Analyse des representations unitaires d'un groupe de Lie exponentiel

Hidenori Fujiwara

Analyse des représentations unitaires d'un groupe de Lie exponentiel

Hidenori Fujiwara
Université de Kinki, Japon

CIMPA, le 29 août - le 10 septembre 2005,
Monastir (Tunisie)

§0. Introduction

La théorie des représentations se traite assez différemment entre les groupes de Lie semi-simples et les groupes de Lie résolubles. La structure algébrique des groupes semi-simples est tellement riche qu'elle nous fournit des résultats abondants, ce dont en restant spectateur j'ai l'impression tout à fait personnelle que le groupe simple n'est pas une bonne nomination. D'autre part, en travaillant pour les groupes de Lie résolubles, leur structure est incompréhensible et la plupart de questions que je me pose restent non-résolubles. Il est pourtant incontestable que la méthode des orbites est une méthode fructreuse dans la théorie des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles. L'idée innovatrice de Kirillov d'associer à une représentation unitaire irréductible une orbite coadjointe paraît faire étalage de ses beaux fruits. C'est la belle adaptation de la théorie de Mackey aux groupes de Lie résolubles. Une fois ce cadre est appliqué, on peut étudier la formule de caractère ou la formule de Plancherel en termes des orbites coadjointes, objets algébriques et géométriques. Le but de ce cours est d'expliquer sommairement l'état actuel de certains sujets autour de la méthode des orbites. Des matières seront traitées pour les groupes exponentiels et parfois détaillées dans le cas nilpotent.

§1. Méthode des orbites

1.1. Représentations induites

Commençons par définir la représentation induite et en notons certaines propriétés dont on aura besoin plus loin. Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et H un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On note Δ_G (resp. Δ_H) la fonction module de G (resp. H) et pose

$$\chi(h) = \Delta_{H,G}(h) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$$

pour tout $h \in H$. Comme

$$\Delta_G(g) = |\det \mathrm{Ad}(g)|^{-1} \ (g \in G),$$

on a

$$\chi(\exp X) = e^{\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \mathrm{ad} X} (X \in \mathfrak{h}).$$

Désignons par $\mathcal{K}(G,H)$ l'espace des fonctions continues ϕ sur G, à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant les relations de covariance

$$\phi(gh) = \chi(h)\phi(g) \ (g \in G, h \in H),$$

et dont le support est compact modulo H. Alors G opère dans $\mathcal{K}(G,H)$ par translation à gauche, et il existe à un scalaire multiplicatif près une forme linéaire positive G-invariante sur $\mathcal{K}(G,H)$. Nous la notons $\mu_{G,H}$ et nous écrivons, pour $\phi \in \mathcal{K}(G,H)$,

$$\mu_{G,H}(\phi) = \oint_{G/H} \phi(g) d\mu_{G,H}(g).$$

En effet, soit $\mathcal{K}(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G. L'application $F \mapsto F^{\chi}$ de $\mathcal{K}(G)$ dans $\mathcal{K}(G,H)$ définie par

$$F^{\chi}(g) = \int_H F(gh)\chi(h)^{-1} d\mu_H(h),$$

μ_H étant une mesure de Haar à gauche sur H, s'avère surjective. D'autre part, si $F \in \mathcal{K}(G)$ vérifie $F^{\chi} = 0$, alors $\mu_G(F) = 0$. La mesure de Haar à gauche μ_G fournit donc $\mu_{G,H}$ par passage au quotient. D'où,

$$\int_G F(g) d\mu_G(g) = \oint_{G/H} d\mu_{G,H}(g) \int_H F(gh)\chi^{-1}(h) d\mu_H(h)$$

pour tout $F \in \mathcal{K}(G)$.

On se donne maintenant une représentation unitaire σ de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\sigma$. Nous désignons par $\mathcal{K}(G,\sigma)$ l'espace des fonctions continues F sur G à valeurs dans $\mathcal{H}_\sigma$ vérifiant les relations de covariance

$$F(gh) = \chi(h)^{1/2}\sigma(h)^{-1}\left(F(g)\right) \ (g \in G, h \in H),$$

et dont le support est compact modulo H. Puisque

$$\|F(gh)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} = \chi(h)\|F(g)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma},$$

la fonction

$$\|F\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} : g \mapsto \|F(g)\|^2_{\mathcal{H}_\sigma}$$

appartient à l'espace $\mathcal{K}(G,H)$. Nous munissons $\mathcal{K}(G,\sigma)$ de la norme

$$\|F\| = \left(\mu_{G,H}(\|F\|_{\mathcal{H}^2_\sigma}\right)^{1/2},$$

et le complétons avec cette norme pour obtenir un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Il est bien connu que $\mathcal{H} \neq \{0\}$, et G opère dans $\mathcal{H}$ par translation à gauche. C'est une réalisation de la représentation induite $\pi = \mathrm{ind}_H^G \sigma$, i.e.

$$\left(\pi(g)F\right)(x) = F(g^{-1}x) \ (g, x \in G, F \in \mathcal{H}).$$

Ce procédé est fréquemment utilisé pour construire des représentations unitaires à partir d'une celle d'un sous-groupe. En particulier une représentation unitaire de G induite par un caractère unitaire d'un sous-groupe fermé est dite monomiale. On dit que G est monomial si toute les représentations unitaires irréductibles sont équivalentes à une représentation monomiale. Il est connu ([14], [71]) que les groupes exponentiels qu'on va introduire plus loin sont monomials mais ce n'est plus vrai pour les groupes de Lie résolubles.

