Mécanique des milieux continus



François Sidoroff

École Centrale Lyon



Ce document est sous licence Creative Commons
Paternité
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage des Conditions Initiales à l'Identique
3.0 France
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr

Table des matières

1 Mécanique des milieux continus 1

1.1 Lois de conservation 1

1.1.1 Lois de la physique 1

1.1.2 Étude d'une loi de conservation 3

1.1.3 Utilisation de la loi fondamentale 6

1.2 Puissances virtuelles 7

1.2.1 Théorème des puissances virtuelles 7

1.2.2 Principe des puissances virtuelles 9

1.2.3 Théorie du premier gradient 11

1.3 Thermodynamique des milieux continus 12

1.3.1 Conservation de l'énergie 12

1.3.2 Inégalité de Clausius-Duhem 14

2 Tenseur des contraintes 17

2.1 Notions générales 17

2.1.1 Vecteur contrainte et tenseur des contraintes 17

2.1.2 Contraintes principales et invariants 19

2.1.3 États de contraintes particuliers 20

2.2 Représentations géométriques des contraintes 22

2.2.1 Quadriques des contraintes 22

2.2.2 Espace des contraintes principales 23

2.3 Représentation de Mohr 25

2.3.1 Tricercle de Mohr 25

2.3.2 Cercle de Mohr et pole 26

3 Étude des déformations 29

3.1 Grandes déformations 29

3.1.1 Description de la déformation 29

3.1.2 Le tenseur des déformations 30

3.2 Petites déformations 33

3.2.1 Hypothèse des petites perturbations 33

3.2.2 Tenseur linéarisé des déformations 34

3.2.3 Dualité contraintes–déformations 36

3.3 Compatibilite des déformations 38

3.3.1 Calcul de la rotation 38

3.3.2 Calcul du déplacement 39

4 Lois de comportement 43
4.1 Problèmes de mécanique des solides 43
4.1.1 Formulations dynamiques et quasi-statiques 43
4.1.2 Conditions aux limites 44
4.1.3 Lois de comportement 47
4.1.4 Essais classiques 49
4.2 Comportement des solides 50
4.2.1 Diversité des comportements 50
4.2.2 Modèles rhéologiques 53

5 Élasticité linéaire 57
5.1 Description du comportement élastique 57
5.1.1 Tenseur d'élasticité 57
5.1.2 Isotropie et anisotropie 59
5.1.3 Élasticité anisotrope 60
5.2 Élasticité linéaire isotrope 62
5.2.1 Coéfficients d'élasticité 62
5.2.2 Découplage déviateur et partie sphérique 64
5.3 Critère de limite d'élasticité 65
5.3.1 Forme générale du critère 65
5.3.2 Critères de Von Mises et Tresca 67

6 Élasticité classique 71
6.1 Équations de l'élasticité 71
6.1.1 Problèmes reguliers 71
6.1.2 Theorème d'unicité en dynamique 73
6.1.3 Équations de Navier 74
6.1.4 Équations de Beltrami 75
6.2 Problèmes simples 76
6.2.1 Déformation d'un bloc pesant 76
6.2.2 Réservoir sphérique sous pression 78

7 Problème de Saint-Venant 81
7.1 Traction et flexion pure 81
7.1.1 Principe de Saint-Venant 81
7.1.2 Répartition des contraintes normales 84
7.1.3 Flexion pure 85
7.2 Torsion 87
7.2.1 Section circulaire ou annulaire 87
7.2.2 Théorie générale 90
7.2.3 Calcul du déplacehent 92
7.2.4 Sections particulières 94
7.3 Flexion composée 96
7.3.1 Champ de contraintes 96
7.3.2 Calcul des efforts appliqués 99
7.3.3 Section circulaire 101

8 Problèmes plans en élasticité 103
8.1 Élasticité plane 103
8.1.1 Déformations planes 103
8.1.2 Contraintes planes 105
8.1.3 Utilisation de la variable complexe 106

8.2 Exemples 108
8.2.1 Problème de Saint-Venant 108
8.2.2 Traction plane d'une plaque perforée 110

9 Méthodes variationnelles 113
9.1 Théoremes variationnels 113
9.1.1 Notions fondamentales 113
9.1.2 Théorème de l'énergie potentielle 115
9.1.3 Théorème de l'énergie complémentaire 117
9.1.4 Application a la torsion 119
9.2 Théorèmes de l'énergie 123
9.2.1 Théorème de réciprocité 123
9.2.2 Théorème de Castigliano 124
9.3 Méthode des éléments finis 125
9.3.1 Principe 125
9.3.2 Application 127
9.3.3 Étude d'un élément 128
9.3.4 Assemblage 130

10 Plasticité classique 133
10.1 Lois de comportement 133
10.1.1 Comportenent plastique 133
10.1.2 Plasticité parfaite 135
10.1.3 Potentiel plastique 136
10.2 Exemples 138
10.2.1 Flexion d'une poutre 138
10.2.2 Réservoir sphérique 140
10.3 Méthodes variationnelles 141
10.3.1 Problème en vitesses 141
10.3.2 Introduction à l'analyse limite 143

11 Thermoélasticité linéaire 147
11.1 Lois de comportement 147
11.1.1 Théorie thermoélastique 147
11.1.2 Thermoélasticité classique 149
11.2 Problèmes de thermoélasticité 150
11.2.1 Problèmes aux limites 150
11.2.2 Exemple 151

A Notations tensorielles. 153
A.1 Vecteurs et tenseurs 153
A.1.1 Notations indicielles 153
A.1.2 Changement de repère 154
A.1.3 Vecteurs 154
A.1.4 Applications linéaires 155
A.1.5 Formes bilinéaires 155
A.1.6 Tenseurs du second ordre 156
A.1.7 Tenseurs d'ordre superieur 156
A.1.8 Invariants 157
A.2 Permutations et déterminants 158
A.2.1 Symboles de permutation 158
A.2.2 Déterminant d'une matrice 158
A.2.3 Polynôme caractéristique 159
A.2.4 Adjoint d'un tenseur antisymétrique 159

A.3 Calcul vectoriel et analyse vectorielle 160
A.3.1 Calcul vectoriel 160
A.3.2 Analyse vectorielle 160
A.3.3 Transformations d'integrales 161
A.4 Coordonnées curvilignes 162
A.4.1 Coordonnées cylindriques 162
A.4.2 Coordonnées sphériques 162

Chapitre 1

Mécanique des milieux continus

Les éléments de base de la mécanique des milieux continus [1], à savoir, la cinématique des milieux continus, les variables lagrangiennes et eulériennes, les dérivées particulaires ainsi que la description des efforts intérieurs et des contraintes, ont présentés dans le cours d'introduction à la MMC. Nous nous bornerons donc, dans ce chapitre, à les replacer dans un contexte *Mécanique des Solides*. En particulier, nous ne donnerons pas le détail des démonstrations. Le lecteur pourra se référer aux traités classiques [5–8, 13, 16, 17, 22–24].

1.1 Lois de conservation

1.1.1 Lois de la physique

En MMC, on appelle *loi de conservation*, la traduction mathématique des lois de la physique. Dans le cadre d'une schématisation donnée, elles sont donc universelles. Par exemple, dans le cas de la MMC classique objet de ce cours, il faut écrire pour tout domaine matériel D :

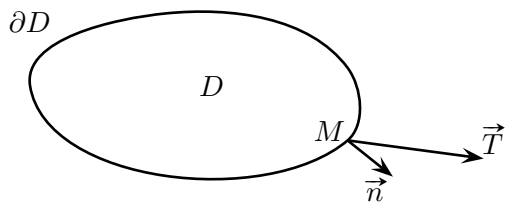
— la loi de conservation de la masse ;

— la loi fondamentale de la dynamique qui se décompose en deux parties : conservation de la quantité de mouvement et conservation du moment cinétique.

En introduisant la masse spécifique, c'est-à-dire la masse par unité de volume ρ, la loi de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \rho \,\mathrm{d}v = 0 \tag{1.1}$$

où $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ est la dérivée « particulaire », c'est-à-dire la dérivée obtenue en suivant le domaine D dans son mouvement [7].



Pour écrire la loi fondamentale, il faut schématiser les efforts exercés sur le domaine D :

1. Dans la suite de ce document, il sera fait appel à ce domaine sous la forme contractée usuelle MMC.

— les efforts à distance — la pesanteur par exemple — sont caractérisés par une densité volumique $\vec{f}$ où $\vec{f} = \rho\vec{g}$, par exemple, pour la pesanteur ;

— les efforts de contact, c'est-à-dire les efforts exercés sur D à travers la frontière ∂D de D seront caractérisés par une densité superficielle de force $\vec{T}$ en vertu du :

Postulat de Cauchy

(a) Les efforts de contact exercés sur D à travers ∂D sont schématisés par une densité superficielle de force $\vec{T}$;

(b) Cette densité superficielle $\vec{T}$ ne dépend que du point M considéré et du vecteur normal $\vec{n}$ à ∂D : $\vec{T}(M, \vec{n})$.

Malgré son apparence toute naturelle, ce postulat n'est pas le seul possible. On peut, par exemple, considérer que ces efforts de contact sont schématisés par une densité superficielle de force $\vec{T}$ et de moment $\vec{M}$ — on parle alors de *milieux avec couples de contraintes*, exemple embryonnaire de milieux avec microstructure dont nous reparlerons au paragraphe 1.2.2.

Moyennant ces schématisations, la loi fondamentale de la dynamique : « La dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement d'un domaine matériel D quelconque est égale au torseur de tous les efforts extérieurs (à distance et de contact) appliqués à D » va se traduire par les deux lois de conservation :

— de la quantité de mouvement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \rho\vec{V}\,\mathrm{d}v = \iint_{\partial D}\vec{T}\,\mathrm{d}s + \iiint_D \vec{f}\,\mathrm{d}v \tag{1.2}$$

— du moment cinétique (par rapport à 0 fixe)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \rho\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}\,\mathrm{d}v = \iint_{\partial D}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}\,\mathrm{d}s + \iiint_D \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}\,\mathrm{d}v \tag{1.3}$$

De manière générale, une loi de conservation exprime un bilan :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \iint_{\partial D}\alpha\,\mathrm{d}S + \iiint_D A\,\mathrm{d}v \tag{1.4}$$

valable pour tout domaine matériel D : la variation d'une quantité (de densité volumique $\mathcal{A}$) provient, d'une part, de la production interne de cette quantité (densité volumique $\mathcal{A}$) et d'autre part, des échanges avec l'extérieur à travers ∂D (densité surfacique α).

Les trois lois de conservation qui nous intéressent (1.1), (1.2) et (1.3) rentrent dans ce cadre d'après le tableau suivant : où l'on a introduit les composantes des vecteurs qui

	A	α	A
masse	ρ	0	0
quantité de mouvement	ρV_i	T_i	f_i
moment cinétique	$\rho\varepsilon_{ijk}x_jV_k$	$\varepsilon_{ijk}x_jV_k$	$\varepsilon_{ijk}x_jk_k$

interviennent dans les égalités (1.2) et (1.3) [2]. Nous verrons, au paragraphe 1.3.1, que la loi de conservation de l'énergie rentre également dans ce cadre.

2. Le lecteur peut se rendre à l'annexe A pour l'expression des produits vectoriels qui interviennent dans (1.3).

1.1.2 Étude d'une loi de conservation

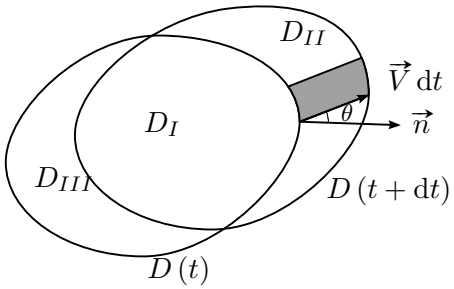
Pour utiliser la loi de conservation générale (1.4), il faut expliciter la dérivée particulaire d'une intégrale de volume.

Lemme 1.1 — Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \iiint_D \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\,\mathrm{d}S + \iint_{\partial D} \mathcal{A}\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.5}$$

Ce résultat classique concernant la dérivée particulaire peut s'obtenir de diverses manières. L'idée essentielle est que la variation de l'énergie provient de :

1. la variation de la quantité $\mathcal{A}$;
2. la variation du domaine d'intégration.



En posant :

$$J(t) = \iiint_{D(t)} \mathcal{A}(x,t)\,\mathrm{d}v$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} J(t+\mathrm{d}t) - J(t) &= \iiint_{D(t+\mathrm{d}t)} \mathcal{A}(x,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}v - \iiint_{D(t)} \mathcal{A}(x,t)\,\mathrm{d}v \\ &= \iiint_{D_I} [\mathcal{A}(x,t+\mathrm{d}t) - \mathcal{A}(x,t)]\,\mathrm{d}v + \iiint_{D_{II}} \mathcal{A}(x,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}v - \iiint_{D_{III}} \mathcal{A}(x,t)\,\mathrm{d}v \\ &= \left[\iiint_D \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t + \left[\iint_{\partial D} \mathcal{A}\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

en remarquant que pour les domaines II ou III, l'élément de volume $\mathrm{d}v$ (hachuré sur la figure ci-contre) est donné par :

$$\mathrm{d}v = \pm V\,\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}S\cdot\cos\theta = \pm\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

On trouvera des démonstrations plus détaillées et plus rigoureuses dans [6–8, 16] entre autres.

En utilisant le théorème de la divergence (Annexe A) et la formule donnant la dérivée particulaire $\mathcal{A}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \mathcal{A}_{,i}V_i$$

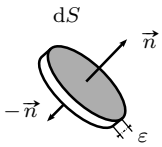
où l'on a utilisé la convention de sommation et la notation $f_{,i} = \partial f/\partial x_i$ — voir Annexe A, on peut transformer (1.5) en :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \iiint_D \left\{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + (\mathcal{A}V_i)_{,i}\right\}\mathrm{d}v = \iiint_D \left\{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}\,\mathrm{div}\,\vec{V}\right\}\mathrm{d}v \tag{1.6}$$

Par une hypothèse analogue au Postulat de Cauchy, on suppose que la densité surfacique α dépend uniquement du point considéré et de la normale $\vec{n}$: $\alpha(M, \vec{n})$. Moyennant des hypothèses de continuité que nous ne préciserons pas davantage, on montre alors :

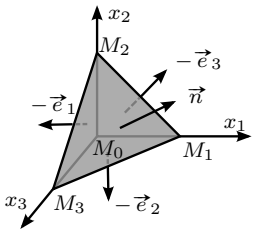
Lemme 1.2
(a) $\alpha(M, -\vec{n}) = -\alpha(M, \vec{n})$
(b) En un point donné M, il existe un flux $\vec{a}(M)$ tel que :

$$\alpha(M, \vec{n}) = a_i(M) n_i = \vec{a} \cdot \vec{n} \tag{1.7}$$



Le point a) exprime simplement que ce qui rentre dans D est l'opposé de ce qui en sort. Lorsque $\varepsilon \to 0$, les seuls termes qui subsistent sont ceux relatifs aux deux faces, et (1.4) donne le point a).

Pour démontrer le point b), on écrit (1.4) pour un domaine D en forme de tétraèdre $M_O M_1 M_2 M_3$, la face $M_1 M_2 M_3$ restant perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$ donné. Lorsque les dimensions du tétraèdre tendent vers zéro, la fonction $\alpha(M, \vec{n})$ reste à peu près constante en et ne dépend donc que de $\vec{n}$.



De plus, seule subsiste dans (1.4) l'intégrale de surface :

$$0 = \iint_{M_1M_2M_3} \alpha(\vec{n})\,\mathrm{d}S + \iint_{M_0M_1M_2} \alpha(-\vec{e}_3)\,\mathrm{d}S + \iint_{M_0M_1M_3} \alpha(-\vec{e}_2)\,\mathrm{d}S + \iint_{M_0M_2M_3} \alpha(-\vec{e}_1)\,\mathrm{d}S$$

Si on note S la surface de la face $M_1M_2M_3$ et S_1, S_2, S_3 celles de $M_OM_2M_3$, $M_OM_1M_3$, $M_0M_1M_2$ respectivement, il vient :

$$0 = \alpha(\vec{n})S + \alpha(-\vec{e}_3)S_3 + \alpha(-\vec{e}_2)S_2 + \alpha(-\vec{e}_1)S_1$$

soit, en utilisant a), en posant $a_i = \alpha(\vec{e}_i)$ et en remarquant que $S_i = \cos(\vec{e}_i, \vec{n})S = n_i S$:

$$\alpha(\vec{n}) = a_i n_i$$

Par utilisation de ces deux lemmes, on obtient la forme locale ou différentielle de la loi de conservation (1.4) :

Théorème 1.1 — Forme locale de la loi de conservation

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{A}V_{i,i} + a_{i,i} + A \tag{1.8}$$

Première démonstration. On utilise le théorème de la divergence pour transformer l'intégrale de surface dans (1.4). Il vient :

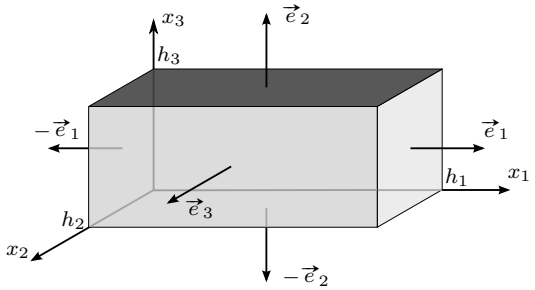
$$\iiint_D \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}_{i,i} - a_{i,i} - A \right) \mathrm{d}v = 0$$

Cette égalité devant avoir lieu pour tout domaine D, on en tire la nullité de la quantité intégrée. □

Deuxième démonstration. On écrit la loi de conservation (1.4) en choisissant comme domaine D un petit parallélépipède de côtés h_1, h_2, h_3. En utilisant le Lemme 1.1, on obtient en première approximation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \iiint_D \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}\,\mathrm{div}\,\vec{V}\right)\mathrm{d}v \simeq \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}\,\mathrm{div}\,\vec{V}\right) h_1h_2h_3$$

avec l'hypothèse $\iiint_D A\,\mathrm{d}v = Ah_1h_2h_3$.



Pour l'intégrale de surface, on obtient :

$$\begin{aligned}\iint_{\partial D} \alpha\,\mathrm{d}S &= \iint_{\partial D} (a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3)\,\mathrm{d}S \\ &= \iint_{S_1} \quad \cdots \text{ permutation circulaire} \\ &= \iint_{S_1} [a_1(x_1+h_1) - a_1(x_1)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \cdots\end{aligned}$$

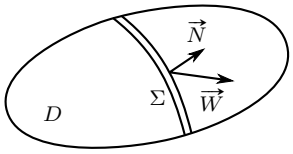
puisque $\vec{n} = (1,0,0)$ sur $S_1(x_1+h_1)$ et $\vec{n} = (-1,0,0)$ sur $S_1(x_1)$. Finalement il vient :

$$\iint_{\partial D} \alpha\,\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}h_1\right)h_2h_3 + \cdots = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}h_1h_2h_3$$

d'où le résultat. □

Cette forme locale suppose la continuité des différentes quantités en cause. En présence d'une surface de discontinuité Σ se déplaçant à la vitesse $\vec{V}$, on définit la vitesse relative du choc U par :

$$U = (\vec{W} - \vec{V}) \cdot \vec{N} \tag{1.9}$$



On peut alors montrer [7] que l'équation locale (1.8) doit être complétée par une « équation aux discontinuités » :

$$[\![\mathcal{A}U + a_iN_i]\!] = 0 \tag{1.10}$$

en désignant par $[\![h]\!] h(M^+) - h(M^-)$ le saut d'une grandeur à travers Σ.

L'application du Théorème 1.1 à la loi de conservation de la masse (1.1) donne :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{V} = 0 \tag{1.11}$$

c'est l'équation de continuité. Un calcul simple montre alors que :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}\,\mathrm{div}\,\vec{V} = \rho\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\rho^2}\mathcal{A}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right\} = \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathcal{A}}{\rho}\right)$$

Le Lemme 1.1 et le Théorème 1.1 deviennent alors :

Lemme 1.3 — Lemme 1.1'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \mathcal{A}\,\mathrm{d}v = \iiint_D \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathcal{A}}{\rho}\right)(12) \tag{1.12}$$

Théorème 1.2 — Théorème 1.1'

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathcal{A}}{\rho}\right) = A + a_{i,i}(13) \tag{1.13}$$

Ces deux formes sont très utiles, car les quantités physiques sont plus souvent définies par leur densité massique $\mathcal{A}/\rho$ que volumique $\mathcal{A}$.

1.1.3 Utilisation de la loi fondamentale

L'application du Lemme 1.2 à la loi de conservation de la quantité de mouvement (1.2), en prenant $\alpha = T_i$, permet d'introduire le *tenseur des contraintes* σ_{ij} système de neuf quantités, tel que :

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \tag{1.14}$$

Le chapitre 2 sera consacré à l'étude de ce *tenseur des contraintes*.

L'application du Théorème 1.2 à la loi de conservation de la quantité de mouvement (1.2) donne alors *l'équation du mouvement* :

$$\rho\gamma_i = \rho\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{1.15}$$

où γ_i désigne l'accélération :

$$\gamma_i = \frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_{i,j}V_j \tag{1.16}$$

Dans la suite de ce cours, on s'intéressera essentiellement aux problèmes statiques. L'équation du mouvement (1.15) devient alors *l'équation d'équilibre* :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{1.17}$$

système de trois équations scalaires ($i = 1, 2, 3$) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0\\
\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0\\
\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0
\end{aligned} \tag{1.18}$$

qui traduisent localement l'équilibre du milieu continu.

La loi de conservation du moment cinétique s'étudie de la même manière : on applique le Théorème 1.2 avec $\mathcal{A}/\rho = \varepsilon_{ijk} a_j V_k$, $\alpha = \varepsilon_{ijk} x_j T_k = \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l$ d'après (1.14), et $A = \varepsilon_{ijk} x_j k_k$. Il vient :

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon_{ijk} x_j V_k) = (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l} + \varepsilon_{ijk} x_j f_k$$

On développe cette relation en remarquant que :

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = V_j, \qquad x_{j,l} = \frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}$$

où δ_{jl} est le symbole de Kronecker :

$$\rho \varepsilon_{ijk} V_j V_k + \rho \varepsilon_{ijk} x_j \gamma_k = \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} + \varepsilon_{ijk} x_j f_k$$

Le premier terme disparaît car ε_{ijk} est antisymétrique en j et k. Il reste :

$$\varepsilon_{ijk} x_j (\rho \gamma_k - \sigma_{kl,l} - f_k) - \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$$

Le premier terme s'annule d'après (1.15) et on obtient finalement $\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$, c'est-à-dire :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{1.19}$$

Le tenseur des contraintes est symétrique.

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Ainsi, la loi fondamentale de la dynamique est, sous forme locale, équivalente â l'équation du mouvement (1.15) avec un tenseur des contraintes symétrique. À nouveau, ces résultats supposent la continuité des fonctions en cause. En présence d'une surface de discontinuité Σ, il faut rajouter les relations de discontinuité (1.10) qui donnent :

— pour la conservation de la masse :

$$[\![\rho U]\!] = 0, \qquad \rho^+ (\vec{W} - \vec{V}^+) \cdot \vec{N} = \rho^- (\vec{W} - \vec{V}^-) \cdot \vec{N} \tag{1.20}$$

— pour la conservation de la quantité de mouvement :

$$[\![\rho U V_i + \sigma_{ij} N_j]\!] = 0 \tag{1.21}$$

tandis que l'équation correspondante pour la conservation du moment cinétique est automatiquement vérifiée si (1.22) l'est.

Dans le cas statique, ces relations de discontinuité se ramènent à la seule condition :

$$[\![\sigma_{ij} N_j]\!] = 0, \qquad \vec{T}^+(\vec{N}) = \vec{T}^-(\vec{N}) \tag{1.22}$$

exprimant la continuité du vecteur $\vec{T}$. Nous y reviendrons au chapitre 2.

1.2 Puissances virtuelles

1.2.1 Théorème des puissances virtuelles

Pour un système quelconque, un mouvement *virtuel* est un mouvement possible de ce système par opposition au mouvement *réel* qui est celui qui se réalise effectivement par suite des efforts appliqués. De même, une *vitesse virtuelle* est une répartition de vitesse

possible. Pour un milieu continu déformable, une vitesse virtuelle sera définie par un champ de vitesses virtuelles $V^*{}_i(x)$, c'est-à-dire par un champ de vecteurs $V^*{}_i$ défini sur le solide Ω.

Nous partons donc de l'équation du mouvement (1.15) que nous multiplions par $V^*{}_i$ (il s'agit donc d'un produit scalaire), et nous intégrons sur le solide Ω tout entier :

$$\iiint_\Omega \rho\gamma_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega \sigma_{ij,j} \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v + \iiint_\Omega f_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v$$

mais en utilisant le

Théorème 1.3 — Théorème de la divergence

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \sigma_{ij,j} \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v &= \iiint_\Omega [(\sigma_{ij} \overset{*}{V}_i)_{,j} - \sigma_{ij} \overset{*}{V}_{i,j}] \,\mathrm{d}v \\ &= \iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \overset{*}{V}_i n_j \,\mathrm{d}S - \iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{V}_{i,j} \,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Grâce à (1.14), on retrouve dans le premier terme les efforts $\vec{T}$ appliqués sur Ω à travers $\partial\Omega$, tandis que, d'après la symétrie de σ_{ij}, on peut remplacer $V^*{}_{i,j}$ par sa partie symétrique $D^*{}_{ij}$ (Annexe A) :

$$\overset{*}{V}_{i,j} = \overset{*}{D}_{ij} + \overset{*}{\Omega}_{ij}, \qquad \overset{*}{D}_{ij} = \overset{*}{V}_{i,j} + \overset{*}{V}_{j,i}, \qquad \overset{*}{\Omega}_{ij} = \overset{*}{V}_{i,j} - \overset{*}{V}_{j,i} \tag{1.23}$$

$\overset{*}{D}_{ij}$ est le tenseur taux de déformation et $\Omega^*{}_{ij}$ le tenseur au champ de vitesses virtuelles $V^*{}_i$. Finalement on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc} \displaystyle\iiint_\Omega \rho\gamma_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v & = & \displaystyle\iiint_\Omega f_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v & + & \displaystyle\iint_{\partial\Omega} T_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}S & - & \displaystyle\iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{D}_{ij} \,\mathrm{d}v & \\ \overset{*}{\mathcal{P}}^{(\mathrm{a})} & = & \overset{*}{\mathcal{P}}^{(\mathrm{d})} & + & \overset{*}{\mathcal{P}}^{(\mathrm{c})} & + & \overset{*}{\mathcal{P}}^{(\mathrm{int})} & & (1.24) \\ & = & \overset{*}{\mathcal{P}}^{(\mathrm{ext})} & & & + & \overset{*}{\mathcal{P}}^{(\mathrm{int})} & & \end{array}$$

en introduisant :

- $\mathcal{P}^{*(\mathrm{a})}$: puissance virtuelle des quantités d'accélération dans le champ de vitesses virtuelles V^* ;
- $\mathcal{P}^{*(\mathrm{d})}$: puissance virtuelle des efforts à distance ;
- $\mathcal{P}^{*(\mathrm{c})}$: puissance virtuelle des efforts à contact ;
- $\mathcal{P}^{*(\mathrm{ext})} = P^{*(\mathrm{d})} + P^{*(\mathrm{c})}$: puissance virtuelle des efforts extérieurs.

On retrouve donc l'énoncé classique des puissances virtuelles, à condition d'interpréter le terme complémentaire $\mathcal{P}^{*(\mathrm{int})}$ comme étant la puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$\overset{*}{\mathcal{P}}^{(\mathrm{int})} = -\iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{\mathcal{D}}_{ij} \,\mathrm{d}v \tag{1.25}$$

On peut s'assurer que c'est une interprétation justifiée dans la mesure où elle généralise la puissance virtuelle des efforts intérieurs introduite en mécanique rationnelle pour un système de solides rigides [6, 8]. En particulier, le lemme suivant montre que la puissance virtuelle des efforts intérieurs est nulle dans tout champ de vitesses rigidifiant, c'est-à-dire lorsque $V^*{}_i$ est le champ de vitesses d'un solide rigide.

Lemme 1.4
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vitesses $V^*{}_i$ soit rigidifiant est que le tenseur taux de déformation associé $D^*{}_{ij}$ soit nul.

Démonstration.
Condition nécessaire. Un champ rigidifiant peut s'écrire

$$\overset{*}{V}(M) = \vec{a} + \vec{b} \wedge \overrightarrow{OM}, \quad \overset{*}{V}_i = a_i + \varepsilon_{ijk} b_j x_k \tag{1.26}$$

On obient alors directement

$$\overset{*}{V}_{i,j} = \varepsilon_{ijl} b_k = \overset{*}{\Omega}_{ij}, \quad \overset{*}{D}_{ij} = 0$$

Condition suffisante. Il faut montrer que la condition

$$\overset{*}{D}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{V}_{i,j} + \overset{*}{V}_{j,i}\right) = 0 \tag{1.27}$$

permet d'écrire (1.26). Nous démonstrerons ce résultat au Théorème 3.2. □

Nous avons donc démontré, à partir de la loi fondamentale, le

Théorème 1.4 — Théorème des puissances virtuelles
Dans tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle des efforts extérieurs et intérieurs

$$\overset{*}{\mathcal{P}}^{(a)} = \overset{*}{\mathcal{P}}^{(ext)} + \overset{*}{\mathcal{P}}^{(int)} \tag{1.28}$$

En particulier, si on prend comme champ de vitesses le champ des vitesse réelles, on obtient le

Théorème 1.5 — Théorème de l'énergie cinétique
La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance des efforts extérieurs et intérieurs

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\iiint_\Omega \rho V_i V_i \,\mathrm{d}v\right) &= \iiint_\Omega f_i V_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T_i V_i \,\mathrm{d}S - \iiint_\Omega \sigma_{ij} D_i j \,\mathrm{d}v \\ \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} &= \overset{*}{\mathcal{P}}^{(ext)} + \overset{*}{\mathcal{P}}^{(int)} \end{aligned} \tag{1.29}$$

1.2.2 Principe des puissances virtuelles

Dans le cours de Mécanique Analytique, on a vu que l'on pouvait reconstruire la mécanique d'un système de solides à partir de l'énoncé des puissances virtuelles pris comme loi physique de départ. La loi fondamentale est alors obtenue comme conséquence. L'idée de départ est de caractériser un système d'efforts non plus par une densité volumique, surfacique ou autre, mais par la puissance que ce système d'efforts développe dans un mouvement virtuel quelconque. En d'autres termes, un système d'efforts est une forme linéaire sur l'espace des vitesses virtuelles. L'espace des efforts est donc dual de l'espace des vitesses virtuelles.

Nous postulons donc

Principe des puissances virtuelles
La puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle des efforts intérieurs et extérieurs

$$\overset{*}{\mathcal{P}}^{(a)} = \overset{*}{\mathcal{P}}^{(ext)} + \overset{*}{\mathcal{P}}^{(int)} \tag{1.30}$$

dans tout mouvement virtuel.

Toutes ces puissances virtuelles sont des formes linéaires sur l'espace $\mathcal{V}^*$ des champs de vitesses virtuelles :

— la puissance des quantités d'accélération, $\mathcal{P}^{*(a)}$, est imposée par le type de cinématique que l'on envisage :

— la puissance des efforts extérieurs, qui se décompose en deux parties :

$$\overset{*}{\mathcal{P}}^{(ext)} = \overset{*}{\mathcal{P}}^{(a)} + \overset{*}{\mathcal{P}}^{(c)} \tag{1.31}$$

autrement dit en puissance des efforts à distance $\mathcal{P}^{*(d)}$ et en puissance des efforts de contact $\mathcal{P}^{*(c)}$, est imposée par la nature des efforts extérieurs appliqués ;

— la puissance des efforts intérieurs, par contre, pose davantage de problèmes : on sait que

Axiome
La puissance virtuelle des efforts intérieurs est nulle dans tout mouvement rigidifiant.

Construire une théorie des milieux continus, c'est d'abord choisir l'espace $\mathcal{V}^*$ des champs de vitesses virtuelles, c'est ensuite choisir la forme des quatre formes linéaires $\mathcal{P}^{*(a)}$, $\mathcal{P}^{*(d)}$, $\mathcal{P}^{*(c)}$ et $\mathcal{P}^{*(int)}$. Le reste de la théorie — en particulier, les équations du mouvement — s'obtient par des calculs simples.

Considérons, par exemple, le cas de la mécanique des solides rigides : l'espace $\mathcal{V}^*$ des vitesses virtuelles est l'espace des champs de vitesses d'un solide, espace vectoriel de dimension six. Les formes linéaires $\mathcal{P}^{*(a)}$ et $\mathcal{P}^{*(ext)}$ (d'après l'axiome, $\mathcal{P}^{*(int)}$ identiquement nulle) sont donc des éléments du dual de cet espace : l'espace des *torseurs*. Le principe des puissances virtuelles est donc équivalent à la loi fondamentale

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{F}^{(ext)}] \tag{1.32}$$

où $[\mathcal{A}]$ est le torseur des quantités d'accélération et $[\mathcal{F}^{(ext)}]$, celui des efforts extérieurs.

De manière générale, la mécanique des milieux continus peut être construite indifféremment à partir des lois de conservation, comme nous l'avons fait au paragraphe 1.1.1, ou à partir du principe des puissances virtuelles, comme nous le ferons au paragraphe 1.2.3. L'approche des puissances virtuelles présente cependant un double avantage :

1. elle est beaucoup plus systématique, et permet donc une généralisation plus facile lorsque l'on veut sortir du cadre des milieux continus classiques, pour étudier par exemple les milieux avec micro–structure évoqués au paragraphe 1.1.1 cas des cristaux liquides ou bien les matériaux électromagnétiques ;
2. elle met clairement en évidence la relation entre la description cinématique et la schématisation des efforts : plus on raffine la description cinématique, plus il faut raffiner la schématisation des efforts, et réciproquement. Par exemple, dans le cas du solide

rigide, on voit clairement que la schématisation des efforts par des torseurs est liée à la cinématique du solide rigide : deux répartitions d'efforts différentes conduisant au même torseur sont équivalentes, car elles développent la même puissance dans tout mouvement possible.

Pour ce cours élémentaire, nous ne partirons pas systématiquement de l'approche *puissances virtuelles*, mais nous la mentionnerons régulièrement, et nous l'utiliserons pour mettre en évidence la dualité contraintes–déformations, ce qui sera une simple vérification en mécanique des milieux continus, mais jouera un rôle essentiel plus tard, en Résistance des Matériaux.

1.2.3 Théorie du premier gradient

Comme nous l'avons annoncé, nous allons ici reconstruire les équations fondamentales du paragraphe 1.1.1 à partir du principe des puissances virtuelles. En MMC classique, l'espace $\mathcal{V}^*$ est l'espace des champs de vecteurs sur le domaine Ω occupé par le solide. Nous considérons une théorie du premier gradient, c'est-à-dire nous supposons que dans les formes linéaires définissant les puissances virtuelles, seul intervient le champ des vitesses virtuelles V_i^* et son premier gradient $V_{i,j}^*$.

La schématisation des accélérations et des efforts extérieurs est la même que dans l'approche classique. Nous prenons donc pour la puissance virtuelle des quantités d'accélération et des efforts extérieurs les formes suivantes

$$\overset{*}{\mathcal{P}}^{(a)} = \iiint_\Omega \rho\gamma_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v \quad \overset{*}{\mathcal{P}}^{(d)} = \iiint_\Omega f_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v \quad \overset{*}{\mathcal{P}}^{(c)} = \iint_{\partial\Omega} T_i^e \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}S \tag{1.33}$$

où γ_i est l'accélération, f_i les efforts à distance et T_i^e les efforts de contact exercés sur le solide Ω à travers $\partial\Omega$ (alors que T_i introduit au paragraphe 1.1.1 était relatif à un sous-domaine quelconque $D \subset \Omega$: les lois de conservation sont imposées à tout domaine matériel D alors que le principe des puissances virtuelles est écrit globalement pour le solide Ω tout entier).

La schématisation des efforts intérieurs, par contre, diffère de celle du paragraphe 1.1.1 conformément à notre hypothèse d'une théorie du premier gradient, nous prenons

$$\overset{*}{\mathcal{P}}^{(int)} = \iiint_\Omega \left(A_i \overset{*}{V}_i + B_{ij} \overset{*}{V}_{i,j} \right) \mathrm{d}v \tag{1.34}$$

où les quantités A_i et B_{ij} caractérisent les efforts intérieurs. En décomposant le tenseur gradient des vitesses $V_{i,j}^*$ en partie symétrique et antisymétrique, conformément à (1.23), on peut remplacer (1.34) par

$$\overset{*}{\mathcal{P}}^{(int)} = \iiint_\Omega \left(A_i \overset{*}{V}_i + \chi_{ij} \overset{*}{\Omega}_{ij} - \sigma_{ij} \overset{*}{D}_{ij} \right) \mathrm{d}v \tag{1.35}$$

avec σ_{ij} symétrique et χ_{ij} antisymétrique. D'autre part, on a vu (démonstration du Lemme 1.4) que dans un mouvement rigidifiant on avait

$$\overset{*}{V}_i = a_i \text{qcq}, \quad \varepsilon_{ikj} b_k \text{qcq}, \quad \overset{*}{I}_{ij} = 0 \tag{1.36}$$

L'axiome du paragraphe 1.2.2 montre alors que A_i et χ_{ij} doivent être nuls. Il reste

$$\overset{*}{\mathcal{P}}^{(int)} = -\iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{D}_{ij} \,\mathrm{d}v \tag{1.37}$$

Les efforts intérieurs sont donc caractérisés par un tenseur symétrique σ_{ij} et nous obtenons :

Principe des puissances virtuelles
Pour tout champ de vitesses virtuelles V_i^* :

$$\iiint_\Omega \rho\gamma_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f_i \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T_i^e \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}S - \iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{D}_{ij} \,\mathrm{d}v \tag{1.38}$$

Pour utiliser ce principe, il suffit maintenant de reprendre à l'envers le calcul du paragraphe 1.3.1 :

$$\iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{D}_{ij} \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{V}_{i,j} = \iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \overset{*}{V}_i n_j \,\mathrm{d}S - \iiint_\Omega \sigma_{ij,j} \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v$$

ou l'on a utilisé la symétrie de σ_{ij} et le théorème de la divergence. On obtient alors

$$\iiint_\Omega (\rho\gamma_i - f_i - \sigma_{ij,j}) \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} (\sigma_{ij} n_j - T_i^e) \overset{*}{V}_i \,\mathrm{d}S = 0$$

Ceci devant être vrai pour tout champ V_i^*, on en tire l'équation du mouvement (1.35) et la relation

$$T_i^e = \sigma_{ij} n_j \tag{1.39}$$

qui est la relation (1.14) pour $D = \Omega$.

1.3 Thermodynamique des milieux continus

1.3.1 Conservation de l'énergie

Le premier principe de la thermodynamique affirme que la variation de l'énergie totale (énergie interne + énergie cinétique) est, pour un domaine matériel D quelconque, égale à la somme du travail des efforts extérieurs exercés sur D et de la quantité de chaleur apportée à D

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E + K) = \mathcal{P}^{(ext)} + Q \tag{1.40}$$

où 1'énergie cinétique K et la puissance des efforts extérieurs $\mathcal{P}^{(ext)}$ sont données par

$$K = \iiint_D \frac{1}{2} \rho V_i V_i \,\mathrm{d}v \tag{1.41}$$

et

$$\mathcal{P}^{(ext)} = \iiint_D f_i V_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial D} T_i V_i \,\mathrm{d}S \tag{1.42}$$

L'énergie interne E est définie comme suit :

$$E = \iiint_D \rho e \,\mathrm{d}v \tag{1.43}$$

en notant e l'énergie interne par unité de masse, et où le taux de chaleur Q apportée à D résulte d'un apport volumique r (rayonnnement) dans D et d'un apport surfacique h (conduction) à travers ∂D

$$Q = \iiint_D r \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial D} h \,\mathrm{d}S \tag{1.44}$$

$\mathcal{A}$	α	A
$\rho\left(e\frac{1}{2}V_iV_i\right)$	$f_iV_i + r$	$T_iV_i + h$

Le premler principe de la thermodynamique conduit donc à la loi de conservation de l'énergie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \rho\left(e + \frac{1}{2}V_iV_i\right)\mathrm{d}v = \iiint_D (f_iV_i + r)\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial D}(T_iV_i + h)\,\mathrm{d}S \tag{1.45}$$

qui rentre dans le cadre des lois de conservation définies au paragraphe 1.1.1 en prenant dans (1.4)

Compte-tenu de (1.14), le Lemme 1.2 du paragraphe 1.1.2 permet d'introduire le vecteur flux de chaleur $\vec{q}$ à travers ∂D par

$$h = -\vec{q}\cdot\vec{n} = -q_in_i \tag{1.46}$$

L'application du Théorème 1.2 donne alors

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + V_i\gamma_i\right) = (\sigma_{ij}V_i - q_j)_{,j} + f_iV_i + r$$
$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + (\rho\gamma_i - \sigma_{ij,j} - f_i)\,V_i = \sigma_{ij}V_{i,j} + r - q_{j,j}$$

Le terme entre parenthèses disparaît d'après l'équation du mouvement (1.15), et, compte-tenu de la symétrie de σ_{ij}, il reste

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ij}D_{ij} + r - q_{j,j} \tag{1.47}$$

forme locale du premier principe de la thermodynamique.

On aurait également pu obtenir (1.47) en utilisant le théorème de l'énergie cinétique du paragraphe 1.2.1. Ce théorème permet en effet de remplacer (1.40) par

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = Q - \mathcal{P}^{(int)} \tag{1.48}$$

ce qui, d'après (1.25), donne, au lieu de (1.45),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \rho e\,\mathrm{d}v = \iiint_D (\sigma_{ij}D_{ij} + r)\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial D} h\,\mathrm{d}S \tag{1.49}$$

et l'application du Lemme 1.2 et du Théorème 1.2 à cette loi de conservation redonne directement (1.46) et (1.47).

On pourrait également écrire l'équation aux discontinuités (1.10) associée à cette loi de conservation (1.45)

$$[\![\rho\left(e + \frac{1}{2}V_iV_i\right)U + (\sigma_{ij}V_i + q_j)\,N_j]\!] = 0 \tag{1.50}$$

mais elle sert peu en mécanique des solides. Remarquons toutefois que l'on n'a pas le droit d'écrire cette relation aux discontinuités sur la loi de conservation (1.49), car on a utilisé pour obtenir (1.45) le théorème de l'énergie cinétique, lequel suppose que le champ des vitesses est continu.

1.3.2 Inégalité de Clausius-Duhem

Le second principe de la thermodynamique qui, en thermostatique, pour un processus homotherme, s'écrit classiquement

$$\mathrm{d}S \geqslant \frac{\mathrm{d}Q}{T} \tag{1.51}$$

se généralise habituellement à la MMC sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \geqslant \mathcal{S}^{(ext)} \quad \mathcal{S}^{(int)} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \mathcal{S}^{(ext)} \geqslant 0 \tag{1.52}$$

exprimant que, pour tout domaine matériel D, le taux de "production interne" d'entropie $\mathcal{S}^{(int)}$ est positif, la production interne d'entropie étant définie comme étant la différence entre la variation de l'entropie du domaine D, définie par

$$S = \iiint_D \rho\eta \,\mathrm{d}v \tag{1.53}$$

où η est l'entropie par unité de masse, et les *échanges* lT dT entropie avec l'extérieur, liés aux échanges de chaleur (1.44) par

$$\mathcal{S}^{(ext)} = \iiint_D \frac{r}{\theta}\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial D} \frac{h}{\theta}\,\mathrm{d}S \tag{1.54}$$

où θ est la température absolue. Ainsi, compte-tenu de (1.46), le second principe de la thermodynamique s'écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D \rho\eta\,\mathrm{d}v \geqslant \iiint_D \frac{r}{\theta}\,\mathrm{d}v - \iint_{\partial D} \frac{q_i n_i}{\theta}\,\mathrm{d}S \tag{1.55}$$

En utilisant le Lemme 1.2 et le théorème de la divergence, on obtient la forme locale du second principe

$$\begin{aligned} \rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &\geqslant \frac{r}{\theta} - \left(\frac{q_i}{\theta}\right)_{,i} \\ \rho\theta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &\geqslant r - q_{i,i} + \frac{1}{\theta}q_i\theta_{,i} \end{aligned} \tag{1.56}$$

En éliminant r entre (1.47) et (1.56), on obtient

$$-\rho\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} - \theta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{1}{\theta}q_i\theta_{,i} + \sigma_{ij}D_{ij} \geqslant 0 \tag{1.57}$$

c'est l'inégalité de Clausius-Duhem, que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$-\rho\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \eta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{1}{\theta}q_i\theta_{,i} + \sigma_{ij}D_{ij} \geqslant 0 \tag{1.58}$$

où $\psi = e - \eta\theta$ est 1'énergie libre par unité de masse.

D'un point de vue purement mécanique, le second principe traduit l'irréversibilité et joue donc un rôle important. En "oubliant" les variables thermiques, on peut réécrire (1.57) ou (1.58) sous la forme

$$\begin{cases} \phi = -\rho\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \sigma_{ij}D_{ij} \geqslant 0 \\ \sigma_{ij}D_{ij} = \rho\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \phi \end{cases} \tag{1.59}$$

où u est l'énergie (interne ou libre, cela n'a plus d'importance, car on a oublié les variables thermiques) du matériau, et où ϕ est appelé dissipation. En reportant dans le théorème de l'énergie cinétique, on obtient

$$\mathcal{P}^{(ext)} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \Phi^{(irr)} \qquad \Phi^{(irr)} = \iiint_D \phi \, \mathrm{d}v \geqslant 0 \tag{1.60}$$

La puissance des efforts extérieurs, c'est-à-dire la puissance dépensée, contribue à augmenter l'énergie cinétique et l'énergie du matériau, et est dissipée dans $\Phi^{(irr)}$.

Chapitre 2

Tenseur des contraintes

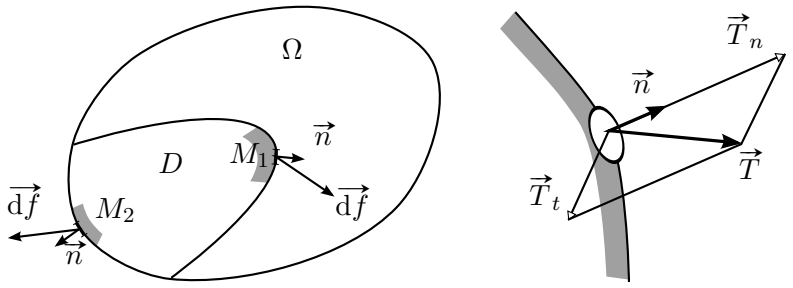
2.1 Notions générales

2.1.1 Vecteur contrainte et tenseur des contraintes

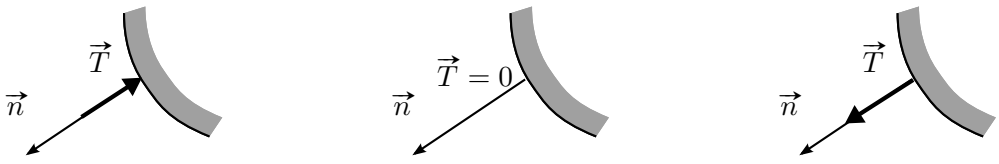
Le vecteur contrainte caractérise les efforts de contact exercés à travers un élément de surface $\mathrm{d}S$ de normale $\vec{n}$ sur une partie D du milieu continu : le vecteur contrainte est défini par

$$\vec{T}(\vec{n}) = \lim_{\mathrm{d}S \to D} \frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}S} \qquad \mathrm{d}\vec{f} = \vec{T}\,(\vec{n})\,\mathrm{d}D \tag{2.1}$$

Suivant le cas, il s'agit des efforts exercés sur D par le reste du milieu continu (point M_1 – effort intérieur pour le solide Ω) ou bien par l'extérieur (point M_2 – effort extérieur pour Ω).



Par convention, on choisit pour $\vec{n}$ la normale extérieure au domaine D sur lequel s'applique $\vec{T}$. Cette convention est à peu près universelle en MMC, à une exception près, la Mécanique des Sols, où l'on utilise la convention contraire. Par convention également, on prend, en Mécanique des Solides, le zéro des contraintes pour la pression atmosphérique. Les contraintes sont donc mesurées par rapport à cette pression atmosphérique. Ainsi, si le solide est en contact avec un fluide à la pression p :



$$\vec{T} = -\left(p - p_{\mathrm{atm}}\right)\vec{n} \tag{2.2}$$

La pression atmosphérique est d'ailleurs en général négligeable par rapport aux contraintes que l'on rencontre.

On projette le vecteur contrainte sur la normale et sur le plan perpendiculaire

$$\vec{T} = T_n \vec{n} + \vec{T}_t \tag{2.3}$$

où T_n est alors la contrainte normale (algébrique) et $\vec{T}_t$, la contrainte tangentielle ou de cisaillement.

Le vecteur contrainte est associé à un élément de surface de normale extérieure $\vec{n}$ – on parle en général d'une *facette*. Pour connaître *l'état de contrainte* en un point donné, il faut connaître les vecteurs contraintes associés à toutes les facettes, c'est-à-dire à tout vecteur unitaire $\vec{n}$. Ici intervient le Lemme 1.2 du paragraphe 1.1.2 qui permet de montrer que $\vec{T}$ dépend linéairement de $\vec{n}$. Il existe donc une application linéaire, le *tenseur des contraintes*, faisant passer de $\vec{n}$ à $\vec{T}$

$$\vec{T} = \sigma \vec{n} \tag{2.4}$$

Le tenseur des contraintes est donc une application linéaire de l'espace vectoriel à trois dimensions E_3 dans lui-même. Si l'on choisit une base orthonormée $\vec{e}_i$, cette application linéaire est représentée par une matrice d'éléments σ_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ et la relation (2.4) donne la relation matricielle

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire (1.14). On obtient ensuite les équations d'équilibre (1.17) et la symétrie du tenseur des contraintes (1.19) à partir de la loi fondamentale. En d'autres termes, et c'est ce point de vue que l'on trouvera dans les traités classiques, on obtient (2.4) en écrivant l'équilibre d'un tétraèdre, et en écrivant l'équilibre d'un parallélépipède on obtient

— à partir de l'équation de résultante, les équations d'équilibre (1.17) ;

— à partir de l'équation de moment, la symétrie du tenseur des contraintes

De manière similaire, si Σ est une surface de discontinuité —par exemple une interface entre deux matériaux différents— alors, l'équilibre d'un disque aplati parallèle à Σ donne la condition (1.22) de continuité du vecteur contrainte associé à Σ

$$\sigma_{ij}^{+} N_j = \sigma_{ij}^{-} N_j \tag{2.5}$$

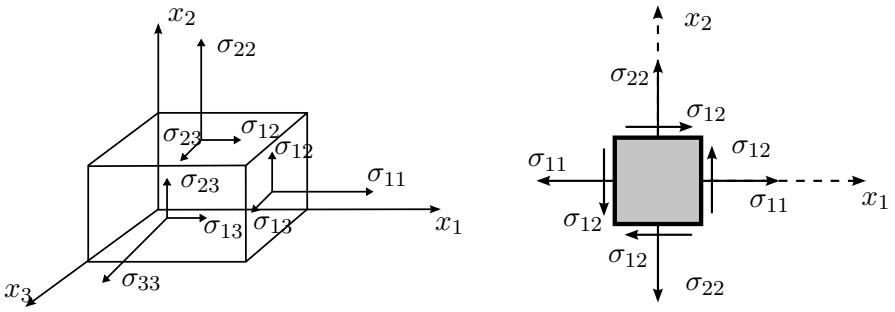
Si l'on considère un second repère orthonormé $\vec{e}'_i$ relié au premier par une matrice de passage Q_{ij} orthogonale

$$\vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j,\ Q_{ij} Q_{ik} = Q_{ji} Q_{ki} = \delta_{jk} \tag{2.6}$$

alors les composantes des vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{n}$ et d'un tenseur σ_{ij} se transforment (Annexe A) par

$$T'_i = Q_{ij} T_j,\ \sigma'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} \sigma_{kl} \tag{2.7}$$

Les composantes σ_{11}, σ_{22}, σ_{13}... sont les composantes des vecteurs contraintes associés aux facettes normales à $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$.



Les composantes diagonales σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, sont donc des contraintes normales, tandis que les composantes non diagonales σ_{12}, σ_{13}, ...sont des contraintes de cisaillement. La symétrie du tenseur des contraintes $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ exprime l'égalité de la contrainte de cisaillement associée à deux facettes perpendiculaires. Peur cette raison, cette symétrie est souvent appelée *principe de réciprocité des cisaillements*.

Dimensionnellement, une *contrainte*[1] est homogène à une force par unité de surface, donc à une pression. L'unité SI, le Pascal (1 Pa = 1 N/m^2) étant très petite par rapport aux contraintes habituellement rencontrées, on utilise traditionnellement l'hectobar, le mégapascal et le daN/mm (et chez les anglo-saxons, le p.s.i. *pound per square inch*) avec l'équivalence 1 daN/mm^2 = 1 hectobar = 10 MPa = 10^7 Pa.

2.1.2 Contraintes principales et invariants

Le tenseur des contraintes est symétrique ; on peut donc le diagonaliser. Il existe trois directions principales orthogonales associées à trois valeurs propres σ_1, σ_2, σ_3, appelées *contraintes principales*.

$$\sigma_{ij} e_j^{(1)} = \sigma_1 e_i^{(1)}, \quad \text{etc.} \tag{2.8}$$

À partir de la décomposition (2.3), on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une direction soit principale pour σ est que la contrainte exercée sur la facette correspondante soit purement normale (pas de contrainte de cisaillement). Dans le repère principal, la matrice représentative du tenseur des contraintes est diagonale. Par abus de langage, on dit que le tenseur des contraintes est diagonal, et on écrit

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Les contraintes principales s'obtiennent par résolution de l'équation caractéristique

$$P_\sigma = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{22} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 \tag{2.10}$$

où I_1, I_2, I_3 sont les invariants de σ définis par (Annexe A)

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 = \det\left(\sigma_{ij}\right) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases} \tag{2.11}$$

1. Ici, il peut s'agir d'une composante du vecteur contrainte ou du tenseur des contraintes.

On décompose habituellement le tenseur des contraintes en déviateur et partie sphérique

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + s_{ij} \tag{2.12}$$

où σ est la partie sphérique

$$\sigma = \frac{1}{3}I_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{2.13}$$

et où s_{ij} est le déviateur [2]

$$\begin{cases} s_{ii} = 0 \qquad s_{ij} = \sigma_{ij} + \dfrac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \\ s_{12} = \sigma_{12} \qquad s_{11} = \dfrac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} \end{cases} \tag{2.14}$$

Il est clair que le tenseur des contraintes et son déviateur ont mêmes directions principales, les contraintes principales déviatoires s_1, s_2, s_3 sont données par

$$s_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \tag{2.15}$$

et les invariants J_2, J_3 (puisque $J_1 = 0$ par (2.14)) du déviateur s_{ii} sont donnés par

$$\begin{cases} J_2 = -\dfrac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1 = -\dfrac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right) \\ \quad = -\dfrac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \\ J_3 = \det(s_{ij}) = s_1s_2s_3 \end{cases} \tag{2.16}$$

2.1.3 États de contraintes particuliers

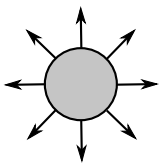
Nous allons envisager divers cas particuliers correspondant à des états de contraintes remarquables.

