

Modélisation des comportements thermomécaniques : cadre thermodynamique général et exemples

Thierry Désoyer, Jean Garrigues

► **To cite this version:**

Thierry Désoyer, Jean Garrigues. Modélisation des comportements thermomécaniques : cadre thermodynamique général et exemples. Engineering school. Centrale Marseille, France. 2010, pp.68. cel-00526067

HAL Id: cel-00526067

<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00526067>

Submitted on 13 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Modélisation des comportements thermomécaniques :
cadre thermodynamique général et exemples.**

Thierry Désoyer et Jean Garrigues

13 octobre 2010



Avant - Propos

En guise de préambule à ce cours, le lecteur trouvera deux chapitres, soit :

- des "rappels de Mécanique des Milieux Continus" (Chapitre 1) relatifs, notamment : aux deux descriptions, équivalentes, du mouvement de tout milieu continu (celle de Lagrange et celle d'Euler) ; aux trois principes dits 'de conservation' (de la masse, de la quantité de mouvement ¹ et de l'énergie, ce dernier étant plus souvent présenté comme le premier principe de la Thermodynamique), valables pour tout milieu continu ; au second principe de la Thermodynamique, dans son énoncé 'continu',
- un exemple de construction d'un modèle de comportement thermo-mécanique particulier, cohérent avec les deux principes de la Thermodynamique : le modèle 'gaz parfaits' (Chapitre 2).

Au-delà de ces rappels, le but de ce cours, restreint aux seules "petites" déformations, est :

- de présenter un *cadre thermodynamique général* dans lequel tout modèle de comportement thermomécanique doit nécessairement s'inscrire (Chapitre 3). Ce cadre est défini pour un système thermodynamique infinitésimal, *i.e.* un quelconque point d'un milieu continu. Les variables d'état considérées sont la température absolue, le tenseur des "petites" déformations et des variables (d'état) internes, dont on ne précise ni le nombre, ni le sens physique dans ce chapitre, de façon à conserver un caractère très général à la présentation. Les premier et second principes de la Thermodynamique sont formellement énoncés, ainsi que l'inégalité de Clausius-Duhem, laquelle est à vérifier systématiquement, c'est-à-dire quels que soient l'état et l'évolution du point matériel. Quelques hypothèses simplificatrices sont également formulées, dont celle qui permet de retenir la loi de Fourier pour la partie "thermique" de tous les modèles de comportement présentés dans la suite du Cours. Une expression très générale de l'équation de la chaleur est finalement établie, qui tient notamment compte des termes "sources" liés à l'évolution des variables internes.
- dans le cadre thermodynamique défini au Chapitre 3, d'établir les équations constitutives de quelques modèles de comportements thermomécaniques fréquemment utilisés en Mécanique des matériaux et des structures, soit :
 - le modèle de *thermo-élasticité linéaire isotrope* et son approximation isotherme, *i.e.* le modèle d'élasticité linéaire isotrope, plus connu sous le nom de loi de Hooke (Chapitre 4),
 - deux modèles de *thermo-visco-élasticité linéaire isotrope*, le premier sans variable interne, le second avec une variable interne tensorielle, soit le tenseur des déformations visqueuses (Chapitre 5),
 - un exemple de modèle de thermo-élastoviscoplasticité, où l'écroutissage est supposé cinématique linéaire, et son approximation non visqueuse, soit un modèle de thermo-élastoplasticité (Chapitre 6).

¹Le principe de conservation de la quantité de mouvement est désormais plus connu sous le nom de principe fondamental de la dynamique.



Chapitre 1

Rappels de mécanique milieux continus

La mécanique des milieux continus suppose que la matière est continue. Cette approximation fournit un modèle *macroscopique* de la description des mouvements d'un milieu matériel (solide, liquide ou gaz) sous sollicitations (mécaniques et/ou thermiques). Cette approximation fournit une théorie correctement prédictive pourvu que les vérifications expérimentales se fassent à l'échelle macroscopique¹.

1.1 Descriptions du mouvement

1.1.1 Description de Lagrange des champs

Les particules sont identifiées par leur position à un instant t_0 appelé *instant de référence*². L'ensemble des positions des particules à cet instant t_0 est appelé *domaine de référence* ou encore *configuration de référence*, noté \mathcal{D}_0 .

La position d'une particule à un instant t est appelée *position actuelle* et l'ensemble des positions des particules à un instant t est appelé *domaine actuel* ou encore *configuration actuelle*, notée \mathcal{D}_t .

Tout champ matériel (grandeur physique définie pour toute particule P et à tout instant t) $\mathcal{A}(P,t)$ de nature scalaire, vectorielle ou tensorielle est donc mathématiquement décrit par une fonction $\mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0,t)$ où \mathcal{A}_L est une application de $\mathcal{D}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$ donnant la valeur de la grandeur \mathcal{A} pour la particule identifiée par \mathbf{x}_0 et à l'instant t , c'est-à-dire que $\mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0,t) = \mathcal{A}(P,t)$.

En particulier, la *description de Lagrange du mouvement* est la description de la position (champ vectoriel) des particules P à tout instant ($\mathcal{A} = \mathbf{x}_t$), c'est-à-dire la donnée de la fonction \mathbf{f} telle que :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0,t)$$

On introduit aussi la description de Lagrange du *champ de déplacement* (champ vectoriel), noté \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(P,t) = \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0,t) = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0,t) - \mathbf{x}_0$$

La description de Lagrange du champ des vitesses et du champ des accélérations (champs vectoriels) sont :

$$\mathbf{v}(P,t) = \mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0,t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_L}{\partial t} \quad \gamma(P,t) = \gamma_L(\mathbf{x}_0,t) = \frac{\partial \mathbf{v}_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2}$$

¹c'est-à-dire que la taille du « point de mesure » doit être grande devant les distances interatomiques.

²Cet instant de référence peut avoir une signification physique, par exemple pour les solides déformables c'est un instant où on considère le solide comme ayant sa « forme naturelle ».

1.1.2 Description d'Euler des champs

Les particules sont identifiées par leur position actuelle. La description d'Euler d'un champ matériel \mathcal{A} est donc une application $\mathcal{A}_E : \mathcal{D}_t \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$ donnant la valeur à l'instant t de la grandeur \mathcal{A} pour la particule identifiée par sa position actuelle \mathbf{x}_t .

En particulier, la *description d'Euler du mouvement* est la description d'Euler du champ des vitesses (champ vectoriel) des particules à tout instant ($\mathcal{A} = \mathbf{v}$), c'est-à-dire :

$$\mathbf{v}(P, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)$$

On démontre que la description d'Euler du mouvement et la description de Lagrange du mouvement sont équivalentes³.

La description d'Euler du champ des accélérations est :

$$\gamma(P, t) = \gamma_E(\mathbf{x}_t, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_E$$

1.2 Tenseurs de déformations

L'étude des variations de distance entre particules dans une direction matérielle donnée lors d'un mouvement de milieu continu conduit à l'introduction de divers tenseurs de déformations⁴. Celui qui est utilisé dans la suite est le *tenseur des déformations de Green-Lagrange* symétrique défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u})$$

On montre que la variation relative du carré des longueurs dans une direction matérielle unitaire identifiée par sa direction de référence \mathbf{u}_0 est :

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{d}\mathbf{x}_0\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}_0 \text{ constant}}} \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{x}_t\|^2 - \|\mathbf{d}\mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{d}\mathbf{x}_0\|^2} = 2 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_0$$

On montre de même que :

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{d}\mathbf{x}_0\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}_0 \text{ constant}}} \frac{\mathbf{d}\mathbf{x}'_t \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}_t - \mathbf{d}\mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{d}\mathbf{x}_0\| \|\mathbf{d}\mathbf{x}'_0\|} = 2 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}'_0$$

et que la dilatation volumique est :

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{d}\mathbf{x}_0\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}_0 \text{ constant}}} \frac{\lim_{\substack{\|\mathbf{d}\mathbf{x}'_0\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}'_0 \text{ constant}}} \frac{[\mathbf{d}\mathbf{x}_t, \mathbf{d}\mathbf{x}'_t, \mathbf{d}\mathbf{x}''_t]}{[\mathbf{d}\mathbf{x}_0, \mathbf{d}\mathbf{x}'_0, \mathbf{d}\mathbf{x}''_0]}}{\dots} \frac{dv_t}{dv_0} = \sqrt{\det(\mathbf{G} + 2\mathbf{E})}$$

En mécanique des solides déformables, on suppose le plus souvent que $\mathbf{grad}_L \mathbf{u} \ll 1$, c'est-à-dire que le champ des déplacements est proche d'un champ de translation de solide. On appelle cette approximation « hypothèse des petites perturbations ». On introduit alors un tenseur des déformations simplifié couramment appelé *tenseur des petites déformations* ou *tenseur des déformations linéarisé* noté $\boldsymbol{\varepsilon}$ défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u}) = \mathbf{sym}(\mathbf{grad}_L \mathbf{u})$$

³c'est-à-dire que si on connaît l'une on sait trouver l'autre.

⁴Ces tenseurs de déformations sont tous reliés par des formules permettant de les exprimer en fonction des autres.

On montre alors que, dans ce cas, la variation relative des longueurs⁵ dans une direction matérielle unitaire identifiée par sa direction de référence \mathbf{u}_0 est :

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{dx}_0\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}_0 \text{ constant}}} \frac{\|\mathbf{dx}_t\| - \|\mathbf{dx}_0\|}{\|\mathbf{dx}_0\|} \simeq \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0$$

La quantité $\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0$ est appelée *déformation dans la direction \mathbf{u}_0* ou encore *allongement relatif dans la direction \mathbf{u}_0* . Cette quantité est sans dimension et est parfois exprimée en %.

On montre de même que :

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{dx}_0\| \rightarrow 0 \quad \|\mathbf{dx}'_0\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}_0 \text{ constant} \quad \mathbf{u}'_0 \text{ constant}}} \frac{\mathbf{dx}'_t \cdot \mathbf{dx}_t - \mathbf{dx}'_0 \cdot \mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\| \|\mathbf{dx}'_0\|} \simeq \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}'_0$$

et que la dilatation volumique est :

$$\lim_{\dots} \frac{dv_t}{dv_0} \simeq 1 + \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\dots} \frac{dv_t - dv_0}{dv_0} \simeq \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

1.3 Vitesse de déformations

L'étude des *vitesse actuelle de variations de distance* entre particules dans une direction matérielle actuelle donnée lors d'un mouvement de milieu continu conduit à l'introduction du *tenseur des taux de déformation* défini par :

$$\mathbf{D} = \text{sym}(\mathbf{grad}_E \mathbf{v})$$

On en déduit le taux d'allongement actuel dans la direction matérielle unitaire actuelle \mathbf{u}_t :

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{dx}_t\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}_t \text{ constant}}} \frac{\frac{d}{dt} \|\mathbf{du}_t\|}{\|\mathbf{du}_t\|} = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t$$

et le taux de dilatation volumique actuel :

$$\lim_{dv_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} dv_t}{dv_t} = \text{Tr}(\mathbf{D})$$

1.4 Principe de la conservation de la masse

En posant, par principe, que la masse de tout *domaine matériel* (ou système fermé) de milieu continu en mouvement ne change pas au cours du temps, c'est-à-dire que :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E(\mathbf{x}_t, t) dv = 0$$

on en déduit l'équation locale appelée *équation de continuité* :

$$0 = \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \text{div}_E(\rho \mathbf{v}) = \dot{\rho}_E + \text{div}_E \mathbf{v} = \dot{\rho}_E + \text{Tr}(\mathbf{D}) \quad (1.1)$$

où $\dot{\rho}_E = \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E \rho \cdot \mathbf{v}_E$ est la description d'Euler de la dérivée particulaire de la masse volumique.

On en déduit aussi l'expression globale du principe de la conservation de la masse pour un *domaine géométrique fixe* \mathcal{D} (système ouvert, volume de contrôle) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho_E(\mathbf{x}_t, t) dv = - \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{débit entrant à travers la frontière fixe})$$

⁵et non plus la variation relative du carré des longueurs, comme avec le tenseur \mathbf{E} .

1.5 Principe fondamental de la mécanique

1.5.1 Tenseur des contraintes

L'application du principe fondamental de la mécanique à un tétraèdre conduit, par passage à la limite⁶, à l'existence du champ de tenseur des contraintes $\sigma(P,t)$ qui permet de calculer la contrainte (force surfacique, unité légale : 1 Pa = 1 N.m⁻²), tel que pour une particule P et une « facette » de normale unitaire \mathbf{n} centrée en P , la contrainte en P pour la direction \mathbf{n} est donnée par :

$$\mathbf{c}(P, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}$$

La *contrainte normale* en P pour la direction \mathbf{n} est le *scalaire* :

$$c_n(P, t) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}(P, \mathbf{n}, t) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}$$

La *contrainte tangentielle* en P pour la direction \mathbf{n} est le *vecteur* :

$$\mathbf{c}(P, \mathbf{n}, t) - c_n(P, t) \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

La détermination du champ du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$ est une question essentielle de tout problème de MMC.

De la définition du tenseur des contraintes on déduit une conditions aux limites très importante :
Sur tout point N de la frontière du domaine \mathcal{D}_t , le tenseur des contraintes doit satisfaire la condition aux limites suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(N, t) \cdot \mathbf{n}(N, t) = \mathbf{f}^s(N, t)$$

où

- $\mathbf{n}(N, t)$ est la normale unitaire extérieure à la frontière en N ;
- $\mathbf{f}^s(N, t)$ est la contrainte exercée par l'extérieur en N .

1.5.2 Théorèmes généraux

On démontre en mécanique générale que la première loi de Newton ($\mathbf{F}_{ext} = m\boldsymbol{\gamma}$) et la seconde loi de Newton (les interactions de Newton) appliquées à un système de points matériels conduisent aux trois théorèmes généraux suivants :

1. La résultante dynamique est égale à la résultante des efforts extérieurs ;
2. Le moment dynamique est égal au moment des efforts extérieurs ;
3. La puissance cinétique⁷ est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance des efforts intérieurs.

Pour un milieu continu, le premier théorème s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{f}_E^m dm + \int_{\partial\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} ds$$

le second s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^m dm + \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{x}_t \wedge (\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}) ds$$

et le troisième s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^m dm + \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} ds + \mathcal{P}_{int}$$

On en déduit respectivement les trois résultats locaux suivants :

⁶démonstration de Cauchy.

⁷c'est-à-dire la dérivée temporelle de l'énergie cinétique

1. une équation différentielle vectorielle locale appelée *équation de mouvement* :

$$\rho_E \gamma_E = \rho_E \mathbf{f}_E^m + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}$$

2. le tenseur des contraintes est symétrique ;

3. la puissance volumique des efforts intérieurs (unité légale : W.m^{-3}) est :

$$\mathcal{P}_{int}^v = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

1.6 Premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie)

Pour un *domaine matériel* de milieu continu (système fermé) \mathcal{D}_t , le premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie) s'énonce ainsi :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm}_{\frac{dE_c}{dt}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} e_E^m dm}_{\frac{dE_i}{dt}} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^m dm + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} ds}_{\mathcal{P}_{mec}^{ext}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t} r_E^v dv - \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n} ds}_{\mathcal{P}_{cal}^{ext}}$$

où

- E_c est l'énergie cinétique du système ; E_i est l'énergie interne du système ; La somme des deux est appelée énergie totale ;
- \mathcal{P}_{mec}^{ext} est la puissance mécanique reçue de l'extérieur (à distance et de contact aux frontières) ;
- \mathcal{P}_{cal}^{ext} est la puissance calorifique reçue de l'extérieur (à distance par rayonnement éventuel et par conduction aux frontières⁸) ;
- e_E^m est la description d'Euler de l'énergie interne massique (unité légale : J.kg^{-1}). C'est une fonction d'état ; son expression en fonction des variables d'état locales du milieu continu dépend de la nature du milieu continu ;
- r_E^v est la description d'Euler de la puissance calorifique volumique (unité légale : W.m^{-3}) reçue par une particule due à l'interaction d'un rayonnement extérieur avec la matière⁹ ; dans beaucoup d'applications ce terme est nul ou négligé ;
- \mathbf{q}_E est la description d'Euler du vecteur courant de chaleur à l'intérieur du milieu continu (unité légale : W.m^{-2}).

On en déduit l'équation locale appelée *équation de la chaleur* :

$$\rho_E \dot{e}_E^m = \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E + r_E^v - \mathbf{div}_E \mathbf{q}$$

où \dot{e}_E^m est la description d'Euler de la dérivée particulière de l'énergie interne massique. Tant qu'on n'a pas précisé la nature du milieu continu, on ne connaît ni le nombre ni la nature des variables d'état indépendantes qui définissent ce milieu continu. Si on les appelle $\{T, \chi_1, \dots, \chi_n\}$ ¹⁰, on a :

$$e^m(P, t) = f_e(T(P, t), \chi_1(P, t), \dots, \chi_n(P, t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{e}^m(P, t) = \frac{\partial f_e}{\partial T} \dot{T}(P, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_e}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i(P, t)$$

soit encore, quand on décrit les champs par la méthode d'Euler :

$$\dot{e}_E^m = f_e(T_E, \chi_{1E}, \dots, \chi_{nE}) \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_E^m = \frac{\partial f_e}{\partial T} \dot{T}_E + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_e}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_{iE}$$

⁸ Il n'y a pas de convection puisque le système est fermé.

⁹ un rayonnement micro-ondes par exemple

¹⁰ La thermodynamique impose que T est toujours une variable d'état.

De l'équation locale on peut déduire l'expression de la conservation de l'énergie pour un *domaine géométrique fixe* \mathcal{D} (système ouvert, volume de contrôle) :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm}_{\frac{dE_c}{dt}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} e_E^m dm}_{\frac{dE_i}{dt}} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^m dm + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} ds}_{\mathcal{P}_{mec}^{ext}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} r_E^v dv - \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n} ds}_{\mathcal{P}_{cal}^{ext}} - \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}} \rho_E e_E^m \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n} ds}_{\Phi_e} - \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n} ds}_{\Phi_c} \quad (1.2)$$

où Φ_e et Φ_c sont respectivement les apports par convection à travers la frontière d'énergie interne et d'énergie cinétique.

1.7 Second principe de la thermodynamique

1.7.1 Formes globales et locales

Pour un *domaine matériel* de milieu continu (système fermé) \mathcal{D}_t , le second principe de la thermodynamique s'énonce ainsi :

Le taux d'entropie d'un domaine matériel (système fermé) est supérieur ou égal au taux d'entropie d'origine extérieure :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} s_E^m dm \geq \int_{\mathcal{D}_t} \frac{r_E}{T_E} dv - \int_{\partial\mathcal{D}_t} \frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.3)$$

où s_E^m est la description d'Euler de l'entropie massique ; la description d'Euler de sa dérivée particulière est :

$$s_E^m = f_s(T_E, \chi_{1E}, \dots, \chi_{nE}) \quad \Rightarrow \quad \dot{s}_E^m = \frac{\partial f_s}{\partial T} \dot{T}_E + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_{iE}$$

L'inégalité (1.3) devient une égalité dans des évolutions idéales dites *réversibles*.

On en déduit une inégalité locale :

$$\underbrace{\rho_E T_E \dot{s}_E^m - r_E^v + \text{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{grad}_E T}_{\Phi_E} \geq 0$$

où Φ_E est appelé *dissipation* (unité légale : W.m^{-3}). On a l'habitude de la séparer en la somme de deux termes : la *dissipation intrinsèque* Φ_{int} et la *dissipation thermique* Φ_{th} :

$$\Phi_E = \underbrace{\rho_E T_E \dot{s}_E^m - r_E^v + \text{div}_E \mathbf{q}}_{\Phi_{int}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{grad}_E T}_{\Phi_{th}} \geq 0$$

car la dissipation thermique $\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{grad}_E T$ est toujours non négative¹¹.

En utilisant la conservation de l'énergie, la dissipation intrinsèque peut encore s'écrire :

$$\Phi_{int} = \rho_E (T_E \dot{s}_E^m - \dot{e}_E^m) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \quad (1.4)$$

Avec ces définitions, le second principe se résume à

$$\Phi = \Phi_{int} + \underbrace{\Phi_{th}}_{\geq 0} \geq 0$$

¹¹ « la chaleur va toujours du chaud vers le froid ».

Une *condition suffisante* pour satisfaire le second principe en toutes situations est de construire des modèles de milieux continus tels que $\Phi_{int} \geq 0$.

Plutôt que d'utiliser les deux fonctions d'état e^m et s^m introduites par les deux principes de la thermodynamique, les mécaniciens préfèrent souvent utiliser le couple (ψ^m, s^m) où ψ^m est l'*énergie libre massique de Helmholtz*, définie par :

$$\psi^m(P, t) = e^m(P, t) - T(P, t) s^m(P, t) \quad \Rightarrow \quad \Psi_E^m = e_E^m - T_E s_E^m$$

En remplaçant e^m par $\psi^m + T s^m$, le second principe s'écrit alors sous la forme de l'*inégalité de Clausius-Duhem* :

$$\Phi_E = \underbrace{-\rho_E (\dot{\Psi}_E^m + s_E^m \dot{T}) + \sigma_E : D_E}_{\Phi_{int}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{grad}_E T}_{\Phi_{th}} \geq 0$$

où $\dot{\Psi}_E^m$ est la description d'Euler de la dérivée particulaire de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz.

$$\dot{\Psi}_E^m = f_\psi(T_E, \chi_{1E}, \dots, \chi_{nE}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\Psi}_E^m = \frac{\partial f_\psi}{\partial T} \dot{T}_E + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\psi}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_{iE}$$

À partir de l'équation locale, on établit l'expression globale du second principe pour un *domaine géométrique fixe* \mathcal{D} (système ouvert, volume de contrôle) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} s_E^m dm \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r_E}{T_E} dv - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{n} ds - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}} \rho_E s_E^m \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n} ds}_{\Phi_s}$$

où Φ_s est l'apport d'entropie par convection à travers les frontières de \mathcal{D} .

1.7.2 Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique (loi de conduction thermique)

La condition $\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0$ en toutes situations, c'est-à-dire en particulier quelque soit l'environnement thermique d'une particule, soit encore $\forall \mathbf{grad}_E T$, implique que le vecteur courant de chaleur est *nécessairement* au moins fonction de $\mathbf{grad}_E T$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{q}_E = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, T, \chi_1, \dots, \chi_n)$$

Il existe une infinité de fonctions \mathbf{f}_q telles que $\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E T \leq 0$. Le modèle le plus simple de loi de comportement thermique (ou loi de conduction thermique) est certainement la loi de Fourier :

$$\mathbf{q}_E = -\alpha \mathbf{grad}_E T$$

où $\alpha \geq 0$ est la *conductivité thermique*. α est souvent considéré comme constant¹².

1.7.3 Chaleur massique locale dans une évolution

La chaleur massique est traditionnellement définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 Kelvin l'unité de masse de matière dans une certaine transformation finie (évidemment à température non constante dans le temps). On en donne ici une définition équivalente mais *locale et instantanée*.

Dans un milieu continu en évolution, les puissances calorifiques volumiques reçues en une particule sont :

¹²mais α peut *a priori* être une fonction non négative de T et/ou de $\|\mathbf{grad}_E T\|$ (lois de conduction thermiques non linéaires) ou même de l'orientation de directions locales d'anisotropie (conduction thermique anisotrope).

1. la puissance volumique calorifique reçue par une particule de la part de son extérieur :

$$\mathcal{P}_{cal}^{ext\ v} = r^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} = \rho_E \dot{e}_E^m - \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \quad (\text{premier principe})$$

2. la puissance volumique calorifique produite par les processus internes :

$$\Phi_{int} = \rho_E (T_E \dot{s}_E^m - \dot{e}_E^m) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E$$

On peut alors définir une chaleur massique locale C_m (unité légale : $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$) qui donne la vitesse d'échauffement due à ces puissances calorifiques volumiques locales :

$$\rho_E C_m \dot{T}_E = \mathcal{P}_{cal}^{ext\ v} + \Phi_{int} = \rho_E T_E \dot{s}_E^m \quad \Rightarrow \quad C_m = T_E \frac{\partial f_s}{\partial T} + \frac{T_E}{\dot{T}_E} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i \quad (1.5)$$

La chaleur massique dépend donc a priori de l'état actuel (T, χ_i) , mais aussi de la direction de la vitesse d'évolution de la particule dans l'espace des états $(\dot{T}, \dot{\chi}_i)$. C'est pourquoi on ne peut parler de chaleurs massiques qu'en précisant le type d'évolution¹³. Pour des vitesses d'évolution telles que $\dot{T} = 0$ (évolution isotherme) elle n'est évidemment pas définie.

La chaleur massique est aussi appelée *capacité calorifique*.

1.8 Le problème de la mécanique des milieux continus

Les équations différentielles traduisant les trois premiers principes fondamentaux (masse, mécanique, énergie) sont insuffisantes pour déterminer l'évolution d'un domaine de milieu continu particulier (acier, eau, air, etc) sous l'action de sollicitations extérieures. Il faut les compléter par :

1. un modèle thermodynamique du milieu continu, c'est-à-dire la liste des variables d'état indépendantes (T, χ_i) , ainsi que l'expression des deux fonctions d'état énergie interne massique f_e et entropie massique f_s (ou bien f_ψ et f_s) en fonction de ces variables d'état ;
2. des modèles de comportement (mécanique et thermique), dont l'existence est imposée par le second principe, et qui doivent être choisies telles que ce dernier soit respecté en toutes situations et qu'elles correspondent aussi bien que possible au comportement réel de la matière ;
3. une description des actions du milieu extérieur sur le domaine étudié : ce sont les conditions aux limites et les conditions initiales (mécaniques et thermiques), ainsi que les actions à distance (mécaniques f^m et thermiques r^v) qui interviennent dans les équations locales de la mécanique et de l'énergie.

L'ensemble de ces équations étant posé, la description du problème est complète. Les champs matériels à déterminer sont : les champs des variables d'état, des vitesses, des positions (ou des déplacements), des contraintes, des déformations, des taux de déformation, etc, pour toute particule et à tout instant.

Il arrive bien souvent que l'on ne recherche qu'une solution stationnaire (si elle existe). Dans ce cas, le temps disparaît des équations différentielles et le problème s'en trouve quelque peu simplifié.

¹³Par exemple pour les gaz, on parle de chaleur massique à volume constant ($\dot{\rho} = 0$), à pression constante, etc. Pour les solides, on parle de chaleur massique à déformation constante.

Chapitre 2

Construction du modèle « gaz parfait »

Note importante : Dans ce chapitre, tous les champs sont décrits par la méthode d'Euler. Pour alléger les notations on omet systématiquement l'indice E .

Ce chapitre est consacré à la construction d'un modèle de milieu continu particulier : les *gaz parfaits*. C'est ce modèle de gaz qui sera essentiellement utilisé dans le cours de *mécanique des fluides compressibles*.

La construction de modèles de milieux continus solides déformables (thermo-élasticité, visco-élasticité, élasto-(visco-)plasticité) sera faite dans le cours *Modèles de comportement thermomécaniques des solides*.

2.1 Variables d'état

La construction de tout modèle thermodynamique d'un milieu continu commence par le choix d'un ensemble de variables d'état indépendantes. Ce choix ne peut qu'être guidé par des observations sur le milieu continu à modéliser.

En ce qui concerne les gaz, ce choix est généralement le couple (T, ρ) . Par ce choix, on affirme que tous les états possibles de ce gaz peuvent être décrits en donnant une valeur arbitraire¹ à chacune des deux variables d'état. L'espace des états est donc de dimension 2. On peut même considérer que ce choix est la définition thermodynamique d'un gaz².

2.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

Le second principe s'écrit : $\Phi = \phi_{int} + \Phi_{th} \geq 0$. Pour satisfaire ce principe on choisit de construire un modèle tel que $\Phi_{th} \geq 0$ et $\phi_{int} \geq 0$ ³.

¹dans certaines limites. Par exemple, pour les gaz $T > 0$ et $\rho > 0$.

²Pour un solide déformable, la masse volumique est une variable d'état insuffisante pour caractériser l'état de la matière car on veut distinguer des états à ρ identiques mais néanmoins déformés (cisaillements). On remplace ρ par une variable d'état plus riche (mais qui contient ρ) : un tenseur de déformations.

³Les deux conditions choisies sont évidemment suffisantes pour que le second principe soit respecté, mais ce choix n'est pas nécessaire, on peut en faire d'autres.

