Autour de l'exposant critique d'un groupe kleinien

Marc Peigné

Autour de l'exposant critique d'un groupe kleinien

Marc Peigné[(1)],

Journées Platon, 11, 12 & 13 Octobre 2010

Nous exposons ici quelques propriétés élémentaires autour des exposants critiques des groupes discrets d'isométries en courbure strictement négative et pincée. Nous rappelons quelques résultats essentiels et présentons quelques outils classiques utilisés sur ce sujet.

1 Exposant critique et série de Poincaré

Nous considérons une variété complète simplement connexe X à courbures sectionnelles pincées $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$ (et plus généralement un espace métrique CAT(-1) propre). Nous fixons une origine o de X ; la distance entre deux points x et y de X est notée (x, y). Enfin, ∂X désigne le bord visuel de X et l'on pose $\bar{X} := X \cup \partial X$.

Nous considérons un groupe Kleinien de X c'est-à-dire un groupe discret Γ d'isométries de X préservant l'orientation. Nous supposerons pour simplifier que Γ est sans torsion : ses éléments sont donc, soit des isométries paraboliques, soit des isométries hyperboliques.

L'orbite $\Gamma \cdot o$ s'accumule sur ∂X ; l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est appelé *ensemble limite de* Γ et est noté Λ_Γ. Cet ensemble contient $1, 2$ ou une infinité non dénombrable de points ; dans le premier cas, Γ est parabolique, dans le second cas il est cyclique et engendré par une isométrie hyperbolique et dans le dernier cas, il est dit *non élémentaire* et il contient en particulier des sous-groupes libres du type $\mathbb{F}^2$ (par exemple des sous-groupes de Schottky).

On étudie le comportement de la fonction orbitale de Γ définie par :

$$\forall x, y \in X, \forall R > 0 \quad N_\Gamma(x, y, R) := \sharp\{\gamma \in \Gamma : (x, \gamma \cdot y) \leq R\}$$

(on écrira pour simplifier $N_\Gamma(R) := N_\Gamma(o, o, R)$). L'exposant $\limsup\limits_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \ln N_\Gamma(x, y, R)$ ne dépend ni de x ni de y.

De l'hypothèse de pincement, on déduit que l'entropie volumique $h_{\text{vol}}(X)$ de X est finie (avec $a(N-1) \leq h_{\text{vol}}(X) \leq b(N-1)$ où N est la dimension de la variété [7]) ; il en est de même pour l'exposant critique de Γ puisque l'on a $\delta_\Gamma \leq h_{\text{vol}}(X)$.

On peut aussi considérer la fonction "annulaire" suivante :

$$\forall x, y \in X, \forall R, \Delta > 0 \quad n_\Gamma(R, \Delta) := \sharp\{\gamma \in \Gamma : R - \Delta \leq (x, \gamma \cdot y) \leq R + \Delta\}.$$

(on écrivant de même $n_\Gamma(R, \Delta) := n_\Gamma(o, o, R, \Delta)$). Comme ci-dessus, l'exposant $\limsup\limits_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \ln N_\Gamma(x, y, R)$ ne dépend ni de x ni de y.

Grâce au lemme élémentaire suivant, nous avons en fait les égalités

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \ln N_\Gamma(R) = \limsup_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \ln n_\Gamma(R, \Delta).$$

[1]Marc Peigné, LMPT, UMR 6083, Faculté des Sciences etTechniques, Parc de Grandmont, 37200 Tours – mail : peigne@lmpt.univ-tours.fr

Lemma 1.0.1 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 0} u_n = +\infty$; on pose $U_n := u_0+\cdots+u_n$ pour tout $n\geq 0$. Alors, pour tout $s>0$, les séries $\sum_{n\geq 0} u_n e^{-sn}$ et $\sum_{n\geq 0} U_n e^{-sn}$ convergent ou divergent simultanément. En particulier, elles ont le même exposant critique u, donné par*

$$u := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln u_n = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln U_n \geq 0.$$

L'exposant $\delta_\Gamma := \limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\ln N_\Gamma(R) = \limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\ln n_\Gamma(R,\Delta)$ est aussi appelé *exposant de Poincaré* de Γ, ou *exposant critique de* Γ ; en effet, la série dite *de Poincaré* définie par

$$\forall x,y\in X, \forall s\geq 0 \quad \mathcal{P}_\Gamma(x,y,s) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s(x,\gamma\cdot y)}$$

diverge pour $s<\delta_\Gamma$ et converge pour $s>\delta_\Gamma$.

Exemples

- Si $\Gamma=\langle h\rangle$ où h est une isométrie hyperbolique, son exposant critique est nul (noter que la "limsup" est en fait une limite et que la série de Poincaré diverge en 0).

- Dans $\mathbb{H}^2$, notons p l'isométrie parabolique $z\mapsto z+1$; un calcul explicite en géométrie hyperbolique donne $(i,p^n\cdot i)=(i,i+n)=2\ln n+O(1)$ si bien que l'exposant de $\langle p\rangle$ vaut $\frac{1}{2}$. Noter que la "limsup" est aussi une limite ici et que la série de Poincaré de $\langle p\rangle$ diverge en $1/2$. Remarquer aussi que si la courbure est constante égale à $-b^2$, l'exposant critique du groupe $\langle p\rangle$ devient alors égal à $b/2$.

- On peut modifier la métrique hyperbolique de $\mathbb{H}^2$ de façon à avoir des larges bandes 2 à 2 disjointes $\{z : a_n\leq \mathrm{Im}z\leq b_n\}$, avec $b_n<a_{n+1}$, où la métrique est alternativement à courbure $-a^2$ ou $-b^2$ (avec $b>a$) Si la largeur des bandes b_n-a_n croît suffisamment vite, on aura alors
$$\liminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\ln N_{\langle p\rangle}(R)=a/2 \qquad < \quad \limsup_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\ln N_{\langle p\rangle}(R)=b/2.$$