État de tension ou compression hydrostatique

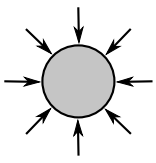
Les trois contraintes principales sont égales, le déviateur est nul, et toutes les directions sont principales, soit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

qui représente un état de tension si $\sigma > 0$ et un état de compression si $\sigma < 0$. Sur toute facette s'exerce donc une contrainte purement normale.



$\sigma > 0$ (tension)



$\sigma < 0$ (compression)

2. Pour rappel, on appelle déviateur un tenseur de trace nulle.

C'est l'état de contraintes qui existe dans les fluides à l'équilibre, d'où la terminologie *hydrostatique*.

État de contraintes de révolution

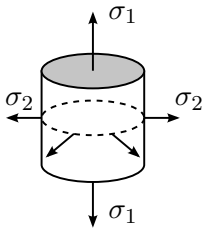
Deux des contraintes principales coïncident ; les directions principales sont :

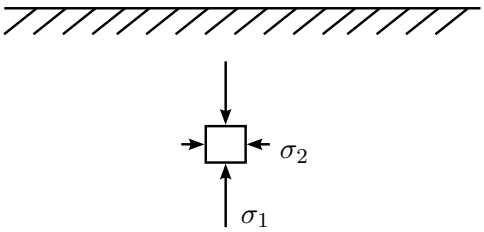
1. la direction x_1, pour σ_1 ;
2. toute direction du plan (x_2, x_3), pour σ_2.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

La décomposition en déviateur et partie sphérique devient

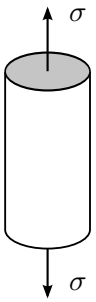
$$\sigma = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3} \text{ et } s = \frac{2\,(\sigma_1 - \sigma_2)}{3} \tag{2.19}$$





C'est l'état de contrainte qui se réalise avec $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$ dans le sol en profondeur.

État de traction ou compression uniaxiale



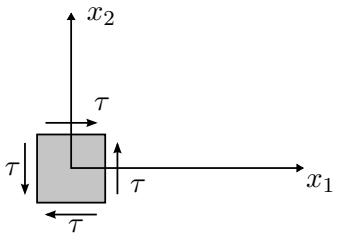
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{traction si } \sigma > 0 \\ \text{compression si } \sigma < 0 \end{matrix} \tag{2.20}$$

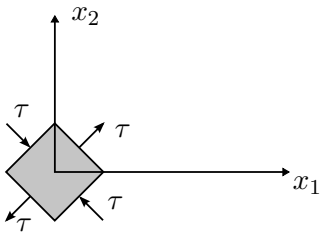
C'est un cas particulier du précédent avec $\sigma_2 = 0$ (pas de contrainte latérale). C'est l'état de contrainte le plus facile à réaliser expérimentalement : il suffit d'exercer une force longitudinale sur un barreau (essai de traction).

État de cisaillement pur

C'est un état de contrainte purement déviatoire. Les directions principales sont l'axe x_3 ($\sigma_3 = 0$) et les bissectrices des axes x_1, x_2 (contraintes principales $+\tau$ et $-\tau$).

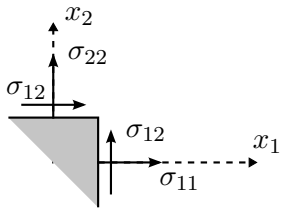
$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$





État plan de contraintes

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$



Les directions principales sont la direction x_3 et deux directions perpendiculaires du plan x_1, x_2. Lorsque $\vec{n}$ varie dans le plan (x_1, x_2). Le vecteur contrainte reste dans le plan et il est possible de se limiter au plan (x_1, x_2). Nous ferons l'étude complète au paragraphe 2.3.2.

2.2 Représentations géométriques des contraintes

L'état de contraintes en un point donné est caractérisé par la valeur en ce point du tenseur des contraintes, c'est-à-dire par six nombres. Pour visualiser cette entité, on a introduit diverses représentations géométriques.

2.2.1 Quadriques des contraintes

Ellipsolde de Lamé

C'est le lieu de l'extrémité du vecteur contrainte $\vec{T}$ lorsque $\vec{n}$ varie. Si nous nous plaçons en repère principal, l'équation (2.5) donne

$$T_1 = \sigma_1 n_1 \qquad T_2 = \sigma_2 n_2 \qquad T_3 = \sigma_3 n_3$$

et, puisque le vecteur $\vec{n}$ est unitaire

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \tag{2.23}$$

Le lieu de l'extrémité (T_1, T_2, T_3) est un ellipsoïde d'axes principaux, les directions principales du tenseur des contraintes et de demi–axes, les valeurs absolues des contraintes principales : c'est l'ellipsoïde de Lamé. Cet ellipsoïde ne permet pas de visualiser le vecteur contrainte associé à une facette donnée.

Quadrique directrice des contraintes normales

Nous considérons la (ou les) quadrique(s) réelle(s) d'équation

$$\Phi(x) = \sigma_{ij} x_i x_j = \pm 1 \tag{2.24}$$

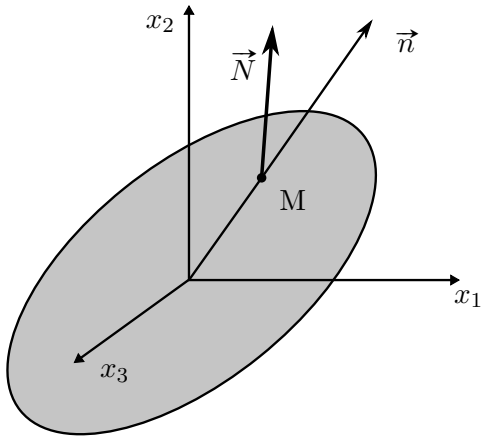
C'est une (ou deux) quadrique(s) d'axes principaux les directions principales du tenseur des contraintes et de demi–axes, les quantités $1/\sqrt{|\sigma_1|}$... On les appelle quadriques directrices des contraintes, car elles permettent de construire le vecteur contrainte associé à une direction $\vec{n}$ quelconque par la construction suivante.

Construction : on mène de l'origine la demi-droite de direction $\vec{n}$, qui coupe la quadrique en un point M.

— la contrainte normale est donnée à partir de la longueur $OM = \rho$ par

$$\rho^2 |T_n| = 1 \tag{2.25}$$

— la direction du vecteur contrainte est donnée par la normale $\vec{N}$ à la quadrique en M.



Démonstration. On a $\overrightarrow{OM} = p\vec{n}$, $x_i = pn_i$. En reportant dans (2.24), il vient

$$\rho^2 \sigma_{ij} n_i n_j = \pm 1$$

qui donne (2.25), en remarquant que

$$T_n = \vec{T} \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

La direction de la normale $\vec{N}$ à la quadrique donnée par le gradient de la fonction Φ est

$$N_i = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 2\lambda \sigma_{ij} x_j = 2\lambda\rho\sigma_{ij} n_j = 2\lambda\rho T_i$$

et $\vec{N}$ est proportionnel à $\vec{T}$. □

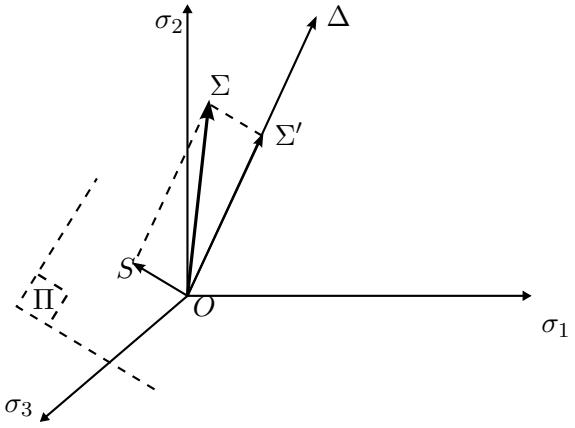
Si toutes les contraintes principales sont de même signe, la forme quadratique

$$T_n = \sigma_{ij} n_i n_j \tag{2.26}$$

est définie positive ou négative, et (2.24) définit un ellipsoïde. Si les contraintes principales sont certaines positives et d'autres négatives, alors T_n peut être positif ou négatif, et (2.24) définit deux hyperboloïdes limités par le cône asymptote $T_n = 0$. Enfin, si une contrainte principale est nulle, (2.24) définit un cylindre elliptique ou hyperbolique, suivant le signe des deux autres valeurs propres.

2.2.2 Espace des contraintes principales

Le tenseur des contraintes (ou plus généralement tout tenseur symétrique) peut être caractérisé par les trois contraintes principales et l'orientation du repère principal. Dans de nombreux cas, l'orientation du repère principal ne joue pas un rôle essentiel, et on pourra caractériser le tenseur des contraintes par les trois contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3. On peut donc représenter un tenseur des contraintes par un point d'un espace à trois dimensions $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$: au tenseur σ on associe le point Σ ayant comme coordonnées les contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3 de σ (le repère $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ étant postulé orthonormé).



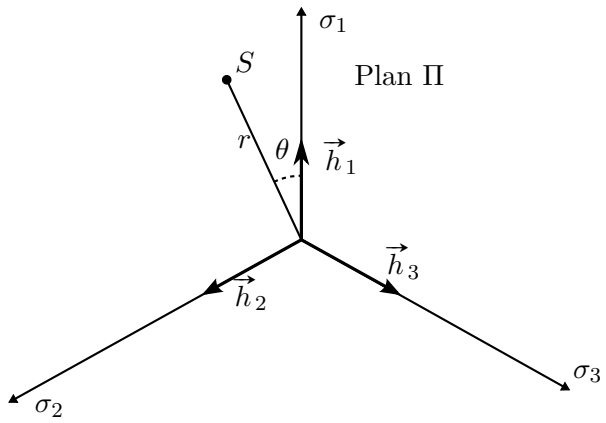
Cette représentation, très utile, exige néanmoins certaines précautions : on représente géométriquement l'espace des contraintes principales par un espace vectoriel mais ce n'est pas un espace vectoriel. En particulier, les changements d'axes sont dépourvus de sens. En particulier également, la somme de deux tenseurs $\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$ ne correspond pas à la somme

vectorielle (sauf dans le cas où les tenseurs $\sigma_{ij}^{(1)}$ et $\sigma_{ij}^{(2)}$ ont mêmes directions principales). Enfin, un tenseur des contraintes est représenté, en toute rigueur, non pas par un point, mais par six points car la numérotation des valeurs propres σ_1, σ_2 et σ_3 est arbitraire.

Dans cet espace, les tenseurs sphériques sont représentés par les points de l'*axe hydrostatique* Δ de cosinus directeurs : $1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}$. Les déviateurs sont représentés par les points du plan déviatoire Π , perpendiculaire en O à l'axe hydrostatique Δ

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \tag{2.27}$$

La décomposition (2.12) d'un tenseur en partie sphérique et déviateur correspond à la projection orthogonale sur Δ et Π. En particulier, la projection sur Δ est caractérisée par la trace de σ. Dans le plan déviatoire Π on trace



la projection des axes $O\sigma_1$, $O\sigma_2$, $O\sigma_3$, qui font entre eux un angle de $2\pi/3$ et un tenseur σ sera représenté par le point S

$$\overrightarrow{OS} = \sigma_1 \vec{h}_1 + \sigma_2 \vec{h}_2 + \sigma_3 \vec{h}_3 \tag{2.28}$$

$\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$ étant les trois vecteurs unitaires portés par les axes $O\sigma_1$, $O\sigma_2$, $O\sigma_3$ —ou plutôt, par leurs projections, mais nous les notons encore $O\sigma_1$, $O\sigma_2$, $O\sigma_2$, $O\sigma_3$. En particulier, on vérifie bien que le point S ainsi construit caractérise le déviateur, puisque, si l'on rajoute à σ un tenseur sphérique arbitraire, le point S ne change pas, car $\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{h}_3 = 0$.

On peut alors montrer que la position du point S est complètement caractérisée par les deux invariants J_2 et J_3 introduits par (2.16). Plus précisément, un calcul direct montre que les coordonnées polaires $(r,\ \theta)$ de S sont données par

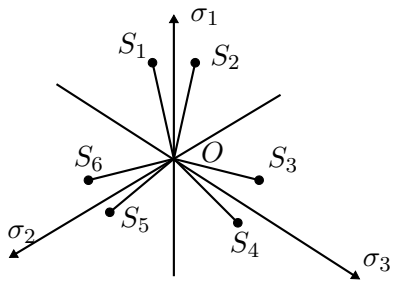
$$r = \sqrt{-3J_2},\ \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}} \tag{2.29}$$

Le second invariant J_2 détermine la distance OS, c'est-à-dire *l'intensité* du déviateur, tandis que le troisième invariant J_3 détermine son orientation. Plus précisément, on constate que l'on a

$$\begin{aligned} 3\theta &= \pm \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) + 2k\pi \\ \theta &= \pm\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned} \tag{2.30}$$

ce qui donne les six points S correspondant aux six numérotations possibles des trois valeurs propres. Si l'on impose par exemple $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ alors on se restreint au quartier $O\sigma_1\sigma_3'$ et le point S est complètement défini.

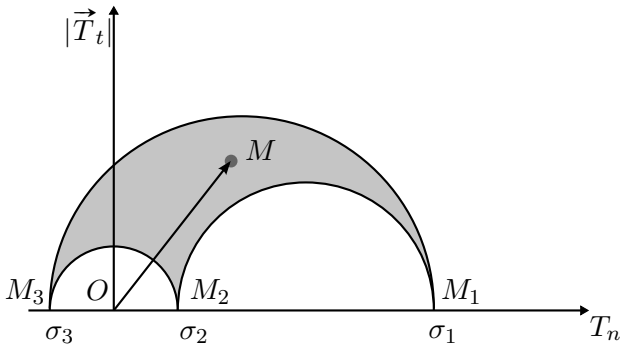
Finalement, on constate que la position du point Σ dans l'espace des contraintes principales est complètement caractérisée par I_1, J_2, J_3 : I_1 fixe la projection sur Δ, J_2 la distance à Δ et J_3 l'orientation de la projection de $O\Sigma$ sur Π.



2.3 Représentation de Mohr

2.3.1 Tricercle de Mohr

La représentation de Mohr est une représentation dans le plan des contraintes normales et tangentielles. On porte en abscisse la contrainte normale (algébrique) et en ordonnée le module de la contrainte tangentielle.



On obtient ainsi un point M pour chaque facette, et on cherche le lieu de ces points lorsque l'on fait varier la facette. Pour faire les calculs, on se place en repère principal du tenseur des contraintes et on suppose les valeurs propres rangées par ordre décroissant, $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$. Les points M_1, M_2 et M_3 correspondant aux facettes normales aux directions principales sont sur l'axe des contraintes normales. Pour une facette quelconque, on a

$$T_1 = \sigma_1 n_1 \quad T_2 = \sigma_2 n_2 \quad T_3 = \sigma_3 n_3$$

qui permet de calculer $T_n = T_i n_i$ et $|T|^2 = T_n^2 + T_t^2$

$$T_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{2.31}$$

$$T_n^2 + T_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \tag{2.32}$$

Etant donnée une valeur de T_n et de T_t, peut-on trouver une facette qui leur corresponde ? Pour cela, il faut calculer n_1, n_2 et n_3 à partir du système formé par (2.31), (2.32) et la relation

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \tag{2.33}$$

exprimant le fait que le vecteur $\vec{n}$ est unitaire. On a donc un système linéaire en n_1^2, n_2^2, n_3^2, dont la solution est

$$n_1^2 = \frac{T_t^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \tag{2.34}$$

et n_2^2, n_3^2, par permutation circulaire. Géométriquement, on retrouve au dénominateur le produit scalaire $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}$ et au numérateur le produit scalaire $\overrightarrow{MM_2} \cdot \overrightarrow{MM_3}$. On a donc

$$n_1^2 = \frac{\overrightarrow{MM_2} \cdot \overrightarrow{MM_3}}{\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}}, \quad n_2^2 = \frac{\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_3}}{\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3}}, \quad n_3^2 = \frac{\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2}}{\overrightarrow{M_3M_1} \cdot \overrightarrow{M_3M_2}} \tag{2.35}$$

Pour que cette solution soit satisfaisante, il faut vérifier que n_1^2, n_2^2 et n_3^2 sont positifs

$$n_1^2 \geqslant 0, n_2^2 \geqslant 0, n_3^2 \geqslant 0, \tag{2.36}$$

Or, puisque $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$, il est clair que

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} \geqslant 0, \quad \overrightarrow{M_2M_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3} \leqslant 0, \quad \overrightarrow{M_3M_1} \cdot \overrightarrow{M_3M_2} \geqslant 0 \tag{2.37}$$

Les conditions (2.36) exigent donc

$$\overrightarrow{MM_2} \cdot \overrightarrow{MM_3} \geqslant 0, \quad \overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_3} \leqslant 0, \quad \overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} \geqslant 0 \tag{2.38}$$

c'est-à-dire que les angles $(\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_3})$ et $(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2})$ soient aigus et que l'angle $(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_3})$ soit obtus, autrement dit que le point M soit à l'extérieur des deux demi-cercles de diamètres M_1M_2 et M_2M_3, et à l'intérieur du demi–cercle de diamètre M_1M_3. Ainsi, quand $\vec{n}$ varie, le point M reste dans la surface hachurée appelée *tricercle de Mohr* et qui devient un demi–cercle si deux valeurs propres coïncident, et un point pour un tenseur sphérique.

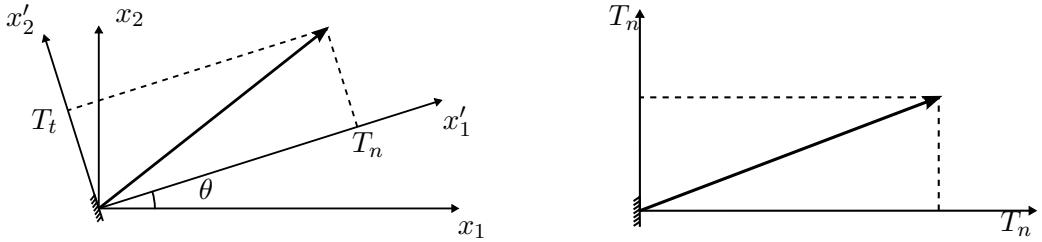
On constate d'autre part que M décrit le demi–cercle de diamètre M_1M_3 lorsque $\vec{n}$ varie dans le plan $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ (car (2.35) montre que $n_2 = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{MM_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MM_3}$). On voit également que le maximum de la contrainte de cisaillement (lorsque l'on fait varier la facette) est égale au rayon du plus grand cercle, c'est-à-dire à la demi différence des contraintes principales extrêmes

$$|T_t|_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \tag{2.39}$$

On montrera au paragraphe 2.3.2 que ce maximum est atteint lorsque $\vec{n}$ est bissectrice des directions principales.

2.3.2 Cercle de Mohr et pole

Nous considérons maintenant un état plan de contraintes (2.22), et nous faisons varier $\vec{n}$, dans le plan (x_1, x_2). On peut alors orienter la direction tangentielle à la facette en introduisant un vecteur unitaire $\vec{t}$ à $+\pi/2$ de $\vec{n}$. La contrainte tangentielle T_t devient donc une quantité algébrique, et la représentation dans le plan de Mohr permet de déterminer l'orientation du vecteur contrainte.



Pour calculer T_n et T_t on écrit

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \cos\theta \end{bmatrix}$$

on calcule le vecteur contrainte

$$\begin{array}{rcl} T_1 &=& \sigma_{11}\cos\theta \;+\; \sigma_{12}\sin\theta \\ T_2 &=& \sigma_{12}\cos\theta \;+\; \sigma_{22}\sin\theta \end{array} \tag{2.40}$$

et ensuite et en projetant T_n et T_t sur $\vec{n}$ et $\vec{t}$

$$\begin{aligned} T_n &= \sigma_{11}\cos^2\theta + 2\sigma_{12}\cos\theta\sin\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta \\ &= \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta \\ T_t &= (\sigma_{22}-\sigma_{11})\cos\theta\sin\theta + \sigma_{12}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ &= -\frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{2} + \sigma_{12}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{2.41}$$

Les directions principales s'obtiennent en annulant la contrainte tangentielle $T_t = 0$:

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \tag{2.42}$$

ce qui définit θ_0 à $k\pi/2$ près. Nous choisissons θ_0 en posant

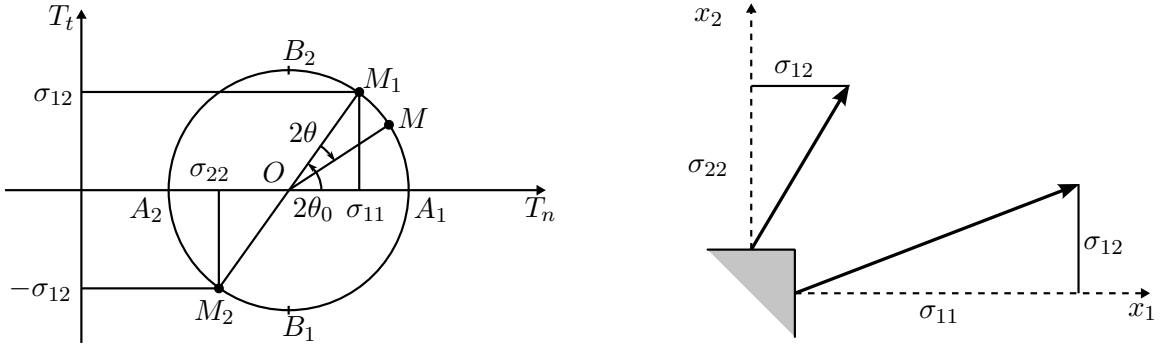
$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{12}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}\,\sin 2\theta_0 \\ \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{12}}{2}\right)^2 + \sigma_{12^2}}\,\cos 2\theta_0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

En reportant dans (2.43), on obtient alors

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}\,\cos 2\left(\theta_0-\theta\right) \\ T_t &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}\,\sin 2\left(\theta_0-\theta\right) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Lorsque θ varie, le point M, représentant le vecteur contrainte dans le plan T_n, T_t, décrit un cercle de centre Ω et rayon R

$$\Omega = \left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}, 0\right),\; R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{2.45}$$



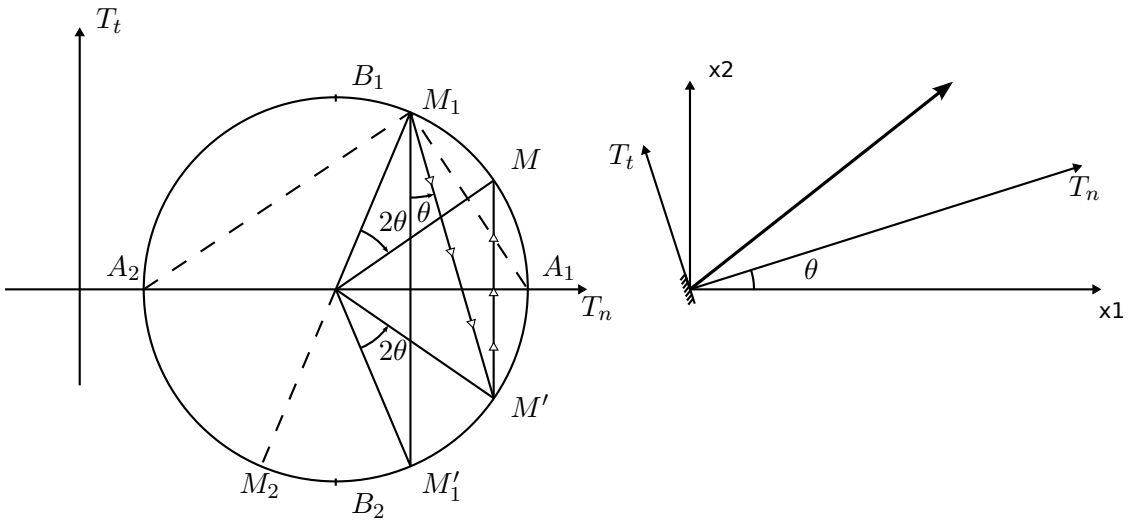
Les points et $M_1(\sigma_{11},\ \sigma_{12})$ et $M_2(\sigma_{22},\ -\sigma_{12})$ correspondent à $\vec{n} = \vec{e}_1$ et $\vec{n} = \vec{e}_2$ respectivement. Pour obtenir le point M correspondant à une normale $\vec{n}$ formant un angle

θ avec $\vec{e}_1$, il faut tourner par rapport à ΩM_1 d' un angle 2θ dans le sens rétrograde. Les points A_1 et A_2 correspondent aux directions principales, $\theta = \theta_0 + k\pi/2$ et les contraintes principales sont données par

$$\sigma_{1 \text{ ou } 2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{2.46}$$

Les points B_1 et B_2 correspondent aux directions de cisaillement maximal et sont donnés par $\theta = \theta_0 + \pi/4 + k\pi/2$, ce sont donc les bissectrices des directions principales, comme annoncé à la fin du paragraphe 2.3.1.

Le point M_1 est appelé pôle du cercle de Mohr, et il permet une construction graphique du vecteur contrainte associé à une facette quelconque.



Pour obtenir le point M, c'est-à-dire le vecteur contrainte s'exerçant sur une facette inclinée de θ par rapport à la verticale, on utilise la construction suivante :

1. on trace M_1M' parallèle à la facette considérée, qui coupe le cercle de Mohr en M' ;
2. on trace M est le symétrique de M' par rapport à l'axe des T_n.

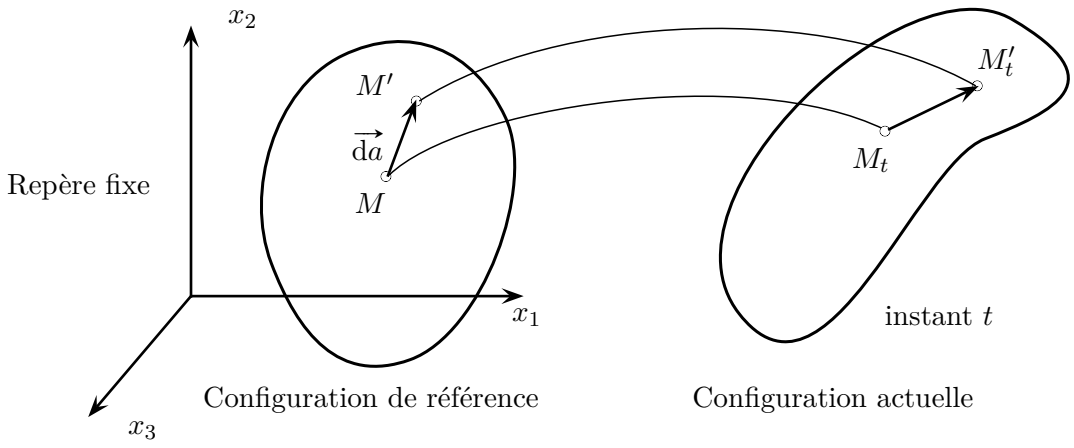
On en déduit, en particulier, les directions principales M_1A_1 et M_1A_2 ainsi que les directions de contrainte tangentielle maximum M_1B_1 et M_1B_2.

Chapitre 3

Étude des déformations

3.1 Grandes déformations

3.1.1 Description de la déformation



Pour repérer la position d'une particule d'un milieu continu, il faut introduire un repère d'espace supposé fixe au cours du temps : un référentiel. En général on choisit un référentiel galiléen, sinon il faut rajouter les forces d'inertie dans les forces de volume f_i. Le mouvement est décrit par la fonction

$$x_i = x_i\left(a_1, a_2, a_3, t\right) \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

donnant la position à l'instant t, M_t, de la particule M qui, dans la configuration de référence, occupe la position (a_1, a_2, a_3). Les x_i sont les variables eulériennes ou spatiales, les a_i sont les variables lagrangiennes ou matérielles.

Un vecteur matériel $\overrightarrow{\mathrm{d}a} = \overrightarrow{MM'}$ devient après déformation $\overrightarrow{\mathrm{d}x} = \overrightarrow{M_tM'_t}$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\,\mathrm{d}a_j, \quad \overrightarrow{\mathrm{d}x} = \mathbb{F}\overrightarrow{\mathrm{d}a} \tag{3.2}$$

L'application linéaire tangente $\mathbb{F}$ qui à un vecteur matériel $\overrightarrow{\mathrm{d}a}$ associe son déformation $\overrightarrow{\mathrm{d}x}$ est appelée "tenseur gradient de la déformation". Elle caractérise la déformation "locale", c'est-à-dire la déformation au voisinage du point M. Ce n'est pas cependant un mesure satisfaisante de la "déformation" au sens naïf du terme, car si le milieu a un mouvement

de solide rigide, alors

$$x_i = c_i(t) + Q_{ij}(t)a_j \tag{3.3}$$

où la matrice Q_{ij} décrit une rotation et est donc orthogonale. Le tenseur gradient de la déformation est alors donné par

$$F_{ij}(a,t) = Q_{ij}(t) \tag{3.4}$$

alors qu'il n'y a manifestement pas de déformation au sens naïf du terme (variation de longueur ou variation d'angle). En fait, le tenseur gradient de la déformation contient à la fois une rotation et une déformation. Il convient de séparer ces deux composantes. Par "déformation" on entend variation de forme, donc de longueur ou d'angle, donc encore variation de produits scalaires. Soit $\overrightarrow{\mathrm{d}a}$ et $\overrightarrow{\delta a}$ deux vecteurs matériels, $\overrightarrow{\mathrm{d}x}$ et $\overrightarrow{\delta x}$ leurs déformés

$$\overrightarrow{\mathrm{d}x} \cdot \overrightarrow{\delta x} = \mathrm{d}x_i \delta x_i = F_{ij}F_{ik}\,\mathrm{d}a_j \delta a_k = C_{jk}\,\mathrm{d}a_j \delta a_k \tag{3.5}$$

Ainsi la variation du produit scalaire de deux vecteurs est caractérisée par la forme bilinéaire symétrique (définie par

$$C_{jk} = F_{ij}F_{ik}, \quad \mathbb{C} = \mathbb{F}^T\mathbb{F} \tag{3.6}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}x} \cdot \overrightarrow{\delta x} = \mathbb{C}\left(\overrightarrow{\mathrm{d}a}, \overrightarrow{\delta a}\right) = \overrightarrow{\mathrm{d}a} \cdot \mathbb{C}\overrightarrow{\delta a} \tag{3.7}$$

$\mathbb{C}$ est le tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy-Green droit. Ce tenseur est la base de la description des grandes déformations.

$$\begin{aligned} &D_{ij} = F_{ik}F_{jl}\dot{C}_{kl} \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\mathrm{d}x} \cdot \overrightarrow{\delta x}\right) = D_{ij}\,\mathrm{d}x_i \partial x_j = \dot{C}_{kl}\,\mathrm{d}a_k\,\mathrm{d}a_l \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.1.2 Le tenseur des déformations

En l'absence de déformation, c'est-à-dire dans un mouvement de solide rigide (3.3), on a

$$C_{jk} = Q_{ij}Q_{ik} = \delta_{jk} \tag{3.9}$$

puisque la matrice Q_{ij} est orthogonale. Le tenseur des dilatations est le lenseur unité $\mathbb{1}$, et l'on a conservation du produit scalaire. Le tenseur des déformations – plus précisément le "tenseur de Green-Lagrange des déformations" – est défini par

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{C} - \mathbb{1}\right), \quad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(C_{ij} - \delta_{ij}\right) \tag{3.10}$$

Il donne la variation du produit scalaire de deux vecteurs par

$$\overrightarrow{\mathrm{d}x} \cdot \overrightarrow{\delta x} - \overrightarrow{\mathrm{d}a} \cdot \overrightarrow{\delta a} = 2\overrightarrow{\mathrm{d}a} \cdot \mathbb{E}\overrightarrow{\delta a} \tag{3.11}$$

Comme pour le tenseur des contraintes, on démontre (voir Annexe A) que dans un changment de repère, les composantes de ce tenseur se transforment par

$$E'_{ij} = Q_{ik}Q_{jl}E_{kl} \tag{3.12}$$

II reste à relier ce tenseur des déformations au concept physique de déformation, c'est-à-dire aux variations de longueur et d'angle.

Définition 3.1
On appelle allongement dans la direction $\vec{n}$, *la quantité* $\varepsilon(\vec{n})$ *définie comme le rapport :*

$$\varepsilon(\vec{n}) = \frac{M_tM'_t - MM}{MM'}, \quad \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}a\,\vec{n} \tag{3.13}$$

de la variation de longueur d'un vecteur matériel $\overrightarrow{MM'}$ *dirigé selon* $\vec{n}$ *sur la longueur initiale. On appelle* glissement dans deux directions perpendiculaires $\vec{m}$ et $\vec{n}$, *la variation :*

$$(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{M_tM'_t}, \overrightarrow{M_tM''_t}\right) \quad \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}a\,\vec{m} \\ \overrightarrow{MM''} = \delta a\,\vec{n} \end{cases} \tag{3.14}$$

de l'angle de deux vecteurs matériels $\overrightarrow{MM'}$ *et* $\overrightarrow{MM''}$ *portés par* $\vec{m}$ *et* $\vec{n}$ *respectivement.*

Théorème 3.1
L'allongement dans une direction $\vec{n}$ *et le glissement dans deux directions perpendiculaires* $\vec{m}$ *et* $\vec{n}$ *sont donnés à partir du tenseur des déformations par :*

$$\varepsilon(\vec{n}) = \sqrt{1 + 2E_{ij}n_in_j} - 1 \tag{3.15}$$

$$\gamma(\vec{n},\vec{m}) = \arcsin\frac{2E_{ij}m_in_j}{(1+\varepsilon(\vec{m}))(1+\varepsilon(\vec{n}))} \tag{3.16}$$

Démonstration.

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} & = \overrightarrow{\mathrm{d}a} & = \mathrm{d}a\vec{n} \\ \overrightarrow{MM''} & = \overrightarrow{\delta a} & = \delta a\vec{m} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \overrightarrow{M_tM'_t} = \overrightarrow{\mathrm{d}x} \\ \overrightarrow{M_tM''_t} = \overrightarrow{\delta x} \end{cases}$$

Par définition de $\varepsilon(\vec{n})$ et d'après (3.11), on a

$$\varepsilon(\vec{n}) = \frac{M_tM'_t - MM'}{MM'} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{d}x}| - \overrightarrow{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}a}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{d}x}| &= \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{d}x}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}x}} = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}a} + 2\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\mathbb{E}\,\mathrm{d}a} \\ &= \mathrm{d}a\sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n} + 2\vec{n}\cdot\mathbb{E}\vec{n}} = \mathrm{d}a\sqrt{1 + 2\vec{n}\cdot\mathbb{E}\vec{n}} \end{aligned}$$

et on obtient directement (3.15). De même, on peut écrire à partir de (3.14)

$$\begin{aligned} \sin\gamma(\vec{m},\vec{n}) &= \cos\left(\overrightarrow{M_tM'_t}, \overrightarrow{M_tM''_t}\right) \\ &= \frac{\overrightarrow{M_tM'_t}\cdot\overrightarrow{M_tM''_t}}{M_tM'_t\ M_tM''_t} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}x}\overrightarrow{\delta x}}{|\overrightarrow{\mathrm{d}x}||\overrightarrow{\delta x}|} \end{aligned}$$

mais d'après (3.11) et (3.13)

$$|\overrightarrow{\mathrm{d}x}| = \mathrm{d}a\,(1+\varepsilon\,(\vec{n}))$$
$$\overrightarrow{\mathrm{d}x}\cdot\overrightarrow{\delta x} = \overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\delta a} + 2\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\mathbb{E}\overrightarrow{\delta a} = 2\,\mathrm{d}a\delta a\vec{m}\cdot\mathbb{E}\vec{n}$$

puisque $\vec{m}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$. Finalement

$$\sin\gamma\,(\vec{m},\vec{n}) = \frac{2\vec{m}\cdot\mathbb{E}\vec{n}}{(1+\varepsilon\,(\vec{n}))\,(1+\varepsilon\,(\vec{m}))}$$

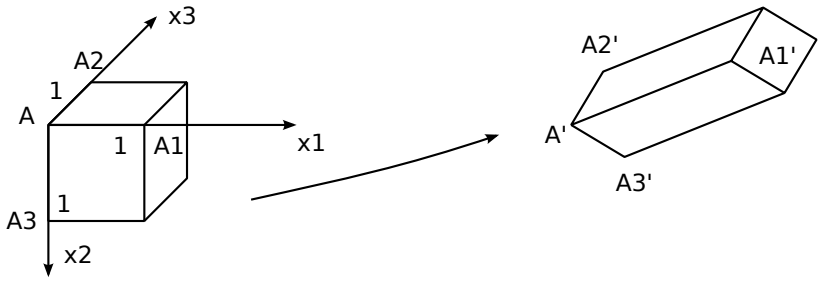
ce qui donne (3.16). □

En particulier, on obtient la signification des composantes de C_{ij} de $\mathbb{C}$ en appliquant (3.15) et (3.16) aux vecteurs de base

$$E_{11} = \vec{e}_1\cdot\mathbb{E}\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\left\{[1+\varepsilon\,(\vec{e}_1)]^2 - 1\right\} \tag{3.17}$$

$$E_{12} = \vec{e}_1\cdot\mathbb{E}\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\,[1+\varepsilon\,(\vec{e}_1)]\,[1+\varepsilon\,(\vec{e}_2)]\sin\gamma\,(\vec{e}_1,\vec{e}_2) \tag{3.18}$$

Ainsi les composantes diagonales de E_{ij} caractérisent les allongements dans les directions des axes, tandis que les composantes non diagonales caractérisent les glissements dans les directions des axes. On peut donc, à partir de ces composantes, construire la déformée d'un cube unité d'arête dirigée selon les axes : ce cube se déforme en parallélépipède défini par

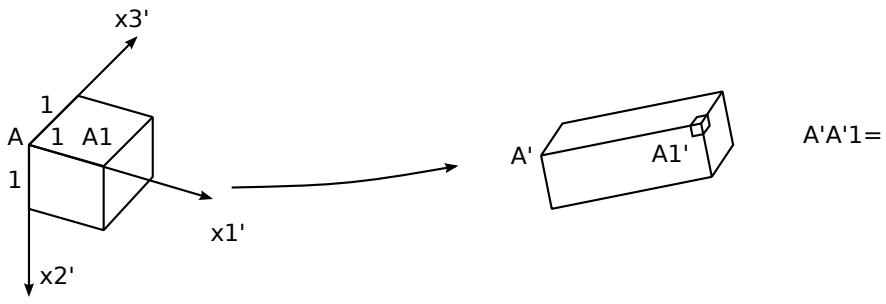


$$\begin{cases} A'A'_1 = \sqrt{1+2E_{11}} \\ (A'A'_1,\ A'A'_2) = \arcsin\dfrac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}} \end{cases} \tag{3.19}$$

Comme pour le tenseur des contraintes, on peut diagonaliser le tenseur des déformations, c'est-à-dire trouver un repère orthogonal où la matrice représentant $\mathbb{E}$ est diagonale, E_1, E_2 et E_3 sont appelés allongements

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

principaux. La propriété caractéristique des axes principaux des déformations est que les glissements dans leur direction sont nuls. Un cube unité d'arête dirieée selon les axes principaux se transforme en un parallélépipède rectange



En mécanique des solides, on introduit souvent le vecteur déplacement $\vec{u} = \vec{x} - \vec{a}$, définissant le mouvement par

$$x_i = a_i + u_i\left(a_1, a_2, a_3, t\right) \tag{3.21}$$

On obtient alors à partir de (3.22)

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \tag{3.22}$$

Le tenseur des déformations est alors donné par

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i}\frac{\partial u_k}{\partial a_j}\right) \tag{3.23}$$

3.2 Petites déformations

3.2.1 Hypothèse des petites perturbations

En Mécanique des Solides, on fait souvent l'hypothèse des petites perturbations pour laquelle le solide s'écarte peu de sa configuration de référence. Les déplacements et les déformations restent petits, ce qui a deux conséquences essentielles :

1. on peut identifier variables de Lagrange a_i et variables d'Euler x_i, dans la mesure où la différence entre les deux est négligeable. Ceci est tout à fait essentiel, car certaines équations s'écrivent naturellement en variables eulériennes —les équations d'équilibre, par exemple— alors que d'autres s'écrivent plus naturellement en variables lagrangiennes —la définition des déformations. Entre autres, cela revient à écrire les équations d'équilibre dans la configuration telle qu'elle existe avant déformation, alors qu'il faudrait, en toute rigueur, les écrire dans la configuration réelle où s'appliquent effectivement les efforts. Cette approximation, habituellement appelée hypothèse de linéarité externe, est souvent justifiée mais on rencontrera quelques cas, en particulier toutes les questions de stabilité, où elle ne l'est pas ;
2. dans tous les calculs, on ne conserve que les termes les plus significatifs, en négligeant les termes d'ordre supérieur en u_i et ses dérivées. En d'autres termes, on effectue une linéarisation autour de la configuration de référence, supposée naturelle, c'est-à-dire libre de contraintes, cararctérisée par

   $$\rho = \rho_c, \quad u_i = 0, \quad \sigma_{ij} = 0 \tag{3.24}$$

   et le mouvement est décrit par

   $$\rho = \rho_0 + \rho, \quad u_i, \quad \sigma_{ij} \tag{3.25}$$

   avec ρ', u_i, σ_{ij} petits et fonctions de (x_i, t), x_i représentant indifféremment les variables de Lagrange a_i ou d'Euler x_i. La vitesse V_i et l'accélération γ_i sont données par

   $$V_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \gamma_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{3.26}$$

   en remarquant que les dérivées particulaires sont des dérivées partielles par rapport au temps en variables de Lagrange. L'équation de continuité (1.11) donne

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_0 + \rho'\right) + \left(\rho_0 + \rho'\right)\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0$$

mais $\mathrm{d}\rho_0/\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\rho'/\,\mathrm{d}t = \partial\rho'/\partial t$ en variables de Lagrange, et on peut négliger le terme $\rho'\partial V_i/\partial x_i$ qui est du second ordre par rapport à la perturbation. Il reste donc

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho'_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} = 0$$

ou en intégrant par rapport au temps

$$\rho' = -\rho_0\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{3.27}$$

la constante d'intégration étant nulle puisque dans la configuration de référence ρ' et u_i sont nuls. Nous retrouverons cette relation au paragraphe 3.2.2. De même, l'équation du mouvement (1.15) donne

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \tag{3.28}$$

En particulier, on constate que ρ' disparaît disparaît de l'équation du mouvement. En Mécanique des Solides, on peut oublier l'équation de continuité qui permet seulement de calculer ρ' par (3.27) une fois connu le déplacement $u_i\,(x_i, t)$.

3.2.2 Tenseur linéarisé des déformations

Dans le cadre d'hypothèse des petites perturbations, le tenseur des déformations introduit au paragraphe 3.1.2 et défini par (3.23) à partir du déplacement u_i devient

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.29}$$

Ce tenseur ε_{ij} est le tenseur des déformations linéarisées. En grandes déformations, en effet, le tenseur de Green-Lagrange que nous avons défini, n'est pas le seul possible, et on peut en introduire bien d'autres, mais en petites déformations, tous ces tenseurs se réduisent au tenseur ε défini par (3.29). Par linéarisation des formules (3.15) et (3.16), il permet de calculer l'allongement dans une direction $\vec{n}$ le glissement dans deux directions $\vec{m}$ et $\vec{n}$ par les formules

$$\varepsilon(\vec{n}) = \varepsilon_{ij}n_i n_j \quad \text{et} \quad \gamma(\vec{m}, \vec{n}) = 2\varepsilon_{ij}n_i m_j \tag{3.30}$$

obtenues simplement par développement limité des diverses fonctions internenant dans (3.15) et (3.16). On obtient aussi la signification des composantes ε_{ij}

$$\varepsilon(\vec{e}_1) = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \tag{3.31}$$

Pour dégager la signification de ce tenseur, on peut considérer le mouvement du voisinage d'un point M on peut écrire

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{M'M'_t}\right)_i &= u_i\,(x + \mathrm{d}x)\\ &= u_i(x) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x_j\\ &= u_i + U_{i,j}\,\mathrm{d}x_j\end{aligned}$$

On décompose alors $u_{i,j}$ en partie symétrique et antisymétrique

$$\left(\overrightarrow{M'M'_t}\right)_i = u_i + \omega_{ij}\,\mathrm{d}x_j + \varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}x_j$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \tag{3.32}$$

On introduit le vecteur $\vec{\omega}$, adjoint du tenseur antimétrique ω_{ij} (Annexe A) par

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

ce qui permet d'écrire pour $\omega_{ij}\,\mathrm{d}x_j$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2\,\mathrm{d}x_3 - \omega_3\,\mathrm{d}x_2 \\ \omega_3\,\mathrm{d}x_1 - \omega_1\,\mathrm{d}x_3 \\ \omega_1\,\mathrm{d}x_2 - \omega_2\,\mathrm{d}x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

et finalement on a

$$\overrightarrow{M'M'_t} = \underbrace{\underbrace{\vec{u}}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}x}}_{\text{rotation}}}_{\text{mouvement rigidifiant}} + \underbrace{\varepsilon\overrightarrow{\mathrm{d}x}}_{\text{déformation pure}} \tag{3.35}$$

Le mouvement rotation et du voisinage d'un point M se compose d'une translation, d'une rotation et d'une déformation pure.

On peut refaire sur le tenseur des déformations tout ce que nous avons fait au chapitre 2 sur le tenseur des contraintes : diagonalisation, définition des invariants, décomposition en déviateur et partie sphérique

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij} + e_{ij} \\ \quad \varepsilon = \dfrac{\varepsilon_{ii}}{3} = \dfrac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \dfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad e_{ii} = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Physiquement, cette décomposition correspond à la décomposition de la déformation en une dilatation uniforme (partie sphérique) et une distorsion, c'est-à-dire une déformation sans changement de volume (déviateur). En effet, on vérifie facilement que la trace ε_{ii} du tenseur des déformations est égale à la variation relative de volume

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = 3\varepsilon \tag{3.37}$$

Il suffit par exemple de partir d'un élément de volume parallélépipédique orienté selon les directions principales du tenseur des déformations

Après déformation, cet élément devient un parallélépipède rectangle de côté $(1+\varepsilon_1)\,\mathrm{d}x_1$, $(1+\varepsilon_2)\,\mathrm{d}x_2$, $(1+\varepsilon_3)\,\mathrm{d}x_3$ et son volume est

$$V + \Delta V = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \left[1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right] V \tag{3.38}$$

en négligeant les termes d'ordre 2 en ε_1, ε_2, ε_3, ce qui donne directement (3.37). La conservation de la masse

$$\left(\rho_0 + \rho'\right)\left(V + \Delta V\right) = \rho_0 V$$

donne alors

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{\Delta V}{V} = -\varepsilon_{ii} = -u_{i,i} \tag{3.39}$$

et on retrouve (3.27). Nous terminons ce paragraphe par quelques exemples de déformatjons homogènes.

1. Dilatation uniforme

$$\begin{cases} u_i = \alpha x_i \\ \varepsilon_{ij} = u_{i,j} = \alpha \delta_{ij}, \quad \dfrac{\Delta V}{V} = 3\alpha \end{cases} \tag{3.40}$$

2. Extension simple

$$\begin{cases} u_1 = \alpha x_1 \\ u_2 = -\beta x_2 \\ u_3 = -\beta x_3 \end{cases} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Si cette extension se fait sans changement de volume, alors d'après (3.37), on a $\beta = \frac{\alpha}{2}$. La décomposition en déviateur et partie sphérique s'écrit comme en (1.19)

$$\varepsilon = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad e\frac{2\,(\alpha - \beta)}{3} \tag{3.42}$$

3. Glissement simple

$$\begin{cases} u_1 = \gamma x_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \qquad u'_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-\gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Le mouvement se compose de la déformation définie par ε et d'une rotation de $\frac{-\gamma}{2}$ autour de l'axe x_3.

Pour visualiser les déformations, on a représenté des déformations importantes, mais il ne faut pas oublier que les déformations sont en fait petites : α, β, γ sont des quantités petites.

3.2.3 Dualité contraintes–déformations

On remarque l'analogie entre le tenseur des déformations ε_{ij}, défini par (3.29) à partir du déplacement u_i et le tenseur des taux de déformations D_{ij} défini par (1.23) à partir des vitesses V_i. Tout ce que nous avons fait au paragraphe 3.2.2 sur le petit déplacement u_i, en particulier toutes les interprétations physiques, peut se transposer directement aux vitesses V_i qui représentent le déplacement infinitésimal entre la configuration à l'instant t et celle à l'instant $t + \mathrm{d}t$. Plus précisément, on a l'analogie suivante

Déplacements	u_i	V_i	Vitesses
gradient des déplacements	$u_{i,j}$	$V_{i,j}$	gradient des vitesses
tenseur des déformations	ε_{ij}	D_{ij}	tenseur des taux de déformation
tenseur des rotations	ω_{ij}	Ω_{ij}	tenseur taux de rotation
vecteur rotation	$\vec{\omega}$	$\vec{\Omega}$	vecteur taux de rotation
allongement dans la direction $\vec{n}$	$\varepsilon(\vec{n})$		taux d'allongement
glissement dans les directions $\vec{m}$, $\vec{n}$	$\gamma(\vec{m},\vec{n})$		taux de glissement
etc.			

Réciproquement, tout ce que nous avons fait au paragraphe 3.1.2 peut se transposer directement en termes de déplacements. Il s'agit simplement d'un changement de terminologie. On parle de déplacement virtuel $u^*{}_i$ au lieu de vitesses virtuelles $V^*{}_i$ et de *travaux virtuels* au lieu de *puissances virtuelles*. Par exemple, (1.24) ou (1.38) peut s'écrire

$$\iiint_\Omega \rho\gamma_i \overset{*}{u}_i \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f_i \overset{*}{u}_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T_i \overset{*}{u}_i \,\mathrm{d}S - \iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{\varepsilon}_{ij} \,\mathrm{d}v \tag{3.45}$$

expression du théorème des travaux virtuels ou du principe des travaux virtuels, suivant le point de vue que l'on adopte.

En particulier, le travail des efforts intérieurs par unité de volume est

$$\overset{*}{w}_{int} = \sigma_{ij} \overset{*}{\varepsilon}_{ij} \tag{3.46}$$

qui met en dualité le tenseur des contraintes σ_{ij} que nous avons étudié au chapitre 2, et le tenseur des déformations ε_{ij} que nous venons d'introduire. C'est une propriété tout à fait universelle : dans toute théorie des milieux continus, il y a dualité entre les contraintes et les déformations, c'est-à-dire entre la schématisation des efforts intérieurs et la description cinématique.

Dans le cadre de la MMC classique, que nous développons actuellement, cela n'apporte qu'une simple vérification. Dans d'autres cas, où la schématisation à adopter est moins évidente, cela sera pour nous un guide précieux.

On peut pousser plus loin cette dualité, en remarquant que dans toute théorie des milieux continus, on travaille sur quatre espaces :

— l'espace des déplacements, $\mathcal{U}$, $u \in \mathcal{U}$

— l'espace des déformations, $\mathcal{D}$, $\varepsilon \in \mathcal{D}$

— l'espace des contraintes, $\mathcal{S}$, $\sigma \in \mathcal{S}$

— l'espace des chargements, $\mathcal{C}$, $\phi = (f_i, T_i^e) \in \mathcal{C}$

Le travail des efforts extérieurs met en dualité $\mathcal{U}$ et $\mathcal{C}$ par

$$\langle u, \phi \rangle = \iiint_\Omega u_i f_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} u_i T_i^e \,\mathrm{d}S \tag{3.47}$$

Le travail des efforts intérieurs met en dualité $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ par

$$\langle\langle \varepsilon, \sigma \rangle\rangle = \iiint_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}v \tag{3.48}$$

et, en statique, le théorème des travaux virtuels (3.45) peut s'écrire

$$\langle\langle \overset{*}{\varepsilon}, \sigma \rangle\rangle = \langle \overset{*}{u}, \phi \rangle \tag{3.49}$$

Nous reviendrons sur cette dualité lorsque nous parlerons des méthodes variationnelles auchapitre 9.

3.3 Compatibilite des déformations

Connaissant le champ des déplacements $u_i(x)$, on en déduit par (3.29), le champ des déformations $\varepsilon_{ij}(x)$. Réciproquement, si on connaît le champ des déformations $\varepsilon_{ij}(x)$, peut-on calculer le champ des déplacements $u_i(x)$? Et si oui, comment ?

Le premier problème est celui de la compatibilité des déformations, le second celui de l'intégration d'un champ de déplacements. Ce problème est extrêmement important en mécanique des solides, car nous verrons que la solution s'obtient souvent sous forme d'un champ de déformation ; il faut alors remonter aux déplacements. Remarquons que, en vertu de l'analogie discutée au paragraphe 3.2.3, on pourra transposer tous nos résultats en termes de vitesse et de taux de déformation, le problème étant alors de calculer le champ des vitesses à partir de la valeur en tout point du tenseur taux de déformation.

3.3.1 Calcul de la rotation

Pour calculer le déplacement u_i, il faut intégrer les formes différentielles

$$\mathrm{d}u_i = u_{i,j}\,\mathrm{d}x_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\,\mathrm{d}x_j \tag{3.50}$$

Or, on connaît $\varepsilon_{ij}(x)$ mais on ne connaît pas ω_{ij}. La première étape consiste donc à calculer la rotation ω_{ij}.