On aura besoin d'une propriété de représentations induites connue sous le nom de "théorème d'induction par étages". La relation d'équivalence est présentée par le symbole $\simeq$.

Théorème 1.1.1. ([15]) Soient G un groupe topologique locallement compact, H_1, H_2 deux sous-groupes fermés de G tels que $H_1 \subset H_2$, et U une représentation unitaire de H_1. Alors

$$\operatorname{ind}_{H_1}^G U \simeq \operatorname{ind}_{H_2}^G \left(\operatorname{ind}_{H_1}^{H_2} U\right).$$

Le théorème d'imprimitivité de Mackey [64] est de haute importance pour la théorie des représentations unitaires d'un groupe de Lie résoluble. On suppose que G est séparable et considère uniquement des représentations unitaires dans des espaces de Hilbert séparables. Soient A un sous-groupe fermé commutatif de G. G opère dans $\hat{A}$, l'ensemble des caractères unitaires de A : pour $g \in G, \chi \in \hat{A}$, posons $(g \cdot \chi)(a) = \chi(g^{-1}ag)$ $(a \in A)$.

Théorème 1.1.2. (1) Soit $G(\chi)$ le stabilisateur de $\chi \in \hat{A}$ dans G.

(i) Soit ρ une représentation unitaire irréductible de $G(\chi)$ telle que $\rho|_A$ soit un multiple de χ, i.e. $\rho|_A = m\chi$ avec un certain $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors $\operatorname{ind}_{G(\chi)}^G \rho$ est irréductible.

(ii) Soient ρ_1, ρ_2 deux représentations unitaires irréductibles de $G(\chi)$ telles que $\rho_1|_A, \rho_2|_A$ soient des multiples de χ. Alors $\rho_1 \simeq \rho_2$ si et seulement si $\operatorname{ind}_{G(\chi)}^G \rho_1 \simeq \operatorname{ind}_{G(\chi)}^G \rho_2$.

(2) Supposons que pour tout $\chi \in \hat{A}$ l'orbite $G \cdot \chi$ est localement fermé dans $\hat{A}$. Alors pour une représentation unitaire irréductible π de G, on a $\pi \simeq \operatorname{ind}_{G(\chi)}^G \rho$ avec une certaine représentation unitaire irréductible ρ de $G(\chi)$ telle que $\rho|_A$ soit un multiple de χ.

Nous finissons cette section par une propriété de transitivité pour la forme $\mu_{G,H}$ (cf. [14], Chap. V). On considère un sous-groupe fermé K de H, muni d'une mesure de Haar à gauche μ_K. Posons $\eta = \Delta_{K,G}$. Pour tout $\psi \in \mathcal{K}^\eta(G)$ et tout $g \in G$, la fonction $h \mapsto \psi(gh)\Delta_{H,G}(h)^{-1}$ appartient à $\mathcal{K}^{\Delta_{K,H}}(H)$. Nous pouvons donc définir la fonction

$$g \mapsto \oint_{H/K} \psi(gh)\Delta_{H,G}^{-1}(h) d\mu_{H,K}(h).$$

C'est un élément de $\mathcal{K}^\chi(G)$. En revenant à la définition des formes linéaires $\mu_{G,H}, \mu_{G,K}$ et $\mu_{H,K}$, nous prouvons la forme suivante :

$$\oint_{G/K} \psi d\mu_{G,K} = \oint_{G/H} d\mu_{G,H}(g) \oint_{H/K} \psi(gh)\chi(h)^{-1} d\mu_{H,K}(h)$$

pour tout $\psi \in \mathcal{K}^\eta(G)$.

1.2. Théorie d'Auslander-Kostant

Auslander-Kostant [3] a développé leur théorie pour les groupes de Lie résolubles de type I, en étendant la méthode des orbites. Définissons d'abord des ingrédients de la théorie. Soit $\mathfrak{g}^*$ le dual de l'espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. G opère dans $\mathfrak{g}$ au moyen de l'action adjointe et dans $\mathfrak{g}^*$ au moyen de la représentation contragrédiente :

$$(g\Delta f)(X) = \left(\operatorname{Ad}^*(g)\Delta f\right)(X) = f(\operatorname{Ad}(g^{-1})X) \ (g \in G, f \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}).$$

La représentation de G ainsi définie est désignée sous le nom de représentation coadjointe de G. Soit $G(f)$ le stabilisateur de $f \in \mathfrak{g}^*$ dans G. L'algèbre de Lie de $G(f)$ est donc

$$\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}; f([X,Y]) = 0, \forall\, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Définissons la forme bilinéaire alternée B_f sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par $B_f(X,Y) = f([X,Y])$. Pour un sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$, on note $f|_{\mathfrak{a}}$ la restriction de f à $\mathfrak{a}$ et pose

$$\mathfrak{a}^{\perp,\mathfrak{g}^*} = \{f \in \mathfrak{g}^*, f|_{\mathfrak{a}} = 0\},$$

$$\mathfrak{a}^f = \{X \in \mathfrak{g}; B_f(X,Y) = 0, \forall\, Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Si cela ne prête pas à confusion, nous écrivons simplement $\mathfrak{a}^{\perp}$ au lieu de $\mathfrak{a}^{\perp,\mathfrak{g}^*}$. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^f$, $\mathfrak{a}$ est dit isotrope (pour la forme B_f). Il vient que : $\mathfrak{a}$ est un sous-espace isotrope maximal $\Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^f \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^f$ et $\dim \mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f))$. On notera $S(f,\mathfrak{g})$ (resp. $M(f,\mathfrak{g})$) l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^f$ (resp. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^f$).

Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $\mathfrak{g}$. On étend par linéarité f, B_f sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Définition 1.2.1. Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On dira que $\mathfrak{p}$ est une polarisation de G en $f \in \mathfrak{g}^*$, si $\mathfrak{p}$ vérifie les conditions suivantes :

1) le sous-espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{p}$ est isotrope maximal pour la forme B_f ;
2) $\mathfrak{p} + \overline{\mathfrak{p}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$;
3) $\mathfrak{p}$ est stable sous l'action $\mathrm{Ad}G(f)$.

Quand on dit que $\mathfrak{p}$ est une polarisation de $\mathfrak{g}$, on signifie que $\mathfrak{p}$ est une polarisation du groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant à $\mathfrak{g}$. On note $P(f,G)$ l'ensemble des polarisations de G en $f \in \mathfrak{g}^*$.

Définition 1.2.2. Étant donné $\mathfrak{p} \in P(f,G)$, on considère les sous-algèbres réelles $\mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ de $\mathfrak{g}$ définies par

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g},\ \ \mathfrak{e} = (\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}) \cap \mathfrak{g}.$$

On voit facilement que $\mathfrak{d}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p} \cap \bar{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{e}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}$, et que $\mathfrak{d} = \mathfrak{e}^f$. Il en résulte que B_f induit une forme bilinéaire non dégénérée $\hat{B}_f$ sur l'espace vectoriel $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$. Par ailleurs,

$$(\mathfrak{e}/\mathfrak{d})_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{e}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}})\,/\mathfrak{p} \cap \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}} \oplus \bar{\mathfrak{p}}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}.$$

Définition 1.2.3. On définit l'opérateur linéaire J sur $(\mathfrak{e}/\mathfrak{d})_{\mathbb{C}}$ comme suit : $J(X) = -iX, i = \sqrt{-1}$, si $X \in \mathfrak{p}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}$ et $J(X) = iX$ si $X \in \bar{\mathfrak{p}}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}$.

Alors J définit un endomorphisme réel de carré -1, à savoir une structure complexe canonique sur $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$. Pour $u \in \mathfrak{e}/\mathfrak{d}$,

$$u + iJu \in \mathfrak{p}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}},\ \ u - iJu \in \bar{\mathfrak{p}}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}.$$

Définition 1.2.4. On définit la forme bilinéaire S_f sur $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ par

$$S_f(u,v) = \hat{B}_f(u,Jv),\ \ u,v \in \mathfrak{e}/\mathfrak{d}.$$

Proposition 1.2.5. S_f est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$, et J laisse $\hat{B}_f, S_f$ invariantes, i.e.

$$\hat{B}_f(Ju, Jv) = \hat{B}_f(u, v),\ \ S_f(Ju, Jv) = S_f(u, v).$$

Démonstration. Il est évident que $\mathfrak{p}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}$ est isotrope pour la forme $\hat{B}_f$, et nous avons pour $u, v \in \mathfrak{e}/\mathfrak{d}$

$$\begin{aligned} 0 = \hat{B}_f(u + iJu, v + iJv) & \\ &= \hat{B}_f(u, v) - \hat{B}_f(Ju, Jv) + i\left(\hat{B}_f(Ju, v) + \hat{B}_f(u, Jv)\right). \end{aligned}$$

La partie imaginaire de cette équation nous donne

$$\hat{B}_f(u, Jv) = -\hat{B}_f(Ju, v) = \hat{B}_f(v, Ju). \tag{1.2.1}$$

D'où $S_f(u, v) = S_f(v, u)$, à savoir que S_f est symétrique. Comme $\hat{B}_f$, J sont non dégénérés, S_f l'est aussi. D'après les relations (1.2.1) et $J^2 = -1$,

$$\hat{B}_f(Ju, Jv) = -\hat{B}_f(u, J(Jv)) = \hat{B}_f(u, v),$$

$$\begin{aligned} S_f(Ju, Jv) &= \hat{B}_f(Ju, J(Jv)) = -\hat{B}_f(Ju, v) \\ &= \hat{B}_f(v, Ju) = S_f(v, u) = S_f(u, v). \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Définition 1.2.6. On dit que $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ est positive si la forme symétrique S_f est définie positive ou si $\mathfrak{e}/\mathfrak{d} = \{0\}$. En particulier, $\mathfrak{p}$ est dite réelle si $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$.

On désigne par $P^+(f, G)$ l'ensemble des polarisations positives de G en f. On se donne $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ et définit les sous-algèbres $\mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ comme avant. Soit D_0 (resp. E_0) le sous-groupe de Lie connexe de G correspondant à $\mathfrak{d}$ (resp. $\mathfrak{e}$). Puisque $\mathfrak{p}$ est stable sous l'action $\mathrm{Ad}G(f)$,

$$D = G(f)D_0,\ \ E = G(f)E_0$$

sont deux sous-groupes de G.