- Si Γ est co-compact dans $\mathbb{H}^d, d\geq 2$, son exposant critique vaut $d-1$; il en est de même en courbure variable, la valeur $d-1$ étant alors remplacée par l'entropie volumique de X, définie par
$$h_{\mathrm{vol}}(X) := \limsup_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\ln \mathrm{Vol}(B_X(o,R)) \tag{1}$$
et la "limsup" est une limite dans ce cas. Cet argument provient de [10] où il est démontré que l'exposant critique d'un tel groupe coïncide avec l'entropie topologique du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la variété compacte considérée (cet argument a été repris par ailleurs par G. Robert [12] pour étudier la croissance des groupes hyperboliques). Donnons quelques précisions : on choisit un domaine fondamental $\mathcal{D}$ pour l'action de Γ, domaine que l'on peut supposer relativement compact et dont on note Δ le diamètre, on a alors
$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma/(o,\gamma\cdot o)\leq R-\Delta}\gamma\cdot\mathcal{D}\subset B(o,R)\leq \bigcup_{\gamma\in\Gamma/(o,\gamma\cdot o)\subset R+\Delta}\gamma\cdot\mathcal{D}.$$

L'égalité (1) s'en déduit immédiatement ; le fait que la "limsup" soit une limite vient du fait que, si l'on pose $u_n := n_\Gamma(n, 2\Delta)$, on a, à une constante multiplicative près,

$$u_{n+m} \le u_n u_m.$$

Il vient

$$(u_n)^{1/n} \to u := \inf_{n\ge 1} (u_n)^{1/n} = e^{\delta_\Gamma} \tag{2}$$

- Si Γ est un réseau non uniforme de $\mathbb{H}^d, d \ge 2$ (ie $\mathrm{vol}(\mathbb{H}^d/\Gamma) < +\infty$ mais $\mathbb{H}^d/\Gamma$ non compact), son exposant critique vaut $d-1$; il en est de même en courbure variable 1/4-pincée (ie $b^2 \le 4a^2$) la valeur $d-1$ étant remplacée là aussi par l'entropie volumique $h_{\mathrm{vol}}(X)$ de X (voir [4][(2)]). Attention, lorsque la courbure n'est plus 1/4-pincée, on peut avoir $\delta_\Gamma < h_{\mathrm{vol}}(X)$.

Une première question naturelle est de savoir si la "limsup" est une limite ou non ; la réponse est "non" de façon générale, comme l'exemple du groupe parabolique ci-dessus le suggère. Cependant, dès que Γ n'est pas élémentaire, nous avons le

Théorème 1.0.2 *(T. Roblin [13] & D. Sullivan [16])Si Γ est un groupe non élémentaire, alors, pour tous x et y de X, on a*

$$\delta_\Gamma = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \ln N_\Gamma(x, y, R).$$

De plus, il existe une constante $C := C(\Gamma, x, y) > 0$ telle que

$$N_\Gamma(x, y, R) \le C e^{\delta_\Gamma R}.$$

La première assertion de ce théorème est due à Th. Roblin, tandis que la seconde découle du célèbre "lemme de l'ombre " de Sullivan ; la démonstration de ces deux assertions repose sur l'existence de densités conformes et la construction de Patterson de telles familles de mesures. Nous proposons ici une approche radicalement différente et élémentaire ([6]) qui permet en particulier de comprendre certains phénomènes qui apparaissent lorsque X est remplacé par un revêtement normal non simplement connexe.
Démonstration. On utilise de façon cruciale le lemme classique suivant (voir par ex [2]) qui découle du fait que la courbure est pincée :

Lemma 1.0.3 *Pour tout $\theta > 0$, il existe une constante $D > 0$ dépendant de θ et de la borne supérieure de la courbure $-a^2$, telle que pour tout triangle géodésique T de sommets $x, y, z \in X$ et dont l'angle en y est plus grand que $\theta > 0$, on a*

$$d(x, z) \ge d(x, y) + d(y, z) - D.$$

On fixe $\Delta > 0$, $a, b >> \Delta$ et $\alpha, \beta \in \Gamma$ tels que $a - \Delta \le d(o, \alpha \cdot o) \le a + \Delta$ et $b - \Delta \le d(o, \beta \cdot o) \le b + \Delta$.

[2]l'idée de base est que pour toute horoboule $\mathcal{H}$ et tout point x sur l'horosphère $\partial\mathcal{H}$, l'ensemble $B(x, R) \cap \mathcal{H}$ est approximativement égal à la boule de rayon $R/2$ intérieure à $\mathcal{H}$ et tangente en x à $\partial\mathcal{H}$; son volume est donc comparable à celui d'une boule de rayon $R/2$ et n'influe donc pas sur la croissance du volume global lorsque la courbure est 1/4-pincée

Le groupe Γ étant non élémentaire, il possède un sous-groupe de type θ-Schottky $H = \langle h_1, h_2\rangle$ avec $\theta > 0$ [3] ; on peut alors, selon la position relative des points $\alpha^{-1}\cdot o$ et $\beta \cdot o$, associer de façon unique au couple (α, β) un couple (α', β), avec $\alpha' = \alpha h_i^{\pm 2}$, et de telle sorte que l'angle en o du triangle $(\alpha')^{-1}\cdot o,\ o,\ \beta\cdot o$ soit $\geq \theta_0 > 0$. D'après le lemme précédent, on a approximativement

$$(o, \alpha'\beta \cdot o) \simeq a + b.$$

Remarquons par ailleurs qu'il existe un entier $M \geq 1$ tel que tout élément $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $(o, \gamma\cdot o) \simeq a + b$ se décompose en au plus M façons distinctes de la forme $\gamma = \alpha'\beta$ avec $(o, \alpha'\cdot o) \simeq a$ et $(o, \beta\cdot o) \simeq b$.

On prouve ainsi l'existence d'une constante $C > 0$ et d'un entier $\kappa \geq 1$ tels que

$$\forall k, l >> 0 \quad u_k u_l \leq C \sum_{i=k+l-\kappa}^{k+l+\kappa} u_i$$

où l'on a posé $u_k := n_\Gamma(k, \Delta)$ pour tout entier $k \geq 0$. Lorsque la suite $(u_{k+1}/u_k)_{k\geq 1}$ est majorée[4], on voit, quitte à changer u_l en $C'u_l$ avec $C' > 0$, que la suite $(u_k)_k$ est sur-multiplicative ; on sait alors que la suite $(u_k^{1/k})_k$ converge vers sa borne supérieure. Le lemme s'en déduit.

Plus généralement, on a le résultat suivant qui permet de terminer la démonstration du théorème :

Fait 1.0.4 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs (non tous nuls) vérifiant*

$$\forall k, l \geq \kappa \quad u_k u_l \leq \sum_{i=k+l-\kappa}^{k+l+\kappa} u_i$$

où $\kappa \geq 1$ est un entier fixé et l'on pose $U_n := u_0 + \cdots + u_n$.