Lemme 3.1
Les dérivées de la rotation sont liées à celles de la déformation par la relation

$$\omega_{ij,l} = \varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i} \tag{3.51}$$

Démonstration. On part de la définition

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,jl} - u_{j,il}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,jl} + u_{l,ij} - u_{l,ij} - u_{j,il}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(u_{i,l} + u_{l,i}\right)_{,j} - \frac{1}{2}\left(u_{l,j} + u_{j,l}\right)_{,i}\\ &= \varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i}\end{aligned}$$

en utilisant le fait que les dérivées partielles commutent : $u_{i,jl} = u_{i,lj}$, etc. □

On peut alors calculer la rotation ω_{ij} par intégration du système

$$\mathrm{d}\omega_{ij} = (\varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i})\,\mathrm{d}x_l \tag{3.52}$$

Lemme 3.2
Une condition nécessaire et suffisante pour que le système

$$\mathrm{d}f = a_l\,\mathrm{d}x_l \tag{3.53}$$

soit intégrable, c'est-à-dire pour que l'on puisse calculer f à partir des $a_l = f_{,l}$ est que

$$a_{l,m} = a_{m,l} \tag{3.54}$$

Démonstration. La condition nécessaire est évidente (elle exprime simplement que $f_{,lm} = f_{,ml}$). On démontre en mathématiques que cette condition est également suffisante. □

En appliquant ce lemme au système différentiel (3.52), on obtient la condition suivante

$$(\varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i})_{,k} = (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})_{,l} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0 \tag{3.55}$$

Cette condition est une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse calculer ω_{ij} à partir de ε_{ij}. C'est donc une condition nécessaire pour que le champ de déformation ε_{ij} soit intégrable, c'est-à-dire pour que l'on puisse calculer le déplacement u_i.

On tire également du Lemme 3.1 le résultat suivant

Théorème 3.2
Si le champ de déformation est identiquement nul, alors le déplacement est un déplacement de solide rigide

$$\vec{u} = \vec{c} + \vec{\omega} \wedge \vec{x} \tag{3.56}$$

Il est en effet clair que si le déplacement est un déplacement de solide rigide, infinitésimal, bien entendu, alors le tenseur des déformations associé est nul, puisque $u_{i,j}$ est antisymétrique. Le théorème 3.2 constitue une réciproque. Compte-tenu de l'analogie présentée au paragraphe 3.2.3, ce théorème est identique au Lemme 1.4 paragraphe 1.2.1.
Démonstration. Puisque ε_{ij} est nul, le Lemme 3.1 montre que $\omega_{ij,l}$ est nul, et donc que ω_{ij} est constant

$$u_{i,j} = \cancel{\varepsilon}_{ij} + \omega_{ij} = \omega^0_{ij}$$

Le système (3.50) s'intègre alors directement pour donner

$$u_i = \omega^0_{ij} x_j + c^0_j$$

que l'on peut écrire sous la forme (3.56) en introduisant le vecteur $\vec{\omega}$ adjoint du tenseur antisymétrique ω^0_{ij} (le calcul est le même que celui qui a conduit à (3.35). □

3.3.2 Calcul du déplacement

Sous réserve que la condition (3.55) soit vérifiée, l'intégration du système (3.52) donne ω_{ij} à une constante près ω^0_{ij}. Le déplacement u_i s'obtiendra alors en intégrant le système (3.50)

$$\mathrm{d}u_i = u_{i,j}\,\mathrm{d}x_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\,\mathrm{d}x_j$$

Pour que cela soit possible, il faut et il suffit, d'après le Lemme 3.2, que

$$\varepsilon_{ij,l} + \omega_{ij,l} = \varepsilon_{il,j} + \omega_{il,j}$$

Cependant, les dérivées $\omega_{ij,l}$ ont été calculées par (3.51), et cette condition devient

$$\varepsilon_{ij,l} + \varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i} = \varepsilon_{il,j} + \varepsilon_{ij,l} - \varepsilon_{jl,i}$$

condition qui se trouve identiquement vérifiée, et le système (3.50) peut toujours s'intégrer à un déplacement de la forme

$$\omega^0_{ij} x_j + c^0_i$$

près, c'est-à-dire à un déplacement de solide rigide près. Nous avons donc démontré le résultat suivant

Théorème 3.3
Pour que le champ de déformation $\varepsilon_{ij}(x)$ soit intégrable, il faut et il suffit que les équations de compatibilité (3.55)

$$\varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0$$

soient vérifiées. On peut alors calculer le déplacernent à un déplacement de solide près.

Pratiquement, pour intégrer un champ de déformation ε_{ij}, c'est-à-dire pour calculer u_i par résolution du système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}(x) \tag{3.57}$$

il faut vérifier les équations de compatibilité (3.55) ; si elles ne sont pas vérifiées, le problème n'admet pas de solution. Si elles le sont, alors on peut calculer le déplacement u_i ; pour cela, on peut utiliser deux méthodes :

1. méthode systématique : on intègre (3.52), puis (3.50) ;
2. méthode directe : on calcule par résolution directe de (3.57) une solution particulière, et on remarque que la solution générale de (3.57) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre, $\varepsilon_{ij} = 0$, qui, d'après le Théorème 3.2, est un déplacement de solide rigide. Nous verrons dans la suite des exemples de cette démarche.

Les équations de compatibilité (3.55) font intervenir quatre indices i, j, k et l, variant de 1 à 3, soit *a priori* 81 équations. Néanmoins, on constate que la quantité (3.55) est antisymétrique en i et j, antisymétrique en k et l, et symétrique par rapport aux couples (i, j) et (k, l). Il reste donc finalement six équations indépendantes obtenues pour $ijkl =$ (1212), (1213), et permutation circulaire. On obtient

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{11,23} + (\varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{12,3})_{,1} = 0 \tag{3.58}$$

et les qutre équations qui s'en déduisent par permutation circulaire. On peut également obtenir un système de six équations équivalentes, en faisant $k = j$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{il,kk} + \varepsilon_{kk,il} - (\varepsilon_{kl,ik} + \varepsilon_{ik,kl}) = 0 \\ &\Delta\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kk,ij} - (\varepsilon_{jk,ik} + \varepsilon_{ik,jk}) = 0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

forme symétrique en i, j, qui donne donc 6 équations équivalentes à (3.58).

Terminons par deux cas particuliers importants.

1. Déformation homogène

   $$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^0_{ij} = \text{Cte} \tag{3.60}$$

   En intégrant (3.52), il vient $\omega_{ij} = \omega^0_{ij} = \text{Cte}$ et (3.50) donne

   $$\vec{u} = \varepsilon^0 \vec{x} + \vec{\omega} \wedge \vec{x} + \vec{c} \tag{3.61}$$

2. Déformation linéaire

   $$\varepsilon_{ij} = A_{ijk} x_k \tag{3.62}$$

forme qui fait intervenir 18 coefficients $A_{ijk} = A_{jik}$. Les équations de compatibilité (3.58), ne faisant intervenir que des derivées secondes de ε_{ij} sont automatiquement vérifiées. Par intégration de (3.52) et (3.50), on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_{ij} &= (A_{ikj} - A_{jki})\,\mathrm{d}x_k \\ \omega_{ij} &= (A_{ikj} - A_{jki})\,x_k + \omega_{ij}^0 \end{aligned} \tag{3.63}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u_i &= (A_{ijk} + A_{ikj} - A_{jki})\,x_k\,\mathrm{d}x_j + \omega_{ij}^0\,\mathrm{d}x_j \\ u_i &= \frac{1}{2}\,(A_{ijk} + A_{ikj} - A_{jki})\,x_j x_k + \omega_{ij}^0 x_j + c_i^0 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Chapitre 4

Lois de comportement

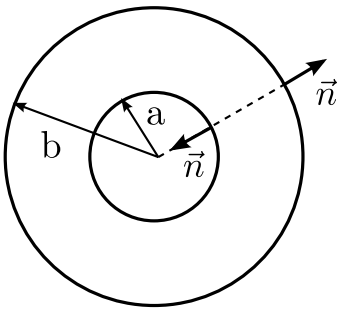
4.1 Problèmes de mécanique des solides

4.1.1 Formulations dynamiques et quasi-statiques

Pour résoudre un problème de Mécanique des Solides, il faut calculer la solution (u_i, σ_{ij}), c'est-à-dire calculer les champs de vecteurs déplacements $u_i(x)$ et de tenseurs des contraintes $\sigma_{ij}(x)$, à partir des données, qui sont constituées par

1. l'ensemble des sollicitations imposées au solide :
   - forces volumiques ;
   - conditions aux limites (forces ou déplacements imposés à la surface).
2. les conditions initiales, précisant la position et la vitesse initiale du solide.

Exemple : Réservoir sphérique soumis à une pression intérieure n



- les forces volumiques sont supposées nulles (pesanteur négligeable)

$$f_i = 0 \tag{4.1}$$

- la surface extérieure $r = b$ est soumise à la pression atmosphérique, la contrainte est donc nulle d'après (2.2) :

$$r = b : \quad \sigma_{ij} n_j = T_i = 0 \tag{4.2}$$

- la surface intérieure $r = a$ est soumise à la pression p (supposée mesurée par rapport à la pression atmosphérique) d'où

$$r = a : \quad \sigma_{ij} n_j = T_i = -p n_i \tag{4.3}$$

1. problème dynamique : on donne la pression $p(t)$ comme fonction du temps ; on donne également les conditions initiales – par exemple, à $t = 0$, le réservoir est au repos

$$u_i(x, 0) = 0 \quad V_i(x, 0) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = 0 \tag{4.4}$$

et on cherche la solution $u_i(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$ qm doit vérifier l'équation du mouvement (3.28)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \tag{4.5}$$

avec (4.1), les conditions aux limites (4.2) et (4.3), et les conditions initiales (4.4). Ce problème correspond par exemple à l'étude de la mise en charge brutale du réservoir. Moyennant une modification des conditions initiales (4.4), il correspond aussi à l'étude des vibrations du réservoir, si l'on impose une pression $p(t)$ sinusoïdale

$$p(t) = p_0 \cos \omega t \tag{4.6}$$

on recherche alors une solution périodique en t, condition qui remplace (4.4).

2. problème statique : la pression p est constante c'est la pression en service du réservoir. On recherche alros une solution statique, c'est-à-dire indépendante du temps $u_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ vérifiant les équations d'équilibre

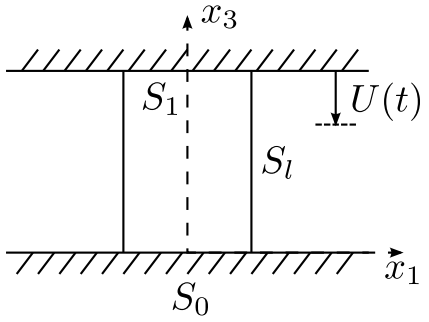
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \tag{4.7}$$

avec (4.1) et les CI (conditions aux limites) (4.2) et (4.3). Le temps a disparu, et les conditions initiales n'ont plus lieu d'être.

3. Problème quasi-statique : On suppose comme en a) que la pression t varie au cours du temps, $p(t)$, mais on fait l'hypothèse quasi-statique : les évolutions sont suffisamment lentes pour que, dans l'équation du mouvement (4.5), on puisse négliger le terme d'accélération et donc la remplacer par l'équation d'équilibre (4.7). En d'autres termes, la sollicitation dépend du temps, mais on résoud à chaque instant un problème statique. Cette hypothèse est tout à fait essentielle en mécanique des solides, car elle permet de ramener à des problèmes statiques les problèmes réels qui, eux, dépendent toujours du temps. L'essentiel de ce cours sera désormais limité au cas où cette hypothèse est valable, l'étude des problèmes réellement dynamiques (chocs, vibrations) étant renvoyée au cours de Mécanique des Vibrations.

4.1.2 Conditions aux limites

Exemple 2. Ecrasement d'un lopin entre les deux plateaux rigides d'une presse :



Un bloc métallique cylindrique est écrasé entre les deux plateaux rigides d'une presse. Le plateau inférieur $x_3 = 0$ est immobile, tandis que le plateau supérieur $x_3 = h$ s'enfonce d'une longueur $U(t)$. À nouveau, on peut s'intéresser aux problèmes dynamique, statique ou quasi-statique, mais nous nous limiterons au dernier cas : la solution dépend du temps puisque la sollicitation en dépend, mais nous écrirons néanmoins les équations d'équilibre de la statique.

Comme dans l'exemple précédent, et comme dans la majorité des cas en Mécanique des Solides, la seule force de volume est la pesanteur, et nous la négligerons, d'où (4.1). La surface latérale S_ℓ est libre de contraintes

$$\text{sur } S_\ell : \quad T_i = \sigma_{ij} n_j = 0 \tag{4.8}$$

Sur les extrémités S_0 ($x_3 = 0$) et S_ℓ ($x_3 = h$), la condition exprimant la rigidité des plateaux porte sur le déplacement vertical

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : &\quad u_3 = 0 \\ x_3 = h : &\quad u_3 = -U(t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

mais les autres conditions aux limites dépendent des conditions de contact entre les plateaux et le lopin.

S'il n'y a pas de frottement, c'est-à-dire si le contact est parfaitement lubrifié, alors la force de contact, qui est donnée par exemple, en $x_3 = h$, par

$$\vec{n} = (0, 0, +1)\,, \quad \vec{T} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \tag{4.10}$$

doit être normale à la surface de contact. Les conditions (4.9) doivent être complétées par les conditions $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

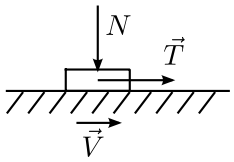
$$\begin{aligned} x_3 = 0 : &\quad u_3 = 0, &\quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ x_3 = h : &\quad u_3 = -U(t), &\quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

S'il n'y a pas de glissement, c'est-à-dire s'il y a adhérence complète entre le lopin et le plateau, alors il faut compléter (4.9) par les conditions cinématiques d'adhérence $u_1 = u_2 = 0$

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : &\quad u_1 = u_2 = u_3 = 0 \\ x_3 = h : &\quad u_1 = u_2 = 0, u_3 = -U(t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dans le cas réel, il y a frottement entre le plateau et le lopin, et il faut compléter (4.9) par la condition exprimant la loi de frottement. Nous adoptons la loi de frottement de Coulomb, avec un coefficient de frottement f,

$$\begin{aligned} \vec{V} = 0 &\quad \text{si} \quad |\vec{T}| < fN \\ \vec{V} = \lambda \vec{T} &\quad \text{si} \quad |\vec{T}| = fN, \lambda \geqslant 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$



que l'on peut encore rééecrire sous la forme

$$\vec{V} = \lambda \vec{T}, \quad \lambda \geqslant 0, \quad fN - |\vec{T}| \geqslant 0, \quad \lambda \left(fN - |\vec{T}| \right) = 0 \tag{4.14}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : &\quad u_3 = 0, \frac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda \sigma_{13}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \lambda \sigma_{23}, \\ &\lambda \geqslant 0, \quad -f\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \geqslant 0, \quad \lambda \left(-f\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right) = 0 \\ x_3 = h : &\quad u_3 = -U(t), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\lambda \sigma_{13}, \ldots \end{aligned} \tag{4.15}$$

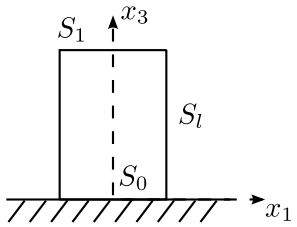
Le problème de l'écrasement d'un lopin consiste donc à trouver $u_i(x,t), \sigma_{ij}(x,t)$, vérifiant à chaque instant les équations d'équilibre (4.7) avec $f_i = 0$, et les conditions aux

limites (4.8) et (4.11), (4.12) ou (4.13), suivant la nature du problème et suivant la précision des résultats cherchés : le problème (4.15) est certainement plus proche de la réalité que les problèmes (4.11) ou (4.12), mais les problèmes (4.11) et (4.12) sont beaucoup plus simples, et peuvent constituer une approximation suffisante pour nos besoins.

De même, si le frottement est important, le problème (4.12) est certainement plus proche de la réalité que le problème (4.11). Néanmoins, le problème (4.11), qui, comme on le verra, se résoud très simplement, peut être un approxmation suffisante, par exemple pour le calcul de la force F à appliquer sur la presse et qui sera donnée par

$$F(t) = -\iint_{S_0} \sigma_{33}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = -\iint_{S_\ell} \sigma_{33}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{4.16}$$

Exemple 3. Bloc pesant posé sur un plan rigide.



Le bloc est soumis à la seule action de la pesanteur. En notant $\rho_0 = \rho$, la masse volumique du solide, et g, l'accélération de la pesanteur, on a donc

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = -\rho g \tag{4.17}$$

La surface latérale S_ℓ et l'extrémité $S_1(x_3 = h)$ sont libres de contraintes

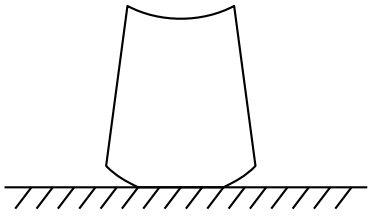
$$\begin{aligned} &\text{sur } S_\ell : && \sigma_{ij} n_j = 0 \\ &x_3 = h : && \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sur l'extrémité S_0 ($x_3 = 0$), les conditions aux limites dépendent, comme dans le cas précédent, des conditions de contact : dans le cas de non frottement on a

$$x_3 = 0 : \quad u_3 = 0 \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{4.19}$$

et dans le cas de non glissement, on a

$$x_3 = 0 : \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0 \tag{4.20}$$



Dans le cas du frottement coulombien, on a une expresslon analogue à (4.15). Toutes ces conditions supposent que le contact entre le bloc et le plan reste maintenu. Il peut arriver – figure ci-contre – qu'une partie du bloc se soulève. Il s'agit alors d'une liaison unilatérale. La surface S_0 se décompose en deux zones (que l'on ne connaît pas, leur détemination fait partie du problème)

— une zone de contact :

$$u_3 = 0 : \quad \sigma_{33} \leqslant 0 \tag{4.21}$$

— une zone de non contact, libre de contraintes :

$$u_3 \geqslant 0 : \quad \sigma_{33} = 0 \tag{4.22}$$

On peut regrouper (4.21), (4.22) en

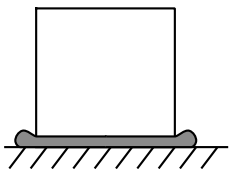
$$u_3 \geqslant 0, \quad \sigma_{33} \leqslant 0, \quad u_3 \sigma_{33} = 0 \tag{4.23}$$

En supposant le contact sans frottement, il faut donc remplacer (4.19) par

$$x_3 = 0 : \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad u_3 \geqslant 0, \quad \sigma_{33} \leqslant 0, \quad u_3 \sigma_{33} = 0 \tag{4.24}$$

En toute rigueur, il aurait aussi fallu envisager cette possibilité dans l'exemple précédent, mais elle était peu plausible physiquement.

On pourrait également envisager d'autres types de conditions aux limites sur S_0.



Par exemple, on peut imaginer de poser le bloc sur le plan par l'intermédiaire d'un ballon de baudruche contenant un gaz à la pression p. Les efforts exercés sur le solide par le ballon se ramènent alors à une pression hydrostatique

$$x_3 = 0 : \quad \sigma_{33} = -p, \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{4.25}$$

On peut déterminer p en remarquant que, d'après les équations d'équilibre, les efforts exercés sur le bloc à travers S_0 doivent équilibrer les autres efforts appliqués, en l'occurence, le poids du bloc. On obtient donc la condition suivante

$$-\iint_{S_0} \sigma_{33} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = \rho g S h \tag{4.26}$$

valable quelles que soient les conditions aux limites sur S_0. Avec les conditions (4.25), on en déduit la valeur de p

$$p = \rho g h \tag{4.27}$$

De manière générale, dans un problème réel, l'écriture des conditions aux limites est une étape tout à fait essentielle, car d'une part ces conditions comprennent l'essentiel de la physique du problème, d'autre part elles conditionnent la facilité —voire la possibilité— de la résolution du problème mathématique obtenu. Il faudra souvent faire un compromis entre la précision de la description physique et la facilité de résolution du problème mathématique.

4.1.3 Lois de comportement

Pour résoudre un problème de mécanique des solides, il faut donc résoudre un système d'équations aux dérivées partielles. Pour l'instant, nous avons trois équations scalaires —les équations du mouvement (4.5) ou les équations d'équilibre (4.7), suivant que l'en considère le problème dynamique ou le problème quasi-statique— pour neuf champs inconnus : trois composantes du déplacement $u_i(x,t)$ et six composantes du tenseur des contraintes $\sigma_{ij}(x,t)$. Il manque donc six équations scalaires. Ces six équations nous seront fournies par la *loi de comportement* du matériau. Toutes les équations écrites jusqu'à présent étaient – dans le cadre d'une schématisation donnée – -universelles, c'est-à-dire indépendantes du matériau considéré. Les équations écrites au paragraphe 4.1.2 restent les mêmes pour un bloc d'acier, d'aluminium, de matière plastique, de caoutchouc, de bois, de béton, d'argile, de pâte à modeler... sous la seule réserve que les hypothèses fondamentales soient vérifiées (théorie du premier gradient, petites déformations).

De manière générale, la loi de comportement se présente comme une *relation* entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Cette relation peut être de nature très diverse —nous en verrons quelques exemples en 4.2— mais elle sera en général de nature *fonctionnelle*. À quelques cas singuliers près, nous pouvons admettre qu'elle donne le tenseur des contraintes à partir de l'histoire du tenseur des déformations —c'est-à-dire de la valeur du tenseur des déforrnations à l'instant considéré et à tous les instants antérieurs— ou bien le tenseur des déformations à partir de l'histoire du tenseur des contraintes.

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \underline{\underline{\sigma}} \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(t-s) \right\}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \underline{\underline{\varepsilon}} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}(t-s) \right\} \tag{4.28}$$

Cette loi de comportement ne peut être déterminée qu'expérimentalement par un certain nombre d'*essais*. Les essais les plus faciles à interpréter sont les *essais homogènes* où l'on

cherche à réaliser dans une éprouvette, un état de contrainte et de déformation homogène. L'exemple le plus simple est l'essai de compression simple, qui correspond à l'exemple 2 du paragraphe 4.1.2. Si l'on cherche un état de contrainte et de déformation homogène

$$\sigma_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}(t), \quad \varepsilon_{ij}(x,t) = \varepsilon_{ij}(t) \tag{4.29}$$

alors la condition aux limites (4.8) sur la surface latérale montre que toutes les composantes de $\sigma_{ij}(t)$ sont nulles, sauf σ_{33} —en effet, sur S_l $n_3 = 0$ tandis que n_1 et n_2 sont quelconques— et (4.16) donne $\sigma_{33}(t) = -F(t)/S$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F(t)/S \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

La loi de conportement (4.28) donne alors $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ en fonction de $F(t)$. On obtient alors la forme générale de déplacement par (3.61)

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 + c_1 \\ u_2 = \varepsilon_{12}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 + \varepsilon_{23}x_3 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 + c_2 \\ u_3 = \varepsilon_{13}x_1 + \varepsilon_{23}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 + c_3 \end{cases} \tag{4.31}$$

La condition aux limites (4.9) en $x_3 = 0$ donne alors

$$c_3 = 0, \quad \omega_1 = -\varepsilon_{23}, \quad \omega_2 = \varepsilon_{13}$$

La condition aux limites (4.9) en $x_3 = h$ est alors vérifiée si

$$U(t) = -h\varepsilon_{33}(t) \tag{4.32}$$

et il vient

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \varepsilon_{11}x_1 + (\varepsilon_{12} - \omega_3)x_2 \quad + 2\varepsilon_{13}x_3 \\ u_2(x,t) &= (\varepsilon_{12} + \omega_3)x_1 + \varepsilon_{22}x_2 \quad + 2\varepsilon_{23}x_3 \\ u_3(x,t) &= -U(t)x_3/h \end{aligned} \tag{4.33}$$

La solution définie par (4.30), à savoir (4.33), est solution du problème associé au cas sans frottement défini par les conditions aux limites (4.11). Ainsi, pour réaliser un essai de compression simple, on écrase un lopin en lubrifiant le contact, pour s'approcher au maximum des conditions de non frottement, et en imposant, par exemple, une force $F(t)$ —essai à force imposée—, la mesure des déplacements donne alors $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ et permet donc de déterminer la loi de comportement pour un tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ de la forme (4.30).

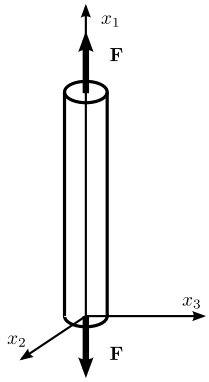
Si le matériau est isotrope —notion que nous préciserons plus tard— alors un tenseur $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ de la forme (4.30) produit une déformation de la forme

$$\underline{\underline{\epsilon}}(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_T(t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T(t) & 0 \\ 0 & 0 & -U(t)/h \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

La déformation se réduit à un écrasement longitudinal, mesuré par $U(t)$ et une dilatation transversale que l'on mesure facilement à l'aide d'une jauge de déformation.

4.1.4 Essais classiques

L'essai de compression simple est le prototype des essais homogènes. L'idée de base est de réaliser un état de contrainte et de déformation homogène qui peut alors être déterminé par des mesures globales d'efforts et de déformation. Pour les métaux et la plupart des solides, l'essai de base est *l'essai de traction* où un barreau cylindrique de longueur ℓ et de section S est soumis à une force longitudinale F. L'état de contrainte et de déformation a la même forme (4.30), (4.34) que pour l'essai de compression.



On mesure

— la force de traction $F(t)$

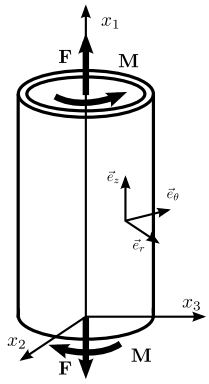
— l'allongement longitudinal $\varepsilon_\ell = \Delta\ell(t)/\ell$

— l'allongement transfersal $\varepsilon_T(t)$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} F(t)/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \Delta l(t)/l & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T(t) \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Les conditions aux limites (4.11) de non frottement sont pratiquement irréalisables, mais on constate expérimentalement que si l'éprouvette est assez longue, alors les résultats de l'essai ne dépendent pratiquement pas de la manière dont est appliquée la force F, c'est-à-dire des conditions aux limites précises sur S_0 et S_ℓ. C'est le principe de Saint-Venant, sur lequel nous reviendrons au chapitre 7.

L'essai de traction est le plus simple à réaliser, mais il ne permet d'obtenir la loi de comportement que pour un tenseur des contraintes de traction ou compression simple. Cela suffit pour déterminer complètement certaines lois de comportement même s'il est souvent nécessaire de réaliser des états de contrainte plus complexes. Le choix est alors guidé par la possibilité technologique de réaliser un état de contrainte et déformation le plus homogène possible. L'essai le plus couramment utilisé pour les métaux est l'essai de *traction-torsion* d'un tube mince. Un tube mince de diamètre D, d'épaisseur e et de longueur ℓ est soumis à une force longitudinale $F(t)\,\vec{e}_3$ et à un couple de torsion $M(t)\,\vec{e}_3$.



On mesure

— l'allongement longitudinal $\Delta\ell(t)/\ell$

— l'allongement transversal $\varepsilon_T(t)$

— la rotation relative $\Delta\theta(t)$ des deux sections extrémités.

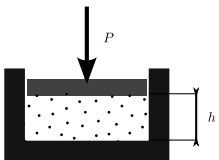
Pourvu que le le tube soit suffisament mince, l'état de contrainte et de déformation est donné dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé aux coordonnées cylindriques par

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2M}{\pi D^2 e} \\ 0 & \frac{2M}{\pi D^2 e} & \frac{F}{\pi D e} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T & D\frac{\Delta\theta}{4\ell} \\ 0 & D\frac{\Delta\theta}{4\ell} & \frac{\Delta\ell}{\ell} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

superposition d'une traction simple et d'un cisaillement simple.

Ce type d'essai convient pour des matériaux suffisamment consistants. En mécanique des sols, où l'on a affaire à des matériaux peu ou pas cohérents, on utilise classiquement deux types d'essais.

Dans l'essai *oedométrique*, on comprime le matériau dans un moule rigide. On réalise ainsi un état de contrainte et de déformation de la

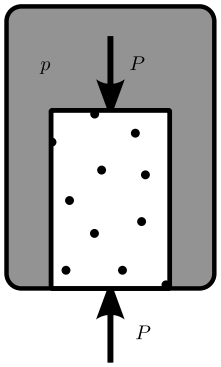


forme

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \Delta h/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} P/S & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_T & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_T \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Dans l'essai *triaxial*, on place une éprouvette dans une cellule triaxiale que l'on soumet à une pression p et on superpose une force longitudinale P. On réalise ainsi un état de contrainte et de déformation de révolution (paragraphe 2.1.3)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_L & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} p + P/S & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \tag{4.38}$$



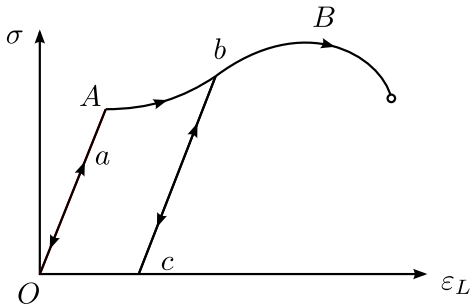
Tous ces essais homogènes présentent l'avantage de pouvoir s'interpréter directement en termes de loi de comportement. Mis à part l'essai de traction, ils présentent cependant l'inconvénient d'être assez fins, nécessitant de grandes précautions pour obtenir des résultats significatifs. Dans la pratique courante, on utilise souvent des essais non homogènes, souvent issus de la tradition (essai pénétrornétrique en Mécanique des Sols, essai de dureté ou de résilience pour les métaux) qui permettent d'obtenir simplement des caractéristiques globales du comportement. Malheureusement, ces essais ne fournissent sur les lois de comportement que des informations qualitatives, que l'on ne peut pas utiliser directement.

4.2 Comportement des solides

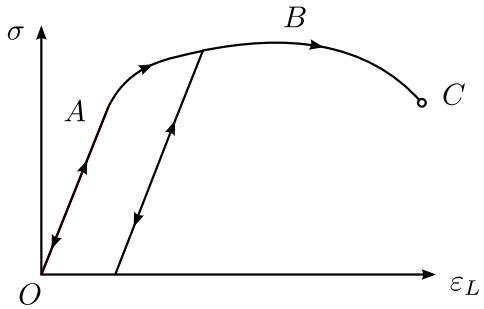
4.2.1 Diversité des comportements

Le but de ce paragraphe est double : d'une part, nous allons décrire quelques-uns des comportements types ; d'autre part, nous allons introduire la terminologie utilisée pour caractériser ces comportements.

Pour les métaux à température ambiante, le comportement est convenablement décrit par la courbe de traction, résultat de l'essai de traction. On fait croître la force F et on mesure l'allongement longitudinal ε_L.



Acier doux



Acier durs, métaux non ferreux

La courbe se divise en trois régions. La région OA correspond à un comportement élastique linéaire, dont les deux caractéristiques essentielles sont :

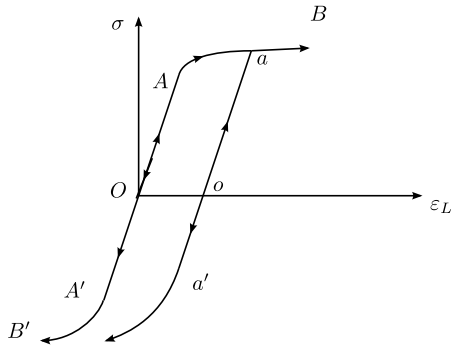
— réversibilité : si, arrivé au point a on diminue la contrainte, on redescend suivant la même courbe ;

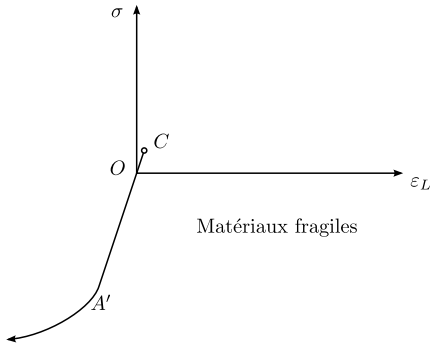
— linéarité : la contrainte est proportionnelle à la déformation.

Cette région correspond à la déformation réversible du réseau cristallin.

À partir du seuil A, on entre dans la zone AB de comportement plastique, essentiellement caractérisé par son irréversibilité : si, arrivé en b on décharge, alors on redescend, non pas le long de la courbe de charge bA, mais sur une droite bc parallèle à OA. En fait le comportement est alors à nouveau élastique tant que l'on ne redépasse pas le nouveau seuil b. En particulier, on constate que la déformation plastique entre A et b a eu comme effet d'élargir la région élastique. C'est le phénomène d'écrouïssage.

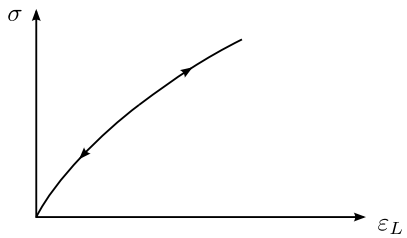
Le point B correspond à l'apparition de la striction —instabilité géométrique qui conduit à la localisation de la déformation. La contrainte σ diminue alors jusqu'à rupture. En fait, il s'agit de la contrainte apparente, c'est-à-dire ramenée à la surface initiale et la contrainte vraie ramenée à la surface réelle de la striction, elle, continue à augmenter. De toute façon, la déformation n'est plus homogène, et cette portion de courbe ne décrit pas directement le comportement. Qui plus est, l'hypothèse des petites déformations n'est plus vérifiée.



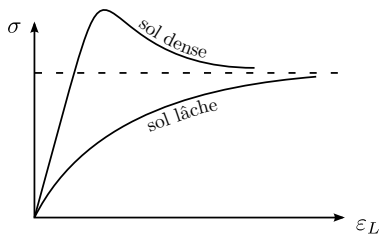


En compression simple, on obtient en général un comportement symétrique $OA'B'$ (mais sans striction). Pour certains matériaux fragiles (béton, fonte, roches, etc.), cependant, on obtient en compression simple un comportement ductile, comme celui que nous avons décrit, et en traction simple, un comportement fragile conduisant à rupture très rapide. Pour les métaux, on observe souvent l'effet Bauschinger : après une précharge OAa en traction, l'écrouissage qui se traduit par une augmentation du seuil en traction, entraîne également une diminution du seuil en compression, alors qu'au départ les deux étaient approximativement égaux.

La courbe de traction permet également de décrire le comportement d'autres matériaux, comme le caoutchouc, (comportement élastique non linéaire en première approximation) ou les sols —on représente alors le résultat d'un essai triaxial à p fixé— qui présentent un comportement de type élasta-plastique avec une région élastique très réduite et avec ou sans pic suivant que le matériau est initialement plus ou moins tassé.



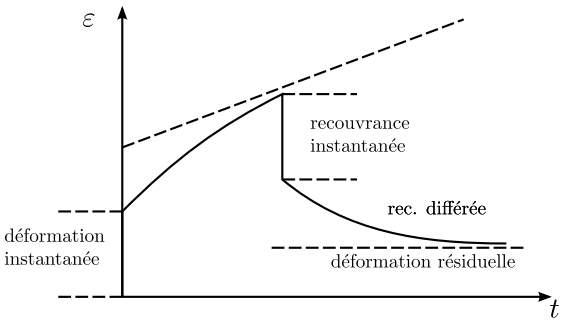
caoutchouc



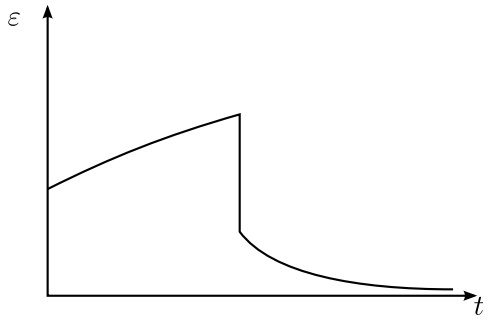
sols

Pour des matériaux comme les matières plastiques ou les métaux à haute température, la courbe de traction perd toute signification car elle dépend de manière cruciale de la

vitesse de déformation. On caractérise alors le comportement par des essais de fluage et de relaxation.



matériau de type fluide



solide

Pour l'essai de fluage, toujours en traction ou compression simple, on impose une contrainte constante et on observe la déformation en fonction du temps : l'application de la contrainte s'accompagne d'une déformation instantanée, puis la déformation se poursuit, puis se stabilise, soit vers une constante, soit vers un état de fluage stationnaire à vitesse de déformation constante.

Si à un l'instant t_0 on relache la contrainte, alors la déformation de décompose en trois port parties :

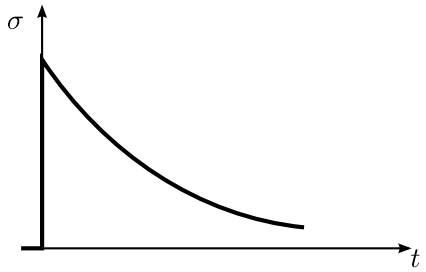
— une déformation instantanée (recouvrance instantanée),

— une déformation obtenue progressivement (recouvrance différée),

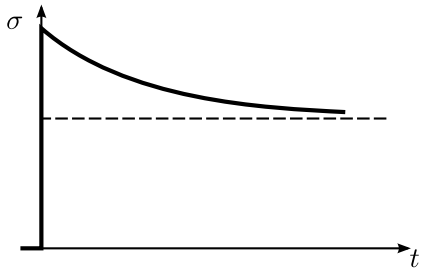
— une déformation résiduelle qui subsiste,

cette dernière pouvant disparaître pour un matériau de type solide.

L'essai de relaxation consiste à appliquer une déformation constante, et à observer la contrainte nécessaire

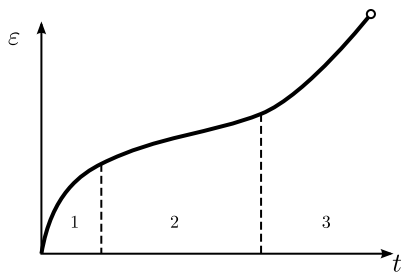


Fluide



Solide

Si l'on pousse plus loin l'essai de fluage, on voit apparaître après le fluage primaire (régime transitoire) et le fluage secondaire (régime stabilisé) une zone de fluage tertiaire qui correspond au phénomène *d'endommagement* (détérioration du matériau qui conduit à la rupture).



1. fluage primaire
2. fluage secondaire
3. fluage tertiaire

Ce type de comportement dépendant du temps est appelé *viscoplastique* ou *viscoélastique*, selon qu'il existe ou non un seuil en dessous duquel le comportement peut être considéré comme élastique. En première approximation, les matières plastiques ont un comportement viscoélastique et les métaux à haute température, un comportement viscoplastique.

4.2.2 Modèles rhéologiques

Il est important de savoir construire des modèles mathématiques de comportement décrivant, au moins qualitativement, les différents types de comportement que nous venons de présenter. Les modèles rhéologiques forment une classe déjà très vaste de tels modèles. Ils s'obtiennent par combinaison de trois modèles élémentaires

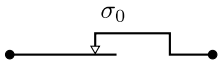
— le ressort, modèle de comportement élastique

$$\sigma = E\varepsilon \tag{4.39}$$



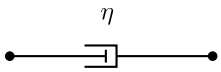
— le patin, modèle de comportement plastique

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon} > 0 & \text{si } |\sigma| = \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon} < 0 & \text{si } |\sigma| = -\sigma_0 \end{cases} \tag{4.40}$$



— l'amortisseur, modèle de comportement visqueux

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \tag{4.41}$$

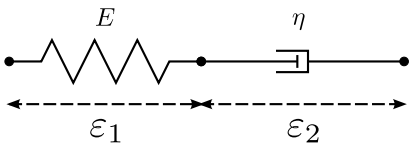


Les modèles rhéologiques s'obtiennent par montage en parallèle (les contraintes s'additionnent, les deformations sont les mêmes) ou en série (les déformations s'additionnent, les contraintes sont les mêmes).

Le comportement viscoélastique peut être représenté par une combinaison de ressorts et d'amortisseurs.

— par montage en série d'un ressort et d'un amortisseur, on obtient le modèle de Maxwell :

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon_1 = \eta\dot{\varepsilon}_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases} \tag{4.42}$$



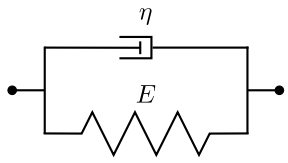
ou en éliminant ε_1 et ε_2

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{4.43}$$

qui est la loi de comportement sous forme différentielle. Conformément à (4.28), on voit que, connaissant l'histoire de σ (ou de ε), on peut en déduire la valeur à l'instant t de ε (ou de σ par intégration de l'équation différentielle (4.43) ;

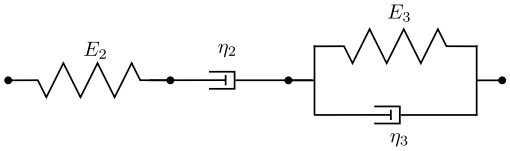
— par montage en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur, on obtient le modèle de Kelvin-Voigt

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon_1 = \eta_2\dot{\varepsilon}_2 = E_3\varepsilon_3 + \eta_3\dot{\varepsilon}_3 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases} \tag{4.44}$$



— par montage en série d'un modèle de Maxwell et d'un modèle de Kelvin-Voigt, on obtient le modèle de Burgers

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \tag{4.45}$$



En éliminant ε_1, ε_2 et ε_3, il vient

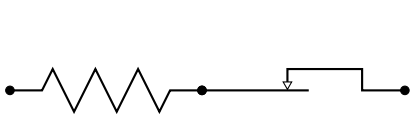
$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_3}{\eta_3}\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_1}\ddot{\sigma} + \left(\frac{E_3}{\eta_3 E_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3}\right)\dot{\sigma} + \frac{E_3}{\eta_2\eta_3}\sigma \tag{4.46}$$

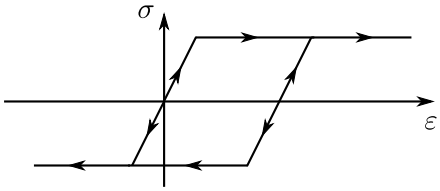
forme différentielle de la loi de comportement. En particulier, on obtient en fluage une courbe qui représente qualitativement le comportement de certaines matières plastiques.

Et ainsi de suite.

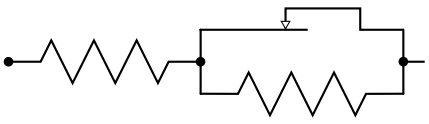
Les comportements élasto-plastiques s'obtiennent par combinaison de ressorts et de patins.

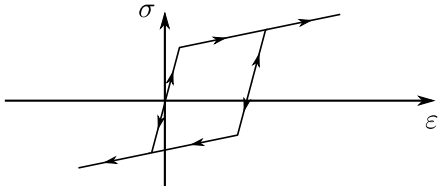
— par montage en série d'un ressort et d'un patin, on obtient un modèle élasto-plastique sans écrouissage



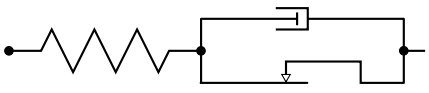


— on obtient un modèle avec écrouissage linéaire par le montage suivant





Enfin, on peut obtenir des comportements viscoplastiques par des combinaisons des trois éléments de base. Par exemple, le modèle de Bingham permet de décrire le comportement du goudron et de certaines pâtes.



De manière générale, le choix d'un modèle représentant le comportement d'un matériau réel est un problème difficile. Le comportement des matériaux réels est complexe et nous n'en avons présenté qu'une esquisse très incomplète. Même pour des matériaux aussi courants que l'acier, de nombreux aspects du comportement restent mal connus et il est impossible de construire un modèle représentant le comportement d'un matérjau donné en toutes circonstances. Dans chaque problème, il convient de choisir le modèle le plus simple conduisant à des résultats satisfaisants pour l'utilisation qu'on veut en faire. Dans certains cas, en particulier si l'on recherche une grande fiabilité, il conviendra de faire le calcul avec une loi de comportement très sophistiquée, prenant en compte tous les risques de ruine possibles, ces calculs étant rendus possibles par les développements de l'informatique. Dans d'autres cas, par contre, on pourra se satisfaire d'approximations plus grossières et c'est la raison d'être des modèles élémentaires qui feront l'objet de la suite de ce cours.

Chapitre 5

Élasticité linéaire

5.1 Description du comportement élastique

Le modèle de comportement le plus simple est le modèle élastique. Pour des matériaux ayant un comportement élastoplastique ou viscoplastique, ce modèle convient parfaitement, pourvu que l'on ne dépasse pas le seuil de plasticité. Pour des matériaux ayant un comportement de type viscoélastique, la transformation de Laplace permet de se ramener à un comportement élastique. Même pour des matériaux ayant un comportement plus complexe, un calcul élastique peut fournir des résultats intéressants, par exemple pour le calcul des fondations en Mécanique des Sols. Enfin, la résolution numérique d'un problème de Mécanique des Solides, avec une loi de comportement quelconque, s'effectue presque toujours par résolution d'une suite de problèmes élastiques. Il est donc naturel, dans un cours de Mécanique des Solides, de réserver une place importante à ce modèle de comportement.

5.1.1 Tenseur d'élasticité

Le comportement élastique est caractérisé par une relation linéaire entre contraintes et déformations. Dans le cadre de l'élasticité tridimensionelle, cette relation s'écrit

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = A_{ijkh}\varepsilon_{kh} \\ \underline{\underline{\sigma}} = A\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right] \end{cases} \quad \text{ou inversement} \quad \begin{cases} \varepsilon_{ij} = \Lambda_{ijkh}\sigma_{kh} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \Lambda\left[\underline{\underline{\sigma}}\right] \end{cases} \tag{5.1}$$

où A_{ijkh} et Λ_{ijkh} sont les composantes de deux applications A et Λ, inverses l'une de l'autre, de l'espace des tenseurs symétriques dans lui-même. Ce sont les tenseurs d'élasticité. Souvent A est appelé tenseur de rigidité et Λ tenseur de complaisance. Compte-tenu de la symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, on doit avoir, par exemple pour A,

$$A_{ijkh} = A_{jikh} \quad A_{ijkh} = A_{ijhk} \tag{5.2}$$

Nous ferons de plus sur ces applications les deux hypothèses suivantes

Hypothèse thermodynamique — le tenseur d'élasticité est symétrique

$$A_{ijkh} = A_{khij} \tag{5.3}$$

Hypothèse de stabilité — le tenseur d'élasticité est défini positif

$$A_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} \geqslant \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \alpha > 0 \tag{5.4}$$

La première hypothèse est à peu près invérifiable, mais elle conduit à une théorie bien plus agréable et satisfaisante. La seconde a une signification tout à fait claire, que nous verrons plus loin. Compte-tenu des relations de symétrie (5.2) et (5.3), on constate que le tenseur d'élasticité fait apparaître 21 coefficients. On peut le représenter par une matrice 6×6 symétrique

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

On peut aussi obtenir le comportement élastique par une approche thermodynamique : un matériau élastique est un matériau sans dissipation, c'est-à-dire un matériau dans lequel toutes les évolutions sont réversibles. En se plaçant d'un point de vue purement mécanique [1], l'équation (1.59) donne, puisque la dissipation φ est nulle, la relation

$$\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ij} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(en petites déformations, } D_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}/\,\mathrm{d}t) \tag{5.6}$$

Ceci incite à prendre l'énergie interne u fonction des déformations

$$\rho u = w\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) \tag{5.7}$$

où w est le *potentiel élastique*. En dérivant (5.7) et en identifiant avec (5.6), on obtient

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{5.8}$$

Les déformations étant petites, on peut développer w en série de Taylor

$$w\left(\varepsilon_{ij}\right) = w_0 + \cancel{a_{ij}\varepsilon_{ij}} + \frac{1}{2} A_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \tag{5.9}$$

où a_{ij} est symétrique et où A_{ijkh} vérifie les conditions de symétrie (5.2) et (5.3) qui, dans cette approche, sont automatiquement vérifiées. En reportant dans (5.8) il vient

$$\sigma_{ij} = \cancel{a_{ij}} + A_{ijkh}\varepsilon_{kh}$$

qui montre que a_{ij} est nul puisque la configuration de référence est supposée libre de contrainte. On obtient donc (5.1), mais avec cette approche l'hypothèse thermodynamique (5.3) est automatiquement vérifiée, alors que l'hypothèse de stabilité (5.4) exprime le fait que l'énergie interne du matériau atteint son minimum dans l'état de référence : c'est donc bien une hypothèse de stabilité. Autrement dit, il faut fournir un travail positif pour déformer le matériau à partir de son état naturel.

Nous introduisons également $w^*\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$, transformée de Legendre de w

$$\overset{*}{w}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - w\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) \tag{5.10}$$

qui permet d'écrire

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial\, w^*}{\partial \sigma_{ij}} \tag{5.11}$$

1. Le chapitre 11 tiendra compte des variables thermiques.

Finalement, en prenant $w_0 = 0$, on peut réécrire la loi de comportement élastique (5.1) sous la forme

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} A_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} = \overset{*}{w} = \frac{1}{2}\Lambda_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh} \\ \sigma_{ij} &\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = A_{ijkh}\varepsilon_{kh} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial\, w^*}{\partial \sigma_{ij}} = \Lambda_{ijkh}\sigma_{kh} \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.1.2 Isotropie et anisotropie

Le tenseur d'élasticité, qui caractérise complètement les propriétés élastiques du matériau, dépend, dans le cas le plus général, de 21 coefficients. Fort heureusernent, on peut restreindre ce nombre en utilisant les symétries du matériau, c'est-à-dire les propriétés d'isotropie ou d'anisotropie. Lors d'un changement de repère, les matrices σ_{ij} et ε_{ij} représentatives des tenseurs des contraintes et de déformations se transforment par (2.7) et (3.12). Les tenseurs d'élasticité A et Λ se transforment donc par

$$A'_{ijkh} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{hq}A_{mnpq} \tag{5.13}$$

Les composantes A_{ijkh} du tenseur d'élasticité, ou la matrice d'élasticité (5.5), dépendent donc du repère choisi. Les propriétés de symétrie matérielle caractérisent les transformations qui laissent invariantes ces composantes.

On dira qu'un matériau est *isotrope* si toutes ses directions sont équivalentes, c'est-à-dire si la matrice d'élasticité (5.5) est indépendante du repère choisi. On doit donc avoir, pour tout A_{ij} orthogonal :

$$A_{ijkh} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{kq}A_{mnpq} \tag{5.14}$$

Si, au contraire, il existe des directions privilégiées, le matériau sera dit *anisotrope* et la matrice d'élasticité dépendra du repère choisi. Il conviendra de choisir au mieux ce repère.

Pour caractériser plus précisément l'anisotropie, nous introduisons le groupe d'isotropie $\mathcal{G}$: groupe des transformations orthogonales laissant invariantes les composantes du tenseur d'élasticité. Si l'on a choisi un repère, $\mathcal{G}$ est le groupe des matrices orthogonales vérifiant (5.14). Il est clair que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe du groupe orthogonal. Si $\mathcal{G}$ est le groupe orthogonal tout entier, alors le matériau est isotrope, sinon le matériau est anisotrope, et l'anisotropie est caractérisée par $\mathcal{G}$.

L'origine physique de l'anisotropie peut être liée à la structure du matériau ou à son mode de formation :

anisotropie de structure :

- monicristaux métalliques pour lesquels le groupe d'isotropie est alors le groupe cristallographique. Pour les matériaux métalliques polycristallins, habituellement considérés comme isotropes, cette isotropie est de nature statistique ; le polycristal est en effet formé de la juxtaposition d'un grand nombre de grains monocristallins, donc anisotropes. L'isotropie globale du polycristal résulte donc du caractère aléatoire de la répartition des orientations cristallographiques de chacun des grains.
- matériaux composites renforcés par fibres unidirectionnelles ou multi directionnelles —matériaux composites stratifiés. Ces matériaux, de développement relativement récent, permettt d'obtenir des performances très élevées.

— matériaux fibreux naturels comme le bois.

anisotropie de formation pour des matériaux initialement isotropes mais qui ont été rendus anisotropes par les traitements subis :

— produits métalliques semi-finis obtenus par forgeage : tôles minces obtenues par laminage et qui présentent trois directions privilégiées (direction de laminage, direction transversale et épaisseur), barres obtenues par filage et qui ont une direction privilégiée.

— roches ou sols de nature sédimentaire ou qu'ils ont subi d'importants tassements géologiques.

On voit donc que les manifestations de l'anisotropie sont variées. Nous avons présenté le concept dans le cadre de l'élasticité linéaire mais le problème se pose pour tout comportement. Il s'agit néanmoins d'une question difficile et encore imparfaitement comprise.

5.1.3 Élasticité anisotrope

Les propriétés de symétrie, décrites par le groupe d'isotropie $\mathcal{G}$, permettent de réduire le nombre des coefficients d'élasticité. Nous allons envisager quelques cas particuliers correspondant aux types d'anisotropie que l'on rencontre le plus fréquemment en mécanique.

Orthotropie

Il existe trois directions privilégiées mutuellement orthogona1es et le groupe d'isotropie est formé des symétries laissant invariantes chacune de ces trois directions (non orientées), c'est-à-dire des symétries par rapport aux axes correspondants. Si nous choisissons le repère formé par ces trois directions, alors le groupe d'isotropie $\mathcal{G}$ est formé des quatre matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

En écrivant (5.14) pour ces matrices, on obtient directement la nullité des coefficients A_{1112}, A_{1113}, A_{1123}, A_{1213}, etc., et la matrice d'élasticité a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & A_1 & B_{23} & 0 & 0 & 0 \\ B_{13} & B_{23} & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Pour un matériau orthotrope, la matrice élastique ne fait plus intervenir que neuf coefficients. La matrice d'élasticité associée à Λ, inverse de (5.16), a évidemment la même structure. Cette forme simple est liée au choix du repère associé aux directions d'orthotropie. Dans un autre repère, cette matrice aurait une forme plus compliquée, déduite de (5.16) par (5.13). Des essais de traction sur des éprouvettes découpées dans les directions d'orthotropie permettent de déterminer assez facilement les coefficients A_1, A_2, A_3, beaucoup plus difficilement les coefficients B_{12}, B_{13}, B_{23}. Quant aux coefficients C_4, C_5 et C_6, ils sont très difficiles à obtenir expérimentalement.

Physiquement, cette anisotropie s'applique par exemple aux tôles laminées ou aux matériaux composites renforcés par deux ou trois systèmes de fibres dans des directions perpendiculaires.

Symétrie cubique

C'est un cas particulier de la précédente ; il existe toujours trois directions privilégiées mutuellement orthogonales, mais en plus, ces trois directions sont équivalentes. Physiquement, cette anisotropie est celle d'un monocristal d'un matériau cubique ou cubique à face centrée. Aux matrices (5.15), il faut rajouter les quatre matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

ainsi que celles qu'elles engendrent par produit entre elles et avec celles de (5.15). On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

forme qui ne fait intervenir que trois coefficients A, B et C.

Physiquement, cette anisotropie correspond, par exemple, à un matériau composite renforcé par trois systèmes de fibres identiques et dans des directions perpendiculaires. Elle correspond aussi à un monocristal en système cubique ou cubique à face centrée. Plus généralement, on sait construire les matrices d'élasticité associées aux divers systèmes cristallographiques, mais ce type d'anisotropie intervient rarement en mécanique.

