J.15}$$

Enfin, d'après l'équilibre (J.5a), (J.5b) et (J.5b) on obtient

$$F_{xA} = \frac{ES}{L}\left(u_A - u_B\right), \tag{J.16}$$

$$F_{yA} = \frac{12EI}{L^3}v_A + \frac{6EI}{L^2}\omega_A - \frac{12EI}{L^3}v_B + \frac{6EI}{L^2}\omega_B, \tag{J.17}$$

$$C_A = \frac{6EI}{L^2}v_A + \frac{4EI}{L}\omega_A - \frac{6EI}{L^2}v_B + \frac{2EI}{L}\omega_B. \tag{J.18}$$

Matriciellement, les relations (J.16), (J.17), (J.18), (J.11), (J.14) et (J.15) sont équivalentes à (J.6). □

On renvoie au TD pour un calcul différent de la matrice K_e, basé sur les méthodes énergétiques.

REMARQUE J.10. Dans la matrice K_e, on voit apparaître un découplage entre les effets dûs à la traction-compression (termes en ES/L) et les effets dûs à la flexion (termes en EI/L, EI/L^2 et EI/L^3).

Dans certains cas, on montre que l'on peut négliger les effets de flexion par rapport aux effets de traction-compression. Dans d'autres cas, ces effets de flexion sont rigoureusement nuls (nullité due à la présence de rotules, à l'extrémité de chacune des poutres). Dans ces deux cas, où la structure ainsi modélisée est appelée treillis ; on parle alors de barres et non de poutres et la matrice de rigidité est de taille 4×4 (voir exercice de TD).

Afin d'alléger les notations, on utilisera systématiquement les notations suivantes pour toute la suite du cours : on pose

$$\alpha = \frac{ES}{L}, \tag{J.19a}$$

$$\beta = \frac{12EI}{L^3}, \tag{J.19b}$$

$$\gamma = \frac{6EI}{L^2}, \tag{J.19c}$$

$$\delta = \frac{4EI}{L}, \tag{J.19d}$$

$$\eta = \frac{2EI}{L}. \tag{J.19e}$$

Ainsi,

$$\boxed{K_e = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & 0 & -\beta & \gamma \\ 0 & \gamma & \delta & 0 & -\gamma & \eta \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & \eta & 0 & -\gamma & \delta \end{pmatrix}}. \tag{J.20}$$

Donnons une propriété de la matrice K_e.

PROPOSITION J.11. *La matrice K_e est symétrique, singulière et positive.*

On rappelle que singulière signifie non inversible et que positive signifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^6, \quad {}^tXK_eX \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. Nous donnons cette preuve, surtout pour constater que les propriétés de la matrice Q_e proviennent des théorèmes énergétiques donnés dans ce cours de MQ41.

Nous avons déjà vu que le théorème de Maxwell-Betti implique l'aspect symétrique de la matrice K_e (cf. section 3.4.2 page 62).

L'aspect positif provient du fait que, sous des forces extérieures induisant des déplacements Q_e, l'énergie de déformation emmagasinée par la structure est égale à (d'après les relations de Clapeyron)

$$W = \frac{1}{2}\,{}^tQ_eK_eQ_e.$$

Par ailleurs, on sait que cette énergie de déformation est égale à

$$W = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_1}\right) ds,$$

quantité positive.

Enfin, pour établir la non inversibilité de la matrice Q_e, il suffit de montrer qu'il existe un vecteur Q_e non nul tel que $F_e = K_e Q_e$ soit nul. De façon plus précise, déterminons le noyau de cette matrice (qui est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$) et montrons qu'il n'est pas réduit au singleton $\{0\}$. L'étude du noyau de K_e fait l'objet de la proposition suivante. □

PROPOSITION J.12. *Le noyau de K_e est un sous espace de dimension trois de $\mathbb{R}^6$. Il est engendré par trois vecteurs, chacun d'entre eux correspondant à un déplacement de la poutre AB de corps rigide :*
- *une translation selon l'axe x (voir figure J.3a) ;*
- *une translation selon l'axe y (voir figure J.3b) ;*
- *une rotation autour du point A (voir figure J.3c).*

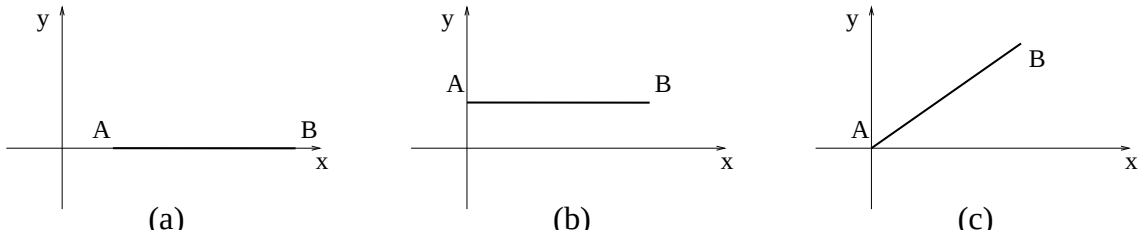


FIG. J.3. translation en x (a), translation en y (b), rotation autour du point A (c).

DÉMONSTRATION. Soit

$$X = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \omega_A \\ u_B \\ v_B \\ \omega_B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6. \tag{J.21}$$

On cherche à résoudre

$$K_e X = 0. \tag{J.22}$$

Remarquons que la matrice K_e est de rang trois. En effet, si on appelle $(\mathcal{L}_i)_{1\leq i\leq 6}$ les six lignes de cette matrice, on constate que

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_4 = 0, \\ &\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_5 = 0, \\ &\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_6 + L\mathcal{L}_5 = 0 \ ; \end{aligned}$$

ces trois égalités ne sont que la traduction de l'équilibre de la structure (cf. équations (J.5a), (J.5b) et (J.5c)). Ainsi les lignes $\mathcal{L}_4$, $\mathcal{L}_5$ et $\mathcal{L}_6$ sont des combinaisons linéaires des lignes $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$ de la matrice K_e et ne contribuent pas au rang de cette matrice ; ainsi,

$$\operatorname{rang}(K_e) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & 0 & -\beta & \gamma \\ 0 & \gamma & \delta & 0 & -\gamma & \eta \end{pmatrix}. \tag{J.23}$$

On considère la matrice extraite Q de K_e définie par

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{J.24}$$

On a

$$\det Q = \alpha\left(\beta\delta - \gamma^2\right) = \frac{12EI}{L^3} \times \frac{4EI}{L} - \frac{36E^2I^2}{L^4} = \frac{12E^2I^2}{L^4} \neq 0.$$

Ainsi, selon (J.23) et (J.24), on a

$$\operatorname{rang}(K_e) = 3. \tag{J.25}$$

Donc, K_e n'est pas inversible. D'après la relation rang-noyau, il vient

$$\dim\left(\ker K_e\right) = 6 - \operatorname{rang}(K_e),$$

et donc

$$\dim\left(\ker K_e\right) = 3. \tag{J.26}$$

De plus, pour résoudre (J.22), il suffit de ne conserver que les trois premières lignes correspondant à la sous matrice Q. Ainsi, (J.22) est équivalent à

$$\begin{aligned} &\alpha u_A - \alpha u_B = 0, \\ &\beta v_A + \gamma\omega_A - \beta v_B + \gamma\omega_B = 0, \\ &\gamma v_A + \delta\omega_A - \gamma v_B + \eta\omega_B = 0. \end{aligned}$$

On peut donc exprimer u_A, v_A et ω_A en fonction de u_B, v_B et ω_B. Après calculs, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} u_A = u_B, \\ v_A = v_B - L\omega_B, \\ \omega_A = \omega_B \end{array} \right. \tag{J.27}$$

On a donc démontré que $X \in \ker A$ si et seulement si ses composantes vérifient (J.27), qui constitue donc une équation cartésienne du noyau de A. Ce noyau est de dimension trois. Ainsi, il est engendré par trois vecteurs linéairement indépendants. On montre que les trois mouvements définis ci-dessous sont indépendants :

- Si on choisit $u_B \in \mathbb{R}$, $v_B = 0$ et $\omega_B = 0$, d'après (J.27) le déplacement de la poutre correspondante est définie par
$$u_A = u_B, \quad v_A = 0, \quad \omega_A = 0,$$
ce qui représente une translation en x.
- De même, si on choisit $u_B = 0$, $v_B \in \mathbb{R}$ et $\omega_B = 0$ dans (J.27), on a
$$u_A = 0, \quad v_A = v_B, \quad \omega_A = 0,$$
ce qui représente une translation en y.
- Si on choisit
$$u_B = 0, \quad v_B = L\omega_B, \quad \omega_B \in \mathbb{R} \tag{J.28}$$
dans (J.27), on a
$$u_A = 0, \quad v_A = 0, \quad \omega_A = \omega_B,$$
ce qui représente une rotation autour du point A.

□

REMARQUE J.13. Le troisième résultat peut avoir l'air surprenant, surtout si l'on se rappelle qu'une rotation de centre A et d'angle ω est telle que

$$\begin{aligned} u_B &= L\cos\omega - L, \\ v_B &= L\sin\omega, \\ \omega_B &= \omega, \end{aligned}$$

ce qui semble être en contradiction avec (J.28). Cependant, si on fait un développement limité à l'ordre deux en ω (justifié par l'hypothèse des petites déformations), il vient

$$\begin{aligned} u_B &= -\frac{L\omega^2}{2} + o\left(\omega^2\right), \\ v_B &= L\omega + o\left(\omega^2\right), \\ \omega_B &= \omega, \end{aligned}$$

dont la partie linéaire correspond bien à (J.28).

REMARQUE J.14. Ces déplacements de corps rigide correspondent à des mouvements tel que $F_e = 0$. D'après (J.1), les efforts de la RDM sont nuls dans la travée AB et cette poutre n'est donc soumise à aucune contrainte ni déformation.

REMARQUE J.15. Le rang de la matrice K_e nous permet de connaître directement le nombre de déplacements indépendants de corps rigide de la poutre AB.

REMARQUE J.16. La dimension du noyau de la matrice K_e est égale à 3 ; Ainsi, K_e admet une matrice extraite de taille 3 et inversible. Physiquement, cela signifie qu'il existe trois valeurs parmi u_A, v_A, ω_A, u_B, v_B, et ω_B, qui, fixées, bloquent la poutre, c'est à dire rendent le système mécanique au moins isostatique. Pour les conditions d'appui usuelles (poutre encastrée en A, libre en B, correspondant à $u_A = v_A = \omega_A = 0$, ou articulée en A, reposant sur appui simple en B, correspondant à $u_A = v_A = 0$ et $v_B = 0$, etc), la poutre est effectivement isostatique.

Cependant, si on fixe trois degrés de liberté quelconques parmi u_A, v_A, ω_A, u_B, v_B, et ω_B, la structure obtenue n'est pas nécessairement isostatique. Mathématiquement, cela signifie que toute matrice de taille 3 extraite de K_e n'est pas toujours inversible. Par exemple, si l'on fixe

$$v_A = \omega_A = 0 \text{ et } v_B = 0, \tag{J.29}$$

avec u_A, u_B, ω_B libres et que l'on fixe

$$F_{xA} = F_{xB} = C_B = 0, \tag{J.30}$$

la structure obtenue est un mécanisme. Ces conditions d'appuis peuvent être modélisées comme le montre la figure J.4.