La suite $(U_n^{\frac{1}{n}})_{n\geq 0}$ converge alors vers un nombre $u \geq 1$ et il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \geq 0 \quad u_n \leq Cu^n$.

□

pose $U_k := u_0 + \cdots + u_k$ pour $k \geq 0$ et on obtient

$$\forall k, l \geq 0 \quad u_k U_l \leq C(2\kappa + 1)U_{k+l+\kappa}.$$

Quitte à multiplier chaque terme u_k par une constante strictement positive, on peut écrire

$$\forall k, l \geq 0 \quad u_k U_l \leq U_{k+l+\kappa}. \tag{3}$$

d'où l'on déduit, pour tout $q, b > 0$ et $0 \leq r < b$

$$U_{(b+\kappa)q+r+\kappa} \geq u_r U_{(b+\kappa)q} \geq u_r u_b U_{(b+\kappa)(q-1)} \geq ... \geq u_r (u_b)^q$$

et donc, en posant $m := (b + \kappa)q + r + \kappa$

$$\Big(U_m\Big)^{\frac{1}{m}} \geq (u_r)^{\frac{1}{m}} (u_b)^{\frac{q}{m}}. \tag{4}$$

[3]le terme θ-Schottky signifie que, pour tous mots "admissible" h et h' en les lettres $h_1^{\pm 1}$ et $h_2^{\pm 1}$ et dont les premières lettres diffèrent, l'angle en o du triangle $o, h\cdot o, h'\cdot o$ est $\geq \theta$

[4]cette propriété est vérifiée en particulier lorsque Γ est co-compact ou plus généralement convexe co-compact

On obtient, en faisant tendre q puis b vers $+\infty$

$$\liminf_{+\infty}\Big(U_m\Big)^{\frac{1}{m}} \geq \limsup_{b\to+\infty}\Big(u_b\Big)^{\frac{1}{b}} := u$$

avec $u \geq 1$ car $u_k \geq 1 i.s.$). Comme $\limsup_{n\to+\infty}\Big(u_n\Big)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty}\Big(U_n\Big)^{\frac{1}{n}}$, on conclut que $u = \lim_{n\to+\infty}\Big(U_n\Big)^{\frac{1}{n}}$ d'où la première assertion du Théorème. L'inégalité (4) nous donne alors, en faisant tendre q vers $+\infty$

$$\forall b \geq 0 \quad u \geq (u_b)^{\frac{1}{b+\kappa}}$$

et la seconde assertion du Théorème s'en déduit.□**Question :** *A-t-on aussi* $\liminf_{R\to+\infty}(n_\Gamma(R,\Delta))^{1/R} = \limsup_{R\to+\infty}(n_\Gamma(R,\Delta))^{1/R}$ *? La réponse semble être "Non", il faudrait donc caractériser les groupes qui vérifient cette égalité et donner des exemples explicites de groupes qui ne la vérifient pas.*

2 Groupes divergents et trou critique

On dit qu'un groupe discret Γ d'isométries de X est **divergent** lorsque sa série de Poincaré diverge en $s = \delta_\Gamma$; dans le cas contraire on dit que Γ est **convergent**.
Exemples

- L'exposant critique du groupe élémentaire $\langle h\rangle$, où h est une isométrie hyperbolique de X, est nul ; ce groupe est donc divergent.
- L'exposant critique du groupe élémentaire $\langle p\rangle$, engendré par l'isométrie parabolique $z \mapsto z+1$ de $\mathbb{H}^2$ vaut $1/2$ puisque $(i, p^n \cdot i) = 2\ln n + O(1)$; de plus ce groupe est divergent.
- Il existe en courbure variable des groupes paraboliques convergents (voir [3])
- Les groupes co-compacts ou convexe co-compacts sont divergents ; cela se déduit d'un résultat général sur les mesures conformes, via encore une fois le lemme de l'ombre de Sullivan. On peut aussi le démontrer en utiliant (2) qui entraîne immédiatement $u_n \succeq e^{\delta_\Gamma n}$ [5] et la divergence du groupe s'en déduit immédiatement.

2.1 Un critère simple de séparation des exposants

Le calcul explicite de l'exposant critique d'un groupe kleinien s'avère être une question souvent délicate. Une question plus accessible est déjà de comparer l'exposant critique d'un groupe avec celui de ses sous-groupes et de dégager un critère qui assure que l'on a une inégalité stricte.

Théorème 2.1.1 *[3] Soit Γ un groupe kleinien et H un sous-groupe de Γ tel que*

1. $\Lambda_H \neq \Lambda_\Gamma$
2. *H divergent*

[5] où la notation $a_n \succeq b_n$ signifie que la suite $(b_n\ /a_n)_n$ est majorée

Alors, on a $\delta_H < \delta_\Gamma$.

Démonstration. On trouvera dans [3] une démonstration reposant sur l'existence de densité δ_Γ conforme. Nous développons ici l'argument élémentaire suivant, reposant sur la construction d'un sous-groupe de Γ qui soit le produit libre de H avec un sous-groupe élémentaire de Γ engendré par une isométrie hyperbolique dont les points fixes n'appartiennent pas à H.

En effet, soit $\xi \in \Lambda_\Gamma \setminus \Lambda_H$; le point ξ étant un point ordinaire de H, il existe un voisinage ouvert U de ξ tel que $U \cap \Lambda_H = \emptyset$. L'action de H sur son ensemble ordinaire étant propre et discontinue, on peut supposer, quitte à réduire U, que

$$\forall h \in H, h \neq id \qquad h(U) \subset \partial X \setminus U. \tag{5}$$

Par ailleurs, l'action de Γ étant minimale sur Λ_Γ, l'orbite d'un point fixe d'une quelconque de ses isométries est dense dans Λ_Γ, elle rencontre donc U. On en déduit alors l'existence de $\gamma \in \Gamma \setminus H$ dont le point fixe attractif appartient à U ; quitte à remplacer γ par γ^n avec n grand, on peut supposer que γ envoit l'extérieur de U dans U (que γ soit hyperbolique ou parabolique).