Isotropie transverse

Le matériau a une direction privilégiée, et le groupe d'isotropie $\mathcal{G}$ est le groupe des transformations laissant invariante cette direction non orientée. Nous choisissons un repère ayant l'axe x_3 comme direction privilégiée. Le groupe $\mathcal{G}$ est alors formé :

— des rotations autour de x_3 (d'angle quelconque) ;

— des symétries par rapport aux droites du plan $x_1,\ x_2$.

C'est donc le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Par conséquent, on peut obtenir la forme suivante pour la matrice d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E & 0 & 0 & 0 \\ B & A & E & 0 & 0 & 0 \\ E & E & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A-B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Il reste cinq coefficients d'élasticité. Les coefficients D et E s'obtiennent par un essai de traction sur une éprouvette parallèle à la direction privilégiée, les coefficients A et B, par un essai de traction sur une éprouvette perpendiculaire à la direction privilégiée, enfin le

coefficient C peut s'obtenir par une expérience de torsion sur un tube minee parallèle à l'axe privilégié (paragraphe 4.1.4). C'est le type d'anisotropie que l'on rencontre le plus fréquemment : composites renforcés par fibres unidirectionnelles, composites stratifiés, bois, barres obtenues par filage, roches et sols sédimentaires, etc.

5.2 Élasticité linéaire isotrope

5.2.1 Coéfficients d'élasticité

Pour un matériau isotrope, sans direction privilégiée, les composantes, du tenseur d'élasticité doivent vérifier la relation (5.14) pour toute matrice orthogonale Q_{ij}. On vérifie facilement que le tenseur :

$$A_{ijkh} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}\right) \tag{5.21}$$

satisfait à cette condition. Réciproquement, on peut montrer que cette condition ne peut être vérifiée que si le tenseur d'élasticité a la forme (5.21). En écrivant (5.1), on obtient la loi de comportement :

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kh} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{5.22}$$

ou en composantes

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}\\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}\end{aligned} \tag{5.23}$$

ce qui donne pour la matrice d'élasticité :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix} \tag{5.24}$$

La matrice d'élasticité a la même forme que pour un matériau à symétrie cubique, avec en plus la relation :

$$C = A - B \tag{5.25}$$

C'est normal puisque l'isotropie est une restriction plus forte que la symétrie cubique. En fait, on peut construire (5.21) ou (5.24) en remarquant que la relation (5.14), vraie pour tout Q_{ij} orthogonal, doit l'être en particulier pour les Q_{ij} (5.15) et (5.17), ce qui donne (5.18). La relation (5.25) se démontre alors en prenant pour Q_{ij} une rotation quelconque, par exemple une rotation infinitésimale d'angle $\mathrm{d}\theta$ autour de x_1.

Pour calculer les coefficients A_{ijkl} de la loi de comportement inverse, nous prenons la trace de (5.22) :

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{kk} \tag{5.26}$$

qui donne les déformations en fonction des contraintes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda+2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{5.27}$$

Ainsi, la loi élastique linéaire isotrope générale dépend de deux coefficients, les coefficients de Lamé λ et μ. Pour dégager leur signification physique, et en particutier pour les mesurer, envisageons quelques états de contraintes et de déformations particuliers.

1. tension ou compression hydrostatique (2.17). La relation (5.27) donne alors :

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = (3\lambda + 2\mu)\,\varepsilon \tag{5.28}$$

   $3K = 3\lambda + 2\mu$ est le module de rigidité à la compression.

2. glissement simple (3.43). La loi de comportement (5.21) entraîne :

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \mu\gamma & 0 \\ \mu\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

   L'état de contrainte est un cisaillement simple (2.21), $G = \mu$ est le module de rigidité au cisaillement ou module de Coulomb.

3. traction simple (2.20) ou (4.35). D'après la loi de comportement (5.27), on a :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_L & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

   avec :

$$\varepsilon_L = \frac{\lambda + \mu}{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\sigma = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \varepsilon_T = -\frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\sigma = -\nu\varepsilon_L \tag{5.31}$$

   où E, module d'Young, et ν, coefficient de Poisson, sont donnés par :

$$E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)} \tag{5.32}$$

Ainsi, on peut obtenir par un essai de traction le module d'Young et le coefficient de Poisson : le module d'Young est la pente de la courbe de traction (qui est rectiligne dans le domaine élastique), et la mesure de la contraction transversale donne le coefficient de Poisson. On peut ensuite à partir de E et ν calculer λ, μ et K par :

$$\mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)\,(1+\nu)}; \quad 3K = \frac{E}{1-2\nu} \tag{5.33}$$

On peut également réécrire (5.27) avec E et ν, et il vient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{5.34}$$

ou en composantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\,(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{12} \end{cases} \tag{5.35}$$

La matrice d'élasticité inverse de (5.24) peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

Les coefficients d'élasticité E, λ, μ et K sont homogènes à des contraintes, tandis que le coefficient de Poisson ν est sans dimension. Quelques valeurs typiques de E et ν sont données dans le tableau suivant

	E (hbar)	ν
Acier	22 000	0,26 – 0,29
Aluminium	7 000	0,32 – 0,34
Cuivre	12 000	0,33 – 0,36
Titane	11 000	0,34
Verre	6 000	0,21 – 0,27
Caoutchouc	0,2	0,4999

5.2.2 Découplage déviateur et partie sphérique

La forme générale (5.21) du tenseur d'élasticité dans le cas isotrope présente quelques propriétés remarquables.

Tout d'abord, elle vérifie automatiquement l'hypothèse thermodynamique (5.3). C'est une des raisons pour laquelle cette hypothèse n'a pas de support expérimental, car le cas isotrope, le plus simple et le mieux connu, ne prouve rien.

Ensuite, on remarque, par exemple sur (5.22) ou (5.34), que les directions principales des contraintes et des déformations coincident. C'est une propriété générale du comportement élastique isotrope. La relation entre contraintes et déformations principales est s'écrit d'après (5.23) et (5.35) :

$$\sigma_1 = (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_1 + \lambda\,(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \tag{5.37}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\,(\sigma_2 + \sigma_3) \tag{5.38}$$

Enfin, on remarque que la loi de comportement (5.22) ou (5.34) se découple en deux lois de comportement, portant la première sur les parties sphériques, la seconde sur les déviateurs d'après (2.12) et (3.36) :

$$\sigma = 3K\varepsilon; \quad s_{ij} = 2\mu e_{ij} \tag{5.39}$$

Ce découplage entre partie sphérique et déviateur est spécifique du cas isotrope. En utilisant ce découplage, l'énergie de déformation w peut, d'après (5.12), s'écrire :

$$w = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[3\sigma\varepsilon + s_{ij}e_{ij}\right]$$
$$\frac{1}{2}\left[9K\varepsilon^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij}\right] = \frac{K}{2}\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll} + \mu e_{ij}e_{ij}$$

et de même pour w^* :

$$w = \overset{*}{w} = \frac{K}{2}\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll} + \mu e_{ij}e_{ij} = \frac{1}{18K}\sigma_{kk}\sigma_{ll} + \frac{1}{4\mu}s_{ij}s_{ij} \tag{5.40}$$

Puisque déviateurs et parties sphériques sont indépendants, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'hypothèse de stabilité (5.4) soit vérifiée est :

$$K > 0; \quad \mu > 0 \tag{5.41}$$

c'est-à-dire, en utilisant (5.33) :

$$E > 0; \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \tag{5.42}$$

La première condition est évidente, le tableau du paragraphe 5.2.1 montre que pratiquement :

$$0 < \nu \leqslant \frac{1}{2} \tag{5.43}$$

Le cas $\nu = 1/2$ est un cas limite, qui correspond aux matériaux incompressibles. Supposons en effet que K soit très grand (par rapport à μ et aux contraintes appliquées). La relation (5.39) montre alors que ε_{kk}, c'est-à-dire la variation de volume, est très petite, le matériau est donc très peu compressible et il est raisonnahle de l'approcher par un matériau incompréssible soumis à la liaison :

$$\varepsilon_{ii} = 0; \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} \tag{5.44}$$

Mais, par cette approximation, on perd toute information sur la partie sphérique du tenseur des contraintes, la loi de comportement devient donc :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{5.45}$$

où p est une pression hydrostatique arbitraite, nouvelle fonction inconnue dans la résolution d'un problème, et qui vient compenser l'équation de liaison supplémentaire (5.44). Une autre manière de voir les choses est d'adopter l'approche thermodynamique du paragraphe 5.1.1 et d'écrire à partir de (5.6) et (5.7) :

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5.46}$$

qui doit être vérifié pour tout $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}/\,\mathrm{d}t$ compatible avec la liaison (5.44). Il est nécessaire d'introduire un multiplicateur de Lagrange $4p$ et il vient au lieu de (5.8) :

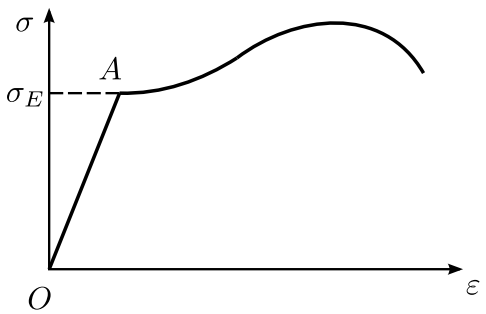
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} - p\delta_{ij} \tag{5.47}$$

qui redonne (5.45) après développement de w. L'apparition de cette pression hydrostatique arbitraire est propre aux milieux incompressibles et on la retrouve en Mécanique des Fluides.

5.3 Critère de limite d'élasticité

5.3.1 Forme générale du critère

On a vu à la sous-section 4.2.1 que le modèle élastique représentait le comportement des matériaux métalliques dans la région élastique, c'est-à-dire tant que l'on ne dépassait pas le seuil de limite élastique. Pour justifier les calculs issus de ce modèle, il faut donc vérifier, après avoir résolu le problème, que ce seuil n'est pas dépassé. C'est le principe du calcul élastique des structures ou des éléments de construction.



Dans le cas unidimensionnel, cette vérification se réduit à s'assurer que :

$$|\sigma| < \sigma_e \tag{5.48}$$

en appelant σ_e, la limite élastique en traction simple, dont la valeur est également tirée de l'essai de traction.

Dans le cas tridimensionnel, il faut vérifier un critère de limite d'élasticité qui, de manière générale, peut s'écrire :

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) < 0 \tag{5.49}$$

où f est une fonction réelle, la fonction seuil élastique, qui limite, dans l'espace des contraintes, la région élastique dans laquelle doit rester le point représentatif des contraintes.

Cette fonction doit vérifier les symétries du matériau, et doit donc être telle que :

$$f\left(Q_{ik}Q_{il}\sigma_{kl}\right) = f\left(\sigma_{ij}\right) \tag{5.50}$$

pour toute matrice Q_{ij} orthogonale. En particulier, pour un milieu isotrope, la fonction f doit vérifier l'identité (5.50) pour toute matrice Q_{ij} orthogonale. On dit alors que la fonction f est isotrope, et on montre que f est uniquement fonction des invariants principaux de $\underline{\underline{\sigma}}$, ou ce qui revient au même, fonction symétrique des contraintes principales :

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = f\left(I_1, J_2, J_3\right) = f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) \tag{5.51}$$

Plutôt que les invariants I_1, I_2 et I_3 de $\underline{\underline{\sigma}}$ définis par 2.2, on préfère introduire I_1 lié à la partie sphérique de $\underline{\underline{\sigma}}$ et les invariants J_2 du déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$ (2.16). En effet, ces variables permettent d'obtenir directement la surface seuil dans l'espace des contraintes principales (voir 2.2.2). En particulier, si J_3 n'intervient pas dans f alors cette surface seuil est de révolution autour de l'axe hydrostatique.

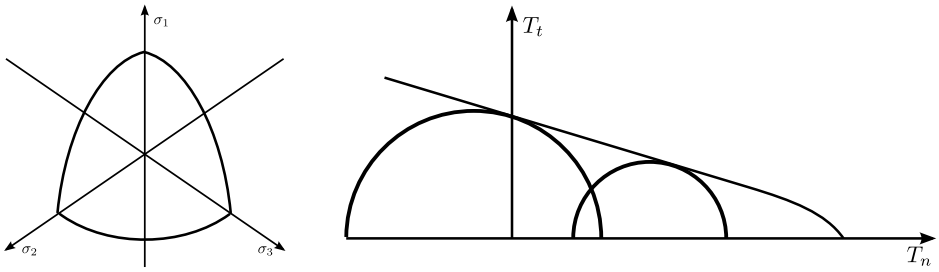
Pour les métaux, on a montré expérimentalement qu'une pression hydrostatique, aussi élevée soit-elle, ne produisait aucune déformation plastique. Nous pouvons donc supposer que la partie sphérique du tenseur des contraintes n'intervient pas dans f :

$$f\left(J_2, J_3\right) < 0 \tag{5.52}$$

Dans l'espace des contraintes principales, la surface seuil est un cylindre de génératrice parallèle à l'axe hydrostatique.

Le seuil sera donc complètement défini par l'intersection de la surface seuil avec le plan déviatoire (voir 2.2.2) ou plutôt, compte tenu des symétries, par cette intersection limitée à un secteur de 60 degrés, le reste étant complété par symétrie.

Il va de soi que la détermination expérimentale de cette courbe est très difficile.



Pour d'autres matériaux, en particulier pour les sols, la *pression moyenne* $-\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$ intervient crutialement dans f. On suppose alors souvent que la *contrainte principale intermédiaire* n'intervient pas dans f, c'est-à-dire que $f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)$ dépend uniquement de la plus grande et de lit plus petite des contraintes principales :

$$f = f\left(\sigma_1, \sigma_3\right) \leqslant 0 \quad \text{si} \quad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \tag{5.53}$$

Il ressort alors du paragraphce 2.3.1 que dans la représentation de Mohr, seul intervient le plus grand des trois demi-cerles.

Le critère est alors complètement défini par la *courbe intrinsèque* $\mathcal{C}$, enveloppe des demi-cercles limites, c'est-à-dire correspondant à $f = 0$. C'est le critère de la courbe intrinsèque.

5.3.2 Critères de Von Mises et Tresca

Pour les métaux, ou plus généralement pour les matériaux dont le critère peut s'écrire sous la forme (5.52), on utilise habituellement les critères de limite d'élasticité de von Mises ou de Tresca. Le critère (5.52) peut s'écrire sous la forme :

$$-J_2 < \kappa\,(J_3) \tag{5.54}$$

qui, d'après (2.29,2.30), définit l'équation polaire de la courbe seuil dans le plan déviatoire Π. Le critère le plus simple s'obtient en écrivant que κ ne dépend pas de J_3, autrement dit que le cylindre seuil est de révolution.

Critère de von Mises

Ce critère s'écrit :

$$-J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} < \kappa \tag{5.55}$$

où κ est une constante, caractéristique du matériau, que l'on peut relier à la limite élastique en traction σ_e. En traction simple en effet, le critère (5.55) donne :

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{\sigma^2}{3} < \kappa \tag{5.56}$$

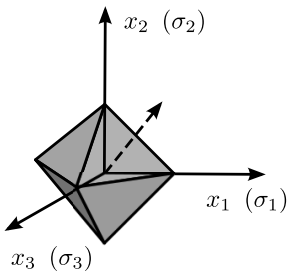
soit, par comparaison avec (5.48), $\kappa = \sigma_e^2/3$. Le critère de von Mises s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} < \frac{\sigma_e^2}{3} \tag{5.57}$$

On peut en donner diverses interprétations physiques. Par exemple, la condition (5.40) montre que l'énergie de déformation w se décompose en deux parties, une partie due à la dilatation, et une partie due à la distorsion, ou déformation sans changement de volume. D'après (5.40), le critère de von Mises exprime que *l'énergie de distorsion* ne doit pas dépasser un certain seuil :

$$w_{\text{dist}} = \frac{1}{4\mu}s_{ij}s_{ij} < w_{\text{lim}} \tag{5.58}$$

On peut également introduire les *facettes octaédriques* normales aux quatre trissectrices des directions principales (ainsi nommées car elles forment un octaèdre). Les contraintes normale et tangentielle associées à ces facettes sont appelées contraintes normale et tangentielle octaédriques.



En repère principal, un calcul direct montre :

$$\begin{aligned} T_n^{oct} &= \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \\ T_t^{oct} &= \frac{1}{9}\left\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right\} = -\frac{2}{3}J_2 \end{aligned} \tag{5.59}$$

d'après (2.16). Le critère de von Mises exprime donc que la contrainte tangentielle octaédriquene ne doit pas dépasser un certain seuil :

$$T_t^{oct} < T_{\text{lim}} \tag{5.60}$$

Le critère de Tresca exprime que la contrainte tangentielle ne doit pas dépasser un certain seuil.

Critère de Tresca

Ce critère s'écrit :

$$T_t = |\vec{T}_t < \kappa \tag{5.61}$$

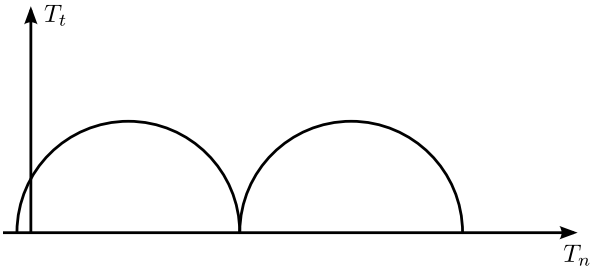
En un point donné, il faut donc vérifier que le maximum de la contrainte tangentielle, lorsque la facette varie, ne dépasse pas κ. Compte-tenu des résultats du paragraphe 2.3.1, on peut écrire cette condition comme suit :

$$\sup T_t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < \kappa; \quad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \tag{5.62}$$

et comme pour le critère de von Mises, on obtient la valeur de κ en identifiant (5.62) à (5.48) dans le cas de la traction simple. Il vient :

$$\sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_e; \quad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \tag{5.63}$$

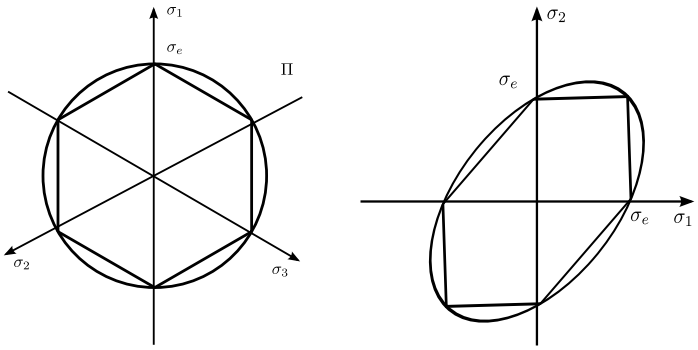
Le critère de Tresca est un critère du type (5.53), la courbe intrinsèque étant la droite $T_t = \sigma_e/2$.



Les deux critères de von Mises et Tresca s'appliquent aux métaux. Ils conduisent à des résultats légèrement différents. Par exemple, en cisaillement simple (2.21), limite élastique τ_e devient :

$$\tau_e = \begin{cases} \sigma_e/2 & \text{pour Tresca} \\ \sigma_e/\sqrt{3} & \text{pour von Mises} \end{cases} \tag{5.64}$$

Dans l'espace des contraintes principales, la surface seuil est un cylindre à base circulaire pour von Mises, hexagonale pour Tresca.



La figure ci-dessus montre l'intersection de ces cylindres avec le plan déviatoire Π et avec le plan $\sigma_3 = 0$, description qui conviendra pour les états de contraintes planes. Pratiquement, ils conduisent à des résultats suffisamment voisins pour que, dans les applications courantes, on puisse utiliser indifféremment l'un ou l'autre. On utilisera donc le critère de

von Mises lorsque l'on connaîtra le tenseur des contraintes par ses composantes, puisque ce critère s'exprime alors par la relation :

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{31}^2 < 2\sigma_e^2 \tag{5.65}$$

Ce critère se prête donc bien aux calculs analytiques ou numériques. On utilisera le critère de Tresca (5.63) lorsque l'on connaîtra *a priori* les directions principales du tenseur des contraintes ; il conduira alors à des calculs plus simples que le critère de von Mises.

Chapitre 6

Élasticité classique

6.1 Équations de l'élasticité

6.1.1 Problèmes reguliers

Pour résoudre un problème d'élasticité, il faut trouver un champ de déplacements $u_i(x,t)$ et un champ de contraintes $\sigma_{ij}(x,t)$ vérifiant les équations du mouvement ou d'équilibre suivant que l'on s'intéresse au problème dynamique ou quasi-statique :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \text{ ou } 0 \tag{6.1}$$

et la loi de comportement :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{6.2}$$

où le tenseur des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{6.3}$$

On obtient donc un système de neuf équations à neuf inconnues et le problème sera « bien posé » et admettra une solution unique pourvu qu'on lui rajoute des conditions aux limites et éventuellement des conditions initiales adéquates. Les conditions initiales donnent la position et la vitesse du milieu à l'instant 0 :

$$u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = V_i^0(x) \tag{6.4}$$

Les différents types de conditions aux limites que l'on peut rencontrer ont été discutées au paragraphe 4.1.2. On définit classiquement :

Problème de type I — les déplacements sont donnés à la frontière :

$$u_{i|_{\partial\Omega}} = u_i^d \tag{6.5}$$

Problème de type II — les efforts appliqués au solide sur la frontière sont donnés :

$$\sigma_{ij} n_{j|_{\partial\Omega}} = T_i^d \tag{6.6}$$

Par exemple, le réservoir sphérique au paragraphe 4.1.1 ou le bloc pesant du paragraphe 4.1.2 avec la condition aux limites (4.25).

Plus généralement, on a affaire à un problème mixte pour lequel sur chaque partie de $\partial\Omega$ on donne :

— les efforts, exemple (4.8) ;
— les déplacements, exemple (4.12) ;
— certaines composantes du déplacement et les composantes complémentaires de l'effort, exemple (4.11).

Un exemple type de problème mixte est celui où l'on se donne les déplacements sur une partie de la surface et les efforts sur la partie complémentaire :

$$u_{i|_{S_u}} = u_i^d \quad , \quad \sigma_{ij} n_{j|_{S_f}} = T_i^d \tag{6.7}$$

avec $\partial\Omega = S_u + S_f$. C'est par exemple le cas pour les deux problèmes du paragraphe 4.1.2 avec condition d'adhérence, mais pour ces mêmes problèmes avec conditions de non frottement, les conditions aux limites sur les bases donnent la composante du déplacement sur x_3 et les composantes de l'effort sur x_1, x_2. De manière générale, nous introduisons la classe des problèmes réguliers, problèmes pour lesquels en tout point de la frontière $\partial\Omega$ sont données trois composantes complémentaires de l'effort $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ou du déplacement u_i. Pour qu'un problème soit régulier, il faut que l'intégrale représentant le travail des efforts de contact puisse se décomposer en deux termes :

$$\iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i \, \mathrm{d}S = T_f^d\left(u_i\right) + T_u^d\left(\sigma_{ij}\right) \tag{6.8}$$

Le premier terme T_f^d représente le travail des efforts donnés dans le déplacement (inconnu) et le second, le travail des efforts de contact (inconnus) dans les déplacements donnés. Pour le problème mixte (6.7), on a simplement [1] :

$$\iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i \, \mathrm{d}S = \underbrace{\iint_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_i^d \, \mathrm{d}S}_{T_u^d(\sigma_{ij})} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega} T_i^d u_i \, \mathrm{d}S}_{T_f^d(u_i)} \tag{6.9}$$

Pour les autres problèmes réguliers, cette décomposition est plus longue à écrire. Par exemple, pour le problème du bloc pesant avec condition de non frottement (6.19), on a :

$$\iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i \, \mathrm{d}S = \underbrace{\iint_{S_l+S_1} T_i^d u_i \, \mathrm{d}S - \iint_{S_0} \left(\sigma_{13}^d u_i + \sigma_{23}^d u_2\right)}_{T_f^d(u_i)} + \underbrace{\sigma_{33} u_3^d\Big)}_{T_u^d(\sigma_{ij})} \mathrm{d}S \tag{6.10}$$

Pour ce problème particulier, chacun des termes est nul d'après (4.18) et (4.19), mais peu importe, l'essentiel est d'examiner ce qui est donné par les conditions aux limites et de vérifier que l'on peut effectuer la décomposition (6.8) sans ambiguïté. En particulier, il en résulte que, pour le problème homogène associé, c'est-à-dire pour le problème correspondant à toutes les données nulles, on a automatiquement :

$$\iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i \, \mathrm{d}S = 0 \tag{6.11}$$

c'est un moyen commode pour vérifier qu'un problème est régulier.

Cette notion de problème régulier est essentielle car elle recouvre la formulation naturelle des conditions aux limites en Mécanique des Solides en général. En élasticité, les problèmes réguliers sont des problèmes linéaires – on peut donc superposer plusieurs solutions – et qui permettent de démontrer un certain nombre de théorèmes généraux, notamment des théorèmes d'existence et d'unicité – un problème régulier est bien posé – et les théorèmes de l'énergie qui feront l'objet d'un chapitre.

1. Les problèmes de type I et II sont des cas particuliers du problème mixte (6.7).

Il existe des problèmes non réguliers, comme par exemple les problèmes de frottement ou les problèmes unilatéraux. Dans les deux cas, il s'agit de conditions aux limites non linéaires qui rendent le problème non linéaire et par conséquent, beaucoup plus difficile à résoudre. Les liaisons élastiques donnent un exemple de problème linéaire non régulier. Nous rencontrerons aussi des problèmes non réguliers par manque de données mais il s'agit alors d'une non régularité superficielle qui ne nous gênera guère.

6.1.2 Theorème d'unicité en dynamique

Comme nous l'avons affirmé plus haut, un problème régulier est bien posé, autrement dit, il admet une solution unique. À titre d'exemple, nous allons démontrer le théorème d'unicité dans le cas dynamique. Nous partons donc d'un problème dynamique régulier. Pour fixer les notations, nous prendrons des conditions aux limites mixtes de type (6.7) mais la démonstration est valable, à des difficultés de notations près, pour tout problème régulier. Nous cherchons donc $u_i(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$, $\varepsilon_{ij}(x,t)$, solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} + f_i \\ \sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kh} \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \\ u_i(x,0) = u_i^c(x) \qquad V_i(x,0) = V_i^c(x) \\ u_{i|_{S_u}} = u_i^d \qquad \sigma_{ij}n_{jS_f} = T_i^d \end{cases} \tag{6.12}$$

Au paragraphe 1.2.1, nous avons démontré le théorème de l'énergie cinétique (1.29) mais en élasticité, il vient, d'après (5.6) et (5.8) :

$$\sigma_{ij}D_{ij} = \sigma_{ij}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \tag{6.13}$$

ce qui permet d'écrire (1.29) sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+W) = \iiint_\Omega f_i\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega}\sigma_{ij}n_j\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\mathrm{d}S \tag{6.14}$$

où W est l' énergie de déformation du so1ide :

$$W = \iiint_\Omega w\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iint_\Omega A_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\,\mathrm{d}v \tag{6.15}$$

La signification de (6.14) est claire : la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale (cinétique + de déformation) du solide est égale à la puissance des efforts extérieurs.

Supposons maintenant que notre problème (6.12) admette deux solutions correspondant aux mêmes données $\left(f_i, u_i^0, V_i^0, u_i^d, T_i^d\right)$. La différence de ces deux solutions :

$$\bar{u}_i = u_i^{(2)} - u_i^{(1)}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)} \tag{6.16}$$

sera solution du problème homogène associé à (6.12) :

$$\bar{f}_i = 0, \quad \bar{u}_i^0 = \bar{V}_i^0 = 0, \quad \bar{T}_i^d = 0 \tag{6.17}$$

En appliquant (6.14) à ce problème :

$$\iint_\Omega \bar{f}_i\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \iint_{S_u}\bar{\sigma_{ij}}n_j\frac{\partial\bar{u}_i^d}{\partial t}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_f}\bar{T}_i^d\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{6.18}$$

est nul d'après (6.17) puisque $\bar{f}_i$, $\bar{T}_i^d$ et $\bar{u}_i^d$ et donc $\partial \bar{u}_i^d/\partial t$ sont nuls. On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{K}+\bar{W}\right)=0, \quad \bar{K}+\bar{W}=\mathrm{Cte}=0 \tag{6.19}$$

puisqu'à l'instant initial, d'après (6.17), il vient :

$$\bar{u}_i\left(x,0\right)=\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\left(x,0\right)=0 \tag{6.20}$$

Or l'énergie cinétique K, par définition, et l'énergie de déformation W d'après le postulat de stabilité (4.4), sont définies positives, d'où il résulte que $\bar{K}$ et $\bar{W}$ restent nuls au cours du temps. On a donc en tout point et à tout instant $\partial \bar{u}_i/\partial t = 0$ d'où :

$$\bar{u}_i\left(x,t\right)=0, \quad u_i^{(2)}\left(x,t\right)=u_i^{(1)}\left(x,t\right) \tag{6.21}$$

Les deux solutions coïncident et le problème (6.12) a une solution unique. Nous démontrerons au chapitre 9 le théorème d'unicité peur le problème statique, mais provisoirement nous l'admettrons.

6.1.3 Équations de Navier

Pour résoudre analytiquement un problème d'élasticité, on postule *a priori* une forme particulière pour la solution puis on essaie de vérifier toutes les équations. Si on y parvient, alors d'après le théorème d'unicité pour un problème régulier, c'est la solution du problème. Il en résulte donc deux méthodes, suivant que l'on essaie un champ de déplacement ou un champ de contraintes.

Si l'on part du champ de déplacement u_i on peut calculer le tenseur des déformations par (6.3) et le tenseur des contraintes par la loi de comportement (6.2). Il ne reste donc plus à vérifier que les équations du mouvement (6.1), les conditions aux limites de type déplacement et de type effort et éventuellement les conditions initiales. Reporter (6.2) et (6.3) dans l'équation du mouvement (6.1) permet d'écrire l'équation qui doit être vérifiée par le champ de déplacements $u_i\left(x,t\right)$ en dynamique ou $u_i(x)$ en statique :

$$A_{ijkh}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_h}+f_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \text{ ou } 0 \tag{6.22}$$

où la symétrie (5.3) de A_{ijkh} est utilisée et en supposant le matériau homogène (A constant). En élasticité, le temps n'intervient pas dans la loi de comportement. Il n'intervient que dans l'équation du mouvement et disparaît en quasi-statique à l'exception des problèmes de frottement, où il reste dans la condition aux limites (4.15). Ainsi en élasticité, on ne parle jamais de problèmes quasi-statiques mais uniquement de problèmes statiques. Pour résoudre un problème quasi-statique, il suffit en effet de résoudre à chaque instant le problème statique correspondant. Nous n'envisagerons plus désormais que le cas statique.

Dans le cadre de l'élastictté linéaire isotrope —élasticité classique— l'équation (6.22) devient d'après (5.23) :

$$\left(\lambda+\mu\right)u_{i,ik}+\mu u_{i,kh}+f_i=0 \tag{6.23}$$

soit, en introduisant les opérateurs de l'analyse vectorielle (Annexe A) :

$$\left(\lambda+\mu\right)\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{u}\right)+\mu\Delta\vec{u}+\vec{f}=0 \tag{6.24}$$

ou de manière équivalente :

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} + \vec{f} = 0 \tag{6.25}$$

Ces équations sont appelées les équations de Navier. Elles traduisent les équations d'équilibre pour le champ des déplacements.

Ainsi la première méthode de résolution d'un problème d'élastostatique consiste à :

— postuler un champ de déplacements ;
— vérifier les équations de Navier (6.24) ou (6.25) ;
— vérifie, les conditions aux limites de type déplacement ;
— vérifier les conditions aux limites de type effort.

Pour postuler le champ de déplacements, on s'inspire habituellement des conditions aux limites en déplacement et des symétries. On verra des exemples de cette méthode aux paragraphes 6.2.2 et 7.2.1.

Si on prend la divergence de l'équation (6.25), on obtient l'équation de la dilatation

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta\,(\mathrm{div}\,\vec{u}) + \mathrm{div}\,\vec{f} = 0 \tag{6.26}$$

qui nous sera utile plus loin.

6.1.4 Équations de Beltrami

La seconde méthode de résolution consiste à postuler un champ de contraintes. La loi de comportement permet alors de calculer le champ des déformations, mais pour pouvoir calculer le vecteur déplacement, il faut que ce champ de déformations soit compatible (paragraphe 3.3). Ainsi, le champ de contraintes choisi doit vérifier les équations d'équilibre et un système d'équations traduisant les équations de compatibilité. Nous allons obtenir ce système d'équations dans le cas statique et en élasticité classique et homogène.

Nous partons des équations de compatibilité sous la forme (3.59) et de la loi de comportement sous la forme (5.34), ainsi :

$$\left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)_{,ll} + \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk,ij} - \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}\right) + \frac{2\nu}{E}\sigma_{kk,ij} = 0$$

et en notation indicielle :

$$(1+\nu)\,\sigma_{ij,ll} - \nu\sigma_{kk,ll}\delta_{ij} + \sigma_{kk,ij} - (1+\nu)\left[\sigma_{jk,ki} + \sigma_{ik,kj}\right] = 0 \tag{6.27}$$

mais d'après les équations d'équilibre (6.1) :

$$\sigma_{jk,ki} + \sigma_{ik,kj} = -\left(f_{i,j} + f_{j,i}\right) \tag{6.28}$$

et d'après la loi de comportement (5.34) et l'équation de la dilatation (6.26) :

$$\sigma_{kk,ll} = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{kk,ll} = -\frac{E}{(\lambda+2\mu)\,(1-2\nu)}f_{i,i}$$

soit finalement avec (5.33) :

$$\sigma_{kk,ll} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}f_{i,i} \tag{6.29}$$

En eeportant (6.28) et (6.29) dans (6.27), on obtient :

$$\sigma_{ij,ll} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + f_{i,j} + f_{j,i} + \frac{\nu}{1-\nu}f_{i,i} = 0 \tag{6.30}$$

Ces équations, appelées équations de Beltrami, traduisent les équations de compatibilité pour les contraintes. Si les forces de volume sont nulles, elles se simplifient :

$$\sigma_{ij,ll} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0 \tag{6.31}$$

En particulier, elles seront automatiquement vérifiées si les contraintes sont des fonctions linéaires des coordonnées.

La seconde méthode de résolution d'un problème élasto-statique consiste à :

— postuler un champ de contraintes ;

— vérifier les équations d'équilibre ;

— vérifier les équations de Beltrami ;

— vérifier les conditions aux limites de type effort ; puis, le cas échéant

— intégrer le champ de déplacements ;

— vérifier les conditions aux limites de type déplacement.

On voit donc que cette méthode s'applique tout naturellement aux problèmes de type II pour lesquels on peut sauter les deux dernières étapes. Nous en verrons des exemples aux paragraphes 6.2.1, 7.2.2 et 7.3.1.

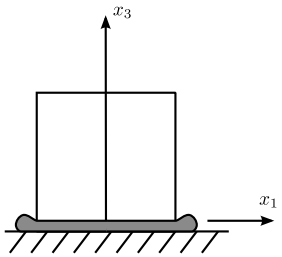
6.2 Problèmes simples

Comme premier exemple, on peut citer le problème de la compression d'un lopin avec conditions aux limites de non frottement qui a été résolu de manière tout à fait générale au paragraphe 4.1.3. Nous allons traiter deux autres exemples issus du paragraphe 4.1.

6.2.1 Déformation d'un bloc pesant

Nous considérons donc le problème du bloc pesant posé sur un ballon de baudruche (paragraphe 4.1.3). On aura donc $f_i = -\rho g$ et les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} n_j = 0 \text{ sur } S_2 \\ x_3 = h : \ \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \\ x_3 = 0 : \ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \ \sigma_{33} = -p \end{cases} \tag{6.32}$$



C'est un problème régulier de type II et par conséquent, la solution sera donc unique : ceci conduit à rechercher le champ de contraintes. Les trois équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = \rho g \end{cases} \tag{6.33}$$

Les conditions aux limites sur la surface latérale s'écrivent, avec $\vec{n} = (n_1, n_2, 0)$:

$$\begin{cases} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = 0 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = 0 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 = 0 \end{cases} \tag{6.34}$$

L'examen de ces équations nous conduit à chercher le tenseur des contraintes sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x) \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

qui vérifie automatiquement :

— les conditions aux 1imites (6.34) sur S_l ;

— les conditions aux aimites portant sur σ_{13} et σ_{23} en $x_3 = 0$ et $x_3 = h$.

Les équations d'équilibre donnent alors :

$$\sigma_{33} = \rho g x_3 = \text{Cte}$$

et les conditions aux limites en $x_3 = h$ et $x_3 = 0$ entraînent :

$$\sigma_{33} = \rho g \left(x_3 - h \right), \quad p = \rho g h \tag{6.36}$$

On retrouve donc (4.27). Par ailleurs, ce champ de contraintes est linéaire et vérifie automatiquement les équations de Beltrami (6.31) ($f_i = \text{Cte}$). Ainsi, le champ de contraintes (6.35) et (6.36) vérifie toutes les équations du problème. C'est la solution.

Si l'on veut connaître le déplacement, il faut faire appel à la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\nu \rho g x_3' & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \rho g x_3' & 0 \\ 0 & 0 & \rho g x_3' \end{bmatrix} \tag{6.37}$$

en prenant $x_3' = x_3 - h$, c'est-à-dire en prenant l'origine des coordonnées sur la face supérieure du bloc. Par rapport à cette nouvelle variable, le champ des déformations est linéaire et on peut appliquer la formule (3.64) pour le calcul du déplacement. On peut aussi procéder directement à partir de (6.3). En effet :

$$\begin{cases} \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3'} = \dfrac{1}{E} \rho g x_3' & \Rightarrow E u_3 = \dfrac{1}{2} \rho g x_3'^2 + \varphi_3 \left(x_1, x_2 \right) \\ \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{-\nu}{E} \rho g x_3' & \Rightarrow E u_1 = -\nu \rho g x_3'^2 + \varphi_1 \left(x_2, x_3 \right) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = \dfrac{-\nu}{E} \rho g x_3' & \Rightarrow E u_2 = -\nu \rho g x_3'^2 + \varphi_2 \left(x_3, x_1 \right) \end{cases} \tag{6.38}$$

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1} = 0 \\ 2\varepsilon_{13} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3'} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\nu \rho g x_1 + \varphi_{1,3} + \varphi_{3,1} = 0 \\ 2\varepsilon_{23} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3'} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\nu \rho g x_2 + \varphi_{2,3} + \varphi_{3,2} = 0 \end{cases} \tag{6.39}$$

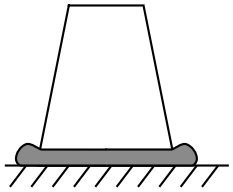
et on obtient une solution particulière :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = +\frac{1}{2}\nu\rho g\left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{6.40}$$

d'où finalement la solution, en revenant à x_3 :

$$\begin{cases} Eu_1 = -\nu\rho g x_1 \left(x_3 - h\right) \\ Eu_2 = -\nu\rho g x_2 \left(x_3 - h\right) \\ Eu_3 = \dfrac{1}{2}\rho g\left[\left(x_3 - h\right)^2 + \nu\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right] \end{cases} \tag{6.41}$$

à un déplacement de solide près.

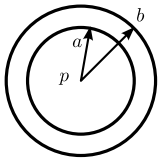


On en déduit l'allure de la déformation du bloc.

6.2.2 Réservoir sphérique sous pression

Nous considérons le réservoir sphérique sous pression du paragraphe 4.1 avec $f_i = 0$ et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} r = a : & \sigma_{ij} n_j = -p n_i \\ r = b : & \sigma_{ij} n_j = 0 \end{cases} \tag{6.42}$$



Compte-tenu de la symétrie du problème, on peut supposer que le vecteur déplacement est radial et ne dépend que de la distance au centre $r = OM$:

$$u_i = g(r)x_i, \quad r^2 = x_i x_i; \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i} = \frac{x_i}{r} \tag{6.43}$$

Un calcul direct donne alors :

$$u_{i,j} = g(r)\delta_{ij} + \frac{g'(r)}{r} x_i x_j = \varepsilon_{ij} \tag{6.44}$$

Le gradient du déplacement étant symétrique, il s'ensuit que son rotationnel rot $\vec{u}$ est nul. L'équation de Navier (6.25) donne alors :

$$\text{grad}\,(\text{div}\,\vec{u}) = 0, \quad \text{div}\,\vec{u} = \text{Cte} = 3\alpha \tag{6.45}$$

Compte-tenu de (6.44), il vient :

$$u_{i,j} = 3g(r) + \frac{g'(r)}{r} = 3\alpha \tag{6.46}$$

et par intégration :

$$g(r) = \alpha + \frac{\beta}{r^3} \tag{6.47}$$

Il reste à déterminer les constantes d'intégration α et β pour vérifier les conditions aux limites (6.42). Pour cela, nous devons calculer les contraintes :

$$\varepsilon_{ij} = \left(\alpha + \frac{\beta}{r^3}\right)\delta_{ij} - \frac{3\beta x_i x_j}{r^5} \tag{6.48}$$

et nous allons écrire la loi de comportement sous la forme (6.39). En effet, la décomposition de (6.48) en partie sphérique et déviateur donne directement :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{3}\varepsilon_{ii} = \alpha \qquad &\Rightarrow \quad \sigma &= 3K\alpha \\ e_{ij} &= \frac{\beta}{r^3}\left(\delta_{ij} - 3\frac{x_i x_j}{r^2}\right) \quad &\Rightarrow \quad s_{ij} &= \frac{2\mu\beta}{r^3}\left(\varepsilon_{ij} - 3\frac{x_i x_j}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{6.49}$$

D'où finalement :

$$\sigma_{ij} = \left(3K\alpha + 2\mu\frac{\beta}{r^3}\right)\delta_{ij} - \frac{6\mu\beta}{r^3}\frac{x_i x_j}{r^2} \tag{6.50}$$

Le tenseur des contraintes est de révolution autour de la direction radiale et les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 3K\alpha + \frac{2\mu\beta}{r^3}, \quad \sigma_3 = 3K\alpha - \frac{4\mu\beta}{r^3} \tag{6.51}$$

avec σ_3 associé à la direction radiale. La condition (6.42) s' écrit alors simplement puisque sur les deux sphères frontières, la normale est radiale :

$$\begin{cases} r = a : \quad \sigma_3 = 3K\alpha - \dfrac{4\mu\beta}{a^3} = -p \\ r = b : \quad \sigma_3 = 3K\alpha - \dfrac{4\mu\beta}{b^3} = 0 \end{cases} \tag{6.52}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues qui donne les constantes d'intégration α et β par :

$$4\mu\beta = \frac{pa^3b^3}{b^3 - a^3}; \quad 3K\alpha = \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \tag{6.53}$$

et la solution est complètement déterminée.

Il reste à écrire la condition de limite élastique. Si l'on adopte le critère de von Mises, alors il vient directement, par exemple à partir de (6.49) et (5.57) :

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{12\mu^2\beta^2}{r^4} \leqslant \frac{\sigma_e^2}{3} \tag{6.54}$$

Si l'on adopte le critère de Tresca, alors à partir de (6.51) et (5.63) :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{6\mu\beta}{r^3} \leqslant \sigma_e \tag{6.55}$$

Les deux critères donnent donc le même résultat, ce qui était évident *a priori* puisque l'état de contraintes est de révolution, c'est donc, à un tenseur sphérique près, un état de traction simple pour lequel Tresca et von Mises coincident par construction. Ainsi le calcul élastique est justifié si la condition :

$$\frac{3pa^3b^3}{2\left(b^3 - a^3\right)r^3} \leqslant \sigma_e \tag{6.56}$$

est vérifiée en tout point. Le point le plus sollicité sera donc le point où r est minimum, c'est-à-dire à l'intérieur ($r = a$). On obtient donc la condition :

$$\frac{3}{2}\frac{pb^3}{b^3 - a^3} \leqslant \sigma_e; \quad p \leqslant p_e = \frac{2\sigma_e}{3}\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right) \tag{6.57}$$

qui donne la pression maximale que peut supporter le réservoir en restant dans le domaine élastique. En particulier, quelles que soient les dimensions du réservoir, on ne peut pas dépasser la pression limite $2\sigma_e/3$. Nous reviendrons sur ce problème en plasticité au chapitre 10.

La solution générale (6.50) que nous avons obtenue permet de traiter également d'autres problèmes :

— réservoir sphérique soumis à une pression intérieure p et une pression extérieure P. On obtient alors :

$$3K\alpha = \frac{pa^3 - Pb^3}{b^3 - a^3}; \quad 4\mu\beta = \frac{p - P}{b^3 - a^3}a^3b^3 \tag{6.58}$$

— cavité sphérique dans un milieu infini :

$$4\mu\beta = pa^3; \quad 3K\alpha = 0 \tag{6.59}$$

— boule dans un fluide à la pression P :

$$3K\alpha = -P; \quad 4\mu\beta = 0 \tag{6.60}$$

mais, pour ce dernier problème, il est inutile d'aller chercher si loin. Soit, en effet, un solide Ω immergé dans un fluide à la pression P. En négligeant les forces de volume, on doit résoudre le problème de type II défini par les conditions aux limites :

$$\sigma_{ij}n_j = -Pn_i \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{6.61}$$

La solution de ce problème est triviale, quelle que soit la forme du solide :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}; \quad u_i = -\frac{P}{3K}x_i \tag{6.62}$$

On pourrait faire une étude analogue à celle du paragraphe 4.1.3 et montrer que cette solution peut s'étendre à toute loi de comportement.

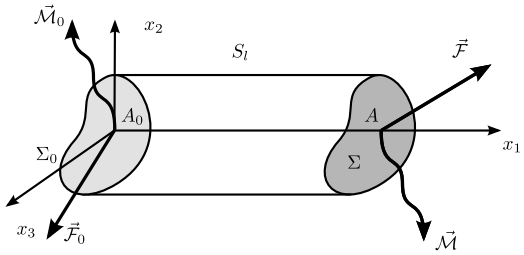
Chapitre 7

Problème de Saint-Venant

7.1 Traction et flexion pure

7.1.1 Principe de Saint-Venant

Le problème de Saint-Venant est le problème de base de la Résistance des Matériaux. Une poutre cylindrique est sollicitee à ses deux extrémités, les efforts exercés étant caractérisés par leur torseur résultant.



On considère une poutre cylindrique de section Σ et de longueur l :

$$\Omega = [0; l] \times \Sigma$$

Les efforts de volume sont supposés nuls, soit $f_i = 0$ et la surface latérale $S_l = [0; l]\, \partial\Sigma$ est libre de contrainte :

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad (x_2, x_3) \in \partial\Sigma \tag{7.1}$$

Les efforts exercés sur les extrémités $\Sigma_0\,(x_l = 0)$ et $\Sigma_1\,(x_1 = l)$ sont caractérisés par leurs torseurs résultants $[\mathcal{T}_0]$ et $[\mathcal{T}_1]$. Nous représenterons $[\mathcal{T}_1]$ par sa résultante $\vec{\mathcal{R}}$ et par son moment résultant $\vec{\mathcal{M}}$ au point $A\,(l, 0, 0)$, centre de Σ_1, et de même $[\mathcal{T}_0]$ par sa résultante $\vec{\mathcal{R}}_0$ et par son moment résultant $\vec{\mathcal{M}}_0$ au point $A_0\,(l, 0, 0)$, centre de Σ_0. La poutre étant en équi1ibre, les efforts exercés sur et Σ_0 et Σ_1 doivent s'équilibrer, d'où les relations vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{R}}_0 + \vec{\mathcal{R}} = 0 \\ &\vec{\mathcal{M}}_0 + \vec{\mathcal{M}} + \overrightarrow{A_0 A} \wedge \vec{\mathcal{R}} = 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Ainsi, on peut calculer $\vec{\mathcal{R}}_0$ et $\vec{\mathcal{M}}_0$ en fonction de $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$, et les efforts exercés sur la poutre seront caractérisés par les deux vecteurs $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$. Pour relier ces efforts aux contraintes, il faut considérer les efforts exercés sur Ω à travers Σ_1, soit $\vec{T} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ selon la direction $\vec{n} = (1, 0, 0)$, puis intégrer sur toute la section. Il vient :

$$\vec{\mathcal{R}} = \iint_{\Sigma_1} \vec{T}\, \mathrm{d}S; \quad \vec{\mathcal{M}} = \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{T}\, \mathrm{d}S \tag{7.3}$$

soit, composante par composante pour les réactions :

$$\mathcal{R}_1 = \iint_{\Sigma_1} \sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.4a}$$

$$\mathcal{R}_2 = \iint_{\Sigma_1} \sigma_{12}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.4b}$$

$$\mathcal{R}_3 = \iint_{\Sigma_1} \sigma_{13}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.4c}$$

et pour les moments :

$$\mathcal{M}_1 = \iint_{\Sigma_1} (x_2\sigma_{13} - x_3\sigma_{12})\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.5a}$$

$$\mathcal{M}_2 = \iint_{\Sigma_1} x_3\sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.5b}$$

$$\mathcal{M}_3 = -\iint_{\Sigma_1} x_2\sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.5c}$$

On aurait des formules analogues sur Σ_0.

Il est clair que le problème de Saint-Venant ainsi posé n'est pas régulier, par manque de données. En effet, les conditions (7.4a) à (7.5c) sont insuffisantes pour déterminer la répartition des efforts $\vec{T}$ sur Σ_1. Pour obtenir un problème régulier, il faudrait préciser la manière dont les torseurs $\vec{T}$ sur Σ_1 sont appliqués. Plus précisément, on peut imaginer plusieurs — en fait, une infinité — répartitions d'efforts surfaciques vérifiant (7.4a) à (7.5c), sur Σ_1, et de même sur Σ_0 chacune de ces répartitions sera associé un problème régulier (de type II), donc avec solution unique. Ainsi le problème de Saint-Venant, tel que nous l'avons formulé, admet une infinité de solutions.

> ***Principe de Saint-Venant***
> *L'état de contrainte et de déformation loin des extrémités dépend uniquement du torseur des efforts appliqués et non de la manière précise dont ces efforts sont appliqués.*

En d'autres termes, deux répartitions d'efforts surfaciques conduisant au même torseur, conduiront à deux solutions très voisines, sauf au voisinage immédiat des extrémités. Ainsi le problème de Saint-Venant admet une infinité de solutions, mais ces solutions sont très voisines les unes des autres, et il n'y a pas lieu de les distinguer, à moins de vouloir des informations précises sur ce qui se passe au voisinage des extrémités.

Initialement, ce principe était d'origine intuitive ; c'est lui qui se trouve à la base du célèbre mémoire de Saint-Venant qui, déjà en 1856, contenait l'essentiel de ce chapitre. Depuis, il a reçu de nombreuses vérifications expérimentales directes ou indirectes, car c'est le postulat de base de la Résistance des Matériaux. Récemment, on a pu le démontrer dans certains cas particuliers par une étude mathématique des équations de l'élasticité.

Ce principe joue un rôle tout à fait essentiel pour deux raisons. Tout d'abord, dans la pratique, on verra que l'on connaît assez rarement la répartition des efforts, alors que l'on a facilement leur torseur résultant. Ensuite, c'est grâce à lui que nous pourrons résoudre le problème de Saint-Venant, en jouant sur la latitude qui nous est laissée sur la répartition précise des efforts.

Notre démarche va être la suivante. Nous allons tout d'abord décomposer le problème en six problèmes élémentaires correspondant à chacune des composantes de $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$. Ensuite, pour chacun de ces problèmes élémentaires, nous trouverons une solution, et par superposition, nous aurons une solution du problème complet.

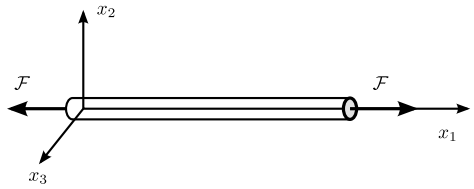
Nous décomposons donc le problème de Saint Venant en 6 problèmes.

Problème 1 – traction

$$\mathcal{R}_1 = F, \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = 0, \quad \overrightarrow{\mathcal{M}} = 0 \tag{7.6}$$

soit d'après (7.2) :

$$\vec{\mathcal{R}} = -\vec{\mathcal{R}}_0 = F\,\vec{e}_1, \quad \overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = 0$$

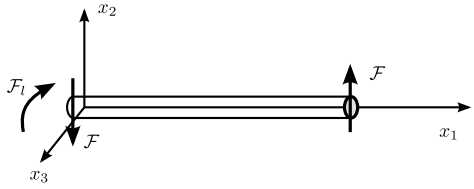


Problèmes 2 et 3 – flexion composée

$$\mathcal{R}_1 = 0 = \mathcal{R}_3, \quad \mathcal{R}_2 = F, \quad \overrightarrow{\mathcal{M}} = 0 \tag{7.7}$$

pour le problème 2 (le problème 3 s'obtient en échangeant les indices 2 et 3), d'où :

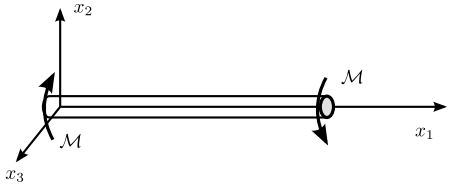
$$\vec{\mathcal{R}} = -\vec{\mathcal{R}}_0 = F\,\vec{e}_2, \quad \overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = -Fl\,\vec{e}_3$$



Problème 4 – torsion

$$\vec{\mathcal{R}} = 0, \quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3 = 0 \tag{7.8}$$

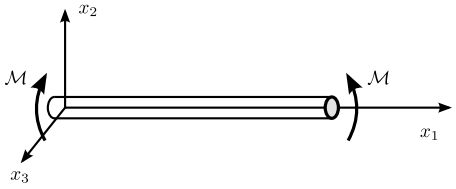
$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}}_0 = 0, \quad \overrightarrow{\mathcal{M}} = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}\,\vec{e}_1$$



Problèmes 5 et 6 – flexion pure

$$\vec{\mathcal{R}} = 0, \quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = 0, \quad \mathcal{M}_3 = 0 \tag{7.9}$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}}_0 = 0, \quad \overrightarrow{\mathcal{M}} = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}\,\vec{e}_3$$



pour le problème 6 (le problème 5 s'obtient en échangeant les indices 2 et 3).

Pour chacun de ces problèmes, les conditions portent sur les contraintes. Nous adopterons donc l'approche du 6.1.4 en cherchant un champ de contraintes vérifiant :

— les équations d'équilibre avec $f_i = 0$

— les équations de Beltrami

— les CL (7.1) sur la surface latérale

— les conditions (7.4a),(7.4c),(7.5a),(7.5c), pour le problème étudié.