Proposition 1.2.7. D, D_0 sont fermés dans G. De plus, D_0 est la composante connexe de l'unité de D et $\mathfrak{d}$ est l'algèbre de Lie de D.

Démonstration. $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ étant mutuellement le complément orthogonal pour B_f, nous avons pour $X \in \mathfrak{g}$:

$$X \in \mathfrak{d} \Leftrightarrow X\Delta f(Y) = B_f(Y, X) = 0\ (\forall\ Y \in \mathfrak{e}).$$

En prenant l'image de l'application exponentielle, on a pour $a \in D_0$:

$$(a\Delta f - f)(Y) = 0\ (\forall\ Y \in \mathfrak{e}). \tag{1.2.2}$$

Cela entraîne que l'équation (1.2.2) reste valable pour tout $a \in \overline{D_0}$. Mais cette affirmation entraîne à son tour que tout élément X de l'algèbre de Lie de $\overline{D_0}$ vérifie

$$X\Delta f(Y) = 0\ (\forall\ Y \in \mathfrak{e}).$$

D'où $X \in \mathfrak{d}$, c'est-à-dire que $D_0 = \overline{D_0}$.

Répétons le même argument pour prouver le reste de la proposition. Soit D_1 la composante connexe de l'unité de $\overline{D} = \overline{G(f)D_0}$. Si $a \in D_1$,

$$(a\Delta f - f)(Y) = 0 \ (\forall\ Y \in \mathfrak{e}).$$

Cela signifie que l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}_1$ de D_1 est contenue dans $\mathfrak{d}$. D'autre part, $D_0 \subset D$ entraîne $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{d}_1$. Par conséquent, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1$ et $D_0 = D_1$. D'autre part, $D_0 \subset D \subset \overline{D}$. Ainsi D est un sous-groupe fermé et D_0 est la composante connexe de l'unité de D. c.q.f.d.

Nous considérons maintenant D-orbite $D\Delta f$ dans $\mathfrak{g}^*$.

Proposition 1.2.8. $D\Delta f$ est un ouvert du plan affine $f+\mathfrak{e}^\perp$. Évidemment, $D\Delta f = D_0\Delta f$.

Démonstration. Commençons par voir que $f + \mathfrak{e}^\perp$ est stable sous l'action de D. Comme $\mathfrak{e}$ est D-stable, $\mathfrak{e}^\perp$ l'est aussi. Compte tenu de $D = D_0G(f)$, on constate que $D\Delta f = D_0G(f)\Delta f = D_0\Delta f$. Donc, pour $d \in D$ et $\ell \in \mathfrak{e}^\perp$ il existe $a \in D_0$ tel qu'on ait

$$d\Delta(f + \ell) - f = a\Delta f - f + d\Delta\ell.$$

Cela dit d'après la relation (1.2.2) que $d\Delta(f + \ell) - f \in \mathfrak{e}^\perp$. Ainsi, $f + \mathfrak{e}^\perp$ est D-stable et $\mathfrak{d}\Delta f \subset \mathfrak{e}^\perp$. D'autre part, $\mathfrak{d}\Delta f \cong \mathfrak{d}/\mathfrak{g}(f)$ et $\mathfrak{e} = \mathfrak{d}^f$ fournissent

$$\dim \mathfrak{d} + \dim \mathfrak{e} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f).$$

Nous avons donc

$$\dim \mathfrak{d}\Delta f = \dim (\mathfrak{d}/\mathfrak{g}(f)) = \dim \mathfrak{d} - \dim \mathfrak{g}(f) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{e} = \dim \mathfrak{e}^\perp.$$

En somme $\mathfrak{d}\Delta f = \mathfrak{e}^\perp$. Comme $\mathfrak{d}\Delta f$ est l'espace tangent en f à $D_0\Delta f \subset f + \mathfrak{e}^\perp$, le théorème de la fonction implicite nous assure que $D\Delta f$ est un ouvert de $f + \mathfrak{e}^\perp$. c.q.f.d.

Ensuite nous allons examiner E-orbite $E\Delta f = E_0\Delta f$ dans $\mathfrak{g}^*$.

Définition 1.2.9. On dit que $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ vérifie la condition de Pukanszky forte si $E\Delta f$ est fermé dans $\mathfrak{g}^*$.

Remarque. Lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle, il vient de la proposition 1.2.8 que

$$\mathfrak{p} \text{ vérifie la condition de Pukanszky forte} \Leftrightarrow D\Delta f = f + \mathfrak{e}^\perp$$

car $D = E$.

Lemme 1.2.10. Si $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ vérifie la condition de Pukanszky forte, E_0, E sont fermés dans G et E_0 est la composante connexe de l'unité de E.

Démonstration. Soit $\psi : G \to \mathfrak{g}^*$ l'application définie par $\psi(g) = g\Delta f$. Il est clair que $E = \psi^{-1}(E\Delta f) = \psi^{-1}(E_0\Delta f)$, d'où E est fermé dans G. Soit E_1 la composante connexe de l'unité de E. Trivialement, $E_0 \subset E_1$. D'autre part, $\psi(E_0) = \psi(E_1)$ et $G(f)_0 \subset E_0$, $G(f)_0$ désignant la composante connexe de l'unité de $G(f)$. En comparant la dimension, on conclut que $E_0 = E_1$. c.q.f.d.

Proposition 1.2.11. Si $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ vérifie la condition de Pukanszky forte, alors $D\Delta f = f + \mathfrak{e}^\perp$.