Avec les valeurs définies par (J.29) et (J.30), on vérifie que le système

$$\begin{pmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ C_A \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ C_B \end{pmatrix} = K_e \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \omega_A \\ u_B \\ v_B \\ \omega_B \end{pmatrix},$$

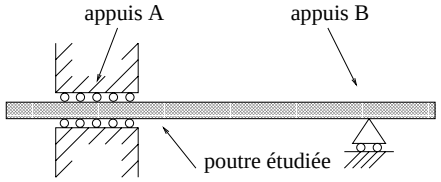


FIG. J.4. Un mécanisme avec trois degrés de liberté bloqués

s'écrit

$$\begin{cases} \alpha\,(u_A - u_B) = 0, \\ \gamma\omega_B = F_{yA}, \\ \eta\omega_B = C_A, \\ -\alpha\,(u_A - u_B) = 0, \\ -\gamma\omega_B = F_{yB}, \\ \delta\omega_B = 0. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} u_A = u_B, \\ \omega_B = 0, \end{cases} \tag{J.31}$$

et à

$$\begin{cases} F_{yA} = 0, \\ C_A = 0, \\ F_{yB} = 0. \end{cases} \tag{J.32}$$

De (J.31), on ne peut déduire les valeurs de u_A et de u_B ; physiquement, la structure présentée en figure J.4 n'est pas bloquée en x : une translation en x est libre (avec des valeurs de réactions d'appuis nulles). Mathématiquement, la matrice extraite de K_e, définie par

$$K'_e = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \delta & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

n'est pas inversible. On peut constater qu'elle est de rang 2 ; cela signifie que pour rendre isostatique la structure de la figure J.4, il faut fixer encore un autre degré de liberté.

J.3.2. Expression de la matrice dans les axes globaux

L'utilisation d'axes locaux est aisée pour obtenir la relation de rigidité. Elle ne permet cependant l'étude d'une structure composée d'un assemblage de poutres que si toutes les poutres ont le même alignement (les différents systèmes d'axes locaux sont alors tous confondus).

Lorsque ce n'est pas le cas, il faut recourir à un système d'axes dit globaux, identiques pour toutes les poutres constituant la structure. Cela permet, lors de l'assemblage des éléments (qui se traduit par l'assemblage des relations de rigidité élémentaires) d'exprimer que les déplacements de chaque nœuds commun à plusieurs poutres sont les mêmes pour toutes ces poutres (et ce, de façon automatisable, donc programmable).

Le problème à résoudre ici est donc le suivant [3] : pour un élément donné défini par ses nœuds A et B dont on connaît la relation de rigidité dans les axes locaux (x, y), trouver la relation de rigidité dans un autre système d'axes (X, Y), dits globaux. (cf. figure J.5).

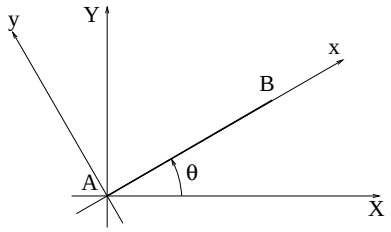


FIG. J.5. Les axes locaux (x, y) et globaux (X, Y)

On considère l'angle θ tel que

$$\theta = \widehat{(X, x)}. \tag{J.33}$$

On considère les forces et les déplacement en A et B définis dans le repère global (X, Y). (cf. figure J.6)

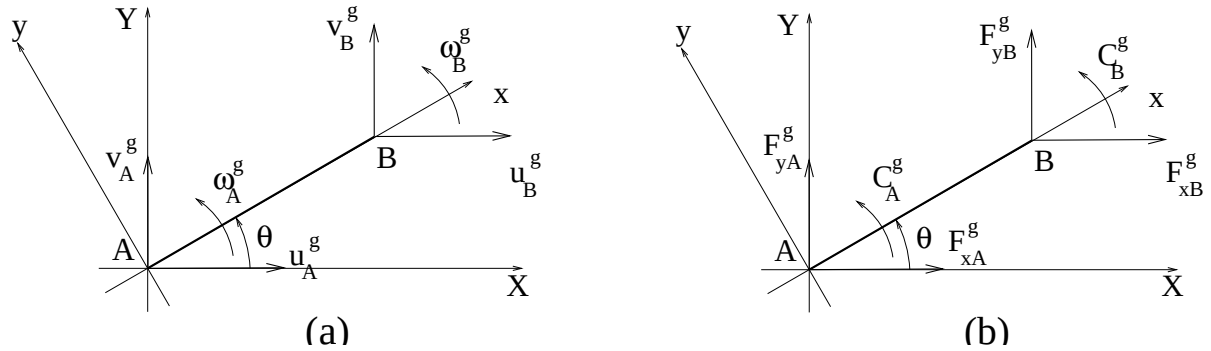


FIG. J.6. Les déplacements nodaux (a) et forces nodales (b) définis dans le repère global (X, Y).

On pose

$$F_e^g = \begin{pmatrix} F_{xA}^g \\ F_{yA}^g \\ C_A^g \\ F_{xB}^g \\ F_{yB}^g \\ C_B^g \end{pmatrix} \text{ et } Q_e^g = \begin{pmatrix} u_A^g \\ v_A^g \\ \omega_A^g \\ u_B^g \\ v_B^g \\ \omega_B^g \end{pmatrix}. \tag{J.34}$$

On cherche à calculer la matrice de rigidité élémentaire K_e^g telle que

$$F_e^g = K_e^g Q_e^g,$$

[3] On commet ici un abus de notation, en omettant de citer le troisième axe z (resp. Z), perpendiculaire au plan (x, y) (égal au plan (X, Y)), tel que le repère (x, y, z) (resp. (X, Y, Z)) soit direct. Par la suite, on n'évoquera pas cet axe, puisque $z = Z$.

en fonction de K_e. C'est un problème de changement de bases de matrices. On a

$$u_A = u_A^g \cos\theta + v_A^g \sin\theta, \tag{J.35a}$$
$$v_A = -u_A^g \sin\theta + v_A^g \cos\theta, \tag{J.35b}$$

et, puisque les plan x, y et X, Y sont identiques,

$$C_A = C_A^g. \tag{J.35c}$$

De même,

$$u_B = u_B^g \cos\theta + v_B^g \sin\theta, \tag{J.35d}$$
$$v_B = -u_B^g \sin\theta + v_B^g \cos\theta, \tag{J.35e}$$
$$C_B = C_B^g. \tag{J.35f}$$

Les relations (J.35) s'écrivent matriciellement

$$Q_e = R_\theta Q_e^g, \tag{J.36}$$

où

$$\boxed{R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}. \tag{J.37}$$

De même, on a

$$F_e = R_\theta F_e^g. \tag{J.38}$$

Ces formules constituent les formules de changement de base (de l'ancienne base, liée à (x, y) à la nouvelle base, liée à (X, Y)). Compte tenu de (J.4), (J.36) et de (J.38), on a

$$R_\theta F_e^g = K_e R_\theta Q_e^g. \tag{J.39}$$

On peut remarquer que l'inverse de la matrice de la rotation plane d'angle θ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est égale à la rotation d'angle $-\theta$:

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, un calcul par bloc nous montre que

$${R_\theta}^{-1} = R_{-\theta} = {}^t R_\theta,$$

et, d'après (J.39),

$$F_e^g = {R_\theta}^{-1} K_e R_\theta Q_e^g = \left({}^t R_\theta K_e R_\theta\right) Q_e^g.$$

On a donc l'expression de la matrice de rigidité dans les axes globaux :

$$\boxed{F_e^g = K_e^g Q_e^g}, \tag{J.40}$$

où

$$\boxed{K_e^g = {}^tR_\theta K_e R_\theta.} \tag{J.41}$$

Il est immédiat que K_e^g jouit des mêmes propriétés que K_e :

PROPOSITION J.17. *La matrice K_e^g est symétrique, singulière et positive.*

Après calculs, on a, avec les notations (J.19),

$$\boxed{K_e^g = \begin{pmatrix} c^2\alpha + s^2\beta & cs(\alpha-\beta) & -s\gamma & -c^2\alpha - s^2\beta & cs(-\alpha+\beta) & -s\gamma \\ cs(\alpha-\beta) & s^2\alpha + c^2\beta & c\gamma & cs(-\alpha+\beta) & -s^2\alpha - c^2\beta & c\gamma \\ -s\gamma & c\gamma & \delta & s\gamma & -c\gamma & \eta \\ -c^2\alpha - s^2\beta & cs(-\alpha+\beta) & s\gamma & c^2\alpha + s^2\beta & cs(\alpha-\beta) & s\gamma \\ cs(-\alpha+\beta) & -s^2\alpha - c^2\beta & -c\gamma & cs(\alpha-\beta) & s^2\alpha + c^2\beta & -c\gamma \\ -s\gamma & c\gamma & \eta & s\gamma & -c\gamma & \delta \end{pmatrix},} \tag{J.42}$$

où

$$c = \cos\theta \text{ et } s = \sin\theta.$$

Ainsi, pour $\theta = 0$ et $\theta = \pm\pi/2$ (valeurs qui interviendront souvent), on a

$$\boxed{\text{pour } \theta = 0, \quad K_e^g = K_e.} \tag{J.43}$$

$$\boxed{\text{pour } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad K_e^g = \begin{pmatrix} \beta & 0 & -\gamma & -\beta & 0 & -\gamma \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ -\gamma & 0 & \delta & \gamma & 0 & \eta \\ -\beta & 0 & \gamma & \beta & 0 & \gamma \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ -\gamma & 0 & \eta & \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}} \tag{J.44}$$

$$\boxed{\text{pour } \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad K_e^g = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \gamma & -\beta & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & -\gamma & 0 & \eta \\ -\beta & 0 & -\gamma & \beta & 0 & -\gamma \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \gamma & 0 & \eta & -\gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}} \tag{J.45}$$

On est donc capable de calculer toutes les matrices de rigidité des poutres constituant la structure, chacune de ces matrices dépendant de l'angle θ et des caractéristiques mécaniques des poutres (elles peuvent être *a priori* différentes pour chaque poutre).

EXEMPLE J.18. Avant de voir en section J.4, un exemple d'assemblage de matrices élémentaires, étudions avec le formalisme matricielle vu un exemple très simple, constitué d'une seule poutre. Reprenons l'exercice 2.5 du TD 2. Dans cet exercice, nous avions étudié la structure de la figure J.7.

Nous avions calculé

$$\omega_B = \frac{FL^2}{2EI}. \tag{J.46}$$

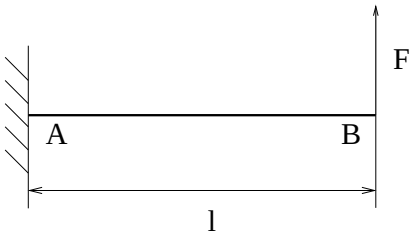


FIG. J.7. Une structure plane très simple

Si nous utilisons le formalisme présenté précédemment, nous avons $\theta = 0$ et la matrice de rigidité élémentaire est égale à

$$K_e = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & 0 & -\beta & \gamma \\ 0 & \gamma & \delta & 0 & -\gamma & \eta \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & \eta & 0 & -\gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{J.47}$$

Le vecteur force est égal à

$$f = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ C_A \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{J.48}$$

où X_A, Y_A et C_A sont les réactions d'appuis et le vecteur déplacement vaut

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_B \\ y_B \\ \omega_B \end{pmatrix}. \tag{J.49}$$

Puisque

$$f = KQ, \tag{J.50}$$

compte tenu de (J.47), (J.48) et (J.49), on aboutit au petit système à trois inconnues, qui fournit x_B, y_B et ω_B :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & -\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ \omega_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix},$$

équivalent à $x_B = 0$ et

$$\begin{pmatrix} y_B \\ \omega_B \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta\delta - \gamma^2} \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on obtient

$$y_B = \frac{FL^3}{3EI}, \quad \omega_B = \frac{FL^2}{2EI},$$

ce qui confirme bien (J.46). Si on réinjecte ces valeurs connues dans (J.50), on obtient les réactions d'appuis :

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ C_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & 0 & -\beta & \gamma \\ 0 & \gamma & \delta & 0 & -\gamma & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_B \\ y_B \\ \omega_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \gamma \\ 0 & -\gamma & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ \omega_B \end{pmatrix}. \tag{J.51}$$

Après calculs, on obtient :

$$X_A = 0, \quad Y_A = -F, \quad C_A = -FL.$$

J.4. Étude complet d'un premier exemple

Nous allons étudier un exemple à deux poutres pour comprendre comment construire la matrice de rigidité de l'ensemble de la structure à partir de chacune des deux matrices élémentaires de rigidité.