7.1.2 Répartition des contraintes normales

On constate tout d'abord sur (7.4a) à (7.5c), que $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ ne font intervenir que la contrainte normale σ_{11}, pour une facette de la section droite. Nous cherchons donc le champ des contraintes sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

Les conditions aux limites (7.1) sur la surface latérale sont alors automatiquement vérifiées puisque $\vec{n} = (0, n_2, n_3)$. Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}(x_2, x_3) \tag{7.11}$$

Les équations de Beltrami (6.30) se réduisent alors à :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \tag{7.12}$$

qui entraîne σ_{11}, fonction linéaire de x_2, x_3 :

$$\sigma_{11} = a + bx_2 + cx_3 \tag{7.13}$$

Il ne reste plus à écrire que les conditions sur les extrémités, en reportant le tenseur des contraintes défini par (7.10) et (7.13) dans (7.4a) à (7.5c), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= a \iint_\Sigma \mathrm{d}S + b \iint_\Sigma x_2 \,\mathrm{d}S + c \iint_\Sigma x_3 \,\mathrm{d}S \\ -\mathcal{M}_3 &= a \iint_\Sigma x_2 \,\mathrm{d}S + b \iint_\Sigma x_2^2 \,\mathrm{d}S + c \iint_\Sigma x_2 x_3 \,\mathrm{d}S \\ \mathcal{M}_2 &= a \iint_\Sigma x_3 \,\mathrm{d}S + b \iint_\Sigma x_2 x_3 \,\mathrm{d}S + c \iint_\Sigma x_3^2 \,\mathrm{d}S \\ \mathcal{R}_2 &= \mathcal{R}_3 = 0, \quad \mathcal{M}_1 = 0 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Les intégrales qui interviennent dans (7.14) dépendent uniquement de la forme de la section. Ainsi, le système (7.14) donnera a, b et c, en fonction de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$. Nous pourrons donc résoudre par un champ de contraintes de la forme (7.10) et (7.13), les problèmes 1, 5 et 6 de traction et flexion pure.

Pour déterminer complètement les contraintes, il reste à calculer a, b et c, c'est-à-dire résoudre le système (7.14). Un choix judicieux du système d'axes x_2x_3 dans le plan de la section droite Σ va faciliter cette résolution. Tout d'abord, on choisit l'origine au centre de gravité de Σ, ce qui assure :

$$\iint_\Sigma x_2 \,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma x_3 \,\mathrm{d}S = 0 \tag{7.15}$$

Ensuite, on remarque que (7.14) fait intervenir les composantes du tenseur d'inertie de la section Σ :

$$J_{ij} = \iint_\Sigma x_i x_j \,\mathrm{d}S \quad i, j = 2, 3 \tag{7.16}$$

c'est un tenseur plan symétrique, donc diagonalisable. On peut trouver dans le plan x_2, x_3 deux directions principales d'inertie perpendiculaires telles que le moment produit J_{23} soit nul :

$$J_{23} = \iint_\Sigma x_2 x_3 \, \mathrm{d}S = 0 \tag{7.17}$$

Nous choisirons ces directions principales comme axes x_2, x_3. Pratiquement, si la section a un axe de symétrie, alors cet axe est principal d'inertie, car la symétrie entraîne (7.17). Sinon la diagonalisation est facile et on peut, en particulier, utiliser la méthode géométrique exposée au paragraphe 3.3.2 pour le tenseur des contraintes.

Avec ce choix d'axes, (7.14) devient simplement :

$$\mathcal{R}_1 = aS, \quad -\mathcal{M}_3 = bJ_2, \quad \mathcal{M}_2 = cJ_3, \quad J_2 = \iint_\Sigma x_2^2 \, \mathrm{d}S, \quad J_3 = \iint_\Sigma x_3^2 \, \mathrm{d}S \tag{7.18}$$

où S est la surface de Σ et J_2, J_3 les moments d'inertie principaux. On obtient donc :

$$\sigma_{11} = \frac{\mathcal{R}_1}{S} - \frac{\mathcal{M}_3}{J_2} x_2 + \frac{\mathcal{M}_2}{J_3} x_3 \tag{7.19}$$

et on a trouvé un champ de contraintes convenables pour les problèmes 1, 5 et 6.

En particulier, pour la traction, on retrouve la solution présenté au paragraphe 4.1.4 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{F}{ES} x_1; \quad u_2 = -\nu \frac{F}{ES} x_2; \quad u_3 = -\nu \frac{F}{ES} x_3 \tag{7.20}$$

C'est la solution du problème régulier associé aux conditions aux limites :

$$x_1 = 0 \text{ et } x_1 = l : \quad \sigma_{11} = F/S, \ \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \tag{7.21}$$

En général, les conditions aux limites réelles — par exemple dans un essai de traction — sont différentes mais le principe de Saint-Venant nous assure que cela n'a guère d'importance, à condition de se placer loin des têtes d'amarrage et c'est bien ce que l'on fait dans un essai de traction.

7.1.3 Flexion pure

Considérons maintenant le problème 6 — le problème 5 se traiterait de manière identique. Le tenseur des contraintes a la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathcal{M}}{J} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

où l'on a supprimé l'indice 2 sur J :

$$J = J_2 = \iint_\Sigma x_2^2 \, \mathrm{d}S \tag{7.23}$$

Il reste à calculer les déplacements. Comme au paragraphe 6.2.1, nous procéderons directement en écrivant le tenseur des déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathcal{M}}{EJ} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu \frac{\mathcal{M}}{EJ} x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \frac{\mathcal{M}}{EJ} x_2 \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

soit, en développant par rapport au champ de déplacement :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\mathcal{M}}{EJ}x_2 \quad \Rightarrow u_1 = \frac{\mathcal{M}}{EJ}x_1x_2 + \varphi_1\left(x_2, x_3\right) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\nu\mathcal{M}}{EJ}x_2 \quad \Rightarrow u_2 = \frac{\nu\mathcal{M}}{EJ}x_2^2 + \varphi_2\left(x_1, x_3\right) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\nu\mathcal{M}}{EJ}x_2 \quad \Rightarrow u_3 = \frac{\nu\mathcal{M}}{EJ}x_2x_3 + \varphi_3\left(x_1, x_2\right)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

et :

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\mathcal{M}}{EJ}x_1 + \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1} = 0 \\
2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\nu\mathcal{M}}{EJ}x_3 + \varphi_{2,3} + \varphi_{3,2} = 0 \\
2\varepsilon_{31} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \varphi_{1,3} + \varphi_{3,1} = 0
\end{aligned} \tag{7.26}$$

On obtient alors la solution particulière :

$$\varphi_1 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\mathcal{M}}{2EJ}\left(x_1^2 - \nu x_3^2\right) \tag{7.27}$$

Le déplacement est donc donné par :

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{\mathcal{M}}{EJ}x_1x_2 - \omega_3^0 x_2 \\
u_2 &= \frac{\mathcal{M}}{2EJ}\left[x_1^2 + \nu\left(x_2^2 - x_3^2\right)\right] + \omega_3^0 x_1 + u_2^0 \\
u_3 &= \frac{\nu\mathcal{M}}{EJ}x_2x_3
\end{aligned} \tag{7.28}$$

où, en vue des applications futures, nous n'avons conservé qu'une partie du déplacement de solide.

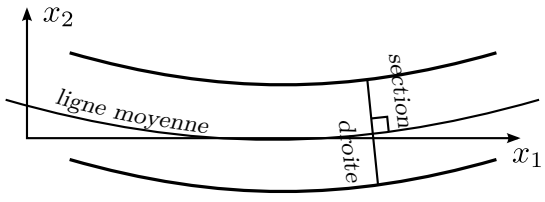
La déformation de la ligne moyenne s'écrit :

$$u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 = \frac{\mathcal{M}}{2EJ}x_1^2 + \omega_3^0 x_1 = v(x_1) \tag{7.29}$$

tandis que la déformée d'une section droite $x_1 = x_1^0$ est caractérisée par :

$$u_1 = -\left(\frac{\mathcal{M}}{EJ}x_1^0 + \omega_3^0\right)x_2 = -\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x_1}\right|_{x_1^0} x_2 \tag{7.30}$$

Les relations (7.29) et (7.30) montrent qu'après la déformation la ligne moyenne devient une parabole et que les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne.



On construit souvent la théorie élémentaire de la flexion à partir de :

> ***Hypothèse de Navier-Bernoulli***
> *Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne.*

Cette hypothèse se trouve donc vérifiée ici. On constate également que le moment $\mathcal{M}$ appliqué produit une courbure de la ligne moyenne :

$$\Xi = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x_1} \frac{\mathcal{M}}{EJ} \tag{7.31}$$

Ainsi, on pourrait envisager de mesurer le module d'Young E d'un matériau élastique par un essai de flexion : on impose un moment de flexion $\mathcal{M}$ et on observe la courbure Ξ, ce qui détermine la *rigidité* de la poutre EJ produit d'une rigidité matérielle E, liée au matériau, et d'une rigidité géométrique J, donnée par (7.23) et liée à la géométrie de la section droite Σ.

En chaque point, on a un état de contraintes de traction simple, et le critère de limite d'élasticité donnera :

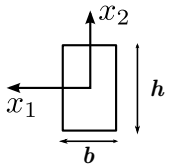
$$|\sigma_{11}| = \frac{\mathcal{M}}{J} |x_2| < \sigma_e \tag{7.32}$$

soit, en introduisant η valeur maximale de $|x_2|$:

$$\frac{\mathcal{M}}{J/\eta} < \sigma_e, \quad \eta = |x_2|_{max} \tag{7.33}$$

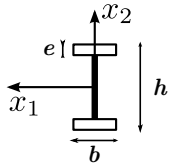
Ainsi, d'un point de vue géométrique, la rigidité d'une poutre est caractérisée par le moment d'inertie J, tandis que sa résistance est caractérisée par le rapport J/η :

— section rectangulaire



$$J = \frac{bh^3}{12}, \ \frac{J}{\eta} = \frac{bh^2}{6}, \ \frac{J}{S} = \frac{h^2}{12}, \ \frac{J}{\eta S} = \frac{h}{6}$$

— section en I



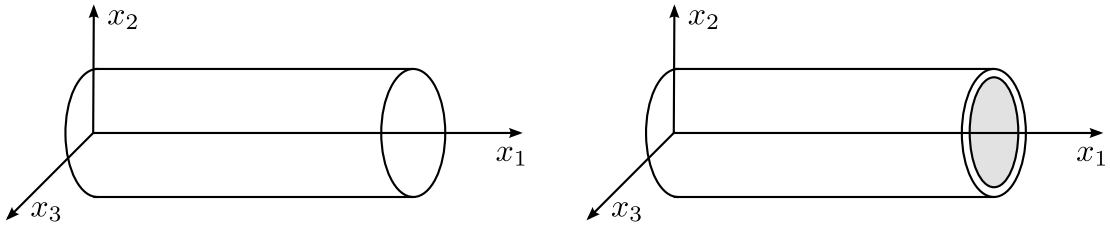
$$J \approx \frac{bh^2 l}{2}, \ \frac{J}{\eta} \approx bhl, \ \frac{J}{S} = \frac{h^2}{4}, \ \frac{J}{\eta S} = \frac{h}{2}$$

Ceci montre la supériorité, à poids égal, de la section en I sur la section rectangulaire et, plus généralement, des sections en profil mince sur les sections massives.

7.2 Torsion

7.2.1 Section circulaire ou annulaire

Avant d'aborder le cas général, nous allons envisager la configuration simple d'une section circulaire ou annulaire. On ohserve alors qu'en torsion, chaque section droite tourne, par rapport à la section $x_1 = O$, d'un angle proportionnel à la distance.



Nous postulons donc un champ de déplacements :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\alpha x_1 x_3, \quad u_3 = \alpha x_1 x_2 \tag{7.34}$$

On obtient alors pour le gradient du déplacement et pour le tenseur des déformations :

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha x_3 & 0 & -\alpha x_1 \\ \alpha x_2 & \alpha x_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2} x_3 & \frac{\alpha}{2} x_2 \\ -\frac{\alpha}{2} x_3 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{2} x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

La loi de comportement donne alors le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & -G\alpha x_2 & G\alpha x_2 \\ -G\alpha x_3 & 0 & 0 \\ G\alpha x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

Ce champ de contraintes vérifie directement :

— les équations d'équilibre ;

— les conditions aux limites sur la surface latérale $\vec{n} = \pm\,(x_1/r, x_2/r, 0)$.

Il n'est pas nécessaire de vérifier les équations de Beltrami puisque l'on est parti d'un champ de déplacements. Il ne reste donc plus qu'à écrire le torseur des efforts appliqués sur Σ_1. Puisque σ_{11} est nul, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ sont nuls. Par symétrie, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$, sont nuls, et il reste simplement :

$$\mathcal{M}_1 = \iint_\Sigma G\alpha \left(x_2^2 + x_3^2\right) \mathrm{d}S = G\alpha \iint_\Sigma r^2 \,\mathrm{d}S \tag{7.37}$$

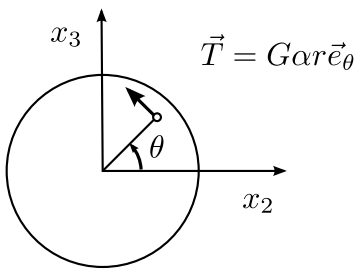
On a donc résolu le problème 4 avec :

$$\mathcal{M} = GI_0\alpha, \quad I_0 = \iint_\Sigma r^2 \,\mathrm{d}S \tag{7.38}$$

Le moment de torsion $\mathcal{M}$ crée un *angle unitaire de torsion* α et le module de rigidité GI_0 est à nouveau le produit d'une rigidité matérielle $G = \mu$ et d'une rigidité géométrique I_0 moment d'inertie polaire de la section.

Le vecteur contrainte associé à la section droite est :

$$\vec{T} = (0, -G\alpha x_3, G\alpha x_2) \tag{7.39}$$



On a uniquement une contrainte de cisaillement perpendiculaire au rayon et de module $G\alpha r$. En notant $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, les vecteurs de base associés aux coordonnées polaires r, θ dans le plan x_2, x_3 on a :

$$\vec{T} = G\alpha r \vec{e}_\theta \tag{7.40}$$

et dans le repère $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_1$ associé aux coordonnées cylindriques autour de x_1, le tenseur des contraintes a pour composantes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\alpha r \\ 0 & G\alpha r & 0 \end{bmatrix} \tag{7.41}$$

L'état de contraintes en chaque point est un état de cisaillement simple et le critère de limite d'élasticité s'écrit :

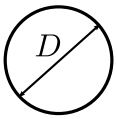
$$|\vec{T}| = G\alpha r < \tau_e \tag{7.42}$$

où τ_e est la limite élastique en cisaillement simple donnée par (5.64). En introduisant R rayon de la section, il vient, en combinant avec (7.38) :

$$\frac{\mathcal{M}}{I_0/\mathcal{R}} < \tau_e \tag{7.43}$$

La rigidité à la torsion d'un arbre circulaire ou annulaire est donc caractérisée par le moment d'inertie polaire de sa section I_0 et sa résistance par le rapport $I_0/\mathcal{R}$:

— section circulaire



$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32},\ \frac{I_0}{S} = \frac{D^2}{8},\ \frac{I_0}{\mathcal{R}} = \frac{\pi D^3}{16},\ \frac{I_0}{\mathcal{R}S} = \frac{D}{4}$$

— section en tube mince



$$I_0 = \frac{r\pi D^3 e}{4},\ \frac{I_0}{S} = \frac{D^2}{4},\ \frac{I_0}{\mathcal{R}} = \frac{\pi D^3 e}{2},\ \frac{I_0}{\mathcal{R}S} = \frac{D}{2}$$

Ces relations montrent la supériorité, à poids égal, des sections annulaires sur les sections massives. Dans le cas des tubes minces, on constate aussi que $r \sim D/2$ et que les composantes (7.41) du tenseur des contraintes dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_1)$ peuvent s'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\alpha\frac{D}{2} \\ 0 & G\alpha\frac{D}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.44}$$

soit, compte tenu de (7.38) et de la valeur de I_0 :

$$\underline{\underline{\sigma}} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mathcal{M}}{\pi D^2 e} \\ 0 & \frac{2\mathcal{M}}{\pi D^2 e} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.45}$$

ce qui, superposé à l'état de contraintes dû à une traction simple, redonne bien la forme (4.36) obtenue au paragraphe 4.1.4.

7.2.2 Théorie générale

Nous considérons maintenant le problème 4 dans le cas d'une section quelconque. Le paragraphe 7.1 a montré que la contrainte normale σ_{11} était déterminée par $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$. Puisqu'ici ils sont nuls, on prendra $\sigma_{11} = 0$. Les contraintes de cisaillement σ_{12} et σ_{13} par contre ne peuvent pas être nulles d'après (7.5a) et nous cherchons un champ de contraintes sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.46}$$

avec σ_{12} et σ_{13} fonctions de (x_1, x_2, x_3). Les équations d'équilibre donnent :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \tag{7.47}$$

et :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_2, x_3)\,; \qquad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}(x_2, x_3) \tag{7.48}$$

L'équation (7.47) montre alors — voir par exemple le Lemme 2 du paragraphe 3.3.1 — que la forme différentielle :

$$\mathrm{d}\Phi = \sigma_{12}\,\mathrm{d}x_3 - \sigma_{13}\,\mathrm{d}x_2 \tag{7.49}$$

est intégrable, c'est-à-dire il existe une *fonction des contraintes* $\Phi(x_2, x_3)$ telle que :

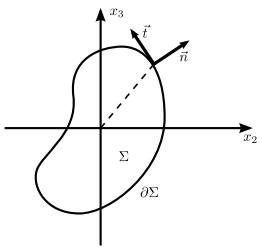
$$\sigma_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \tag{7.50}$$

Les équations de Beltrami donnent alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\Phi = \frac{\partial}{\partial x_3}\Delta\Phi = 0 \tag{7.51}$$

ce qui montre que $\Delta\Phi$ est constant ; nous noterons $-2G\alpha$ cette constante, α étant une constante d'intégration dont nous verrons plus loin la signification :

$$\Delta\Phi + 2G\alpha = 0 \tag{7.52}$$



La condition (7.1) sur la surface latérale s'écrit :

$$\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \tag{7.53}$$

En introduisant le vecteur unitaire tangent à $\partial\Sigma$:

$$\vec{t} = (\mathrm{d}x_2/\,\mathrm{d}s, \mathrm{d}x_3/\,\mathrm{d}s)$$

il vient :

$$n_2 = t_3 = \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s}, \quad n_3 = -t_2 = -\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} \tag{7.54}$$

de sorte que, compte tenu de (7.50), la condition (7.53) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} \tag{7.55}$$

La fonction $\Phi(x_2, x_3)$ reste constante lorsque l'on suit $\partial\Sigma$, donc sur chaque composante connexe de $\partial\Sigma$. Nous supposerons désormais que la section Σ est simplement connexe. On déduit alors de (7.55) que Φ est constant sur $\partial\Sigma$ et on peut toujours choisir cette constante nulle :

$$\Phi_{|\partial\Sigma} = 0 \tag{7.56}$$

La fonction de contrainte Φ est donc déterminée par (7.52) et (7.53), équations qui définissent le *problème de Dirichlet* qui admet une solution unique. Par le changement de fonction :

$$\Phi(x_2, x_3) = G\alpha\varphi(x_2, x_3) \tag{7.57}$$

ce problème se transforme en :

$$\begin{cases} \Delta\varphi + 2 = 0 \\ \varphi_{|\partial\Sigma} = 0 \end{cases} \tag{7.58}$$

et la fonction φ unique solution du problème (7.58), dépend seulement de la forme de la section Σ.

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante α, ce que nous allons faire en calculant les efforts exercés sur Σ_1. On sait déjà que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3 = 0$. Pour calculer les autres composantes, nous utiliserons la formule de Stokes :

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial P}{\partial x_3}\right) \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \oint_{\partial S} P\,\mathrm{d}x_2 + Q\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.59}$$

À partir de (7.4c) et (7.50), il vient :

$$\mathcal{R}_2 = \iint_\Sigma \sigma_{12}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \iint_\Sigma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = -\oint_{\partial\Sigma} \Phi\,\mathrm{d}x_2 = 0 \tag{7.60}$$

d'après la formule de Stokes (7.59) et (7.56). De la même manière, on a $\mathcal{R}_3 = 0$. À partir de (7.5a), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= -\iint_\Sigma \left(x_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \\ &= -\iint_\Sigma \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3\Phi) - 2\Phi\right] \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \\ &= 2\iint_\Sigma \Phi\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \cancel{\oint_{\partial\Sigma} x_3\Phi\,\mathrm{d}x_2 - x_2\Phi\,\mathrm{d}x_3} \\ &= 2G\alpha\iint_\Sigma \varphi\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \end{aligned} \tag{7.61}$$

Finalement, le champ de contraintes construit permet de résoudre le problème 4 avec :

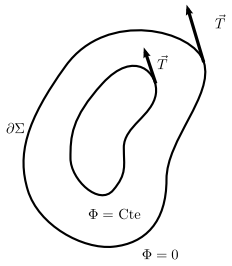
$$\alpha = \frac{\mathcal{M}}{GI}, \quad I = 2\iint_\Sigma \varphi\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.62}$$

La constante I est appelée *module de rigidité* de la section Σ, et, comme φ elle ne dépend que de la forme de Σ. En chaque point de la section, l'état de contraintes est un état de cisaillement simple caractérisé par le vecteur contrainte $\vec{T}$ associé à la section droite :

$$\vec{T} = (O, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \tag{7.63}$$

La condition (7.1) exprime que, sur la frontière $\partial\Sigma$, $\vec{T}$ est tangent à $\partial\Sigma$, soit $\vec{T}\cdot\vec{n} = 0$.

Les relations (7.9) montrent que les courbes $\Phi = \text{Cte}$ sont les enveloppes du champ de vecteurs $\vec{T}$.



L'état de contraintes étant un état de cisaillement simple, le critère de limite d'élasticité donne :

$$|\vec{T}| = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} < \tau_e \tag{7.64}$$

avec τ_e donné par (5.64). À partir de Φ ou φ, cette condition entraîne :

$$\sqrt{\Phi_{,3}^2 + \Phi_{,2}^2} = G\alpha\sqrt{\varphi_{,3}^2 + \varphi_{,2}^2} = G\alpha|\text{grad}\,\varphi| < \tau_e$$

soit finalement :

$$\frac{\mathcal{M}}{I/\rho} < \tau_e, \quad \rho = \left[\sup_{\Sigma}|\text{grad}\,\varphi|\right]^{-1} \tag{7.65}$$

où ρ est une longueur caractéristique de la section Σ. On peut par ailleurs montrer que la borne supérieure de $|\text{grad}\,\varphi|$ est nécessairement atteinte sur la frontière de Σ. Ainsi le problème général de la torsion est résolu, sitôt que l'on connaît la solution $\varphi(x_2, x_3)$ du problème (7.58).

7.2.3 Calcul du déplacehent

Pour terminer le calcul, il reste à déterminer le déplacement. À partir de (7.46), (7.50) et (7.57), le tenseur des déformations est donné par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix} 0 & \varphi_{,3} & -\varphi_{,2} \\ \varphi_{,3} & 0 & 0 \\ -\varphi_{,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.66}$$

et il est possible d'intégrer le champ de déplacements, soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = u_{1,1} = 0 \Rightarrow \quad & u_1 = u_1(x_2, x_3) \\ \varepsilon_{22} = u_{2,2} = 0 \Rightarrow \quad & u_2 = u_2(x_1, x_3) \\ \varepsilon_{33} = u_{3,3} = 0 \Rightarrow \quad & u_3 = u_3(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{7.67}$$

et :

$$2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{2,3} = -u_{3,2} = A(x_1)$$

puisque $u_{2,3} = u_{2,3}(x_1, x_3)$ et $u_{3,2} = u_{3,2}(x_1, x_2)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} u_2 &= A(x_1)x_3 + B(x_1) \\ u_3 &= -A(x_1)x_2 + C(x_1) \end{aligned} \tag{7.68}$$

et on peut interpréter $A(x_1)$ comme la rotation de la section droite d'abscisse x_1 :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1} = u_{1,2} + A'(x_1)x_3 + B'(x_1) = \alpha\varphi_{,3} \\ 2\varepsilon_{13} &= u_{1,3} + u_{3,1} = u_{1,3} - A'(x_1)x_2 + C'(x_1) = \alpha\varphi_{,2} \end{aligned} \tag{7.69}$$

Cependant, dans ces relations, seules les dérivées $A'(x_1)(= \mathrm{d}A/\,\mathrm{d}x_1)$, $B'(x_1)$ et $C'(x_1)$ dépendent de x_1 ; elles doivent donc être constantes :

$$A(x_1) = -ax_1 + d, \quad B(x_1) = bx_1 + e, \quad C(x_1) = cx_1 + f$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -ax_1x_3 + \mathrm{d}x_3 + bx_1 + e \\ u_3 &= ax_1x_2 \quad \underbrace{-\,\mathrm{d}x_3 + cx_1 + f}_{\text{Déplacement de solide rigide}} \end{aligned} \tag{7.70}$$

On voit sur (7.70) que les 5 constantes b, c, d, e et f correspondent au déplacement de solide rigide arbitraire, qui doit nécessairement s'introduire dans l'intégration. À un déplacement de solide près, on a donc :

$$u_2 = -ax_1x_3, \quad u_3 = ax_1x_2 \tag{7.71}$$

ce qui correspond, comme dans le cas de la section circulaire, à une rotation de chaque section d'un angle proportionnel à la distance à l'origine ; la constante a, rotation par unité de longueur, est donc *l'angle unitaire de torsion* introduit au paragraphe 7.1.1 pour la section circulaire. On peut maintenant calculer u_1 à partir de (7.69) :

$$u_{1,2} = \alpha\varphi_{,3} + ax_3, \quad u_{1,3} = -\alpha\varphi_{,2} - ax_2 \tag{7.72}$$

système qui sera intégrable si et seulement si $u_{1,23} = u_{1,32}$:

$$\alpha\Delta\varphi + 2a = 0$$

ce qui, d'après (7.58), donne finalement $a = \alpha$, et la constante α, introduite en (7.52) est l'angle unitaire de torsion. Le déplacement est finalement, à un déplacement de solide près :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha\psi(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\alpha x_1x_3 \\ u_3 &= \alpha x_1x_2 \end{aligned} \tag{7.73}$$

Ainsi, la rotation de chaque section s'accompagne d'un *gauchissement* que l'on peut observer expérimentalement. La fonction de gauchissement ψ est donnée par :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + x_3\right) \quad , \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x_3} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_2\right) \tag{7.74}$$

et ψ est la fonction harmonique conjuguée de la fonction harmonique $\varphi + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)$. Si on calcule sur $\partial\Sigma$ la dérivée normale de ψ, il vient, en utilisant (7.54) et (7.55) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}n} &= \frac{\partial\psi}{\partial x_2}n_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}n_3 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}\right) + x_3\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} + x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2\right)\right] \end{aligned}$$

quantité connue le long de $\partial\Sigma$. Ainsi la fonction ψ vérifie :

$$\begin{aligned} &\Delta\psi = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2\right)\right] \quad \text{sur } \partial\Sigma \end{aligned} \tag{7.75}$$

c'est un problème de Neumann qui admet une solution unique. Ainsi, pour résoudre le problème de torsion, on peut, soit calculer φ par le problème (7.58) et en déduire ensuite ψ par (7.74), soit calculer ψ par le problème (7.75) et en déduire ensuite φ par (7.74).

Finalement, si l'on compare les relations (7.62) et (7.65) du cas général, aux relations (7.38) et (7.43) relatives à la section circulaire, on constate que, dans le cas général également, la rigidité de la section est caractérisée par le module de rigidité I et sa résistance par le rapport I/η. Mais dans le cas général, a) il faut résoudre le problème (7.58) pour pouvolr calculer ces constantes (nous verrons cependant au chapitre 9 que l'on peut obtenir des estimations de I sans calculer φ), b) la torsion s'accompagne d'un gauchissement des sections. Si ce gauchissement est empêché, par exemple par des conditions aux limites d'encastrement, on rencontre le difficile problème de la torsion gênée (par opposition à la torsion libre).

Bien entendu, conformément à la démarche générale décrite au paragraphe 7.1.1, nous avons résolu un problème particulier correspondant au problème de la torsion, et le principe de Saint-Venant nous permet d'affirmer que loin des extrémités c'est la solution. Il peut être utile de fonnuler explicitement le problème régulier que nous avons résolu. Pour cela, il faut compléter les CL (7.1) par des CL sur les extrémités. On pourrait écrire des CL donnant sur les extrémités le dêplacement (u_1, u_2, u_3) connu par (7.73), ou bien donnant les efforts appliqués $\vec{T}$ connus par (7.63) et (7.50), mais la formulation la plus commode, que nous utiliserons au chapitre 9, fait intervenir des données mixtes

$$\begin{cases} x_1 = 0 : \sigma_{11} = 0, \quad u_2 = u_3 = 0 \\ x_1 = l : \sigma_{11} = 0, \quad u_2 = -\alpha l x_3, \quad u_3 = \alpha l x_2 \end{cases} \tag{7.76}$$

Ajoutées à (7.1), ces conditions aux limites définissent bien un problème régulier (paragraphe 6.1.1) et cette formulation présente l'avantage de ne pas faire intervenir les fonctions φ ou ψ *a priori* inconnues.

7.2.4 Sections particulières

Section circulaire

D'après la symétrie, les fonctions φ et ψ ne dépendent que de r. Il vient directement :

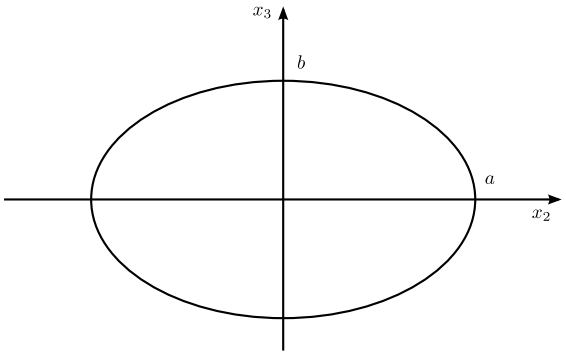
$$\varphi = \frac{1}{2}\left(a^2 - r^2\right), \quad \psi = 0, \quad r^2 = x_2^2 + x_3^2 \tag{7.77}$$

et on retrouve tous les résultats du paragraphe 7.1.1. En particulier, la fonction de gauchissement est nulle.

Section elliptique

La section Σ est limitée par l'ellipse d'équation :

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1 \tag{7.78}$$



On trouve alors pour φ et ψ :

$$\varphi = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2}\right) \tag{7.79}$$

$$\psi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_2 x_3 \tag{7.80}$$

Pour le module de rigidité à la torsion, on trouve :

$$I = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tag{7.81}$$

Les contraintes sont données par

$$\sigma_{12} = -\frac{\mathcal{M}}{I}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = -\frac{2\mathcal{M}}{\pi a b^3} x_3, \qquad \sigma_{13} = \frac{\mathcal{M}}{I}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{2\mathcal{M}}{\pi a^3 b} x_2 \tag{7.82}$$

et la contrainte de cisaillement maximale :

$$|\vec{T}|_{\max} = \sup \frac{2\mathcal{M}}{\pi a b}\sqrt{\frac{x_3^2}{b^4} + \frac{x_2^2}{a^4}} = \frac{2\mathcal{M}}{\pi a b^2} \tag{7.83}$$

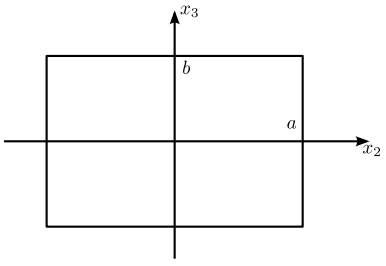
est atteinte à l'extrémité du petit axe $x_3 = b$, ce qui donne :

$$\rho = \frac{2a^2 b}{a^2 + b^2} \tag{7.84}$$

Section rectangulaire

On recherche la solution sous forme d'un développement en série de Fourier double :

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos\frac{(2m-1)\pi x_2}{2a} \cos\frac{(2n-1)\pi x_3}{2b} \tag{7.85}$$



qui vérifie automatiquement la condition (7.56). On dérive (7.85) terme à terme, ce qui permet d'obtenir le développement de $\Delta\varphi$ que l'on identifie avec le développement de la fonction constante -2 et on obtient les constantes A_{mn}.

On obtient des calculs plus simples en cherchant la solution sous la forme :

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \cos\frac{(2m-1)\pi x_2}{2a}\psi_m(x_3) \tag{7.86}$$

développement en série de Fourier simple (mais qui présente l'inconvénient de détruire la symétrie en x_2 et x_3). On calcule $\Delta\varphi$ par dérivation terme à terme, on identifie avec le développement de la constante -2, et on obtient pour ψ_m une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_m}{\mathrm{d}x_3^2} - \left(\frac{(2m-1)^2\pi^2}{2a}\right)^2 \psi_m(x_3) = (-1)^m \frac{8}{(2m-1)\pi}$$

qui donne ψ_m par intégration avec les conditions aux limites $\psi_m(\pm b) = 0$. On obtient finalement :

$$\varphi = \frac{32a^3}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)}\left\{1 - \frac{\cosh\frac{(2m-1)\pi x_3}{2a}}{\cosh\frac{(2m-1)b}{2a}}\right\}\cos\frac{(2m-1)\pi x_2}{2a} \tag{7.87}$$

qui permet de calculer la solution et en particulier le module de rigidité à la torsion I et la longueur ρ qui intervient dans (7.65). On trouve :

$$I = 16a^3bh_1\frac{b}{a} = 4Sa^2h_1\frac{b}{a}; \qquad \rho = 2ah\frac{b}{a} \tag{7.88}$$

la contrainte tangentielle maximale étant obtenue au milieu du grand côté $x_3 = \pm b$ si on suppose $a > b$. Les fonctions h_1 et h sont données par le tableau suivant :

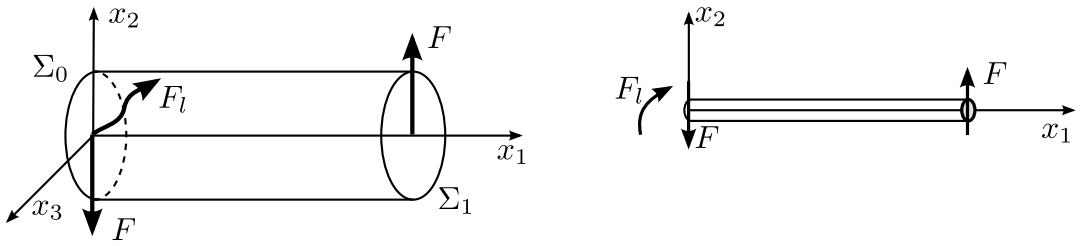
b/a	1	1,5	2	3	5	∞
h	0,675	0,848	0,930	0,985	0,999	1
h_1	0,141	0,196	0,229	0,263	0,291	1/3

Plus généralement, on sait résoudre explicitement le problème pour quelques sections particulières (triangle équilatéral, section circulaire entaillée d'un demi-cercle, etc.) Comme le problème se ramène à des calculs de fonctions harmoniques, on peut également utiliser les techniques de variable complexe (voir [15, 19]). Enfin, le problème (7.58) se prête bien au calcul numérique.

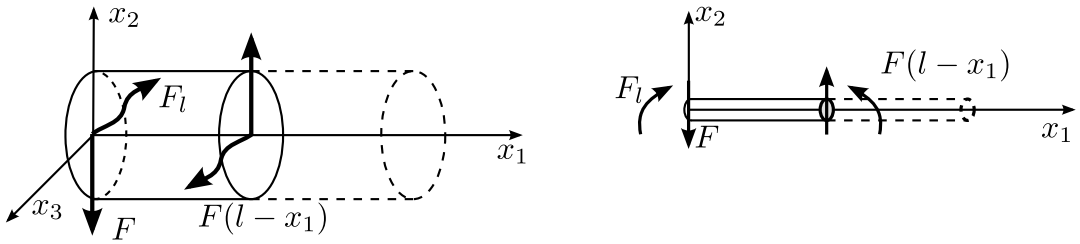
7.3 Flexion composée

7.3.1 Champ de contraintes

Il reste à résoudre le problème 2.



Considérons la section d'abscisse x_1 et considérons la poutre $[0, x_1] \times \Sigma$. Elle est en équilibre sous l'action du torseur $[\mathcal{T}_0]$ des efforts appliqués sur la section $x_1 = 0$ et du torseur $[\mathcal{T}(x_1)]$ des efforts de contact exercés sur la poutre $[O, x_1] \times \Sigma$ par la partie supprimée $[x_1, l] \times \Sigma$. Comme précédemment, nous représentons $[\mathcal{T}(x_1)]$ par sa résultante $\vec{\mathcal{R}}(x_1)$ et son moment $\vec{\mathcal{M}}(x_1)$ par rapport au centre $(x_1, 0, 0)$ de la section considérée.



L'équilibre de la poutre $[O, x_1] \times \Sigma$ donne alors :

$$\vec{\mathcal{R}} = F\vec{e}_2 \quad , \quad \vec{\mathcal{M}} = F(l - x_1)\vec{e}_3$$

de sorte que la répartition des contraintes dans la section x_1 doit être telle que :

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma x_1} \sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = 0 \\ &\iint_{\Sigma x_1} x_3\sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = 0 \\ -&\iint_{\Sigma x_1} x_2\sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = F(l - x_1) \end{aligned} \tag{7.89}$$

et :

$$\iint_{\Sigma x_1} \sigma_{12}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = F \tag{7.90a}$$

$$\iint_{\Sigma x_1} \sigma_{13}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = 0 \tag{7.90b}$$

$$\iint_{\Sigma x_1} (x_2\sigma_{13} - x_3\sigma_{12})\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = 0 \tag{7.90c}$$

En partant de (7.89), les résultats du paragraphe 7.1.2 nous suggèrent de prendre :

$$\sigma_{11} = -\frac{F\,(l - x_1)\,x_2}{J}, \quad J = J_2 \tag{7.91}$$

D'autre part, (7.90a) montre que σ_{12} ne peut pas être nul. Nous prenons donc dans un premier temps :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.92}$$

avec σ_{11} donné par (7.91). Les équations d'équilibre nous donnent alors :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} = 0$$

soit, compte-tenu de (7.91) :

$$\sigma_{12} = -\frac{F}{2J}(x_2^2 + f(x_3)) \tag{7.93}$$

Les équations de Beltrami sont toutes vérifées, sauf l'équation relative aux indices $1,2$ qui donne :

$$\sigma_{12,11} + \sigma_{12,22} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{11,12} = 0$$

$$-\frac{F}{2J}\left(f''(x_3) + 2\right) + \frac{1}{1+\nu}\frac{F}{J} = 0$$

$$f''(x_3) = -\frac{2\nu}{1+\nu}$$

$$f(x_3) = -\frac{\nu}{1+\nu}x_3^2 + ax_3 + b$$

$$\sigma_{12} = -\frac{F}{2J}\left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2 + ax_3 + b\right) \tag{7.94}$$

Par contre, puisque σ_{13} est nul, la condition aux limite sur la surface latérale, qui s'écrit encore sous la forme (7.53), ne peut pas être vérifiée. Nous superposons donc à l'état de contraintes obtenu jusqu'à présent, un état de contraintes $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ avec $\tilde{\sigma}_{13}$ non nul :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12}^0 & 0 \\ \sigma_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_{13} \\ \tilde{\sigma}_{12} & 0 & 0 \\ \tilde{\sigma}_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.95}$$

$$\sigma_{11} = -\frac{F(l-x_1)x_2}{J}, \quad \sigma_{12}^0 = -\frac{F}{2J}\left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right) \tag{7.96}$$

Par construction, le champ $\underline{\underline{\sigma}}^0$ vérifie les équations d'équilibre et les équations de Beltrami ; le champ $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ devra donc les vérifier également. On peut alors reprendre l'analyse du paragraphe 7.2.2 et obtenir :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{12} &= \frac{F}{J}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_3} \\ \tilde{\sigma}_{13} &= -\frac{F}{J}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_2} \\ \Delta\tilde{\varphi} &= \text{Cte} = -2C \end{aligned} \tag{7.97}$$

Nous faisons le changement de fonction :

$$\tilde{\varphi}(x_2, x_3) = C\varphi(x_2, x_3) + \chi(x_2, x_3) \tag{7.98}$$

où φ est solution du problème (7.58), de sorte que :

$$\Delta\chi = 0 \tag{7.99}$$

Comme au paragraphe 7.2.2, la condition aux limites sur la surface latérale peut s'écrire :

$$\sigma_{12}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s} - \sigma_{13}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} = 0$$

$$-\frac{F}{2J}\left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right)\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s} + \frac{F}{J}\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}s} + C\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right) = 0$$

Le dernier terme s'annule d'après (7.58) et on a :

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\left[x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right]\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s} \tag{7.100}$$

Sur $\partial\Sigma$, x_2 et x_3 sont fonctions de s et par intégration de (7.100) sur $\partial\Sigma$ on peut obtenir la valeur de χ sur $\partial\Sigma$ à une constante près :

$$\chi(s) = \chi_0(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{2}\left[x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right]\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \tag{7.101}$$

Pour s'assurer que (7.101) définit sans ambiguité la fonction χ_0 sur $\partial\Sigma$, il faut vérifier que :

$$\oint \frac{1}{2}\left[x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right]\mathrm{d}x_3 = 0 \tag{7.102}$$

Ceci résulte directement de la formule de Stokes et de (7.15).

Ainsi, la fonction χ est déterminée par :

$$\begin{aligned} &\Delta\chi = 0 \\ &\chi|_{\partial\Sigma} = \chi_0 \quad \text{définie par (7.101)} \end{aligned} \tag{7.103}$$

C'est un problème de Dirichlet qui admet une solution unique dépendant uniquement de la section Σ.

7.3.2 Calcul des efforts appliqués

Pour terminer la détermination du champ de contraintes, en particulier pour déterminer la constante C, il convient de vérifier les conditions aux limites sur l'extrémité $x_1 = l$ c'est-à-dire de vérifier les conditions (7.89), (7.90a), (7.90b) et (7.90c) pour x_1. Par construction de σ_{11} les relations (7.89) sont vérifiées pour tout x_1. À partir des calculs du paragraphe précédent, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{F}{J_2}\left\{-\frac{1}{2}\left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right) + \frac{\partial\chi}{\partial x_3} + C\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right\} \\ \sigma_{13} &= -\frac{F}{J_2}\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x_2} + C\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\} \end{aligned} \tag{7.104}$$

et σ_{12} et σ_{13} dépendent uniquement de x_2 et x_3.

Pour (7.90a), nous partons de (7.104) et :

$$\mathcal{R}_2 = -\frac{F}{2J_2}\iint_\Sigma \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \frac{F}{J_2}\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_3} + C\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.105}$$

Compte-tenu de la définition (7.18) de J_2 et J_3 on obtient pour le premier terme :

$$-\frac{F}{2}\left[1 - \frac{\nu}{1+\nu}\frac{J_3}{J_2}\right] \tag{7.106}$$

Pour le second terme, on utilise la formule de Stokes :

$$\frac{F}{J_2}\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_3} + C\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = -\frac{F}{J_2}\oint_{\partial\Sigma}(\chi + C\cancel{\varphi})\,\mathrm{d}x_2$$

Le terme en φ diparaît par (7.58) et on intègre le terme en χ par parties. Compte-tenu de (7.100), on obtient :

$$-\frac{F}{J_2}\oint_{\partial\Sigma}\chi\,\mathrm{d}x_2 = \frac{F}{J_2}\oint_{\partial\Sigma}x_2\,\mathrm{d}\chi = \frac{F}{2J_2}\oint_{\partial\Sigma}x_2\left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right)\mathrm{d}x_3$$

On utilise à nouveau la formule de Stokes :

$$\frac{F}{2J_2}x_2\left(x_2^2-\frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right)\mathrm{d}x_3=\frac{F}{2J_2}\iint_\Sigma\frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_2\left(x_2^2-\frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right)\right]\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$
$$=\frac{F}{2J_2}\iint_\Sigma\left(3x_2^2-\frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$

et compte-tenu de (7.18), le deuxième terme de (7.105) donne :

$$\frac{F}{2}\left[3-\frac{\nu}{1+\nu}\frac{J_3}{J_2}\right] \tag{7.107}$$

La combinaison de (7.105) et (7.107) donne alors $\mathcal{R}=F$, et permet de vérifier (7.90a). La vérification de (7.90b) est analogue :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_3&=\iint_\Sigma\sigma_{13}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3=-\frac{F}{J_2}\iint_\Sigma\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}+C\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\\&=-\frac{F}{J_2}\oint_{\partial\Sigma}(\chi+C\cancel{\varphi})\,\mathrm{d}x_3=\frac{F}{J_2}\oint x_3\,\mathrm{d}\chi\\&=\frac{F}{2J_2}\oint_{\partial\Sigma}x_3\left(x_2^2-\frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right)\mathrm{d}x_3=\frac{F}{J_2}\iint_\Sigma x_3x_2\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3=0\end{aligned} \tag{7.108}$$

d'après (7.17). Il reste à écrire (7.90c). Le calcul est mené de manière similaire :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1&=\iint_\Sigma(x_2\sigma_{13}-x_3\sigma_{12})\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\\&=\frac{F}{J_2}\left\{\frac{1}{2}\iint_\Sigma\left(x_2^2x_3-\frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3-\iint_\Sigma\left(x_2\frac{\partial\chi}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial\chi}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\right\}\end{aligned}$$

D'après le calcul qui a donné (7.61), il vient :

$$-\iint_\Sigma\left(x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3=2\iint_\Sigma\varphi\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3=I$$

de sorte que nous pouvons écrire :

$$\mathcal{M}_1=\frac{F}{J_2}(H-CI) \tag{7.109}$$

où la constante H, donnée par :

$$H=\frac{1}{2}\iint_\Sigma\left[x_2^2x_3-\frac{\nu}{1+\nu}x_3^3-2x_2\frac{\partial\chi}{\partial x_2}-2x_3\frac{\partial\chi}{\partial x_3}\right]\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{7.110}$$

dépend uniquement de la section Σ. La condition (7.90c) donne alors la valeur de la constante :

$$C=\frac{H}{I} \tag{7.111}$$

et le champ de contraintes est parfaitement défini. Il est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}=\frac{F}{J_2}\begin{bmatrix}-(l-x_1)x_2 & \alpha(x_2,x_3) & \beta(x_2,x_3)\\ \alpha(x_2,x_3) & 0 & 0\\ \beta(x_2,x_3) & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{7.112}$$

où α et β sont deux fonctions homogènes au carré d'une longueur qui dépendent uniquement de la section Σ.

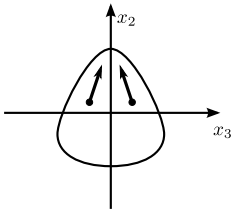
La solution du problème de la flexion composée peut donc, comme pour la torsion, s'obtenir par résolution de problèmes de Dirichlet, mais les calculs sont beaucoup plus laborieux. En particulier, on peut écrire le critère de limite d'élasticité et calculer le déplacement, mais on ne peut pas en tirer une interprétation simple comme pour les autres problèmes. En particulier, l'hypothèse de Navier-Bernoulli (voir paragraphe 7.1.3) n'est plus vérifiée, les sections droites ne restent plus planes : en torsion comme en flexion composée, l'apparition de contraintes de cisaillement entraîne un gauchissement de la section.

7.3.3 Section circulaire

Si la section est symétrique par rapport à l'axe x_2 alors, en prenant l'origine des abscisses curvilignes sur l'axe x_2, on voit que la fonction χ_0 définie sur $\partial\chi$ par (7.101) prend des valeurs opposées en deux points symétriques par rapport à l'axe des x_2. Il en résulte que la fonction χ définie par le problème (7.103) est impaire en x_3 :

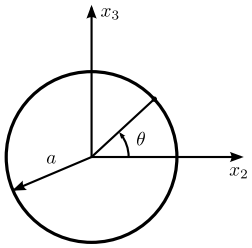
$$\chi_2(x_2, -x_3) = -\chi(x_2, x_3) \tag{7.113}$$

La quantité intégrée dans (7.110) est donc impaire en x_3, H est nul, et la constante C est nulle. On obtient pour le vecteur contrainte tangentielle sur la section droite $(0, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ la symétrie par rapport à l'axe x_2 :



$$\begin{aligned} \sigma_{12}(x_2, -x_3) &= \sigma_{12}(x_2, x_3) \\ \sigma_{13}(x_2, -x_3) &= -\sigma_{13}(x_2, x_3) \end{aligned} \tag{7.114}$$

À titre d'exemple, nous allons calculer la fonction χ et la répartition de contraintes pour une section Σ circulaire, de rayon a. Pour calculer χ_0 on écrit (7.100) :



$$\begin{aligned} \mathrm{d}\chi &= \frac{1}{2}\left[x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right]\mathrm{d}x_3 \\ &= \frac{1}{2}\left[(a^2 - x_3^2) - \frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\right]\mathrm{d}x_3 \\ &= \frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{1+2\nu}{1+\nu}x_3^2\right]\mathrm{d}x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{1}{2}\left[a^2 x_3 - \frac{1+2\nu}{3(1+\nu)}x_3^3\right] \\ \chi_0 &= \frac{a^3}{2}\left[\sin\theta - \frac{1+2\nu}{3(1+\nu)}\sin^3\theta\right] \end{aligned} \tag{7.115}$$

Pour calculer 1a fonction $\chi(x_2, x_3)$ nous devons trouver la fonction χ harmonique qui prend la valeur (7.115) pour $r = a$. Pour cela on remarque que les fonctions

$$r^n \sin n\theta = \Im\left\{(x_2 + \imath x_3)^n\right\} \tag{7.116}$$

sont harmoniques pour tout entier n. On écrit alors :

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \tag{7.117}$$

et on peut réécrire (7.115) sous la forme :

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{a^3}{2}\left[\sin\theta - \frac{1+2\nu}{12(1+\nu)}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta\right)\right] \\ &= \frac{a^3}{2}\left[\frac{1+2\nu}{12(1+\nu)}\sin 3\theta + \frac{3+2\nu}{4(1+\nu)}\sin\theta\right] \end{aligned} \tag{7.118}$$

On utilise à nouveau (7.117) pour écrire :

$$\chi = \frac{1}{2}\left[\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}r^3\sin\theta - \frac{1+2\nu}{3(1+\nu)}r^3\sin^3\theta + \frac{3+2\nu}{4(1+\nu)}a^2 r\sin\theta\right]$$

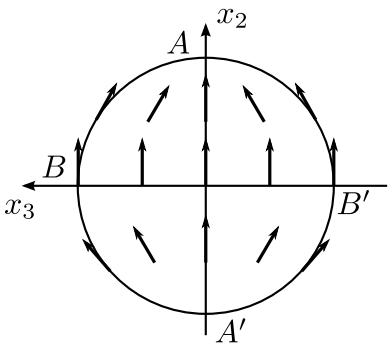
$$\chi = \frac{1}{8(1+\nu)}\left\{(1+2\nu)\left(x_2^2 x_3 - \frac{x_3^2}{3}\right) + (3+2\nu)a^2 x_3\right\} \tag{7.119}$$

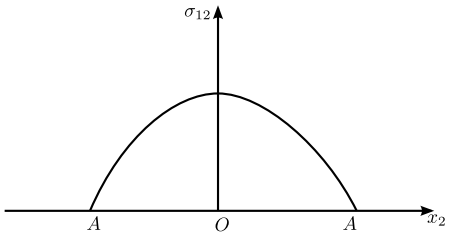
ce qui donne pour les contraintes :

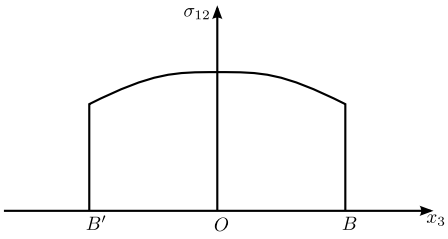
$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{F}{8J_2}\frac{3+2\nu}{1+\nu}\left[a^2 - x_2^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu}x_3^2\right]\\ \sigma_{13} &= \frac{F}{4J_2}\frac{1+2\nu}{1+\nu}x_2 x_3\end{aligned} \tag{7.120}$$

répartition assez complexe des contraintes de cisaillement.