Démonstration. Posons $K = \{a \in E_0; a\Delta f \in f + \mathfrak{e}^\perp\}$. Il est clair que K est fermé dans E_0, et donc dans G d'après le lemme 1.2.10. D'ailleurs, $\mathfrak{e}^\perp$ étant stable par E_0, K est un sous-groupe de E_0 et $f + \mathfrak{e}^\perp$ est K-stable. Il est immédiat que $D_0 \subset K$. Il vient de la proposition 1.2.8 que $D_0\Delta f$ est un ouvert de $f + \mathfrak{e}^\perp$. En divisant K dans les classes suivant D_0, nous voyons que $K\Delta f$ est un ouvert de $f + \mathfrak{e}^\perp$. D'autre part, la condition de Pukanszky forte implique que $K\Delta f = (E_0)\Delta f \cap (f + \mathfrak{e}^\perp)$ est fermé dans $f + \mathfrak{e}^\perp$. D'où $K\Delta f = f + \mathfrak{e}^\perp$.

Soit maintenant $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K. Il vient de ce qui précède que $B_f(\mathfrak{k}, \mathfrak{e}) = \{0\}$, d'où $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{d}$. L'inclusion $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{k}$ étant triviale, on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{d}$ et D_0 n'est autre que la composante connexe de l'unité de K. En particulier, D_0 est distingué dans K. Pour $\ell \in \mathfrak{e}^\perp$, écrivons $f + \ell = k\Delta f$ avec $k \in K$. Alors,

$$D_0\Delta(f + \ell) = D_0\Delta(k\Delta f) = k\Delta(D_0\Delta f).$$

D'après la proposition 1.2.8 $D_0\Delta f$ étant un ouvert de $f + \mathfrak{e}^\perp$, chaque orbite $D_0\Delta(f + \ell)$ se trouve ouverte dans $f + \mathfrak{e}^\perp$. Donc, $D_0\Delta f = f + \mathfrak{e}^\perp$, et finalement $D\Delta f = f + \mathfrak{e}^\perp$ car $D = D_0G(f)$. c.q.f.d.

Lemme 1.2.12. Supposons que $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ vérifie la condition de Pukanszky forte. Désignons par $G(f)_0$ la composante connexe de l'unité de $G(f)$. Alors $D_0 \cap G(f) = G(f)_0$. Soient D_1 le groupe simplement connexe du revêtement de D_0 et $\tau : D_1 \to D_0$ la projection canonique. Alors $\tau^{-1}(G(f)_0) = G(f)_1$ est connexe.

Démonstration. Compte tenu de $D\Delta f = D_0\Delta f$, on a $D\Delta f \simeq D_0/(D_0 \cap G(f))$. À cause de $G(f)_0 \subset D_0$, $G(f)_0$ est la composante connexe de l'unité de $D_0 \cap G(f)$. $D_0\Delta f$ étant simplement connexe d'après la proposition 1.2.11, $D_0 \cap G(f)$ s'avère connexe. Donc, $D_0 \cap G(f) = G(f)_0$ et

$$D_1/G(f)_1 \simeq D_0/G(f)_0 = D_0/D_0 \cap G(f) = D\Delta f = D_0\Delta f.$$

Du fait que $D_0\Delta f$ est simplement connexe, $G(f)_1 = \tau^{-1}(G(f)_0)$ est connexe. c.q.f.d.

La définition de $\mathfrak{g}(f)$ implique que la restriction $f|_{\mathfrak{g}(f)}$ de f à $\mathfrak{g}(f)$ fournit un homomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}(f) \to \mathbb{R}$.

Définition 1.2.13. On dit que $f \in \mathfrak{g}^*$ est entière s'il existe un homomorphisme $\eta_f : G(f) \to \mathbb{T}$ tel que $d\eta_f = if|_{\mathfrak{g}(f)}$.

Nous supposons désormais que $f \in \mathfrak{g}^*$ est entière et notons η_f le caractère associé de $G(f)$. Il vient de la relation $f([\mathfrak{d}, \mathfrak{e}]) = \{0\}$ que $f|_{\mathfrak{d}}$ fournit un homomorphisme $\mathfrak{d} \to \mathbb{R}$.

Proposition 1.2.14. Lorsque $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ vérifie la condition de Pukanszky forte, η_f s'étend d'une façon unique en un caractère $\chi_f : D \to \mathbb{T}$ tel que $d\chi_f = if|_{\mathfrak{d}}$.

Démonstration. Empruntons les notations au lemme 1.2.12. Comme $f([\mathfrak{d}, \mathfrak{d}]) = \{0\}$, il existe l'unique caractère $\chi_f^1 : D_1 \to \mathbb{T}$ tel que $d\chi_f^1 = if|_{\mathfrak{d}}$. Lorsque $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ vérifie la condition de Pukanszky forte, le lemme 1.2.12 signifie que $G(f)_1$ est connexe et qu'on a