Si on prend alors un élément hyperbolique $\gamma' \in \Gamma$ dont les points fixes sont distincts de ceux de γ, et donc extérieurs à U quitte à réduire U, l'isométrie $g := \gamma^n\gamma'\gamma^{-n}$ a ses deux points fixes dans U, en remplaçant si nécessaire g par une de ses puissances, on peut supposer que

$$g^{\pm 1}(\partial X \setminus U) \subset U. \tag{6}$$

Le sous-groupe G de Γ engendré par H et g est alors un produit libre : il contient en particulier tous les mots de la forme $h_1gh_2g\cdots h_kg$ avec $k \geq 1$ et $h_i \in H \setminus \{id\}$. On a alors, pour tout $s > \delta_H$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\Gamma(s) &\geq \mathcal{P}_\Gamma(s)\\
&\geq \sum_{k\geq 1}\sum_{h_1,\cdots,h_k} e^{-s(o,h_1gh_2g\cdots h_k\cdot o)}\\
&\geq \sum_{k\geq 1} e^{-sk(o,g\cdot o)} \sum_{h_1,\cdots,h_k} e^{-s(o,h_1\cdot o)} \times \cdots \times e^{-s(o,h_1\cdot o)}\\
&\geq \sum_{k\geq 1}\Big(e^{-s(o,g\cdot o)} \times \sum_{h\in H^*} e^{-s(o,h\cdot o)}\Big)^k\\
&\geq \sum_{k\geq 1}\Big(e^{-\delta_H(o,g\cdot o)} \times \sum_{h\in H^*} e^{-s(o,h\cdot o)}\Big)^k.
\end{aligned}$$

Le groupe H étant divergent, on peut choisir $s_0 > \delta_H$ suffisamment proche de δ_H de telle sorte que $e^{-\delta_H(o,g\cdot o)} \times \sum_{h\in H^*} e^{-s_0(o,h\cdot o)} > 1$ si bien que $\mathcal{P}_\Gamma(s_0) = +\infty$; il vient $\delta_\Gamma \geq s_0 > \delta_H$.

Attention ! les deux conditions de ce théorème ne sont pas nécessaires, mais l'on l'on en est pas très loin ! En effet

- Supposons H convergent et $\Lambda_H \neq \Lambda_\Gamma$. On reprend la construction ci-dessus et l'on montre que le groupe $G_n = H * \langle g^n\rangle$ devient convergent lorsque n est assez grand (utiliser le Lemme 1.0.3, voir [3] pour la construction de groupes non élémentaires de et convergents).
- Si le groupe H est divergent et normal dans Γ, on a $\Lambda_H = \Lambda_\Gamma$ et $\delta_\Gamma = \delta_H$ ([11], voir Théorème 3.0.4).

La question de la convergence/divergence d'un groupe Kleinien est intéressante à plus d'un titre; on renvoit le lecteur à [14] où l'on trouve par exemple pour illustrer ce propos le théorème de dichotomie de Hopf, Tsuji & Sullivan avec une démonstration précise.

Le théorème précédent permet aussi d'exhiber de façon simple des exemples de groupes convergents. Consiérons par exemple un groupe de Schottky Γ engendré par deux isométries hyperboliques α et β et notons G le sous-groupe de Γ engendré par la famille de transformations $\{\alpha^{-n}\beta\alpha^n/n \geq 0\}$. Les groupes G et $H := \alpha^{-1}G\alpha$ sont conjugués, ils ont donc le même exposant critique δ et sont de même type (ie convergents ou divergents). Par ailleurs $\Lambda_G \subset \Lambda_H$ puisque $G \subset H$ mais l'on a $\Lambda_G \neq \Lambda_H$ car les points fixes de β appartiennent à Λ_H mais pas à Λ_G. Les groupes G et H sont donc convergents, d'après le théorème ci-dessus.

2.2 La question de la croissance forte

On considère un groupe Kleinien Γ et N un sous-groupe normal de H. Le groupe quotient $\bar{\Gamma} := N\backslash\Gamma$ est le groupe des isométries du revêtement Riemannien normal $\bar{X} := N\backslash X$ de $\Gamma\backslash X$, muni de la métrique "quotient"

$$dist(\bar{x}, \bar{y}) := \inf\{(\bar{x}, n \cdot y)/n \in N\}.$$

On note $\delta_{\bar{\Gamma}}$ l'exposant critique de $\bar{\Gamma}$ pour la métrique correspondante ; on a $\delta_{\bar{\Gamma}} \leq \delta_\Gamma$, et se pose alors de façon naturelle la question d'un critère assurant que cette inégalité est stricte. Cette question peut être vue comme la transposition dans un cadre Riemannien de celle de la croissance forte des groupes de type fini, posée par R. Grigorchuk et P. de la Harpe dans [8] [(6)]. En reprenant les arguments développés ci-dessus, on peut montrer que si $\bar{\Gamma}$ est divergent pour la métrique quotient, alors on a $\delta_{\bar{\Gamma}} < \delta_\Gamma$ ([5]). Il faut donc pouvoir préciser si $\bar{\Gamma}$ est divergent ou non.

2.3 Sutr les groupes géométriquement finis

Nous avons vu dans le paragraphe précédent des exemples de groupes divergents ; outre certains groupes élémentaires, les groupes co-compacts ou convexe co-compacts sont divergents.

Curieusement, il est assez délicat de décider si oui ou non un groupe non élémentaire Γ est convergent et divergent. Une fois étudiée la classe des groupes co-compacts ou convexe co-compacts il est naturel de poser la même question pour les réseaux non uniformes et leur généralisation naturelle : les groupes *géométriquement finis*.

Introduisons quelques notations nécessaires pour définir cette large classe de groupes kleiniens.On note $C(\Lambda_\Gamma)$ l'enveloppe convexe de Λ_Γ; cet ensemble est invariant sous l'action de Γ et le quotient $N(\Gamma) = C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ est le coeur de Nielsen de la variété $\Gamma\backslash X$. On notera $N_\epsilon(\Gamma)$ un ϵ-voisinage de $N(\Gamma)$. Quand l'ensemble $N(\Gamma)$ est relativement compact ; on dit que Γ est *convexe co-compact.* On dit plus généralement queΓ est géométriquement fini lorsqu'il existe $\epsilon > 0$ tel que N_ϵ soit de volume fini.