En particulier, on a σ_{13} nul sur l'axe des x_2 et sur l'axe des x_3. La répartition de σ_{12} sur les deux diamètres AA' et BB' est représentée sur les diagrammes suivants







en B $\quad \sigma_{12} = \dfrac{F}{S}\dfrac{1+2\nu}{1+\nu} = 1,23\dfrac{F}{S}$

en O $\quad \sigma_{12} = \dfrac{F}{S}\dfrac{3+2\nu}{2(1+\nu)} = \underbrace{1,38\dfrac{F}{S}}_{\text{pour } \nu=0,3}$

Chapitre 8

Problèmes plans en élasticité

8.1 Élasticité plane

8.1.1 Déformations planes

Dans de nombreux problèmes, on peut supposer les déformations planes avec le champ de déplacement suivant :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0 \tag{8.1}$$

On en déduit le tenseur des déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \tag{8.2}$$

et, par la loi de comportement, le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{11} &= \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ E\varepsilon_{22} &= \sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \qquad (8.4a) \\ E\varepsilon_{12} &= (1+\nu)\sigma_{12} \\ E\varepsilon_{33} &= 0 = \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \qquad (8.4b) \end{aligned}$$

L'équation (8.4b) donne alors :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{8.5}$$

et en reportant dans (8.4a), il vient :

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{11} &= (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22} \\ E\varepsilon_{22} &= (1-\nu^2)\sigma_{22} - \nu(1+\nu)\sigma_{11} \qquad (8.6) \\ E\varepsilon_{12} &= (1+\nu)\sigma_{12} \end{aligned}$$

Pour résoudre un problème en déformations planes, il faut trouver les déplacements u_1, u_2 et les contraintes σ_{11}, σ_{22}, et σ_{12} en fonction des coordonnées (x_1, x_2) dans le plan. Si nous travaillons sur les contraintes, c'est-à-dire en utilisant l'approche du paragraphe 6.1.4,

il faudra vérifier les équations d'équilibre et les équations de Beltrami. Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ &\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \end{aligned} \tag{8.7}$$

en supposant nulles les forces de volume (sinon, l'analyse qui suit peut s'étendre, avec des résultats plus compliqués). Ces équations expriment que les formes :

$$\sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2 - \sigma_{12}\,\mathrm{d}x_1, \quad \sigma_{22}\,\mathrm{d}x_1 - \sigma_{12}\,\mathrm{d}x_2$$

sont des différentielles totales. Il existe donc deux fonctions $\varphi x_1, x_2$ et $\psi(x_1, x_2)$ telles que

$$\sigma_{11} = \varphi_{,2}, \quad \sigma_{12} = -\psi_{,2} = -\varphi_{,1}, \quad \sigma_{22} = \psi_{,1}$$

En comparant les deux expressions de σ_{12}, on voit que la forme :

$$\psi\,\mathrm{d}x_1 + \varphi\,\mathrm{d}x_2$$

est une différentielle totale, il existe donc une fonction $\chi(x_1, x_2)$ telle que :

$$\varphi = \chi_{,2}, \quad \psi = \chi_{,1}$$

La fonction $\chi(x_1, x_2)$ est appelée *fonction d'Airy* ou *fonction de contraintes* du problème. Elle permet de calculer les contraintes par :

$$\sigma_{11} = \chi_{,22}, \quad \sigma_{12} = \chi_{,12}, \quad \sigma_{22} = \chi_{,11} \tag{8.8}$$

les équations de l'équilibre étant alors automatiquement vérifiées. En remarquant que, d'après (8.5) et (8.8) :

$$\sigma_{kk} = (1+\nu)(\sigma)11 + \sigma_{22} = (1+\nu)\Delta\chi \tag{8.9}$$

les équations de Beltrami (6.31) donnent :

$$\begin{aligned} i,j = 1,1 : &\quad (1+\nu)\Delta\chi_{,22} + (1+\nu)\Delta\chi_{,11} = 0 \\ 2,2 : &\quad (1+\nu)\Delta\chi_{,11} + (1+\nu)\Delta\chi_{,22} = 0 \\ 1,2 : &\quad \cancel{-(1+\nu)\Delta\chi_{,12}} + \cancel{(1+\nu)\Delta\chi_{,12}} = 0 \\ 3,3 : &\quad \nu(1+\nu)\Delta\Delta\chi = 0 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Toutes ces équations seront vérifiées si et seulement si la fonction χ est biharmonique :

$$\Delta\Delta\chi = \chi_{,1111} + 2\chi_{,1122} + \chi_{,2222} = 0 \tag{8.11}$$

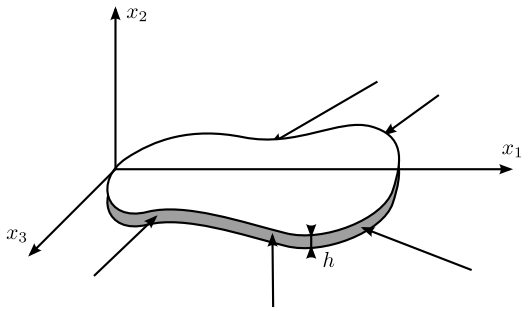
Ainsi, pour résoudre un problème en déformations planes, il faut trouver une fonction de contraintes χ biharmonique vérifiant les conditions aux limites. On en tire alors les contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} par (8.8), σ_{33} par (8.5), les déformations par (8.6) et les déplacements par intégration du système :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = u_{11} = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\chi_{,22} - \nu\chi_{,11}] \\ &\varepsilon_{22} = u_{22} = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\chi_{,11} - \nu\chi_{,22}] \\ &2\varepsilon_{12} = u_{12} + u_{21} = \frac{2(1+\nu)}{E}\chi_{,12} \end{aligned} \tag{8.12}$$

système qui est intégrable puisque les équations de Beltrami sont vérifiées.

8.1.2 Contraintes planes

L'hypothèse des déformations planes convient dans le cadre d'une pièce suffisamment longue pour laquelle il est possible de négliger la déformation longitudinale.



Pour une plaque mince, chargée dans son plan, la condition aux limites pour $x_3 = \pm h/2$ donne :

$$x3 = \pm\frac{h}{2} : \qquad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \tag{8.13}$$

et on recherche donc un état de contraintes planes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

Le tenseur des déformations est donné par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

avec les relations :

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{11} &= \sigma_{11} - \nu\sigma_{22} \\ E\varepsilon_{22} &= \sigma_{22} - \nu\sigma_{11} \\ E\varepsilon_{33} &= -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ E\varepsilon_{12} &= (1+\nu)\sigma_{12} \end{aligned} \tag{8.16}$$

Les équations d'équilibre se traitent comme en déformations planes et conduisent à (8.8). On a alors :

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta\chi \tag{8.17}$$

et les équations de Beltrami entraînent :

$$\begin{aligned} i, j = 1, 1 \quad & (1+\nu)\Delta\chi_{,22} + \Delta\chi_{,11} = 0 \\ i, j = 2, 2 \quad & (1+\nu)\Delta\chi_{,11} + \Delta\chi_{,22} = 0 \\ i, j = 1, 2 \quad & -(1+\nu)\Delta\chi_{,12} + \Delta\chi_{,12} = 0 \end{aligned} \tag{8.18}$$

équations qui ne pourront être vérifiées que si $\Delta\chi$ est fonction linéaire des coordonnées, ce qui est bien trop restrictif pour permettre de résoudre des problèmes réels. Nous oublions donc provisoirement les équations de Beltrami, et nous allons chercher à calculer les déplacements à partir de (8.16) :

$$E\varepsilon_{11} = \chi_{,22} - \nu\chi_{,11} = (1+\nu)\chi_{,22} - \nu\Delta\chi$$

et finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} = u_{1,1} &= \frac{1+\nu}{E}\left[\chi_{,22} - \frac{\nu}{1+\nu}\Delta\chi\right] \\
\varepsilon_{22} = u_{2,2} &= \frac{1+\nu}{E}\left[\chi_{,11} - \frac{\nu}{1+\nu}\Delta\chi\right] \\
2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} &= -\frac{2(1+\nu)}{E}\chi_{,12}
\end{aligned} \tag{8.19}$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} = -\frac{\nu}{E}\Delta\chi \quad , \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \tag{8.20}$$

Le système (8.19) est formellement identique au système (8.19) en remplaçant ν par $\nu/(1+\nu)$. Il permettra donc de calculer $u_1(x_1, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2)$ si et seulement si la fonction χ est biharmonique. Il reste à intégrer les équations (8.20) pour calculer u_3 :

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{E} \quad \Rightarrow \quad u_3 = -\frac{\nu}{E}\Delta\chi(x_1, x_2)x_3 + a(x_1, x_2) \tag{8.21}$$

avec :

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{13} = u_{3,1} + u_{1,3} &= -\frac{\nu}{E}\Delta\chi_{,1}x_3 + a_{,1} = 0 \\
2\varepsilon_{23} = u_{3,2} + u_{2,3} &= -\frac{\nu}{E}\Delta\chi_{,2}x_3 + a_{,2} = 0
\end{aligned} \tag{8.22}$$

équations qui ne pourront jamais être vérifiées puisque a et χ ne dépendent que de x_1 et x_2. Ainsi, si χ est biharmonique, on ne peut pas calculer les déplacements ; c'est tout à fait normal, puisque les équations de Beltrami (8.18) donnent :

$$\Delta\chi(,11) = \Delta\chi(,22) = \Delta\chi(,12) = 0 \tag{8.23}$$

conditions que nous avons volontairement laissées de côté. Cependant, pour une plaque mince, x_3 est petit, et en première approximation, (8.22) donne $a_{,1} = a_{,2} = 0$, $a =$ cste et la solution ainsi construite est une approximation satisfaisante de la réalité : c'est l'approximation *contraintes planes*.

Ainsi, en déformations planes comme en contraintes planes, la solution est donnée par une fonction de contraintes $\chi(x_1, x_2)$ biharmonique, donnant les contraintes par (8.18) et les déplacements $u_1(x_1, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2)$ par intégration du système :

$$\begin{aligned}
u_{1,1} &= \frac{1+\nu}{E}\{\chi_{,22} + r\Delta\chi\} \\
u_{2,2} &= \frac{1+\nu}{E}\{\chi_{,11} + r\Delta\chi\} \qquad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} r = \nu \text{ en déformations planes} \\ r = \nu/(1+\nu) \text{ en contraintes planes} \end{vmatrix} \\
u_{1,2} + u_{2,1} &= -\frac{2(1+\nu)}{E}\chi_{,12}
\end{aligned} \tag{8.24}$$

De plus, en déformations planes, la contrainte axiale σ_{33} est donnée par (8.5), tandis qu'en contraintes planes, la variation d'épaisseur de la plaque mince est donnée par (8.21) :

$$u_3 = -\frac{\nu}{E}\Delta\chi \tag{8.25}$$

8.1.3 Utilisation de la variable complexe

Introduisons la variable complexe :

$$z = x_1 + \imath x_2 \qquad \bar{z} = x_1 - \imath x_2 \tag{8.26}$$

Théorème 8.1 — Théorème de la représentation
Toute fonction réelle harmonique peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(x_1, x_2) = \Re\left[F(z)\right] \tag{8.27}$$

Toute fonction réelle biharmonique peut s'écrire sous la forme :

$$\chi(x_1, x_2) = \Re\left[\bar{z}G(z) + K(z)\right] \tag{8.28}$$

avec F, G et K, fonctions holomorphes.

Démonstration. La première représentation est classique : on sait que les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont deux fonctions harmoniques conjuguées, c'est-à-dire reliées par les conditions de Cauchy :

$$\begin{aligned} &\varphi(z) = P(x_1, x_2) + iQ(x_1, x_2) \\ &P_{,1} = Q_{,2}, \quad P_{,2} = Q_{,1} \end{aligned} \tag{8.29}$$

La seconde représentation peut s'obtenir à partir de la précédente par deux méthodes.

1re méthode À partir de (8.26), on voit que toute fonction de (x_1, x_2) peut être considérée comme fonction de $(z, \bar{z})$. On obtient alors facilement :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial \bar{z}}$$

de sorte que si φ est biharmonique

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{\partial^4\varphi}{\partial^2 z \partial^2 \bar{z}} = 0$$

on obtient $\varphi = \bar{z}F_1(z) + G_1(z) + zF_2(\bar{z}) + G_2(\bar{z})$ et en écrivant que φ est réelle, on obtient (8.28).

2e méthode Si χ est biharmonique, la fonction $p = \Delta\chi$ est harmonique et on peut écrire :

$$p = \Re\left[g(z)\right]$$

Nous introduisons la fonction :

$$G(z) = \frac{1}{4}\int g(z)\,\mathrm{d}z = P + \imath Q$$

avec $p = 4P_{,1} = 4Q_{,2}$. On obtient alors :

$$\Delta(\chi - Px_1 + Qx_2) = \Delta\chi - 2P_{,1} - 2Q_{,2} = \Delta\chi - p = 0$$

et la fonction $\chi - Px_1 + Qx_2$, est harmonique, d'où :

$$\chi = Px_1 + Qx_2 + \Re\left[K(z)\right] = \Re\left[\bar{z}G(z) + K(z)\right]$$

□

L'application de ce théorème montre que la fonction de contrainte d'un problème d'élasticité plane est déterminée par deux fonctions holomorphes G et K. On pose :

$$\begin{aligned} G &= P + iQ \\ K &= R + iS \\ \chi &= Px_1 + Qx_2 + R \end{aligned} \tag{8.30}$$

et les relations (8.8) donnent :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= P_{,22}x_1 + Q_{,22}x_2 + 2Q_{,2} + R_{,22} \\ \sigma_{22} &= P_{,11}x_1 + Q_{,11}x_2 + 2P_{,1} + R_{,11} \\ \sigma_{12} &= Q_{,11}x_1 - P_{,11}x_2 + S_{,11} \end{aligned} \tag{8.31}$$

En regroupant et en utilisant les relations de Cauchy (8.29), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\Re\left[G'(z)\right] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2\left[\bar{z}G''(z) + K''(z)\right] \end{aligned} \tag{8.32}$$

L'intégration de (8.24) donne également :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{E}\{(3-4r)P - P_{,1}x_1 - Q_{,1}x_2 - R_{,1} + Cx_2 + \alpha\} \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{E}\{(3-4r)Q - Q_{,1}x_1 - P_{,1}x_2 - S_{,1} + Cx_1 + \beta\} \end{aligned} \tag{8.33}$$

ou sous forme complexe :

$$\frac{E}{1+\nu}(u_1 + iu_2) = (3-4r)G(z) - z\overline{G'(z)} - \overline{K'(z)} - iCz + \alpha + i\beta \tag{8.34}$$

les trois derniers termes représentant le mouvement de solide. Ces représentations sont à la base de la théorie de l'élasticité plane qui permet de pousser très loin les calculs (voir [19]). Nous présenterons simplement quelques exemples.

8.2 Exemples

8.2.1 Problème de Saint-Venant

Une classe de solutions s'obtient en prenant pour χ un polynôme homogène de degré n, ou, ce qui revient au même :

$$G(z) = Az^{n-1}, \quad K(z) = Bz^n \tag{8.35}$$

On obtient ainsi, pour tout entier n, une solution dépendant de quatre constantes.

— $n = 2$: Un polynôme du second degré est automatiquement biharmonique, et conduit à un état de contraintes constant

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2}\left\{\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2\right\} \\ \sigma_{11} = \gamma \quad \sigma_{22} &= \alpha \quad \sigma_{12} = \beta \end{aligned} \tag{8.36}$$

— $n = 3$: Un polynôme du 3ème degré est aussi automatiquement biharmonique, et conduit à un état de contraintes linéaire :

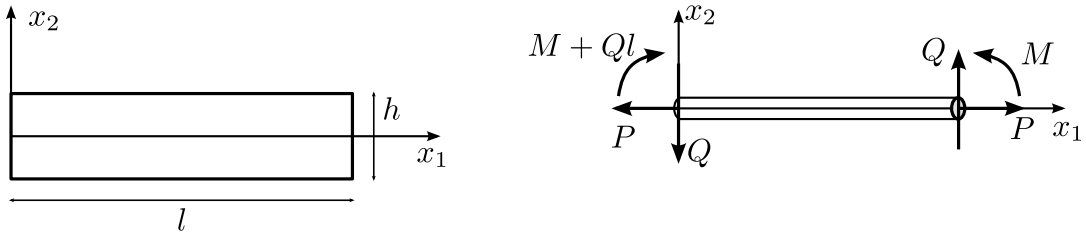
$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{6}\left\{ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3\right\} \\ \sigma_{11} = cx_1 + dx_2 \quad \sigma_{22} &= ax_1 + bx_2 \quad \sigma_{12} = -(bx_1 + cx_2) \end{aligned} \tag{8.37}$$

— $n = 4$: Pour un polynôme du quatrième degré, on a :

$$\begin{aligned}
\chi &= \frac{1}{6}\left\{Ax_1^4 + 2Bx_1^3x_2 + 3(A+D)x_1^2x_2^2 + 2Cx_1x_2^3 + Dx_2^4\right\} \\
\sigma_{11} &= -(A+D)x_1^2 + 2Cx_1x_2 + 2Dx_2^2 \\
\sigma_{22} &= 2Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 - (A+D)x_2^2 \\
\sigma_{12} &= -Bx_1^2 + 2(A+D)x_1x_2 - Cx_2^2
\end{aligned} \tag{8.38}$$

et ainsi de suite.

À titre d'application, montrons qu'une superposition de solutions de ce type permet de résoudre le problème de Saint-Venant en contraintes ou déformations planes.



Le matériau occupe le rectangle $[0, l] \times [-h/2, h/2]$; la surface latérale $x_2 = \pm h/2$ est libre de contrainte, et les extrémités $x_1 = O$ et $x = l$ sont soumises à deux torseurs plans en équilibre (voir paragraphe 7.1.1). Les conditions aux limites sont donc, sur la surface latérale :

$$x_2 = \pm h/2 \qquad \sigma_{12} = \sigma_{12} = 0 \tag{8.39}$$

et sur l'extrémité $x_1 = l$:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2 = P, \quad \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{12}\,\mathrm{d}x_2 = Q, \quad -\int_{-h/2}^{+h/2} x_2\sigma_{11}\,\mathrm{d}x_2 = M \tag{8.40}$$

Bien entendu, comme nous l'avons discuté au paragraphe 7.1.1, ce problème admet plusieurs solutions, et nous allons chercher s'il en existe une correspondant à une fonction de contrainte $\chi(x_1, x_2)$ polynôme non homogène du 4ème degré, c'est-à-dire superposition de (8.36), (8.37) et (8.38). La condition aux limites (8.39) donne :

$$\begin{aligned}
\alpha + ax_1 \pm b\frac{h}{2} + 2Ax_1^2 \pm 2B\frac{h}{2}x_1 - (A+D)\frac{h^2}{4} &= 0 \\
\beta + bx_1 \pm c\frac{h}{2} + Bx_1^2 \pm (A+D)\frac{h}{2}x_1 + C\frac{h^2}{4} &= 0
\end{aligned} \tag{8.41}$$

relations qui doivent être vérifiées pour tout x_1. Il vient :

$$\begin{aligned}
A = B = 0, \quad a = b = 0, \quad B = A + D = 0, \quad b = c = 0 \\
\alpha = (A+D)\frac{h^2}{4} = 0, \quad \beta + C\frac{h^2}{4} = 0
\end{aligned} \tag{8.42}$$

et il reste finalement :

$$\chi = \frac{C}{3}x_1x_2^3 + \frac{d}{6}x_2^3 + \frac{\gamma}{2}x_2^2 - C\frac{h^2}{4}x_1x_2 \tag{8.43}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2Cx_1x_2 + dx_2 + \gamma \\
\sigma_{12} &= C(\frac{h^2}{4} - x_2^2) \\
\sigma_{22} &= 0
\end{aligned} \tag{8.44}$$

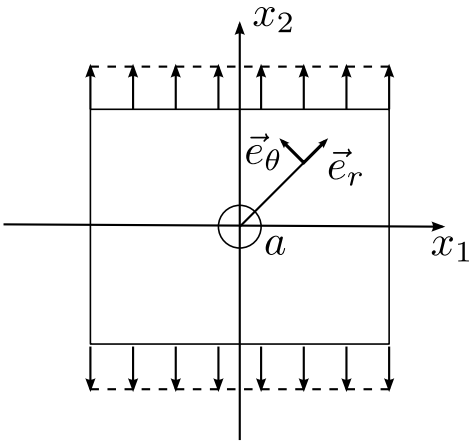
Les trois conditions (8.40) permettent alors de déterminer les constantes C, d et γ en fonction de P, Q et M , c'est-à-dire des efforts appliqués :

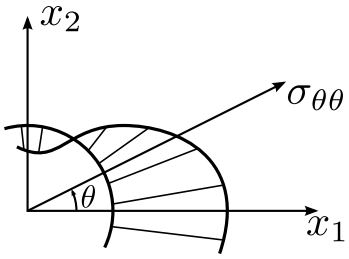
$$\gamma = \frac{P}{h}, \quad C = \frac{6Q}{h^3}, \quad \frac{12(M - Ql)}{h^3} \tag{8.45}$$

La répartition des contraintes normales est linéaire, comme dans le cas général (paragraphe 6.1.2) et la répartition des contraintes tangentielles σ_{12} est parabolique. C'est ce que l'on obtiendrait à partir de l'analyse du paragraphe **??** pour une section rectangulaire très large (déformations planes) ou très étroite (contraintes planes).

8.2.2 Traction plane d'une plaque perforée

Pour certaines géométries simples, l'utilisation de la variable complexe permet de construire explicitement la solution d'une vaste classe de problèmes. C'est en particulier le cas pour les domaines intérieurs ou extérieurs limités par un cercle. À titre d'exemple, nous allons donner la solution qui correspond à la traction d'une plaque perforée.





Si le rayon a du trou est petit par rapport aux dimensions de la plaque, on peut supposer en première approximation la plaque infinie. Dans le repère (x_1, x_2), l'état de contraintes à l'infini est donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^\infty \end{bmatrix} \tag{8.46}$$

ce qui, d'après (8.32), correspond à :

$$G(z) = \frac{\sigma^\infty}{4} z, \quad K(z) = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{z^2}{2} \tag{8.47}$$

C'est la solution qui se réalise en l'absence de trou, mais en présence d'un trou cette solution ne vérifie pas les conditions aux limites sur le trou, qui s'écrivent :

$$r = a : \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \tag{8.48}$$

en notant σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ et $\sigma_{\theta\theta}$ les composantes du tenseur des contraintes sur le repère $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ associé aux coordonnées cylindriques. Le trou induit donc dans (8.47) une perturbation, et on montre qu'alors :

$$G(z) = \frac{\sigma^\infty}{4} \left[z - \frac{a^2}{z} \right], \quad K'(z) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left[z - \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3} \right] \tag{8.49}$$

Les contraintes sont alors données par

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{\sigma^\infty}{2}\left\{\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-\left(1-\frac{4a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right\} \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1-\frac{2a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma^\infty}{2}\left\{\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\left(1+\frac{3a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right\}
\end{aligned} \tag{8.50}$$

En particulier, sur le trou on vérifie bien (8.48) et :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma^\infty(1+2\cos 2\theta) \tag{8.51}$$

L'état de contraintes sur le bord du trou est un état de traction simple avec une contrainte variant de $+3\sigma^\infty$ (traction, sur l'axe des x_1) à $-\sigma^\infty$ (compression, sur l'axe des x_2). La contrainte maximale est trois fois plus grande que la contrainte à l'infini. C'est un exemple de concentration de contrainte : la présence d'un trou, ou plus généralement d'un défaut, aussi petit soit-il, cause une augmentation importante des contraintes locales au voisinage du trou.

Chapitre 9

Méthodes variationnelles

9.1 Théoremes variationnels

Dans tout ce chapitre, nous nous intéresserons à un problème statique régulier (paragraphe 7.1.1) pour un matériau élastique linéaire isotrope ou anisotrope caractérisé par un tenseur d'élasticité A_{ijkh}. Pour simplifier l'écriture, nous supposerons le matériau homogène, c'est-à-dire que le tenseur A_{ijkh} est constant et nous prendrons les conditions aux limites sous la forme mixte (7.5a). Pour un autre problème régulier, l'écriture serait plus lourde, mais les résultats et les raisonnements seraient identiques.

9.1.1 Notions fondamentales

Nous cherchons donc un champ de déplacements et un champ de contraintes vérifiant les équations suivantes :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{9.1}$$

$$\sigma_{ij} n_j|_{S_f} = T_i^d \tag{9.2}$$

$$u_i|_{S_u} = u_i^d \tag{9.3}$$

$$\sigma_{ij} = A_{ijkh}\varepsilon_{kh} \tag{9.4}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{9.5}$$

Parmi ces équations, certaines sont de nature statique et portent uniquement sur les contraintes — les équations (9.1) et (9.2) — d'autres sont de nature cinématique et portent uniquement sur les déplacements, comme (9.3). Enfin, un troisième groupe d'équations, à savoir (9.4), relie les contraintes et les déplacements.

Définition 9.1
Un champ de déplacements $\tilde{u}_i$ est un champ cinématiquement admissible (CCA) s'il vérifie les conditions cinématiques (9.3) *:*

$$u_i|_{S_u} = u_i^d \tag{9.6}$$

Partant d'un CCA $\tilde{u}_i$, on peut lui associer un champ de déformations $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ par (9.5), puis un champ de contraintes $\tilde{\sigma}_{ij}$ par la loi de comportement (9.4), mais ce champ de contraintes n'a aucune raison de vérifier les conditions statiques (9.1) et (9.2).

Définition 9.2
Un champ de contraintes $\hat{\sigma}_{ij}$ est un champ statiquement admissible (CSA) s'il vérifie les conditions statiques (9.1) et (9.2) :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_f} = T_i^d \tag{9.7}$$

Partant d'un CSA $\hat{\sigma}_{ij}$, on peut lui associer un champ de déformations ε par la loi de comportement (9.4), mais, puisque $\hat{\sigma}_{ij}$ ne doit pas vérifier les équations de Beltrami, on ne pourra, en général, pas calculer un $\hat{u}_i$ par intégration de (9.5). *A fortiori*, les conditions (9.3) ne seront elles pas vérifiées.

Avec cette terminologie, le problème d'élasticité (9.1) à (9.5) se ramène à la recherche d'un CCA $\hat{u}_i$ et d'un CSA $\hat{\sigma}_{ij}$ reliés par la loi de comportement (9.4). Toute la suite de ce chapitre sera basée sur le lemme suivant — généralisation du théorème des travaux virtuels (3.45).

Lemme 9.1 — Lemme fondamental
Soit $u^*{}_i$ un champ de déplacements (virtuels) quelconque et $\hat{\sigma}_{ij}$ un CSA, alors :

$$\iiint_\Omega \hat{\sigma}_{ij} \overset{*}{\varepsilon}_{ij} \, \mathrm{d}v = \iiint_\Omega f_i \overset{*}{u}_i \, \mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} \hat{\sigma}_{ij} n_j \overset{*}{u}_i \, \mathrm{d}S \tag{9.8}$$

Démonstration. La démonstration est directement calquée sur celle du paragraphe 1.2.1. Nous partons du premier membre et utilisons la symétrie de $\hat{\sigma}_{ij}$.

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \hat{\sigma}_{ij} \overset{*}{\varepsilon}_{ij} \, \mathrm{d}v &= \frac{1}{2} \iiint_\Omega \hat{\sigma}_{ij} \left(\overset{*}{u}_{i,j} + \overset{*}{u}_{j,i} \right) \mathrm{d}v = \iint_\Omega \hat{\sigma}_{ij} \overset{*}{u}_{i,j} \, \mathrm{d}v \\ &= \iiint_\Omega \left(\hat{\sigma}_{ij} \overset{*}{u}_i \right)_{,j} \mathrm{d}v - \iiint_\Omega \hat{\sigma}_{ij,j} \overset{*}{u}_i \, \mathrm{d}v\end{aligned}$$

Par utilisation du théorème de la divergence, le premier terme donne l'intégrale de surface du second membre de (9.8), tandis que le second terme donne l'intégrale de volume par (9.7). On retrouve le théorème des travaux virtuels en prenant comme CSA $\hat{\sigma}_{ij}$, le champ solution σ_{ij}. □

Théorème 9.1 — Théorème des travaux virtuels
Pour tout champ de déplacements virtuels u_i^* :

$$\iiint_\Omega \sigma_{ij} \overset{*}{\varepsilon}_{ij} \, \mathrm{d}v = \iiint_\Omega f_i \overset{*}{u}_i \, \mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j \overset{*}{u}_i \, \mathrm{d}S \tag{9.9}$$

D'un point de vue algébrique, et en revenant à la structure décrite à la fin du paragraphe 3.2.3, on peut généraliser (3.49) en :

$$\langle \langle \overset{*}{\varepsilon}, \hat{\sigma} \rangle \rangle = \langle \overset{*}{u}, \varphi \rangle \tag{9.10}$$

valable pour tout champ de déplacements u_i^* et tout CSA $\hat{\sigma}_{ij}$. Plus précisément, on a la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{dualité } \langle\ ,\ \rangle} & \mathcal{U} \\ {\scriptstyle E}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle D} \\ \mathcal{S} & \xleftarrow[\text{dualité } \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle]{} & \mathcal{D} \end{array}$$

L'opérateur D s'écrit :

$$\overset{*}{u}_i \mapsto \overset{*}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\,() \tag{9.11}$$

donnant les déformations en fonction des déplacements, et l'opérateur E est l'opérateur :

$$\hat{\sigma}_{ij} \mapsto \left(\hat{f}_i = -\hat{\sigma}_{ij,j}\ ,\ \hat{T}_i = \hat{\sigma}_{ij} n_j\right) \tag{9.12}$$

associant au champ de contraintes $\hat{\sigma}_{ij}$, les forces volumiques $\hat{f}_i$ et les efforts de surface $\hat{T}_i$ qui lui correspondent. La relation (9.10) montre que les opérateurs D et E sont adjoints l'un de l'autre. C'est une structure que l'on retrouvera dans toutes les théories de Mécanique des Solides en petite perturbations.

Bien que présentés dans un contexte d'élasticité, toutes les définitions et tous les résultats de ce paragraphe sont indépendants de la loi de comportement ; en particulier, on les retrouvera en plasticité. La loi de comportement se présente comme une relation entre les déformations et les contraintes (voir paragraphe 4.1.3). En élasticité, cette relation est une application linéaire reliant les valeurs instantanées des déformations et des contraintes, cette application étant de plus supposée symétrique (auto-adjointe) et définie positive (paragraphe 5.1.1).

9.1.2 Théorème de l'énergie potentielle

Soit $\tilde{u}_i$ un CCA, on calcule $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ par (9.5) et on peut donc définir l'énergie de déformation du CCA $\tilde{u}_i$ par :

$$W(\tilde{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega A_{ijkh}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{kh}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}\,\mathrm{d}v \tag{9.13}$$

On introduit également le travail des efforts (volumiques et surfaciques) donnés dans le deplacement $\tilde{u}_i$:

$$\tilde{T}_f^d(\tilde{u}_i) = \iiint_\Omega f_i\tilde{u}_i\,\mathrm{d}v T_f^d(\tilde{u}_i), \quad T_f^d(\tilde{u}_i) = \iint_{S_f} T_i^d\tilde{u}_i\,\mathrm{d}S \tag{9.14}$$

Pour les conditions aux limites mixtes (6.7) choisies, le travail des efforts surfaciques donnés, T_f^d s'exprime simplement. Pour un problème régulier quelconque, l'expression peut être plus compliquée, mais, comme on l'a vu au paragraphe 6.1.1, le travail des efforts de surface se décompose sans ambiguïté en T_u^d et T_f^d (voir par exemple (6.10) et le paragraphe 9.1.4).

Définition 9.3
L'énergie potentielle du CCA $\tilde{u}_i$ est :

$$K(\tilde{u}_i) = W(\tilde{\varepsilon}_{ij}) - \tilde{T}_f^d(\tilde{u}_i) \tag{9.15}$$

On démontre alors

Théorème 9.2 — Théorème de l'énergie potentielle
Parmi tous les CCA, la (les) solution(s) u_i minimise(nt) l'énergie potentielle :

$$K(u_i) \leqslant K(\tilde{u}_i), \quad \forall \tilde{u}_i \ CCA \tag{9.16}$$

Démonstration. Soit u_i une solution du problème (9.1) à (9.5) et $\tilde{u}_i$ un CCA. Nous définissons :

$$\tilde{u}_i = u_i + \tilde{u}_i^0, \quad \tilde{u}_i^0|_{S_u} = 0 \tag{9.17}$$

et u_i est un CCA pour le problème homogène associé :

$$\begin{aligned} K(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega A_{ijkh}\left(\varepsilon_{ij}+\tilde{\varepsilon}_{ij}^0\right)\left(\varepsilon_{kh}+\tilde{\varepsilon}_{kh}^0\right)\mathrm{d}v \\ - \iiint_\Omega f_i\left(u_i+\tilde{u}_i^0\right)\mathrm{d}v - \iint_{S_f} T_i^d\left(u_i+\tilde{u}_i^0\right)\mathrm{d}S \\ = K(u_i) + \frac{1}{2}\iiint_\Omega A_{ijkh}\tilde{\varepsilon}_{ij}^0\tilde{\varepsilon}_{kh}^0\,\mathrm{d}v + \iiint_\Omega A_{ijkh}\tilde{\varepsilon}_{ij}^0\varepsilon_{kh}\,\mathrm{d}v \\ - \iiint_\Omega f_i\tilde{u}_i^0\,\mathrm{d}v - \iint_{S_f} T_i^d\tilde{u}_i^0\,\mathrm{d}S \end{aligned}$$

Le déplacement u_i est solution et le théorème des travaux virtuels (9.9) donne, en prenant $u_i^* = \tilde{u}_i^0$:

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega A_{ijkh}\tilde{\varepsilon}_{kh}^0\,\mathrm{d}v &= \iint_\Omega \sigma_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}^0\,\mathrm{d}v \\ &= \iiint_\Omega f_i\tilde{u}_i^0\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega}\sigma_{ij}n_j\tilde{u}_i^0\,\mathrm{d}S \\ &= \iiint_\Omega f_i\tilde{u}_i^0\,\mathrm{d}v + \iint_{S_f} T_i^d\tilde{u}_i^0\,\mathrm{d}S + \iint_{S_u}\cancel{\sigma_{ij}n_j\tilde{u}_i^0}\,\mathrm{d}S \end{aligned}$$

puisque sur S_f, on a (9.2), et que, d'après (9.3) et (9.6), $\tilde{u}_i^0$ est nul sur S_u. Finalement :

$$K(\tilde{u}_i) = K(u_i) + \frac{1}{2}\iiint_\Omega A_{ijkh}\tilde{\varepsilon}_{ij}^0\tilde{\varepsilon}_{kh}^0\,\mathrm{d}v \tag{9.18}$$

Or le second terme est positif, puisque la matrice d'élasticité est définie positive (paragraphe 5.1.1). Ceci démontre (9.16). □

On déduit également de cette démonstration ce qui suit :

Théorème 9.3 — Théorème d'existence et d'unicité
Pour un problème de type I ou un problème mixte, il existe une solution unique. Pour un problème de type II, il existe une solution définie à un mouvement de solide rigide près si et seulement si :

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega f_i\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T_i^d\,\mathrm{d}S = 0 \\ \iiint_\Omega \varepsilon_{ijk}x_j f_k\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega}\varepsilon_{ijk}x_j T_k^d = 0 \end{aligned} \tag{9.19}$$

c'est-à-dire si et seulement si les efforts appliqués forment un torseur nul.

Démonstration. Unicité. Soit u_i^1 et u_i^2 deux solutions, ils sont aussi CCA, et l'application de (9.16) montre que :

$$K\left(u_i^1\right) = K\left(u_i^2\right)$$

soit, d'après (9.18) :

$$\iiint_\Omega A_{ijkh}\left(\varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^2\right)\left(\varepsilon_{kh}^1 - \varepsilon_{kh}^2\right) \mathrm{d}v = 0 \tag{9.20}$$

Il en résulte, puisque A_{ijkh} est défini positif :

$$\varepsilon_{ij}^1 = \varepsilon_{ij}^2, \quad u_i^1 = u_i^2 + \varepsilon_{ijkh}\omega_j x_k + \alpha_i \tag{9.21}$$

et les deux solutions ne diffèrent que d'un mouvement de solide. Si S_u existe (plus précisément, si S_u est de mesure non nulle), les conditions aux limites en déplacement permettent de montrer que $\vec{\omega} = \vec{\alpha} = 0$ et donc $u_i^1 = u_i^2$ d'où l'unicité. Par contre, si S_u est vide (problème de type II), on ne peut plus éliminer ce mouvement de solide qui reste indéterminé.

Existence. L'existence d'une solution peut par exemple se démontrer en construisant, dans un espace fonctionnel approprié, une suite minimisante pour la fonctionnelle K. Pour un problème de type II, la condition d'équilibre (9.19) apparaît naturellement car, sinon, la fonctionnelle n'est pas minorée. Pour les autres problèmes, cette condition d'équilibre n'apparaît pas, car les efforts donnés sont équilibrés par les efforts de liaison, inconnus *a priori*, s'exerçant à travers S_u. □

9.1.3 Théorème de l'énergie complémentaire

Si nous partons d'un CSA $\hat{\sigma}_{ij}$, nous définissons son énergie de déformation par :

$$\hat{W}\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \Lambda_{ijkh}\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{kh}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \hat{\sigma}_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij}\,\mathrm{d}v \tag{9.22}$$

et son travail dans les déplacements donnés par :

$$T_u^d\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) = \iint_{S_u} \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i^d \,\mathrm{d}S \tag{9.23}$$

et nous définissons :

Définition 9.4
L'énergie complémentaire du CSA est :

$$H\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) = T_u^d\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) - \hat{W}\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) \tag{9.24}$$

pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 9.4 — Théorème de l'énergie complémentaire
Parmi tous les CSA, la solution σ_{ij} maximise l'énergie complémentaire :

$$H\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) \leqslant H\left(\sigma_{ij}\right) \quad \forall \hat{\sigma}_{ij}\ CSA \tag{9.25}$$

Démonstration. Soit σ_{ij} la solution, σ_{ij} un CSA, et posons :

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \hat{\sigma}^0_{ij} \tag{9.26}$$

et $\hat{\sigma}^0_{ij}$ est un CSA pour le problème homogène associé ($f^0_i = 0,\ T^{d0}_i = 0$) :

$$\hat{\sigma}^0_{ij,j} = -f^0_i = 0, \quad \hat{\sigma}^0_{ij} n_j|_{S_f} = T^{d0}_i = 0 \tag{9.27}$$

$$\begin{aligned} H\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) &= -\frac{1}{2}\iiint_\Omega \Lambda_{ijkh}\left(\sigma_{ij} + \hat{\sigma}^0_{ij}\right)\left(\sigma_{kh} + \hat{\sigma}^0_{kh}\right)\mathrm{d}v + \iint_{S_u}\left(\sigma_{ij} + \hat{\sigma}^0_{ij}\right) n_j u^d_i \,\mathrm{d}S \\ &= H\left(\sigma_{ij}\right) - \frac{1}{2}\iiint_\Omega \Lambda_{ijkh}\hat{\sigma}^0_{ij}\hat{\sigma}^0_{kh}\,\mathrm{d}v - \iiint_\Omega \Lambda_{ijkh}\hat{\sigma}^0_{ij}\sigma_{kh}\,\mathrm{d}v + \iint_{S_u}\hat{\sigma}^0_{ij} n_j u^d_i \,\mathrm{d}S \end{aligned}$$

En appliquant le lemme fondamental à $\hat{\sigma}^0_{ij}$ CSA pour le problème homogène associé et à u_i, déplacement solution, on obtient :

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \Lambda_{ijkh}\hat{\sigma}^0_{ij}\sigma_{kh}\,\mathrm{d}v &= \iiint_\Omega \hat{\sigma}^0_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}v \\ &= \cancel{\iiint_\Omega f^0_i u_i\,\mathrm{d}v} + \cancel{\iint_{S_f} T^{d0}_i u_i\,\mathrm{d}S} + \iint_{S_u}\hat{\sigma}^0_{ij} n_j u_i\,\mathrm{d}S \end{aligned}$$

Les deux premiers termes disparaissent d'après (9.27), tandis que sur S_u, $u_i = u^d_i$ par (9.3). Il vient finalement :

$$H\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) = H\left(\sigma_{ij}\right) - \frac{1}{2}\iiint_\Omega \Lambda_{ijkh}\hat{\sigma}^0_{ij}\hat{\sigma}^0_{kh}\,\mathrm{d}v \tag{9.28}$$

d'où la conclusion, puisque, comme A_{ijkh}, la matrice Λ_{ijkh} est définie positive. □

Théorème 9.5 — Théorème de la comparaison
Soit (u_i, σ_{ij}) la solution d'un problème régulier, $\tilde{u}_i$ un CCA et $\hat{\sigma}_{ij}$ un CSA, alors :

$$H\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) \leqslant H\left(\sigma_{ij}\right) = K\left(u_i\right) \leqslant K\left(\tilde{u}_i\right) \tag{9.29}$$

Les deux théorèmes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire permettent d'écrire les deux inégalités. Il reste donc à montrer l'égalité :

$$K\left(u_i\right) = H\left(\sigma_{ij}\right) \tag{9.30}$$

pour la solution.
Démonstration. Pour la solution, on a :

$$W\left(u_i\right) = \hat{W}\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}v$$

À partir de (9.15) et (9.24), il vient alors :

$$K\left(u_i\right) - H\left(\sigma_{ij}\right) = 2W - \tilde{T}^d_f\left(u_i\right) - T^d_u\left(\sigma_{ij}\right)$$

$$\iiint_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}v - \iiint_\Omega f_i u_i\,\mathrm{d}v - \iint_{\partial\Omega}\sigma_{ij} n_j u_i\,\mathrm{d}S = 0$$

comme il résulte du théorème des travaux virtuels (9.9), en prenant comme déplacement virtuel le déplacement solution u_i. □

Au passage nous avons démontré :

Théorème 9.6 — Théorème du travail
Dans un problème élastostatique, l'énergie de déformation est égale à la moitié du travail des efforts extérieurs dans le déplacement solution :

$$W = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left\{\iiint_\Omega f_i u_i\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega}\sigma_{ij}n_j u_i\,\mathrm{d}S\right\} \tag{9.31}$$

On peut d'ailleurs obtenir directement ce résultat par une approche énergétique. Partons en effet du bilan énergétique en élasticité du paragraphe 6.1.2 et plus précisément de l'équation (6.14) :

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \iiint_\Omega f_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega}\sigma_{ij}n_j\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}S \tag{9.32}$$

Pour un problème quasi-statique, on néglige les variations d'énergie cinétique et on obtient l'énergie de déformation associée à (u_i, σ_{ij}) par intégration de (9.32) par rapport au temps sur un processus quasi-statique faisant passer de l'état de référence ($u_i = 0$, $\sigma_{ij} = 0$, $W = 0$) à l'état final (u_i, σ_{ij}, $W = W_f$) :

$$W_f = \int_{\text{réf.}}^{\text{fin.}}\left\{\iiint_\Omega f_i\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega}\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}S\right\}$$

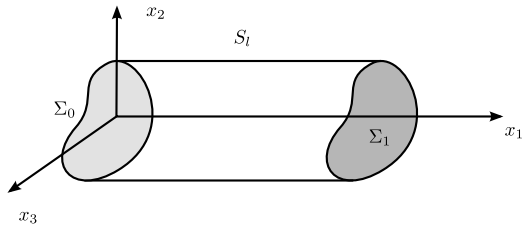
Or, on peut obtenir un tel processus par un chargement proportionnel : d'après la linéarité, $(\lambda u_i, \lambda\sigma_{ij})$ est la solution quasi-statique ou statique associée aux données $\left(\lambda f_i, \lambda T_i^d, \lambda u_i^d\right)$. L'état de référence correspond alors à $\lambda = 0$ et l'état final à $\lambda = 1$. On obtient alors ($\mathrm{d}u_i = u_i\,\mathrm{d}\lambda$) :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1\left\{\iiint_\Omega \lambda f_i u_i\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega}\lambda\sigma_{ij}n_j u_i\,\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}\lambda \\ &= \underbrace{\int_0^1 \lambda\,\mathrm{d}\lambda}_{=1/2}\left\{\iiint_\Omega f_i u_i\,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega}\sigma_{ij}n_j u_i\,\mathrm{d}S\right\} \end{aligned}$$

Le coefficient 1/2 dans (9.31) traduit donc physiquement la mise en charge progressive du milieu.

9.1.4 Application a la torsion

Le théorème de comparaison permet un encadrement de la solution par des solutions approchées. À titre d'application, nous allons montrer comment il permet d'encadrer le module de rigidité à la torsion d'un arbre cylindrique (paragraphe 7.2). Nous avons formulé au paragraphe 7.2.3 le problème régulier le plus commode correspondant à cette sollicitation :



$$\Omega = [0, l] \times \Sigma$$

$$f_i = 0$$

$$\begin{aligned} S_l :&\ [0,l]\times\partial\Sigma\sigma_{ij}n_j = 0 \\ \Sigma_0 :&\ x_1 = 0\sigma_{11} = 0\ ,\ u_2 = u_3 = 0 \\ \Sigma_1 :&\ x_1 = l\sigma_{11} = 0\ ,\ u_2 = -\alpha l x_3\ ,\ u_3 = \alpha l x_2 \end{aligned} \tag{9.33}$$

Un CSA $\hat{\sigma}_{ij}$ doit vérifier les équations d'équilibre et les conditions aux limites de type statique, à savoir :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}n_j = 0 &\text{sur } [0,l]\times\partial\Sigma \\ \hat{\sigma}_{11} = 0 &\text{en } x_1 = 0\ ,\ x_1 = l \end{aligned} \tag{9.34}$$

Nous inspirant de la solution du paragraphe 7.2.2, nous prenons un champ de contraintes de la forme (7.46). Les conditions aux limites (9.34) sur les extrémités sont alors automatiquement vérifiées. Comme au paragraphe 7.2.2, les équations d'équilibre permettent d'introduire une fonction de contrainte Φ et les conditions aux limites (9.24) sur la surface latérale exigent que Φ soit nulle sur $\partial\Omega$. Par contre, pour un CSA, la fonction Φ ne doit pas vérifier l'êquation (7.31) qui résultait des équations de Beltrami. Ainsi, un CSA est défini par une condition $\hat{\Phi}(x_2,x_3)$ nulle sur $\partial\Sigma$ avec :

$$\underline{\underline{\hat{\sigma}}} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{13} \\ \hat{\sigma}_{12}0 & 0 & \\ \hat{\sigma}_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{12} = \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_3}, \quad \hat{\sigma}_{13} = -\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_2} \tag{9.35}$$

Pour calculer l'énergie de déformation, en élasticité isotrope, on utitlise les formules suivantes, qui s'obtiennent directement à partir des formules du chapitre 5

$$w(\sigma_{ij}) = w(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{9.36}$$

$$= \frac{1}{2E}\left\{\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2-2\nu\left(\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}\right)\right\} + \frac{1}{2G}\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2\right) \tag{9.37}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)^2 + 2\mu\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2\right) \tag{9.38}$$

et à partir de (9.35), on obtient :

$$\hat{W}\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) = \frac{1}{2G}\iint_\Sigma\int_0^l\left\{\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_2}\right)^2\right\}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{9.39}$$

$$= \frac{l}{2G}\iint_\Sigma\left\{\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_2}\right)^2\right\}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{9.40}$$

Pour calculer T_u^d et T_f^d il faut expliciter la décomposition (6.8) pour le problème (9.33) :

$$\iint_{\partial\Sigma}\sigma_{ij}n_ju_i\,\mathrm{d}S = \iint_{S_l}T_i^du_i\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_1}\left[\sigma_{11}^du_1 + \sigma_{12}u_2^d+\sigma_{13}u_3^d\right]\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 - \underbrace{\iint_{\Sigma_0}\left[\sigma_{11}^du_1\right.}_{T_f^d(u_i)} + \underbrace{\left.\sigma_{12}u_2^d+\sigma_{13}u_3^d\right]}_{T_u^d(\sigma_{ij})}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$

et, compte-tenu de la valeur des données (9.33) :

$$T_f^d(u_i) = 0 \tag{9.41}$$

$$T_u^d(\hat{\sigma}_{ij}) = \alpha l \iint_{\Sigma_1} (x_2\hat{\sigma}_{13} - x_3\hat{\sigma}_{12})\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \alpha l\hat{\mathcal{M}}_1 \tag{9.42}$$

où $\hat{\mathcal{M}}_1$ est le moment de torsion résultant des efforts associés au CSA. Compte-tenu de (9.35), il vient :

$$T_u^d\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) = -\alpha l \iint_{\Sigma} \left(x_2\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = 2\alpha l \iint_{\Sigma} \hat{\Phi}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$

en reprenant le calcul de (7.61). Finalement :

$$H\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) = \iint_{\Sigma}\left\{2\alpha l\hat{\Phi} - \frac{l}{2G}\left[\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_3}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{9.43}$$

ou en posant $\hat{\Phi} = G\alpha\hat{\varphi}$:

$$H\left(\hat{\sigma}_{ij}\right) = \frac{G\alpha^2 l}{2}\iint_{\Sigma}\left\{4\hat{\varphi} - \left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x_3}\right)^2\right\}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{9.44}$$

où $\hat{\varphi}$ est une fonction de x_2, x_3 nulle sur $\partial\Sigma$.

Un CCA $\tilde{u}_i$ doit uniquement vérifier les conditions aux limites cinématiques :

$$\begin{aligned}&\Sigma_0 : \tilde{u}_2 = \tilde{u}_3 = 0\\ &\Sigma_1 : \tilde{u}_2 = -\alpha l x_3, \quad \tilde{u}_3 = \alpha l x_2\end{aligned} \tag{9.45}$$

et, en nous inspirant de la structure (7.73) de la solution, nous prenons pour CCA le champ :

$$\tilde{u}_1 = \alpha\tilde{\psi}(x_2, x_3) \quad \tilde{u}_2 = -\alpha x_1 x_3 \quad \tilde{u}_3 = \alpha x_1 x_2 \tag{9.46}$$

qui vérifie automatiquement (9.45). Un CCA sera donc défini par une fonction quelconque (effectivement, les restrictions (7.75) imposées à ψ pour la solution sont d'origine statique). On a alors :

$$\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} = \frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix} 0 & -x_3 + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_2} & x_2 + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_3} \\ -x_3 + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ x_2 + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.47}$$

et on tire de (9.38) :

$$W\left(\tilde{\varepsilon}_{ij}\right) = \frac{G\alpha^2 l}{2}\iint_{\Sigma}\left\{\left(x_3 - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_3}\right)^2\right\}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{9.48}$$

soit finalement, grâce à (9.41),

$$H\left(\tilde{u}_i\right) = \frac{G\alpha^2 l}{2}\iint_{\Sigma}\left\{\left(x_3 - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_3}\right)^2\right\}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \tag{9.49}$$

Ainsi, compte tenu de (9.49) et (9.44), le théorème de comparaison permet d'encadrer $H(u_i) = K(\sigma_{ij})$. Les conditions (9.41) et (9.42) entraînent la solution :

$$H(u_i) = K(\sigma_{ij}) = W = \alpha l \mathcal{M}_1 - W = \frac{\alpha l \mathcal{M}_1}{2} = \frac{G\alpha^2 l}{2} I \tag{9.50}$$

compte-tenu de (7.62). Le théorème de comparaison nous donne donc :

$$\begin{aligned} &h\left(\hat{\varphi}\right) \leqslant I \leqslant k\left(\tilde{\psi}\right) \\ &h\left(\hat{\varphi}\right) = \iint_{\Sigma} \left\{ 4\hat{\varphi} - \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_3}\right)^2 \right\} \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3 \\ &k\left(\tilde{\psi}\right) = \iint_{\Sigma} \left\{ \left(x_3 - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_3}\right)^2 \right\} \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3 \end{aligned} \tag{9.51}$$

valable pour toute fonction $\hat{\varphi}$ nulle sur $\partial\Sigma$ et toute fonction $\tilde{\psi}$. On voit donc que l'on peut encadrer le module de rigidité à la torsion et obtenir ainsi des valeurs approchées.

On peut ainsi démontrer certains résultats généraux : par exemple, en prenant $\tilde{\psi} = 0$, on obtient :

$$I \geqslant \iint_{\Sigma} \left(x_2^2 + x_3^2\right) \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3 = I_0 \tag{9.52}$$

le moment polaire I_0 est un minorant du module de rigidité à la torsion (on a vu que c'était le module de rigidité à la torsion pour une section circulaire ou annulaire).

Pour aller plus loin, considérons par exemple le cas d'une section rectangulaire. On a vu au paragraphe 7.2.4 que l'on pouvait obtenir une solution exacte par développement en série de Fourier. Les calculs précédents vont nous fournir une valeur approchée. La fonction $\hat{\varphi}$ doit être nulle sur le bord, nous prenons :

$$\hat{\varphi} = m(a^2 - x_2^2)(b^2 - x_3^2) \tag{9.53}$$

On trouve alors par un calcul direct :

$$h\left(\hat{\varphi}\right) = \frac{64 a^3 b^3}{9} m \left[1 - \frac{2m}{5}\left(a^2 + b^2\right)\right] \tag{9.54}$$

La fonction $\tilde{\psi}$ est quelconque par analogie avec la section elliptique, nous prenons :

$$\tilde{\psi} = p x_2 x_3 \tag{9.55}$$

et nous obtenons :

$$k\left(\tilde{\psi}\right) = \frac{4ab}{3}\left[(p+1)^2 b^2 + (p-1)^2 a^2\right] \tag{9.56}$$

d'où l'encadrement (9.51) pour I. Pour obtenir l'encadrement optimal, nous choisissons la valeur de m qui maximise $h(\hat{\varphi})$ et la valeur de p qui minimise $k(\tilde{\psi})$. On trouve :

$$m_{opt} = \frac{5}{4\left(a^2 + b^2\right)}, \quad p_{opt} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

et :

$$\frac{40}{9} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \leqslant I \leqslant \frac{48}{9} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tag{9.57}$$

En particulier, pour la section carrée :

$$0{,}139 \leqslant \frac{I}{a^4} \leqslant 0{,}167 \tag{9.58}$$

alors que la valeur exacte est de 0,141. Bien entendu, on pourrait raffiner en prenant des fonctions $\hat{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ plus compliquées. Néanmoins, on voit que notre CSA est déjà assez proche de la solution et peut nous donner une approximation raisonnable du champ de contraintes réel.

9.2 Théorèmes de l'énergie

9.2.1 Théorème de réciprocité

On considère un solide élastique pouvant être soumis à deux chargements différents. Soit (u_i^1, σ_{ij}^1) et (u_i^2, σ_{ij}^2), les solutions correspondantes.

Théorème 9.7 — Théorème de réciprocité au de Maxwell-Betti
Le travail des efforts extérieurs 2 *dans le déplacement* 1 *est égal au travail des efforts extérieurs* 1 *dans le déplacement* 2 *:*

$$\iint_\Omega f_i^2 u_i^1 \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T_i^2 u_i^1 \,\mathrm{d}S = \iiint_\Omega f_i^1 u_i^2 \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T_i^1 u_i^2 \,\mathrm{d}S \tag{9.59}$$

Démonstration. On utilise le théorème des travaux virtuels appliqué au problème 1 avec comme déplacement virtuel le déplacement u_i^2 solution du problème 2. On obtient :

$$\iiint_\Omega \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f_i^1 u_i^2 \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T_i^1 u_i^2 \,\mathrm{d}S$$

On effectue la même opération en changeant 1 et 2 :

$$\iiint_\Omega \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f_i^2 u_i^1 \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T_i^2 u_i^1 \,\mathrm{d}S$$

et on obtient (9.59) en remarquant que d'après la symétrie de la matrice d'élasticité :

$$\iiint_\Omega \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega A_{ijkh} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{kh}^2 \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 \,\mathrm{d}v$$

□

À titre d'exemple d'application, considérons un problème du type II avec des données $\left(f_i, T_i^d\right)$. En général, on ne saura pas calculer la solution (u_i, σ_{ij}). Par contre, certains problèmes de type II peuvent être résolus pour le même domaine, par exemple teus ceux qui admettent une solution homogène : le problème caractérisé par les données :

$$f_i = 0 \quad T_i^d = \sigma_{ij}^0 n_j \tag{9.60}$$

où σ_{ij}^0 est constant, admet en effet la solution :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad u_i = \Lambda_{ijkh} \sigma_{kh}^0 x_j \tag{9.61}$$

On applique le théorème de Maxwell Betti en prenant comme problème I le problème posé, et comme problème 2 le problème (9.60) avec sa solution (9.61) :

$$\iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^0 n_j u_i \,\mathrm{d}S = \iiint_\Omega \Lambda_{ijkh} \sigma_{kh}^0 x_j f_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} \Lambda_{ijkh} \sigma_{kh}^0 x_j T_i^d \,\mathrm{d}S$$

Mais l'utilisation du théorème de la divergence donne :

$$\iint_{\partial\Omega} \sigma^0_{ij} n_j u_i \,\mathrm{d}v = \sigma^0_{ij} \iiint_\Omega \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}v$$

et (9.61) donne des informations sur la valeur moyenne des déformations :

$$\sigma^0_{ij} \iiint_\Omega \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega \Lambda_{ijkh} \sigma^0_{kh} x_j f_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} \Lambda_{ijkh} \sigma^0_{kh} x_j T^d_i \,\mathrm{d}S \tag{9.62}$$

Par exemple, on obtiendra la valeur moyenne de ε_{11} et ε_{12} en prenant pour σ^0_{ij} un tenseur de traction simple et de cisaillement simple. En élasticité isotrope on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \iiint_\Omega \varepsilon_{11} \,\mathrm{d}v &= \frac{1}{VE} \left\{ \iiint_\Omega \left[f_1 x_1 - \nu \left(f_2 x_2 + f_3 x_3 \right) \right] \mathrm{d}v \right. \\
&\qquad \left. + \iint_{\partial\Omega} \left[T^d_1 x_1 - \nu \left(T^d_2 x_2 + T^d_3 x_3 \right) \right] \mathrm{d}S \right\} \qquad (9.63) \\
\frac{1}{V} \iiint_\Omega \varepsilon_{12} \,\mathrm{d}v &= \frac{1+\nu}{VE} \left\{ \iiint_\Omega \left(f_1 x_2 + f_2 x_1 \right) \mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} \left(T^d_1 x_2 + T^d_2 x_1 \right) \mathrm{d}S \right\}
\end{aligned}$$

En particulier, la variation de volume est donnée par :

$$\Delta V = \iiint_\Omega \varepsilon_{ii} \,\mathrm{d}v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left\{ \iiint_\Omega f_i x_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T^d_i x_i \,\mathrm{d}S \right\} \tag{9.64}$$

Plus généralement, le théorème de Maxwell Betti permet souvent d'obtenir sans calcul des résultats intéressants.