$$\chi_f^1|_{G(f)_1} = \left(\eta_f|_{G(f)_0}\right) \circ \tau.$$

Le noyau K de l'homomorphisme $\tau : D_1 \to D_0$ est contenu dans $G(f)_1 = \tau^{-1}(G(f)_0)$ et $\chi_f^1|_K$ est trivial. Il en résulte qu'il existe l'unique homomorphisme $\chi_f^0 : D_0 \to \mathbb{T}$ tel que $\chi_f^1 = \chi_f^0 \circ \tau$. Évidemment, $d\chi_f^0 = if|_{\mathfrak{d}}$. En normalisant D_0, $G(f)$ opère sur le groupe des caractères unitaires. Or, le caractère unitaire d'un groupe de Lie connexe est bien determiné par sa différentielle. Compte tenu de $G(f)\Delta f = f$, il s'ensuit que

$$\chi_f^0(udu^{-1}) = \chi_f^0(d) \ (u \in G(f), d \in D_0).$$

Soit maintenant A le produit semi-direct de D_0 par $G(f)$, et définissons l'application $\mu_f : A \to \mathbb{T}$ par

$$\mu_f(d,u) = \chi_f^0(d)\eta_f(u) \ (d \in D_0, u \in G(f)).$$

Alors, μ_f est un caractère unitaire de A. Considérons ensuite l'homomorphisme σ de A sur D défini par $\sigma(d,u) = du$. Il découle du lemme 1.2.12 que

$$\ker \sigma = \{(u, u^{-1}); u \in G(f) \cap D_0 = G(f)_0\}.$$

Comme χ_f^0 coïncide sur $G(f)_0$ avec η_f, l'homomorphisme μ_f est trivial sur $\ker\sigma$ et induit un caractère unitaire χ_f de D. Il est clair que χ_f possède les propriétés requises. L'unicité de χ_f s'ensuit de $D = D_0 G(f)$ car il coïncide sur $G(f)$ avec η_f et qu'il est déterminé sur D_0 par sa différentielle. c.q.f.d.

Nous nous proposons maintenant de construire une représentation unitaire de G à partir de $\mathfrak{p} \in P(f,G)$ vérifiant la condition de Pukanszky forte. Comme $E = E_0 D$, $X = E/D$ est connexe. D'autre part, la forme bilinéaire alternée $\hat{B}_f$ sur $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ étant non dégénérée et D-invariante, elle induit sur X une mesure μ_X invariante sous l'action de E. Notons $M(E,\chi_f)$ l'espace des fonctions numéiques mesurables ϕ vérifiant les conditions de covariance

$$\phi(ab) = \chi_f(b)^{-1}\phi(a) \ (a \in E, b \in D).$$

On considère l'espace des fonctions $\phi \in M(E,\chi_f)$ telles que

$$\int_X |\phi|^2 d\mu_X < \infty$$

et son séparé $\mathcal{H}(E,\chi_f)$, qui est un espace de Hilbert. En fait, $\mathcal{H}(E,\chi_f)$ est l'espace de Hilbert pour la représentation induite $\mathrm{ind}_D^E \chi_f$.

Soit maintenant $C^\infty(E)$ l'espace des fonctions numériques C^∞ sur E. Pour $z = x + iy$ $(x, y \in \mathfrak{e})$ et $\psi \in C^\infty(E)$, posons $\psi\Delta z = \psi\Delta x + i\psi\Delta y$, où

$$(\psi\Delta x)(a) = \frac{d}{dt}\psi(a\exp(tX))|_{t=0} \ (a \in E).$$

On pose encore

$$C^\infty(E,f,\mathfrak{p}) = \{\psi \in C^\infty(E); \psi\Delta z = -if(z)\psi, \ z \in \mathfrak{p}\},$$

$$\mathcal{L} = C^\infty(E,f,\mathfrak{p}) \cap M(E,\chi_f), \mathcal{H}(f,\eta_f,\mathfrak{p},E) = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}(E,\chi_f).$$

Proposition 1.2.15. ([3]) L'espace $\mathcal{H}(f,\eta_f,\mathfrak{p},E)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(E,\chi_f)$.

Comme $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{p}, E)$ est stable sous l'action de $\mathrm{ind}_D^E \chi_f$, il nous fournit une sous-représentation, notée $\mathrm{ind}_D^E(\eta_f, \mathfrak{p})$, de $\mathrm{ind}_D^E \chi_f$. Nous posons finalement

$$\rho(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G) = \mathrm{ind}_E^G \left(\mathrm{ind}_D^E(\eta_f, \mathfrak{p})\right),$$

qui est une sous-représentation de $\mathrm{ind}_D^G \chi_f$, et l'appelons représentation induite holomorphe. On notera $\mathcal{H}(f, \mathfrak{p}, G)$ l'espace de Hilbert de $\mathrm{ind}_D^G \chi_f$, et $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G)$ son sous-espace fermé correspondant à $\rho(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G)$.

Considérons une suite exacte de groupes de Lie :

$$1 \to N \to G \xrightarrow{p} \tilde{G} \to 1.$$

Soient $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$) l'algèbre de Lie de N (resp. $G, \tilde{G}$) et $dp : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ la différentielle de p. On désigne par la même notation l'extension linéaire de dp sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Proposition 1.2.16. On suppose $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ intégral et note $\eta_{\tilde{f}}$ le caractère unitaire associé de $\tilde{G}(\tilde{f})$. Supposons que $\tilde{\mathfrak{p}} \in P(\tilde{f}, \tilde{G})$ vérifie la condition de Pukanszky forte, et posons $f = \tilde{f} \circ dp \in \mathfrak{g}^*, \mathfrak{p} = p^{-1}(\tilde{\mathfrak{p}})$. Alors f est intégrale, $G(f) = p^{-1}\left(\tilde{G}(\tilde{f})\right)$, et le caractère η_f de $G(f)$ défini par $\eta_f = \eta_{\tilde{f}} \circ p$ est celui qui correspond à f. De plus, $\mathfrak{p}$ est une polarisation de G en f vérifiant la condition de Pukanszky forte et