La perte de compacité de N_ϵ se traduit par l'appparition dans Λ_Γ de points limites non coniques : les points *paraboliques bornées.*

[6]si S est un ensemble fini de générateurs d'un groupe G, $\bar{S}$ l'ensemble correspondant dans $\bar{G}$ et si l'on munit G de la métrique des mots $|.|$ relativement à S, on pose $w_{G,S} := \lim_{n\to+\infty}\Big(\sharp\{g/|g| \leq n\}\Big)^{\frac{1}{n}}$ et l'on dit que G est à croissance forte relativement à S si l'on a $w_{\bar{G},\bar{S}} < w_{G,S}$. On montre aisément que les groupes libres sont à croissance forte, il en est de même pour les produits amalgamés et les groupes hyperboliques [**?**] ; cette question est d'ailleurs étroitement à celle de la croissance des sous-shift de type finie avec mots interdits (voir par ex. [9])

Rappelons qu'un point $\xi \in \Lambda_\Gamma$ est dit **conique** (ou "radial") lorsque le segment géodésique $[o, \xi)$ possède un voisinage qui contient une infinité de points de l'orbite $\Gamma \cdot o$ et il est dit **parabolique borné** si son stabilisateur P est constitué d'isométries paraboliques et agit de façon relativement compacte sur $\Lambda_\Gamma - \{\xi\}$.

Quand Λ_Γ ne contient que des points coniques, le groupe Γ est convexe co-compact.

Rappelons que la finitude géométrique peut être caractérisée de façon équivalente comme suit :

- pour tout $\epsilon > 0$ le volume de $N_\epsilon(\Gamma)$ est fini.

- pour tout $\epsilon > 0$, la partie ϵ-épaisse $N(\Gamma)^{>\epsilon}$ est relativement compacte.

- le groupe Γ contient un nombre fini de classes de conjugaison de groupes paraboliques dont les points fixes sont bornés.

- le coeur de Nielsen $N(\Gamma)$ peut se décomposer en $C_0 \cup C_1 \cdots \cup C_l$ où C_0 est un ensemble relativement compact et où, pour chaque $i = 1, \cdots, l$, il existe un groupe parabolique $P_i \subset \Gamma$ et une horoboule $\mathcal{H}_i$ basée en ξ_i tels que C_i soit isométrique au quotient de $\mathcal{H}_i \cap C(\Lambda(\Gamma))$ par le groupe P_i (notons que le point fixe ξ_i de P_i est alors nécessairement borné, que le groupe P_i agit sur $C(\Lambda G) \cap \partial\mathcal{H}_i$ où $\partial\mathcal{H}_i$ désigne l'horosphère qui borde l'horoboule $\mathcal{H}_i$ et que cette action admet un domaine fondamental relativement compact).

Nous avons alors le

Théorème 2.3.1 *([16], [2]& [3]) Soit Γ un groupe géométriquement fini tel que, pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ de Γ on ait $\delta_\Gamma > \delta_\mathcal{P}$. Alors Γ est divergent.*

L'approche initiée par D. Sullivan et développée jusqu'alors pour démontrer ce résultat repose sur l'existence d'une densité conforme de dimension δ_Γ et invariante par Γ ; or, la définition même de la finitude géométrique, avec une partie épaisse relativement compacte, et une partie fine sur laquelle la dynamique de Γ est très simple à contrôler, fait espérer un autre argument de type sous-additivité, comme dans le cas compact ou convexe co-compact.

Pour ce faire, nous fixons $\delta \in]\delta^*_\mathcal{P}; \delta_\Gamma[$ (où $\delta^*_\mathcal{P}$ désigne le maximum des exposants critiques des sous-groupes paraboliques de Γ) et nous introduisons la quantité $v_\Gamma(R, \Delta)$ définie par

$$v_\Gamma(R, \Delta) := e^{-\delta R} n_\Gamma(R, \Delta).$$

De part le choix de δ, on a

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{\ln v_\Gamma(R, \Delta)}{R} = \delta_\Gamma - \delta > 0. \tag{7}$$

Pour tous réels $a, b > 0$ et $\Delta > 1$ assez grand (supérieur au diamètre de la partie épaisse $\mathcal{C}_0$), on a

$$v_\Gamma(a + b, \Delta) \leq c \cdot \Big(\sum_{0 \leq k \leq a} v_\Gamma(k, \Delta) \Big) \cdot \Big(\sum_{0 \leq l \leq b} v_\Gamma(l, \Delta) \Big) \tag{8}$$

où c est une constante > 0.[(7)].

Posons alors pour simplifier $w_n := \frac{v_\Gamma(n,\Delta)}{c}$, puis $W_n := w_1 + \cdots + w_n$ et $\tilde{W}_n := 1 + W_1 + \cdots + W_n$. L'inégalité

$$\forall n, m \geq 1 \quad w_{n+m} \leq W_n \times W_m$$

[7] Pour démontrer cette inégalité, on fixe γ tel que $\gamma \cdot o$ se trouve dans l'anneau $\{x/a+b-2\Delta \leq (o, x) \leq a+b+2\Delta\}$, on pose $(o, \gamma \cdot o) = a + b + 2\Lambda$ avec $-\Delta < \Lambda < \Delta$ et l'on note x le point du segment géodésique $[o, \gamma \cdot o]$ qui se trouve à distance $a + \Lambda$ de o ; on somme alors sur $u \leq a$ et $v \leq b$, où u (resp. v) représente la distance à parcourir à partir de x sur le segment $[x, o]$ (resp. $[x, \gamma \cdot o]$ pour sortir de la zone mince de la variété quotient

entraîne successivement $W_{n+m} \leq W_n \tilde{W}_m$ puis $\tilde{V}_{n+m} \leq \tilde{V}_n \tilde{W}_m$. Ainsi, la suite $(\ln \tilde{W}_n)_n$ est sous-additive et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \tilde{W}_n}{n} = L := \inf_{n\geq 1} \frac{\ln \tilde{W}_n}{n}$$

En particulier $\tilde{W}_n \succeq e^{Ln}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \tilde{W}_n e^{-Ln}$ diverge.