9.2.2 Théorème de Castigliano

On considère encore le même solide élastique pouvant être soumis à deux systèmes de chargements 1 et 2.

Théorème 9.8 — Théorème de Castigliano
Soit $\hat{\sigma}^2_{ij}$ un CSA pour le problème 2. Le travail des efforts extérieurs 2 dans le déplacement 1 est égal à la dérivée à l'origine de la fonction donnant l'énergie de déformation du champ de contraintes $\sigma^1_{ij} + \lambda \hat{\sigma}^2_{ij}$ en fonction de λ :

$$\iiint_\Omega f^2_i u^1_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T^2_i u^1_i \,\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left\{ \hat{W} \left(\sigma^1_{ij} + \lambda \hat{\sigma}^2_{ij} \right) \right\} |_{\lambda=0} \tag{9.65}$$

Démonstration. On développe :

$$\hat{W} \left(\sigma^1_{ij} + \lambda \hat{\sigma}^2_{ij} \right) = \hat{W} \left(\sigma^1_{ij} \right) + \lambda^2 \hat{W} \left(\hat{\sigma}^2_{ij} \right) + \lambda \iiint_\Omega \Lambda_{ijkh} \sigma^1_{ij} \hat{\sigma}^2_{kh} \,\mathrm{d}v$$

De sorte que :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left\{ \hat{W} \left(\sigma^1_{ij} + \lambda \hat{\sigma}^2_{ij} \right) \right\} |_{\lambda=0} &= \iiint_\Omega \Lambda_{ijkh} \sigma^1_{ij} \hat{\sigma}^2_{kh} \,\mathrm{d}v \\
&= \iiint_\Omega \varepsilon^1_{kh} \hat{\sigma}^2_{kh} \,\mathrm{d}v \\
&= \iiint_\Omega f^2_i u^1_i \,\mathrm{d}v + \iint_{\partial\Omega} T^2_i u^1_i \,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

L'utilisation de ce théorème et du théorème de réciprocité est basée sur le fait qu'en introduisant comme chargement 2, des chargements fictifs, il est possible de calculer certains déplacements ou déformations. En effet, si on introduit par exemple comme chargement 2, une force concentrée $\vec{F}$ appliquée au point M, alors le travail du chargement 2 dans le déplacement 1 se réduit à :

$$\vec{F} \cdot \vec{u}^1 (M) \tag{9.66}$$

d'où le calcul du 9éplacement du point M pour le problème 1. Ce type de méthode est peu utilisé en MMC, pour deux raisons :

1. l'introduction de forces concentrées en MMC pose quelques problèmes liés à la singularité du chargement. On sait résoudre ces problèmes, mais ce n'est pas si simple ;
2. en MMC, il est en général très difficile de calculer le champ de contraintes solution ou de construire un CSA.

Par contre, ces *théorèmes de l'énergie* — comme sont couramment nommés le théorème de réciprocité et le théorème de Castigliano — seront utilisés de manière intensive en Résistance des Matériaux où les deux difficultés mentionnées ci-dessus disparaissent. De manière générale en effet, tous les théorèmes que nous avons démontrés depuis le début de ce chapitre sont valables pour toute théorie des milieux continus élastiques. En fait, ils reposent sur la structure algébrique décrite à la fin du paragraphe 9.1.1.

Ces théorèmes ne sont en principe valables que pour les problèmes réguliers. Pour un problème non régulier — problème avec frottement ou avec contact unilatéral par exemple, voir paragraphe 6.1.1 — on peut avoir des résultats analogues, mais il convient de tout reprendre pour chaque cas particulier. C'est le champ d'étude des méthodes variationnelles [3].

9.3 Méthode des éléments finis

9.3.1 Principe

Les théorèmes du paragraphe 9.1 énoncent des principes variationnels dont l'affirmation type est la suivante : "*La solution minimise une certaine fonctionnelle dans un espace de fonctions admissibles.*" Nous avons présenté les deux principes variationnels traditionnels, mais il en existe bien d'autres, plus ou moins appropriés, suivant le type de problème que l'on envisage [29]. L'intérêt de ces principes variationnels réside dans le fait qu'ils engendrent à peu près automatiquement une méthode numérique pour calculer une solution approchée. Il suffit en effet de discrétiser l'espace des fonctions admissibles — c'est-à-dire de l'approcher par un espace de dimension finie — et de minimiser la fonctionnelle sur cet espace discrétisé. On obtient ainsi une solution approchée d'autant plus proche de la solution réelle que l'espace discrétisé approche mieux l'espace des fonctions admissibles.

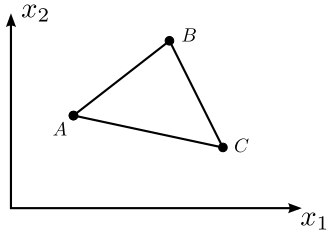
Pour discrétiser l'espace des fonctions admissibles, on peut par exemple introduire une base fonctionnelle de cet espace — base de fonctions sinusoïdales pour un domaine rectangulaire, par exemple — et approcher l'espace des fonctions admissibles par l'espace engendré par les n premiers éléments de cette base. C'est la méthode de Galerkin pour laquelle on peut montrer que lorsque $n \to \infty$, la solution approchée ainsi calculée tend vers la solution réelle.

Le terme "méthode d'éléments finis" recouvre un ensemble de méthodes pour lesquelles l'espace discrétisé s'obtient :

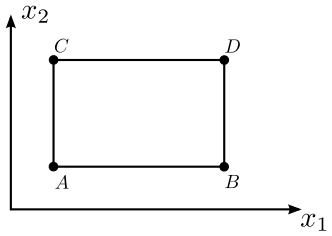
1. en découpant le domaine Ω en un certain nombre de sous-domaines simples (triangles ou rectangles) : les éléments finis ;

2. en prenant sur chaque élément une forme analytique simple, de sorte que la valeur de la fonction en tout point est donnée par sa valeur en un nombre limité de nœuds.

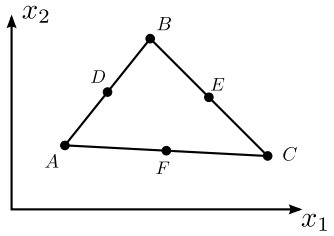
À titre d'exemple, nous allons présenter les trois éléments les plus simples pour un espace de fonctions à valeur scalaire (pour une fonction à valeur vectorielle ou tensorielle, il suffit de considérer séparément chaque composante) dans le plan.



(a) Élément triangulaire avec une fonction linéaire



(b) Élément rectangulaire avec fonction bilinéaire



(c) Élément triangulaire avec fonction quadratique

Exemple 1. Elément triangulaire avec fonction linéaire sur chaque triangle :

$$f = a + bx_1 + cx_2$$

La valeur de la fonction f en un point du triangle ABC dépend de trois paramètres, par exemple la valeur de f aux trois sommets, soit :

$$f = f_A\lambda_A(x_1, x_2) + f_B\lambda_B(x_1, x_2) + f_C\lambda_C(x_1, x_2) \tag{9.67}$$

où λ_A, λ_B, λ_C sont les *coordonnées barycentriques* du point M.

Exemple 2. Elément rectangulaire avec fonction bilinéaire :

$$f = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2$$

La valeur de la fonction f en un point M du rectangle ABCD dépend de quatre paramètres : la valeur f aux nœuds A, B, C et D :

$$\begin{aligned} f = f_A\frac{(x_1 - x_1^B)(x_2 - x_2^C)}{(x_1^A - x_1^B)(x_2^A - x_2^C)} + f_B\frac{(x_1 - x_1^A)(x_2 - x_2^D)}{(x_1^B - x_1^A)(x_2^B - x_2^B)} \\ + f_C\frac{(x_1 - x_1^D)(x_2 - x_2^A)}{(x_1^C - x_1^D)(x_2^C - x_2^A)} + f_D\frac{(x_1 - x_1^C)(x_2 - x_2^B)}{(x_1^D - x_1^C)(x_2^D - x_2^B)} \end{aligned} \tag{9.68}$$

Exemple 3. Elément triangulaire avec fonction quadratique sur chaque triangle :

$$f = a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \tag{9.69}$$

La valeur de la fonction sur le triangle ABC dépend de six paramètres : la valeur de f aux six nœuds A, B, C, D, E, F, et ainsi de suite. On trouvera dans la littérature sur les éléments finis des catalogues d'éléments. Après avoir découpé le modèle et choisi les éléments, une fonction de l'espace discrétisé est définie par sa valeur en un certain nombre de nœuds, et on doit minimiser une fonction d'un nombre fini de variables, problème qui se prête bien au calcul numérique.

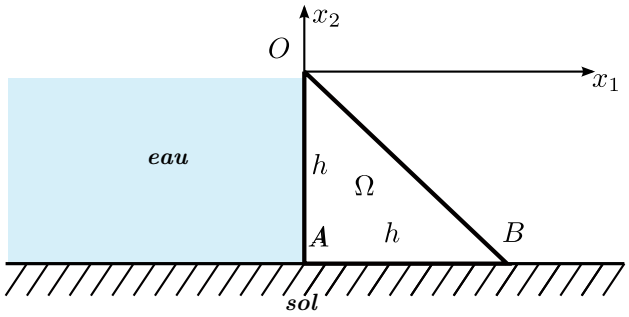
Pour la torsion, on peut à partir de (9.51) construire méthodes d'éléments finis :

1re méthode — On discrétise Σ et on maximise la fonctionnelle $h(\hat{\varphi})$ sur l'espace des fonctions $\hat{\varphi}$ nulles sur le bord ;

2e méthode — On discrétise Σ et on minimise la fonctionnelle $h(\hat{\psi})$ sur l'espace de toutes les fonctions $\hat{\psi}$.

9.3.2 Application

Pour montrer la mise en œuvre de la méthode, nous allons envisager un exemple. Considérons un barrage triagulaire OAB en déformations planes.



Les forces de volume se réduisent à la pesanteur :

$$f_1 = 0, \quad f_2 = -\rho g \tag{9.70}$$

ρ étant la masse volumique du béton. Quant aux conditions aux limites, elles traduisent l'absence de contrainte sur OB, l'effet de la pression hydrostatique $-\varpi x_2$ (ϖ étant le poids spécifique de l'eau) sur OA et la liaison supposée rigide avec le sol sur AB :

$$\begin{aligned} &\text{OB}\sigma_{11} + \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{12} + \sigma_{22} = 0 \\ &\text{OA}\sigma_{11} = \varpi x_2, \quad \sigma_{12} = 0 \\ &\text{AB}u_1 = u_2 = 0 \end{aligned} \tag{9.71}$$

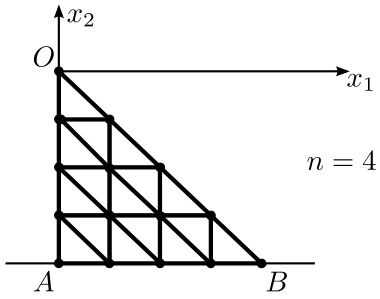
Le théorème de l'énergie potentielle affirme que dans l'espace des CCA :

$$\mathcal{U} = \{(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \,|\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = 0 \text{ pour } x_2 = -h\} \tag{9.72}$$

la solution minimise la fonctionnelle :

$$K(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2}\iint_\Omega A_{ijkh}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{kh}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \iint_\Omega \rho g\tilde{u}_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \int_{\text{OA}} \varpi x_2\tilde{u}_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{9.73}$$

Pour discrétiser ce problème, nous introduisons un découpage en éléments finis :



Par exemple, nous introduisons un maillage régulier et des éléments triangulaires du type (9.67) et nous approchons $\mathcal{U}$ par :

$$\mathcal{U}_n = \{(u_1, u_2)\,,\ u_1 \text{ et } u_2 \text{ nuls sur AB et de la forme (9.67) sur chaque triangle}\}$$

Ainsi, une fonction de $\mathcal{U}_n$ sera caractérisée par sa valeur aux $n(n+1)/2$ points du maillage non situés sur AB (si OA et AB sont découpés en n intervalles égaux). L'espace $\mathcal{U}_n$ est un espace de dimension $n(n+1)$ et une fonction de $\mathcal{U}_n$ sera caractérisée par un vecteur colonne $\underline{U}$ de $n(n+1)$ éléments donnant les deux composantes de u_i en chaque point du maillage,

la formule (9.67) donnant alors la valeur de u_i en tout point. Si l'on reporte cette fonction dans la définition (9.73) ou (9.15) de l'énergie potentielle, l'énergie de déformation $W(\tilde{\varepsilon}_{ij})$ devient une forme quadratique par rapport aux composantes de $\underline{U}$ et le travail des efforts $\tilde{T}_f^d$ devient une forme linéaire par rapport à ces mêmes composantes. Ainsi :

$$K(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2}\underline{U}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{U} - \underline{F}^T \underline{U} \tag{9.74}$$

où la matrice carrée $\underline{\underline{A}}$ est la matrice de rigidité, symétrique définie positive et où le vecteur colonne $\underline{F}$ caractérise les efforts extérieurs. Pour minimiser l'énergie potentielle, il faut donc résoudre le système linéaire :

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{U} = \underline{F} \tag{9.75}$$

Nous utilisons ici le théorème de l'énergie potentielle car en MMC, il est en général très difficile d'engendrer des champs statiquement admissibles et le théorème de l'énergie complémentaire est peu utilisé dans ce contexte.

9.3.3 Étude d'un élément

Pour calculer les intégrales qui interviennent dans (9.73), il faudra sonnner les contributions de chaque triangle pour les intégrales de sur face, et de chaque segment pour les intégrales de ligne. Nous allons donc déjà examiner la contribution d'un élément triangulaire abc à l'énergie de déformation au travail des efforts de volume, et au travail des efforts de surface.

Sur chaque élément, nous pouvons donc écrire le déplacement en fonction de la valeur aux sommets a, b et c de cet élément :

$$\tilde{u}_i = u_i^a \lambda_a(x_1, x_2) + u_i^b \lambda_b(x_1, x_2) + u_i^c \lambda_c(x_1, x_2) \tag{9.76}$$

où λ_a, λ_b et λ_c sont les coordonnées barycentriques du point définies par :

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ x_1^a & x_1^b & x_1^c \\ x_2^a & x_2^b & x_2^c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9.77}$$

et qui dépendent uniquement de la géométrie de l'élément. (9.76) donne donc :

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^a & u_1^b & u_1^c \\ u_2^a & u_2^b & u_2^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ x_1^a & x_1^b & x_1^c \\ x_2^a & x_2^b & x_2^c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9.78}$$

Discrétisation de l'énergie

Le tenseur des déformations ε_{ij} est alors constant et donné par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} u_1^a & u_1^b & u_1^c \\ u_2^a & u_2^b & u_2^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ x_1^a & x_1^b & x_1^c \\ x_2^a & x_2^b & x_2^c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^S \tag{9.79}$$

où $\underline{\underline{A}}^S$ désigne la matrice $\underline{\underline{A}}$ symétrisée :

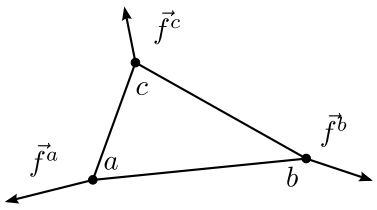
$$\underline{\underline{A}}^S = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T\right) \tag{9.80}$$

L'intégration de l'énergie de déformation sur le triangle abc donne :

$$W_{abc} = \frac{1}{2}\iint_{abc} \left\{\lambda\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)^2 + 2\left(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+2\varepsilon_{12}^2\right)\right\} \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{\underline{a}}_{abc}\underline{u} \tag{9.81}$$

où $\underline{u}$ désigne le vecteur colonne des déplacements aux nœuds, donc un sous-vecteur de $\underline{U}$, et où $\underline{\underline{a}}_{abc}$ est une matrice symétrique 6×6 qui résulte de l'intégration sur le triangle et il dépend donc uniquement de la géométrie.

Si l'on dérive la forme quadratique W_{abc} par rapport aux déplacements des nœuds, on obtient un vecteur colonne



$$f = \underline{\underline{a}}_{abc}\underline{u} = \frac{\partial W_{abc}}{\partial \underline{u}} \tag{9.82}$$

qui peut s'interpréter d'un point de vue énergétique comme donnant les *forces élastiques* $\vec{f}^a$, $\vec{f}^b$ et $\vec{f}^c$, qui doivent être appliquées aux nœuds pour produire le déplacement $\underline{u}$.

Ceci résulte par exemple du bilan énergétique (9.32) qui montre que pour une variation $\mathrm{d}\underline{u}$ des déplacements aux nœuds, la variation de l'énergie de déformation :

$$\mathrm{d}W_{abc} = \underline{f}^T\,\mathrm{d}u \tag{9.83}$$

est égale au travail des efforts exercés sur l'élément. On peut donc interpréter (9.83) comme donnant le travail des « forces élastiques » (suppoées concentrées aux nœuds) $\vec{f}^a$, $\vec{f}^b$, $\vec{f}^c$. Il faut bien garder à l'esprit, cependant, qu'il ne s'agit là que d'une interprétation, et que ces « forces élastiques » sont fictives et sans aucune existence réelle ; ce ne sont pas des forces, mais des dérivées de l'énergie de déformation.

Discrétisation des forces de volume

Calculons la contribution du triangle abc au travail des forces de volume, c'est à dire dans (9.73) des forces de pesanteur. En reportant (9.76) dans (9.73) et en remarquant que :

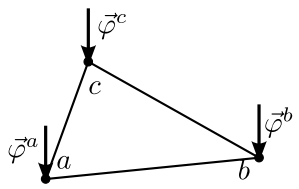
$$\iint_{abc}\lambda_a\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \iint_{abc}\lambda_b\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \iint_{abc}\lambda_c\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{S}{3} \tag{9.84}$$

on obtiendra :

$$-\iint_{abc}\rho g\tilde{u}_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = -\frac{\rho g S}{3}\left(u_2^a+u_2^b+u_2^c\right) = \underline{\varphi}^T\cdot\underline{u} \tag{9.85}$$

$$\underline{\varphi}^T = \left(0,0,0,-\frac{\rho g S}{3},-\frac{\rho g S}{3},-\frac{\rho g S}{3}\right) \tag{9.86}$$

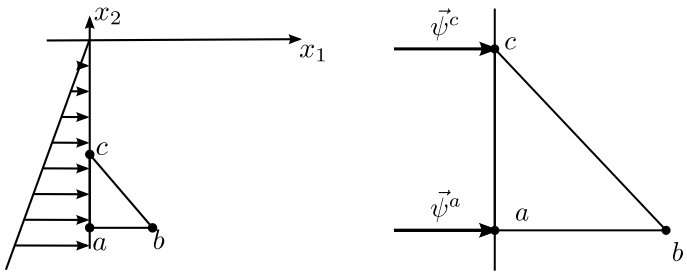
D'un point de vue énergétique, on peut interpréter (9.85) en disant que les forces de volume sont équivalentes aux trois forces concentrées $\vec{\varphi}^a$, $\vec{\varphi}^b$, $\vec{\varphi}^c$ appliquées aux nœuds.



De manière générale, l'écriture du travail des efforts de volume conduit à décomposer ces efforts en trois forces concentrées appliquées aux nœuds.

Discrétisation des efforts surfaciques

Soit ac, un côté du triangle abc appartenant à S_f, c'est-à-dire où les efforts surfaciques sont donnés.



La restriction de (9.78) à ac donne, dans le cas particulier du barrage (ac vertical) :

$$\tilde{u}_1 = u_1^a \frac{x_2 - x_2^c}{x_2^a - x_2^c} + u_1^c \frac{x_2 - x_2^a}{x_2^c - x_2^a} \tag{9.87}$$

De sorte que la contribution de ac au travail des efforts surfaciques est :

$$\frac{\varpi}{x_2^c - x_2^a} \int_{x_2^a}^{x_2^c} \left[u_1^c x_2 \left(x_2 - x_2^a \right) - u_1^a x_2 \left(x_2 - x_2^c \right) \right] \mathrm{d}x_2$$

et on obtient finalement

$$-\int_a^c \varpi x_2 \tilde{u}_1 \, \mathrm{d}x_2 = -\frac{\varpi \Delta h}{2} \left[\left(x_2^c - \frac{\Delta h}{3} \right) u_1^c + \left(x_2^a + \frac{\Delta h}{3} \right) u_2^c \right] \tag{9.88}$$

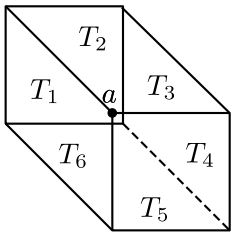
$$\underline{\psi}^T = \left(-\frac{\varpi \Delta h \left(x_2^c + \frac{\Delta h}{3} \right)}{2}, 0, -\frac{\varpi \Delta h \left(x_2^a - \frac{\Delta h}{3} \right)}{2}, 0, 0, 0 \right) \tag{9.89}$$

D'un point de vue énergétique, les forces de contact exercées sur ac sont équivalentes à deux forces concentrees $\vec{\psi}^a$ et $\vec{\psi}^c$ exercées aux nœuds. Par contre, u_i^b n'intervient pas dans (9.87) et donc $\vec{\psi}^b = 0$.

9.3.4 Assemblage

Pour calculer $K\left(\tilde{u}_i\right)$, c'est-à-dire pour expliciter (9.74), on doit sommer la contribution de tous les triangles pour l'énergie de déformation et le travail des forces de volume, ainsi que la contribution de tous les segments de S_f pour le travail des forces de surface. Pour minimiser la fonction $K\left(\underline{U}\right)$ résultante, il faut annuler la dérivée de K par rapport à chaque déplacement de chaque nœud.

Cas d'un nœud intérieur a



Chaque nœud intérieur appartient à n triangles T_1, T_2,... T_n ($n = 6$ dans notre exemple). D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, le déplacement u_i^a n'interviendra dans K que par la contribution de ces n triangles.

On pourra donc écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial u_i^a} = \frac{\partial W_{T_1}}{\partial u_i^a} + \cdots + \frac{\partial W_{T_n}}{\partial u_i^a} = f_i^{a,T_1} + \cdots + f_i^{a,T_n} \tag{9.90}$$

où les quantités f_i^{a,T_j} sont les composantes des forces élastiques appliquées en a sur chacun des éléments T_1, T_2,... T_n entourant a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_1^a}\iint_\Omega \rho g\tilde{u}_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 0 = -\left(\varphi_1^{a,T_1}+\cdots+\varphi_1^{a,T_n}\right)\\ \frac{\partial}{\partial u_2^a}\iint_\Omega \rho g\tilde{u}_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{\rho g}{3}\left(S^1+\cdots+S^n\right) = -\left(\varphi_2^{a,T_1}+\cdots+\varphi_2^{a,T_n}\right)\end{aligned} \tag{9.91}$$

où les quantités φ_i^{a,T_j} sont les forces concentrées en a équivalentes aux forces de volume exercées sur chacun des éléments $T_1,\ T_2,\cdots T_n$. Enfin, u_i^a n'interviendra pas dans le travail des efforts de contact, puisque celui-ci ne fait apparaître que les déplacements des nœuds de S_f.

Ainsi, la minimisation de K par rapport à u_i^a pourra s'écrire :

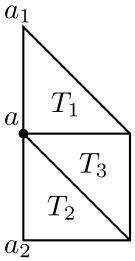
$$-\vec{f}^{a,T_1}-\cdots-\vec{f}^{a,T_n}+\vec{\varphi}^a=0 \tag{9.92}$$

On peut interpréter cette équation comme exprimant l'équilibre au nœud a sous l'action des forces qui lui sont appliquées

- forces élastiques exercées par tous les éléments entourant a, qui sont égales à l'opposé des forces élastiques $\vec{f}^{a,T_i}$ exercées sur l'élément ;
- la force $\vec{\varphi}^a=\vec{\varphi}^{a,T_1}+\cdots+\vec{\varphi}^{a,T_n}$ qui est la force concentrée équivalente en a aux forces volumiques appliquées aux éléments entourant a.

Dans notre exemple, cette force est égale au tiers (car les trois sommets de chaque triangle participent) du poids des éléments entourant a.

Cas d'un nœud frontière



C'est un nœud appartenant à S_f (car sur S_u le déplacement est donné). L'analyse précédente reste valable, mais il faut rajouter la contribution des deux segments de S_f issus de a. On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial u_i^a}\int_{OA}\varpi x_2\tilde{u}_1\,\mathrm{d}x_2 = -\psi_i^{a,T_1}-\psi_i^{a,T_2} \tag{9.93}$$

et finalement, la minimisation de K donne :

$$-\vec{f}^{a,T_1}-\cdots-\vec{f}^{a,T_n}+\vec{\varphi}^a+\vec{\psi}^a=0 \tag{9.94}$$

On peut encore interpréter (9.94) comme exprimant l'équilibre du nœud a, à condition de rajouter aux forces appliquées, la force $\vec{\psi}^a=\vec{\psi}^{a,T_1}+\vec{\psi}^{a,T_2}$ qui est la force concentrée équivalente en a aux forces de contact appliquées aux éléments entourant a.

Ainsi, on peut interpréter la méthode des éléments finis comme exprimant l'équilibre des tous les nœuds sous l'action des forces élastiques exercées par chaque élément, et des forces extérieures (volumiques ou de contact) appliquées, ces forces étant rapportées aux nœuds.

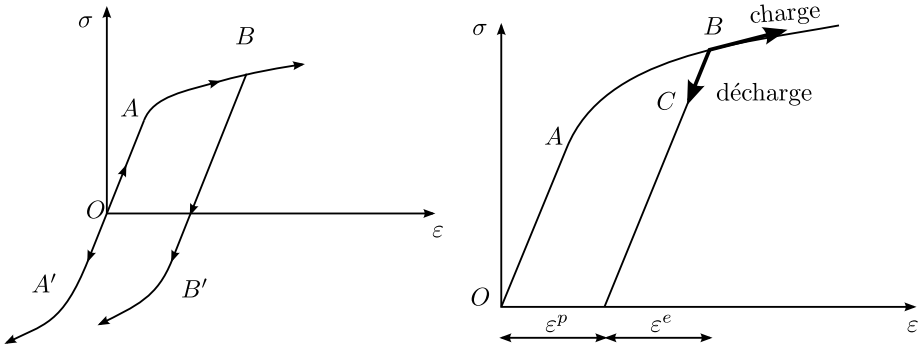
Chapitre 10

Plasticité classique

10.1 Lois de comportement

10.1.1 Comportenent plastique

Pour les métaux, comme on l'a vu au paragraphe 4.2.1, le comportement est élastique jusqu'à un certain seuil. Au delà de ce seuil de limite d'élasticité ou de plasticité, le comportement devient plastique, ce qui se traduit en particulier par une non linéarité de la courbe de traction et par une irréversibilité.



Au départ, le matériau se comporte comme un matériau élastique, tant que l'on ne sort pas du domaine élastique initial :

$$\sigma_{A'} < \sigma < \sigma_A \quad \sigma = E\varepsilon \tag{10.1}$$

avec en général $\sigma_{A'} = -\sigma_A$. Si l'on charge au delà du seuil, alors apparaissent les déformations plastiques. Si, arrivé au point B, on relâche la contrainte, alors on redescend le long de la droite BB' et le comportement redevient élastique, avec une déformation résiduelle ε^p, et tant que l'on reste dans le nouveau domaine élastique, on a :

$$\sigma_{B'} < \sigma < \sigma_B \quad \sigma = E\varepsilon^e \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{10.2}$$

avec, en général, $\sigma_{B'} \neq -\sigma_B$, et même $|\sigma_{B'}| < |\sigma_{A'}|$ (effet Bauschinger).

Ainsi, on peut à chaque instant décomposer la déformation ε en une partie élastique ε^e et une partie plastique ou résiduelle ε^p. Dans le domaine élastique, la déformation plastique reste constante :

$$\sigma_{B'} < \sigma < \sigma_B \quad \mathrm{d}\varepsilon^p = 0 \tag{10.3}$$

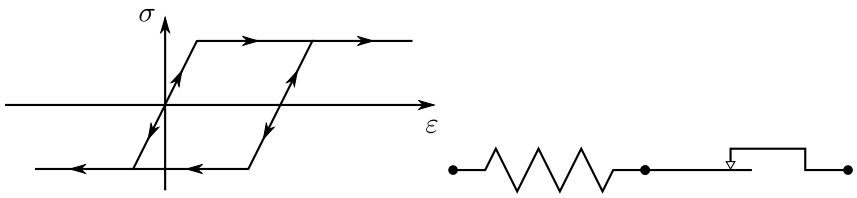
tandis que si l'on est sur le seuil $\sigma = \sigma_B$, par exemple, un processus de charge avec déformation plastique ou un processus de décharge (retour dans la zone élastique) sans

déformation plastique peuvent se développer :

$$\sigma = \sigma_B \begin{cases} \mathrm{d}\alpha \geqslant 0, \quad \mathrm{d}\varepsilon^p \geqslant 0, \quad \mathrm{d}\sigma_B = K\,\mathrm{d}\varepsilon^p \\ \mathrm{d}\alpha < 0, \quad \mathrm{d}\varepsilon^p = 0, \quad \mathrm{d}\sigma_B = 0 \end{cases} \tag{10.4}$$

la constante K étant un *module d'écrouissage*.

On peut simplifier ce comportement élasto-plastique avec écrouissage par un comportement idéalisé. Le modèle le plus simple est celui de la plasticité parfaite, c'est-à-dire sans écrouissage. Le domaine élastique reste alors fixe.



C'est le modèle rhéologique décrit au paragraphe 4.2.2. D'après (4.39) et (4.40), la loi de comportement de ce modèle peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma = E\varepsilon^e, \quad |\sigma| \leqslant \sigma_o, \quad \varepsilon = \varepsilon^o + \varepsilon^p \tag{10.5}$$

avec :

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^p = 0 \text{ si } |\sigma| < \sigma_0 \text{ ou } |\sigma| = \sigma_0, \quad |\sigma|' < 0 \\ \dot{\varepsilon}^p \geqslant 0 \text{ si } \sigma = \sigma_0, \quad \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{\varepsilon}^p \leqslant 0 \text{ si } \sigma = -\sigma_0, \quad \dot{\sigma} = 0 \end{array}\right\} \text{ charge} \tag{10.6}$$

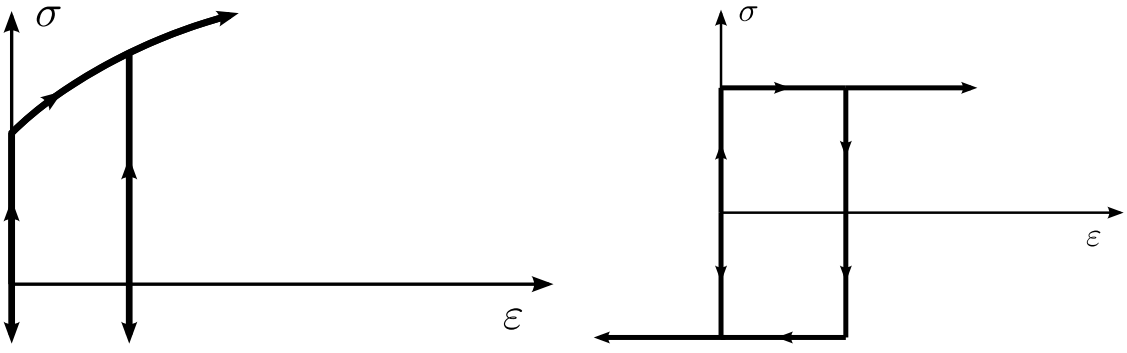
Par analogie avec ce que nous avons fait au paragraphe 4.1.2 pour les lois de frottement (4.14) ou pour les conditions de contact unilatéral (4.13), nous pouvons réécrire (10.6) sous une forme plus synthétique

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \mathrm{sign}(\sigma) \tag{10.7}$$

et :

$$\begin{array}{l} \text{si } |\sigma| < \sigma_0, \quad \lambda = 0 \\ \text{si } |\sigma| = \sigma_0, \quad \lambda \geqslant 0, \quad |\sigma|' \leqslant 0, \quad \lambda\dot{\sigma} = 0 \end{array} \tag{10.8}$$

On utilise aussi parfois, notamment pour des problèmes qui supposent de grandes déformations plastiques (mise en forme des métaux), l'approximation rigide–plastique, qui revient à négliger les déformations élastiques.



avec écrouissage parfaitement plastique

10.1.2 Plasticité parfaite

Nous nous limiterons désormais à la plasticité parfaite qui conduit à la théorie classique de la plasticité. Cette théorie peut en effet être poussée assez loin et permet d'obtenir de nombreux résultats.

La définition du seuil de plasticité dans une théorie tridimensionnelle a fait l'objet du paragraphe 5.3. De manière générale, le domaine élastique est défini par :

$$f(\sigma_{ij}) \leqslant 0 \tag{10.9}$$

où f est la fonction seuil ou fonction de fluage. En plasticité parfaite, le domaine élastique ne change pas et cette fonction est définie une fois pour toutes. Dans le cas isotrope, on a discuté au paragraphe 5.3.1 de la forme que prenait ce critère pour les métaux :

$$f(s_{ij}) = f(J_2, J_3) \leqslant 0 \tag{10.10}$$

et les deux critères les plus utilisés sont le critère de von Mises :

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \leqslant \frac{\sigma_e^2}{3} \tag{10.11}$$

et le critère de Tresca (paragraphe 5.3.1) :

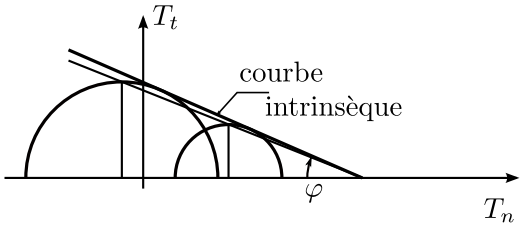
$$(\sigma_1 - \sigma_3) \leqslant \sigma_e \quad (\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3) \tag{10.12}$$

Pour les sols, la pression hydrostatique intervient essentiellement dans le critère et le critère de Coulomb donne de bons résultats :

Définition 1 — Critère de Coulomb

$$|\vec{T}_t| < c - T_n \tan\varphi \tag{10.13}$$

où c est la *cohésion* et φ, l'*angle de frottement interne*. En particulier, pour un sol sans cohésion, $c = 0$ (cas des matériaux granulaires comme le sable), le critère de Coulomb exprime simplement une loi de frottement coulombien sur chaque facette.



C'est un critère du type (5.53), la courbe intrinsèque étant une droite. Comme dans le cas unidimensionnel, nous décomposons la déformation en une partie élastique et une partie plastique :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \tag{10.14}$$

et la contrainte est donnée par une loi élastique en fonction des déformations élastiques :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkh} \varepsilon_{kh}^e \tag{10.15}$$

et il reste à compléter la théorie par une loi d'écoulement plastique donnant l'évolution de la déformation plastique au cours du temps. Il convient donc de généraliser la loi (10.7), (10.8) du cas unidimensionnel. Auparavant, reprenons, dans le cadre de l'élasto-plasticité, le bilan thermodynamique exprimé par (1.60). Compte-tenu de (10.14) et (10.15), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} D_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^p_{ij} \\ &\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^e_{ij} = A_{ijkh} \varepsilon^e_{kh} \dot{\varepsilon}^e_{ij} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{10.16}$$

où w est l'énergie de déformation élastique :

$$w = \frac{1}{2} A_{ijkh} \varepsilon^e_{ij} \varepsilon^e_{kh} \tag{10.17}$$

ce qui permet d'identifier (10.16) à (1.59) avec :

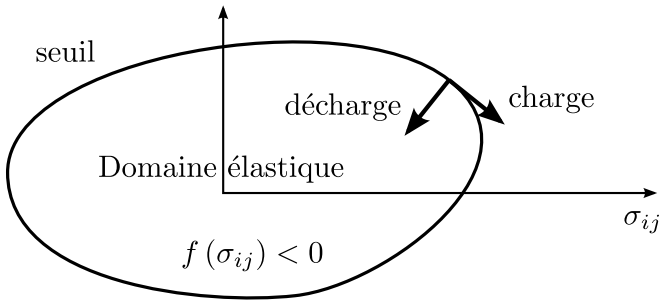
$$\rho u = w, \quad \varphi = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{10.18}$$

La puissance *élastique* se transforme en énergie interne élastique alors que la puissance *plastique* est dissipée. Le second principe de la thermodynamique donne alors l'inégalité :

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^p_{ij} \geqslant 0 \tag{10.19}$$

restriction thermodynamique sur la loi d'écoulement plastique.

10.1.3 Potentiel plastique



Comme dans le cas unidimensionnel, la déformation plastique reste constante si l'on est en évolution élastique, c'est-à-dire si l'on est dans le domaine élastique($f < 0$) ou sur le seuil $f = O$ si l'on a un processus de décharge ($\dot{f} < 0$)

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = 0 \quad \begin{cases} \text{si } f < 0 & \text{domaine élastique} \\ \text{si } f = 0, \quad \dot{f} < 0 & \text{décharge} \end{cases} \tag{10.20}$$

La déformation plastique ne varie donc que sur le seuil et dans un processus de charge ($f = 0$, $\dot{f} = 0$). La loi d'évolution est alors habituellement définie par :

Principe du travail maximal
Dans un état de contraintes σ_{ij}, le taux de déformation plastique vérifie l'inégalité

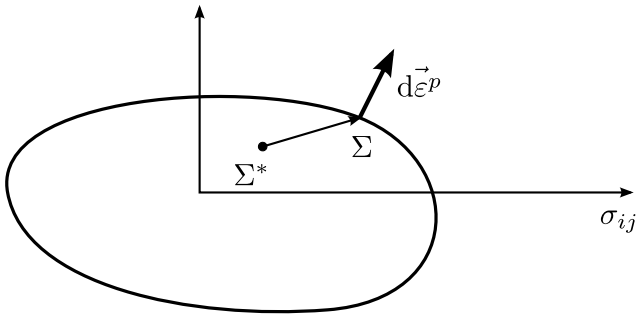
$$\left(\sigma_{ij} - \overset{*}{\sigma}_{ij}\right) \dot{\varepsilon}^p_{ij} \geqslant 0 \tag{10.21}$$

pour tout $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ acceptable, $f\left(\overset{*}{\sigma}_{ij}\right) \leqslant 0$.

En particulier, il s'ensuit que la restriction thermodynamique (10.19) est automatiquement vérifiée (il suffit de prendre $\overset{*}{\sigma}_{ij} = 0$ dans (10.21)). Géométriquement, en se plaçant dans l'espace vectoriel des contraintes (de dimension six), l'inégalité (10.21) se traduit par l'inégalité :

$$\overrightarrow{\Sigma^*\Sigma} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\varepsilon^p} \geqslant 0 \tag{10.22}$$

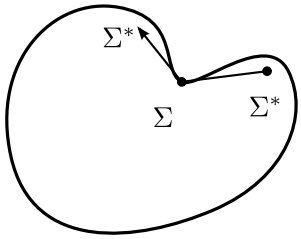
où Σ est le point représentatif de l'état de contraintes, Σ^* un point quelconque du domaine élastique et $\overrightarrow{\mathrm{d}\varepsilon^p}$, le vecteur représentatif de l'incrément de déformation plastique. Si l'on se place en un point du seuil où le plan tangent est continu, alors, en faisant varier Σ^*, on constate que l'inégalité (10.22) sera vérifiée pour tout Σ^* si-et-seulement-si le vecteur incrément de déformation plastique est :



dirigé selon la normale extérieure à la surface seuil en Σ :

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geqslant 0 \tag{10.23}$$

La fonction seuil est un *potentiel plastique*. On tire également de (10.21) la propriété de convexité du domaine élastique puisqu'en effet, si ce domaine n'est pas convexe, on constate aisément qu'il est impossible de trouver un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}\varepsilon^p}$ vérifiant (10.22) pour tout Σ^*.



Ainsi, on déduit du principe du travail maximal les propriétés de convexité (du domaine élastique) et de normalité (de $\overrightarrow{\mathrm{d}\varepsilon^p}$ à la frontière seuil). Par analogie avec ce que nous avons fait au paragraphe 4.1.2 pour la condition de frottement, nous pouvons réécrire la loi d'écoulement plastique sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p_{ij} &= 0 && \text{si } f(\sigma_{ij}) < 0 \\ \dot{\varepsilon}^p_{ij} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} && \text{si } f(\sigma_{ij}) = 0 \end{aligned} \tag{10.24}$$

avec :

$$\lambda \geqslant 0, \quad \dot{f} \leqslant 0, \quad \lambda \dot{f} = 0$$

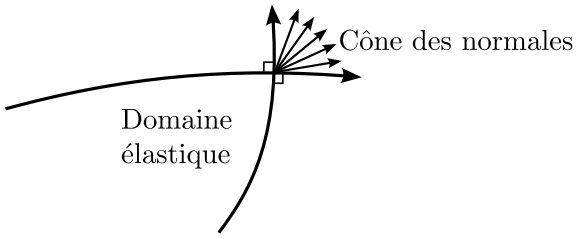
et la distinction entre processus de charge et de décharge s'effectue automatiquement par le jeu des deux inégalités et de l'inégalité sur λ et $\dot{f}$. Cela peut sembler bien compliqué,

c'est néanmoins la *bonne formulation mathématique* qui permet de démontrer de nombreux résultats. En particulier, si le critère ne dépend pas de la pression hydrostatique forme (10.10) alors il résulte de (10.24) que :

$$\dot{\varepsilon}^p_{ii} = 0 \tag{10.25}$$

Les déformations plastiques se font à volume constant (incompressibilité plastique).

Si la surface seuil présente un point anguleux comme le cas du critère de Tresca, alors le principe du travail maximal montre que le vecteur $\overrightarrow{d\varepsilon^p}$ est dans le cône des normales.



Le principe du travail maximal est une hypothèse qui sera ou non vérifiée selon les matériaux. Elle est vérifiée en première approximation pour les métaux ; elle n'est pas vérifiée par contre pour les sols. Ce principe permet d'engendrer une classe de modèles : les matériaux standards qui permettent de traiter de nombreux problèmes. Les conclusions obtenues à partir de ce type de modèle seront plus ou moins valables selon les problèmes.

Dans le cas du critère de von Mises (10.11), on obtient :

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \lambda s_{ij} \tag{10.26}$$

et, par combinaison avec (10.15), on a :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \Lambda_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh} + \lambda s_{ij} \tag{10.27}$$

qui est la loi de comportement incrémentale de la plasticité.

10.2 Exemples

10.2.1 Flexion d'une poutre

Considérons un arbre élastoplastique, et soumettons le à un moment de flexion $\mathcal{M}$ croissant (voir paragraphe 7.1.1, problèmes 5 et 6). Au départ, la solution élastique du paragraphe 7.1.3 est valable, et elle le reste tant que :

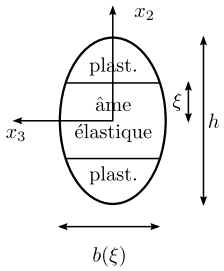
$$\mathcal{M} < \mathcal{M}_e = \frac{\sigma_e J}{\eta} \tag{10.28}$$

Au delà de $\mathcal{M}_e$, une zone plastique se développe à l'extérieur de la poutre, tandis qu'au milieu subsiste une âme élastique. En supposant qu'en chaque point, l'état de contraintes reste un état de traction simple (7.10), nous sommes amenés à prendre :

$$\sigma_{11} = \begin{cases} -\sigma_e & \xi \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{h}{2} \\ -\dfrac{\sigma_e x_2}{\xi} & -\xi \leqslant x_2 \leqslant \xi \\ +\sigma_e & -\dfrac{h}{2} \leqslant x_2 \leqslant -\xi \end{cases} \tag{10.29}$$

en supposant la poutre symétrique par rapport à l'axe x_3.

Ce champ de contraintes vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites sur la surface latérale. Il vérifie aussi si les conditions aux limites sur les extrémités avec :



$$\mathcal{M} = -\iint_{\Sigma} x_2 \sigma_{11} \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3$$

et si on introduit la fonction $b\,(x_2)$ donnant la largeur de la poutre en fonction de x_2, alors :

$$\mathcal{M} = 2\sigma_e \left\{ \int_0^{\xi} \frac{b(x_2) x_2^2}{\xi} \, \mathrm{d}x_2 + \int_{\xi}^{h/2} b(x_2) x_2 \, \mathrm{d}x_2 \right\} = \mathcal{M}\,(\xi) \tag{10.30}$$

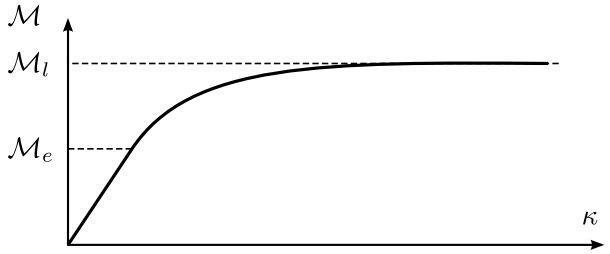
où la fonction $\mathcal{M}(\xi)$ est une fonction qui croît de $\mathcal{M}_e$ donné par (10.28) à $\mathcal{M}_l$ donné par :

$$\mathcal{M}_l = 2\sigma_e \int_0^{h/2} b(x_2) x_2 \, \mathrm{d}x_2 \tag{10.31}$$

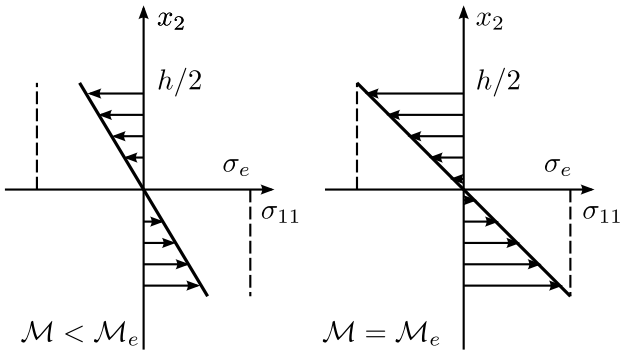
lorsque ξ décroît de $h/2$ à 0, c'est-à-dire lorsque la zone plastique s'étend jusqu'à occuper tout Σ. Il reste à calculer les déplacements. Dans la zone élastique, le calcul du paragraphe 7.1.3 reste valable en remplaçant $\mathcal{M}/J$ par σ_e/ξ, et la relation (7.31) devient :

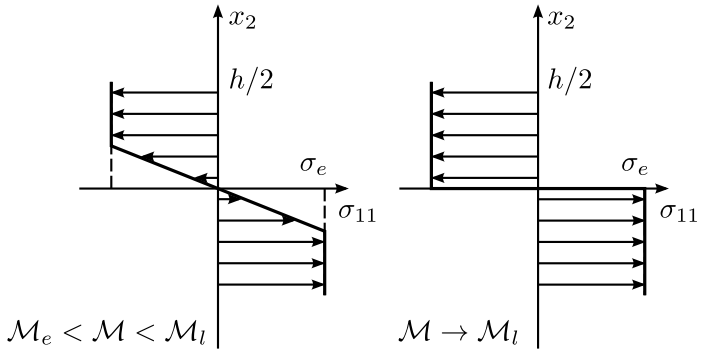
$$\kappa = \frac{\sigma_e}{E\xi} \tag{10.32}$$

qui, combiné avec (10.30), donne la relation entre le moment et la courbure.



Il reste à étendre cette solution au domaine plastique, par intégration de (10.24). Cela pose davantage de problèmes, mais il est possible de calculer un champ de déplacements répondant au problème. Ce champ n'est cependant pas unique : en général, on n'a pas unicité du champ de déplacements en plasticité.





Finalement, le comportement é1astop1astique d'une poutre en flexion est le suivant :

— comportement élastique pour $\mathcal{M} < \mathcal{M}_e$;

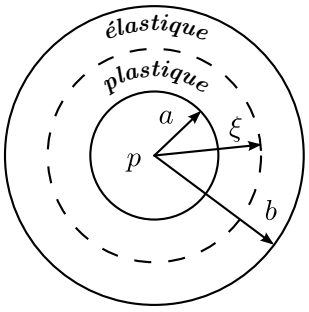
— au delà de $\mathcal{M}_e$: apparition d'une zone plastique, mais les déformations plastiques restent limitées ou *contenues* par le noyau élastique ;

— pour $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_l$, le noyau élastique disparaît et les déformations plastiques n'étant plus limitées, il y a ruine de la structure.

10.2.2 Réservoir sphérique

Reprenons en élastoplasticité le problème du réservoir sphérique que nous avons résolu en élasticité au paragraphe 6.2.2. Si l'on augmente progressivement la pression intérieure p, la solution élastique reste valable jusqu'à la pression :

$$p = p_e = \frac{2\sigma_e}{3}\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right) \tag{10.33}$$



Au delà, une zone plastique apparaît à l'intérieur du réservoir. Par symétrie, cette zone sera limitée par une sphère $r = \xi$. Dans la zone élastique, $\xi \leqslant r \leqslant b$, l'analyse du paragraphe 6.2.2 subsiste et le tenseur des contraintes est donné par :

$$\sigma_{ij} = \left(3K\alpha + \frac{2\mu\beta}{r^3}\right)\delta_{ij} - \frac{6\mu\beta}{r^3}\frac{x_i x_j}{r^2} \tag{10.34}$$

α et β étant deux constantes à déterminer.

Dans la zone plastique, $a < r < \xi$, d'après la symétrie sphérique du problème, le tenseur des contraintes aura la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = [\pi(r) + \tau(r)]\,\delta_{ij} - 3\tau(r)\frac{x_i x_j}{r^2} \tag{10.35}$$

où $\pi(r)$ représente la partie sphérique du tenseur des contraintes, et $\tau(r)$ son déviateur. Ce tenseur est de révolution autour de la direction radiale et les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \pi(r) + \tau(r), \quad \sigma_3 = \pi - 2\tau(r) \tag{10.36}$$

Les équations d'équilibre appliquées à (10.35) donnent :

$$2\tau'(r) + \frac{6\tau(r)}{r} - \pi'(r) = 0 \tag{10.37}$$

équation différentielle reliant les deux fonctions $\pi(r)$ et $\tau(r)$. D'autre part, la zone plastique doit vérifier :

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = 3\tau^2 = \frac{\sigma_e^2}{3}$$

en adoptant par exemple le critère de von Mises (comme on l'a vu en 6.2.2 le critère de Tresca donnerait-le même résultat). On en déduit donc :

$$\tau = +\frac{\sigma_e}{3} \tag{10.38}$$

(le choix du signe se fait par continuité avec la solution élastique du paragraphe 6.2.2). En reportant dans (10.37) et en intégrant, on obtient :

$$\pi = 2\sigma_e \log r + \text{Cte} \tag{10.39}$$

Ainsi, dans le domaine plastique :

$$\sigma_{ij} = 2\sigma_e \left(\log r + \gamma\right) \delta_{ij} - \sigma_e \frac{x_i x_j}{r^2} \tag{10.40}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2\sigma_e \left(\log r + \gamma\right) \quad , \quad \sigma_3 = 2\sigma_e \left(\log r + \gamma - \frac{1}{2}\right) \tag{10.41}$$

où γ est une constante d'intégration. Ainsi, le champ de contraintes défini par (10.34) pour $\xi \leqslant r \leqslant b$ et par (10.40) pour $a \leqslant \xi \leqslant r$, dépend de trois constantes d'intégration α, β, γ. Ces trois constantes d'intégration s'obtiennent en écrivant la condition aux limites en $r = b$ et la condition de continuité de σ_1, σ_2 et σ_3 au travers de la surface $r = \xi$. Remarquons ici que la condition de discontinuité (1.22) impose seulement la continuité de σ_3 ; cependant, en plasticité, on doit écrire qu'à la frontière élasto-plastique, l'état élastique est un état limite, ce qui revient à écrire la continuité de σ_1 et σ_2. Les trois constantes d'intégration étant ainsi déterminées, la condition aux limite en $r = a$ donne la valeur de p qui correspond à ξ, d'où la fonction $p(\xi)$ qui croît de p_e à p_l lorsque ξ croît de a jusqu'à b. La valeur limite p_l de p s'obtient lorsque $\xi = b$, c'est-à-dire lorsque la zone élastique disparaît. Le champ de contraintes est alors donné par (10.40), (10.41) pour tout r. La condition aux limites en $r = b$ donne alors γ et il vient :

$$\sigma_3 = 2\sigma_e \log \frac{r}{b} \tag{10.42}$$

et en faisant $r = a$, on trouve :

$$p_l = 2\sigma_e \log \frac{b}{a} \tag{10.43}$$

Comme en flexion, le réservoir se comporte élastiquement jusqu'à p_e. Au delà de p_e, des déformations plastiques apparaissent mais ces déformations restent contenues par la zone élastique jusqu'à ce que p atteigne la valeur 1imite p_l qui correspond à la ruine du réservoir.

10.3 Méthodes variationnelles

10.3.1 Problème en vitesses

En plasticité, il n'y a pas relation biunivoque entre les contraintes et les déformations ; il est donc tout à fait clair qu'un problème statique régulier, tel que nous l'avons formulé au paragraphe 6.1.1, est automatiquement mal posé. En effet, l'état de contraintes et de

déformations dans un matériau élasto-plastique ne dépend pas seulement de la sollicitation appliquée à l'instant considéré, mais aussi de tout ce qui s'est passé auparavant. Par contre, connaissant l'état actuel de contraintes et de déformations, et connaissant la variation de sollicitation, on peut espérer trouver la solution. Dans le cadre de l'hypothèse quasi-statique, on est donc amené à se poser un problème incrémental (ou problème en vitesses).