2.2.1 Conséquences de $\Phi_{th} \geq 0$

On a vu en section 1.7.2 page 11 que la condition $\Phi_{th} \geq 0$ conduit à la nécessité d'existence d'une loi de comportement thermique, et que la loi la plus simple qu'on puisse envisager est la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}T$$

où $\alpha \geq 0$ est le *conductivité thermique*⁴.

C'est généralement ce choix qui est fait pour les gaz parfaits.

2.2.2 Conséquences de $\Phi_{int} \geq 0$

En utilisant (1.4) page 10, on trouve l'expression de la dissipation intrinsèque pour un gaz quelconque (les variables d'état sont T et ρ) :

$$\Phi_{int} = \rho \left(T \frac{\partial f_s}{\partial T} - \frac{\partial f_e}{\partial T} \right) \dot{T} + \rho \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} \right) \dot{\rho} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0$$

où $\dot{\rho} = -\rho \text{Tr}(\mathbf{D})$ (conservation de la masse (1.1) page 7).

En décomposant $\mathbf{D} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{D})}{3} \mathbf{D} + \mathbf{dev}(\mathbf{D})$ (partie sphérique et déviateur), le produit $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \text{Tr}(\mathbf{D}) + \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{dev}(\mathbf{D})$$

La dissipation intrinsèque s'écrit alors :

$$\Phi_{int} = \rho \left(T \frac{\partial f_s}{\partial T} - \frac{\partial f_e}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho^2 \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} - \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3\rho^2} \right) \text{Tr}(\mathbf{D}) + \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{dev}(\mathbf{D})$$

Cette inégalité doit être vraie dans toutes les évolutions c'est-à-dire : $\forall \dot{T}$ (vitesse d'échauffement de la particule), $\forall \text{Tr}(\mathbf{D})$ (taux de dilatation volumique), $\forall \mathbf{dev}(\mathbf{D})$ (vitesse de distorsion).

En définissant les « vecteurs » auxiliaires suivants :

$$\mathbf{X} = \left\{ \rho \left(T \frac{\partial f_s}{\partial T} - \frac{\partial f_e}{\partial T} \right), -\rho^2 \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} - \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3\rho^2} \right), \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \right\} \quad \mathbf{Y} = \left\{ \dot{T}, \text{Tr}(\mathbf{D}), \mathbf{dev}(\mathbf{D}) \right\}$$

la dissipation intrinsèque s'écrit sous la forme ⁵ $\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} \geq 0 \forall \mathbf{Y}$. On en déduit que le vecteur \mathbf{X} est nécessairement au moins fonction de \mathbf{Y} , c'est-à-dire que :

$$\rho \left(T \frac{\partial f_s}{\partial T} - \frac{\partial f_e}{\partial T} \right) = f_1(\dot{T}, \text{Tr}(\mathbf{D}), \mathbf{dev}(\mathbf{D}), \dots) \quad (2.1)$$

$$-\rho^2 \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} - \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3\rho^2} \right) = f_2(\dot{T}, \text{Tr}(\mathbf{D}), \mathbf{dev}(\mathbf{D}), \dots) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = f_3(\dot{T}, \text{Tr}(\mathbf{D}), \mathbf{dev}(\mathbf{D}), \dots) \quad (2.3)$$

où les arguments supplémentaires peuvent être toutes variables autres que les composantes de \mathbf{Y} (par exemple les variables d'état T et ρ).

Dans l'équation (2.1), le terme de gauche est une fonction d'état. La fonction f_1 l'est donc aussi. Le terme de droite est donc nécessairement $f_1(T, \rho)$. De plus, cette fonction f_1 est nécessairement nulle. En effet, le second principe devant être vérifié pour toute évolution, il doit l'être pour une évolution telle que $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ et

⁴ α est souvent considéré comme une constante, mais il peut a priori être fonction à valeur positive de l'état et de $\|\mathbf{grad}T\|$: $\alpha(T, \rho, \|\mathbf{grad}T\|)$

⁵le symbole \bullet désigne un produit scalaire dans un espace de vecteurs de type \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

$\dot{T} \neq 0$ (échauffement sans déformation). Dans ce cas la dissipation intrinsèque se réduit à $f_1(T, \rho) \dot{T} \geq 0 \forall \dot{T}$, ce qui implique $f_1 = 0$. On en déduit la relation de Helmholtz (valable pour tous les gaz) :

$$T \frac{\partial f_s}{\partial T} - \frac{\partial f_e}{\partial T} = 0 \quad (2.4)$$

Cette relation montre que si une particule de gaz peut subir un échauffement sans déformation, il existe nécessairement une relation entre les deux fonctions d'état f_e et f_s ⁶.

Les deux autres équations (2.2) et (2.3) prouvent la nécessité d'existence de deux lois de comportement définissant la valeur du tenseur des contraintes σ :

$$\frac{\text{Tr}(\sigma)}{3} = \underbrace{\rho^2 \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} \right)}_{-p} + f_2(\dot{T}, \text{Tr}(\mathbf{D}), \mathbf{dev}(\mathbf{D}), \dots) \quad \text{et} \quad \mathbf{dev}(\sigma) = f_3(\dot{T}, \text{Tr}(\mathbf{D}), \mathbf{dev}(\mathbf{D}), \dots) \quad (2.5)$$

La fonction d'état $p = -\rho^2 \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} \right)$ est appelé *pression thermodynamique*.

Le terme $\frac{\text{Tr}(\sigma)}{3}$ est appelé *pression mécanique*.

La première loi de (2.5) définit la partie sphérique de σ tandis que l'autre définit sa partie déviatorique.

2.3 Choix d'un modèle de comportement mécanique : les fluides newtoniens

Il reste à *choisir* les deux fonctions f_2 et f_3 telles que la dissipation intrinsèque soit non négative. Compte tenu de la relation de Helmholtz (2.4) page 15, la dissipation intrinsèque se réduit à :

$$f_2 \text{Tr}(\mathbf{D}) + f_3 : \mathbf{dev}(\mathbf{D}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{D}$$

Le choix le plus simple pour satisfaire cette condition définit les *fluides newtoniens* :

- $f_2 = k \text{Tr}(\mathbf{D})$. Le coefficient $k > 0$ est appelé *viscosité de volume*. Il est souvent considéré comme constant⁷.
- $f_3 = 2\mu \mathbf{dev}(\mathbf{D})$. Le coefficient $\mu > 0$ est appelé *viscosité de cisaillement* ou encore *viscosité dynamique*. Il est souvent considéré comme constant⁸.

En remplaçant dans (2.5) page 15 on obtient donc les deux lois de comportement suivantes :

$$\frac{\text{Tr}(\sigma)}{3} = -p + k \text{Tr}(\mathbf{D}) \quad \text{et} \quad \mathbf{dev}(\sigma) = 2\mu \mathbf{dev}(\mathbf{D})$$

qu'on peut rassembler en une seule relation appelée *loi de comportement des fluides newtoniens* :

$$\sigma = \underbrace{(-p + k \text{Tr}(\mathbf{D})) \mathbf{G}}_{\mathbf{sph}(\sigma)} + \underbrace{2\mu \mathbf{dev}(\mathbf{D})}_{\mathbf{dev}(\sigma)} = \left(-p + \left(k - \frac{2\mu}{3} \right) \text{Tr}(\mathbf{D}) \right) \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{D}$$

Remarque que pour les gaz la fonction d'état *pression thermodynamique* $p = -\rho^2 \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} \right)$ ne sera complètement définie que quand on aura choisi les fonctions d'état f_e et f_s .

Remarque aussi que la pression mécanique et la pression thermodynamique d'un gaz newtonien ne sont pas égales en général, sauf si la viscosité de volume est nulle (*gaz de Stokes*) ou si $\text{Tr}(\mathbf{D}) = 0$ (mouvement incompressible ou mouvement de solide indéformable).

⁶La relation de Helmholtz n'est donc pas vraie pour les milieux continus dits incompressibles sauf s'ils sont aussi indilatables.

⁷mais il peut *a priori* être n'importe quelle fonction positive de l'état et des invariants de \mathbf{D} .

⁸mais il peut *a priori* être n'importe quelle fonction positive de l'état et des invariants de $\mathbf{dev}(\mathbf{D})$.

2.4 Choix des fonctions d'état f_e et f_s : les gaz parfaits

Pour terminer la construction du modèle *gaz parfait*, il reste à choisir les fonctions d'état énergie interne f_e et entropie f_s , dont on sait déjà qu'elles sont liées par la relation de Helmholtz (2.4) page 15.

Plutôt que de donner directement les fonctions d'état f_e et f_s , la manière habituelle de définir les *gaz parfaits*⁹ est de dire qu'ils obéissent à la loi de Mariotte Gay-Lussac¹⁰ :

$$p = \rho r T$$

où

- p est la pression thermodynamique : $p = -\rho^2 \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} \right)$ (voir (2.5) page 15) ;
- r est une constante caractéristique du gaz parfait étudié.

Les deux fonctions d'état f_e et f_s sont donc solution du système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} T \frac{\partial f_s}{\partial T} - \frac{\partial f_e}{\partial T} &= 0 && \text{(relation de Helmholtz)} \\ -\rho^2 \left(T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} - \frac{\partial f_e}{\partial \rho} \right) &= \rho r T && \text{(loi de Mariotte Gay-Lussac)} \end{aligned}$$

dont la solution générale est¹¹ :

$$f_s = -r \ln \rho + f_1(T) \quad \text{et} \quad f_e = \int_0^T T \frac{df_1}{dT} dT + C$$

La fonction inconnue $f_1(T)$ peut être déterminée par des mesures expérimentales. Par exemple, la mesure de la chaleur massique $C_v(T)$ à ρ constant ($\dot{\rho} = 0$), aussi appelée *chaleur massique à volume constant*, permet de déterminer f_1 . En effet, d'après (1.5) page 12, on a :

$$C_v(T) = T \frac{\partial f_s}{\partial T} + \underbrace{T \frac{\partial f_s}{\partial \rho}}_0 = T \frac{\partial f_1}{\partial T} \quad \Leftrightarrow \quad f_1 = \int_0^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C'$$

Ainsi, si on connaît la loi expérimentale $C_v(T)$, les fonctions d'état f_e et f_s d'un gaz parfait sont :

$$f_s = -r \ln \rho + \int_0^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C' \quad \text{et} \quad f_e = \int_0^T C_v(T) dT + C$$

Remarque 1 : Il arrive qu'on puisse parfois considérer $C_v(T)$ comme une constante. Il reste alors :

$$f_s = -r \ln \rho + C_v \ln T + C' \quad \text{et} \quad f_e = C_v T + C$$

Remarque 2 : Pour les gaz, on définit aussi une chaleur massique à pression constante, notée $C_p(T)$.

Pour un gaz parfait, $p = \rho r T \Rightarrow \dot{p} = r T \dot{\rho} + r \rho \dot{T}$. Dans une évolution à pression (thermodynamique) constante ($\dot{p} = 0$), on a donc : $\frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = -\frac{\rho}{T}$.

En utilisant la définition des chaleurs massiques (1.5) page 12, la chaleur massique à pression constante d'un gaz parfait est :

$$C_p = T \frac{\partial f_s}{\partial T} + T \frac{\partial f_s}{\partial \rho} \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = C_v + T \left(-\frac{r}{\rho} \right) \left(-\frac{\rho}{T} \right) = C_v + r$$

⁹Attention : le qualificatif « parfait » est souvent employé par les mécaniciens des fluides dans un sens différent : il s'agit des fluides non visqueux. Ici, le mot « parfait » signifie que le gaz obéit à la loi de Mariotte Gay-Lussac. Un gaz parfait (au sens thermodynamique) peut fort bien être visqueux.

¹⁰On peut considérer cette loi comme d'origine expérimentale ou bien comme un résultat d'un modèle en physique statistique.

¹¹Remarque qu'on retrouve un résultat classique : l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.

Cette relation entre les chaleurs massiques est appelée *relation de Mayer*.

Remarque 3 : On peut construire des modèles de gaz plus réalistes que les gaz parfaits. Par exemple, on peut remplacer la loi de Mariotte Gay-Lussac par la loi de Van der Waals. On laisse le soin au lecteur intéressé de reprendre les calculs de cette section pour déterminer les fonctions d'état f_e et f_s d'un gaz de Van der Waals.

2. CONSTRUCTION DU MODÈLE « GAZ PARFAIT »

Chapitre 3

Éléments de thermodynamique des milieux continus solides

REMARQUE PRÉLIMINAIRE : BUT DU CHAPITRE ET PRÉCISIONS SUR SON DOMAINE D'APPLICATIONS

On se propose, dans ce Chapitre, d'établir un *cadre thermodynamique général* dans lequel les *équations constitutives* de tout modèle de comportement thermomécanique doivent s'inscrire. Ces équations, qui concernent notamment le tenseur des contraintes σ et le vecteur densité de flux de chaleur q , doivent en effet être en accord avec le second principe de la thermodynamique *quel que soit l'état* du système thermodynamique considéré (cf. para. 3.1, 3.2 et 3.3) et *quelle que soit son évolution* (cf. para. 3.4 et 3.5). Or, les *expériences de laboratoire*, si elles sont absolument nécessaires à la compréhension des phénomènes et à la quantification des divers variables et paramètres, ne concernent tout au plus que quelques évolutions particulières. En conséquence, un modèle de comportement construit à partir des seuls résultats de ces expériences ne permet pas *a priori* la vérification systématique du second principe : celle-ci doit donc être assurée par des conditions ¹ mathématiques, *i. e.* par la définition rigoureuse d'un cadre thermodynamique général.

On insistera toutefois sur le fait que ce cadre général n'est valable qu'en thermomécanique, puisqu'il ne fait intervenir qu'une variable d'état observable *thermique* (la température absolue T) et une variable d'état observable *mécanique* (le tenseur des déformations ϵ). Il n'est ainsi pas possible d'y inscrire, par exemple, les modèles de comportement thermo-électro-mécanique, pour lesquels une autre variable d'état observable intervient – *électrique*, en l'occurrence – : le vecteur champ électrique E (cf. remarque 3-i).

¹Dans l'idéal, ces conditions devraient être systématiquement *nécessaires et suffisantes*. Dans les faits, elles ne le sont pas toujours. Certaines ne sont en effet que suffisantes, ce qui est d'ailleurs un élément d'explication au fait que, dans la littérature scientifique, les modèles thermodynamiquement pertinents de comportements thermomécaniques des matériaux soient si nombreux.

3.1 Système thermodynamique

Le seul type de *système thermodynamique* – qu'on qualifie souvent, pour le situer sur l'échelle spatiale, de *mésoscopique* – auquel on s'intéressera dans ce cours sera un *Volume Élémentaire Représentatif* (VER) de matériau solide (cf. remarque 3-ii). À l'échelle supérieure d'une structure mécanique – qu'on qualifie cette fois de *macroscopique* – ce VER, de « petite » taille, devra pouvoir être assimilé à un point ou une *particule* (de taille nulle, donc) : c'est en effet à cette seule condition que les variables qui en caractérisent l'état thermodynamique (sa *température* T , p. ex.) pourront être considérées comme les valeurs ponctuelles des champs macroscopiques (celui de la température, $T(\mathbf{x})$) agissant dans la structure mécanique.

Ce VER, de plus, sera assimilé à un système thermodynamique *fermé*. Cela signifie que, s'il pourra bien échanger de l'énergie thermique et/ou mécanique avec son environnement, il ne pourra pas, en revanche, échanger de matière avec lui. On soulignera, à ce propos, que l'environnement d'un VER est, en général, constitué de VER initialement identiques à lui-même mais dont les évolutions thermodynamiques sont généralement différentes de la sienne.

3.2 Variables d'état thermodynamique

Ces variables, comme leur nom l'indique très clairement, permettent de caractériser l'état thermodynamique du système (le VER, en l'occurrence), *i. e.*, en premier lieu, son *énergie*. L'ensemble \mathbb{E}^{et} des valeurs qu'elles peuvent prendre est couramment appelé *espace des états* (sous-entendu « thermodynamiquement accessibles au VER »). Dans ce cours, consacré à la thermomécanique irréversible des matériaux solides, deux variables d'état dites *observables* s'imposeront en permanence, l'une pour décrire la « thermique » du VER, l'autre sa cinématique, soient :

- la *température* absolue T (en K), dont on rappelle qu'elle est toujours strictement positive : $T \in \mathbb{R}^{+*}$. En pratique, on lui préférera souvent la *température relative* $\theta = T - T_0 \in] - T_0, +\infty[$, où T_0 est une température de référence (celle du VER dans son état initial, en général). Contrairement à T , θ peut donc très bien être négative. On admettra, dans ce cours, que la valeur absolue de la température relative reste toujours « petite » devant T_0 .
- le *tenseur des déformations linéarisées* (adimensionnelles), $\epsilon = \nabla_s(\mathbf{u}) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_s$, où le symbole « ∇_s » désigne la partie symétrisée de l'opérateur (linéaire) gradient. Ce tenseur n'est pertinent que tant que les déformations restent « petites » : si tel n'est pas le cas, il est en effet indispensable de choisir un autre tenseur de déformations – et il y a une infinité de choix possibles, tous géométriquement équivalents cependant –, tenant compte de ce que l'on appelle les non-linéarités géométriques.

Les seules variables d'état observables θ et ϵ s'avèreront cependant insuffisantes pour décrire la plupart des *irréversibilités* de comportement, tels la *plasticité* et l'*endommagement*, ainsi que certaines caractéristiques physiques telle l'*anisotropie*. On sera donc amené, dans ce cours, à considérer d'autres variables d'état, soient :

- les *variables d'état internes* (toutes adimensionnelles dans ce cours), rassemblées dans un « jeu », qu'on notera synthétiquement α . Certaines de ces variables internes seront scalaires, d'autres vectorielles, d'autres encore tensorielles du second ordre². On notera \mathbb{E}^{etin} l'ensemble décrit par ces variables internes, qu'on peut aussi qualifier d'*espace des états internes*.

Plus grand sera le nombre de ces variables, plus précise sera la description de l'état thermomécanique du VER. On peut d'ailleurs montrer, grâce aux méthodes d'homogénéisation – qui permettent de relier les variables d'état du VER, mésoscopiques, à la cinématique et à la sthénique de sa microstructure – qu'il faut une infinité de variables internes pour décrire exactement le comportement thermomécanique irréversible du VER... alors que les modèles de comportement que l'on étudiera dans ce cours en compteront tout au plus trois ! Cette remarque montre que c'est en premier lieu la pertinence du *choix* des variables internes parmi l'infinité de candidats possibles qui conditionnera la qualité d'un modèle, *i. e.*

²Il n'est pas du tout interdit d'envisager des variables internes tensorielles d'ordre supérieur à deux. On n'en verra cependant pas d'exemple dans ce cours.

son aptitude à décrire précisément – mais en aucun cas exactement – le comportement thermomécanique du VER.

En résumé, le « jeu » de variables d'état considéré dans ce cours sera (cf. remarque 3-iii) :

$$\mathbf{V}^{et} \triangleq (\theta, \epsilon, \alpha) \quad (3.1)$$

où \mathbf{V}^{et} appartient à l'espace des états $\mathbb{E}^{et} =]-T_0, +\infty[\times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_s \times \mathbb{E}^{etin}$ et où le symbole « \triangleq » signifie « égal par définition ».

3.3 Potentiel et fonctions d'état thermodynamique

La Thermodynamique est la science des échanges d'énergie. Les variables d'état étant choisies, cf. eqn. (3.1), il convient donc maintenant de leur associer une énergie – par unité de masse, en l'occurrence. Formellement, cela revient à définir une application de l'espace des états \mathbb{E}^{et} vers \mathbb{R} : le *potentiel d'état thermodynamique*³.

Bien que d'autres choix soient possibles – telle l'énergie interne massique ou l'enthalpie massique – on considèrera systématiquement, dans ce cours, le potentiel d'état (thermodynamique) *énergie libre massique* (en $J.kg^{-1}$), soit :

$$\psi : \mathbf{V}^{et} \in \mathbb{E}^{et} \rightarrow \psi(\mathbf{V}^{et}) \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Par définition, les *fonctions d'état* sont les dérivées partielles de ψ par rapport à chacune des variables d'état, soient (le choix des signes est purement conventionnel) :

$$A^\theta \triangleq - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} ; A^\epsilon \triangleq \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} ; A^\alpha \triangleq - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad (3.3)$$

Ainsi, d'après eqn. (3.3), à chaque variable d'état est associée une fonction d'état dont la valeur a nécessairement le même ordre de tensorialité que la variable considérée. Notant \mathbf{F}^{et} la fonction définie par :

$$\mathbf{F}^{et} : \mathbf{V}^{et} \in \mathbb{E}^{et} \rightarrow \mathbf{F}^{et}(\mathbf{V}^{et}) = (A^\theta(\mathbf{V}^{et}), A^\epsilon(\mathbf{V}^{et}), A^\alpha(\mathbf{V}^{et})) \quad (3.4)$$

il est alors possible de définir le produit scalaire généralisé⁴ $\mathbf{F}^{et}(\mathbf{V}^{et}) \bullet \mathbf{V}^{et}$: à l'instar de ψ , il est homogène à une énergie par unité de masse (cf. remarque 3-iv).

Comme on le verra par la suite, une fonction d'état a une importance cruciale en thermodynamique : l'*entropie massique* s (en $J.K^{-1}.kg^{-1}$). Or, elle est généralement égale à la fonction d'état associée à la température⁵ :

$$s = A^\theta \quad (3.5)$$

Cette égalité sera systématiquement retenue dans ce cours.

Quant aux fonctions d'état A^α associées aux variables internes α , si l'on peut d'ores et déjà affirmer que leurs valeurs seront toujours homogènes à une énergie massique dans ce cours, où toutes les variables internes seront adimensionnelles, leur sens physique ne pourra être précisé qu'une fois que celui des variables internes l'aura lui-même été.

Il faut finalement souligner que, les valeurs des fonctions et potentiel d'état étant des grandeurs physiques, celles-ci, à l'instar des variables d'état, doivent être *objectives* (cf. remarque 3-v).

³Un potentiel d'état est nécessairement deux fois différentiable. Une fonction d'état peut n'être qu'une seule fois différentiable.

⁴Il faut ici bien comprendre que $\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon, \alpha)$ et $\mathbf{F}^{et}(\mathbf{V}^{et}) = (A^\theta(\mathbf{V}^{et}), A^\epsilon(\mathbf{V}^{et}), A^\alpha(\mathbf{V}^{et}))$ sont des « jeux » de variables et que ces variables ne sont pas du même ordre de tensorialité : il convient donc d'être prudent dans la définition des produits entre ces deux « jeux ». Par exemple, en ce qui concerne le produit scalaire généralisé, si $\alpha = (a, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ où a est un scalaire, \mathbf{b} , un vecteur et \mathbf{c} un tenseur d'ordre deux, $\mathbf{F}^{et}(\mathbf{V}^{et}) \bullet \mathbf{V}^{et}$ vaut : $A^\theta(\mathbf{V}^{et})\theta + A^\epsilon(\mathbf{V}^{et}) : \epsilon + A^a(\mathbf{V}^{et})a + A^b(\mathbf{V}^{et}) \cdot \mathbf{b} + A^c(\mathbf{V}^{et}) : \mathbf{c}$.

⁵Cette égalité souffre certaines exceptions, notamment quand la loi d'évolution d'une variable interne fait explicitement intervenir un terme dépendant linéairement de θ . De tels cas ne seront pas considérés dans ce cours.

3.4 Premier principe de la thermodynamique

On note e le potentiel d'état *énergie interne massique* du VER (en $J.kg^{-1}$). On rappelle tout d'abord que l'énergie interne massique est reliée à l'énergie libre massique ψ par la relation suivante (cf. remarque 3-vi) :

$$e = \psi + Ts \Rightarrow \dot{e} = \dot{\psi} + T\dot{s} + s\dot{\theta} \quad (3.6)$$

Le *premier principe de la thermodynamique* – qui stipule, de façon très générale, que l'intégralité de la puissance fournie à un système thermodynamique, quelle qu'elle soit et, en particulier, quel que soit son origine, mécanique (régie par \dot{e}), thermique (régie par $\dot{\theta}$) ou mixte, contribue à son évolution thermodynamique soit, en premier lieu, à celle de son énergie interne – s'écrit, pour tout état instantané V^{et} du VER ($\text{div}(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{G} : \nabla \mathbf{q}$) :

$$\rho \dot{e} = \rho \frac{\partial e}{\partial V^{et}} \bullet \dot{V}^{et} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \text{div}(\mathbf{q}) + r, \quad \forall V^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}) \quad (3.7)$$

ou encore, d'après eqn. (3.6), la définition des fonctions d'état, eqn. (3.3), et celle de l'entropie, eqn. (3.5) :

$$\rho T \dot{s} - \rho A^\alpha \bullet \dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho A^\epsilon) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \text{div}(\mathbf{q}) + r, \quad \forall V^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}) \quad (3.8)$$

Dans eqn. (3.8), le terme de gauche fait apparaître deux évolutions instantanées : celle de l'entropie massique, \dot{s} , et celle du « jeu » de variables internes, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$. Ceci montre que, pour un état instantané donné et une puissance instantanée fournie au VER donnée (*i. e.* pour V^{et} et $(\dot{\theta}, \dot{\epsilon})$ donnés), les évolutions instantanées de s et $\boldsymbol{\alpha}$ sont liées.

Dans eqn. (3.7) et eqn. (3.8), \mathbf{q} est la *densité de flux de chaleur* instantané (grandeur vectorielle ; en $W.m^{-2}$) échangée⁶ par le VER avec son « extérieur » à travers l'interface qu'il a avec lui, *i. e.* sa frontière (rappelons ici que « l'extérieur » d'un VER est constitué de VER initialement identiques à lui même mais dont les évolutions thermodynamiques, en général, sont différentes de la sienne). Quant à r , c'est le *taux* instantané de *production de chaleur à distance* (grandeur scalaire ; en $W.m^{-3}$), *i. e.*, si r est positif, la puissance calorifique fournie par l'extérieur directement « à coeur » du VER (resp., si r est négatif, la puissance calorifique reçue par l'extérieur directement « du coeur » du VER)⁷.

Outre \mathbf{q} , le *tenseur des contraintes* instantanées, $\boldsymbol{\sigma}$, et les *évolutions instantanées des variables internes*, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, interviennent dans eqn. (3.7) et eqn. (3.8). Ces trois grandeurs ne sont ni des variables d'état, ni des variables contrôlant la puissance fournie au VER : en toute généralité, on doit donc admettre la possibilité qu'elles dépendent de ces deux types de variables, soit :

$$\boldsymbol{\sigma}\{V^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} ; \mathbf{q}\{V^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} ; \dot{\boldsymbol{\alpha}}\{V^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} \quad (3.9)$$

Une dernière expression peut encore être donnée au premier principe, connue sous le nom d'*équation de la chaleur*. Elle est obtenue à partir de la fonction d'état définissant l'entropie massique s , eqn. (3.5), soit :

$$-\rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho A^\epsilon + \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \text{div}(\mathbf{q}) + r + \rho \left(A^\alpha + T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \boldsymbol{\alpha}} \right) \bullet \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \forall V^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}) \quad (3.10)$$

3.5 Second principe de la thermodynamique et inégalité de Clausius-Duhem

Le second principe stipule que toutes les évolutions thermodynamiques ne sont pas possibles, interdisant à l'évolution instantanée de l'entropie massique \dot{s} de descendre en dessous d'un seuil régi par les échanges

⁶Soit \mathbf{n} la normale extérieure au VER. Par convention sur \mathbf{q} , l'extérieur *fournit de la chaleur au VER* si le produit scalaire $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ est négatif et *reçoit de la chaleur du VER* dans le cas contraire.

⁷Les *micro-ondes*, comme on les appelle usuellement, sont un bon exemple de ce type de source de chaleur, puisqu'elles agissent directement « à coeur » du matériau (pour peu, toutefois, que celui-ci contienne bien des molécules d'eau : sous l'action des micro-ondes, ces molécules entrent en effet dans un régime vibratoire résonant, ce qui se traduit par un échauffement).

thermiques entre le VER et son extérieur, soit, :

$$\rho \dot{s} \geq -\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) + \frac{r}{T} = \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta - \frac{1}{T} \operatorname{div}(\mathbf{q}) + \frac{r}{T}, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \nabla \theta) \quad (3.11)$$

où $\nabla \theta = \nabla T$, à l'inverse de θ , n'est pas une variable d'état : il est donc bien nécessaire qu'il intervienne dans la liste des quantificateurs pour lesquels l'inégalité eqn. (3.11) doit être satisfaite.