On étudie la structure à deux poutres et trois nœuds de la figure J.8.

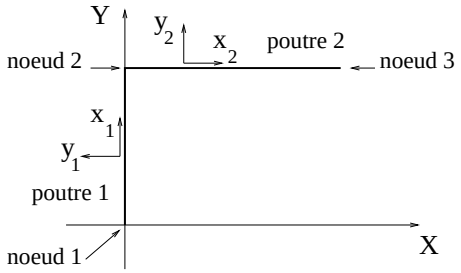


FIG. J.8. Une structure à deux poutres et trois nœuds

Pour l'instant, il n'y a pas de conditions d'appui ; elles seront introduites en dernier lieu.

Chacune des deux poutres possède des caractéristiques L_k, S_k, I_k, E_k ($k \in \{1,2\}$) et la géométrie de l'ensemble de la structure est indiquée sur la figure J.8. On considère les axes globaux (X,Y). Par rapport à ces axes, chacun des 3 nœuds est soumis aux forces de composantes $F_{x,i}$, $F_{x,i}$, et aux couples C_i ($i \in \{1,2,3\}$) ; ces actions sont considérées comme actions de l'extérieur. On appelle, pour chacun des nœuds, u_i, v_i les déplacements par rapports aux axes X et Y et ω_i la rotation du nœud ($i \in \{1,2,3\}$). On considère le vecteur déplacement de l'ensemble de la structure et le vecteur force associé :

$$Q = {}^t(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2, u_3, v_3, \omega_3) \in \mathbb{R}^9, \tag{J.52}$$

$$F = {}^t(F_{x,1}, F_{y,1}, C_1, F_{x,2}, F_{y,2}, C_2, F_{x,3}, F_{y,3}, C_3) \in \mathbb{R}^9. \tag{J.53}$$

La structure possède 9 degrés de liberté. D'après le principe de linéarité, il existe une matrice K 9×9, dite matrice de rigidité de l'ensemble de la structure, telle que

$$F = KQ. \tag{J.54}$$

Par ailleurs, pour chacune des poutres, on définit les axes locaux (x_k, y_k) $(k \in \{1,2\})$ comme sur la figure J.8. Chacune des ces poutres possède une matrice de rigidité par rapport aux axes locaux et une matrice de rigidité par rapports aux axes globaux. On note α_k, β_k, γ_k, δ_k, η_k $(k \in \{1,2\})$ les grandeurs définies par (J.19). On note pour chaque poutre θ_k l'angle entre le repère global et le repère local $(k \in \{1,2\})$. On a $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = 0$. Ainsi, d'après (J.43) et (J.44), les matrices de rigidité des deux poutres 1 et 2 par rapports au repère global (X, Y) valent respectivement

$$K^g_{e,1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & -\gamma_1 & -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \eta_1 \\ -\beta_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \eta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \tag{J.55}$$

et

$$K^g_{e,2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \eta_2 & 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}. \tag{J.56}$$

On cherche la relation entre la matrice K et les matrices $K^g_{e,1}$ et $K^g_{e,2}$.

Pour chacune des deux poutres, on définit les vecteurs forces et déplacement dans les axes globaux

$$F^g_{e,k} = \begin{pmatrix} F^g_{xA,k} \\ F^g_{yA,k} \\ C^g_{A,k} \\ F^g_{xB,k} \\ F^g_{yB,k} \\ C^g_{A,k} \end{pmatrix} \text{ et } Q^g_{e,k} = \begin{pmatrix} u^g_{A,k} \\ v^g_{A,k} \\ \omega^g_{A,k} \\ u^g_{B,k} \\ v^g_{B,k} \\ \omega^g_{B,k} \end{pmatrix}, \text{ pour } k \in \{1,2\}.$$

Les déplacements et les forces de l'ensemble de la structure sont écrits dans les mêmes axes que les déplacements et les forces de chacune des deux poutre. Nous allons écrire maintenant que

- chacun des trois nœuds de la structure est en équilibre ;
- les déplacements de chacun des trois nœuds sont les mêmes pour les poutres connectées à ce nœuds (hypothèse de compatibilité).

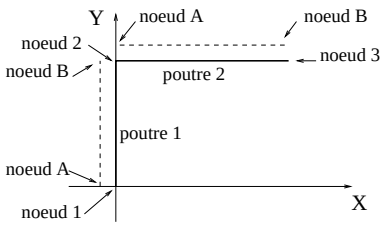


FIG. J.9. la structure globale et les deux poutres

Pour la poutre numéro 1 : le nœud A est égal au point 1 et le nœud B est égal au point 2 (voir figure J.9) ; ainsi, on a

$$\begin{cases} u^g_{A,1} = u_1, \\ v^g_{A,1} = v_1, \\ \omega^g_{A,1} = \omega_1, \\ u^g_{B,1} = u_2, \\ v^g_{B,1} = v_2, \\ \omega^g_{B,1} = \omega_2. \end{cases} \tag{J.57a}$$

De même, pour la poutre numéro 2 : le nœud A est égal au point 2 et le nœud B est égal au point 3 ; ainsi, on a

$$\begin{cases} u^g_{A,2} = u_2, \\ v^g_{A,2} = v_2, \\ \omega^g_{A,2} = \omega_2, \\ u^g_{B,2} = u_3, \\ v^g_{B,2} = v_3, \\ \omega^g_{B,2} = \omega_3. \end{cases} \tag{J.57b}$$

Par ailleurs, le nœud 1 est en équilibre ; les composantes sur l'axe X des forces auquel il est soumis sont

- $F_{x,1}$, action de l'extérieur,
- $-F^g_{xA,k}$, action de la poutre 1 sur le nœud A.

On a donc

$$F_{x,1} = F^g_{xA,1}. \tag{J.58a}$$

De même, on a

$$F_{y,1} = F^g_{yA,1}, \tag{J.58b}$$
$$C_1 = C^g_{A,1}. \tag{J.58c}$$

De même, les composantes sur l'axe X des forces auquel est soumis le nœud 2 sont

- $F_{x,2}$, action de l'extérieur,
- $-F^g_{xB,1}$, action de la poutre 1 sur le nœud B,
- $-F^g_{xA,2}$, action de la poutre 2 sur le nœud A,

et on a

$$F_{x,2} = F^g_{xB,1} + F^g_{xA,2}, \tag{J.58d}$$
$$F_{y,2} = F^g_{yB,1} + F^g_{yA,2}, \tag{J.58e}$$
$$C_2 = C^g_{B,1} + C^g_{A,2}. \tag{J.58f}$$

De même,

$$F_{x,3} = F^g_{xB,2}, \tag{J.58g}$$
$$F_{y,3} = F^g_{yB,2}, \tag{J.58h}$$
$$C_3 = C^g_{B,2}. \tag{J.58i}$$

On écrit enfin les deux relations matricielles portant sur les matrices élémentaires par rapport aux axes globaux :

$$F^g_{e,1} = K^g_{e,1} Q^g_{e,1}, \tag{J.59a}$$
$$F^g_{e,2} = K^g_{e,2} Q^g_{e,2}. \tag{J.59b}$$

On cherche à obtenir à partir de (J.57), (J.58) et (J.59), à trouver une relation linéaire entre F et Q.

D'après (J.57a), (J.59a) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} F^g_{xA,1} \\ F^g_{yA,1} \\ C^g_{A,1} \\ F^g_{xB,1} \\ F^g_{yB,1} \\ C^g_{A,1} \end{pmatrix} = K^g_{e,1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \tag{J.60}$$

En considérant la matrice 9×9 définie par

$$\widetilde{K}^g_{e,1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & -\gamma_1 & -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \eta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{J.61}$$

on constate que (J.60) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} F^g_{xA,1} \\ F^g_{yA,1} \\ C^g_{A,1} \\ F^g_{xB,1} \\ F^g_{yB,1} \\ C^g_{A,1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \widetilde{K}^g_{e,1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{J.62}$$

De même, d'après (J.57b), (J.59b) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} F^g_{xA,2} \\ F^g_{yA,2} \\ C^g_{A,2} \\ F^g_{xB,2} \\ F^g_{yB,2} \\ C^g_{B,2} \end{pmatrix} = K^g_{e,2} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

En considérant la matrice 9×9 définie par

$$\widetilde{K}^g_{e,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \eta_2 & 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}, \tag{J.63}$$

on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F^g_{xA,2} \\ F^g_{yA,2} \\ C^g_{A,2} \\ F^g_{xB,2} \\ F^g_{yB,2} \\ C^g_{B,2} \end{pmatrix} = \widetilde{K}^g_{e,2} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{J.64}$$

En sommant (J.62) et (J.64), il vient

$$\begin{pmatrix} F^g_{xA,1} \\ F^g_{yA,1} \\ C^g_{A,1} \\ F^g_{xB,1} \\ F^g_{yB,1} \\ C^g_{A,1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F^g_{xA,2} \\ F^g_{yA,2} \\ C^g_{A,2} \\ F^g_{xB,2} \\ F^g_{yB,2} \\ C^g_{B,2} \end{pmatrix} = \left(\widetilde{K}^g_{e,1} + \widetilde{K}^g_{e,2} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

ce qui implique, d'après (J.58),

$$\begin{pmatrix} F_{x,1} \\ F_{x,1} \\ C_1 \\ F_{x,2} \\ F_{x,2} \\ C_2 \\ F_{x,3} \\ F_{x,3} \\ C_3 \end{pmatrix} = \left(\widetilde{K}^g_{e,1} + \widetilde{K}^g_{e,2} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \tag{J.65}$$

En comparant (J.54) et (J.65), on a donc

$$\boxed{K = \widetilde{K}^g_{e,1} + \widetilde{K}^g_{e,2}.} \tag{J.66}$$

D'après (J.61) et (J.63), on a donc

$$K = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & -\gamma_1 & -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1+\alpha_2 & 0 & \gamma_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1+\beta_2 & \gamma_2 & 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ -\gamma_1 & 0 & \eta_1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \delta_1+\delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \eta_2 & 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}. \tag{J.67}$$

Les notations sont un peu lourdes, mais, si l'on récapitule les opérations faites, elles sont très simples :

- On a calculé les matrices de rigidité élémentaires $K_{e,1}$ et $K_{e,2}$ de chacune des deux poutres (dans les axes locaux) grâce à (J.20) ;
- en utilisant (J.41), on calcule les matrices de rigidité élémentaires $K^g_{e,1}$ et $K^g_{e,2}$ (de taille 6×6) dans les axes globaux ;
- conformément à (J.61) et (J.63), on a calculé les matrices de rigidité élémentaires $\widetilde{K}^g_{e,1}$ et $\widetilde{K}^g_{e,2}$ (de taille 9×9), en «dispatchant» (ou mieux : en répartissant) chacune des matrices élémentaires $\widetilde{K}^g_{e,1}$ et $\widetilde{K}^g_{e,2}$ dans une matrice de taille 9×9 ;
- on a enfin fait la somme des deux matrices $\widetilde{K}^g_{e,1}$ et $\widetilde{K}^g_{e,2}$.

Dans la section J.5, nous verrons de façon plus générale, comment «assembler» les matrices de rigidité élémentaires de façon à obtenir la matrice de rigidité de l'ensemble de la structure.