On déduit alors du Lemme 1.0.1 que les séries $\sum_{n\geq 1} \tilde{W}_n e^{-sn}$, $\sum_{n\geq 1} W_n e^{-sn}$ et $\sum_{n\geq 1} w_n e^{-sn}$ admettent L comme exposant critique. L'inégalité (7) donne $L > 0$ si bien que ces trois séries divergent en L. L'exposant critique de la série $\sum_{n\geq 1} n_\Gamma(n, \Delta) e^{-sn}$ est donc $\delta_\Gamma = L + \delta$ et cette série diverge en δ_Γ.$\Box$

Remarque 2.3.2 *De ce qui précède, on déduit que $\tilde{W}_n \succeq e^{Ln}$ et donc $W_n \succeq \frac{e^{Ln}}{n}$. On peut en fait affiner cette dernière inégalité en combinant l'estimation $\tilde{W}_n \succeq e^{Ln}$ avec l'inégalité $W_n \preceq e^{Ln}$ (cf Théorème 1.0.2) : on peut ainsi obtenir de façon très élémentaire l'encadrement suivant*

$$e^{\delta_\Gamma R} \preceq N_\Gamma(R) \preceq e^{\delta_\Gamma R}.$$

3 Mesure de Patterson et exposant critique

On appelle *densité* sur ∂X une famille $\mu = (\mu_x)_{x\in X}$ de mesures positives finies sur ∂X. Une telle densité est dite *conforme de dimension* $\delta \geq 0$ lorsque pour tous $x, x' \in X$, la mesure $\mu_{x'}$ est absolument continue par rapport à μ_x et que sa dérivée de Radon-Nikodym est donnée par la formule

$$\frac{d\mu_{x'}}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\delta(\mathcal{B}_\xi(x',x)}$$

où $\mathcal{B}_\xi(x', x)$ désigne la fonction de Busemann en ξ définie par

$$\mathcal{B}_\xi(x', x) := \lim_{z\to\xi} (x', z) - (x, z).$$

Cette densité est dite *invariante par* Γ si pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in X$ on a

$$\gamma^* \mu_{\gamma\cdot x} = \mu_x$$

où la mesure $\gamma^*\mu_x$ est définie par $\gamma^*\mu_x(A) = \mu_x(\gamma A)$ pour tout borélien A de ∂X.

On note $Conf(\Gamma, \delta)$ l'ensemble des densités conformes Γ-invariantes et de dimension δ, avec la condition de normalisation $\|\mu_o\| = 1$.
Rappelons le procédé de Patterson permettant de montrer que $Conf(\Gamma, \delta_\Gamma)$ est non vide. Pour chaque $s > \delta_\Gamma$ et chaque point $x \in X$ on note $\mu^s_{x,y}$ la mesure orbitale

$$\mu^s_{x,y} = \frac{1}{\mathcal{P}_\Gamma(o, y, s)} \sum_{\gamma\in\Gamma} \exp(-s(x, \gamma\cdot y))\epsilon_{\gamma\cdot y}$$

où $\epsilon_{\gamma\cdot o}$ désigne la masse de Dirac en $\gamma.y$. Lorsque le groupe Γ est de type divergent, toute valeur d'adhérence (pour la topologie de la convergence étroite) de la famille $(\mu^s_{x,y})_{x,y,s}$ est portée par Λ_Γ;

on peut alors montrer que lorsque $s \to \delta_\Gamma$ par valeurs supérieures la famille de mesures $(\mu^s_{x,y})_s$ converge étroitement vers une mesure $\mu_{x,y}$ portée par Λ_Γ et vérifiant les deux conditions suivantes

$$\mu_{x',y}(.) = \exp(-\delta \mathcal{B}_.(x',x))\mu_{x,y}(.) \quad \text{et} \quad g^*\mu_{x,y} = \mu_{g^{-1}\cdot x,y}$$

où $g^*\mu_{x,y}$ est la mesure sur ∂X définie par $g^*\mu_{x,y}(B) = \mu_{x,y}(gB)$ pour tout borélien B de ∂X. On dit que la famille $(\mu_{x,y})_{x\in X}$ est une *densité* Γ*-conforme d'exposant* δ_Γ.
On a vu qu'il peut être délicat de montrer qu'un groupe Γ est de type divergent ; D. Sullivan a établi cette propriété pour les groupes géométriquement finis, en étudiant le type des densités δ_Γ-conformes de ces groupes. Pour ce faire, il faut pouvoir construire de telles densités δ_Γ-conformes, sans savoir à priori si Γ est de type convergent ou divergent ; en utilisant un argument du à Patterson, on modifie légèrement la série de Poincaré en posant

$$\mathcal{P}'_\Gamma(x,y,s) = \sum_{g\in\Gamma} e^{-s(x,\gamma\cdot y)} h(d(x,\gamma\cdot y))$$

où h est une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que les séries $\mathcal{P}_\Gamma(x,y,s)$ et $\mathcal{P}'_\Gamma(x,y,s)$ aient le même exposant critique et

$$\forall \eta > 0, \exists t_\eta > 0, \forall t \geq t_\eta, \forall s \geq 0 \quad h(t+s) \leq h(t)e^{\eta s}.$$

Intéressons nous maintenant aux propriétés locales d'une densité Γ-conforme. Nous avons le

Lemma 3.0.3 *(-Théorème de l'ombre de Sullivan-) Soit* Γ *un groupe non élémentaire et* μ *une densité* Γ*-conforme d'exposant* α*. Il existe* $C > 1$ *et* $r_0 > 0$ *tel que pour tout* $r \geq r_0$ *et tout* $g \in \Gamma$ *on ait*

$$\frac{1}{C} e^{-\alpha d(o,\gamma\cdot o)} \leq \mu_{x,y}(O_x(\gamma\cdot o, r)) \leq C e^{-\alpha d(o,\gamma\cdot o)+2\alpha}.$$

Soulignons en cependant quelques conséquences importantes :

- en remarquant que pour tout $\Delta > 0$, la famille des ombres $O_x(\gamma\cdot o, r)$ avec $\gamma \in \Gamma$ et $R - \Delta \leq (o, \gamma\cdot o) \leq R + \Delta$ forme un recouvrement à multiplicité uniformément bornée par rapport à R, on montre que l'existence d'une densité Γ-conforme μ d'exposant α entraîne

  $$\sharp\{\gamma \in \Gamma / (o, \gamma\cdot o) \leq R\} \preceq e^{\alpha R}$$

  et donc $\alpha \geq \delta_\Gamma$ par définition de l'exposant de Poincaré de Γ. Il n'existe donc pas de densité Γ-conforme d'exposant $< \delta_\Gamma$.