Si tant est que le terme de droite de cette inégalité soit négatif – ce qui est tout à fait possible puisqu'il caractérise les interactions thermiques du système thermodynamique avec son « extérieur » – \dot{s} peut donc l'être également. En clair, *il n'est pas interdit à l'entropie d'un système thermodynamique fermé (un VER, par exemple) de diminuer*. En revanche, la puissance volumique instantanément dissipée ϕ (en $W.m^{-3}$), qu'on nomme plus volontiers *dissipation* instantanée, est bien *toujours non négative*, qui s'écrit :

$$\phi = \rho T \dot{s} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta + \operatorname{div}(\mathbf{q}) - r \geq 0, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \nabla \theta) \quad (3.12)$$

Il est important de souligner ici que cette puissance volumique est intégralement dissipée sous forme de *chaleur*, *i. e. via* \mathbf{q} (conduction) et r (radiation).

À partir de la définition des fonctions d'état, eqn. (3.3), et, en particulier, celle de l'entropie massique, eqn. (3.5), et compte tenu de l'équation de la chaleur, eqn. (3.10), on peut donner une autre expression à ϕ , connue sous le nom d'*inégalité de Clausius-Duhem*, soit :

$$\phi = (\sigma - \rho A^e) : \dot{\epsilon} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta + \rho A^\alpha \bullet \dot{\alpha} \geq 0, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta) \quad (3.13)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\rho A^\alpha \bullet \dot{\alpha} \geq - \left((\sigma - \rho A^e) : \dot{\epsilon} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \right), \quad \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta) \quad (3.14)$$

Ainsi, les équations d'évolution instantanée des variables internes apparaissent-elles *contraintes*. Par rapport à eqn. (3.9), cependant, en plus de $\operatorname{div}(\mathbf{q})$ et r , apparaît, dans eqn. (3.14), le terme $\nabla \theta$: on ne peut donc exclure que $\dot{\alpha}$ en dépende. Il en va de même pour \mathbf{q} et σ , ce qui fait que l'on dispose finalement des conditions suivantes sur le tenseur des contraintes instantanées, le vecteur densité de flux de chaleur instantané et les équations d'évolution instantanée des variables internes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = (\sigma - \rho A^e) : \dot{\epsilon} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta + \rho A^\alpha \bullet \dot{\alpha} \geq 0, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta) \\ \text{où } \sigma \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta \}; \mathbf{q} \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta \}; \dot{\alpha} \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta \} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Finalement, on insistera encore une fois sur le fait que l'inégalité eqn. (3.15) doit être impérativement vérifiée pour *tout* modèle de comportement, c'est-à-dire par les trois fonctions $\mathbf{q} \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta \}$, $\sigma \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta \}$ et $\dot{\alpha} \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta \}$, qu'on présente souvent sous le nom d'*équations constitutives*. Parmi toutes les hypothèses et conditions qui jalonnent le travail d'écriture d'un modèle, elle est donc de celles (tout comme l'objectivité, d'ailleurs) qui ne peuvent en aucun cas être ignorées.

3.6 Hypothèses supplémentaires ; dissipations thermique et intrinsèque ; modèles de comportement thermique et mécanique

Mathématiquement parlant, si l'on choisit une quelconque fonction $\dot{\alpha}$ (resp. σ ou \mathbf{q}) à valeurs finies⁸, il existe une infinité de couples de fonctions (σ, \mathbf{q}) (resp. $(\dot{\alpha}, \mathbf{q})$ ou $(\dot{\alpha}, \sigma)$) permettant de satisfaire eqn. (3.15). Ainsi peut-on arbitrairement choisir la fonction $\dot{\alpha}$ telle que :

$$\dot{\alpha}(\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta) = \left(\frac{\beta}{T} (\nabla \theta \cdot \nabla \theta) + \gamma (\dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}) \right) A^\alpha \quad (3.16)$$

⁸Cette fonction peut éventuellement tendre vers l'infini lorsque l'un et/ou l'autre de ses arguments tend vers l'infini. Ces cas limites, en effet, sont ici sans intérêt puisque vides de sens physique.

où β et γ sont des réels non négatifs quelconques. L'inégalité eqn. (3.15) se réécrit alors :

$$\left(\sigma - \rho A^\varepsilon + \rho \gamma (A^\alpha \bullet A^\alpha) \dot{\epsilon} \right) : \dot{\epsilon} - \frac{1}{T} \left(\mathbf{q} - \beta (A^\alpha \bullet A^\alpha) \nabla \theta \right) \cdot \nabla \theta \geq 0, \forall V^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta) \quad (3.17)$$

qui est systématiquement satisfaite si l'on choisit, par exemple, les fonctions σ et \mathbf{q} telles que (ϕ et χ sont des réels non négatifs quelconques) :

$$\sigma(V^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta) = \rho A^\varepsilon(V^{et}) - \rho \gamma (A^\alpha(V^{et}) \bullet A^\alpha(V^{et})) \dot{\epsilon} + \phi(\nabla \theta, \nabla \theta) \dot{\epsilon} \quad (3.18)$$

et :

$$\mathbf{q}(V^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta) = \beta (A^\alpha(V^{et}) \bullet A^\alpha(V^{et})) \nabla \theta + \chi(\dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}) \nabla \theta \quad (3.19)$$

En fait, parmi l'infinité de fonctions satisfaisant eqn. (3.15), seules quelques-unes ont une véritable pertinence physique, au sens que les valeurs de ϕ auxquelles elles mènent sont en accord avec les *mesures expérimentales*. Pour la plupart des matériaux solides – et au moins dans la gamme des « petites » déformations et des « petites » variations de température considérée dans ce cours –, ces mesures expérimentales légitiment les hypothèses suivantes : \mathbf{q} ne dépend que de V^{et} et de $\nabla \theta$ et σ ne dépend pas de $\nabla \theta$. *A priori*, ni l'une, ni l'autre de ces hypothèses ne peut être étendue aux équations d'évolution des variables internes ; quitte à ne pas pouvoir rendre compte de certains faits expérimentaux, on retiendra toutefois, dans ce cours, l'hypothèse que, comme σ , $\dot{\alpha}$ ne dépend pas de $\nabla \theta$, soit, en résumé :

$$\sigma\{V^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} ; \dot{\alpha}\{V^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} ; \mathbf{q}\{V^{et}, \nabla \theta\} \quad (3.20)$$

En ce qui concerne la dissipation, on formule également une hypothèse⁹, à savoir que sa partie appelée *dissipation thermique*, définie par $\phi_{th} = -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta$, est toujours non négative, soit :

$$\phi_{th} \hat{=} -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0, \forall V^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}, \nabla \theta) \quad (3.21)$$

ou encore, puisque, d'après eqn. (3.20), \mathbf{q} ne dépend que de V^{et} et $\nabla \theta$:

$$\phi_{th} \hat{=} -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0, \forall V^{et} \ \& \ \forall \nabla \theta \quad (3.22)$$

Compte tenu de eqn. (3.22), sachant que σ , ni $\dot{\alpha}$ ne dépendent de $\nabla \theta$ et que eqn. (3.15) doit également être vérifiée lorsque $\nabla \theta = 0$, on caractérise alors la *dissipation intrinsèque*, ϕ_{int} , dont on exigera, dans ce cours, qu'elle soit systématiquement non négative :

$$\phi_{int} = \phi - \phi_{th} = (\sigma - \rho A^\varepsilon) : \dot{\epsilon} + \rho A^\alpha \bullet \dot{\alpha} \geq 0, \forall V^{et} \ \& \ \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}) \quad (3.23)$$

Il est à noter que cette dissipation intrinsèque peut être d'origine purement *mécanique* – $\dot{\epsilon} \neq 0$, $\dot{\theta} = 0$; les évolutions de ce type sont qualifiées d'*isothermes* – ou purement *thermique* – $\dot{\theta} \neq 0$, $\dot{\epsilon} = 0$; les évolutions de ce type sont qualifiées de *non déformantes*¹⁰. Signalons également un autre type d'évolutions particulières, qualifiées d'*adiabatiques* et caractérisées par $\text{div}(\mathbf{q}) = 0$ et $r = 0$. D'après l'équation de la chaleur, eqn. (3.10), ces évolutions sont telles que, quel que soit V^{et} , $\dot{\epsilon}$ et $\dot{\theta}$ ne sont pas indépendants.

Ce découplage de la dissipation en parties thermique, eqn. (3.22), et intrinsèque, eqn. (3.23), séparément positives a pour conséquence que tout modèle de comportement thermomécanique s'inscrivant dans le cadre défini par eqn. (3.20) peut aussi être scindé en parties thermique – pour un état V^{et} donné, uniquement régie par $\nabla \theta$ – et thermomécanique – pour un état V^{et} donné, uniquement régie par $\dot{\epsilon}$ et $\dot{\theta}$.

Un *modèle de comportement thermique* est ainsi complètement défini dès lors qu'une fonction $\mathbf{q}\{V^{et}, \nabla \theta\}$ est choisie en cohérence avec eqn. (3.22), et dont les valeurs non négatives de ϕ_{th} auxquelles elles mènent

⁹Au vrai, il s'agit plutôt d'un principe général que d'une simple hypothèse, qui stipule que le vecteur chaleur est toujours opposé au vecteur gradient de température, *i. e.* que la chaleur va toujours des zones de haute température vers les zones de basse température.

¹⁰Dans les ouvrages traitant de thermodynamique des gaz parfaits, ce type d'évolution est qualifiée d'*isochore* ou d'*isovolume*. On ne retiendra aucun de ces deux termes ici, puisque, dans un solide (comme dans un liquide, d'ailleurs, ou un gaz non parfait), une évolution est isochore si et seulement si $\text{Tr}(\dot{\epsilon}) = 0$, et non pas $\dot{\epsilon} = 0$.

sont en accord avec les mesures expérimentales. Le plus célèbre modèle de comportement thermique est la loi de Fourier, qui s'écrit :

$$\mathbf{q} = -\hat{k}\nabla\theta \quad (3.24)$$

où $\hat{k} \geq 0$ est la *conductivité thermique* (en $W.K^{-1}.m^{-1}$). Elle est tout à fait pertinente pour la plupart des matériaux solides ¹¹, au moins dans la gamme des « petites » déformations et des « petites » variations de température considérée dans ce cours. On la retiendra donc dans toute la suite de ce cours, ce qui aura notamment pour conséquence que $\text{div}(\mathbf{q})$ sera systématiquement remplacé par $-\hat{k}\Delta\theta$ – où « Δ » désigne l'opérateur laplacien –, puisque :

$$\text{div}(\mathbf{q}) = -\hat{k} \text{div}(\nabla\theta) = -\hat{k} (\mathbf{G} : \nabla\nabla\theta) \hat{=} -\hat{k}\Delta\theta \quad (3.25)$$

Quant au modèle de comportement mécanique, il est complètement défini par les fonctions suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} ; \dot{\boldsymbol{\alpha}}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} \quad (3.26)$$

Les *équations constitutives* du modèle de comportement mécanique, eqn. (3.26), doivent être choisies en cohérence avec eqn. (3.23), et les valeurs non négatives de ϕ_{int} auxquelles elles mènent doivent être en accord avec les mesures expérimentales. Toute la suite de ce cours sera consacrée à la présentation de modèles de comportement mécanique de ce type.

On remarquera finalement que, grâce à la loi de Fourier, eqn. (3.24), l'équation de la chaleur eqn. (3.10) se réécrit :

$$-\rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} - \hat{k} \Delta \theta - r = \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{A}^\epsilon + \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho \left(\mathbf{A}^\alpha + T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \boldsymbol{\alpha}} \right) \bullet \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (3.27)$$

¹¹Sauf pour les matériaux thermiquement anisotropes, pour lesquels il faut considérer un *tenseur* (ordre deux) de conductivité thermique.

Résumé du Chapitre 3 :

Dans ce cours, les ingrédients thermodynamiques utilisés pour écrire les *équations constitutives* des divers modèles de comportement thermomécanique du système thermodynamique « VER » sont :

- le « jeu » de variables décrivant l'état thermodynamique :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon, \alpha) \in \mathbb{E}^{et}$$

où $\theta \in]-T_0, +\infty[$ est la température relative, $\epsilon \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_s$, le tenseur des déformations linéarisées et $\alpha \in \mathbb{E}^{etin}$, un « jeu » de variables internes (scalaires et/ou vectorielles et/ou tensorielles d'ordre supérieur) décrivant les irréversibilités de comportement et/ou certaines caractéristiques physiques telle l'anisotropie, et qu'il faut choisir au vu des résultats d'expériences.

- le potentiel thermodynamique *énergie libre massique*, fonction des variables d'état – en fait, de leurs invariants –, $\psi(\mathbf{V}^{et})$, dont dérivent les *fonctions d'état* (l'égalité entre l'entropie massique, s , et la fonction d'état associée à la température, A^θ , est une condition nécessaire à la non-négativité de la dissipation et non un postulat) :

$$s = A^\theta \triangleq -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad A^\epsilon \triangleq \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}; \quad A^\alpha \triangleq -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$$

- l'*inégalité de Clausius-Duhem*, qui découle des premier et second principes et traduit la non négativité de la *dissipation* instantanée ϕ (i. e. de la puissance dissipée – intégralement sous forme de *chaleur* – par unité de volume). La *loi de Fourier* – $\mathbf{q} = -\hat{k}\nabla\theta$ – étant retenue dans tout ce cours comme *modèle de comportement thermique*, la *dissipation thermique* instantanée – $\phi_{th} \triangleq -\frac{1}{T}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta = \frac{\hat{k}}{T}\nabla\theta\cdot\nabla\theta$ – est bien toujours non négative. Quant à la condition de non-négativité de la *dissipation intrinsèque* instantanée, ϕ_{int} , elle s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_{int} = \phi - \phi_{th} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho\mathbf{A}^\epsilon) : \dot{\epsilon} + \rho\mathbf{A}^\alpha \bullet \dot{\alpha} \geq 0, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \text{ \& } \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon}) \\ \text{où } \boldsymbol{\sigma}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\}; \quad \dot{\alpha}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} \end{cases}$$

Cette inégalité doit être systématiquement vérifiée par tout *modèle de comportement thermomécanique* (mais ne suffit pas à son explicitation, celle-ci nécessitant, là encore, le recours aux expériences), i. e. par les *équations constitutives thermomécaniques* définissant le *tenseur des contraintes* instantanées, $\boldsymbol{\sigma}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\}$, et les *évolutions* instantanées des *variables internes*, $\dot{\alpha}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\}$,

- l'*équation de la chaleur* (directement issue du premier principe), donnant l'évolution instantanée de la température relative θ , quel que soit l'état instantané \mathbf{V}^{et} et quelle que soit la puissance volumique instantanément échangée par le VER avec l'extérieur, que celle-ci soit mécanique (régie par $\dot{\epsilon}$), thermique (régie par $\dot{\theta}$) ou mixte :

$$-\rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} - \hat{k}\Delta\theta - r = \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho\mathbf{A}^\epsilon + \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \epsilon} \right) : \dot{\epsilon} + \left(\rho\mathbf{A}^\alpha + \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \alpha} \right) \bullet \dot{\alpha}, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \text{ \& } \forall (\dot{\theta}, \dot{\epsilon})$$

Chapitre 3 - Remarques

– **Remarque 3-i : Variables d'état observables et variables d'état internes.**

On dit d'une variable d'état qu'elle est *observable* (ou contrôlable) quand on peut lui associer une évolution quelconque : à $T \in \mathbb{R}^{+*}$, on peut associer un quelconque $\hat{T} \in \mathbb{R}$. À l'inverse, on dit d'une variable d'état qu'elle est *interne* (ou non contrôlable) quand les évolutions qu'on peut lui associer sont contraintes. Par exemple, si $d \in \mathbb{R}$ est une variable interne scalaire, l'ensemble de ses évolutions possibles est strictement inclus dans \mathbb{R} .

D'un point de vue physique, une variable d'état observable est à tout instant contrôlable ou, au moins, directement mesurable, *indépendamment de tout modèle de comportement*. Une variable d'état interne, en revanche, n'est qu'indirectement mesurable, au sens que sa mesure – dans l'acception physique de ce terme – n'est possible que si le modèle de comportement thermomécanique qui la fait intervenir est connu.

– **Remarque 3-ii : Sur la notion de Volume Élémentaire Représentatif.**

La représentativité dont il est ici question est généralement de nature *statistique*. Pour la comprendre, revenons tout d'abord rapidement sur le point de vue retenu pour décrire le matériau : à l'échelle mésoscopique, celui-ci est mentalement divisé en « petits volumes » – les *Volumes Élémentaires* – selon un pavage régulier (cubique p. ex.). Initialement identiques en forme et taille, ces Volumes Élémentaires doivent aussi l'être dans leur microstructure interne si l'on veut pouvoir les considérer, ce qui est bien le but visé, comme des systèmes thermodynamiques initialement identiques. Or, compte-tenu de l'hétérogénéité constitutive des matériaux solides à l'échelle microscopique – tous présentent des *microdéfauts*, aléatoirement distribués le plus souvent : microagrégats d'éléments d'addition, microcavités, microfissures, ... –, cette identité de microstructure ne peut être assurée qu'à des fluctuations près : on exige de celles-ci qu'elles soient « petites » pour que les Volumes Élémentaires puissent être considérés comme *Représentatifs*.

Un contre-exemple sera peut-être encore plus parlant. Imaginons que l'on s'intéresse à un matériau composite de type « matrice + fibres longues », le diamètre de ces fibres étant D . Si, à l'échelle mésoscopique, ce matériau est mentalement « pavé » par des Volumes Élémentaires dont la taille est très inférieure à D , alors bon nombre de ces Volumes Élémentaires ne contiendront que le matériau « fibre », tandis que la plupart des autres ne contiendront que le matériau « matrice », et seulement quelques uns, à cheval sur l'interface fibre-matrice, les matériaux « fibre » et « matrice ». Tous ces Volumes Élémentaires n'auront donc pas la même microstructure, pas même à des « petites » fluctuations près : en aucun cas ils ne pourront donc être considérés comme représentatifs du matériau composite « matrice + fibres longues ».

– **Remarque 3-iii : Variable d'état masse volumique ; thermomécanique des fluides.**

Il peut paraître surprenant que la masse volumique ρ – en $kg.m^{-3}$ – n'apparaisse pas dans le « jeu » de variables d'état eqn. (3.1) : au même titre que θ et ϵ , il est indispensable de la connaître pour complètement définir l'état thermodynamique du VER. En fait, elle y est bien mais seulement de façon implicite, *via* la trace du tenseur des déformations, notée ici $Tr(\epsilon)$. Dans le cas des « petites » déformations, en effet, l'équation de conservation de la masse s'écrit $\rho \approx \hat{\rho}(1 - Tr(\epsilon))$, où $\hat{\rho}$ est la masse volumique initiale (c'est donc un paramètre-matériau) : dès qu'un état de déformations ϵ est donné, et donc un état de $Tr(\epsilon)$, la masse volumique est complètement déterminée. Il est à noter que cette remarque reste valable dans le cas des grandes déformations, pour lesquelles l'équation de conservation de la masse s'écrit toutefois $\hat{\rho} = \rho \det(\mathbf{F})$, où \mathbf{F} est le tenseur gradient de transformation (cf. ci-dessous la remarque : « à propos (du principe) de l'objectivité » pour la définition de ce tenseur).

Il est aussi à noter que le tenseur des déformations peut également être défini en mécanique des fluides. Il n'est cependant jamais retenu comme variable d'état du fait, notamment, que, dans les fluides, aucune considération physique ne permet de lever l'arbitraire sur la configuration de référence par rapport à laquelle les déformations sont calculées. La masse volumique, en revanche, est aussi bien définie dans un fluide que dans un solide : le jeu minimal de variables d'état caractéristiques d'un fluide est donc $\mathbf{V}^{et} = (\theta, \rho)$ (auquel on peut ajouter, si nécessaire, des variables internes α). Pour peu, cependant, qu'on cherche à construire un modèle de comportement pour un fluide incompressible, ce jeu se réduit à

$\mathbf{V}^{et} = \theta$ (plus d'éventuelles variables internes α).

– **Remarque 3-iv : Fonctions d'état vs. variables duales.**

Les définitions précédentes, eqn. (3.3), sont parfois considérées comme des équations liant \mathbf{V}^{et} à ses « variables duales », $\mathbf{F}^{et}(\mathbf{V}^{et})$. Cette façon de voir les choses a cet inconvénient qu'elle repose sur une interprétation physique *a priori* de ces « variables duales », ce qui n'est pas sans danger. Si l'on adopte ce point de vue, on peut par exemple présupposer que $\rho \mathbf{A}^E$ est le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, ce qui est généralement faux.

– **Remarque 3-v : À propos (du principe) de l'objectivité.**

L'énergie interne massique ψ , au même titre que toutes les grandeurs physiques d'ailleurs, se doit d'être *objective*. Sous ce terme, se cache une notion finalement assez simple à saisir, à savoir que les seules grandeurs véritablement pertinentes pour décrire un système physique (et donc, en particulier, un système thermodynamique comme le VER) doivent être invariants par tout changement de *référentiel*¹² (les mécaniciens parlent d'invariance par tout changement d'*observateur*), ce qui se traduit comme suit :

Sachant qu'un observateur O (resp. un observateur \bar{O}) est complètement défini à l'instant t par :

- son origine $O^t \in \mathcal{E}$ (resp. $\bar{O}^t \in \mathcal{E}$ avec, en général, $\bar{O}^t \neq O^t$),

- sa base orthonormée associée¹³ $\{\mathbf{B}^{tj}\}$ (resp. $\{\bar{\mathbf{B}}^{ti}\}$ avec, en général, $\{\bar{\mathbf{B}}^{ti}\} \neq \{\mathbf{B}^{ti}\}$),

et sachant que le changement d'observateur $O = [O^t, \{\mathbf{B}^{tj}\}] \rightarrow \bar{O} = [\bar{O}^t, \{\bar{\mathbf{B}}^{ti}\}]$, quant à lui, est complètement défini par :

- la translation $\mathbf{T}^t = O^t \bar{O}^t$ telle que, $\forall M \in \mathcal{E}$, $\bar{\mathbf{x}}_M^t = \mathbf{x}_M^t - \mathbf{T}^t$, où $\mathbf{x}_M^t \triangleq O^t M$ (resp. $\bar{\mathbf{x}}_M^t \triangleq \bar{O}^t M$) est le vecteur *position du point M pour l'observateur O* (resp. *pour l'observateur \bar{O}*),

- la transformation orthogonale (rotation ou retournement) \mathbf{Q}^t telle que ses composantes Q_{ij}^t dans la base \mathbf{B}^{tj} sont celles, dans la même base, des trois vecteurs définissant la base $\bar{\mathbf{B}}^{ti}$, soit : $\bar{\mathbf{B}}^{ti} = Q_{ij}^t \mathbf{B}^{tj}$

une grandeur physique Φ agissant sur toutes les particules d'un domaine matériel $\mathcal{D} - i. e.$ telle que, à l'instant t , $\Phi(P, t)$ est définie sur tout le sous espace \mathcal{E}^t de \mathcal{E} occupé par les particules P de $\mathcal{D} -$ est dite *objective* si et seulement si, notant :

- $\phi(\mathbf{x}_P^t) \triangleq \phi_j(\mathbf{x}_P^t) \mathbf{B}^{tj}$ la *mesure* faite par l'observateur O de cette grandeur sur une quelconque particule P de \mathcal{D} , repérée par \mathbf{x}_P^t ,

- $\bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_P^t) \triangleq \bar{\phi}_i(\bar{\mathbf{x}}_P^t) \bar{\mathbf{B}}^{ti}$ la mesure faite par l'observateur \bar{O} de cette même grandeur sur la même particule P de \mathcal{D} , repérée par $\bar{\mathbf{x}}_P^t$,

les mesures $\phi(\mathbf{x}_P^t)$ et $\bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_P^t)$ sont égales, ce qui se traduit par l'une des relations suivantes :

– si Φ est une grandeur réelle :

$$\bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_P^t) = \phi(\mathbf{x}_P^t),$$

– si Φ est une grandeur vectorielle :

$$\bar{\phi}_i(\bar{\mathbf{x}}_P^t) = Q_{ji}^t \phi_j(\mathbf{x}_P^t),$$

– si Φ est une grandeur tensorielle d'ordre deux :

$$\bar{\phi}_{ik}(\bar{\mathbf{x}}_P^t) = Q_{ji}^t Q_{lk}^t \phi_{jl}(\mathbf{x}_P^t),$$

– si Φ est une grandeur tensorielle d'ordre trois :

$$\bar{\phi}_{ikm}(\bar{\mathbf{x}}_P^t) = Q_{ji}^t Q_{lk}^t Q_{nm}^t \phi_{jln}(\mathbf{x}_P^t),$$

– si Φ est une grandeur tensorielle d'ordre quatre :

$$\bar{\phi}_{ikmp}(\bar{\mathbf{x}}_P^t) = Q_{ji}^t Q_{lk}^t Q_{nm}^t Q_{qp}^t \phi_{jlnq}(\mathbf{x}_P^t),$$

– ...

Par postulat, la *température* Θ est une grandeur réelle objective – ou une grandeur *scalaire* –, *i. e.*

¹²En physique non relativiste – qui est clairement le cadre dans lequel s'inscrit ce cours – le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels, quels que soient leurs mouvements relatifs. Il n'y aura donc qu'une seule horloge dans ce cours, mesurant un temps « absolu ».

¹³Même si la base $\{\mathbf{C}^{ti}\} \subset \mathbb{R}^3$ par laquelle un observateur est « naturellement » identifié n'est ni orthogonale ni normée, il est toujours possible de lui associer une base orthonormée $\{\mathbf{B}^{ti}\} \subset \mathbb{R}^3$: celle définie par les vecteurs propres unitaires de son tenseur métrique \mathbf{G}^t . Ce tenseur est en effet *symétrique*, dont les composantes dans la base $\{\mathbf{C}^{ti}\}$ sont les neuf produits scalaires $\mathbf{C}^{ti} \cdot \mathbf{C}^{tj}$; en conséquence, sa base propre est orthogonale.