Dans cette section, nous étudions maintenant sur l'exemple considéré comment prendre en compte les conditions aux limites et les chargements. Nous étudions plusieurs cas selon les conditions aux limites imposée.

J.4.1. Cas d'un mécanisme (ou structure hypostatique)

Si on impose aucune conditions aux limites à la structure de la figure J.8 et si l'on connaît chacune des neufs composantes de forces imposées à chacun des trois nœuds, le vecteur Q constitue le vecteur

inconnu et le vecteur F est connu. Le système $F = KQ$ n'est pas inversible ; en effet, d'après (J.66)

$$\operatorname{rang}(K) = \operatorname{rang}\left(\widetilde{K}^g_{e,1} + \widetilde{K}^g_{e,2}\right) \leq \operatorname{rang}\left(\widetilde{K}^g_{e,1}\right) + \operatorname{rang}\left(\widetilde{K}^g_{e,2}\right). \tag{J.68}$$

D'après (J.61) et (J.63), les matrices $\widetilde{K}^g_{e,1}$ (resp. $\widetilde{K}^g_{e,2}$) et $K^g_{e,1}$ (resp. $K^g_{e,2}$) ont le même rang, qui, selon (J.41), ont le même rang que la matrice $K_{e,1}$ (resp. $K_{e,2}$), de rang 3, d'après (J.25). Ainsi, selon (J.68),

$$\operatorname{rang}(K) \leq 6, \tag{J.69}$$

ce qui implique que la matrice K est singulière. De façon physique, la singularité de K exprime que la structure obtenue en n'imposant que des forces est un mécanisme (ou une structure hypostatique) : elle n'a pas assez d'appui pour la maintenir en équilibre. D'après (J.69), pour pouvoir résoudre une partie du système $F = KQ$, il faut imposer au moins trois conditions d'appui. Si l'on impose par exemple $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ et les sept valeurs des forces associées aux déplacement généralisés autres que u_1 et v_1 (ce qui correspond à la structure de la figure J.10), on ne peut résoudre le système $F = KQ$: la structure obtenue est encore hypostatique.

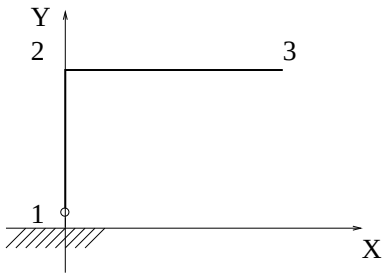


FIG. J.10. Une structure hypostatique

J.4.2. Cas d'une structure isostatique

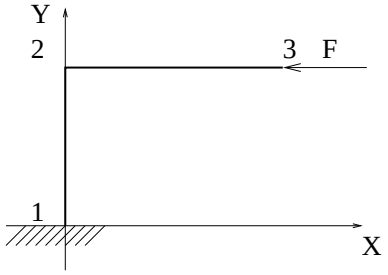


FIG. J.11. Une structure isostatique

On impose maintenant à la structure un encastrement au nœud 1 (cf. figure J.11) : on impose donc les conditions d'appui

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 0, \\ \omega_1 = 0. \end{cases} \tag{J.70}$$

On impose des forces aux degréx de liberté des nœuds qui n'ont pas de déplacement imposé ; par exemple, on choisit

$$\begin{cases} F_{x,2} = 0, \\ F_{y,2} = 0, \\ C_2 = 0, \\ F_{x,3} = -F, \\ F_{y,3} = 0, \\ C_3 = 0, \end{cases} \tag{J.71}$$

(F réel donné) ce qui correspond au chargement de la figure J.11. Les déplacements u_1, v_1 et ω_1 sont connus et les déplacements u_2, v_2, ω_2, u_3, v_3 et ω_3 sont inconnus. De façon duale les forces $F_{x,1}$, $F_{y,1}$ et C_1 sont inconnues (elles correspondent aux réactions d'appuis au nœud 1) tandis que les forces $F_{x,2}$, $F_{y,2}$, C_2, $F_{x,3}$, $F_{y,3}$ et C_3 sont connues. Dans le système $F = KQ$, on remplace les déplacements et les forces connues par leurs valeurs, ce qui permet d'obtenir un système linéaire fournissant les valeurs des inconnues. De façon plus, précise, on obtient, d'après (J.70) et (J.71)

$$\begin{pmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & -\gamma_1 & -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1+\alpha_2 & 0 & \gamma_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1+\beta_2 & \gamma_2 & 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ -\gamma_1 & 0 & \eta_1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \delta_1+\delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \eta_2 & 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \tag{J.72}$$

En séparant les trois premières lignes des six dernières, on constate que (J.72) est équivalent aux deux systèmes

$$\begin{cases} F_{x,1} = -\beta_1 u_2 - \gamma_1 \omega_2, \\ F_{y,1} = -\alpha_1 v_2, \\ C_1 = \gamma_1 u_2 + \eta_1 \omega_2, \end{cases} \tag{J.73}$$

et

$$K' \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{J.74}$$

où

$$K' = \begin{pmatrix} \beta_1+\alpha_2 & 0 & \gamma_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1+\beta_2 & \gamma_2 & 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \delta_1+\delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \eta_2 & 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que la matrice K' est inversible ; ainsi, en résolvant (J.74), on détermine les déplacements inconnus u_2, v_2, ω_2, u_3, v_3 et ω_3 puis, d'après (J.73), on détermine les forces inconnues F_{x1}, $F_{y,1}$ et C_1.

Remarque J.19. La méthode proposée impose de calculer d'abord les déplacements imposés (par (J.74)) et d'en déduire les réactions d'appuis (selon (J.73)), ce qui peut sembler fastidieux pour déterminer les réactions d'appui d'une structure isostatique. Cependant, la détermination des réactions d'appui n'est pas l'unique but recherché par cette méthode ; de plus, nous pouvons retrouver les équations données par l'équilibre d'après (J.73) et (J.74). En effet, si on fait la somme de la première ligne de (J.73) et de la première ligne et de la quatrième ligne de (J.74), on obtient

$$F_{x,1} - F = 0. \tag{J.75}$$

De même, si on fait la somme de la deuxième ligne de (J.73) et de la deuxième ligne et de la cinquième ligne de (J.74), on obtient

$$F_{y,1} = 0. \tag{J.76}$$

Les équations (J.75) et (J.76) traduisent la nullité des composantes des forces appliquées à la structure (projetée sur X et sur Y). On pourrait de même retrouver la nullité du moment.

Dans tous les cas, si le problème est correctement posé (en conditions d'appuis et chargement), le système linéaire fournissant les déplacements inconnus doit être inversible.

J.4.3. Cas d'une structure hyperstatique

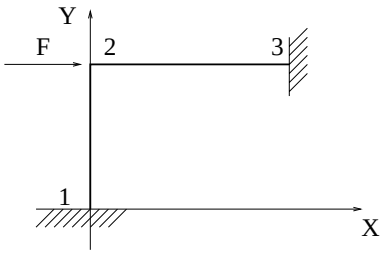


Fig. J.12. Une structure hyperstatique

On impose maintenant à la structure un encastrement au nœud 1 et un encastrement au nœud 2. (cf. figure J.12) La structure est hyperstatique de degré 3. On impose les conditions d'appui

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 0, \\ \omega_1 = 0. \\ u_3 = 0, \\ v_3 = 0, \\ \omega_3 = 0, \end{cases} \tag{J.77}$$

On impose des forces aux degré de liberté des nœuds qui n'ont pas de déplacement imposé ; par exemple, on choisit

$$\begin{cases} F_{x,2} = F, \\ F_{y,2} = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases} \tag{J.78}$$

(F réel donné) ce qui correspond au chargement de la figure J.12. Les déplacements u_1, v_1, ω_1, u_3, v_3 et ω_3, sont connus et les déplacements u_2, v_2 et ω_2 ω_3 sont inconnus. De façon duale les forces F_{x1}, $F_{y,1}$, C_1, $F_{x,3}$, $F_{y,3}$, C_3 sont inconnues (elles correspondent aux réactions d'appuis aux nœud 1 et 3) tandis que les forces $F_{x,2}$, $F_{y,2}$ et C_2 sont connues. Dans le système $F = KQ$, on remplace les déplacements et les forces connues par leurs valeurs, ce qui permet d'obtenir un système linéaire fournissant les valeurs des inconnues. De façon plus, précise, on obtient, d'après (J.77) et (J.78)

$$\begin{pmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ C_1 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & -\gamma_1 & -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1+\alpha_2 & 0 & \gamma_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1+\beta_2 & \gamma_2 & 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ -\gamma_1 & 0 & \eta_1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \delta_1+\delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \eta_2 & 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{J.79}$$

En séparant les trois premières lignes du milieu des six autres, on constate que (J.79) est équivalent aux deux systèmes

$$\begin{pmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ C_1 \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \eta_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \tag{J.80}$$

et

$$K' \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{J.81}$$

où

$$K' = \begin{pmatrix} \beta_1+\alpha_2 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \alpha_1+\beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \delta_1+\delta_2 \end{pmatrix}.$$

On peut montrer que la matrice K' est inversible ; ainsi, en résolvant (J.81), on détermine les déplacements inconnus u_2, v_2 et ω_2 puis, d'après (J.80), on détermine les forces inconnues F_{x1}, $F_{y,1}$, C_1, $F_{x,3}$, $F_{y,3}$ et C_3.

J.5. Assemblage des matrices élémentaires

Généralisons maintenant le calcul de la matrice de rigidité de l'ensemble de la structure en fonction de chacune des matrices de rigidités élémentaires.

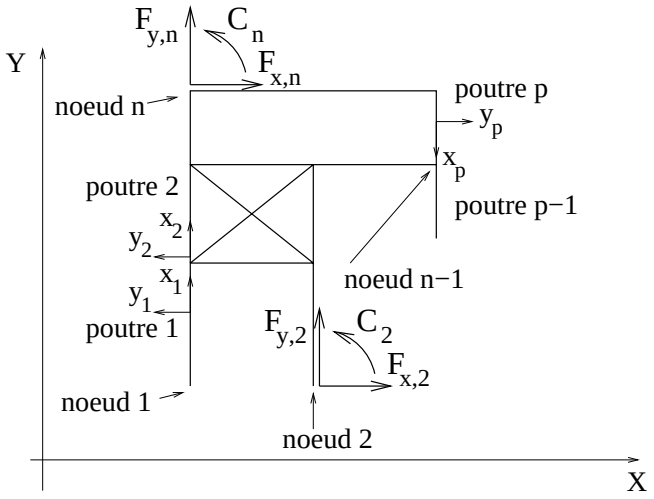


FIG. J.13. Une structure plane à p poutres et à n nœuds

Considérons une structure composée de p poutres numérotées de 1 à p, connectées en n nœuds, numérotés de 1 à n (pour l'instant, toujours sans appuis) (voir figure J.13).