$$\rho(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G) \simeq \rho(\tilde{f}, \eta_{\tilde{f}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{G}) \circ p.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier de divers définitions en remarquant les faits suivants. D'abord, $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ s'identifie à $\mathfrak{n}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{p}$ vérifie la condition de Pukanszky forte. Puis, $D = p^{-1}(\tilde{D}), \chi_f = \chi_{\tilde{f}} \circ p, E = p^{-1}(\tilde{E})$, et p induit un isomorphisme entre E/D (resp. $G/D, G/E$) et $\tilde{E}/\tilde{D}$ (resp. $\tilde{G}/\tilde{D}, \tilde{G}/\tilde{E}$). Finalement, on a

$$\mathcal{H}(\tilde{f}, \eta_{\tilde{f}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{G}) \circ p = \mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G).$$

c.q.f.d.

Nous allons mentionner certains résultats importants obtenus dans Auslander-Kostant [3]. Soit G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ qui contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et N le sous-groupe de Lie connexe de G correspondant à $\mathfrak{n}$. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$ et $f_0 = f|_{\mathfrak{n}}$. Comme $\mathfrak{n}$ est stable par $\mathrm{Ad}(G)$, G opère dans $\mathfrak{n}^*$. On note $G(f_0)$ le stabilisateur de f_0 dans G.

Définition 1.2.17. Soit $\mathfrak{p} \in P(f, G)$. On dit que $\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{n}$-admissible si $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \in P(f_0, N)$. Si en outre $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ est stable par $\mathrm{Ad}\,(G(f_0))$, on dit que $\mathfrak{p}$ est fortement $\mathfrak{n}$-admissible.

Remarque. Si $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ est un sous-espace isotrope maximal pour B_{f_0}, alors $\mathfrak{p}$ se trouve $\mathfrak{n}$-admissible.

On obtient dans ces circonstances les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.2.18. Pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$ il existe $\mathfrak{p} \in P^+(f, G)$ qui est fortement $\mathfrak{n}$-admissible. Par ailleurs, si $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ est $\mathfrak{n}$-admissible, $\mathfrak{p}$ vérifie la condition de Pukanszky forte.

Théorème 1.2.19. Supposons que $f \in \mathfrak{g}^*$ est intégrale et que $\mathfrak{p} \in P^+(f, G)$ est fortement $\mathfrak{n}$-admissible. Alors,

$$\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G) \neq \{0\}$$

et $\rho(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G)$ fournit une représentation unitaire irréductible de G dont la classe d'équivalence ne dépend pas de $\mathfrak{p}$ ni de $\mathfrak{n}$.

Avant de terminer cette section on se donne un théorème dont on aura besoin plus loin.

Définition 1.2.20. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle. Une sous-algèbre de Lie complexe $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est dite totalement complexe si $\mathfrak{m} + \bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Théorème 1.2.21. ([15]) Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ qui vérifie la condition de Pukanszky forte. On suppose que $\mathfrak{p}$ est totalement complexe. Pourvu que $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G) \neq \{0\}$, $\rho(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G)$ est irréductible.

1.3. Groupe exponentiel

Dans cette section nous allons donner la définition du groupe exponentiel et exposer la méthode des orbites pour lui dans ses lignes générales. Lorsqu'on dit simplement une algèbre de Lie, cela signifie une algèbre de Lie réelle de dimension finie. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble qui agit sur un espace vectoriel réel V de dimension n. En tant que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module,$V_{\mathbb{C}}$ possède une suite de Jordan-Hölder :

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V_{\mathbb{C}},\ \dim_{\mathbb{C}} V_j = j\ (0 \leq j \leq n).$$

L'action de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sur V_j/V_{j-1} $(1 \leq j \leq n)$ fait naître une forme linéaire λ_j sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, et ces formes linéaires ne dépendent pas sauf leur ordre du choix de la suite de Jordan-Hölder.

Définition 1.3.1 La restriction de λ_j $(1 \leq j \leq n)$ sur $\mathfrak{g}$ s'appelle poids de $\mathfrak{g}$ dans V, et le poids de la représentation adjointe s'appelle racine de $\mathfrak{g}$.

Définition 1.3.2. Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Lorsque l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est surjective, on appelle G groupe exponentiel.

Théorème 1.3.3. ([24]) Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) G est un groupe exponentiel ;
(2) l'application exponentielle est injective ;
(3) l'application exponentielle est un difféomorphisme ;
(4) chaque racine de $\mathfrak{g}$ s'écrit $X \to \lambda(X)(1 + i\alpha)$ où $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
(5) $\mathfrak{g}$ ne possède aucune racine qui admet une valeur non nulle purement imaginaire.

Définition 1.3.4. Lorsqu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ satisfait à (5) du théorème 1.3.3, $\mathfrak{g}$ s'appelle algèbre de Lie exponentielle.

Exemple 1.3.5.

(i) Un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe est un groupe exponentiel.

(ii) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\dim \mathfrak{g} = n$. Lorsqu'il existe une suite d'idéaux

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g},\ \dim \mathfrak{g}_j = j\ (0 \leq j \leq n),$$

on dit que $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble. Une algèbre de Lie complètement résoluble est exponentielle.