$\forall t \ \& \ \forall P^t \in \mathcal{E}^t, \bar{\theta}(\bar{\mathbf{x}}_p^t) = \theta(\mathbf{x}_p^t)$. En mécanique non relativiste, la *distance entre deux particules* à l'instant t , soit :

$$\forall t, \forall P_1^t \in \mathcal{E}^t \ \& \ \forall P_2^t \in \mathcal{E}^t : D(P_1^t, P_2^t) \triangleq (P_1^t P_2^t \cdot P_1^t P_2^t)^{1/2}$$

est également supposée indépendante de l'observateur, d'où :

$$d(\mathbf{x}_{P_1}^t, \mathbf{x}_{P_2}^t) = \bar{d}(\bar{\mathbf{x}}_{P_1}^t, \bar{\mathbf{x}}_{P_2}^t)$$

En conséquence, le vecteur *position relative de deux particules* à l'instant t , soit :

$$\forall t, \forall P_1^t \in \mathcal{E}^t \ \& \ \forall P_2^t \in \mathcal{E}^t : \mathbf{P}(P_1^t, P_2^t) \triangleq P_1^t P_2^t$$

est également objectif, puisque les vecteurs :

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_{P_1}^t, \mathbf{x}_{P_2}^t) = \mathbf{x}_{P_2}^t - \mathbf{x}_{P_1}^t \quad (\text{resp.} : \bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{x}}_{P_1}^t, \bar{\mathbf{x}}_{P_2}^t) = \bar{\mathbf{x}}_{P_2}^t - \bar{\mathbf{x}}_{P_1}^t)$$

sont indépendants du choix de l'origine O^t (resp. \bar{O}^t) de l'observateur et puisque l'invariance des distances par tout changement d'observateur implique que :

$$\bar{p}_i = Q_{ji}^t p_j$$

En revanche, le vecteur *déplacement d'une particule P par rapport à un observateur* entre les instants t_0 – où la particule est au point P^0 de \mathcal{E}^0 – et t – où la même particule est au point P^t de \mathcal{E}^t – n'est pas objectif puisque, pour l'observateur O , il est défini par :

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{x}_p^0) = \mathbf{x}_p^t - \mathbf{x}_p^0 \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_p^0 \triangleq O^0 P^0$$

alors que, pour l'observateur \bar{O} , sachant que $\bar{\mathbf{x}}_p^0 = -\mathbf{T}^0 + \mathbf{x}_p^0$ et $\bar{\mathbf{x}}_p^t = -\mathbf{T}^t + \mathbf{x}_p^t$, il est donné par :

$$\bar{\mathbf{u}}^t(\bar{\mathbf{x}}_p^0) = \bar{\mathbf{x}}_p^t - \bar{\mathbf{x}}_p^0 = \mathbf{u}^t(\mathbf{x}_p^0) + \mathbf{T}^0 - \mathbf{T}^t \quad \text{où} \quad \bar{\mathbf{x}}_p^0 \triangleq \bar{O}^0 P^0$$

d'où, notamment, $\mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u}^t \neq \bar{\mathbf{u}}^t \cdot \bar{\mathbf{u}}^t$. De même, le tenseur *gradient de transformation*, défini par (\mathbf{Id} désigne le tenseur identité d'ordre deux, trivialement objectif) :

$$\mathbf{F}^t(\mathbf{x}_p^0) = \frac{\partial \mathbf{x}_p^t}{\partial \mathbf{x}_p^0} = \frac{\partial \mathbf{u}^t}{\partial \mathbf{x}_p^0} + \mathbf{Id} \quad \left(\text{resp.} : \bar{\mathbf{F}}^t(\bar{\mathbf{x}}_p^0) = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_p^t}{\partial \bar{\mathbf{x}}_p^0} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^t}{\partial \bar{\mathbf{x}}_p^0} + \mathbf{Id} \right)$$

n'est pas objectif puisque, sachant que $(\bar{d}x_p^0)_k = Q_{lk}^0 (dx_p^0)_l$ et $(\bar{d}x_p^t)_i = Q_{ji}^t (dx_p^t)_j$:

$$\bar{F}_{ik}^t = \frac{\partial (\bar{x}_p^t)_i}{\partial (\bar{x}_p^0)_k} = \frac{Q_{ji}^t \partial (x_p^t)_j}{Q_{lk}^0 \partial (x_p^0)_l} \neq Q_{ji}^t Q_{lk}^0 F_{jl}^t$$

À l'inverse, le produit $\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}^{tT}$, soit :

$$\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}^{tT} = \mathbf{Id} + 2\nabla_s(\mathbf{u}^t) + \nabla(\mathbf{u}^t) \cdot \nabla^T(\mathbf{u}^t) \quad \text{où} \quad 2\nabla_s(\mathbf{u}^t) = \nabla(\mathbf{u}^t) + \nabla^T(\mathbf{u}^t)$$

est bien objectif, de même que $\nabla(\mathbf{u}^t) \cdot \nabla^T(\mathbf{u}^t)$. D'où l'on déduit, sachant que la somme de grandeurs objectives est une grandeur objective, que $\nabla_s(\mathbf{u}^t)$ est objectif, qui, par définition, est le tenseur des « petites » déformations ϵ . Quant aux variables d'état, internes, α qui seront parfois considérées dans ce cours, on admettra qu'elles sont également objectives.

En ce qui concerne les potentiels et fonctions d'état, maintenant, leur objectivité n'est assurée que si (dans le souci de simplifier l'écriture des équations, on ne considère ici que le cas où le potentiel d'état ψ ne dépend que des variables d'état observables θ et ϵ ; cf. ci-dessous, toutefois, pour un exemple avec une variable d'état interne vectorielle) :

$$\psi(\theta(\mathbf{x}_p^t), \epsilon_{ji}(\mathbf{x}_p^t)) = \bar{\psi}(\bar{\theta}(\bar{\mathbf{x}}_p^t), \bar{\epsilon}_{ik}(\bar{\mathbf{x}}_p^t)) \Leftrightarrow \psi(\theta(\mathbf{x}_p^t), \epsilon_{ji}(\mathbf{x}_p^t)) = \bar{\psi}(\theta(\mathbf{x}_p^t), Q_{ji}^t Q_{lk}^t \epsilon'_{jl}(\mathbf{x}_p^t))$$

Cette dernière égalité est bien systématiquement satisfaite dès lors que $\psi\{\theta, \epsilon\}$ est une fonction *mathématiquement isotrope*¹⁴, i.e. dès lors qu'elle ne dépend que des *invariants* – par toute transformation orthogonale \mathbf{Q} – de ses arguments : dans toute la suite de ce cours, on veillera bien à doter tous les potentiels et fonctions d'état de cette propriété.

À titre d'exemple de ce que sont ces invariants, imaginons que l'on cherche une expression pour l'énergie libre massique ψ d'un matériau dont l'unique variable interne serait un vecteur \mathbf{P} de \mathbb{R}^3 . Outre la température θ , les seuls arguments admissibles pour la fonction isotrope ψ seraient alors les trois invariants de ϵ , l'unique invariant de \mathbf{P} qu'est sa norme et – attention à ne pas les oublier ! – les deux *invariants mixtes* de (ϵ, \mathbf{P}) , soient (\mathbf{G} est le tenseur métrique) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Invariants de } \epsilon : & I_1^\epsilon \triangleq \text{Tr}(\epsilon) = \epsilon : \mathbf{G} \\ I_2^\epsilon \triangleq \text{Tr}(\epsilon \cdot \epsilon) = (\epsilon \cdot \epsilon) : \mathbf{G} & I_3^\epsilon \triangleq \text{Tr}(\epsilon \cdot \epsilon \cdot \epsilon) = (\epsilon \cdot \epsilon \cdot \epsilon) : \mathbf{G} \\ \text{Invariant de } \mathbf{P} : & I^P \triangleq \text{Tr}(\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \\ \text{Invariants de } (\epsilon, \mathbf{P}) : & I_1^{\epsilon P} \triangleq \text{Tr}(\epsilon \cdot (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P})) = \epsilon : (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}) \\ I_2^{\epsilon P} \triangleq \text{Tr}((\epsilon \cdot \epsilon) \cdot (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P})) = (\epsilon \cdot \epsilon) : (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}) & \end{array} \right.$$

soit, finalement :

$$\psi\{\theta, I_1^\epsilon, I_2^\epsilon, I_3^\epsilon, I^P, I_1^{\epsilon P}, I_2^{\epsilon P}\}$$

– **Remarque 3-vi : État instantané et évolution instantanée – définitions et conventions d'écriture.**

Dans les paragraphes précédents, on n'a traité que de l'état (para. 3.2) et des potentiel et fonctions d'état (para. 3.3) caractéristiques du système thermodynamique VER, sans jamais faire intervenir le temps (celui nécessaire, par exemple, pour passer d'un état à un autre). Tel ne sera plus le cas dans ce paragraphe et les suivants, où le *temps* t (en s) jouera un rôle crucial, notamment à travers les notions *d'état instantané* et *d'évolution instantanée*, définies comme suit.

On considère la *fonction d'évolution* \mathbf{F}_V^{ev} , au moins une fois dérivable et telle que :

$$\mathbf{F}_V^{ev} : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{F}_V^{ev}(t) \in \mathbb{E}^{et}$$

où, d'après eqn. (3.1), $\mathbb{E}^{et} =] - T_0, +\infty [\times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_s \times \mathbb{E}^{etin}$. Cette fonction est dite *associée au « jeu » de variables d'état* $\mathbf{V}^{et} \in \mathbb{E}^{et}$, au sens que les valeurs qu'elle prend appartiennent, à tout instant, à l'espace des états \mathbb{E}^{et} .

On note $\dot{\mathbf{F}}_V^{ev}$ la dérivée première (directement assimilable à la dérivée partielle dans le cas des petites déformations) de cette fonction d'évolution :

$$\dot{\mathbf{F}}_V^{ev} : t \in \mathbb{R} \rightarrow \dot{\mathbf{F}}_V^{ev}(t) \in \mathbb{E}^{ev}$$

où $\mathbb{E}^{ev} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_s \times \mathbb{E}^{evin}$ est l'*espace des évolutions* (de même dimension que \mathbb{E}^{et}) et \mathbb{E}^{evin} un espace d'*évolutions internes* (de même dimension que \mathbb{E}^{etin}). À l'instant générique t , on appelle alors :

- état instantané, la valeur $\mathbf{F}_V^{ev}(t)$. Dans le souci de simplifier l'écriture, on écrira par la suite \mathbf{V}^e en lieu et place de $\mathbf{F}_V^{ev}(t)$,
- évolution instantanée, la valeur $\dot{\mathbf{F}}_V^{ev}(t)$, qu'on écrira par la suite $\dot{\mathbf{V}}^e$.

L'énergie libre (resp. un quelconque potentiel d'état ou une quelconque fonction d'état) instantanée et son évolution instantanée seront des notions également importantes par la suite. Pour les définir, on construit tout d'abord, à partir du potentiel d'état eqn. (3.2) et de la fonction d'évolution associée à \mathbf{V}^{et} définie ci-dessus, une fonction d'évolution F_ψ^{ev} associée au potentiel énergie libre massique ψ , soit :

$$F_\psi^{ev} = \psi \circ \mathbf{F}_V^{ev} : t \in \mathbb{R} \rightarrow F_\psi^{ev}(t) = \psi(\mathbf{F}_V^{ev}(t)) \in \mathbb{R}$$

dont la dérivée première \dot{F}_ψ^{ev} est donnée par ($d\psi$ est la différentielle de ψ) :

$$\dot{F}_\psi^{ev} = (d\psi \circ \mathbf{F}_V^{ev}) \dot{\mathbf{F}}_V^{ev} : t \in \mathbb{R} \rightarrow \dot{F}_\psi^{ev}(t) = d\psi(\mathbf{F}_V^{ev}(t)) \dot{\mathbf{F}}_V^{ev}(t) \in \mathbb{R}$$

¹⁴Attention à ne surtout pas confondre les notions d'isotropie mathématique et d'isotropie matérielle. La première ressortit à la modélisation, i. e. à la mise en équation de la physique, tandis que la seconde – comme son contraire l'anisotropie, d'ailleurs – est *en elle-même* une caractéristique physique.

À l'instant générique t , on appelle alors :

- énergie libre instantanée, la valeur $F_{\Psi}^{ev}(t) = \psi(F_V^{ev}(t))$, qu'on écrira plus simplement $\psi(V^e)$ par la suite,
- évolution instantanée de l'énergie libre, la valeur $F_{\dot{\Psi}}^{ev}(t) = d\psi(F_V^{ev}(t)) \dot{F}_V^{ev}(t)$, qu'on écrira désormais $\dot{\Psi} = \frac{\partial \psi}{\partial V^{et}} \bullet \dot{V}^{et}$.

Au-delà de ces commodités d'écriture, l'essentiel est de bien comprendre que toutes les équations et inéquations qui suivent sont à vérifier à *tout instant* : ce n'est qu'à ce prix, en effet, que l'on pourra dégager les conditions générales d'admissibilité thermodynamique que devra satisfaire tout modèle de comportement thermomécanique (plus précisément : ses *équations constitutives*), sinon à prendre le risque d'écrire des absurdités énergétiques. Dans ce cours consacré à la thermomécanique des matériaux, ces équations constitutives – à ne pas confondre *a priori* avec les fonctions d'état – seront au moins au nombre de 2 (cas où aucune variable interne n'est prise en compte) et au plus au nombre de $2 + N$ (cas où N variables internes sont prises en compte), soient, en toute généralité :

- celle, tensorielle (ordre deux), reliant le tenseur des contraintes instantanées, σ , à l'état instantané et aux évolutions instantanées de la température et des déformations,
- celle, vectorielle, reliant le vecteur densité de flux de chaleur instantané, q , à l'état instantané et aux évolutions instantanées de la température et des déformations,
- celles, dont les ordres de tensorialité sont ceux des N variables internes, reliant les évolutions instantanées des variables internes, $\dot{\alpha}$, à l'état instantané et aux évolutions instantanées de la température et des déformations.

– **Remarque 3-vii : : Sur la « petite » taille du VER et sur les « petites » déformations.**

L'adjectif qualificatif « petit » a été utilisé à plusieurs reprises dans ce chapitre : le VER doit être de « petite » taille (para. 3.1) ; la température relative doit rester « petite » (para. 3.2), ainsi que les déformations (para. 3.2). Il faut bien comprendre que, telles quelles, ces assertions sont sans signification puisqu'elles laissent supposer que le mot « petit » a un sens *absolu*, ce qui n'est définitivement pas le cas (en physique, tout du moins). En d'autres termes, on ne peut véritablement dire d'une grandeur physique ω qu'elle est « petite » que si l'on précise aussitôt par rapport à quelle autre grandeur Ω (de même dimension physique que ω) elle l'est, ou encore, que si le rapport ω/Ω est « petit » devant un.

Ainsi la taille L^V du VER, si l'on veut pouvoir assimiler celui-ci à un point à l'échelle (macroscopique) de la structure, doit elle être petite par rapport à la plus petite des trois dimensions caractéristiques, L_{min}^S , de cette dernière, soit :

$$\frac{L^V}{L_{min}^S} \ll 1$$

De même, les déformations ϵ , adimensionnelles, pourront bien être considérées comme petites tant que :

$$(\epsilon : \epsilon)^{1/2} \ll 1$$

et la température relative, tant que :

$$|\theta| \ll T_0$$

Le caractère intrinsèquement *relatif* du terme « petit » étant maintenant établi, une autre question se pose aussitôt qui est de savoir sur quelle base on peut affirmer qu'un nombre est, ou n'est pas, « petit » par rapport à un...

Au vrai, il n'existe aucune norme universelle, aucune règle intangible pour répondre à cette question, sinon un critère assez peu 'objectif' de *qualité*, au sens de « degré de précision des prédictions d'un modèle par rapport à la réalité dont elles entendent rendre compte ». Autrement dit : plus on étend le domaine de validité d'un modèle, plus sa 'qualité' se dégrade. À titre d'exemple, supposons que l'on utilise un même modèle d'un phénomène physique mais sous deux hypothèses différentes, l'une faible, $H^{1/3}$, affirmant que $1/3$ est encore petit¹⁵ devant 1 (L^V étant donnée, par ex., cette version du modèle peut donc encore être utilisé dans des problèmes de structure où $L_{min}^S = 3L^V$) et l'autre plus forte, $H^{1/10}$,

¹⁵Il semble que certains scientifiques osent une telle hypothèse. On leur laissera l'entière responsabilité des prédictions de leurs modèles.

stipulant que $1/10$ est tout juste petit devant 1 ($L_{min}^S = 10L^V$ au grand maximum, donc). Le domaine de validité de la version de ce modèle sous l'hypothèse $H^{1/3}$ sera évidemment plus large que celui de sa version sous l'hypothèse $H^{1/10}$ puisque $H^{1/3}$ est moins contraignante que $H^{1/10}$; en revanche, ses prédictions verront leur 'qualité' d'autant plus décroître qu'elles concerneront des états plus proches des limites de son domaine de validité. On dit donc de la version sous l'hypothèse $H^{1/10}$ du modèle qu'elle est plus précise que son homologue sous l'hypothèse $H^{1/3}$ (par 'passage à la limite', on peut donc obtenir le paradoxe suivant : la version $H^{1/\infty}$ d'un modèle est infiniment précise... mais avec un domaine de validité réduit à l'ensemble vide !).

Finalement, pour fixer les idées, on admettra dans ce cours, quitte à heurter certains physiciens tatillons, que

$$1/10 \text{ est petit devant } 1$$

i. e. qu'un problème de structure peut bien être traité avec un modèle de comportement établi pour un VER de taille $L^V = (1/10)L_{min}^S$; que les déformations restent bien petites tant que $(\epsilon : \epsilon)^{1/2} \leq 10^{-1}$, *idem* pour la température relative tant que $|\theta| \leq 10^{-1} T_0$.

Chapitre 4

Thermoélasticité et élasticité linéaires

4.1 Thermoélasticité linéaire isotrope

- En thermoélasticité *isotrope*, linéaire ou non, aucune variable interne n'est nécessaire, *i. e.* $\alpha = \emptyset$. Le jeu de variables d'état est donc :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon) \in \mathbb{E}^{et} \quad (4.1)$$

- Ainsi qu'on l'a vu dans le Chapitre 3 (cf. la remarque finale du para. 3.3), l'énergie libre massique $\psi(\mathbf{V}^{et})$, parce qu'elle doit être *objective*, ne peut dépendre que des invariants de \mathbf{V}^{et} , soit, ici :

$$\theta ; I_1^\epsilon \triangleq \text{tr}(\epsilon) = \epsilon : \mathbf{G} ; I_2^\epsilon \triangleq \text{tr}(\epsilon^2) = (\epsilon \cdot \epsilon) : \mathbf{G} ; I_3^\epsilon \triangleq \text{tr}(\epsilon^3) = (\epsilon \cdot \epsilon \cdot \epsilon) : \mathbf{G} \quad (4.2)$$

On cherche maintenant à construire un modèle de comportement thermoélastique *linéaire*, *i. e.* telle que la relation entre la fonction d'état \mathbf{A}^ϵ (resp. l'entropie massique s), le tenseur des déformations ϵ et la température relative θ soit *linéaire*. Compte-tenu que \mathbf{A}^ϵ et s sont les dérivées partielles de ψ , il est alors nécessaire que ψ soit la somme d'une fonction *quadratique* de θ et des invariants de ϵ et d'une fonction *linéaire* en θ et en ϵ (à noter que c'est la masse volumique initiale, $\hat{\rho}$, qui intervient dans cette expression), soit :

$$\psi(\theta, I_1^\epsilon, I_2^\epsilon) = -\frac{\hat{C}_\epsilon^0}{2T_0} \theta^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^\epsilon)^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^\epsilon - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta I_1^\epsilon \quad (4.3)$$

où $\hat{C}_\epsilon^0 > 0$ est la *capacité calorifique* à déformation constante et à $T = T_0$ (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) et $\hat{\gamma} > 0$ le *coefficient de dilatation thermique* (en K^{-1}). Quant à $\hat{\mu} > 0$ et $\hat{\lambda} > -\frac{2}{3}\hat{\mu}$, ce sont également deux *paramètres-matériau*, appelés *coefficients de Lamé* (en MPa)¹. Ils sont liés au module d'Young \hat{E} (en MPa) et au coefficient de Poisson $\hat{\nu}$ (adimensionnel) par les relations suivantes :

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\nu}\hat{E}}{(1+\hat{\nu})(1-2\hat{\nu})} ; \hat{\mu} = \frac{\hat{E}}{2(1+\hat{\nu})} \quad (4.4)$$

Compte tenu que $\hat{\mu} > 0$ et $\hat{\lambda} > -\frac{2}{3}\hat{\mu}$, on déduit de eqn. (4.4) que $\hat{E} > 0$ et $\hat{\nu} \in]-1, 1/2[$.

D'après eqn. (4.3), les deux fonctions d'état du modèle de thermoélasticité linéaire sont donc :

$$\mathbf{A}^\epsilon \triangleq \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \epsilon - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} \right) ; s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \hat{C}_\epsilon^0 \frac{\theta}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} I_1^\epsilon \quad (4.5)$$

¹On constate, en pratique, que les coefficients de Lamé dépendent de la température. Cette dépendance peut sans problème être prise en compte - $\hat{\mu}(\theta) = (1 - \theta/T_0)\hat{\mu}_0$, par exemple - mais la fonction d'état \mathbf{A}^ϵ n'est alors plus linéaire en θ (en revanche, elle le reste bien en ϵ) : on sort donc du cadre de la thermoélasticité linéaire.

- La thermoélasticité, linéaire ou non, n'est que *thermiquement irréversible* (ou *thermiquement dissipative*), ce qui signifie que la seule source de dissipation est le gradient de température, $\nabla\theta$. La dissipation intrinsèque est donc nulle, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{A}^e) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\theta}) \\ \text{où } \boldsymbol{\sigma} \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\theta} \} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Les effets de *viscosité* (cf. Chapitre 5, par exemple) ne sont pas pris en compte en thermoélasticité : $\boldsymbol{\sigma}$ ne peut donc pas dépendre de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Il en découle que la condition *nécessaire et suffisante* pour que l'égalité précédente soit bien satisfaite $\forall \mathbf{V}^{et}$ et $\forall (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\theta})$ est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{A}^e \quad (4.7)$$

Or, dans le cas des « petites » déformations, l'équation de conservation de la masse s'écrit (cf. para. 3.2) : $\rho = \hat{\rho}(1 - \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}))$. D'où l'on déduit que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\rho}(1 - \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})) \mathbf{A}^e = \hat{\rho} \mathbf{A}^e - \hat{\rho} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{A}^e \quad (4.8)$$

En pratique, et puisque $|\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})| \ll 1$ quand les déformations restent « petites », seul le premier terme de droite, dans eqn. (4.8), est retenu, soit, d'après eqn. (4.5) :

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \hat{\rho} \mathbf{A}^e = \hat{\lambda}_1^e \mathbf{G} + 2\hat{\mu}\boldsymbol{\epsilon} - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\gamma}\theta \mathbf{G} \quad (4.9)$$

Il faut toutefois souligner que, bien que d'usage courant, eqn. (4.9) n'est pas en accord avec eqn. (4.6) puisqu'alors : $\phi_{int} \approx \hat{\rho} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{A}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \neq 0$.

- Quant à l'équation de la chaleur, en cohérence avec eqn. (4.8), son expression exacte est :

$$\rho \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k}\Delta\theta - r = (\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) - 1)(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\gamma}T\mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.10)$$

dont, en pratique, on ne conserve, là encore, que la partie indépendante de $\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})$, soit :

$$\hat{\rho} \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k}\Delta\theta - r \approx -(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\gamma}T\mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.11)$$

Dans le cas (fréquent) où $r = 0$, de eqn. (4.10) ou eqn. (4.11), on déduit notamment que, lors d'un essai de traction simple – où, nécessairement, $\mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ est positif – suffisamment « rapide » pour que l'hypothèse d'adiabaticité ($\Delta\theta \approx 0$) soit satisfaite, $\dot{\theta}$ est négative, *i. e.* la température diminue.

4.2 Élasticité linéaire

- Le jeu de variable d'état est (cf. remarque 4-i) :

$$\mathbf{V}^{et} = \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.12)$$

- Le potentiel d'état énergie libre massique est donné par :

$$\Psi(I_1^e, I_2^e) = \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda}(I_1^e)^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^e \quad (4.13)$$

et la fonction d'état associée à $\boldsymbol{\epsilon}$ par (à noter que la fonction d'état entropie n'est plus définie) :

$$\mathbf{A}^e \triangleq \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^e \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \boldsymbol{\epsilon} \right) \quad (4.14)$$

– Le tenseur des contraintes σ est lié à la fonction d'état A^e par :

$$\sigma = \rho A^e \quad (4.15)$$

dont, en pratique (puisque $|\text{Tr}(\epsilon)| \ll 1$ en « petites » déformations), on retient l'approximation suivante, connue sous le nom de *loi de Hooke*² :

$$\sigma \approx \hat{\rho} A^e = \hat{\lambda} I_1^e G + 2\hat{\mu} \epsilon \quad (4.16)$$

Cette loi est souvent présentée sous la forme suivante :

$$\sigma = \hat{C} : \epsilon \text{ avec } \hat{C} = \hat{\lambda} G \otimes G + 2\hat{\mu} Id_s^4 \quad (4.17)$$

où \hat{C} est le *tenseur* (d'ordre 4) *des rigidités* de Hooke et où Id_s^4 désigne le tenseur « identité d'ordre quatre pour les tenseurs symétriques d'ordre deux » soit³ : $Id_s^4 : A = A$, $\forall A$ tenseur d'ordre deux symétrique (cf. remarque 4-ii pour la prise en compte de l'*anisotropie* en élasticité).

²Une loi de comportement est un modèle de comportement largement éprouvé.

³La définition de ce tenseur fait intervenir le tenseur métrique G et un produit tensoriel particulier, différent du « classique » produit tensoriel symbolisé par \otimes (cf., p. ex., eqn. (4.17)). Pour ce cours, il suffira de savoir que, dans toute base orthonormée - où $G = Id^2$, tenseur identité d'ordre deux - les composantes de Id_s^4 sont données par : $(Id_s^4)_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

Résumé du Chapitre 4 :

– **Modèle de comportement thermoélastique linéaire isotrope :**

– Variables d'état :

$$\mathbf{V}^{et} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon})$$

– Potentiel et fonctions d'état ($I_1^\epsilon = \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})$ et $I_2^\epsilon = \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon})$) :

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon}) = -\frac{\hat{C}_\epsilon^0}{2T_0} \boldsymbol{\theta}^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^\epsilon)^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^\epsilon - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} I_1^\epsilon$$

$$\mathbf{A}^\epsilon = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \boldsymbol{\epsilon} - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} \mathbf{G} \right) ; \quad s = \hat{C}_\epsilon^0 \frac{\boldsymbol{\theta}}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} I_1^\epsilon$$

– Dissipation $\phi = \phi_{th} + \phi_{int}$ (inégalité et égalité toujours satisfaites grâce à la loi de Fourier – $\mathbf{q} = -\hat{k} \nabla \boldsymbol{\theta}$ – et à l'équation constitutive thermomécanique, cf. ci-dessous) :

$$\phi_{th} = -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \geq 0 ; \quad \phi_{int} \hat{=} 0$$

– Équation constitutive thermomécanique (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\rho} \mathbf{A}^\epsilon = \hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \boldsymbol{\epsilon} - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} \mathbf{G}$$

– Équation de la chaleur (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\hat{\rho} \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \hat{k} \Delta \boldsymbol{\theta} - r = -(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) T \hat{\gamma} \mathbf{G} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

– Cinq paramètres-matériau sont donc à identifier par des essais expérimentaux – outre $\hat{\rho}$ (en $kg.m^{-3}$), masse volumique initiale –, soient :

$$\begin{cases} \hat{\mu} > 0 \text{ et } \hat{\lambda} > -\frac{2}{3}\hat{\mu} \text{ (en MPa)} & \text{ou } \hat{E} > 0 \text{ (en MPa) et } \hat{\nu} \in]-1, 1/2[\text{ (adim.)} ; \\ \hat{\gamma} > 0 \text{ (en } K^{-1}) ; \hat{C}_\epsilon^0 > 0 \text{ (en } J.kg^{-1}.K^{-1}) ; \hat{k} > 0 \text{ (en } W.K^{-1}.m^{-1}) \end{cases}$$

– **Modèle de comportement élastique linéaire isotrope :**

– Variables d'état :

$$\mathbf{V}^{et} = \boldsymbol{\epsilon}$$

– Potentiel et fonction d'état ($I_1^\epsilon = \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})$ et $I_2^\epsilon = \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon})$) :

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^\epsilon)^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^\epsilon ; \quad \mathbf{A}^\epsilon = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \boldsymbol{\epsilon} \right)$$

– Équation constitutive (loi de Hooke ; avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\rho} \mathbf{A}^\epsilon = \hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \boldsymbol{\epsilon}$$

– Deux paramètres-matériau sont donc à identifier par des essais expérimentaux – outre $\hat{\rho}$ (en $kg.m^{-3}$), masse volumique initiale –, soient :

$$\begin{cases} \hat{\mu} > 0 \text{ et } \hat{\lambda} > -\frac{2}{3}\hat{\mu} \text{ (en MPa)} & \text{ou} \\ \hat{E} > 0 \text{ (en MPa) et } \hat{\nu} \in]-1, 1/2[\text{ (adim.)} \end{cases}$$

Chapitre 4 - Remarques

– Remarque 4-i : De la thermoélasticité à l'élasticité

Comme on vient de le voir, cf. para. 4.1, la thermoélasticité s'inscrit parfaitement dans le cadre thermodynamique général défini dans le Chapitre 3. L'élasticité, en revanche, qu'elle soit linéaire ou non, isotrope ou non, ne peut pas être construite dans ce cadre, pour la simple raison que, par définition, elle ne prend pas en compte les effets thermiques, ce qui rend *a priori* impossible son approche thermodynamique.

En revanche, il est bien thermodynamiquement viable de considérer l'élasticité comme un « cas particulier » de la thermoélasticité, au sens que, dans les équations de celle-ci, la température, ses dérivées spatiales et temporelles et le taux de production de chaleur à distance sont *a posteriori* annulés. C'est cette approche que nous suivrons dans ce paragraphe, où les équations de la thermoélasticité seront « particularisées » sans aucun commentaire, sinon sur la très célèbre *loi de Hooke*.