Chacune des p poutres possède des caractéristiques L_k, S_k, I_k, E_k ($k \in \{1, ..., p\}$) et la géométrie de l'ensemble de la structure est supposée connue. On considère les axes globaux (X, Y). Par rapport à ces axes, chacun des n nœuds est soumis aux forces de composantes $F_{x,i}$, $F_{x,i}$, et aux couples C_i ($i \in \{1, ..., n\}$) ; ces actions sont considérées, comme action de l'extérieur. On appelle, pour chacun des nœuds u_i, v_i les déplacements par rapports aux axes X et Y et ω_i la rotation du nœud ($i \in \{1, ..., n\}$). On considère le vecteur déplacement de l'ensemble de la structure et le vecteur force associé :

$$Q = {}^t(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2, ..., u_n, v_n, \omega_n) \in \mathbb{R}^{3n}, \tag{J.82}$$

$$F = {}^t(F_{x,1}, F_{y,1}, C_1, F_{x,2}, F_{y,2}, C_2, ..., F_{x,n}, F_{y,n}, C_n) \in \mathbb{R}^{3n}. \tag{J.83}$$

Par ailleurs, pour chacune des poutres, on définit les axes locaux (x_k, y_k) ($k \in \{1, ..., p\}$) comme sur la figure J.13. Chacune des ces poutres possède une matrice de rigidité $K_{e,k}$ ($k \in \{1, ..., p\}$) par rapport aux axes locaux et une matrice de rigidité $K^g_{e,k}$ par rapports aux axes globaux. On note α_k, β_k, γ_k, δ_k, η_k ($k \in \{1, ..., p\}$) les grandeurs définies par (J.19). On note pour chaque poutre θ_k l'angle entre le repère global et le repère local ($k \in \{1, ..., p\}$) ; ainsi, selon (J.41),

$$\forall k \in \{1, ..., p\}, \quad K^g_{e,k} = {}^t R_\theta K_{e,k} R_\theta. \tag{J.84}$$

La structure possède $3n$ degrés de liberté. D'après le principe de linéarité, il existe une matrice K $3n \times 3n$, dite matrice de rigidité de l'ensemble de la structure, telle que

$$F = KQ. \tag{J.85}$$

On cherche à calculer la matrice K en fonction des matrices de rigidité élémentaires $K^g_{e,k}$. Pour cela, nous allons écrire maintenant que

- chacun des n nœuds de la structure est en équilibre ;
- les déplacements de chacun des n nœuds sont les mêmes pour les poutres connectées à ce nœuds (hypothèse de compatibilité).

Pour simplifier l'écriture de l'assemblage, on considère les matrices blocs définies par

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad Q_i = {}^t(u_i, v_i, \omega_i), \tag{J.86}$$

$$F_i = {}^t(F_{x,i}, F_{y,i}, C_i). \tag{J.87}$$

Ainsi, (J.82) et (J.83) se réécrivent

$$Q = {}^t(Q_1, Q_2, ..., Q_n), \tag{J.88}$$

$$F = {}^t(F_1, F_2, ..., F_n). \tag{J.89}$$

Pour chaque nœud $i \in \{1, ..., n\}$, on considère les n_i poutres connectées à ce nœud, de numéro $p_{i,1}$, $p_{i,2}$, ..., p_{i,n_i} (éléments de $\{1, ..., p\}$). On note $F_{i,1}$, $F_{i,2}$, ..., F_{i,n_i} les forces exercées par chacune de ces poutres sur le nœud i (chacune des ces forces est en fait un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et représente les deux composantes de la force et le moment de la force). Voir figure J.14

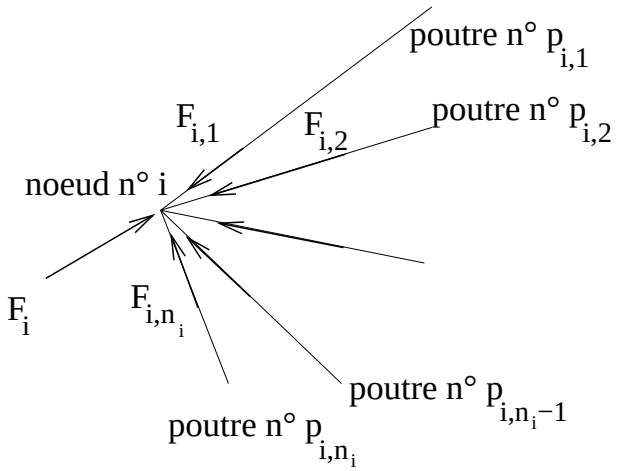


FIG. J.14. Le nœud i connecté aux poutres de numéro $p_{i,1}$, $p_{i,2}$, ..., p_{i,n_i} et soumis aux forces $F_{i,1}$, $F_{i,2}$, ..., F_{i,n_i} exercées par les poutres de numéro $p_{i,1}$, $p_{i,2}$, ..., p_{i,n_i} et à la force extérieure F_i.

Puisque le nœud i est en équilibre, il vient

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad F_i + \sum_{j=1}^{n_i} F_{i,j} = 0. \tag{J.90}$$

Pour $l \in \{1, ..., n\}$, on considère E_l la matrice de $\mathcal{M}_{3n,3}(\mathbb{R})$ définie par

$$E_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{pmatrix} \tag{J.91}$$

Seules, les lignes d'indices $3l-2$, $3l-1$, $3l$ sont non nulles. Si I_3 désigne la matrice identité d'ordre trois, (J.91) se réécrit

$$\forall l \in \{1, ..., n\}, \quad E_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{J.92}$$

où 0 désigne ici la matrice nulle de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et seule la l-ième ligne est non nulle. On pose

$$\forall l \in \{1, ..., n\}, \quad \Phi_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

vecteur de $\left(\mathbb{R}^3\right)^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la l-ième égale au vecteur F_l. Avec ces notations, on a

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \Phi_i = E_i F_i. \tag{J.93}$$

De même, on pose

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \forall j \in \{1, ..., n_i\}, \quad \Psi_{i,j} = E_i F_{i,j}. \tag{J.94}$$

On peut donc écrire, en sommant (J.90) sur i,

$$F + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \Psi_{i,j} = 0, \tag{J.95}$$

où F est défini par (J.89).

REMARQUE J.20. L'équation (J.95) est très importante : elle traduit l'équilibre local de la structure, établi nœud par nœud. Elle traduit aussi l'équilibre global de la structure, obtenu comme somme des équilibres locaux. On peut montrer que l'équilibre local (J.90) est équivalent à l'équilibre global (J.95).

Par ailleurs, pour chaque poutre $k \in \{1, ..., p\}$, dont les deux extrémités sont numérotés localement 1 et 2, on note $F_{k,1}$ (resp. $F_{k,2}$) le vecteur de $\mathbb{R}^3$ représentant les trois composantes de l'action du nœud 1 (resp. 2) sur la poutre par rapport aux axes globaux. De même, on appelle $Q_{k,1}$ (resp. $Q_{k,2}$) le vecteur de $\mathbb{R}^3$ représentant les trois composantes du déplacement du nœud 1 (resp. 2) par rapport aux axes globaux (cf. figure J.15).

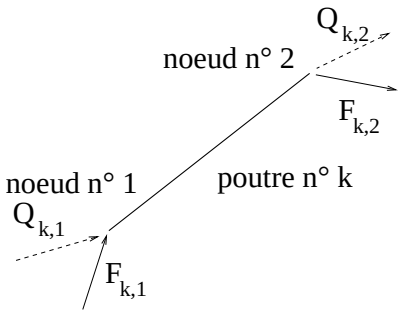


FIG. J.15. La poutre de numéro k et ses deux nœuds numérotés localement 1 et 2.

Pour chaque poutre $k \in \{1, ..., p\}$, on connaît les numéros globaux des nœuds numérotés localement 1 et 2. Il existe donc, pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, une application de $\{1, 2\}$ dans $\{1, ..., n\}$, que l'on note [4] num_k :

Pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, il existe une application $\text{num}_k : \{1, 2\} \to \{1, ..., n\}$,
qui au numéro local du nœud 1 ou 2 associe son numéro global. (J.96)

Ainsi, à chaque couple (i, j) tel que $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., n_i\}$, correspond un unique couple d'entier $(\nu, k) \in \{1, 2\} \times \{1, ..., p\}$ tel que

$$\text{num}_k(\nu) = i, \tag{J.97}$$

$$k = p_{i,j}. \tag{J.98}$$

[4] Parfois, comme en MN41, on parle de matrice de connectivité, tableau dans lequel, on note, pour $k \in \{1, ..., p\}$, et pour $e \in \{1, 2\}$, les valeurs $\text{num}_k(e)$, qui correspondent aux numéros globaux des nœuds 1 et 2, sous la forme :

numéro de la poutre $\longrightarrow$	1	2	...	p
numéro local 1	$\text{num}_1(1)$	$\text{num}_2(1)$	...	$\text{num}_p(1)$
numéro local 2	$\text{num}_1(2)$	$\text{num}_2(2)$	...	$\text{num}_p(2)$

k est le numéro de la poutre et i est le numéro du nœud correspondant. i et j décrivent $\{1,...,n\}$ et $\{1,...,n_i\}$ si et seulement si ν et k décrivent $\{1,2\}$ et $\{1,...,p\}$. Or, $F_{i,j}$ représente l'action de la poutre sur le nœud et $F_{k,\nu}$ représente l'action correspondante du nœud sur la poutre et on a donc

$$F_{i,j} = -F_{k,\nu}.$$

Ainsi, avec les notations précédentes, on a

$$\Psi_{i,j} = -E_i F_{k,\nu},$$

et, d'après (J.97),

$$\Psi_{i,j} = -E_{\mathrm{num}_k(\nu)} F_{k,\nu}. \tag{J.99}$$

Ainsi, (J.95) s'écrit en remplaçant le paramétrage par i et j par le paramétrage par k et ν :

$$F = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} \Psi_{i,j} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{2} E_{\mathrm{num}_k(\nu)} F_{k,\nu},$$

soit encore

$$F = \sum_{k=1}^{p} E_{\mathrm{num}_k(1)} F_{k,1} + E_{\mathrm{num}_k(2)} F_{k,2}. \tag{J.100}$$

Par ailleurs, la matrice de rigidité élémentaire $K^g_{e,k}$ (matrice de taille 6×6) de la poutre k peut s'écrire par bloc

$$\boxed{\forall k \in \{1,...,p\}, \quad K^g_{e,k} = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ {}^tB_k & C_k \end{pmatrix},} \tag{J.101}$$

où A_k, B_k et C_k sont des matrices carrées de taille 3×3 avec A_k et C_k symétriques (puisque $K^g_{e,k}$ l'est). Il est clair que, pour tout $k \in \{1,...,p\}$, $\mathrm{num}_k(1) \neq \mathrm{num}_k(2)$.

On considère la matrice de rigidité élémentaire $\widetilde{K}^g_{e,k}$ de la poutre k répartie dans une matrice de taille $3n \times 3n$ définie par blocs de la façon suivante :

$$\boxed{\forall i,j \in \{1,...,n\}, \quad \widetilde{K^g_{e,k}}_{i,j} = \begin{cases} O & \text{si } i \neq \mathrm{num}_k(1),\ i \neq \mathrm{num}_k(2),\ j \neq \mathrm{num}_k(1), \text{ et } j \neq \mathrm{num}_k(1), \\ A_k & \text{si } i = \mathrm{num}_k(1) \text{ et } j = \mathrm{num}_k(1), \\ B_k & \text{si } i = \mathrm{num}_k(1) \text{ et } j = \mathrm{num}_k(2), \\ {}^tB_k & \text{si } i = \mathrm{num}_k(2) \text{ et } j = \mathrm{num}_k(1), \\ C_k & \text{si } i = \mathrm{num}_k(2) \text{ et } j = \mathrm{num}_k(2). \end{cases}} \tag{J.102}$$

Cette définition semble lourde mais la figure J.16 montre la construction simple de $\widetilde{K}^g_{e,k}$ par répartition des éléments de la matrice $K^g_{e,k}$ en respectant la numérotation globale. Sur cette figure, nous n'avons indiqué que les éléments non nuls de la matrice $\widetilde{K}^g_{e,k}$:

Par ailleurs, d'après (J.40) et (J.101) et on a

$$\begin{pmatrix} F_{k,1} \\ F_{k,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ {}^tB_k & C_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{k,1} \\ Q_{k,2} \end{pmatrix}. \tag{J.103}$$

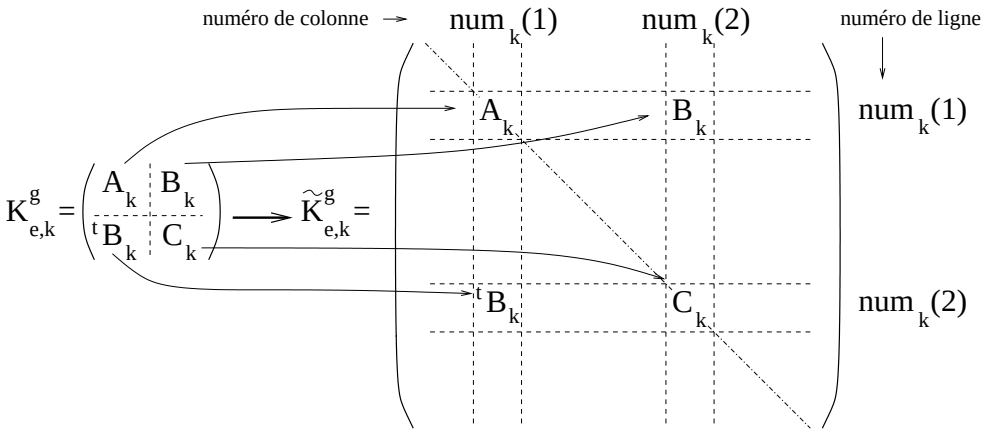


FIG. J.16. La construction de la matrice $\widetilde{K}^g_{e,k}$ à partir de la matrice $K^g_{e,k}$.