- l'ensemble radial de Γ est égal à $\Lambda^{rad}_\Gamma := \cup_{r>0} \limsup_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\to\infty}} O_o(\gamma\cdot o, r)$; par conséquent, si $\sum_{n\geq 1} e^{-\alpha d(o,\gamma\cdot o)} < +\infty$ (ce qui est le cas lorsque $\alpha > \delta_\Gamma$) alors toute densité α-conforme donne une mesure nulle à Λ^{rad}_Γ.

- lorsque Γ est divergent, on montre que $\mu_{x,y}(\Lambda^{rad}_\Gamma) > 0$ et que cette propriété entraîne l'ergodicité de l'action de Γ relativement à la famille $(\mu_{x,y})_{x,y}$. Ainsi, dans ce cas, il existe, à une constante multiplicative près, une unique densité δ_Γ-conforme ; en particulier, chaque mesure $\mu_{x,y}$ construite ci-dessus ne dépend ni du point y ni de la sous-suite $(s_k)_k$ qui a permis de la construire.

- Lorsque Γ est co-compact ou plus généralement convexe co-compact, on peut montrer que $Conf(\Gamma, \delta) \neq \emptyset$ si et seulement si δ_Γ ; dans le cas contraire, $Conf(\Gamma, \delta) \neq \emptyset$ pour tout $\delta \geq \delta_\Gamma$.

Remarquons que pour tout élément g du normalisateur $N(\Gamma)$ de Γ dans le groupe des isométries de X et toute densité $\mu \in Conf(\Gamma, \delta)$, la famille de mesures $(\nu_x^g)_{x\in X}$ définie par

$$\nu_x^g := \frac{1}{\|\mu_{g\cdot o}\|} g^* \mu_{g\cdot x} \tag{9}$$

appartient aussi à $Conf(\Gamma, \delta)$[8]

Supposons Γ divergent. L'ensemble $Conf(\Gamma, \delta_\Gamma)$ est alors réduit à un point (noté $(\mu_x)_{x\in X}$) et l'on a $(\nu_x^g)_x = (\mu_x)_x$ pour tout $g \in N(\Gamma)$. Ainsi $Conf(N(\Gamma), \delta_\Gamma) \neq \emptyset$. Par conséquent $\delta_\Gamma \geq \delta_{N(\Gamma)}$ et donc en fait $\delta_\Gamma = \delta_{N(\Gamma)}$.

On a ainsi montré le

Théorème 3.0.4 *[11] Soit Γ un groupe kleinien divergent et G un groupe kleinien qui contient Γ comme sous-groupe normal. Alors $\delta_\Gamma = \delta_G$ (et G est aussi divergent).*

Plus généralement, Th. Roblin à introduit la notion de **principe des ombres** définie comme suit : *On dit que le sous-ensemble $Y \subset C(\Lambda_\Gamma) \subset X$ invariant sous l'action de Γ vérifie le principe des ombres en $\delta \geq \delta_\Gamma$ si pour toute densité $\mu \in Conf(\Gamma, \delta)$ et tous $x, y \in Y$ on a*

$$\frac{1}{C}\|\mu_y\| e^{-\delta(x,y)} \leq \mu_x(O_x(y, r)) \leq C\|\mu_y\| e^{-\delta(x,y)}$$

où r et C sont des constantes positives ne dépendant que de Y et de δ (et non de x, y et μ).

D'après le Lemme de l'ombre de Sulivan, l'orbite $\Gamma \cdot o$ satisfait au principe des ombres ; plus généralement on peut aussi considérer l'orbite de o sous l'action du normalisateur de γ puisque l'on a le

Théorème 3.0.5 *Soit $N(\Gamma)$ le normalisateur de Γ dans le groupe des isométries de X. Alors, l'ensemble $N(\Gamma) \cdot o$ vérifie le principe des ombres pour tout $\delta \geq \delta_\Gamma$.*

La démonstration est analogue à celle du lemme de Sullivan ; on utilise de façon cruciale le fait que pour tout $\mu \in Conf(\Gamma, \delta)$ et tout $g \in N(\Gamma)$ la famille $(\nu^g)_{x\in X}$ définie par la formule (9) est une densité δ-conforme.

Le fait qu'un ensemble Γ-invariant Y satisfasse au principe des ombres entraîne que la suite $(\|\mu_y\|)_{y\in Y}$ croît de façon contrôlée. En effet, on a le

Théorème 3.0.6 *Soit $N(\Gamma)$ le normalisateur de Γ dans le groupe des isométries de X. Alors, pour toute densité $\mu \in Conf(\Gamma, \delta)$, l'exposant critique de la série $\sum_{g\in N(\Gamma)} \|\mu_{g\cdot o}\| e^{-s(o, g\cdot o)}$ est inférieur ou égal à δ.*

qui admet de façon immédiate le corollaire suivant

[8] il suffit de vérifier que ν^g est invariante par Γ ; pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $g\gamma = \tilde{\gamma} g$ avec $\tilde{\gamma} = g\gamma g^{-1} \in \Gamma$; le fait que μ est Γ-invariante entraîne la suite d'égalités suivantes

$$\gamma^* \nu^g_{\gamma\cdot x} = \gamma^* g^* \mu_{g\gamma\cdot x} = g^* \tilde{\gamma}^* \mu_{g\gamma\cdot x} = g^* \mu_{\tilde{\gamma}^{-1} g\gamma\cdot x} = g^* \mu_{g\cdot x} = \nu^g_x.$$

Corollaire 3.0.7 *Pour tout groupe kleinien* Γ *de* X *on a* $\delta_\Gamma \geq \frac{1}{2}\delta_{N(\Gamma)}$.