– Remarque 4-ii : Quelques indications sur la modélisation de l'élasticité linéaire anisotrope

D'un point de vue pratique ou expérimental, on peut dire d'un matériau qu'il est *anisotrope* dès lors que la procédure d'identification de l'un de ses paramètres-matériau mène à des résultats qui varient en fonction de la *direction* des sollicitations qui lui sont appliquées (toutes les autres caractéristiques de ces sollicitations étant égales par ailleurs)⁴. Physiquement parlant, cette dépendance à la direction des sollicitations s'explique par le fait que le matériau ne présente pas les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions, c'est-à-dire qu'il présente des *directions d'anisotropie*. Selon le type d'anisotropie du matériau (isotropie transverse, orthotropie, ...), le nombre de directions d'anisotropie est plus ou moins élevé.

Du point de vue de la modélisation, la prise en compte de l'anisotropie nécessite, en premier lieu, de bien définir la notion de *direction matérielle*. Une direction, définie par un vecteur unitaire \mathbf{n} de \mathbb{R}^3 ou son opposé, est dite *matérielle* lorsqu'elle "suit" la déformation locale du milieu considéré. Formellement, ceci se traduit par le fait que, $\pm \mathbf{n}^0$ étant le vecteur unitaire caractéristique de la direction matérielle considérée dans la configuration initiale (c'est-à-dire quand $\epsilon = 0$), cette même direction matérielle, quand $\epsilon \neq 0$, est caractérisée par le vecteur unitaire $\pm \mathbf{n}$ tel que :

$$\mathbf{n} = ((\epsilon \cdot \mathbf{n}^0) \cdot (\epsilon \cdot \mathbf{n}^0))^{-\frac{1}{2}} \epsilon \cdot \mathbf{n}^0$$

Le choix de l'ensemble des vecteurs unitaires de \mathbb{R}^3 comme représentation de l'ensemble des directions matérielles pose cependant le problème qu'une direction matérielle donnée a deux représentants dans \mathbb{R}^3 , soit un vecteur unitaire et son opposé. Ce problème est facilement surmonté en optant pour une représentation tensorielle des directions matérielles, c'est-à-dire :

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = (-\mathbf{n}) \otimes (-\mathbf{n}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

Par construction, ces tenseurs \mathbf{N} n'ont qu'une valeur propre non nulle, laquelle vaut 1.

À partir des deux équations précédentes, on montre facilement qu'une direction matérielle représentée par le tenseur \mathbf{N}^0 dans la configuration initiale est représentée, quand $\epsilon \neq 0$, par le tenseur \mathbf{N} tel que :

$$\mathbf{N} = ((\epsilon \cdot \epsilon) : \mathbf{N}^0)^{-1} \epsilon \cdot \mathbf{N}^0 \cdot \epsilon$$

Une direction matérielle correspond à une direction d'anisotropie, laquelle appartient au sous-ensemble \mathbb{E}^N tel que :

$$\mathbb{E}^N = \{ \mathbf{N} \triangleq \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \text{ où } \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

Au même titre que son état de déformations, la ou les directions d'anisotropie sont une caractéristique de l'état du matériau. Il faut donc considérer ces directions comme des variables d'état. En pratique,

⁴Il est bien souvent nécessaire, quand on parle d'anisotropie, de préciser les phénomènes physiques qu'elle concerne. Il est ainsi possible, au moins formellement, d'avoir un matériau élastiquement anisotrope - son module d'Young \hat{E} et/ou son coefficient de Poisson $\hat{\nu}$ n'ont pas les mêmes valeurs suivant toutes les directions de l'espace - et thermiquement isotrope - sa conductivité thermique \hat{k} prend la même valeur suivant toutes les directions de l'espace.

et au moins dans le cas des "petites" déformations, il est plus simple de considérer ces directions dans la configuration initiale. Il faut aussi noter que, pour obtenir un modèle de comportement réaliste d'un matériau anisotrope donné, il suffit de ne considérer que « quelques » directions matérielles comme variables d'état caractéristiques de son anisotropie : c'est l'observation de la microstructure du matériau et des « directions particulières » qu'elle présente qui permet de sélectionner ces « quelques » éléments. À titre d'exemple, et pour en venir à l'élasticité linéaire anisotrope, considérons un matériau composite 'matrice + fibres longues' dit « unidirectionnel », au sens que toutes ses fibres ont la même direction matérielle N , et retenons, pour le décrire, le « jeu » de variables d'état suivant :

$$\mathbf{V}^{et} = (\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{N}^0)$$

Ce type d'anisotropie, caractérisé par une seule direction matérielle, est appelée *isotropie transverse*. L'*objectivité* requiert alors *a priori* que le potentiel d'état ψ soit fonction des trois invariants de $\boldsymbol{\epsilon}$, des trois invariants de \mathbf{N}^0 et des trois invariants mixtes de $(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{N}^0)$, ces derniers étant définis comme suit (cf. également la remarque finale du para. 3.3) :

$$\begin{cases} I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}} \triangleq \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{N}^0) = \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{N}^0 \\ I_2^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}} \triangleq \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{N}^0) = (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) : \mathbf{N}^0 \\ I_3^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}} \triangleq \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{N}^0 \cdot \mathbf{N}^0) = \boldsymbol{\epsilon} : (\mathbf{N}^0 \cdot \mathbf{N}^0) \end{cases}$$

Il convient toutefois de remarquer que, de par le caractère unitaire de \mathbf{N}^0 , ses trois invariants sont toujours égaux à 1. De plus, seuls deux des trois invariants mixtes sont indépendants l'un de l'autre puisque, sachant que $\mathbf{N}^0 \triangleq \mathbf{n}^0 \otimes \mathbf{n}^0$ et $\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{n}^0 = 1$:

$$I_3^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}} = \boldsymbol{\epsilon} : ((\mathbf{n}^0 \otimes \mathbf{n}^0) \cdot (\mathbf{n}^0 \otimes \mathbf{n}^0)) = \boldsymbol{\epsilon} : (\mathbf{n}^0 \otimes \mathbf{n}^0) = I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}}$$

Puisque l'on cherche à construire un modèle d'élasticité anisotrope *linéaire*, ψ , comme dans le cas isotrope, doit être une fonction *quadratique* de $\boldsymbol{\epsilon}$. En l'occurrence, il n'y a que cinq invariants ou combinaisons d'invariants vérifiant cette condition, soient : $(I_1^\boldsymbol{\epsilon})^2, (I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}})^2, I_2^\boldsymbol{\epsilon}, I_2^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}}, I_1^\boldsymbol{\epsilon} I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}}$, ce qui donne l'expression suivante pour ψ :

$$\psi(I_1^\boldsymbol{\epsilon}, I_2^\boldsymbol{\epsilon}, I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}}, I_2^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}}) = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\frac{1}{2} \hat{\beta}_1 (I_1^\boldsymbol{\epsilon})^2 + \frac{1}{2} \hat{\beta}_2 (I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}})^2 + \hat{\beta}_3 I_2^\boldsymbol{\epsilon} + \hat{\beta}_4 I_2^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}} + \hat{\beta}_5 I_1^\boldsymbol{\epsilon} I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}} \right)$$

où les $\hat{\beta}_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sont les paramètres-matériau (en *MPa*) caractéristiques de cette anisotropie particulière appelée *isotropie transverse*. Le modèle de comportement d'un matériau élastique linéaire *isotrope transverse* est finalement donné par (avec l'approximation usuelle sur la masse volumique, *i. e.* $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\beta}_1 I_1^\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G} + \hat{\beta}_2 I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}} \mathbf{N}^0 + 2\hat{\beta}_3 \boldsymbol{\epsilon} + 2\hat{\beta}_4 (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{N}^0)_s + \hat{\beta}_5 (I_1^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}} \mathbf{G} + I_1^\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{N}^0)$$

où $2(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{N}^0)_s = (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{N}^0) + (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{N}^0)^T$. Cette expression peut se récrire $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{N}^0) : \boldsymbol{\epsilon}$, où le tenseur (d'ordre quatre) des rigidités $\mathbf{C}(\mathbf{N}^0)$ est défini par :

$$\mathbf{C}(\mathbf{N}^0) = \hat{\beta}_1 \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \hat{\beta}_2 (\mathbf{N}^0 \otimes \mathbf{N}^0) + 2\hat{\beta}_3 \mathbf{I}d_s^4 + \hat{\beta}_4 ((\mathbf{I}d_s^4 \cdot \mathbf{N}^0)_s + (\mathbf{N}^0 \cdot \mathbf{I}d_s^4)_s) + 2\hat{\beta}_5 (\mathbf{G} \otimes \mathbf{N}^0)_s$$

Dans la plupart des ouvrages de mécanique où le problème de l'anisotropie est abordé, seules les composantes de l'inverse de ce tenseur des rigidités dans une base orthonormée particulière – définie par \mathbf{n}^0 (ou $-\mathbf{n}^0$) et deux autres vecteurs unitaires orthogonaux à \mathbf{n}^0 (ou $-\mathbf{n}^0$), caractérisant un plan d'*isotropie transverse* – sont données. Cette expression particulière de $\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{N}^0)$ fait intervenir cinq paramètres-matériau, liés aux $\hat{\beta}_i$ mais plus faciles à interpréter qu'eux, que l'on nomme :

- module d'Young et coefficient de Poisson longitudinaux (identifiables par un essai de traction suivant la direction \mathbf{N}^0),
- module d'Young et coefficient de Poisson transverses (essai de traction suivant une quelconque direction orthogonale à \mathbf{N}^0),
- module de cisaillement (essai de cisaillement dans un plan quelconque).

Chapitre 5

Viscoélasticités linéaires

5.1 Viscoélasticité linéaire sans variable interne

- Ainsi qu’il est clairement stipulé dans le titre de ce paragraphe, aucune variable interne n’est requise ¹ pour écrire les équations constitutives de ce type de viscoélasticité, *i. e.* : $\alpha = \emptyset$
Le jeu de variables d’état est donc composé de la température relative θ et du tenseur des déformations linéarisées ϵ , soit :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon) \quad (5.1)$$

- Comme on ne s’intéresse ici qu’à la viscoélasticité *linéaire*, l’expression de l’énergie libre massique ψ est la même qu’en thermoélasticité linéaire, soit :

$$\psi(\theta, I_1^\epsilon, I_2^\epsilon) = -\frac{\hat{C}_\epsilon^0}{2T_0} \theta^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^\epsilon)^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^\epsilon - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta I_1^\epsilon \quad (5.2)$$

où, rappelons-le, \hat{C}_ϵ^0 est la *capacité calorifique* à déformation constante et à $t = T_0$ (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) et $\hat{\gamma}$ le *coefficient de dilatation thermique* (en K^{-1}). Les deux fonctions d’état de ce modèle sont donc également les mêmes qu’en thermoélasticité linéaire, soient :

$$\mathbf{A}^\epsilon = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \epsilon - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} \right) ; \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \hat{C}_\epsilon^0 \frac{\theta}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} I_1^\epsilon \quad (5.3)$$

- La viscoélasticité est un phénomène *thermiquement et intrinsèquement irréversible* (ou *thermiquement et intrinsèquement dissipatif*). L’expression générale de la dissipation intrinsèque ϕ_{int} est donc une inégalité, soit, puisque $\alpha = \emptyset$:

$$\begin{cases} \phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{A}^\epsilon) : \dot{\epsilon} \geq 0, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \text{ \& \forall } (\dot{\epsilon}, \dot{\theta}) \\ \text{où } \boldsymbol{\sigma} \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\epsilon}, \dot{\theta} \} \end{cases} \quad (5.4)$$

En viscoélasticité – et contrairement à la thermoélasticité (cf. Chap. 4, para. 4.1) – on doit autoriser le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ à être fonction de $\dot{\epsilon}$ (sinon à ne justement pas pouvoir décrire les effets de la viscosité). Une condition suffisante ² à la vérification de l’inégalité eqn. (5.4) $\forall \mathbf{V}^{et}$ et $\forall (\dot{\epsilon}, \dot{\theta})$ est alors :

$$\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{A}^\epsilon = \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} \quad (5.5)$$

¹Dans le seul cas isotrope toutefois. Le cas de la viscoélasticité anisotrope, à l’instar de celui de l’élasticité anisotrope (cf. Chap. 4, rmq. 4-ii), nécessiterait en effet que les « directions particulières » observées dans la microstructure du matériau soient prises en compte *via* des variables internes.

²On pourrait en effet proposer d’autres conditions suffisantes alternatives à (5.4) telle, par exemple : $\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{A}^\epsilon = \hat{\chi}(\mathbf{V}^{et}, \mathbf{V}^{et}) \dot{\epsilon}$ avec $\hat{\chi}^{ve} > 0$. Celles-ci ne seraient cependant pas forcément en accord avec la réalité expérimentale de la viscoélasticité des matériaux.

où $\hat{\kappa}^{ve} \geq 0$ (en $MPa.s$) est la *viscosité* du matériau³, qu'on préfère parfois exprimer comme le produit d'un *temps caractéristique de la viscosité* $\hat{\eta}^{ve}$ (en s) et d'un *coefficient de résistance à la viscosité* \hat{K}^{ve} (en MPa). À la différence de la thermoélasticité, la viscoélasticité est donc telle que le tenseur des contraintes σ n'est pas confondu avec la fonction d'état associée à la déformation puisque, d'après (5.5) (avec la même approximation qui permet de passer de eqn. (4.8) à eqn. (4.9), soit $\hat{\rho} \approx \rho$) :

$$\sigma \approx \hat{\rho} \mathbf{A}^e + \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} = \hat{\lambda}_1^e \mathbf{G} + 2\hat{\mu}\epsilon - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\gamma}\theta \mathbf{G} + \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} \quad (5.6)$$

ou encore, notant \hat{C} le tenseur des rigidités de Hooke :

$$\sigma \approx \hat{C} : \epsilon - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\gamma}\theta \mathbf{G} + \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} \quad (5.7)$$

On rappelle par ailleurs que la *dissipation thermique*, ϕ_{th} , est définie par :

$$\phi_{th} \triangleq \frac{\hat{k}}{T} (\nabla\theta \cdot \nabla\theta) \quad (5.8)$$

ce qui fait que, pour ce modèle de viscoélasticité, la dissipation totale ϕ est bien toujours non négative, qui s'écrit (avec l'approximation $\hat{\rho} \approx \rho$) :

$$\phi = \phi_{th} + \phi_{int} \approx \frac{\hat{k}}{T} (\nabla\theta \cdot \nabla\theta) + \hat{\kappa}^{ve} (\dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}) \quad (5.9)$$

– Finalement, l'expression exacte de l'équation de la chaleur est :

$$\rho \hat{C}_e^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k}\Delta\theta - r = \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} + (\text{Tr}(\epsilon) - 1)(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\gamma}T\mathbf{G} : \dot{\epsilon} \quad (5.10)$$

dont on ne retient bien souvent, dans le cas des « petites déformations » ($\hat{\rho} \approx \rho$), que la version approchée suivante :

$$\hat{\rho} \hat{C}_e^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k}\Delta\theta - r \approx \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\gamma}T\mathbf{G} : \dot{\epsilon} \quad (5.11)$$

Dans le cas (fréquent) où $r = 0$, on en déduit notamment que, lors d'un essai de traction simple - où, nécessairement, $\mathbf{G} : \dot{\epsilon}$ est positif - suffisamment « rapide » pour que l'hypothèse d'adiabaticité ($\Delta\theta \approx 0$) soit satisfaite, $\dot{\theta}$ est positive ou négative selon que $\hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}$ est supérieur ou inférieur à $(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})T\hat{\gamma}(\mathbf{G} : \dot{\epsilon})$.

5.2 Viscoélasticité linéaire avec variable interne

– Pour construire ce second modèle viscoélastique, on suppose tout d'abord – hypothèse dite de *partition des déformations* – que tout état de déformations ϵ peut se décomposer additivement en une partie thermo-élastique, ϵ^{te} , et une partie visqueuse, ϵ^v , soit :

$$\forall \epsilon, \exists (\epsilon^{te}, \epsilon^v) \text{ tels que } \epsilon = \epsilon^{te} + \epsilon^v \quad (5.12)$$

On exige ensuite du tenseur des contraintes σ qu'il ne dépende que des déformations thermo-élastiques, ϵ^{te} , ou, de façon équivalente, que de la différence entre les déformation totales, ϵ , et les déformations visqueuses, ϵ^v :

$$\sigma = \sigma \{ \theta, \epsilon - \epsilon^v \} \quad (5.13)$$

Puisque ϵ , ϵ^{te} et ϵ^v sont liées par eqn. (5.12), on ne peut retenir comme variable d'état, outre θ et ϵ , que ϵ^{te} ou ϵ^v . On opte ici pour ϵ^v , ce qui fait que le jeu de variables d'état est :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon, \epsilon^v) \quad (5.14)$$

ou plus précisément, en cohérence avec eqn. (5.13) :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon - \epsilon^v) \quad (5.15)$$

³Une version plus générale de ce type de viscoélasticité peut être obtenue en considérant une viscosité non plus scalaire mais tensorielle, éventuellement fonction des déformations et de la température, soit $\hat{\kappa}^{ve}(\theta, \epsilon)$. La seule condition imposée à ce tenseur - pour que le second principe soit bien systématiquement vérifié - est d'être *défini positif*, soit : $\dot{\epsilon} : \hat{\kappa}^{ve} : \dot{\epsilon} \geq 0 \forall \dot{\epsilon}$.

- L'énergie libre massique ψ , puisque l'on cherche encore une fois à construire un modèle de viscoélasticité *linéaire*, doit être une fonction au plus quadratique de θ et de $\epsilon - \epsilon^v$. La forme générale d'une telle fonction est exactement celle considérée en thermoélasticité linéaire, eqn. (4.3), soit :

$$\psi(\theta, I_1^{\epsilon - \epsilon^v}, I_2^{\epsilon - \epsilon^v}) = -\frac{\hat{C}_\epsilon^0}{2T_0} \theta^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^{\epsilon - \epsilon^v})^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^{\epsilon - \epsilon^v} - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta I_1^{\epsilon - \epsilon^v} \quad (5.16)$$

où $I_1^{\epsilon - \epsilon^v} \triangleq \text{Tr}(\epsilon - \epsilon^v)$ et $I_2^{\epsilon - \epsilon^v} \triangleq \text{Tr}((\epsilon - \epsilon^v) \cdot (\epsilon - \epsilon^v))$.

Les trois fonctions d'état du modèle de viscoélasticité linéaire avec variable interne se déduisent alors immédiatement de eqn. (5.16) par simples dérivations partielles, soient (\hat{C} désigne toujours le tenseur des rigidités de Hooke) :

$$\begin{cases} \mathbf{A}^\epsilon = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} \mathbf{M}_1^{\epsilon - \epsilon^v} \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\epsilon - \epsilon^v) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} \right) \\ \mathbf{A}^{\epsilon^v} = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} \mathbf{M}_1^{\epsilon - \epsilon^v} \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\epsilon - \epsilon^v) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} \right) \\ s = \hat{C}_\epsilon^0 \frac{\theta}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} \theta I_1^{\epsilon - \epsilon^v} \end{cases} \quad (5.17)$$

On constate ainsi que la fonction d'état \mathbf{A}^{ϵ^v} associée au tenseur des déformations visqueuses ϵ^v est égale à celle, \mathbf{A}^ϵ , associée au tenseur des déformations ϵ .

- Puisque $\alpha = \epsilon^v \neq \mathbf{0}$, l'expression générale de la dissipation intrinsèque, ϕ_{int} , par rapport à celle du premier modèle viscoélastique, eqn. (5.4), contient un terme supplémentaire. Elle s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{A}^\epsilon) : \dot{\epsilon} + \rho \mathbf{A}^{\epsilon^v} : \dot{\epsilon}^v \geq 0, \quad \forall \mathbf{V}^{et} \text{ \& } \forall (\dot{\epsilon}, \dot{\theta}) \\ \text{où } \boldsymbol{\sigma} \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\epsilon}, \dot{\theta} \}; \dot{\epsilon}^v \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\epsilon}, \dot{\theta} \} \end{cases} \quad (5.18)$$

D'après l'hypothèse eqn. (5.13), cependant, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ ne dépend pas de $\dot{\epsilon}$. On constate alors qu'une condition *nécessaire et suffisante* à la vérification de l'inégalité eqn. (5.18) est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{A}^\epsilon \text{ et } \rho \mathbf{A}^{\epsilon^v} : \dot{\epsilon}^v \geq 0 \quad \forall \mathbf{V}^{et} \text{ \& } \forall (\dot{\epsilon}, \dot{\theta}) \quad (5.19)$$

Une condition *suffisante* à la vérification de la seconde partie de eqn. (5.16)⁴ est alors :

$$\dot{\epsilon}^v = \frac{\rho}{\hat{\kappa}^{ve}} \mathbf{A}^{\epsilon^v} \quad (5.20)$$

où $\hat{\kappa}^{ve} \geq 0$ (en *MPa.s*) est la *viscosité* du matériau, qu'on préfère parfois exprimer comme le produit d'un *temps caractéristique de la viscosité* $\hat{\eta}^{ve}$ (en *s*) et d'un *coefficient de résistance à la viscosité* \hat{K}^{ve} (en *Mpa*). Avec la même approximation qui a permis de passer de eqn. (4.8) à eqn. (4.9), soit $\hat{\rho} \approx \rho$, les équations constitutives « thermo-mécaniques » du modèle de viscoélasticité linéaire avec variable interne s'écrivent donc :

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \hat{\lambda} \mathbf{M}_1^{\epsilon - \epsilon^v} \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\epsilon - \epsilon^v) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G}; \quad \dot{\epsilon}^v \approx \frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} \boldsymbol{\sigma} \quad (5.21)$$

Combinant eqn. (5.18) et eqn. (5.21), et rappelant que, dans tout ce cours, la dissipation thermique ϕ_{th} est donnée par eqn. (5.8), la dissipation totale est bien toujours non négative avec ce second modèle viscoélastique, qui s'écrit (toujours avec l'approximation $\hat{\rho} \approx \rho$) :

$$\phi = \phi_{th} + \phi_{int} \approx \frac{\hat{k}}{T} (\nabla \theta \cdot \nabla \theta) + \frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) \quad (5.22)$$

- L'équation de la chaleur s'écrit enfin, de façon exacte :

$$\rho \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k} \Delta \theta - r = \frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + (1 - \text{Tr}(\epsilon)) T (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \left(\frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} \boldsymbol{\sigma} - \dot{\epsilon} \right) : \mathbf{G} \quad (5.23)$$

et de façon approchée ($\hat{\rho} \approx \rho$) :

$$\hat{\rho} \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k} \Delta \theta - r \approx \frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + T (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \left(\frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} \boldsymbol{\sigma} - \dot{\epsilon} \right) : \mathbf{G} \quad (5.24)$$

⁴Une autre condition suffisante est : $\dot{\epsilon}^v = \frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} (\dot{\epsilon} : \dot{\epsilon})^{1/2} \mathbf{A}^{\epsilon^v}$, où $\hat{\kappa}^{ve}$ est un coefficient de résistance à la viscosité (en *Mpa*). Elle est d'ailleurs intéressante puisqu'elle revient à considérer que la viscosité dépend de la vitesse de déformations, ce qui est en accord avec l'expérience.

Résumé du Chapitre 5, paragraphe 5.1 :

– **Modèle de comportement viscoélastique linéaire isotrope sans variable interne :**

– Variables d'état :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon)$$

– Potentiel et fonctions d'état ($I_1^\epsilon = \text{Tr}(\epsilon)$ et $I_2^\epsilon = \text{Tr}(\epsilon \cdot \epsilon)$) :

$$\psi(\theta, I_1^\epsilon, I_2^\epsilon) = -\frac{\hat{C}_\epsilon^0}{2T_0} \theta^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^\epsilon)^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^\epsilon - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta I_1^\epsilon$$

$$\mathbf{A}^\epsilon = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \epsilon - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} \right) ; \quad s = \hat{C}_\epsilon^0 \frac{\theta}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} \theta I_1^\epsilon$$

– Dissipation $\phi = \phi_{th} + \phi_{int}$ (inégalités toujours satisfaites grâce à la loi de Fourier – $\mathbf{q} = -\hat{k} \nabla \theta$ – et à l'équation constitutive thermomécanique, cf. ci-dessous) :

$$\phi_{th} = -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 ; \quad \phi_{int} = \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} \geq 0$$

– Équation constitutive thermomécanique (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\rho} \mathbf{A}^\epsilon + \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} = \hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu} \epsilon - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} + \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon}$$

– Équation de la chaleur (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\hat{\rho} \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k} \Delta \theta - r = \hat{\kappa}^{ve} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} T \mathbf{G} : \dot{\epsilon}$$

– Six paramètres-matériau sont donc à identifier par des essais expérimentaux – outre $\hat{\rho}$ (en $kg.m^{-3}$), masse volumique initiale –, soient :

$$\begin{cases} \hat{\mu} > 0 \text{ et } \hat{\lambda} > -\frac{2}{3}\hat{\mu} \text{ (en MPa)} ; & \hat{\kappa}^{ve} > 0 \text{ (en MPa.s)} \\ \hat{\gamma} > 0 \text{ (en } K^{-1}) ; & \hat{C}_\epsilon^0 > 0 \text{ (en } J.kg^{-1}.K^{-1}) ; & \hat{k} > 0 \text{ (en } W.K^{-1}.m^{-1}) \end{cases}$$

Résumé du Chapitre 5, paragraphe 5.2 :– **Modèle de comportement viscoélastique linéaire isotrope avec variable interne :**

– Variables d'état :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon, \epsilon^v)$$

avec, par hypothèse : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\{\theta, \epsilon - \epsilon^v\}$.– Potentiel et fonctions d'état ($I_1^{\epsilon - \epsilon^v} = \text{Tr}(\epsilon - \epsilon^v)$ et $I_2^{\epsilon - \epsilon^v} = \text{Tr}((\epsilon - \epsilon^v) \cdot (\epsilon - \epsilon^v))$) :

$$\psi(\theta, I_1^{\epsilon - \epsilon^v}, I_2^{\epsilon - \epsilon^v}) = -\frac{\hat{C}_\epsilon^0}{2T_0} \theta^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^{\epsilon - \epsilon^v})^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^{\epsilon - \epsilon^v} - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta I_1^{\epsilon - \epsilon^v}$$

$$\mathbf{A}^\epsilon = \mathbf{A}^{\epsilon^v} = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^{\epsilon - \epsilon^v} \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\epsilon - \epsilon^v) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} \right) ; \quad s = \hat{C}_\epsilon^0 \frac{\theta}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} I_1^{\epsilon - \epsilon^v}$$

– Dissipation $\phi = \phi_{th} + \phi_{int}$ (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$; inégalités toujours satisfaites grâce à la loi de Fourier $-\mathbf{q} = -\hat{k} \nabla \theta$ – et aux équations constitutives thermomécaniques, cf. ci-dessous) :

$$\phi_{th} = -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 ; \quad \phi_{int} = \frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\kappa}^{ve}} \mathbf{A}^{\epsilon^v} : \mathbf{A}^{\epsilon^v} \geq 0$$

– Équations constitutives thermomécaniques (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\rho} \mathbf{A}^\epsilon = \hat{\lambda} I_1^{\epsilon - \epsilon^v} \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\epsilon - \epsilon^v) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} ; \quad \dot{\epsilon}^v = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\kappa}^{ve}} \mathbf{A}^{\epsilon^v} = \frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} \boldsymbol{\sigma}$$

– Équation de la chaleur (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\hat{\rho} \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k} \Delta \theta - r = \frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + T (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \left(\frac{1}{\hat{\kappa}^{ve}} \boldsymbol{\sigma} - \dot{\epsilon} \right) : \mathbf{G}$$

– Six paramètres-matériau sont donc à identifier par des essais expérimentaux – outre $\hat{\rho}$ (en $kg.m^{-3}$), masse volumique initiale –, soient :

$$\begin{cases} \hat{\mu} > 0 \text{ et } \hat{\lambda} > -\frac{2}{3}\hat{\mu} \text{ (en MPa)} ; \hat{\kappa}^{ve} > 0 \text{ (en MPa.s)} \\ \hat{\gamma} > 0 \text{ (en } K^{-1}) ; \hat{C}_\epsilon^0 > 0 \text{ (en } J.kg^{-1}.K^{-1}) ; \hat{k} > 0 \text{ (en } W.K^{-1}.m^{-1}) \end{cases}$$

Chapitre 6

Élastoviscoplasticité et élastoplasticité

6.1 Principales caractéristiques de l'élasto(visco)plasticité

Aucun phénomène visqueux n'est pris en considération dans les modèles d'élastoplasticité. Tel n'est pas le cas dans ceux rendant compte de l'élastoviscoplasticité, où, pourtant, les phénomènes viscoélastiques sont négligés¹.