Or, d'après l'hypothèse de compatibilité des déplacements, le déplacement $Q_{k,1}$ (resp. $Q_{k,2}$) est égal à $Q_{\mathrm{num}_k(1)}$ (resp. $Q_{\mathrm{num}_k(2)}$). Ainsi, (J.103) peut se réecrire dans $\left(\mathbb{R}^3\right)^n$, sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_{k,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_{k,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \dots & & & & 0 \\ 0 & & & & & \dots & & & & 0 \\ & \vdots & & & & \dots & & & \vdots & \\ 0 & & & & & \dots & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k & 0 & \dots & 0 & B_k & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \dots & & & & 0 \\ & \vdots & & & & \dots & & & \vdots & \\ 0 & & & & & \dots & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & {}^tB_k & 0 & \dots & 0 & C_k & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \dots & & & & 0 \\ & \vdots & & & & \dots & & & \vdots & \\ 0 & & & & & \dots & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{\mathrm{num}_k(1)-1} \\ Q_{\mathrm{num}_k(1)} \\ Q_{\mathrm{num}_k(1)+1} \\ \vdots \\ Q_{\mathrm{num}_k(2)-1} \\ Q_{\mathrm{num}_k(2)} \\ Q_{\mathrm{num}_k(2)+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{J.104}$$

où les matrices A_k, B_k, ${}^tB_k$ et C_k ont été réparties conformément à la figure J.16. Par construction, le vecteur de gauche de (J.104) est égal à

$$E_{\mathrm{num}_k(1)}F_{k,1} + E_{\mathrm{num}_k(2)}F_{k,2}.$$

Ainsi, (J.104) est équivalent à

$$E_{\mathrm{num}_k(1)}F_{k,1} + E_{\mathrm{num}_k(2)}F_{k,2} = \widetilde{K}^g_{e,k}Q,$$

ce qui implique, par sommation sur k,

$$\sum_{k=1}^{p} E_{\mathrm{num}_k(1)}F_{k,1} + E_{\mathrm{num}_k(2)}F_{k,2} = \sum_{k=1}^{p} \widetilde{K}^g_{e,k}Q,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{p} E_{\mathrm{num}_k(1)}F_{k,1} + E_{\mathrm{num}_k(2)}F_{k,2} = \left(\sum_{k=1}^{p} \widetilde{K}^g_{e,k}\right) Q. \tag{J.105}$$

En comparant (J.100) et (J.105), il vient

$$F = \left(\sum_{k=1}^{p} \widetilde{K}_{e,k}^{g} \right) Q. \tag{J.106}$$

En comparant (J.85) et (J.106), on a la propriété fondamentale :

$$\boxed{K = \sum_{k=1}^{p} \widetilde{K}_{e,k}^{g}.} \tag{J.107}$$

Cette égalité traduit que K est un assemblage des matrices élémentaires réparties $\widetilde{K}_{e,k}^{g}$, définies elles-mêmes à partir des matrices élémentaires $K_{e,k}^{g}$ (cf. figure J.16).

On a la propriété suivante :

PROPOSITION J.21. *La matrice K est symétrique, singulière et positive.*

DÉMONSTRATION. On peut montrer aisément que chaque matrice $\widetilde{K}_{e,k}^{g}$ (pour $k \in \{1, ..., p\}$) est symétrique, singulière et positive. Par sommation, la matrice K est donc symétrique et positive. On admet que, si les conditions aux limites n'ont pas été choisies, le système mécanique obtenu est un mécanisme et la matrice associée K n'est pas inversible. □

Récapitulons la méthode d'assemblage, qui peut être appliquée à toute structure :

- Pour chaque poutre de numéro $k \in \{1, ..., p\}$, on a calculé les matrices de rigidité élémentaires $K_{e,k}$ (dans les axes locaux) grâce à (J.20) ;
- en utilisant (J.41), on calcule les matrices de rigidité élémentaires $K_{e,k}^{g}$ (de taille 6×6) dans les axes globaux ;
- conformément à (J.102) (ou la figure J.16), on a calculé les matrices de rigidité élémentaires $\widetilde{K}_{e,k}^{g}$ (de taille $3n \times 3n$), en répartissant chacune des matrices élémentaires $\widetilde{K}_{e,k}^{g}$ dans une matrice de taille $3n \times 3n$;
- on a enfin fait la somme des p matrices $\widetilde{K}_{e,k}^{g}$.

J.6. Modélisation et traitement des conditions d'appui et des chargements appliqués

En reprenant la notation (J.82) et (J.83), on a donc le système matriciel

$$\begin{pmatrix} F_{x,1} \\ F_{x,1} \\ C_1 \\ F_{x,2} \\ F_{x,2} \\ C_2 \\ \vdots \\ F_{x,n} \\ F_{x,n} \\ C_n \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ C_n \end{pmatrix}. \tag{J.108}$$

On suppose maintenant, que sur les $3n$ réels $u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2, ..., u_n, v_n, \omega_n$, un nombre $3n-q$ d'entre eux sont connus (où $q \in \{1, ..., 3n\}$) : ils correspondent à des déplacements imposés à la structure. Les

q autres valeurs sont donc inconnues. Par dualité, sur les $3n$ réels $F_{x,1}, F_{y,1}, C_1, F_{x,2}, F_{y,2}, C_2, ..., F_{x,n}$, $F_{y,n}$, C_n, on suppose que q d'entre eux sont connus ; ils correspondent à des forces imposées à la structure en des degrés de liberté où le déplacement généralisé correspondant est inconnu. Les $3n - q$ autres valeurs sont inconnues et correspondent aux réactions d'appui (là où l'on a imposé des déplacements connus).

On peut montrer que, si la structure chargée et avec des valeurs de déplacements d'appuis définis comme ci-dessus n'est pas un mécanisme, alors, en remplaçant les valeurs connues des forces et des déplacements dans (J.108), alors on aboutit

- d'abord à un système linéaire d'ordre q fournissant les déplacements inconnus.
- Puis, après résolution de ce système, on aboutit à $3n - q$ équations linéaires fournissant les forces d'appuis inconnues.

Cette méthode est très générale, peut se programmer et fournit des systèmes linéaires avec des propriétés remarquables, qui donnent beaucoup d'intérêt à cette méthode.

Pour cela, précisons dans la proposition suivante, les propriétés des systèmes linéaires obtenus. On suppose que l'on a construit la matrice K de (J.108) par assemblage des matrices élémentaires. On peut, supposer sans perte de généralité (quitte à modifier l'ordre des équations obtenues et des inconnues) que

- les q premières composantes du vecteur Q sont inconnues ;
- les $3n - q$ dernières composantes du vecteur Q sont connues ;
- les q premières composantes du vecteur F sont connues ;
- les $3n - q$ dernières composantes du vecteur F sont inconnues.

On peut donc écrire

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_c \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} F_c \\ R \end{pmatrix},} \tag{J.109}$$

où

Q_i sont les déplacements inconnus

Q_c sont les déplacements connus (imposés)

F_c sont les forces connues (appliquées)

R sont les forces inconnues (réactions d'appui).

En utilisant la notation par blocs, on considère les matrices A, B et C telles que

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix}.} \tag{J.110}$$

On a alors

PROPOSITION J.22. *Si les déplacements imposés sont en nombre suffisant pour assurer que la structure est au moins isostatique, la matrice A est symétrique, définie positive. Dans ce cas, l'égalité fournissant Q_i s'écrit*

$$\boxed{Q_i = A^{-1}\left(F_c - BQ_c\right).} \tag{J.111}$$

Le vecteur Q_i étant connu, on calcule alors R grâce à

$$\boxed{R = {}^tBQ_i + CQ_c.} \tag{J.112}$$

DÉMONSTRATION. On a déjà démontré que K est symétrique singulière et positive. Ainsi, la matrice A est symétrique. On admet son aspect inversible (il caractérise le fait que le problème est correctement posé). Par ailleurs, le système (J.108) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c \\ R \end{pmatrix}.$$

En calculant par bloc, on constate que ce système est encore équivalent à

$$AQ_i + BQ_c = F_c,$$
$${}^tBQ_i + CQ_c = R.$$

Ce système est équivalent à

$$AQ_i = F_c - BQ_c, \tag{J.113}$$
$${}^tBQ_i + CQ_c = R, \tag{J.114}$$

ce qui fournit successivement les inconnues Q_i et R, puisque A est inversible. □

REMARQUE J.23. Si on impose tous les déplacements nuls, on a alors $Q_c = 0$ et la proposition J.22 implique

$$Q_i = A^{-1}F_c.$$

et

$$R = {}^tBQ_i.$$

REMARQUE J.24. L'aspect symétrique défini positif de la matrice obtenue est intéressant car on peut utiliser des algorithmes d'inverse plus performants que les algorithmes classiques par exemple, un gradient conjugué. On rappelle, à ce propos, que dans la méthode du gradient conjugué, on minimise une fonctionnelle quadratique. Cette fonctionnelle correspond, en fait, à l'énergie potentielle du solide et est liée à l'énergie interne élastique de la structure et au travail des forces extérieures. Ce résultat peut être démontré par le biais de formulations variationnelles (en méthode des éléments finis). En faisant de l'anthropomorphisme exacerbé, on peut dire que la nature est paresseuse : pour mettre un système en équilibre, elle lui donne la configuration qui rend son énergie la plus faible possible.

REMARQUE J.25. Écrite par blocs, la matrice K est creuse (elle possède beaucoup de coefficients nuls) et possède une structure bande, c'est-à-dire en considérant que chaque matrice $K_{i,j}$ est une matrice 3×3, on a

$$K = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} \end{pmatrix},$$

où il existe un entier $M \in \{1, ..., n\}$, appelé largeur de bande, tel que

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \quad |i - j| \geq M \Longrightarrow K_{i,j} = 0.$$

Grâce à la fonction numérotation globale définie par (J.96), on peut donner une expression explicite de cette largeur de bande :

$$M = \max_{k \in \{1,\dots,p\}} |\mathrm{num}_k(1) - \mathrm{num}_k(2)| + 1. \tag{J.115}$$

Pour montrer cela, on observe que, pour tout (i, j) dans $\{1, ..., n\}^2$,

– si $i \neq j$, K_{ij} est égal à zéro s'il n'y a aucune poutre entre les nœuds de numéros i et j et est non nul s'il y a une poutre entre les nœuds de numéros i et j ;
– si $i = j$, K_{ij} est une somme de p matrices blocs de la matrice élémentaire, p étant le nombre de poutres ayant le nœud i comme extrémité.