Définition 2 — Problème incrémental
Connaissaht à l'instant t le champ des contraintes $\sigma_{ij}(x,t)$ et le champ des déplacements $u_i(x,t)$, trouver leurs variations vérifiant :

— *les équations d'équilibre incrémentales :*

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{f}_i = 0 \tag{10.44}$$

— *les conditions aux limites :*

$$\begin{aligned} &\dot{\sigma}_{ij} n_j|_{S_f} = \dot{T}_i^d \\ &\dot{u}_i|_{S_u} = \dot{u}_i^d \end{aligned} \tag{10.45}$$

— *la loi de comportement incrémentale :*

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \Lambda_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh} + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \tag{10.46}$$

avec $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ donné par la loi d'écoulement plastique.

Si nous acceptons le principe du travail maximal, c'est encore un problème bien posé.

Théorème 10.1 — Théorème de l'unicité
En acceptant le principe du travail maximal, le problème posé plus haut admet une solution unique en $\dot{\sigma}_{ij}$.

Démonstration. Supposons en effet qu'il existe deux solutions $\left(\dot{\sigma}_{ij}^1, \dot{u}_i^1\right)$ et $\left(\dot{\sigma}_{ij}^2, \dot{u}_i^2\right)$. Leur différence :

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 = \dot{\sigma}_{ij}^1 - \dot{\sigma}_{ij}^2, \quad \dot{u}_i^0 = \dot{u}_i^2 - \dot{u}_i^1 \tag{10.47}$$

vérifie les équations :

$$\dot{\sigma}_{ij,j}^0 = 0, \quad \dot{\sigma}_{ij}^0 n_j|_{S_f} = 0, \quad \dot{u}_i^0|_{S_u} = 0 \tag{10.48}$$

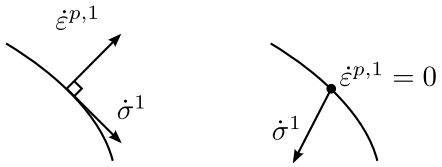
par contre, elle ne vérifie pas nécessairement la loi de comportement (10.46) qui est non linéaire. En appliquant à $\dot{\sigma}_{ij}^0$ et $\dot{u}_i^0$ le lemme fondamental du paragraphe 9.1.1, on obtient alors :

$$\iiint_\Omega \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^0 \,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega \left(\dot{\sigma}_{ij}^2 - \dot{\sigma}_{ij}^1\right)\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^2 - \dot{\varepsilon}_{ij}^1\right) \mathrm{d}v = 0 \tag{10.49}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \left(\dot{\sigma}_{ij}^2 - \dot{\sigma}_{ij}^1\right)\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^2 - \dot{\varepsilon}_{ij}^1\right) &= \left(\dot{\sigma}_{ij}^2 - \dot{\sigma}_{ij}^1\right)\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{e,2} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{e,1}\right) + \left(\dot{\sigma}_{ij}^2 - \dot{\sigma}_{ij}^1\right)\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p,2} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p,1}\right) \\ &= \Lambda_{ijkh}\left(\dot{\sigma}_{ij}^2 - \dot{\sigma}_{ij}^1\right)\left(\dot{\sigma}_{kh}^2 - \dot{\sigma}_{kh}^1\right) + \dot{\sigma}_{ij}^2\dot{\varepsilon}_{ij}^{p,2} + \dot{\sigma}_{ij}^1\dot{\varepsilon}_{ij}^{p,1} - \dot{\sigma}_{ij}^2\dot{\varepsilon}_{ij}^{p,1} - \dot{\sigma}_{ij}^1\dot{\varepsilon}_{ij}^{p,2} \end{aligned}$$

En tout point x, on connait le tenseur des contraintes, on connait donc la zone élastique Ω_e où $f(\sigma_{ij}) < 0$ et la zone plastique Ω_p où $f(\sigma_{ij}) < 0$. Dans la zone élastique, les taux de déformations plastiques sont identiquement nuls. Dans la zone plastique, on vérifie directement que, d'après le principe du travail maximal :



charge décharge

$$\dot{\varepsilon}^{p,1}_{ij}\dot{\sigma}^1_{ij} = 0, \quad \dot{\varepsilon}^{p,1}_{ij}\dot{\sigma}^2_{ij} \leqslant 0 \tag{10.50}$$

Ainsi, on peut écrire à partir de (10.49), (10.50)

$$\iiint_\Omega \Lambda_{ijkh}\left(\dot{\sigma}^2_{ij} - \dot{\sigma}^1_{ij}\right)\left(\dot{\sigma}^2_{kh} - \dot{\sigma}^1_{kh}\right) \mathrm{d}v = \iiint_{\Omega_p}\left(\dot{\sigma}^2_{ij}\dot{\varepsilon}^{p,1}_{ij} + \dot{\sigma}^1_{ij}\dot{\varepsilon}^{p,2}_{ij}\right) \mathrm{d}v \leqslant 0 \tag{10.51}$$

or, Λ_{ijkh} est défini positif. On obtient donc

$$\iiint_\Omega \Lambda_{ijkh}\left(\dot{\sigma}^2_{ij} - \dot{\sigma}^1_{ij}\right)\left(\dot{\sigma}^2_{kh} - \dot{\sigma}^1_{kh}\right) \mathrm{d}v = 0 \tag{10.52}$$

et :

$$\dot{\sigma}^2_{ij} = \dot{\sigma}^1_{ij} \tag{10.53}$$

ce qui permet de conclure. □

Par contre, on ne sait pas démontrer l'unicité des déformations. Ces problèmes sont des problèmes mathématiques difficiles et encore mal connus.

On sait également démontrer des théorèmes variationnels analogues à ceux des paragraphes 9.1.2 et 10.1.3, qui donnent naissance à des méthodes numériques de solution du problème incrémental. La résolution d'un problème élasto-plastique quasi-statique se fait donc pas à pas, par résolution d'une suite de problèmes en vitesses. Mais il est important de remarquer que pour toutes ces questions, la formulation de la loi d'écoulement plastique par le principe du travail maximal joue un rôle essentiel.

10.3.2 Introduction à l'analyse limite

Nous considérons un problème où le chargement dépend d'un seul paramètre :

$$S_u = \varnothing \text{ ou } u^d_i = 0, \quad T^d_i = \lambda T^{d0}_i, \quad f_i = \lambda f^0_i \tag{10.54}$$

Pour les problèmes envisagés au paragraphe 10.2, on a $\lambda = \mathcal{M}$ pour la poutre en flexion et $\lambda = p$, pour le réservoir sphérique.

Si l'on fait croître le chargement, on obtient toujours le même comportement. Jusqu'à $\lambda = \lambda_e$, la solution élastique convient. Au-delà apparaît une zone plastique qui progresse au fur et à mesure que λ augmente, et jusqu'à ce que pour $\lambda - \lambda_l$ on ait ruine de la structure par déformations plastiques illimitées.

La charge correspondant à $\lambda = \lambda_l$ est appelée *charge limite*. C'est la charge maximale supportable et, d'un point de vue pratique, c'est le résultat le plus intéressant et le plus significatif d'un calcul en plasticité. On a donc cherché à développer des méthodes permettant de calculer directement cette charge limite, sans résolution complète du problème élasto-plastique : c'est le domaine de l'analyse limite.

La théorie s'appuie sur deux théorèmes fondamentaux.

Définition 10.1
Un champ de contraintes $\hat{\sigma}_{ij}$ sera un champ licite pour un chargement (f_i, T_i^d) s'il est statiquement admissible et si, en tout point, il vérifie le critère de plasticité.

Définition 10.2
Un champ de vitesses $\tilde{u}_i$ sera un champ cinématiquement et plastiquement admissible (CCPA) s'il est cinématiquement admissible et si, en chaque point, il existe un tenseur de contraintes $\tilde{\sigma}_{ij}$ tel que $\tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}$ puisse être la déformation plastique associée.

Dans le cas des métaux par exemple, cette dernière condition revient simplement à imposer la condition :

$$\tilde{\dot{\varepsilon}}_{ii} = 0 \tag{10.55}$$

On définit alors sans ambiguïté la fonction de dissipation :

$$D\left(\underline{\underline{\tilde{\dot{\varepsilon}}}}_p\right) = \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\dot{\varepsilon}}^p_{ij} \tag{10.56}$$

bien qu'il puisse exister plusieurs $\tilde{\sigma}_{ij}$ compatibles avec $\tilde{\dot{\varepsilon}}^p_{ij}$. Pour le critère de von Mises par exemple :

$$D\left(\underline{\underline{\tilde{\dot{\varepsilon}}}}_p\right) = \frac{2}{3}\sigma_e\tilde{\dot{\varepsilon}}^p_{ij}\tilde{\dot{\varepsilon}}^p_{ij} \quad (\dot{\varepsilon}^p_{ii} = 0) \tag{10.57}$$

On peut alors démontrer les deux thêorèmes suivants.

Théorème 10.2 — Théorème statique
S'il existe un champ de contraintes licite pour le chargement $\left(f_i, T_i^d\right)$, alors la structure peut supporter ce chargement.

Théorème 10.3 — Théorème cinématique
S'il existe un CCPA tel que :

$$\iiint_\Omega f_i\tilde{u}_i \,\mathrm{d}v + \iint_{S_f} T_i^d\tilde{u}_i \,\mathrm{d}S > \iiint_\Omega D\left(\tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}\right)\mathrm{d}v \tag{10.58}$$

alors la structure ne peut pas supporter le chargement $\left(f_i, T_i^d\right)$.

Le premier théorème permet de construire des bornes inférieures de la charge limite. En effet, soit $\hat{\sigma}^0_{ij}$ un champ statiquement admissible (CSA) pour le chargement $\left(f_i, T_i^d\right)$. Alors, le champ $\lambda\hat{\sigma}^0_{ij}$ sera CSA pour le chargement $\left(f_i^0, T_i^{d0}\right)$. En choisissant pour λ la plus grande valeur conduisant à un champ licite :

$$\hat{\lambda} = \sup\left\{\lambda | f\left(\lambda\hat{\sigma}^0_{ij}\right) \leqslant 0 \ \forall x\right\} \tag{10.59}$$

alors, le théorème statique permet d'affirmer que $\hat{\lambda}$ est une borne inférieure de la charge limite.

De la même manière, le second théorème permet d'obtenir des bornes supêrieures de la charge limite. Soit en effet $\tilde{u}_i$ un CCPA, alors la structure ne pourra pas supporter les chargements vérifiant (10.58). La quantité :

$$\tilde{\lambda} = \iiint_{\Omega} D\left(\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\right) \mathrm{d}v \left\{ \iiint_{\Omega} f_i^0 \tilde{u}_i \, \mathrm{d}v + \iint_{S_f} T_i^{d0} \tilde{u}_i \, \mathrm{d}S \right\}^{-1} \tag{10.60}$$

est donc une borne supérieure de λ_l. On en déduit un encadrement :

$$\hat{\lambda} \leqslant \lambda_l \leqslant \tilde{\lambda} \tag{10.61}$$

qui permet d'approcher relativement simplement la charge limite. On notera l'analogie de cette méthode avec celle présentée en élasticité.

L'analyse limite est utilisée :

— en mécanique des structures, car la charge limite caractérise bien la capacité de résistance d'une structure —bien mieux en tout cas que la charge élastique λ_e. La tendance actuelle de la règlementation en matière de calcul d'ouvrage consiste à substituer un calcul plastique au calcul élastique traditionnel ;

— pour les problèmes de mise en forme des métaux (laminage, filage, etc.), car elle permet d'évaluer les efforts nécessaires ;

— en mécanique des sols, pour calculer la capacité de résistance d'un ouvrage. Il convient alors d'agir avec précaution, car les théorèmes que nous avons énoncés supposent le principe du travail maximal, principe non vérifié pour les sols.

Chapitre 11

Thermoélasticité linéaire

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte de la variable température. Dans de nombreux problèmes, cependant, il est nécessaire de la prendre en compte (problèmes de contraintes thermiques, par exemple).

11.1 Lois de comportement

11.1.1 Théorie thermoélastique

Un matériau thermoélastique est un matériau dans lequel la seule source de dissipation est la conduction thermique. Nous considérons une théorie de petites perturbations autour d'un état de référence à contraintes et déformations nulles et à la température de référence θ_0. Nous poserons :

$$\theta = \theta_0 + \bar{\theta} \tag{11.1}$$

avec $\bar{\theta}$ petit. D'autre part, l'entropie n'étant définie qu'à une constante près, nous la prendrons nulle dans cet état de référence. Finalement, ε_{ij}, σ_{ij}, $\bar{\theta}$ et η seront des variables de perturbation et nous pourrons négliger les termes d'ordre supérieur par rapport à ces variables.

Dans ces conditions, l'équation de conservation de l'énergie (1.47) et l'inégalité de Clausias-Duhem (1.57) s'écrivent :

$$\rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + r - q_{j,j} \tag{11.2a}$$

$$-\rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{\theta_0} q_i \theta_{,i} \geqslant 0 \tag{11.2b}$$

En élasticité, e dépendait de ε_{ij}. En thermoélasticité, e dépendra de ε_{ij} et de η :

$$e = e(\varepsilon_{ij}, \eta) \tag{11.3}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem (11.2b) donne alors :

$$-\rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} - \theta \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\sigma_{ij} - \rho_0 \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{\theta_0} q_i \theta_{,i} \geqslant 0 \tag{11.4}$$

et, pour que la seule source de dissipation soit la conduction thermique, on doit avoir :

$$\theta = \frac{\partial e}{\partial eta}, \quad \sigma_{ij} = \rho_0 \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad q_i \theta_{,i} \leqslant 0 \tag{11.5}$$

Comme dans le cas élastique, nous pouvons faire un développement en série de e :

$$\rho_0 e(\varepsilon_{ij},\eta) = \rho_0 e_0 + a_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho_0 a_0 \eta + \frac{1}{2}A_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} + h_{ij}\varepsilon_{ij}\eta + \frac{1}{2}m\eta^2 \tag{11.6}$$

et :

$$\begin{aligned} \rho_0\theta &= \rho_0 a_0 + h_{ij}\varepsilon_{ij} + m\eta \\ \sigma_{ij} &= a_{ij} + A_{ijkh}\varepsilon_{kh} + h_{ij}\eta \end{aligned} \tag{11.7}$$

Or, dans la configuration de référence, on a $\varepsilon_{ij} = \eta = 0$, $\sigma_{ij} = 0$ et $\theta = \theta_0$. On doit donc avoir $a_0 = \theta_0$, $a_{ij} = 0$ et on peut aussi prendre $e_0 = 0$. On obtient alors :

$$\rho_0 e = \rho_0\theta_0\eta + \rho_0\bar{e}(\varepsilon_{ij},\eta) \tag{11.8a}$$

$$\rho_0\bar{e} = \frac{1}{2}A_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} + h_{ij}\varepsilon_{ij}\eta + \frac{1}{2}m\eta^2 \tag{11.8b}$$

$$\sigma_{ij} = \rho_0\frac{\partial\bar{e}}{\partial\varepsilon_{ij}} = A_{ijkh}\varepsilon_{kh} + h_{ij}\eta \tag{11.8c}$$

$$\rho_0\bar{\theta} = \frac{\partial\bar{e}}{\partial\eta} = h_{ij}\varepsilon_{ij} + m\eta \tag{11.8d}$$

Compte-tenu de (11.5), l'équation (11.2a) devient, après linéarisation :

$$\rho_0\theta_0\frac{d\eta}{dt} = r - q_{j,j} \tag{11.9}$$

Pour compléter la théorie, il faut écrire une loi de conduction thermique, donnant le flux de chaleur en fonction du gradient de température. En théorie linéaire, on prend la loi de Fourier :

$$q_i = -K_{ij}\theta_{,j} \tag{11.10}$$

avec un tenseur de conduction K_{ij} symétrique — cette symétrie est expérimentalement bien vérifiée, et théoriquement bien fondée par les relations d'Onsager ; elle n'est toutefois pas indispensable, on peut imaginer un tenseur de conduction non symétrique — et défini positif — d'après le second principe (11.5).

Le formalisme (11.8a) et (11.8d) définit les contraintes et la température en fonction des déformations et de l'entropie, ceci étant lié au choix de l'énergie interne comme potentiel thermodynamique. Une transformation de Legendre sur $e(\varepsilon_{ij},\eta)$ permettra d'écrire d'autres relations. Par exemple, on peut introduire une *enthalpie libre* :

$$\rho_0 g(\sigma_{ij},\theta) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho_0\theta\eta - \rho_0 e \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\partial g}{\partial\theta} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \rho_0\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} \tag{11.11}$$

soit, en notant $\varepsilon_{ij} = \Sigma_{ijkh}\sigma_{kh} + l_{ij}\bar{\theta}$ et $\rho_0\eta = l_{ij}\sigma_{ij} + n\bar{\theta}$:

$$\rho_0 g = \frac{1}{2}\Sigma_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh} + l_{ij}\sigma_{ij}\bar{\theta} + \frac{1}{2}n\bar{\theta}^2 \tag{11.12}$$

où les coefficients de la forme quadratique $\rho_0 g$ peuvent s'exprimer à partir de ceux de la forme $\rho_0\bar{e}$ par les relations :

$$\begin{aligned} n &= (m - h_{ij}\Lambda_{ijkl}h_{kl})^{-1} \\ l_{ij} &= -n\Lambda_{ijkl}h_{kl} \\ \Sigma_{ijkl} &= \Lambda_{ijkl} + n\Lambda_{ijpq}\Lambda_{klmn}h_{pq}h_{mn} \end{aligned} \tag{11.13}$$

De même, on pourra exprimer εij et $\bar{\theta}$ en fonction de l'enthalpie $h(\sigma_{ij},\eta)$, et σ_{ij} et η en fonction de l'énergie libre $\psi(\varepsilon_{ij},\bar{\theta})$.

11.1.2 Thermoélasticité classique

Dans le cas isotrope, les différents tenseurs prennent des formes simples. Un tenseur du quatrième ordre prend la forme (5.22) et dépend donc de deux coefficients. Un tenseur du second ordre est sphérique et fait donc intervenir un coefficient. La théorie fera donc intervenir cinq coefficients scalaires : quatre coefficients pour le potentiel thermodynamique (11.8a) ou (11.12) et un pour le tenseur de conduction K_{ij}. En effet, (11.10) devient :

$$q_i = k\theta_{,i}, \quad k \geqslant 0 \tag{11.14}$$

où k est la conductivité thermique.

Nous convenons désormais d'omettre les barres sur e et θ. En particulier, θ désignera désormais non pas la température absolue, mais sa variation par rapport à la température de référence.

Si α est la coefficient de dilatation linéaire du matériau, alors en l'absence de contraintes, une variation de température θ entraîne une dilatation thermique :

$$\varepsilon_{ij} = \alpha\theta\delta_{ij} \tag{11.15}$$

D'autre part, à la température de référence θ_0, le matériau se comporte comme un matériau élastique isotrope, avec un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν, mesurés en conditions isothermes. Nous pouvons donc écrire

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha\theta\delta_{ij} \tag{11.16a}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 3K\alpha\theta\delta_{ij} \tag{11.16b}$$

où $3K = 3\lambda + 2\mu$ est le module de rigidité à la compression isotherme, et λ et μ sont les coefficients de Lamé isothermes donnés par (5.33) à partir de E et ν.

Quant au coefficient de θ^2 dans le potentiel thermodynamique, on peut le relier à la chaleur spécifique à contraintes ou déformations constantes :

$$c = c_\varepsilon = \theta_0 \left(\frac{\partial^2 e}{\partial\theta^2}\right)_{\varepsilon_{ij}=\text{cte}}, \quad c_\sigma = \theta_0 \left(\frac{\partial^2 e}{\partial\theta^2}\right)_{\sigma_{ij}=\text{cte}} \tag{11.17}$$

ce qui nous permet d'écrire, à partir de (11.13) :

$$\rho_0\eta = \alpha\sigma_{ii} + \frac{\rho_0 c_\sigma}{\theta_0}\theta \tag{11.18}$$

ou bien, en fonction de déformations :

$$\rho_0\eta = 3K\alpha\varepsilon_{ii} + \frac{\rho_0 c}{\theta_0}\theta \tag{11.19}$$

et l'on obtient la relation :

$$c_\sigma = c + \frac{9K\alpha^2\theta_0}{\rho_0} \tag{11.20}$$

entre les chaleurs spécifiques à déformations constantes et contraintes constantes.

Ainsi, la théorie classique de la thermoélasticité fait intervenir cinq coefficients : deux coefficients élastiques isothermes, le coefficient de dilatation α, la chaleur spécifique à déformations constantes c et la conductibilité thermique k.

11.2 Problèmes de thermoélasticité

11.2.1 Problèmes aux limites

Les équations de la thermoélasticité sont les équations du mouvement et l'équation de l'énergie (11.9)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{11.21a}$$

$$\rho_0 \theta_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = r - q_{j,j} \tag{11.21b}$$

complétées par les lois de comportement, (11.14), (11.16b) et (11.19) par exemple, des conditions initiales :

$$u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = V_i^0(x), \quad \theta(x,0) = \theta^0(x) \tag{11.22}$$

et des conditions aux limites, qui sont les mêmes qu'en élasticité pour les variables mécaniques et qui, pour les variables thermiques, donnent, soit la température, soit le flux de chaleur. Nous prendrons par exemple des conditions aux limites mixtes :

$$u_i|_{S_u} = u_i^d, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_f} = T_i^d, \quad \theta|_{S_\theta} = \theta^d, \quad q_i n_i|_{S_q} = q^d \tag{11.23}$$

avec $S = S_u + S_f = S_\theta + S_q$. Le problème est bien posé, et on peut démontrer un théorème d'unicité analogue à celui du paragraphe 6.1.2.

Compte-tenu des lois de comportement (11.16b), (11.19) et (11.22), les équations (11.21a) et (11.21b) donnent :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) u_{k,ik} + \mu u_{i,kk} - 3K\alpha\theta_{,i} + f_i \tag{11.24a}$$

$$\rho_0 c \frac{\partial \theta}{\partial t} = r + k\theta_{,ii} - 3K\alpha\theta_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} \tag{11.24b}$$

Dans de nombreux cas, on peut raisonnablement négliger le dernier terme de (11.24b). On arrive ainsi à la *thermoélasticité découplée*. En effet, le déplacement disparaît de l'équation (11.24b), on peut donc déjà résoudre le problème thermique :

$$\begin{aligned} &\rho_0 c \frac{\partial \theta}{\partial t} = r + k\Delta\theta \\ &\theta|_{S_\theta} = \theta^d, \quad q_i n_i|_{S_q} = q^d \\ &\theta(x,0) = \theta^0(x) \end{aligned} \tag{11.25}$$

problème classique pour l'équation de la chaleur et qui permet de calculer la répartition de température indépendamment des déformations. Une fois connu le champ de température, on peut revenir au problème mécanique :

$$\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f} - 3K\alpha \operatorname{grad} \theta \\ &u_i|_{S_u} = u_i^d, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_f} = T_i^d \\ &u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = V_i^0(x) \end{aligned} \tag{11.26}$$

qui est un problème d'élasticité classique, le couplage thermoélastique se manifestant seulement par une modification des données f_i et T_i^d.

Nous avons formulé ici le problème dynamique mais l'on peut aussi envisager le problème statique : les dérivées par rapport au temps et les conditions initiales disparaissent. On peut alors démontrer des principes variationnels analogues à ceux du cas élastique. On peut également envisager un problème mécanique quasi-statique avec un problème thermique dynamique.

11.2.2 Exemple

À titre d'exemple, nous allons calculer les contraintes thermiques engendrées par l'échauffement d'une cavité sphérique de rayon a dans un massif infini. Nous considérons donc le problème défini par :

$$r = 0 : \quad f_i = 0 \tag{11.27a}$$

$$r \to \infty : \quad \theta \to 0, \quad \sigma_{ij} \to 0 \tag{11.27b}$$

$$r = a : \quad \theta = \theta_1, \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \tag{11.27c}$$

Il s'agit d'un problème statique et l'équation thermique (11.24b) donne :

$$\Delta\theta = 0 \tag{11.28}$$

D'après la symétrie du problème, θ dépend uniquement de r, $\theta = \theta(r)$. On a :

$$\Delta\theta = \theta''(r) + \frac{2}{r}\theta'(r) \tag{11.29}$$

et l'équation (11.28) s'intègre en :

$$\Delta\theta = \frac{A}{r} + B \tag{11.30}$$

où A et B sont deux constantes d'intégration que nous déterminons à partir des conditions aux limites pour $r = a$ et $r \to \infty$. On obtient :

$$\Delta\theta = \theta_1 \frac{a}{r} \tag{11.31}$$

et nous avons résolu le problème thermique qui, en statique, est toujours découplé du problème mécanique.

Pour résoudre le problème mécanique, nous partons de l'équation du mouvement (11.24a) qui, en statique, donne, en supposant $\vec{f} = 0$:

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} - 3K\alpha\,\mathrm{grad}\,\theta = 0 \tag{11.32}$$

ou bien, voir (5.25) :

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} - 3K\alpha\,\mathrm{grad}\,\theta = 0 \tag{11.33}$$

D'après la symétrie du problème, le déplacement est radial :

$$u_i = g(r)x_i \tag{11.34}$$

et, comme on l'a vu au paragraphe 5.2.2, $\mathrm{rot}\,\vec{u}$. L'équation s'intègre alors pour donner :

$$\mathrm{grad}\,[(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{div}\,\vec{u} - 3K\alpha\theta] = 0 \tag{11.35a}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{3K\alpha}{\lambda + 2\mu}\theta + 3A \tag{11.35b}$$

où A est une constante d'intégration. Compte-tenu de (5.37) et de (11.31), on obtient alors pour $g(r)$ l'équation différentielle suivante :

$$3g(r) + \frac{g'(r)}{r} = 3A + \frac{3K\alpha\theta_1 a}{\lambda + 2\mu}\frac{1}{r} \tag{11.36}$$

qui s'intègre pour donner :

$$g(r) = A + \frac{B}{r^3} + \frac{3K\alpha\theta_1 a}{2(\lambda + 2\mu)}\frac{1}{r} \tag{11.37}$$

Il reste à déterminer les deux constantes d'intégration A et B en écrivant les conditions aux limites sur les contraintes. Pour cela, nous posons :

$$C_0 = \frac{3K\alpha\theta_1 a}{2(\lambda + 2\mu)} \tag{11.38}$$

et nous calculons :

$$\varepsilon_{ij} = \left(A + \frac{B}{r^3} + \frac{C_0}{r}\right)\delta_{ij} - \left(\frac{3B}{r^3} + \frac{C_0}{r}\right)\frac{x_i x_j}{r^2} \tag{11.39}$$

et les déformations principales sont :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = A + \frac{B}{r^3} + \frac{C_0}{r}, \quad \varepsilon_3 = A - \frac{2B}{r^3} \tag{11.40}$$

la valeur propre ε_3 étant associée à la direction radiale. On peut ensuite calculer les contraintes par (11.16b), et la condition à l'infini donne directement $A = 0$. On calcule ensuite σ_3 :

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \frac{2C_0\lambda}{r} - \frac{4\mu B}{r^3} - 2(\lambda + 2\mu)\frac{C_0}{r} \\ &= -\frac{4\mu}{r}\left(\frac{B}{r^2} + C_0\right)\end{aligned} \tag{11.41}$$

et en écrivant que σ_3 est nul pour $r = a$, on obtient la valeur de B :

$$B = -C_0 a^2 \tag{11.42}$$

soit, finalement :

$$\begin{aligned}g(r) &= \frac{3K\alpha\theta_1}{2(\lambda + 2\mu}\frac{a}{r}\frac{r^2 - a^2}{r^2} \\ \sigma_3 &= -\frac{6\mu K\alpha\theta_1}{\lambda + 2\mu}\frac{a}{r}\frac{r^2 - a^2}{r^2} \\ \sigma_1 = \sigma_2 &= -\frac{3\mu K\alpha\theta_1}{\lambda + 2\mu}\frac{a}{r}\frac{r^2 - a^2}{r^2}\end{aligned} \tag{11.43}$$

Annexe A

Notations tensorielles

L'objectif de cette annexe est de familiariser le lecteur avec les notations tensorielles. Les résultats que nous démontrerons sont tout à fait classiques et il convient de les considérer comme des exercices pour l'apprentissage des manipulations indicielles.

A.1 Vecteurs et tenseurs

A.1.1 Notations indicielles

Nous nous plaçons dans l'espace l'euclidien E à trois dimensions. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée. Un vecteur $\vec{V}$ est alors représenté par ses composantes V_1, V_2 et V_3 :

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3 = V_i \vec{e}_i \tag{A.1}$$

en utilisant la convention de sommation : chaque fois que dans une expression un indice est répété, il convient de faire varier cet indice de 1 à 3 et de faire la somme. Dans l'expression (A.1), l'indice i est *muet* : on aurait aussi bien pu écrire $V_j \vec{e}_j$ ou $V_k \vec{e}_k$.

Soit $\mathbb{A}$ une application linéaire, alors dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, cette application est représentée par une matrice 3×3 :

$$\mathbb{A} \text{ repr } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

et, si $\vec{W} = \mathbb{A}\vec{V}$, les composantes de $\vec{W}$ sont données par :

$$\begin{aligned} W_1 &= A_{11}V_1 + A_{12}V_2 + A_{13}V_3 \\ W_2 &= A_{21}V_1 + A_{22}V_2 + A_{23}V_3 \\ W_3 &= A_{31}V_1 + A_{32}V_2 + A_{33}V_3 \end{aligned}$$

que nous pouvons condenser en :

$$W_i = A_{ij}V_j \tag{A.3}$$

L'indice j est un indice muet : on aurait aussi bien pu écrire $A_{ik}V_k$. L' indice i est un indice *libre*. Dans une égalité, on doit avoir pour chaque terme les mêmes indices libres.

Nous introduisons les symboles de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{A.4}$$

En particulier, l'application identité $\mathbb{I}$ est représentée par la matrice de composantes δ_{ij} :

$$\mathbb{I} \text{ repr } \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée, alors :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{A.5}$$

et le produit scalaire de deux vecteurs est :

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V_i \vec{e}_i \cdot W_j \vec{e}_j = V_i W_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = V_i W_j \delta_{ij} = V_i W_i \tag{A.6}$$

De même, la composition de deux applications linéaires se traduît par le produit de leurs matrices représentatives, c'est-à-dire en notations indicielles :

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \circ \mathbb{B}, \quad C_{ik} = A_{ij} B_{jk} \tag{A.7}$$

A.1.2 Changement de repère

Soit $(\vec{e}_i)$ une base orthonormée et $(\vec{e}_i{}')$ une autre base orthonormée. Soit Q_{ij} la matrice de passage :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= Q_{11}\vec{e}_1 + Q_{12}\vec{e}_2 + Q_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2{}' &= Q_{21}\vec{e}_1 + Q_{22}\vec{e}_2 + Q_{23}\vec{e}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{e}_i{}' = Q_{ij}\vec{e}_j \\ \vec{e}_3{}' &= Q_{31}\vec{e}_1 + Q_{32}\vec{e}_2 + Q_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Les deux bases étant orthonormées, on doit avoir :

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = Q_{ik} Q_{jl} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = Q_{ik} Q_{jk} \tag{A.9}$$

qui montre que la matrice inverse de Q_{ij} est la matrice transposée :

$$Q_{ik} Q_{jk} = Q_{ki} Q_{kj} = \delta_{ij} \tag{A.10}$$

En particulier, on déduit de (A.8), la relation inverse :

$$\vec{e}_j = Q_{kj} \vec{e}_k{}' \tag{A.11}$$

qui s'obtient par le calcul suivant : on multiplie (A.8) par Q_{ik} et on utilise (A.10) :

$$Q_{ik} \vec{e}_i{}' = Q_{ik} Q_{ij} \vec{e}_j = \delta_{kj} \vec{e}_j = \vec{e}_k \tag{A.12}$$

c'est-à-dire (A.11) à un changement d'indices près.

A.1.3 Vecteurs

Soit $\vec{V}$ un vecteur, V_i ses composantes dans la base $\vec{e}_i$ et V_i' celles dans la base $\vec{e}_i{}'$:

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i = V_i' \vec{e}_i{}' \tag{A.13}$$

Pour obtenir 1es lois de transformation permettant de passer de nous utilisons (A.11) :

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i = V_i Q_{ki} \vec{e}_k{}'$$

et par identification avec (A.13), il vient :

$$V'_k = Q_{ki} V_i, \quad V_j = Q_{ij} V'_i \tag{A.14}$$

formule de transformation des composantes d'un vecteur.

On appelle *invariant* une fonction des composantes d'un ou plusieurs vecteurs indépendante du repère choisi. Par exemple, l'invariant produit scalaire est défini par :

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V_i W_i \tag{A.15}$$

C'est un invariant car, d'après (A.14) et (A.10) :

$$V'_i W'_i = Q_{ij} V_j Q_{ik} W_k = \delta_{jk} V_j W_k = V_j W_j$$

A.1.4 Applications linéaires

Soit $\mathbb{A}$ une application linéaire de E dans E. Dans la base $\vec{e}_i$, elle est représentée par une matrice A_{ij} et dans la base $\vec{e}_i{}'$, par une autre matrice A'_{ij}. Pour obtenir les lois de transformation, nous partons de (A.3) et de (A.14) :

$$W_i = A_{ij} V_j, \quad W'_i = A'_{ij} V'_j, \quad W'_i = Q_{ik} W_k = Q_{ik} A_{kl} V_l = Q_{ik} A_{kl} Q_{jl} V'_j \tag{A.16}$$

et par identification, il vient :

$$A'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl}, \quad A_{ij} = Q_{ki} Q_{lj} A'_{kl} \tag{A.17}$$

En particulier, on a vu que les symboles de Kronecker δ_{ij} étaient les composantes de la matrice associée à l'application identité. Par application de (A.17) :

$$\delta'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} \delta_{kl} = Q_{ik} Q_{jk} = \delta_{ij} \tag{A.18}$$

et l'application identité est représentée dans toute base par la même matrice.

A.1.5 Formes bilinéaires

Soit A une forme bilinéaire sur E, c'est-à-dire une application bilinéaire $E \times E \to \mathbb{R}$. Dans une base $\vec{e}_i$, elle est représentée par une matrice A_{ij} telle que :

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = A_{ij} V_i W_j \tag{A.19}$$

Pour obtenir la loi de transformation de A_{ij} nous partons de (A.19) et de (A.14) :

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = A_{ij} V_i W_j = A'_{ij} V'_i W'_j = A_{ij} Q_{ki} V'_k Q_{lj} W'_l \tag{A.20}$$

d'où par identification :

$$A'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl}, \quad A_{ij} = Q_{ki} Q_{lj} A'_{kl} \tag{A.21}$$

c'est-à-dire la même loi de transformation que pour une application linéaire. Ceci est évidemment dû au fait que nous n'envisageons que des repères orthonormés. En particulier, la forme bilinéaire représentée dans toute base par les symboles de Kronecker est le produit scalaire.

A.1.6 Tenseurs du second ordre

Il résulte de ce qui précède que l'on peut identifier application linéaire et forme bilinéaire sur E. Nous appellerons *tenseur du second ordre*, cette entité mathématique, généralisation de la notion de vecteur. Algébriquement, on peut la définir en introduisant une opération bilinéaire *produit tensoriel*, notée $\otimes$, et le tenseur $\mathbb{A}$ sera défini à partir de ses composantes A_{ij} par :

$$\mathbb{A} = A_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \tag{A.22}$$

formule qui généralise (A.1). On obtient alors directement la loi de transformation (A.17) ou (A.21) à partir de (A.8) ou (A.11) :

$$\mathbb{A} = A_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = A'_{ij}\,\vec{e}_i{}' \otimes \vec{e}_j{}' = A_{ij}Q_{ki}\,\vec{e}_k{}' \otimes Q_{lj}\,\vec{e}_l{}' = Q_{ki}Q_{lj}A_{ij}\,\vec{e}_k{}' \otimes \vec{e}_l{}' \tag{A.23}$$

d'où par identification :

$$A'_{ij} = Q_{ik}Q_{jl}A_{kl}, \quad A_{ij} = Q_{ki}Q_{lj}A'_{kl} \tag{A.24}$$

et un tenseur du second ordre pourra représenter, suivant les circonstances, une application linéaire (exemple : le tenseur des contraintes) ou une forme bilinéaire (exemple : le tenseur des déformations). Un tenseur sera dit :

— symétrique si :

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{A.25}$$

— antisymétrique si :

$$A_{ij} = -A_{ji} \tag{A.26}$$

— isotrope si :

$$A_{ij} = a\delta_{ij} \tag{A.27}$$

Un tenseur quelconque peut toujours être décomposé en une partie symétrique $\mathbb{A}^S$ et une partie antisymétrique $\mathbb{A}^A$:

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^A + \mathbb{A}^S, \quad A_{ij} = A^A_{ij} + A^S_{ij}, \quad A^A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}), \quad A^S_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) \tag{A.28}$$

A.1.7 Tenseurs d'ordre superieur

Considérons, par exemple, une application linéaire de l'espace des tenseurs d'ordre deux dans lui-même (exemple : le tenseur d'élasticité). Dans une base $\vec{e}_i$, il est représenté par une quantité Λ_{ijkl} à quatre indices :

$$\mathbb{A} = \lambda[\mathbb{B}], \quad A_{ij} = \Lambda_{ijkl}B_{kl} \tag{A.29}$$

La loi de transformation des Λ_{ijkl} s'obtient directement à partir de (A.21) :

$$\begin{aligned} &A_{ij} = \Lambda_{ijkl}B_{kl}, \quad A'_{ij} = \Lambda_{ijkl}B'_{kl} \\ &A_{ij} = Q_{im}Q_{jn}A_{mn} = Q_{im}Q_{jn}\Lambda_{mnkl}B_{kl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{pk}Q_{ql}\Lambda_{mnkl}B'_{pq} \end{aligned}$$

d'où la loi de transformation :

$$\begin{aligned} \Lambda'_{ijkl} &= Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lp}\Lambda_{mnpq} \\ \Lambda_{mnpq} &= Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lp}\Lambda'_{ijkl} \end{aligned} \tag{A.30}$$

forme analogue à (A.24) ou (A.1). Nous introduisons donc le *tenseur du quatrième ordre* :

$$\Lambda = \Lambda_{ijkl}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \tag{A.31}$$

qui, suivant les circonstances, sera une application linéaire de l'espace des tenseurs du second ordre dans lui-même, une forme bilinéaire sur ce même espace, une forme quadrilinéaire sur l'espace des vecteurs, etc.

A.1.8 Invariants

On appelle *invariant* du tenseur du second ordre $\mathbb{A}$ une fonction des A_{ij} indépendante du repère choisi. Par exemple, 1es fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{tr}\mathbb{A} = A_{ii} \\ \mathrm{tr}\mathbb{A}^2 = A_{ij}A_{ji}, \qquad \mathrm{tr}\mathbb{A}^n = \cdots \\ \|\mathbb{A}\|^2 = A_{ij}A_{ij} \end{cases} \tag{A.32}$$

sont des invariants de $\mathbb{A}$. En effet, on a par exemple :

$$\begin{aligned} &A'_{ii} = Q_{ik}Q_{il}A_{kl} = \delta_{kl}A_{kl} = A_{kk} \\ &A'_{ij}A'_{ij} = Q_{ik}Q_{jl}A_{kl}Q_{im}Q_{jn}A_{mn} = \delta_{km}\delta_{ln}A_{kl}A_{mn} = A_{kl}A_{kl}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

On définit de la même manière les invariants de plusieurs tenseurs, ou d'un tenseur et de plusieurs vecteurs. Par exemple, les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}) = A_{ij}B_{jk}C_{ki} \\ &\mathbb{A} : \mathbb{B} = A_{ij}B_{ij} \\ &\vec{V} \cdot \mathbb{A}\vec{W} = V_i A_{ij} W_j \end{aligned} \tag{A.33}$$

sont des invariants.

En particulier, on remarque que $\mathbb{A} : \mathbb{B}$ définit un produit scalaire sur l'espace des tenseurs du second ordre. Pour ce produit scalaire, l'espace des tenseurs symétriques est orthogonal à l'espace des tenseurs anti-symétriques. En effet, si $\mathbb{A}$ est un tenseur symétrique et $\mathbb{\Omega}$ un tenseur anti-symétrique :

$$A_{ij}A_{ji}, \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \tag{A.34}$$

On a alors :

$$\mathbb{A} : \mathbb{\Omega} = A_{ij}\Omega_{ij} = A_{ji}\Omega_{ji} = -A_{ij}\Omega_{ij} = 0 \tag{A.35}$$

la première transformation résultant d'un échange des indices muets i et j, la seconde, de (A.34). De même, on peut décomposer un tenseur symétrique en partie sphérique et déviateur :

$$\mathbb{A} = (\frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbb{A})\mathbb{I} + \mathbb{A}^D, \quad A^D_{ii} = 0 \tag{A.36}$$

et, à nouveau, c'est une décomposition en sous-espaces orthogonaux.

A.2 Permutations et déterminants

A.2.1 Symboles de permutation

Nous introduisons les symboles de permutation :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } i,j,k \text{ permutation paire de } 1,2,3 \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ permutation impaire de } 1,2,3 \\ 0 & \text{si deux indices sont répétés} \end{cases} \tag{A.37}$$

On peut relier ces symboles aux produits mixtes des vecteurs de base :

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) \tag{A.38}$$

On démontre alors sans difficulté les relations suivantes :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \end{array} \tag{A.39}$$

A.2.2 Déterminant d'une matrice

On peut démontrer que dans un changement de repère :

$$\varepsilon'_{ijk} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}\varepsilon_{mnp} = \pm\varepsilon_{ijk} \tag{A.40}$$

suivant que le changement de base est direct ou non. Si nous nous limitons aux repères orthonormés directs, alors :

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \tag{A.41}$$

et les ε_{ijk} sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre, qui représente, par exemple, la forme trilinéaire produit mixte :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \varepsilon_{ijk}U_iV_jW_k \tag{A.42}$$

Les symboles de permutation permettent le calcul du déterminant d'une matrice par :

$$\varepsilon_{ijk} \det A = \varepsilon_{mnp}A_{im}A_{jn}A_{kp} \tag{A.43}$$

ou par (A.39) :

$$\det A = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}A_{im}A_{jn}A_{kp} \tag{A.44}$$

En particulier, d'après (A.40), $\det A$ est un invariant du tenseur du second ordre $\mathbb{A}$. On peut également donner pour l'inverse d'une matrice (ou d'un tenseur) l'expression suivante :

$$\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}, \quad B_{ji} = \frac{1}{2\det \mathbb{A}}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}A_{mp}A_{np} \tag{A.45}$$

En effet, on a, par (A.39) et (A.43) :

$$A_{ik}B_{kj} = \frac{1}{2\det \mathbb{A}}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{kpq}A_{ik}A_{mp}A_{nq} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{imn} = \delta_{ij} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I} \tag{A.46}$$

A.2.3 Polynôme caractéristique

Les valeurs propres d'un tenseur du second ordre sont obtenues par résolution de l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \tag{A.47}$$

soit, par développement de (A.44) :

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}(A_{im} - \lambda\delta_{im})(A_{jn} - \lambda\delta_{jn})(A_{kp} - \lambda\delta_{kp}) = 0$$

$$P(\lambda) = I_3 - \lambda I_2 + \lambda^2 I_1 - \lambda^3 \tag{A.48}$$

avec :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}A_{im}A_{jn}A_{kp} = \det\mathbb{A} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ij}) = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr}\mathbb{A})^2 - \operatorname{tr}\mathbb{A}^2] \\ I_1 &= A_{ii} = \operatorname{tr}\mathbb{A} \end{aligned} \tag{A.49}$$

et I_1, I_2, I_3 sont appelés invariants fondamentaux du tenseur $\mathbb{A}$. On peut montrer que tout invariant de $\mathbb{A}$ peut s'exprimer à partir de ces trois invariants fondamentaux. Cela résulte, en particulier, de l'équation de Cayley-Hamilton :

$$P(\mathbb{A}) = I_3\mathbb{I} - I_2\mathbb{A} + I_1\mathbb{A}^2 - \mathbb{A}^3 \tag{A.50}$$

qui permet d'exprimer $\mathbb{A}$, et par récurrence $\mathbb{A}^4$, $\mathbb{A}^5$, etc. en fonction de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^2$.

A.2.4 Adjoint d'un tenseur antisymétrique

Soit il $\mathbb{\Omega}$ un tenseur antisymétrique. Sa matrice représentative est :

$$\mathbb{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{A.51}$$

Nous pouvons lui associer le vecteur :

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{31} \\ \Omega_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.52}$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est le vecteur adjoint du tenseur antisymétrique $\mathbb{\Omega}$. Cette relation est exprimée par la relation :

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k, \quad \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \tag{A.53}$$

En particulier, le vecteur $\vec{y} = \mathbb{\Omega}\vec{x}$ est donné par :

$$y_i = \Omega_{ij}x_j = \varepsilon_{ijk}\omega_k x_j \tag{A.54}$$

A.3 Calcul vectoriel et analyse vectorielle

A.3.1 Calcul vectoriel

Les notations indicielles permettent d'exprimer simplement le produit scalaire par (A.15) et le produit mixte par (A.42). Le produit vectoriel s'exprime aussi simplement par :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}, \quad c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \tag{A.55}$$

comme on peut s'en convaincre par exemple en écrivant :

$$\vec{x} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}) = \varepsilon_{ijk} x_i a_j b_k$$

ou bien par un calcul direct.

En particulier, si Ω est un tenseur antisymétrique et $\vec{\omega}$ son vecteur adjoint, alors, si $\vec{y} = \Omega \vec{x}$, on a, du fait de (A.53) :

$$y_i = \Omega_{ij} x_j = \varepsilon_{ijk} \omega_k x_j \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \vec{x} = \vec{x} \wedge \vec{\omega} \tag{A.56}$$

On peut également démontrer facilement les identités du calcul vectoriel, par exemple :

$$\begin{aligned} &(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} \\ &(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned} \tag{A.57}$$

En effet, si $\vec{x} = (\vec{a} \wedge \vec{b})\,\vec{c}$, on a d'après (A.55) et (A.39)

$$\begin{aligned} x_i &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn} a_m b_n c_k = \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jmn} a_m b_n c_k \\ &= (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) a_m b_n c_k \\ &= a_k c_k b_i - b_k c_k a_i \end{aligned}$$

En guise d'exercice, on pourra démontrer de manière analogue (A.57).

A.3.2 Analyse vectorielle

Nous considérons maintenant des fonctions à valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles, définies sur un ouvert Ω. Nous noterons d'une virgule la dérivée partielle par rapport à x_i

$$,_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{A.58}$$

Par exemple, si f est une fonction scalaire, nous définissons :

— son gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = f_{,i} \vec{e}_i \text{ vecteur} \tag{A.59}$$

— son laplacien :

$$\Delta f = f_{,ii} \text{ scalaire} \tag{A.60}$$

Si $\vec{v}$ est une fonction vectorielle, nous dêfinissons :

— sa divergence :

$$\text{div } \vec{v} = v_{i,i} \text{ scalaire} \tag{A.61}$$

— son rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\,\vec{e}_i \text{ vecteur} \tag{A.62}$$

— son gradient :

$$\text{grad}\,\vec{v} = v_{i,j}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \text{ tenseur} \tag{A.63}$$

— son laplacien :

$$\Delta\vec{v} = v_{i,jj}\,\vec{e}_i \text{ vecteur} \tag{A.64}$$

et l'on a, en particulier :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v} - \Delta\vec{v} \tag{A.65}$$

En effet, si $\vec{u} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$, on a, par (A.62) et (A.39) :

$$u_i = \varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{kmn} v_{n,m}\right)_{,j} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn} v_{n,mj} = v_{i,ij} - v_{i,jj} \tag{A.66}$$

c'est-à-dire le second membre de (A.65), par (A.59), (A.61) et (A.64).

Enfin, si $\mathbb{A}$ est un tenseur, on définit sa divergence :

$$\text{div}\,\mathbb{A} = A_{ij,j}\,\vec{e}_i \text{ vecteur} \tag{A.67}$$

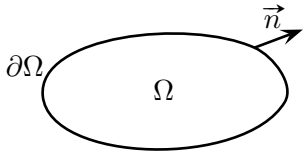
On démontre alors facilement un certain nombre de relations utiles, par exemple :

$$\text{div}(f\vec{a}) = f\,\text{div}\,\vec{a} + \vec{a}\cdot\text{grad}\,f \tag{A.68}$$

$$\text{div}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}\cdot\text{rot}\;\vec{a} - \vec{a}\cdot\text{rot}\;\vec{b} \tag{A.69}$$

et ainsi de suite.

A.3.3 Transformations d'integrales



Soit Ω un domaine de l'espace, $\partial\Omega$ sa frontière, et $\vec{n}$ sa normale extérieure.

On démontre en mathématiques le théorème suivant :

Théorème A.1
Si ϕ est une fonction continue et à dérivée continue dans Ω, et si $\partial\Omega$ admet un plan tangent continu par morceaux, alors on a :

$$\iiint_\Omega \phi_{,i}\,\mathrm{d}v = \iint_{\partial\Omega} \phi n_i\,\mathrm{d}S \tag{A.70}$$

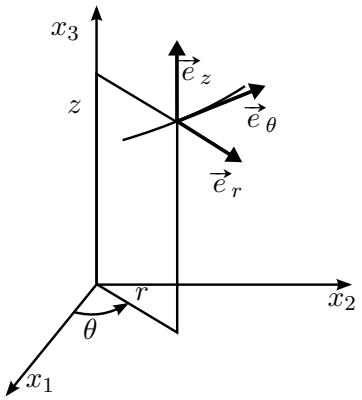
et toutes les formules de transformation d'intégrales utilisées dans ce cours peuvent se déduire de ce théorème.

A.4 Coordonnées curvilignes

Les formules du paragraphe A.3.2 et les formules que nous avons écrites dans ce cours sont valables en coordonnées cartésiennes. En coordonnées curvilignes, il faut prendre quelques précautions, car les vecteurs de base changent. Cela ne modifie en rien les relations entre tenseurs (par exemple, la loi de comportement), mais cela intervient chaque fois que l'on a des dérivations (par exemple, dans les équations d'équilibre ou dans la définition des déformations à partir des déplacements). Nous allons donner un formulaire pour les coordonnées sphériques et cylindriques .

A.4.1 Coordonnées cylindriques

Repère local : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Définition des déformations :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\theta} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right\} \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right\}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right\}$$

Equations d'équilibre :

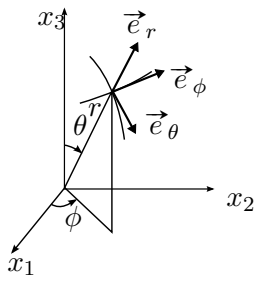
$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = 0$$

A.4.2 Coordonnées sphériques

Repère local : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{r\phi} & \sigma_{\theta\phi} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi})$$

Définition des déformations :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\theta} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2r}\left\{\frac{\partial u_\phi}{\theta} - u_\phi\cot\theta\right\} + \frac{1}{2r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}$$

$$\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right\}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right\}$$

Equations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\theta}\cot\theta}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \frac{1}{r\sin\theta}\sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\left[(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi})\cot\theta + 3\sigma_{r\theta}\right] + f_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}(3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\theta\phi}\cot\theta) + f_\phi = 0$$

Bibliographie

[1] J. Duc et D. Beller : *Mécanique des solides réels. Élasticité.* Cepadues, Toulouse, 1976.

[2] J. Duc et D. Bellet : *Problèmes d'élasticité.* Cepadues, Toulouse, 1976.

[3] G. Duvaut et J. L. Lions : *Les inéquations variationnelles en Mécanique et en Physique.* Dunod, Paris, 1972. 125

[4] C. I. Dym et I. H. Shames : *Solid mechanics, a variational approach.* McGraw Hill, New York, 1973.

[5] A. C. Eringen : *Mechanics of Continua.* J. Wiley & Sons, New York, 1967. 1

[6] P. Germain : *Mécanique des Milieux Continus.* Masson, Paris, 1962. 1, 3, 8

[7] P. Germain : *Cours de Mécanique des Milieux Continus, Tome 1 : Théorie Générale.* Masson, Paris, 1973. 1, 3, 5

[8] G. Gontier : *Mécanique des Milieux Déformables.* Dunod, Paris, 1969. 1, 3, 8

[9] M. E. Gurtin : *The Theory of Linear elasticity*, volume VIa/2 de *Handbuch der Physik.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

[10] R. Hill : *The mathematical theory of plasticity.* Oxford University Press, 1964.

[11] A. A. Ilioushine : *Plasticité, Déformation élastoplastiques.* Eyrolles, Paris, 1956.

[12] W. Jonhson et P. B. Mellok : *Plasticity for mechanical engineers.* Van Nostrand, London, 1962.

[13] W. M. Lai, D. Rubin et E. Krempl : *Introduction to continuum mechanics.* Pergamon, Oxford, 1978. 1

[14] L. D. Landau et E. M. Lifschitz : *Théorie de l'élasticité, Cours de Physique théorique, tome VII.* Ed. de Moscou, 1967.

[15] A. Love : *Mathematical theory of elasticity.* Dover, London, 1944. 96

[16] J. Mandel : *Cours de Mécanique des Milieux Continus, tomes 1 et 2.* Gauthier-Villars, Paris, 1966. 1, 3

[17] J. Mandel : *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables.* P.W.N., Varsovie, 1974. 1

[18] J. Mandel : *Propriétés mécaniques des matériaux : rhéologie, plasticité.* Eyrolles, Paris, 1977.

[19] N. I. Muskhelishvili : *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Noordhoff, Groningen, 1953. 96, 108

[20] H. Parkus : *Thermoelasticity.* Blaisdell, Waltham, 1968.

[21] W. Prager : *Problèmes de plasticité théorique.* Dunod, Paris, 1958.

[22] W. Prager : *Introduction to Mechanics of Continua.* Ginn and Co, New York, 1961. 1

[23] M. Roy : *Mécanique, tome II : Milieux Continus.* Dunod, Paris, 1966. 1

[24] L. I. Sedov : *A course in continuum mechanics, tomes I, II, III, IV.* Walters Noordhoff, Groningen, 1971. 1

[25] L. Solomon : *Élasticité linéaire.* Masson, Paris, 1968.

[26] S. Timoshenko et J. Goodier : *Théorie de l'élasticité.* Béranger, Paris, 1961.

[27] C. A. Truesdell et W. Noll : *The non linear field theories of mechanics.* Handbuch der Physik, Bd III/3. Springer, Berlin, 1965.

[28] C. A. Truesdell et R. Toupin : *The classical field theories.* Handbuch der Physik, Bd III/1. Springer, Berlin, 1960.

[29] R. Valid : *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures.* Eyrolles, Paris, 1977. 125

[30] O. C. Zienkiewicz : *La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur.* Ediscience, 1973.