Malgré cela, l'élasto(visco)plasticité² présente certaines analogies formelles avec la viscoélasticité avec variable interne (cf. Chap. 5, para. 5.2). Ainsi reposent-elles, elles aussi, sur les hypothèses de *partition des déformations* et de *contraintes élastiques*, soient, en notant ici ϵ^p le tenseur des déformations (visco)plastiques :

$$\begin{cases} \forall \epsilon, \exists (\epsilon^e, \epsilon^p) \text{ tels que } \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \\ \sigma \{ \theta, \epsilon - \epsilon^p \} \end{cases} \quad (6.1)$$

L'élasto(visco)plasticité se distingue cependant de la viscoélasticité de trois façons, à savoir :

- alors que les déformations élastiques et visqueuses engendrent en général³ une dilatation volumique (dont la valeur relative, *i. e.* par unité de volume, est donnée par $\text{Tr}(\epsilon^e)$ et $\text{Tr}(\epsilon^v)$), les déformations non élastiques de type (visco)plastique ne donnent lieu à aucune variation de volume. Elles sont donc dites *isochores* ou *isovolumes*, cette propriété se traduisant simplement par :

$$\text{Tr}(\epsilon^p) = 0 \quad (6.2)$$

- il est bien souvent (mais pas toujours) nécessaire de considérer, en plus de ϵ^p , une autre variable interne pour décrire l'*écrouissage* du matériau (cf. *item* suivant pour la définition du phénomène d'écrouissage). Il est parfois même nécessaire d'en considérer deux, soient : une variable interne scalaire, notée h , décrivant une forme d'écrouissage, qualifiée d'*isotrope*, et une variable interne tensorielle (ordre deux), notée \mathbf{H} , décrivant un autre type d'écrouissage, qualifié de *cinématique*. De façon générale, le jeu de variables d'état nécessaires à la modélisation de l'élasto(visco)plasticité est donc :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon, \epsilon^p, \mathbf{H}, h) \quad (6.3)$$

- Si la température est constante ou décroît (*i. e.* si $\dot{\theta} \leq 0$), les déformations (visco)plastiques ϵ^p , ni les variable d'écrouissage, \mathbf{H} et h , ne peuvent évoluer tant que l'état thermodynamique \mathbf{V}^{et} est strictement à l'intérieur d'un domaine de l'espace des états appelé *domaine d'élasticité* et limité par ce que l'on nomme la *surface seuil de plasticité*. Puisque les effets viscoélastiques ne sont pas pris en compte en

¹En revanche, ils sont bien pris en compte en viscoélasticité-(visco)plasticité, type de comportement dont on ne traitera pas dans ce cours.

²Dans un souci de concision, on écrira « élasto(visco)plasticité » en lieu et place de « élastoplasticité et élastoviscoplasticité », sauf dans les cas où il est indispensable de distinguer ces deux types de comportement.

³Sauf si le coefficient de Poisson, cf. eqn.(4.4), tend vers 1/2.

élasto(visco)plasticité, les seules évolutions possibles à partir de tels états sont donc thermoélastiques, *i. e.* correspondent à une dissipation intrinsèque nulle.

D'un point de vue expérimental, considérant le cas très usuel de la traction simple pour lequel l'état de contraintes est *uniaxial*⁴, ceci se traduit par le fait que, tant que la contrainte σ (ou la déformation axiale ϵ) n'a jamais dépassé une valeur limite $\hat{\sigma}_0$ appelée *seuil initial de plasticité*, si $\theta = 0$, alors $\sigma = 0 \Leftrightarrow \epsilon = 0$. L'expérience montre également que ce seuil de plasticité *augmente*, au moins dans un premier temps, avec la contrainte (ou la déformation axiale) : c'est cette augmentation qu'on nomme *écrouissage*. Ce phénomène est mécaniquement irréversible, comme les déformations (visco)plastiques d'ailleurs. Une forte augmentation de la température⁵ permet cependant de les anihiler : ils sont donc thermiquement réversibles.

On admettra, dans ce cours, que la surface-seuil de plasticité est l'ensemble des états solution d'une équation faisant intervenir une fonction – dite *fonction-seuil* – des seules fonctions d'état associées aux variables (d'état) internes, soit :

$$f(\mathbf{A}^{ep}, \mathbf{A}^H, A^h) = 0 \quad (6.4)$$

La fonction-seuil la plus célèbre – qu'on retiendra d'ailleurs dans toute la suite de ce chapitre – est celle dite de *Von Mises*, soit :

$$f = \hat{\rho} \left(A^{ep} - A^H \right)_{eq} - (\hat{\sigma}_0 - \hat{\rho} A^h), \text{ avec } \left(A^{ep} - A^H \right)_{eq} = \left(\frac{3}{2} (\mathbf{a}^{ep} - \mathbf{a}^H) : (\mathbf{a}^{ep} - \mathbf{a}^H) \right)^{1/2} \quad (6.5)$$

où \mathbf{a}^{ep} (resp. \mathbf{a}^H) désigne le déviateur de \mathbf{A}^{ep} (resp. de \mathbf{A}^H), soit :

$$\mathbf{a}^{ep} = \mathbf{A}^{ep} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{A}^{ep}) \mathbf{G} ; \quad \mathbf{a}^H = \mathbf{A}^H - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{A}^H) \mathbf{G} \quad (6.6)$$

Compte tenu de eqn. (6.4), on dispose donc d'ores et déjà, pour les équations d'évolution des variables internes, de la condition *suffisante* suivante :

$$f(\mathbf{A}^{ep}, \mathbf{A}^H, A^h) < 0 \ \& \ \dot{\theta} \leq 0 \ \Rightarrow \ \dot{\epsilon}^p = 0 \ \& \ \dot{\mathbf{H}} = 0 \ \& \ \dot{h} = 0, \ \forall \dot{\epsilon} \quad (6.7)$$

Si l'on suppose alors que les vitesses d'écrouissage $\dot{\mathbf{H}}$ et \dot{h} (resp. de déformations plastiques $\dot{\epsilon}^p$) peuvent chacune être scindées en une partie isotherme, ${}^i\dot{\mathbf{H}}$ et ${}^i\dot{h}$ (resp. ${}^i\dot{\epsilon}^p$), et une partie anisotherme, ${}^a\dot{\mathbf{H}}$ et ${}^a\dot{h}$ (resp. ${}^a\dot{\epsilon}^p$), telles que :

$$\dot{\mathbf{H}}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} = {}^i\dot{\mathbf{H}}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\epsilon}\} + {}^a\dot{\mathbf{H}}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}\} ; \quad \dot{h}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} = {}^i\dot{h}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\epsilon}\} + {}^a\dot{h}\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}\} \quad (6.8)$$

et :

$$\dot{\epsilon}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} = {}^i\dot{\epsilon}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\epsilon}\} + {}^a\dot{\epsilon}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}\} \quad (6.9)$$

il suffit ensuite d'admettre que chaque partie isotherme est telle que :

$$f(\mathbf{A}^{ep}, \mathbf{A}^H, A^h) < 0 \ \Rightarrow \ {}^i\dot{\epsilon}^p = 0 \ \& \ {}^i\dot{\mathbf{H}} = 0 \ \& \ {}^i\dot{h} = 0, \ \forall \dot{\epsilon} \quad (6.10)$$

et chaque partie anisotherme telle que :

$$\dot{\theta} \leq 0 \ \Rightarrow \ {}^a\dot{\epsilon}^p = 0 \ \& \ {}^a\dot{\mathbf{H}} = 0 \ \& \ {}^a\dot{h} = 0 \quad (6.11)$$

pour que l'implication ci-dessus, relative à la somme de ces deux parties, soit bien systématiquement satisfaite.

On retiendra cette hypothèse de partition des vitesses d'écrouissage et de déformations plastiques en parties isothermes et anisothermes dans toute la suite de ce chapitre.

⁴Soit \mathbf{e}_1 la direction suivant laquelle l'éprouvette est soumise à traction. Soient \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 deux directions orthogonales à \mathbf{e}_1 et telles que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Si l'on exprime les composantes de σ dans cette base, on constate alors qu'une seule d'entre elle, σ_{11} , est non nulle : voila pourquoi on qualifie cet état de contraintes d'*uniaxial*. À noter, en revanche, que l'état de déformations associé n'est pas uniaxial puisque, pas plus que ϵ_{11} , ni ϵ_{22} , ni ϵ_{33} ne sont en général nulles.

⁵On rappelle ici que tout phénomène dissipatif s'accompagne d'une élévation de température, *i. e.* d'un autoéchauffement du matériau. Celui-ci, généralement, est cependant beaucoup trop faible pour induire une diminution significative de ce que l'on nomme les irréversibilités mécaniques, tels l'écrouissage et les déformations (visco)plastiques.

REMARQUE : ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION THERMODYNAMIQUEMENT ADMISSIBLES ET CONVEXITÉ
 Tout tenseur \mathbf{B} , symétrique et d'ordre deux ⁶, peut toujours se décomposer de façon unique en :

$$\mathbf{B} = (I_2^{\mathbf{B}})^{1/2} \mathbf{N}^{\mathbf{B}}$$

où, rappelons-le, $(I_2^{\mathbf{B}})^{1/2} \geq 0$ désigne la norme de \mathbf{B} , et où $\mathbf{N}^{\mathbf{B}}$ est le tenseur unitaire colinéaire à \mathbf{B} (i. e. tel que $\mathbf{B} : \mathbf{N}^{\mathbf{B}} = (I_2^{\mathbf{B}})^{1/2}$). Ainsi peut-on toujours écrire :

$${}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = (I_2^{i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p})^{1/2} \mathbf{N}^{i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} ; {}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = (I_2^{a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p})^{1/2} \mathbf{N}^{a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}$$

et :

$${}^i \dot{\mathbf{H}} = (I_2^{i \dot{\mathbf{H}}})^{1/2} \mathbf{N}^{i \dot{\mathbf{H}}} ; {}^a \dot{\mathbf{H}} = (I_2^{a \dot{\mathbf{H}}})^{1/2} \mathbf{N}^{a \dot{\mathbf{H}}}$$

De façon analogue, les parties isotherme et anisotherme de l'évolution de la variable d'érouissage isotrope peuvent s'écrire :

$${}^i \dot{h} = |{}^i \dot{h}| N^{\dot{h}} ; {}^a \dot{h} = |{}^a \dot{h}| N^{\dot{h}}$$

où $N^{\dot{h}} = \pm 1$.

Dans la plupart des modèles d'élasto(visco)plasticité, dont ceux développés dans les deux paragraphes suivants de ce chapitre, il est supposé que :

$$(I_2^{i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p})^{1/2} = (I_2^{i \dot{\mathbf{H}}})^{1/2} = |{}^i \dot{h}| \triangleq {}^i \Lambda$$

et :

$$(I_2^{a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p})^{1/2} = (I_2^{a \dot{\mathbf{H}}})^{1/2} = |{}^a \dot{h}| \triangleq {}^a \Lambda$$

où ${}^i \Lambda$, en s^{-1} , est appelé *multiplicateur (visco)plastique* ⁷. Quant aux tenseurs unitaires, il est généralement supposé qu'ils sont tels que :

$$\mathbf{N}^{i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \mathbf{N}^{a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \triangleq \mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} ; \mathbf{N}^{i \dot{\mathbf{H}}} = \mathbf{N}^{a \dot{\mathbf{H}}} \triangleq \mathbf{N}^{\dot{\mathbf{H}}}$$

La dissipation intrinsèque, dont l'expression générale, en élasto(visco)plasticité, est :

$$\Phi_{int} = \rho \mathbf{A}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} : ({}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + {}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) + \rho \mathbf{A}^{\dot{\mathbf{H}}} : ({}^i \dot{\mathbf{H}} + {}^a \dot{\mathbf{H}}) + \rho A^p ({}^i \dot{h} + {}^a \dot{h}) \geq 0, \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$$

se récrit alors :

$$\Phi_{int} = ({}^i \Lambda + {}^a \Lambda) (\rho \mathbf{A}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} : \mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} + \rho \mathbf{A}^{\dot{\mathbf{H}}} : \mathbf{N}^{\dot{\mathbf{H}}} + \rho A^p N^{\dot{h}}) \geq 0, \forall \mathbf{V}^{et} \ \& \ \forall (\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$$

Par définition, les normes ${}^i \Lambda$ et ${}^a \Lambda$ étant positives, la vérification systématique de cette dernière inégalité n'est donc plus conditionnée que par le choix des tenseurs unitaires $\mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}$, $\mathbf{N}^{\dot{\mathbf{H}}}$ et $N^{\dot{h}}$. En ce qui les concerne, il est là encore très souvent supposé qu'ils dérivent d'un *potentiel d'écoulement*, $g\{\mathbf{A}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}, \mathbf{A}^{\dot{\mathbf{H}}}, A^{\dot{h}}\}$, soit :

$$\mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}} : \frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}} \right)^{-1/2} ; \mathbf{N}^{\dot{\mathbf{H}}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}^{\dot{\mathbf{H}}}} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}^{\dot{\mathbf{H}}}} : \frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}^{\dot{\mathbf{H}}}} \right)^{-1/2}$$

et :

$$N^{\dot{h}} = \left(\frac{\partial g}{\partial A^{\dot{h}}} \right) / \left| \frac{\partial g}{\partial A^{\dot{h}}} \right|$$

On montre en effet facilement que si g est doté des propriétés suivantes :

- i) $g(0,0,0) = 0$, i. e. g est nul à l'origine,
- ii) $\forall (\mathbf{A}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}, \mathbf{A}^{\dot{\mathbf{H}}}, A^{\dot{h}})$, $g(\mathbf{A}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}, \mathbf{A}^{\dot{\mathbf{H}}}, A^{\dot{h}}) \geq 0$, i. e. g est non négatif,

⁶Cette propriété est en fait vraie pour les tenseurs de tous ordres.

⁷En toute rigueur, il faudrait qualifier ${}^i \Lambda$ de multiplicateur (visco)plastique *isotherme* et ${}^a \Lambda$ de multiplicateur (visco)plastique *anisotherme*.

- iii) $\forall (\mathbf{A}_1^{\varepsilon^p}, \mathbf{A}_1^H, A_1^h) \ \& \ \forall (\mathbf{A}_2^{\varepsilon^p}, \mathbf{A}_2^H, A_2^h)$,
 $g(\mathbf{A}_2^{\varepsilon^p}, \mathbf{A}_2^H, A_2^h) - g(\mathbf{A}_1^{\varepsilon^p}, \mathbf{A}_1^H, A_1^h) - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}^{\varepsilon^p}} : (\mathbf{A}_2^{\varepsilon^p} - \mathbf{A}_1^{\varepsilon^p}) - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}^H} : (\mathbf{A}_2^H - \mathbf{A}_1^H) - \frac{\partial g}{\partial A^h} (A_2^h - A_1^h) \geq 0$
i. e. g est convexe,

la dissipation intrinsèque est bien systématiquement non négative.

Il est finalement à noter que si le potentiel d'écoulement est choisi égal à la fonction seuil (à une constante près, le plus souvent), le modèle d'élasto(visco)plasticité ainsi défini est qualifié d'*associé* ou de *standard généralisé*. Par exemple, dans le cas où cette fonction seuil est celle de Von Mises, la fonction g telle que :

$$g(\mathbf{A}^{\varepsilon^p}, \mathbf{A}^H, A^h) \hat{=} f(\mathbf{A}^{\varepsilon^p}, \mathbf{A}^H, A^h) + \hat{\sigma}_0 = \hat{\rho} \left(A^{\varepsilon^p} - A^H \right)_{eq} + \hat{\rho} A^h$$

est un potentiel d'écoulement thermodynamiquement admissible tant que $(A^{\varepsilon^p} - A^H)_{eq} + A^h \geq 0$, au sens qu'elle vérifie bien les trois conditions ci-dessus présentées. Compte tenu de l'expression eqn. (6.5) de la surface seuil de Von Mises, on a alors :

$$\mathbf{N}^{\varepsilon^p} = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{\mathbf{a}^{\varepsilon^p}}{A_{eq}^{\varepsilon^p}} ; \quad \mathbf{N}^H = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{\mathbf{a}^H}{A_{eq}^H} ; \quad N^h = 1$$

Il faut enfin souligner, dans cette présentation générale des principales caractéristiques de l'élastoviscoplasticité et de l'élastoplasticité, que celle-ci n'est qu'un cas particulier de celle-là, au sens que, de la même façon que le modèle de viscoélasticité linéaire sans variable interne (cf. chap. 5, para. 5.1) tend vers la loi de Hooke (cf. chap. 4, para. 4.2) quand la viscosité tend vers zéro, l'élastoviscoplasticité tend vers l'élastoplasticité quand la viscosité tend vers zéro. Malgré cela, les équations d'évolution des variables internes – mais pas les fonctions d'état, il est important de le noter – d'un modèle d'élastoplasticité sont formellement différentes de celles d'un modèle d'élastoviscoplasticité, ce qui justifie qu'on les distingue clairement.

6.2 Élasto(visco)plasticité avec écrouissage cinématique linéaire

- Dans ce type de modèle d'élasto(visco)plasticité, on suppose que le seul tenseur des déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ suffit à rendre compte de l'écrouissage. Le jeu de variables d'état eqn. (6.3) se réduit donc à :

$$\mathbf{V}^{et} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (6.12)$$

- L'expression de l'énergie libre massique est généralement celle retenue pour le modèle de viscoélasticité linéaire avec variable interne, eqn. (5.17), augmentée d'une énergie libre *bloquée par écrouissage*, décrite par une fonction dépendant *linéairement* de $I_2^{\varepsilon^p}$, soit :

$$\Psi \left(\boldsymbol{\theta}, I_1^{\varepsilon - \varepsilon^p}, I_2^{\varepsilon - \varepsilon^p}, I_2^{\varepsilon^p} \right) = -\frac{\hat{C}_\varepsilon^0}{2T_0} \boldsymbol{\theta}^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^{\varepsilon - \varepsilon^p})^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^{\varepsilon - \varepsilon^p} - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} I_1^{\varepsilon - \varepsilon^p} + \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{\rho}} I_2^{\varepsilon^p} \quad (6.13)$$

où $\hat{\lambda}$ (en $J.m^{-3}$) est le *coefficient de résistance à l'écrouissage*. De eqn. (6.13), et sachant que, d'après eqn. (6.2), $I_1^{\varepsilon - \varepsilon^p} = I_1^\varepsilon$, on déduit immédiatement les trois fonctions d'état suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}^\varepsilon = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^\varepsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} \mathbf{G} \right) = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\mathbf{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} \mathbf{G} \right) \\ \mathbf{A}^{\varepsilon^p} (\hat{=} -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}) = \mathbf{A}^\varepsilon - \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\rho}} \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ s = \hat{C}_\varepsilon^0 \frac{\boldsymbol{\theta}}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} I_1^\varepsilon \end{array} \right. \quad (6.14)$$

On soulignera, dans eqn. (6.14), que \mathbf{A}^ε ne dépend, outre de $\boldsymbol{\theta}$, que de la différence $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$: cette particularité sera d'importance lorsqu'on cherchera à établir une expression du tenseur des contraintes cohérente avec eqn. (6.1).

On notera également que, compte-tenu de eqn. (6.14), l'expression générale de la surface seuil de Von Mises, eqn. (6.5), devient :

$$f(\mathbf{A}^{\varepsilon^p}) = \hat{\rho} A_{eq}^{\varepsilon^p} - \hat{\sigma}_0 = 0, \text{ avec } A_{eq}^{\varepsilon^p} = \left(\frac{3}{2} \mathbf{a}^{\varepsilon^p} : \mathbf{a}^{\varepsilon^p} \right)^{1/2}, \mathbf{a}^{\varepsilon^p} = \mathbf{A}^{\varepsilon^p} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{A}^{\varepsilon^p}) \mathbf{G} \quad (6.15)$$

– L'expression générale de la dissipation intrinsèque ϕ_{int} est :

$$\phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{A}^\varepsilon) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho \mathbf{A}^{\varepsilon^p} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0, \forall \mathbf{V}^{et} \text{ \& } \forall (\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (6.16)$$

où, selon eqn. (6.1) et eqn. (6.9) :

$$\boldsymbol{\sigma} \{ \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p \} ; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \} = {}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \} + {}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \{ \mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\theta}} \} \quad (6.17)$$

Pour les états tels que $f(\mathbf{A}^{\varepsilon^p}) < 0$ – i. e. lorsque ${}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0$ – et pour les évolutions telles que $\dot{\boldsymbol{\theta}} \leq 0$ – i. e. quand ${}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0$ –, cette inégalité devient une égalité puisque les seules évolutions possibles sont thermoélastiques. Comme on l'a vu au chap. 4, para. 4.1, une condition *nécessaire et suffisante* à la vérification de eqn. (6.17) est alors que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{A}^\varepsilon, \forall \mathbf{V}^{et} \text{ tels que } f(\mathbf{A}^{\varepsilon^p}) < 0, \forall \dot{\boldsymbol{\theta}} \text{ telles que } \dot{\boldsymbol{\theta}} \leq 0, \forall \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.18)$$

Bien que cela soit seulement *suffisant*, on étendra la définition eqn. (6.18) du tenseur des contraintes à tous les états et à toutes les évolutions, d'où :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{A}^\varepsilon, \forall \mathbf{V}^{et} \text{ \& } \forall (\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (6.19)$$

soit, d'après eqn. (6.14), et avec la même approximation qui a permis de passer de eqn. (4.8) à eqn. (4.9), i. e. $\hat{\rho} \approx \rho$:

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \hat{\lambda} I_1^\varepsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\gamma}\boldsymbol{\theta}\mathbf{G} \quad (6.20)$$

En conséquence de eqn. (6.19), l'expression de la dissipation intrinsèque se réduit à :

$$\phi_{int} = \rho \mathbf{A}^{\varepsilon^p} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \rho \mathbf{A}^{\varepsilon^p} : ({}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + {}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \geq 0, \forall \mathbf{V}^{et} \text{ \& } \forall (\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (6.21)$$

avec, par contraposition des propositions eqn. (6.10) et eqn. (6.11) :

$$\exists \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \text{ tel que } {}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \neq 0 \Rightarrow f(\mathbf{A}^{\varepsilon^p}, \mathbf{A}^h, \mathbf{A}^H) \geq 0 \quad (6.22)$$

et :

$${}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \neq 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\theta}} > 0 \quad (6.23)$$

Il ne reste donc plus qu'à proposer des équations d'évolution, ${}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ et ${}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, compatibles avec eqns. (6.21), (6.22) et (6.23) pour que le modèle soit complètement défini. Pour ce faire, on distinguera bien les cas élastoviscoplastique et élastoplastique.

– Élastoviscoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire ; modèle associé

Par définition, l'élastoviscoplasticité est un type de comportement thermo-mécanique pour lequel les états \mathbf{V}^{et} tels que $f(\mathbf{A}^{\varepsilon^p}) > 0$ sont accessibles. Compte tenu de la remarque faite au paragraphe précédent – et supposant, notamment, que le modèle est *associé* –, il apparaît alors qu'une condition *suffisante* à la vérification de eqn. (6.21), cohérente avec eqns. (6.22) et (6.23), est :

$${}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{1}{\hat{\kappa}^p} \langle f \rangle N^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} ; {}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{1}{\hat{\eta}^p} H^-(I_2^{\varepsilon^p}) H^-(\hat{\eta}^p \frac{\dot{\boldsymbol{\theta}}}{T_0}) N^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad (6.24)$$

où $\hat{\kappa}^p > 0$ (en *MPa.s*) est une *viscosité* et $\hat{\eta}^p$ (en *s*), un *temps caractéristique de la viscosité*. Quant à H^- (resp. au symbole « $\langle \rangle$ »), il désigne la fonction d'Heaviside modifiée, i. e. $H^-(x) = 0$ si $x \leq 0$ et

6. ÉLASTOVISCOPLASTICITÉ ET ÉLASTOPLASTICITÉ

$H^-(x) = 1$ sinon (resp. la fonction partie positive, telle que $\langle x \rangle = 0$ si $x \leq 0$ et $\langle x \rangle = x$ sinon).
Compte tenu de la particularisation eqn. (6.15) de la fonction seuil de Von Mises, $\mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p}$ vaut :

$$\mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{\mathbf{a}^{\epsilon^p}}{A_{eq}^{\epsilon^p}} \quad (6.25)$$

ou encore, selon la définition eqn. (6.14) de \mathbf{A}^{ϵ^p} , et sachant que, d'après eqn. (6.2), ϵ^p est un déviateur :

$$\mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{\mathbf{s} - \hat{\chi}\epsilon^p}{(\sigma - \hat{\chi}\epsilon^p)_{eq}}, \text{ où } \mathbf{s} = \sigma - \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)\mathbf{G} \quad (6.26)$$

Ainsi, comme annoncé dans la remarque du para. 6.1, la dissipation intrinsèque est bien toujours non négative, qui s'écrit :

$$\phi_{int} = ({}^i\Lambda + {}^a\Lambda) ((\mathbf{s} - \hat{\chi}\epsilon^p) : (\mathbf{s} - \hat{\chi}\epsilon^p))^{1/2} \quad (6.27)$$

où, d'après eqn. (6.24) :

$${}^i\Lambda = \frac{1}{\hat{\kappa}^p} \langle f \rangle \geq 0 ; \quad {}^a\Lambda = \frac{1}{\hat{\eta}^p} H^-(I_2^{\epsilon^p}) H^-(\hat{\eta}^p \frac{\dot{\theta}}{T_0}) \geq 0 \quad (6.28)$$

– Élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire ; modèle associé

À l'inverse de l'élastoviscoplasticité, l'élastoplasticité est un type de comportement thermo-mécanique pour lequel, par définition, les états \mathbf{V}^{et} tels que $f(\mathbf{A}^{\epsilon^p}) > 0$ sont *inaccessibles*⁸. De cette hypothèse apparemment contraignante, et d'après eqn. (6.22), il découle tout d'abord que :

$$\exists \dot{\epsilon} \text{ tel que } {}^i\dot{\epsilon}^p \neq 0 \Rightarrow f(\mathbf{A}^{\epsilon^p}) = 0 \quad (6.29)$$

D'après cette même hypothèse, à partir d'un quelconque état tel que $f(\mathbf{A}^{\epsilon^p}) = 0$, les seules évolutions possibles pour f sont telles que $\dot{f} \leq 0$. La *condition* dite de *cohérence* permet alors de distinguer celles de ces évolutions de f qui peuvent effectivement mener à une évolution isotherme de ϵ^p , soit :

$$\exists \dot{\epsilon} \text{ tel que } {}^i\dot{\epsilon}^p \neq 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \& \ \dot{f} = 0 \quad (6.30)$$

Il est important de souligner que eqn. (6.30) est une *équivalence*, alors que eqn. (6.29) n'était qu'une implication : l'expression de ${}^i\dot{\epsilon}^p$ – qui, dans la version élastoviscoplastique de ce modèle, cf. eqn. (6.24), n'était qu'une expression possible parmi d'autres – est donc ici complètement et *uniquement* déterminée par les conditions $f = 0$ et $\dot{f} = 0$. Or, d'après eqns. (6.14) et (6.15), et moyennant quelques calculs, on peut montrer que :

$$f = 0 \ \& \ \dot{f} = 0 \Leftrightarrow {}^i\Lambda = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{2\hat{\mu}}{(2\hat{\mu} + \hat{\chi})\hat{\sigma}_0} \langle (\mathbf{s} - \hat{\chi}\epsilon^p) : \dot{\epsilon} \rangle \quad (6.31)$$

On a donc finalement :

$${}^i\dot{\epsilon}^p = {}^i\Lambda \mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p} \quad (6.32)$$

où, d'après eqn. (6.31) :

$${}^i\Lambda = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{2\hat{\mu}}{(2\hat{\mu} + \hat{\chi})\hat{\sigma}_0} \langle (\mathbf{s} - \hat{\chi}\epsilon^p) : \dot{\epsilon} \rangle H(f) \quad (6.33)$$

et, de la même façon que dans la version élastoviscoplastique de ce modèle, cf. eqn. (6.26), en remarquant que $f = 0 \Leftrightarrow (\sigma - \hat{\chi}\epsilon^p)_{eq} = \hat{\sigma}_0$:

$$\mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{\mathbf{s} - \hat{\chi}\epsilon^p}{\hat{\sigma}_0} \quad (6.34)$$

⁸Cette hypothèse ne peut être légitimement formulée que si les effets de viscosité, tels qu'observés expérimentalement, sont « petits ». Et ce n'est que si on les néglige complètement que les états strictement extérieurs au domaine d'élasticité deviennent effectivement inaccessibles.