De plus, si $N(\Gamma)$ *est divergent alors cette inégalité est stricte.*

Posons pour simplifier $G := N(\Gamma)$. La première assertion de ce corollaire est une conséquence directe du Théorème précédent. Pour la seconde assertion, on raisonne par l'absurde, on suppose que $\delta = \delta_\Gamma = \delta_G/2$, on note ν l'unique élément de $Conf(G, \delta_G)$ et l'on considère un élément μ de $Conf(\Gamma, \delta_\Gamma)$ que l on suppose ergodique. Puisque G est divergent, ν_o est portée par $\Lambda_G^{rad}(r)$ pour r assez grand . Si B est un borélien de ∂X, on choisit un ouvert V le contenant et on note Z l'ensemble des points z de $G \cdot o$ tel que $O_o(z,r) \subset V$; par un argument de type recouvrement de Vitali, on peut extraire de Z une sous famille finie Z^* telle que les ombres correspondantes $O_o(z,r)$ soient deux à deux disjointes et $\bigcup_{z\in Z} O_o(z,r) \subset \bigcup_{z\in Z^*} O_o(z,5r)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\nu_o(B) = \nu_o(B \cap \Lambda_G^{rad}(r)) &\leq \sum_{z\in Z^*} \nu_o(O_o(z,5r)) \\
&\preceq \sum_{z\in Z^*} e^{-\delta_G(o,z)} \\
&= \sum_{z\in Z^*} e^{-2\delta_\Gamma(o,z)} \\
&\preceq \sum_{z\in Z^*} \|\mu_y\| e^{-\delta_\Gamma(o,z)} \\
&\preceq \sum_{z\in Z^*} \mu_o(O_o(z,r)) \\
&\preceq \mu_o(V)
\end{aligned}$$

Il vient $\nu_o(B) \preceq \mu_o(B)$, l'ouvert V étant arbitraire, et donc $\nu_o = \phi(.)\mu_o$ pour une certaine densité $\phi \geq 0$. Or, pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a

$$\phi(\gamma \cdot \xi) = \phi(\xi) e^{-(\delta_G - \delta_\Gamma)\mathcal{B}(\gamma\cdot o, o)} \quad \mu_o(d\xi) \quad p.s.^{(9)}$$

La mesure μ_o étant ergodique, la fonction quasi-invariante ϕ est μ_o-p.s. strictement positive ; les mesures μ_o et ν_o sont donc équivalentes et par conséquent quasi-invariantes par G. L'ergodicité de μ_o montre que μ est construite à partir d'un caractère de G/Γ ce qui entraîne de facto $\delta \geq \delta_G$. Contradiction.$\square$

On a donc $\frac{\delta_{N(H)}}{2} \leq \delta_\Gamma \leq \delta_{N(H)}$, la première inégalité étant stricte dès que G est divergent. Par ailleurs, on a vu que si c'est Γ qui est divergent alors $\delta_\Gamma = \delta_G$.

Ainsi, si $\delta_\Gamma \in [\frac{\delta_G}{2}, \delta_G[$, le groupe Γ est convergent ; par contre lorsque $\delta_\Gamma = \delta_G$, on peut avoir Γ convergent ou divergent (voir les revêtements abéliens de variétés compactes).

On a aussi le

---

[9] pour toute fonction borélienne positive ψ sur ∂X on a d'une part

$$\int \psi(\gamma^{-1}\xi)\nu_o(d\xi) = \int \psi(\xi)\nu_{\gamma\cdot o}(d\xi) = \int \psi(\xi) e^{-\delta_G \mathcal{B}(\gamma\cdot o,o)}\nu_o(d\xi) = \int \psi(\xi) e^{-\delta_G \mathcal{B}(\gamma\cdot o,o)}\phi(\xi)\mu_o(d\xi)$$

et d'autre part

$$\int \psi(\gamma^{-1}\xi)\nu_o(d\xi) = \int \psi(\gamma^{-1}\xi)\phi(\xi)\mu_o(d\xi) = \int \psi(\xi)\phi(\gamma\cdot\xi) e^{-\delta_\Gamma \mathcal{B}(\gamma\cdot o,o)}\mu_o(d\xi)$$

d'où $\phi(\gamma\cdot\xi) = \phi(\xi)e^{-(\delta_G-\delta_\Gamma)\mathcal{B}(\gamma\cdot o,o)} \quad \mu_o(d\xi)$p.s.

Théorème 3.0.8 *Si $N(\Gamma)/\Gamma$ est moyennable, alors $\delta_\Gamma = \delta_{N(H)}$.*

La réciproque de ce théorème est partiellement démontrée lorsque $G := N(\Gamma)$ est convexe co-compact (travail de R. Brooks, dans $\mathbb{H}^{n+1}$ avec la condition $\delta_G > n/2$ [1]) ; la question de savoir si la réciproque est vraie pour tous les groupes convexe co-compact, et plus généralement pour les groupes géométriquement finis, reste ouverte actuellement.

References

[1] Brooks R. *The bottom of the spectrum of a Riemannian covering*, J. Reine Angew. Math. 357 (1985), 101–114.

[2] Corlette K., Iozzi A. *Limit sets of isometry groups of exotic hyperbolic spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 n^o 4 (1999), 1507–1530.

[3] Dal'bo F., Otal J.P. & Peigné M. *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel Journal of Math. 118 (2000), 109–124.

[4] F. Dal'bo & M. Peigné & J.C. Picaud & A. Sambusetti. *On the growth of non-uniform lattices in pinched negatively curved manifolds*, J. Reine Angew. Math. 627 (2009), 31–52.

[5] Dalbo F., Peigné M., Picaud J.C. & Sambusetti A. *On the growth of quotients of Kleinian groups*, to appear in Ergodic Theory Dynam. Systems

[6] F. Dal'bo & M. Peigné & A. Sambusetti. *No universal upperbound for the orbital function of quotient of Kleinien groups in negative curvature*, in preparation.

[7] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J. *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag Universitext 2nd Edition.

[8] Grigorchuk R. & de la Harpe P. *On problems related to growth, entropy and spectrum in group theory*, J. Dyn. Control Systems **3** n^o 1 (1997), 51–89.

[9] Huss W., Sava E. & Woess W. *Entropy sensitivity of languages defined by infinite automata, via Markov chains with forbidden transitions*, preprint.

[10] Manning A. *Topological entropy for geodesic flows.* , Ann. of Math. (2) 110 (1979), no. 3, 567–573.

[11] Matsuzaki K. & Yabuki Y., *The Patterson-Sullivan measure and proper conjugation for Kleinian groupes of divergence type*, Ergodic Theory Dynam. Systems 29 (2009), no. 2, 657–665.

[12] Robert, G. *Comptage pour des groupes co-compacts d'isométries d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, preprint

[13] Roblin T. *Sur la fonction orbitale des groupes discrets en courbure négative. (French) [The orbit function of discrete groups in negative curvature* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002), no. 1, 145–151.

[14] Roblin T. *Ergodicité et Equidistribution en courbure négative* , Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) n^o 95 (2003).

[15] Sambusetti A. *Growth tightness of surfaces groups*, Expositiones Mathematicae 20 (2002), 335–363.

[16] Sullivan D. *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, IHES Publ. Math. 50 (1979), 171–202.