La formule (J.115) est importante : elle permet de prévoir, avant même d'assembler la matrice K, sa largeur de bande. Sur le plan numérique, il est d'autant plus facile de résoudre un système linéaire avec une matrice creuse que sa largeur de bande est petite. Ainsi, la numérotation des nœuds et des poutres influe beaucoup sur la largeur de bande de la matrice obtenue (mais pas sur le nombre de coefficients non nuls) et la génération de numéroteur automatique qui optimise cette largeur de bande est maintenant tout à fait au point dans les logiciels dédiés au calculs de structures.

Remarque J.26. Il existe d'autres méthodes pour prendre en compte les conditions d'appuis, que celle exposée dans cette section, qui possède l'inconvénient de désorganiser la structure de la matrice assemblée. Une autre méthode, dite de pénalisation, consiste à introduire dans les équations du système linéaire obtenu par assemblage, des «grands» coefficients, de façon à traduire la nullité des valeurs des déplacements imposés. Cette méthode de pénalisation, parfaitement inutile pour résoudre «à la main» de petits systèmes (obtenus par exemple en TD ou ... en examen) mais s'avère parfaitement automatisable et donc adaptée à la programmation. À ce titre, cette méthode est utilisée par les logiciels de calculs de structures (type ANSYS).

J.7. Étude d'un second exemple

Étudions maintenant un second exemple de calcul de structure pour montrer l'aspect automatique de la méthode proposée.

On étudie la structure à trois poutres et à quatre nœuds définis comme sur la figure J.17 (pour l'instant, on ne considère ni les chargements ni les déplacements imposés). On a donc $p = 3$ et $n = 4$.

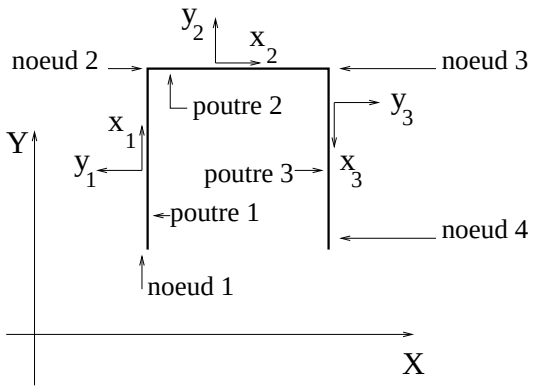


Fig. J.17. Une structure à trois poutres et quatre nœuds

Chacune de ces trois poutres possède des caractéristiques L_k, S_k, I_k, E_k ($k \in \{1, 2, 3\}$) et la géométrie de l'ensemble de la structure est indiquée sur la figure J.17. On considère les axes globaux (X, Y). Par rapport à ces axes, chacun des 4 nœuds est soumis aux forces de composantes $F_{x,i}$, $F_{x,i}$, et aux couples C_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) ; ces actions sont considérées comme actions de l'extérieur. On appelle, pour chacun des nœuds, u_i, v_i les déplacements par rapports aux axes X et Y et ω_i la rotation du

nœud ($i \in \{1,2,3,4\}$). On considère le vecteur déplacement de l'ensemble de la structure et le vecteur force associé :

$$Q = {}^t(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2, u_3, v_3, \omega_3, u_4, v_4, \omega_4) \in \mathbb{R}^{12}, \tag{J.116}$$

$$F = {}^t(F_{x,1}, F_{y,1}, C_1, F_{x,2}, F_{y,2}, C_2, F_{x,3}, F_{y,3}, C_3, F_{x,4}, F_{y,4}, C_4) \in \mathbb{R}^{12}. \tag{J.117}$$

La structure possède 12 degrés de liberté. D'après le principe de linéarité, il existe une matrice K 12×12, dite matrice de rigidité de l'ensemble de la structure, telle que

$$F = KQ.$$

Par ailleurs, pour chacune des poutres, on définit les axes locaux (x_k, y_k) ($k \in \{1,2,3\}$) comme sur la figure J.17. Chacune des ces poutres possède une matrice de rigidité par rapport aux axes locaux et une matrice de rigidité par rapports aux axes globaux. On note α_k, β_k, γ_k, δ_k, η_k ($k \in \{1,2,3\}$) les grandeurs définies par (J.19). On note pour chaque poutre θ_k l'angle entre le repère global et le repère local ($k \in \{1,2\}$). On a donc

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\pi}{2},\\ \theta_2 &= 0,\\ \theta_3 &= -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (J.43), (J.44) et (J.45), les matrices de rigidité des poutres 1, 2 et 3 par rapports au repère global (X, Y) valent respectivement

$$K^g_{e,1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & -\gamma_1 & -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \eta_1 \\ -\beta_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \eta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix},$$

$$K^g_{e,2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \eta_2 & 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

$$K^g_{e,3} = \begin{pmatrix} \beta_3 & 0 & \gamma_3 & -\beta_3 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & \delta_3 & -\gamma_3 & 0 & \eta_3 \\ -\beta_3 & 0 & -\gamma_3 & \beta_3 & 0 & -\gamma_3 \\ 0 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & \eta_3 & -\gamma_3 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}.$$

On utilise de nouveau la notation matricielle par bloc utilisée en section J.5. D'après (J.101), on donc

$$\forall k \in \{1, ..., 3\}, \quad K^g_{e,k} = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ {}^tB_k & C_k \end{pmatrix},$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \eta_1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \beta_3 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -\beta_3 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & -\alpha_3 & 0 \\ -\gamma_3 & 0 & \eta_3 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} \beta_3 & 0 & -\gamma_3 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ -\gamma_3 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Pour définir maintenant les matrices $\widetilde{K}^g_{e,k}$, il ne reste plus qu'à définir le lien entre la numérotation locale et la numérotation globale des nœuds, donné directement par la figure J.17. Avec les notations de la section J.5, on a [5]

$$\mathrm{num}_1(1) = 1, \quad \mathrm{num}_1(2) = 2, \tag{J.118}$$

$$\mathrm{num}_2(1) = 2, \quad \mathrm{num}_2(2) = 3, \tag{J.119}$$

$$\mathrm{num}_3(1) = 3, \quad \mathrm{num}_3(2) = 4. \tag{J.120}$$

Grâce à (J.118), on répartit donc la matrice $K^g_{e,1}$ selon (J.102) dans une matrice bloc 4×4

$$\widetilde{K}^g_{e,1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ {}^tB_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même, grâce à (J.119), on répartit la matrice $K^g_{e,2}$

$$\widetilde{K}^g_{e,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & {}^tB_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[5] Dans ce cas, la matrice de connectivité vaut :

numéro de la poutre $\longrightarrow$	1	2	3
numéro local 1	1	2	3
numéro local 2	2	3	4

De même, grâce à (J.120), on répartit la matrice $K^g_{e,3}$

$$\widetilde{K}^g_{e,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 \\ 0 & 0 & {}^tB_3 & C_3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, d'après (J.107), on somme toutes ces matrices pour obtenir la matrice de rigidité de l'ensemble de la structure :

$$K = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ {}^tB_1 & C_1 + A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & {}^tB_2 & C_2 + A_3 & B_3 \\ 0 & 0 & {}^tB_3 & C_3 \end{pmatrix}. \tag{J.121}$$

Si on considère les matrices blocs définissant Q et F, définies par (J.116) et (J.117), il vient

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ {}^tB_1 & C_1 + A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & {}^tB_2 & C_2 + A_3 & B_3 \\ 0 & 0 & {}^tB_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}. \tag{J.122}$$

En explicitant les blocs A_i, B_i et C_i, on obtient les coefficients de la matrice K (de taille 12×12) :

$$K = \begin{pmatrix}
\beta_1 & 0 & -\gamma_1 & -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\beta_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1+\alpha_2 & 0 & \gamma_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1+\beta_2 & \gamma_2 & 0 & -\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\
-\gamma_1 & 0 & \eta_1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \delta_1+\delta_2 & 0 & -\gamma_2 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2+\beta_3 & 0 & \gamma_3 & -\beta_3 & 0 & \gamma_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_2+\alpha_3 & -\gamma_2 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \eta_2 & \gamma_3 & -\gamma_2 & \delta_2+\delta_3 & -\gamma_3 & 0 & \eta_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & 0 & -\gamma_3 & \beta_3 & 0 & -\gamma_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & \eta_3 & -\gamma_3 & 0 & \delta_3
\end{pmatrix}.$$

On peut la noter de la façon suivante pour garder «la structure bloc» (on n'indique dans cette matrice que les blocs non nuls) :

$$K = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\begin{matrix} \beta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \delta_1 \end{matrix} & \begin{matrix} -\beta_1 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \eta_1 \end{matrix} & & \\
\hline
\begin{matrix} -\beta_1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \eta_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \beta_1+\alpha_2 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \alpha_1+\beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \delta_1+\delta_2 \end{matrix} & \begin{matrix} -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & -\gamma_2 & \eta_2 \end{matrix} & \\
\hline
 & \begin{matrix} -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \eta_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \alpha_2+\beta_3 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \beta_2+\alpha_3 & -\gamma_2 \\ \gamma_3 & -\gamma_2 & \delta_2+\delta_3 \end{matrix} & \begin{matrix} -\beta_3 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & -\alpha_3 & 0 \\ -\gamma_3 & 0 & \eta_3 \end{matrix} \\
\hline
 & & \begin{matrix} -\beta_3 & 0 & -\gamma_3 \\ 0 & -\alpha_3 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & \eta_3 \end{matrix} & \begin{matrix} \beta_3 & 0 & -\gamma_3 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ -\gamma_3 & 0 & \delta_3 \end{matrix} \\
\hline
\end{array}$$

On gère ensuite les conditions aux limites et les chargements comme ci-dessus.

J.8. Calcul des efforts et des déplacements dans la structure

Chacun des déplacements des nœuds étant maintenant définis dans les axes globaux (pour chacune des poutres A_kB_k) on peut déterminer les déplacements Q_e dans les axes locaux grâce à (J.36). Puis,

en utilisant (J.2), on peut déterminer totalement les déplacements dans la partie A_kB_k. Enfin, d'après (J.4), F_e est connu. Ainsi, en utilisant (J.1), on peut déterminer totalement les efforts dans la partie A_kB_k.

Grâce à tous ces efforts, on pourrait aussi déterminer la distribution des contraintes dans les différentes sections de la poutre A_kB_k

J.9. Quelques exercices

Ces exercices sont issus d'un TD sur les réseaux de poutre, désormais non traité (pour la saison Automne 2004).

EXERCICE J.27 (Étude d'un système de ressorts).

On souhaite étudier le système mécanique représenté sur la figure J.18. Il est composé de 4 ressorts, de raideurs k_l ($l \in \{1, ..., 4\}$), strictement positives et de quatre nœuds, numérotés de 1 à 4. Le nœud 1 est bloqué et, seul le nœud 4 est soumis à une force extérieure d'intensité f.

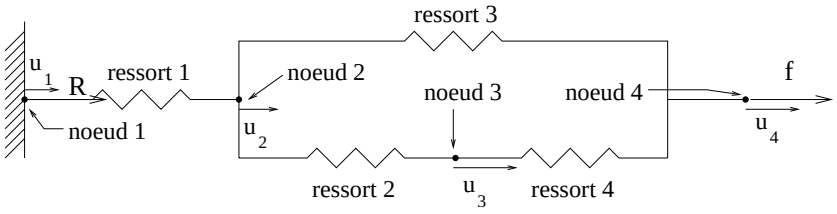


FIG. J.18. Un système formé de quatre ressorts et de quatre nœuds.