Dans eqn. (6.33), H désigne la fonction d'Heaviside, telle que $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ sinon. La condition de cohérence, en revanche, ne donne aucune information sur l'évolution anisotherme de ϵ^p . On retiendra donc pour elle la même expression que dans le cas élastoviscoplastique, cf. eqn. (6.24), soit :

$${}^a\epsilon^p = {}^a\Lambda \mathbf{N}^{\epsilon^p} \text{ avec } {}^a\Lambda = \frac{1}{\hat{\eta}^p} H^-(I_2^{\epsilon^p}) H^-\left(\hat{\eta}^p \frac{\dot{\theta}}{T_0}\right) \quad (6.35)$$

L'expression de la dissipation intrinsèque est également la même que dans le cas élastoviscoplastique, cf. eqn. (6.27).

– L'équation de la chaleur s'écrit enfin, de façon exacte :

$$\rho \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k} \Delta \theta - r = ({}^i\Lambda + {}^a\Lambda) [\boldsymbol{\sigma} - \hat{\chi}(1 - \text{Tr}(\epsilon)) \epsilon^p] : \mathbf{N}^{\epsilon^p} - (1 - \text{Tr}(\epsilon)) T (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \dot{\epsilon} : \mathbf{G} \quad (6.36)$$

et de façon approchée ($\hat{\rho} \approx \rho$) :

$$\hat{\rho} \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k} \Delta \theta - r \approx ({}^i\Lambda + {}^a\Lambda) [\boldsymbol{\sigma} - \hat{\chi} \epsilon^p] : \mathbf{N}^{\epsilon^p} - T (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \dot{\epsilon} : \mathbf{G} \quad (6.37)$$

où, pour la version élastoviscoplastique du modèle (resp. sa version élastoplastique), ${}^i\Lambda$ et ${}^a\Lambda$ sont donnés par eqn. (6.27) et \mathbf{N}^{ϵ^p} par eqn. (6.26) (resp. ${}^i\Lambda$ par eqn. (6.33), ${}^a\Lambda$ par eqn. (6.35) et \mathbf{N}^{ϵ^p} par eqn. (6.34)).

Résumé du Chapitre 6, paragraphe 6.2 - version élastoviscoplastique du modèle à écrouissage cinématique linéaire :

– Variables d'état :

$$\mathbf{V}^{et} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p) \text{ avec, par hypothèse : } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p\}.$$

Autres hypothèses :

– Incompressibilité plastique : $\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}^p) = 0$,

– Surface seuil de Von Mises : $f(\mathbf{A}^{\epsilon^p}) = \hat{\rho} \mathbf{A}_{eq}^{\epsilon^p} - \hat{\sigma}_0 = 0$, avec :

$$\mathbf{A}_{eq}^{\epsilon^p} = \left(\frac{3}{2} \mathbf{a}^{\epsilon^p} : \mathbf{a}^{\epsilon^p}\right)^{1/2} ; \mathbf{a}^{\epsilon^p} = \mathbf{A}^{\epsilon^p} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{A}^{\epsilon^p}) \mathbf{G},$$

– Prise en compte des effets viscoplastiques : $\exists \mathbf{V}^{et}$ tels que $f(\mathbf{A}^{\epsilon^p}(\mathbf{V}^{et})) > 0$,

– Partition de l'évolution des déformations plastiques :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} = {}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} + {}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\}.$$

– Potentiel et fonctions d'état ($I_1^{\epsilon-\epsilon^p} = \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p)$; $I_2^{\epsilon-\epsilon^p} = \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p))$) :

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}, I_1^{\epsilon-\epsilon^p}, I_2^{\epsilon-\epsilon^p}, I_2^{\epsilon^p}) = -\frac{\hat{C}_\epsilon^0}{2T_0} \boldsymbol{\theta}^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^{\epsilon-\epsilon^p})^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^{\epsilon-\epsilon^p} - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} I_1^{\epsilon-\epsilon^p} + \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{\rho}} I_2^{\epsilon^p}$$

$$\mathbf{A}^\epsilon = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} \mathbf{G} \right) ; \mathbf{A}^{\epsilon^p} = \mathbf{A}^\epsilon - \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\rho}} \boldsymbol{\epsilon}^p ; s = \hat{C}_\epsilon^0 \frac{\boldsymbol{\theta}}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} I_1^{\epsilon^p}$$

– Dissipation $\phi = \phi_{th} + \phi_{int}$ (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$; inégalités toujours satisfaites grâce à la loi de Fourier – $\mathbf{q} = -\hat{k} \nabla \boldsymbol{\theta}$ – et aux équations constitutives thermomécaniques, cf. ci-dessous) :

$$\phi_{th} = -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \geq 0 ; \phi_{int} = \rho \mathbf{A}^{\epsilon^p} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \rho \mathbf{A}^{\epsilon^p} : ({}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + {}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \geq 0$$

– Équations constitutives thermomécaniques (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$), le modèle étant supposé *associé*, i. e.

$$\mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}^{\epsilon^p}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}^{\epsilon^p}} ; \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}^{\epsilon^p}} \right)^{-1/2} :$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\lambda} I_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \boldsymbol{\theta} \mathbf{G} ; \mathbf{A}^{\epsilon^p} = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\lambda} \boldsymbol{\epsilon}^p ; {}^i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = {}^i \Lambda \mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} ; {}^a \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = {}^a \Lambda \mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}$$

avec :

$${}^i \Lambda = \frac{1}{\hat{k}^p} \langle f \rangle ; {}^a \Lambda = \frac{1}{\hat{\eta}^p} H^-(I_2^{\epsilon^p}) H^-(\hat{\eta}^p \frac{\boldsymbol{\theta}}{T_0})$$

et :

$$\mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{\mathbf{s} - \hat{\lambda} \boldsymbol{\epsilon}^p}{(\boldsymbol{\sigma} - \hat{\lambda} \boldsymbol{\epsilon}^p)_{eq}} \text{ où } \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G}.$$

– Équation de la chaleur (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\hat{\rho} \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \hat{k} \Delta \boldsymbol{\theta} - r = ({}^i \Lambda + {}^a \Lambda) (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\lambda} \boldsymbol{\epsilon}^p) : \mathbf{N}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} - T (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{G}$$

– Neuf paramètres-matériau sont donc à identifier par des essais expérimentaux – outre $\hat{\rho}$ (en $kg.m^{-3}$), masse volumique initiale –, soient :

$$\begin{cases} \hat{\lambda} > 0, \hat{\mu} > 0, \hat{\sigma}_0 > 0, \hat{\lambda} > 0 \text{ (en MPa)} ; \hat{k}^p > 0 \text{ (en MPa.s)} ; \hat{\eta}^p > 0 \text{ (en s)} \\ \hat{\gamma} > 0 \text{ (en } K^{-1}) ; \hat{C}_\epsilon^0 > 0 \text{ (en } J.kg^{-1}.K^{-1}) ; \hat{k} > 0 \text{ (en } W.K^{-1}.m^{-1}) \end{cases}$$

Résumé du Chapitre 6, paragraphe 6.2 - version élastoplastique du modèle à écrouissage cinématique linéaire :

– Variables d'état :

$$\mathbf{V}^{et} = (\theta, \epsilon, \epsilon^p) \text{ avec, par hypothèse : } \sigma = \sigma\{\theta, \epsilon - \epsilon^p\}.$$

Autres hypothèses :

– Incompressibilité plastique : $\text{Tr}(\epsilon^p) = 0$,

– Surface seuil de Von Mises : $f(\mathbf{A}^{ep}) = \hat{\rho} \mathbf{A}_{eq}^{ep} - \hat{\sigma}_0 = 0$, avec :

$$\mathbf{A}_{eq}^{ep} = \left(\frac{3}{2} \mathbf{a}^{ep} : \mathbf{a}^{ep}\right)^{1/2}; \mathbf{a}^{ep} = \mathbf{A}^{ep} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{A}^{ep}) \mathbf{G},$$

– Non prise en compte des effets viscoplastiques : $\forall \mathbf{V}^{et}$ tels que $f(\mathbf{A}^{ep}(\mathbf{V}^{et})) > 0$,

– Partition de l'évolution des déformations plastiques :

$$\dot{\epsilon}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}, \dot{\epsilon}\} = {}^i \dot{\epsilon}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\epsilon}\} + {}^a \dot{\epsilon}^p\{\mathbf{V}^{et}, \dot{\theta}\}.$$

– Potentiel et fonctions d'état ($I_1^{\epsilon-\epsilon^p} = \text{Tr}(\epsilon - \epsilon^p)$; $I_2^{\epsilon-\epsilon^p} = \text{Tr}((\epsilon - \epsilon^p) \cdot (\epsilon - \epsilon^p))$) :

$$\psi(\theta, I_1^{\epsilon-\epsilon^p}, I_2^{\epsilon-\epsilon^p}, I_2^{\epsilon^p}) = -\frac{\hat{C}_\epsilon^0}{2T_0} \theta^2 + \frac{1}{2\hat{\rho}} \hat{\lambda} (I_1^{\epsilon-\epsilon^p})^2 + \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\mu} I_2^{\epsilon-\epsilon^p} - \frac{1}{\hat{\rho}} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta I_1^{\epsilon-\epsilon^p} + \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{\rho}} I_2^{\epsilon^p}$$

$$\mathbf{A}^\epsilon = \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\hat{\lambda} \mathbf{M}_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\epsilon - \epsilon^p) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G} \right); \mathbf{A}^{ep} = \mathbf{A}^\epsilon - \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\rho}} \epsilon^p; s = \hat{C}_\epsilon^0 \frac{\theta}{T_0} + \frac{3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \hat{\gamma} I_1^\epsilon$$

– Dissipation $\phi = \phi_{th} + \phi_{int}$ (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$; inégalités toujours satisfaites grâce à la loi de Fourier – $\mathbf{q} = -\hat{k} \nabla \theta$ – et aux équations constitutives thermomécaniques, cf. ci-dessous) :

$$\phi_{th} = -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0; \phi_{int} = \rho \mathbf{A}^{ep} : \dot{\epsilon}^p = \rho \mathbf{A}^{ep} : ({}^i \dot{\epsilon}^p + {}^a \dot{\epsilon}^p) \geq 0$$

– Équations constitutives thermomécaniques (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$), le modèle étant supposé *associé*, *i. e.*

$$\mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}^{ep}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}^{ep}} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}^{ep}} \right)^{-1/2} :$$

$$\sigma = \hat{\lambda} \mathbf{M}_1^\epsilon \mathbf{G} + 2\hat{\mu}(\epsilon - \epsilon^p) - (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \theta \mathbf{G}; \mathbf{A}^{ep} = \sigma - \hat{\lambda} \epsilon^p; {}^i \dot{\epsilon}^p = {}^i \Lambda \mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p}; {}^a \dot{\epsilon}^p = {}^a \Lambda \mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p}$$

avec :

$${}^i \Lambda = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{2\hat{\mu}}{(2\hat{\mu} + \hat{\lambda}) \hat{\sigma}_0} \langle (s - \hat{\lambda} \epsilon^p) : \dot{\epsilon} \rangle H(f); {}^a \Lambda = \frac{1}{\hat{\eta}^p} H^-(I_2^{\epsilon^p}) H^-\left(\hat{\eta}^p \frac{\dot{\theta}}{T_0}\right)$$

et :

$$\mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{s - \hat{\lambda} \epsilon^p}{\hat{\sigma}_0} \text{ où } s = \sigma - \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) \mathbf{G}.$$

Il est à noter que l'expression de ${}^i \dot{\epsilon}^p$ découle ici de la *relation de cohérence*, soit :

$$\exists \dot{\epsilon} \text{ tel que } {}^i \dot{\epsilon}^p \neq 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ \& } \dot{f} = 0$$

– Équation de la chaleur (avec l'approximation $\rho \approx \hat{\rho}$) :

$$\hat{\rho} \hat{C}_\epsilon^0 \frac{T}{T_0} \dot{\theta} - \hat{k} \Delta \theta - r = ({}^i \Lambda + {}^a \Lambda) (\sigma - \hat{\lambda} \epsilon^p) : \mathbf{N}^{\dot{\epsilon}^p} - T (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{\gamma} \dot{\epsilon} : \mathbf{G}$$

– Huit paramètres-matériau sont donc à identifier par des essais expérimentaux – outre $\hat{\rho}$ (en $kg.m^{-3}$), masse volumique initiale –, soient :

$$\begin{cases} \hat{\lambda} > 0, \hat{\mu} > 0, \hat{\sigma}_0 > 0, \hat{\lambda} > 0 \text{ (en MPa)}; \hat{\eta}^p > 0 \text{ (en s)} \\ \hat{\gamma} > 0 \text{ (en } K^{-1}); \hat{C}_\epsilon^0 > 0 \text{ (en } J.kg^{-1}.K^{-1}); \hat{k} > 0 \text{ (en } W.K^{-1}.m^{-1}) \end{cases}$$

Annexe A

Tenseurs Euclidiens dans \mathcal{E}_3

NOTE IMPORTANTE : Les formules *indicielles* qui suivent ne sont valables que si les composantes sont données dans une base orthonormée et en utilisant la convention d'Einstein simplifiée (sommation sur les couples d'indices muets).

En revanche, toutes les formules avec des opérateurs tensoriels tels que « \otimes », « \cdot » ou « $:$ » sont tout à fait générales.

D'autre part, l'espace vectoriel euclidien \mathbb{V} sur lequel sont construits les tenseurs est implicitement de dimension 3, ce qui est suffisant pour la mécanique classique.

A.1 Rappels d'algèbre

- Les tenseurs d'ordre 0 sont des *scalaires* ou *invariants*¹.
- Les tenseurs d'ordre 1 sont des vecteurs $\in \mathbb{V}$. Ils peuvent aussi être vus comme des formes linéaires $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{u}) = v_i u_i \in \mathbb{R}$$

- Les tenseurs d'ordre 2 sont des applications bilinéaires $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Ils sont dans un espace vectoriel de dimension 9 noté $\mathbb{V}^{\otimes 2}$. Ils peuvent aussi être vus comme des endomorphismes linéaires $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$: Si $\mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$, on a :

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = u_i T_{ij} v_j \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}(\cdot, \mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = T_{ij} v_j \mathbf{e}_i \in \mathbb{V}$$

Le produit tensoriel deux fois contracté est un produit scalaire de $\mathbb{V}^{\otimes 2}$:

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} = \mathbf{U} : \mathbf{T} = T_{ij} U_{ij} \in \mathbb{R}$$

Il induit une norme dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$: $\|\mathbf{T}\|^2 = \mathbf{T} : \mathbf{T} \geq 0$.

On peut construire des invariants à partir des composantes d'un tenseur :

$$T_I = \text{Tr}(\mathbf{T}) \quad T_{II} = \frac{1}{2} [(\text{Tr}(\mathbf{T}))^2 - \text{Tr}(\mathbf{T}^2)] \quad T_{III} = \det \mathbf{T} = \frac{1}{3} \left[(\text{Tr}(\mathbf{T}^3)) - \frac{3}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}) \text{Tr}(\mathbf{T}^2) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}^3) \right]$$

- Le tenseur métrique \mathbf{G} est le tenseur du second ordre symétrique tel que :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad G_{ij} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

- Les tenseurs d'ordre p sont des applications p -linéaires $\mathbb{V}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Ils ont dans un espace vectoriel de dimension 3^p noté $\mathbb{V}^{\otimes p}$. Par exemple, si $\mathbf{C} \in \mathbb{V}^{\otimes 4}$:

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = C_{ijkl} u_i v_j w_k x_l \in \mathbb{R}$$

¹sous-entendu : par changement de base.

- Le tenseur d'orientation \mathbf{H} est le tenseur d'ordre 3 complètement antisymétrique défini par :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \quad \Leftrightarrow \quad H_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k \text{ en permutation directe} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ en permutation indirecte} \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \end{cases}$$

où $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ est le produit mixte des 3 vecteurs.

- Les tenseurs d'ordre 4 peuvent être vus comme des endomorphismes linéaires $\mathbb{V}^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes 2}$:

$$\mathbf{C} : \mathbf{T} = C_{ijkl} T_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$$

- Les tenseurs d'ordre 2 symétriques ($\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \Leftrightarrow T_{ij} = T_{ji}$) ont trois valeurs propres réelles (éventuellement non distinctes) et au moins un système de 3 directions propres orthogonales entre elles. On peut donc toujours trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice 3×3 des composantes est diagonale. Si λ_i est la valeur propre associée à la direction propre unitaire \mathbf{u}_i :

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

Les valeurs propres sont des scalaires (tenseurs d'ordre 0, invariants).

Remarque : Puisque les tenseurs d'ordre 4 sont des endomorphismes $\mathbb{V}^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes 2}$, leurs composantes peuvent être rangées dans une matrice 9×9 . S'ils ont la symétrie majeure ($C_{ikjm} = C_{kmij}$), cette matrice est symétrique.

Tout tenseur d'ordre 4 \mathbf{C} avec la symétrie majeure a donc 9 valeurs propres λ_r réelles et 9 tenseurs propres du second ordre \mathbf{U}_r ($\mathbf{C} : \mathbf{U}_r = \lambda_r \mathbf{U}_r$). Les tenseurs propres sont orthogonaux entre eux ($\mathbf{U}_r : \mathbf{U}_{r'} = 0$).

- Les tenseurs d'ordre 2 antisymétriques ($\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T \Leftrightarrow T_{ij} = -T_{ji}$) sont orthogonaux aux tenseurs symétriques. Si \mathbf{S} est symétrique et \mathbf{A} antisymétrique :

$$\mathbf{S} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{S} = A_{ij} S_{ij} = 0$$

- Les tenseurs d'ordre 2 peuvent être décomposés en une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$\mathbf{T} = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)}_{\text{sym}(\mathbf{T})} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)}_{\text{asym}(\mathbf{T})}$$

- Les tenseurs d'ordre 2 peuvent être décomposés en une somme d'un tenseur sphérique (de la forme $k\mathbf{G}$) et d'un tenseur déviatorique (c'est-à-dire de trace nulle) :

$$\mathbf{T} = \underbrace{\frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{3} \mathbf{G}}_{\text{sph}(\mathbf{T})} + \underbrace{\left(\mathbf{T} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{3} \mathbf{G} \right)}_{\text{dev}(\mathbf{T})}$$

A.2 Rappels d'analyse

- Le gradient d'un champ de tenseurs d'ordre p est un champ de tenseurs d'ordre $p + 1$.
Si \mathbf{v} est un vecteur et \mathbf{T} un tenseur d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \mathbf{grad} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{M} & \Leftrightarrow & & (\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij} &= \partial_j v_i = v_{i,j} \\ d\mathbf{T} &= \mathbf{grad} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{M} & \Leftrightarrow & & (\mathbf{grad} \mathbf{T})_{ijk} &= \partial_k T_{ij} = T_{ij,k} \end{aligned}$$

- La divergence d'un champ de tenseurs d'ordre p est un champ de tenseurs d'ordre $p - 1$ définie par $\mathbf{div} \mathbf{T} = \mathbf{grad} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{v} &= \mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{G} & \Leftrightarrow & & \mathbf{div} \mathbf{v} &= v_{i,i} \in \mathbb{R} \\ \mathbf{div} \mathbf{T} &= \mathbf{grad} \mathbf{T} : \mathbf{G} & \Leftrightarrow & & \mathbf{div} \mathbf{T} &= T_{i,j,j} \mathbf{e}_i \in \mathbb{V} \end{aligned}$$

– Le rotationnel d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs défini par :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rot} \mathbf{v} = -H_{ijk} v_{i,j} \mathbf{e}_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\mathbf{rot} \mathbf{v})_1 &= v_{3,2} - v_{2,3} \\ (\mathbf{rot} \mathbf{v})_2 &= v_{1,3} - v_{3,1} \\ (\mathbf{rot} \mathbf{v})_3 &= v_{2,1} - v_{1,2} \end{cases}$$

– Le laplacien d'un champ de tenseurs d'ordre p est un champ de tenseurs d'ordre p défini par $\Delta \mathbf{T} = \mathbf{div} \mathbf{grad} \mathbf{T}$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{div} \mathbf{grad} \mathbf{v} & \Leftrightarrow & \quad \Delta \mathbf{v} = v_{i,jj} \mathbf{e}_i \in \mathbb{V} \\ \Delta \mathbf{T} &= \mathbf{div} \mathbf{grad} \mathbf{T} & \Leftrightarrow & \quad \Delta \mathbf{T} = T_{ij,kk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \in \mathbb{V}^{\otimes 2} \end{aligned}$$

– Théorème de la divergence pour les tenseurs du second ordre : pour tout domaine \mathcal{D} simplement connexe :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{div} \mathbf{T} \, dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

A.3 Complément d'analyse

Dans le cours de MMC2 on a à considérer des applications $f : \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2} \rightarrow f(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}$ (*a priori* non linéaires) et on a besoin de connaître les variations de $f(\mathbf{T})$ quand son argument tensoriel du second ordre \mathbf{T} varie. On va construire ici une « dérivée généralisée » d'une fonction par rapport à un tenseur du second ordre².

On connaît déjà des applications $f : \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2} \rightarrow f(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}$:

– L'énergie de déformation par unité de volume en un point d'un milieu continu solide élastique linéaire isotrope où la petite déformation est $\boldsymbol{\epsilon}$ (λ et μ sont les coefficients de Lamé) est :

$$W_{def} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (2\mu \boldsymbol{\epsilon} + \lambda (\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})) \mathbf{G}) : \boldsymbol{\epsilon} = \mu \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\lambda}{2} (\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}))^2 = \mu \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}))^2$$

W_{def} est une fonction à valeur scalaire de l'argument tensoriel du second ordre $\boldsymbol{\epsilon}$.

– La puissance des efforts intérieurs par unité de volume en un point d'un milieu continu fluide newtonien où le tenseur des vitesses de déformation est \mathbf{D} (λ et μ sont des viscosités) est :

$$\mathcal{P}_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = [2\mu \mathbf{D} + (\lambda \text{Tr}(\mathbf{D}) - p) \mathbf{G}] : \mathbf{D} = 2\mu \|\mathbf{D}\|^2 + \lambda (\text{Tr}(\mathbf{D}))^2 - p \text{Tr}(\mathbf{D})$$

\mathcal{P}_{int} est une fonction à valeur scalaire de l'argument tensoriel du second ordre \mathbf{D} .

A.3.1 Définition

La description des variations d'un argument tensoriel est plus compliquée que pour les fonctions à variables réelles car les tenseurs du second ordre sont dans un espace de dimension 9, alors que \mathbb{R} est de dimension 1.

La dérivée en x d'une fonction $g : x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) \in \mathbb{R}$ est l'application g' (notée aussi $\frac{dg}{dx}$) définie par :

$$g' : x \in \mathbb{R} \longrightarrow g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

On ne peut pas généraliser cette définition pour x et h tensoriels car la division par un tenseur n'a aucun sens.

Soit l'application $f : \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2} \rightarrow f(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}$.

Une variation arbitraire de l'argument tensoriel du second ordre \mathbf{T} sera notée $d\mathbf{T}$. C'est un tenseur du second ordre, c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ de dimension 9, et donc caractérisé par 9 composantes arbitraires. À chaque variation arbitraire du « vecteur » $d\mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$ correspond une variation $f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T})$.

²On peut définir des « dérivées généralisées » par rapport à des tenseurs de tous ordres (y compris d'ordre 1) de la même manière, mais on se limite ici au seul cas le plus utile dans la suite.

On dit que l'application f est différentiable en \mathbf{T} s'il existe une *application linéaire* notée $\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)$ telle que :

$$\forall d\mathbf{T} \quad f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T}) = \underbrace{\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : d\mathbf{T}}_{df} + \|\mathbf{T}\| O(\mathbf{T}) \quad (\text{A.1})$$

où $O(\mathbf{T})$ est une fonction à valeur scalaire arbitraire qui tend vers 0 quand $\|\mathbf{T}\| \rightarrow 0$.

Les règles de l'algèbre tensorielle montrent que l'opérateur linéaire $\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)$ est un tenseur du second ordre.

Dans la pratique courante, $\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)$ est simplement noté $\frac{df}{d\mathbf{T}}$, mais il faut bien considérer cette « fraction » comme un symbole indissociable ! Il ne s'agit nullement d'une division et le produit doublement contracté « : » n'est pas une simple multiplication. Toute « simplification » par $d\mathbf{T}$ n'aurait aucun sens !

Le terme $df = \left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : d\mathbf{T}$ est appelé différentielle de f .

La « dérivée généralisée » de la fonction à valeur scalaire $f(\mathbf{T})$ « par rapport au tenseur du second ordre \mathbf{T} » est un *tenseur du second ordre*³ noté $\frac{df}{d\mathbf{T}}$. On devrait plutôt l'appeler opérateur linéaire tangent de l'application f .

Remarques sur le vocabulaire couramment employé :

Il est clair que quand $\|\mathbf{T}\| \rightarrow 0$, le reste $\|\mathbf{T}\| O(\mathbf{T})$ tend vers 0 plus vite que le terme $df = \left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : d\mathbf{T}$ qui est linéaire en $d\mathbf{T}$. Ainsi, quand $\|d\mathbf{T}\| \rightarrow 0$, la différentielle df s'approche de la variation exacte $f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T})$.

On devrait dire : la dérivée en \mathbf{T} de la fonction $f(\mathbf{T})$ est l'application $f' : \mathbb{V}^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f' : \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2} \longrightarrow f'(\mathbf{T}) = \lim_{\|d\mathbf{T}\| \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : d\mathbf{T} + \|\mathbf{T}\| O(\mathbf{T})}{\|d\mathbf{T}\|} = \left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : \frac{d\mathbf{T}}{\|d\mathbf{T}\|} \in \mathbb{R}$$

Le tenseur du second ordre $\frac{d\mathbf{T}}{\|d\mathbf{T}\|}$ (de norme 1) est une « direction unitaire » (dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$, espace vectoriel de dimension 9) dans laquelle on calcule la dérivée de f . Pour chacune de ces directions, la dérivée de f est *a priori* différente.

Le tenseur du second ordre $\frac{df}{d\mathbf{T}}$ n'est donc pas à proprement parler la dérivée de f , mais plutôt l'opérateur linéaire tangent qui permet de calculer la dérivée f' de f quand \mathbf{T} varie dans la « direction unitaire » $\frac{d\mathbf{T}}{\|d\mathbf{T}\|}$. Il est néanmoins couramment nommé « dérivée de f par rapport à \mathbf{T} ».

A.3.2 Calcul des composantes dans une base orthonormée

Si le tenseur du second ordre \mathbf{T} est défini par ses composantes T_{ij} dans une base orthonormée fixe $\{e_i\}$, on peut écrire : $\mathbf{T} = T_{ij} e_i \otimes e_j$. Une variation arbitraire $d\mathbf{T}$ est donc définie par 9 variations dT_{ij} arbitraires et indépendantes de chacune de ses composantes sur la base fixe :

$$d\mathbf{T} = dT_{ij} e_i \otimes e_j$$

À la fonction $f(\mathbf{T})$ et à la base $\{e_i\}$ choisie, on peut donc associer une fonction $\tilde{f}_{e_i} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(\mathbf{T}) = \tilde{f}_{e_i}(T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}, T_{33})$$

On a donc

$$df = \frac{df}{d\mathbf{T}} : d\mathbf{T} = \frac{\partial \tilde{f}_{e_i}}{\partial T_{ij}} dT_{ij}$$

On en déduit immédiatement par identification les composantes du tenseur $\frac{df}{d\mathbf{T}}$ dans la base orthonormée fixe :

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)_{ij} = \frac{\partial \tilde{f}_{e_i}}{\partial T_{ij}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df}{d\mathbf{T}} = \frac{\partial \tilde{f}_{e_i}}{\partial T_{ij}} e_i \otimes e_j$$

³On n'aura aucune difficulté à généraliser : si \mathbf{T} est d'ordre p , $\frac{df}{d\mathbf{T}}$ est d'ordre p et sa p -contraction avec $d\mathbf{T}$ donne le scalaire df . Notamment, si $p = 1$, $\frac{df}{d\mathbf{v}}$ est un vecteur.