En utilisant les méthodes d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires vues en cours, on souhaite calculer les déplacements inconnus u_2, u_3 et u_4, ainsi que la réaction R de l'appui sur le nœud 1.

1°) On considère un ressort liant deux points de déplacement u_1 et u_2 et soumis de l'extérieur à des forces F_1 et F_2 (cf. figure J.19).

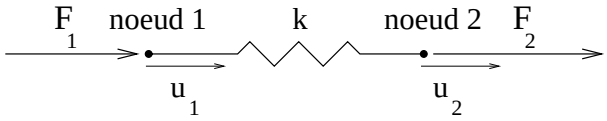


FIG. J.19. Une «poutre» élémentaire.

Montrer que l'on peut considérer ce système comme une «poutre» élémentaire et calculer sa matrice de rigidité, c'est-à-dire, la matrice de taille 2×2 telle que

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = K_e \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{J.123}$$

2°) Est-ce nécessaire de distinguer les matrices de rigidité dans les axes locaux et les axes globaux ?

3°) En notant pour chaque nœud $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, u_i le déplacement du nœud et F_i, la force extérieure auquel il est soumis, calculer la matrice de rigidité de l'ensemble de la structure, c'est-à-dire la matrice

4×4 telle que

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \tag{J.124}$$

On considérera dans cette question, que, pour l'instant, la structure n'est soumise à aucune condition d'appui et on assemblera, comme dans le cours, les diverses matrices élémentaires «dispatchées» $\widetilde{K}_{e,l}$, associées à chaque ressort.

4°) En imposant maintenant les conditions d'appuis en force et en déplacement, montrer que (J.124) est équivalent à un système 3×3 et une égalité, fournissant les valeurs inconnues u_2, u_3 et u_4, ainsi que la réaction R de l'appui sur le nœud 1.

5°) Montrer que ce système ce simplifie de façon à pouvoir calculer R indépendamment des déplacements u_2, u_3 et u_4 ; on montrera que

$$\begin{aligned} R &= -f, \\ u_2 &= \frac{f}{k_1}, \\ \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} &= f\, b, \end{aligned}$$

où b est une matrice de taille 2×1 que l'on explicitera.

Exercice J.28 (Étude d'un système de barres).

On souhaite étudier le système mécanique représenté sur la figure J.20. Il est composé de poutres, reliées entre elles par des rotules, est soumis au nœud A à une force d'intensité F, repose en B sur un appui simple et est articulé en C. Un tel système est appelé treillis : les rotules empêchent tout moment d'apparaître et l'on parle, dans ce cas de barres et non plus de poutres. Pour appliquer la méthode d'assemblage du cours, on cherche à décomposer cette structure en structures élémentaires.

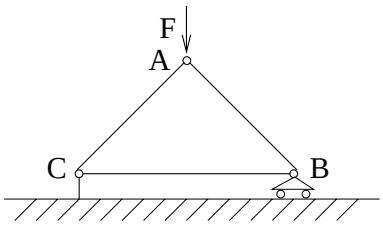


Fig. J.20. Un système formé de trois barres et de trois nœuds.

1°) On considère la barre représentée sur la figure J.21. Comme en cours, on considère F_{Ax} et F_{Ay} (resp. F_{Bx} et F_{By}) les composantes de la réaction du nœud 1 (resp. 2) sur la barre par rapport aux axes locaux (x, y). On ne considère plus les couples en 1 et 2 qui ne peuvent qu'être nuls à cause des rotules. On appelle u_A, v_A et ω_A (resp. u_B, v_B et ω_B) les deux déplacements et la rotation du nœud 1 (resp. 2) par rapport aux axes (x, y) Montrer que si la barre est en équilibre alors

$$F_{Ay} = F_{By} = 0. \tag{J.125}$$

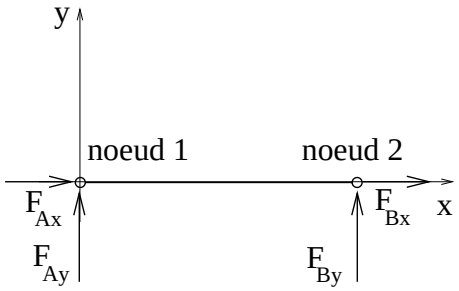


FIG. J.21. Une barre élémentaire.

2°) Calculer la constante k telle que

$$\begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Bx} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}. \tag{J.126}$$

Déduire de (J.125) et (J.126) que si on pose

$$F_e = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Bx} \\ F_{By} \end{pmatrix} \text{ et } Q_e = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{pmatrix},$$

alors

$$F_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_e. \tag{J.127}$$

On notera que la matrice K_e est définie dans les axes locaux (x, y) (ainsi que les matrices F_e et Q_e)

3°) Comme dans le cours, on cherche maintenant l'expression de la matrice de rigidité Q_e^g dans des axes globaux (cf. figure J.22) définis par l'angle θ. Montrer que l'on a

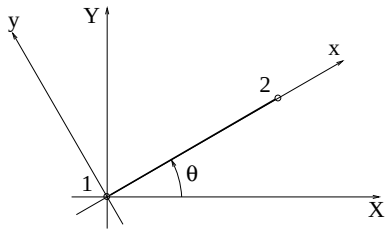


FIG. J.22. Les axes locaux (x, y) et globaux (X, Y)

$$K_e^g = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{J.128}$$

4°) On considère la structure constituée de barres et de nœuds numérotés comme sur la figure J.23. On suppose que pour les trois barres, le module d'Young et le même et est noté E ; de plus, on note

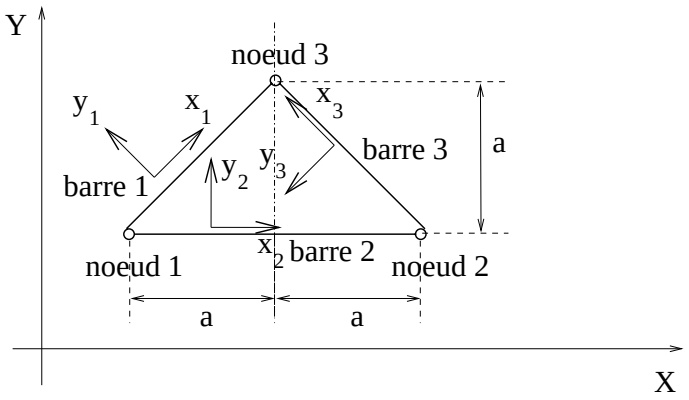


FIG. J.23. Un système formé de trois barres et de trois nœuds.

pour les barres 1 et 3 : la section S_1,

pour la barre 2 : la section S_2.

Calculer les matrices de rigidité élémentaires pour chacune des trois barres dans les axes globaux (X, Y) en fonction de

$$k_1 = k_3 = \frac{ES_1}{\sqrt{2}a},$$
$$k_2 = \frac{ES_2}{2a}.$$

5°) En déduire par assemblage la matrice de rigidité K de la structure de la figure J.23, liant les vecteurs

$$Q = {}^t(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) \text{ et } F = {}^t(F_{x,1}, F_{y,1}, F_{x,2}, F_{y,2}, F_{x,3}, F_{y,3}).$$

6°) En déduire un système linéaire fournissant les déplacements et les réactions d'appuis de la structure de la figure J.20.

7°) En déduire les déplacements inconnus.

EXERCICE J.29 (Un autre calcul de la matrice de rigidité K_e par méthode énergétique).

On considère une poutre de longueur L encastrée en A, orientée de A vers B. On considère le repère (x, y) (cf. figure J.24)

On impose en B un déplacement horizontal x_B, un déplacement vertical y_B et une rotation ω_B. Pour l'instant, x_B, y_B et ω_B sont quelconques.

1°) Quel est le degré d'hyperstaticité de la structure étudiée ?

2°) On appelle X, Y et C, les réactions d'appui au point B. Pourquoi ces grandeurs peuvent être considérées comme inconnues hyperstatiques ?

3°) Montrer que cette configuration permet de calculer les trois dernières colonnes de la matrice de rigidité K_e d'une poutre (qu'on ne calculera pas dans cette question).

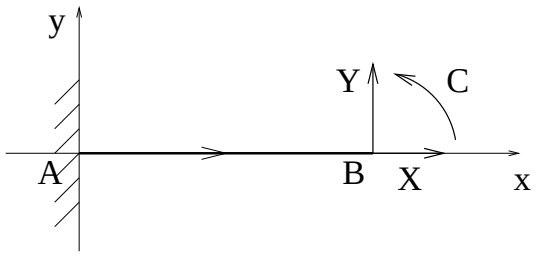


FIG. J.24. Une poutre de longueur encastrée en A soumise à trois déplacements quelconques en B

4°) En négligeant la contribution de l'effort tranchant (mais pas celle de l'effort normal), montrer que, si W désigne l'énergie de déformation,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial X} &= \frac{XL}{ES},\\ \frac{\partial W}{\partial Y} &= \frac{L^2}{6EI}\left(3C+2YL\right),\\ \frac{\partial W}{\partial C} &= \frac{L}{2EI}\left(2C+YL\right).\end{aligned}$$

5°) Déduire du théorème de Ménabréa et de la question précédente, un système de trois équations fournissant les valeurs de X, Y et C (pour des valeurs quelconques de x_B, y_B et ω_B). On ne cherchera pas à résoudre ce système dans cette question.

6°) On suppose que

$$\begin{aligned}x_B &= 1,\\ y_B &= 0,\\ \omega_B &= 0.\end{aligned}$$

Calculer les valeurs de X, Y et C et la quatrième colonne de la matrice de rigidité K_e de la poutre étudiée.

7°) De même, en supposant

$$\begin{aligned}x_B &= 0,\\ y_B &= 1,\\ \omega_B &= 0,\end{aligned}$$

calculer les valeurs de X, Y et C et la cinquième colonne de la matrice de rigidité K_e.

8°) De même, en supposant

$$\begin{aligned}x_B &= 0,\\ y_B &= 0,\\ \omega_B &= 1,\end{aligned}$$

calculer les valeurs de X, Y et C et la sixième colonne de la matrice de rigidité K_e.

Compte tenu de la symétrie de la matrice de rigidité K_e, on vient donc de montrer que

$$K_e = \begin{pmatrix} * & * & * & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ * & * & * & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}.$$

On pourrait faire de même pour calculer les réactions d'appui en A mais il est plus rapide de conclure comme dans la démonstration du cours pour en déduire les coefficients manquant :

$$K_e = \begin{pmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}. \tag{J.129}$$

Exercice J.30 (Calcul de la matrice de rigidité d'une barre par condensation).

Dans cet exercice, on calcule par condensation la matrice de rigidité intervenant dans l'exercice J.28 (voir (J.127)). Ici, la méthode redonne des résultats très simples, mais elle pourrait être utilisées dans d'autres cas, plus complexes.

1°) On considère une poutre avec sa matrice de rigidité K définie par (J.129) et, avec les notations habituelles, les six déplacements u_A, v_A, ω_A, u_B, v_B et ω_B et les six forces généralisées F_{Ax}, F_{Ay}, C_A, F_{Bx}, F_{By} et C_B.

En supposant les moments nuls aux extrémités

$$C_A = C_B = 0, \tag{J.130}$$

exprimer ω_A et ω_B en fonction des déplacements aux extrémités u_A, v_A, u_B et v_B.

2°) Pouvait on obtenir ces relations différemment ?

3°) Les six grandeurs u_A, v_A, ω_A, u_B, v_B et ω_B sont elles indépendantes sous l'hypothèse (J.130) ?

4°) Des relations obtenues dans la question 2, obtenir les relations entre u_A, v_A, u_B, v_B et F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx} et F_{By} et retrouver (J.127).