A.3.3 Quelques résultats utiles

Le lecteur vérifiera sans difficulté les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{T} : \mathbf{U})}{d\mathbf{T}} &= \mathbf{U} & \frac{d(\overbrace{\mathbf{T} : \mathbf{T}}^{\|\mathbf{T}\|^2})}{d\mathbf{T}} &= 2\mathbf{T} & \frac{d\|\mathbf{T}\|}{d\mathbf{T}} &= \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} \\ \frac{d\text{Tr}(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}} &= \mathbf{G} & \frac{d\text{Tr}(\mathbf{T}^2)}{d\mathbf{T}} &= 2\mathbf{T}^T & \frac{d\text{Tr}(\mathbf{T}^n)}{d\mathbf{T}} &= n(\mathbf{T}^{n-1})^T \\ \frac{dT_I}{dT} &= \mathbf{G} & \frac{dT_{II}}{dT} &= T_I \mathbf{G} - \mathbf{T}^T & \frac{dT_{III}}{dT} &= T_{II} \mathbf{G} - T_I \mathbf{T}^T + \mathbf{T}^{2T} \end{aligned}$$

A.3.4 Dérivée « contrainte »

En mécanique des milieux continus, la plupart des tenseurs du second ordre sont des tenseurs symétriques restant symétriques dans leurs variations.

L'espace des tenseurs symétriques est un espace vectoriel de dimension 6 et le tenseur $d\mathbf{T}$ est un tenseur symétrique.

À la fonction $f(\mathbf{T})$, on pourrait associer une fonction $\tilde{f}_{e_i} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbf{T}) = \tilde{f}_{e_i}(T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{22}, T_{23}, T_{33})$ et on peut toujours écrire :

$$df = \frac{df}{d\mathbf{T}} : d\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{\partial \tilde{f}_{e_i}}{\partial T_{ij}} dT_{ij}$$

Mais le terme de droite n'est pas le développement d'un double produit contracté et l'identification des composantes de $\frac{df}{d\mathbf{T}}$ n'est plus possible !

D'autres « contraintes » sur les variations $d\mathbf{T}$ peuvent intervenir : les tenseurs doivent rester sphériques, déviatoriques, antisymétriques... À chaque fois la dimension de l'espace dans lequel $d\mathbf{T}$ arbitraire peut évoluer change.

Plutôt que d'établir une définition particulière de l'opérateur linéaire tangent pour chaque type de contrainte, on va utiliser un théorème qui nous permet « d'ignorer la contrainte » pendant la dérivation puis de la rétablir ensuite.

Théorème : Soit \tilde{f} une fonction de m variables réelles x_i ($i = 1, \dots, m$), certaines variables étant liées aux autres par r égalités de la forme $x_k = h_k(\dots, x_{p \neq k}, \dots)$. Alors,

$$d\tilde{f} = \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} dx_i \right]_{\{x_k = h_k(\dots, x_{p \neq k}, \dots); k=1, \dots, r\}}$$

Autrement dit, on peut dériver \tilde{f} comme si les x_i n'étaient pas liés, puis remplacer ensuite les x_k liés par leur expression après dérivation.

Démonstration : Pour alléger les écritures on suppose que \tilde{f} a 4 variables x_1, x_2, x_3, x_4 et qu'il n'y a qu'une seule « contrainte » : $x_1 = h_1(x_2, x_3)$.

On peut définir une fonction g de 3 variables indépendantes telle que $\tilde{f}(h_1(x_2, x_3), x_2, x_3, x_4) = g(x_2, x_3, x_4)$.

Pour une variation arbitraire (dx_2, dx_3, dx_4) satisfaisant les contraintes, on a évidemment $d\tilde{f} = dg$ et donc en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial g}{\partial x_3} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} \qquad \frac{\partial g}{\partial x_4} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4}$$

et donc

$$\begin{aligned} dg &= \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} \right) dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4 \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \underbrace{\left(\frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_3} dx_3 \right)}_{dh_1} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4 \end{aligned}$$

On peut donc calculer la différentielle sous contrainte en posant formellement :

$$d\tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4, \text{ puis remplacer ensuite } x_1 \text{ par } h_1(x_2, x_3) \blacksquare$$

Les résultats présentés en A.3.3 page 59 sont donc encore valables, en appliquant les « contraintes » sur les termes de droite⁴.

Exemple :

Soit $f(\mathbf{S})$ une fonction à valeur réelle dont l'argument tensoriel du second ordre \mathbf{S} est symétrique et reste symétrique dans ses variations.

Si on choisit une base $\{e_i\}$, on peut lui associer la fonction $\tilde{f}_{e_i} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(\mathbf{S}) = \tilde{f}_{e_i}(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{31}, S_{32}, S_{33})$$

Les composantes de l'opérateur linéaire tangent (la « dérivée par rapport à \mathbf{S} ») $\frac{df}{d\mathbf{S}}$ sont :

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{S}}\right)_{ij} = \left[\frac{\partial \tilde{f}_{e_i}}{\partial S_{ij}} \right]_{\{S_{21}=S_{12}, S_{23}=S_{32}, S_{13}=S_{31}\}}$$

Par exemple si $f(\mathbf{S}) = k \mathbf{S} : \mathbf{S}$, et $\tilde{f}_{e_i} = S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2 = S_{pq}S_{pq}$

$$\left(\frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{d\mathbf{S}}\right)_{11} = 2S_{11} \quad \left(\frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{d\mathbf{S}}\right)_{12} = 2S_{12} \quad \left(\frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{d\mathbf{S}}\right)_{21} = 2S_{21} = 2S_{12} \quad \dots$$

On retrouve la formule générale donnée précédemment pour un tenseur non symétrique : $\frac{d(\mathbf{T} : \mathbf{T})}{d\mathbf{T}} = 2\mathbf{T}$, qui est donc toujours valable avec la « contrainte » \mathbf{T} symétrique.

On peut aussi bien faire le calcul en indices pour avoir toutes les composantes :

$$\left(\frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{d\mathbf{S}}\right)_{ij} = \frac{d(S_{pq}S_{pq})}{dS_{ij}} = \frac{dS_{pq}}{dS_{ij}} S_{pq} + S_{pq} \frac{dS_{pq}}{dS_{ij}} = \delta_{ip} \delta_{jq} S_{pq} + S_{pq} \delta_{ip} \delta_{jq} = S_{ij} + S_{ij} = 2S_{ij}$$

A.3.5 Fonctions réelles de plusieurs tenseurs

En mécanique, il arrive souvent que des fonctions à valeur scalaire soient à plusieurs arguments tensoriels.

On définit dans difficulté les « dérivées partielles par rapport aux arguments tensoriels » comme la « dérivée » de f par rapport à chacun des arguments, les autres étant considérés comme constants.

Par exemple si $f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}$ où \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont d'ordre 2, la notation $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}}$ est un tenseur (du même ordre que \mathbf{P}) qui est la « dérivée de f par rapport à \mathbf{P} » à \mathbf{Q} constant. De même pour $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}}$.

Pour toute variation arbitraire des arguments tensoriels (liés ou non par une « contrainte »), la différentielle est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} : d\mathbf{P} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}} : d\mathbf{Q}$$

Autre exemple utile : $f(\mathbf{T}, \mathbf{v})$ où \mathbf{T} est d'ordre 2 et \mathbf{v} un vecteur ($\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ est d'ordre 1) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} : d\mathbf{P} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot d\mathbf{v}$$

⁴Les tenseurs symétriques sont tels que $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$, les tenseurs déviatoriques sont tels que $T_I = 0$, les tenseurs sphériques sont tels que $\mathbf{T} = k \mathbf{G}$; $T_I = 3k$; $T_{II} = k$; $T_{III} = k$, etc

Annexe B

Formulaire

On donne ici (sans démonstration ¹) les expressions des opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien dans deux systèmes de coordonnées classiques : les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

B.1 Système de coordonnées cylindriques

B.1.1 Définition et notations

Un point M de l'espace est repéré par les 3 réels r , θ et z définis sur la Figure B.1.

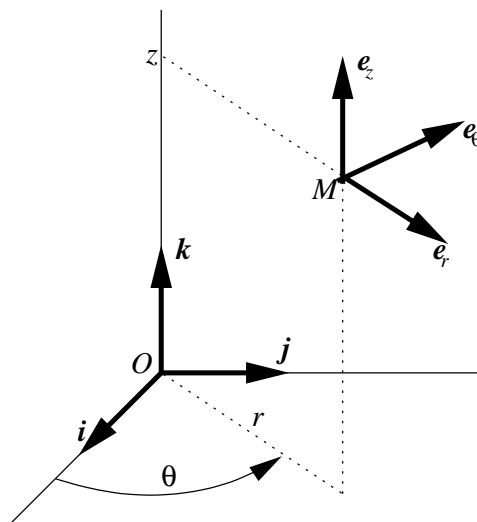


FIG. B.1 – Système de coordonnées cylindriques

À chaque point M on associe une base locale orthonormée $\{e_r, e_\theta, e_z\}$ définie par :

$$e_r = \partial_r OM = \cos \theta i + \sin \theta j \quad e_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta OM = -\sin \theta i + \cos \theta j = \mathbf{k} \wedge e_r \quad e_z = \partial_z OM = \mathbf{k}$$

¹ Elles ont été établies avec la bibliothèque `tens3d` destinée à faciliter le calcul tensoriel sur le logiciel de calcul formel Maple®. Cette bibliothèque est librement téléchargeable sur <http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/tens3d.html>

Le point courant M est défini par :

$$OM = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{k}$$

Sur la base locale en M , on a

$$dM = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z$$

B.1.2 Champs scalaires

Soit f un champ scalaire :

$$f : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow f(M) = f(r, \theta, z) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \partial_r f \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta f \mathbf{e}_\theta + \partial_z f \mathbf{e}_z \\ \Delta f &= \partial_{rr} f + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} f + \frac{1}{r} \partial_r f + \partial_{zz} f \\ &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} f + \partial_{zz} f \end{aligned}$$

B.1.3 Champs vectoriels

Soit \mathbf{v} un champ vectoriel :

$$\mathbf{v} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{v}(M) = v_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + v_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} [(\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij}] &= \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_r - v_\theta) & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r} \partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= \partial_r v_r + \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) + \partial_z v_z \\ \mathbf{rot} \mathbf{v} &= \left(\frac{1}{r} \partial_\theta v_z - \partial_z v_\theta \right) \mathbf{e}_r + (\partial_z v_r - \partial_r v_z) \mathbf{e}_\theta + \left(\partial_r v_\theta - \frac{1}{r} (\partial_\theta v_r - v_\theta) \right) \mathbf{e}_z \\ \Delta \mathbf{v} &= \left(\partial_{rr} v_r + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta - v_r) + \frac{1}{r} \partial_r v_r + \partial_{zz} v_r \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left(\partial_{rr} v_\theta + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r - v_\theta) + \frac{1}{r} \partial_r v_\theta + \partial_{zz} v_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(\partial_{rr} v_z + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \frac{1}{r} \partial_r v_z + \partial_{zz} v_z \right) \mathbf{e}_z \\ &= \left(\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta) + \partial_{zz} v_r \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left(\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r) + \partial_{zz} v_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v_z) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \partial_{zz} v_z \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

B.1.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques

Soit T un champ tensoriel du second ordre *symétrique* :

$$T : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow T(M) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$$

Les composantes de T dans la base $\{e_r, e_\theta, e_z\}$ sont :

$$\begin{bmatrix} T_{rr}(r, \theta, z) & T_{r\theta}(r, \theta, z) & T_{rz}(r, \theta, z) \\ T_{r\theta}(r, \theta, z) & T_{\theta\theta}(r, \theta, z) & T_{\theta z}(r, \theta, z) \\ T_{rz}(r, \theta, z) & T_{\theta z}(r, \theta, z) & T_{zz}(r, \theta, z) \end{bmatrix}_{\{e_r, e_\theta, e_z\}} \quad (\text{matrice symétrique})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} T &= \left(\partial_r T_{rr} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{r\theta} + T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \partial_z T_{rz} \right) e_r \\ &+ \left(\partial_r T_{r\theta} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta\theta} + 2T_{r\theta}) + \partial_z T_{\theta z} \right) e_\theta \\ &+ \left(\partial_r T_{rz} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta z} + T_{rz}) + \partial_z T_{zz} \right) e_z \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} T = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) - \partial_z T_{r\theta} & \partial_z T_{rr} - \partial_r T_{rz} & \partial_r T_{r\theta} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rr} - 2T_{r\theta}) \\ \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta z} + T_{rz}) - \partial_z T_{\theta\theta} & \partial_z T_{r\theta} - \partial_r T_{\theta z} & \partial_r T_{\theta\theta} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{r\theta} + T_{rr} - T_{\theta\theta}) \\ \frac{1}{r} \partial_\theta T_{zz} - \partial_z T_{\theta z} & \partial_z T_{rz} - \partial_r T_{zz} & \partial_r T_{\theta z} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) \end{bmatrix}_{\{e_r, e_\theta, e_z\}}$$

$$\begin{aligned} (\Delta T)_{rr} &= \partial_{rr} T_{rr} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{rr} - 4\partial_\theta T_{r\theta} - 2T_{rr} + 2T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{rr} + \partial_{zz} T_{rr} \\ (\Delta T)_{r\theta} &= (\Delta T)_{\theta r} = \partial_{rr} T_{r\theta} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{r\theta} + 2\partial_\theta T_{rr} - 2\partial_\theta T_{\theta\theta} - 4T_{r\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{r\theta} + \partial_{zz} T_{r\theta} \\ (\Delta T)_{rz} &= (\Delta T)_{zr} = \partial_{rr} T_{rz} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{rz} - 2\partial_\theta T_{\theta z} - T_{rz}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{rz} + \partial_{zz} T_{rz} \\ (\Delta T)_{\theta\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{\theta\theta} + 4\partial_\theta T_{r\theta} + 2T_{rr} - 2T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{\theta\theta} + \partial_{zz} T_{\theta\theta} \\ (\Delta T)_{\theta z} &= (\Delta T)_{z\theta} = \partial_{rr} T_{\theta z} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{\theta z} + 2\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{\theta z} + \partial_{zz} T_{\theta z} \\ (\Delta T)_{zz} &= \partial_{rr} T_{zz} + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} T_{zz} + \frac{1}{r} \partial_r T_{zz} + \partial_{zz} T_{zz} \end{aligned}$$

B.2 Système de coordonnées sphériques

NOTE IMPORTANTE : Dans la littérature scientifique, il existe deux versions du système de coordonnées sphérique.

Dans celle présentée ici, l'angle φ est mesuré à partir du plan (e_1, e_2) . On pourrait les appeler « coordonnées géographiques » (θ est la longitude, φ est la latitude, le plan (e_1, e_2) est le plan équatorial). Le trièdre $\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}$ est direct.

Dans l'autre version l'angle φ est mesuré sur le méridien de M à partir du pôle Nord. On a donc :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{et} \quad e_\phi = -e_\varphi$$

On convertit aisément les formules avec :

$$\cos \varphi \rightarrow \sin \phi \quad \text{et} \quad \sin \varphi \rightarrow \cos \phi$$

B.2.1 Définition et notations

Un point M de l'espace est repéré par 3 réels r , θ et φ définis sur la figure B.2.

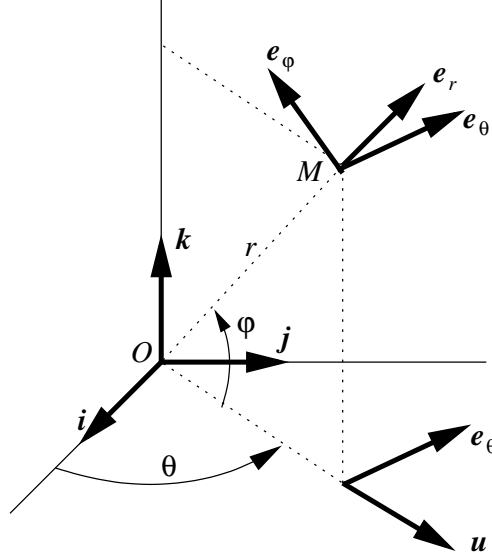


FIG. B.2 – Système de coordonnées sphériques

À chaque point M on associe une base locale orthonormée $\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}$ définie par :

$$\begin{aligned} e_r &= \partial_r OM = \cos \varphi u + \sin \varphi k = \cos \theta \cos \varphi i + \sin \theta \cos \varphi j + \sin \varphi k \\ e_\theta &= \frac{\partial_\theta OM}{r \cos \varphi} = -\sin \theta i + \cos \theta j \\ e_\varphi &= \frac{\partial_\varphi OM}{r} = -\sin \varphi u + \cos \varphi k = -\cos \theta \sin \varphi i + \sin \theta \cos \varphi j + \sin \varphi k \end{aligned}$$

Le point courant est :

$$OM = r \cos \varphi \cos \theta i + r \cos \varphi \sin \theta j + r \sin \varphi k = r e_r$$

Sur la base locale en M , on a :

$$dM = dr e_r + r de_r = dr e_r + r \cos \varphi d\theta e_\theta + r d\varphi e_\varphi$$

B.2.2 Champs scalaires

Soit f un champ scalaire :

$$f : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow f(M) = f(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \partial_r f e_r + \frac{\partial_\theta f}{r \cos \varphi} e_\theta + \frac{\partial_\varphi f}{r} e_\varphi \\ \Delta f &= \partial_{rr} f + \frac{\partial_{\theta\theta} f - \sin \varphi \partial_\varphi f}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{2 \partial_r f}{r} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} f}{r^2} \end{aligned}$$

B.2.3 Champs vectoriels

Soit v un champ vectoriel :

$$v : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow v(M) = v_r(r, \theta, \varphi) e_r + v_\theta(r, \theta, \varphi) e_\theta + v_\varphi(r, \theta, \varphi) e_\varphi \in \mathbb{V}_3$$

$$[(\mathbf{grad} v)_{ij}] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r \cos \varphi} \partial_\theta v_r - \frac{1}{r} v_\theta & \frac{1}{r} (\partial_\varphi v_r - v_\varphi) \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r \cos \varphi} (\partial_\theta v_\theta - \sin \varphi v_\varphi) + \frac{1}{r} v_r & \frac{1}{r} \partial_\varphi v_\theta \\ \partial_r v_\varphi & \frac{1}{r \cos \varphi} (\partial_\theta v_\varphi + \sin \varphi v_\theta) & \frac{1}{r} (\partial_\varphi v_\varphi + v_r) \end{bmatrix}_{\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}}$$

$$\operatorname{div} v = \partial_r v_r + \frac{\partial_\theta v_\theta - \sin \varphi v_\varphi}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi v_\varphi + 2 v_r}{r}$$

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial_\theta v_\varphi + \sin \varphi v_\theta}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi v_\theta}{r} \right) e_r + \left(\frac{\partial_\varphi v_r - v_\varphi}{r} - \partial_r v_\varphi \right) e_\theta + \left(\partial_r v_\theta - \frac{\partial_\theta v_r}{r \cos \varphi} + \frac{v_\theta}{r} \right) e_\varphi$$

$$\Delta v = \left(\partial_{rr} v_r + \frac{\partial_{\theta\theta} v_r}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_\varphi v_\varphi - 2 \partial_\theta v_\varphi - 2 v_r}{r^2} + \frac{2 \sin \varphi v_\theta - 2 \partial_\theta v_\theta - \sin \varphi \partial_\varphi v_r}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_r}{r} \right) e_r$$

$$+ \left(\partial_{rr} v_\theta + \frac{\partial_{\theta\theta} v_\theta - 2 \sin \varphi \partial_\theta v_\varphi - v_\theta}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_\varphi v_\theta}{r^2} + \frac{2 \partial_\theta v_r - \sin \varphi \partial_\varphi v_\theta}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_\theta}{r} \right) e_\theta$$

$$+ \left(\partial_{rr} v_\varphi + \frac{\partial_{\theta\theta} v_\varphi + 2 \sin \varphi \partial_\theta v_\theta - v_\varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_\varphi v_\varphi + 2 \partial_\theta v_r}{r^2} - \frac{\sin \varphi \partial_\varphi v_\theta}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_\varphi}{r} \right) e_\varphi$$

B.2.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques

Soit T un champ tensoriel du second ordre *symétrique* :

$$T : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow T(M) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$$

Les composantes de T dans la base $\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}$ sont :

$$\begin{bmatrix} T_{rr}(r, \theta, \varphi) & T_{r\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) \\ T_{r\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) \\ T_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) & T_{\varphi\varphi}(r, \theta, \varphi) \end{bmatrix}_{\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}} \quad (\text{matrice symétrique})$$

$$\operatorname{div} T = \left(\partial_r T_{rr} + \frac{\partial_\theta T_{r\theta} - \sin \varphi T_{r\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{r\varphi} + 2 T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}}{r} \right) e_r$$

$$+ \left(\partial_r T_{r\theta} + \frac{\partial_\theta T_{\theta\theta} - 2 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + 3 T_{r\theta}}{r} \right) e_\theta$$

$$+ \left(\partial_r T_{r\varphi} + \frac{\partial_\theta T_{\theta\varphi} + \sin \varphi T_{\theta\theta} - \sin \varphi T_{\varphi\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{\varphi\varphi} + 3 T_{r\varphi}}{r} \right) e_\varphi$$

$$\operatorname{rot} T = \begin{bmatrix} \frac{\partial_\theta T_{r\varphi} + \sin \varphi T_{r\theta}}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{r\theta}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{rr} - 2 T_{r\varphi}}{r} - \partial_r T_{r\varphi} & \partial_r T_{r\theta} - \frac{\partial_\theta T_{rr}}{r \cos \varphi} + \frac{2 T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial_\theta T_{\theta\varphi} + \sin \varphi (T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{\theta\theta} - T_{r\varphi}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{r\theta} - T_{\theta\varphi}}{r} - \partial_r T_{\theta\varphi} & \partial_r T_{\theta\theta} - \frac{\partial_\theta T_{r\theta} - \sin \varphi T_{r\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{T_{\theta\theta} - T_{rr}}{r} \\ \frac{\partial_\theta T_{\varphi\varphi} + 2 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + T_{r\theta}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{r\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} - \partial_r T_{\varphi\varphi} & \partial_r T_{\theta\varphi} - \frac{\partial_\theta T_{r\varphi} + \sin \varphi T_{r\theta}}{r \cos \varphi} + \frac{T_{\theta\varphi}}{r} \end{bmatrix}_{\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta T)_{rr} &= \partial_{rr} T_{rr} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{rr}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{rr} - 4 \partial_{\varphi} T_{r\varphi} - 4 T_{rr} + 2 T_{\theta\theta}}{r^2} \\
 &\quad + \frac{\sin \varphi \partial_{\varphi} T_{rr} + 4 \sin \varphi T_{r\varphi} - 4 \partial_{\theta} T_{r\theta}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{rr}}{r} \\
 (\Delta T)_{r\theta} = (\Delta T)_{\theta r} &= \partial_{rr} T_{r\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{r\theta} - 2 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{r\varphi} - T_{r\theta}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{r\theta} - 2 \partial_{\varphi} T_{\theta\varphi} - 4 T_{r\theta}}{r^2} \\
 &\quad + \frac{2 \partial_{\theta} T_{rr} - 2 \partial_{\theta} T_{\theta\theta} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{r\theta} + 4 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{r\theta}}{r} \\
 (\Delta T)_{r\varphi} = (\Delta T)_{\varphi r} &= \partial_{rr} T_{r\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{r\varphi} + 2 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{r\theta} - T_{r\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{r\varphi} + 2 \partial_{\varphi} T_{rr} - 2 \partial_{\varphi} T_{\varphi\varphi} - 4 T_{r\varphi}}{r^2} \\
 &\quad + \frac{-2 \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{r\varphi} - 2 \sin \varphi T_{\theta\theta} + 2 \sin \varphi T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{r\varphi}}{r} \\
 (\Delta T)_{\theta\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\theta\theta} - 4 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} - 2 T_{\theta\theta} + 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\theta\theta} + 2 T_{rr} - 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2} \\
 &\quad + \frac{4 \partial_{\theta} T_{r\theta} + \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\theta\theta} - 4 \sin \varphi T_{r\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\theta\theta}}{r} \\
 (\Delta T)_{\theta\varphi} = (\Delta T)_{\varphi\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\theta\varphi} + 2 \partial_{\theta} T_{\theta\theta} - 2 \partial_{\theta} T_{\varphi\varphi} - 4 T_{\theta\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\theta\varphi} + 2 \partial_{\varphi} T_{r\theta} + 2 T_{\theta\varphi}}{r^2} \\
 &\quad + \frac{2 \partial_{\theta} T_{r\varphi} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\theta\varphi} + 2 \sin \varphi T_{r\theta}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\theta\varphi}}{r} \\
 (\Delta T)_{\varphi\varphi} &= \partial_{rr} T_{\varphi\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\varphi\varphi} + 4 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} + 2 T_{\theta\theta} - 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} \\
 &\quad + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\varphi\varphi} + 4 \partial_{\varphi} T_{r\varphi} + 2 T_{rr} - 2 T_{\theta\theta}}{r^2} - \frac{\sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\varphi\varphi}}{r}
 \end{aligned}$$

Table des matières

1	Rappels de mécanique milieux continus	5
1.1	Descriptions du mouvement	5
1.1.1	Description de Lagrange des champs	5
1.1.2	Description d'Euler des champs	6
1.2	Tenseurs de déformations	6
1.3	Vitesse de déformations	7
1.4	Principe de la conservation de la masse	7
1.5	Principe fondamental de la mécanique	8
1.5.1	Tenseur des contraintes	8
1.5.2	Théorèmes généraux	8
1.6	Premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie)	9
1.7	Second principe de la thermodynamique	10
1.7.1	Formes globales et locales	10
1.7.2	Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique (loi de conduction thermique)	11
1.7.3	Chaleur massique locale dans une évolution	11
1.8	Le problème de la mécanique des milieux continus	12
2	Construction du modèle « gaz parfait »	13
2.1	Variables d'état	13
2.2	Conséquences du second principe de la thermodynamique	13
2.2.1	Conséquences de $\Phi_{th} \geq 0$	14
2.2.2	Conséquences de $\Phi_{int} \geq 0$	14
2.3	Choix d'un modèle de comportement mécanique : les fluides newtoniens	15
2.4	Choix des fonctions d'état f_e et f_s : les gaz parfaits	16
3	Éléments de thermodynamique des milieux continus solides	19
3.1	Système thermodynamique	20
3.2	Variables d'état thermodynamique	20
3.3	Potentiel et fonctions d'état thermodynamique	21
3.4	Premier principe de la thermodynamique	22
3.5	Second principe de la thermodynamique et inégalité de Clausius-Duhem	22
3.6	Hypothèses supplémentaires ; dissipations thermique et intrinsèque ; modèles de compor- tement thermique et mécanique	23
4	Thermoélasticité et élasticité linéaires	33
4.1	Thermoélasticité linéaire isotrope	33
4.2	Élasticité linéaire	34
5	Viscoélasticités linéaires	39
5.1	Viscoélasticité linéaire sans variable interne	39

5.2	Viscoélasticité linéaire avec variable interne	40
6	Élastoviscoplasticité et élastoplasticité	45
6.1	Principales caractéristiques de l'élasto(visco)pasticité	45
6.2	Élasto(visco)pasticité avec écrouissage cinématique linéaire	48
A	Tenseurs Euclidiens dans \mathcal{E}_3	55
A.1	Rappels d'algèbre	55
A.2	Rappels d'analyse	56
A.3	Complément d'analyse	57
A.3.1	Définition	57
A.3.2	Calcul des composantes dans une base orthonormée	58
A.3.3	Quelques résultats utiles	59
A.3.4	Dérivée « contrainte »	59
A.3.5	Fonctions réelles de plusieurs tenseurs	60
B	Formulaire	61
B.1	Système de coordonnées cylindriques	61
B.1.1	Définition et notations	61
B.1.2	Champs scalaires	62
B.1.3	Champs vectoriels	62
B.1.4	Champs tensoriels du second ordre symétriques	63
B.2	Système de coordonnées sphériques	63
B.2.1	Définition et notations	64
B.2.2	Champs scalaires	64
B.2.3	Champs vectoriels	65
B.2.4	Champs tensoriels du second ordre symétriques	65