(iii) Soit $\mathfrak{g}_3 = \langle X, P, Q\rangle_{\mathbb{R}}; [X, P] = -Q, [X, Q] = P$. $\mathfrak{g}_3$ n'est pas exponentielle.

(iv) Soit $\mathfrak{g}_4 = \langle X, P, Q, E\rangle_{\mathbb{R}}; [X, P] = -Q, [X, Q] = P, [P, Q] = E$. $\mathfrak{g}_4$ n'est pas exponentielle.

Pour être plus auto-complet, nous allons reproduire ici la démonstration du théorème 1.3.3 due à Dixmier [24].

1. Cas des groupes résolubles complexes. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension n sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1, donc s'identifie à une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Soit φ une racine non nulle de $\mathfrak{g}$. φ s'annule sur le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$. Alors, l'équation $\varphi(a) = 0$ définit un hyperplan $\mathfrak{g}_\varphi$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{n}$ et a fortiori $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donc un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour tout entier rationnel m distinct de 0, soit $\mathfrak{g}_{\varphi,m}$ la variété linéaire non homogène de $\mathfrak{g}$ définie par l'équation $\varphi(a) = 2\pi m i$. Les $\mathfrak{g}_{\varphi,m}$ seront appelées les variétés linéaires exceptionnelles de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est non nilpotent, il existe des racines non nulles, donc il existe des variétés linéaires exceptionnelles.

Soit G un groupe de Lie complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit N le sous-groupe distingué de G correspondant à $\mathfrak{n}$; il est fermé et simplement connexe, et $G' = G/N$ est un groupe de Lie complexe abélien simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}.$; soit r la dimension complexe de G'. Soient θ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}', p$ l'application canonique de G sur G' et Λ (resp. Λ') l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) dans G (resp. G'). Alors, Λ' est un isomorphis-e de la variété analytique $\mathfrak{g}'$ sur la variété analytique G', et l'on a $p \circ \Lambda = \Lambda' \circ \theta$. Si φ est une racine non nulle de $\mathfrak{g}$, le sous-groupe distingué G_φ de G correspondant à $\mathfrak{g}_\varphi$ est un sous-groupe fermé simplement connexe contenant N, de dimension complexe $n-1$, égal à $p^{-1}(\Lambda'(\theta(\mathfrak{g}_\varphi)))$. Soit $G_{\varphi,m} = p^{-1}(\Lambda'(\theta(\mathfrak{g}_{\varphi,m})))$; les $G_{\varphi,m}$ sont des classes de G suivant G_φ, et seront appelées sous-variétés exceptionnelles de G. Soit $a \in \mathfrak{g}$. Pour que $\Lambda(a) \in G_{\varphi,m}$, il faut et il suffit que $p(\Lambda(a)) = \Lambda'(\theta(a))$ appartienne à $\Lambda'(\theta(\mathfrak{g}_{\varphi,m}))$, donc que $\theta(a)$ appartienne à $\theta(\mathfrak{g}_{\varphi,m})$, donc que $a \in \mathfrak{g}_{\varphi,m}$.

Pour énoncer commodément les résultats, disons qu'une application ψ d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est localement injective (resp. surjective) en un point $x_0 \in X$ s'il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que la restriction de ψ à V soit injective (resp. si, pour tout voisinage W de x_0 dans X, $\psi(W)$ est un voisinage de $\psi(x_0)$ dans Y).

Théorème 1. Soient G un groupe de Lie résoluble complexe simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et Λ l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. Soient $\mathfrak{s}$ la réunion (fermée) des variétés linéaires exceptionnelles de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ le complémentaire de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{g}$, S la réunion (fermée) des sous-variétés exceptionnelles de G et R le complémentaire de S dans G.

1°. $\Lambda(\mathfrak{s}) \subset S$.

2°. La restriction of Λ à $\mathfrak{r}$ est un isomorphisme de la variété analytique complexe $\mathfrak{r}$ sur la variété analytique complexe R.

3°. Si $a \in \mathfrak{s}$, Λ n'est ni localement injective, ni localement surjective en a.

Démonstration. On a vu que $\Lambda(\mathfrak{g}_{\varphi,m}) \subset G_{\varphi,m}$; donc $\Lambda(\mathfrak{s}) \subset S$. Il existe une suite d'idéaux

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{n-1} \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$$

de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g}_j$ soit de dimension $n-j$, et tels que $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{n}$. Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $a_j \in \mathfrak{g}_{j-1}, a_j \notin \mathfrak{g}_j$. On a $[a_j, a_k] = \sum_{h=1}^{n} \gamma_{jkh} a_h$ avec des constantes de structure γ_{jkh} qui possèdent les propriétés suivantes :

$\gamma_{jkh} = 0$ sauf si $h \geq j, h \geq k, h > r$;

si $j > r$ et $k > r$, alors $\gamma_{jkh} = 0$ sauf si $h > j$ et $h > k$.

On déduit de là que, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres complexes, on a

$$[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j, a_k] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_j \gamma_{jkh} a_h \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_{jkk} \right) a_k \pmod{\mathfrak{g}_k}.$$

Les racines de $\mathfrak{g}$ sont donc les formes linéaires φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ définies par

$$\varphi_k \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{jkk} \alpha_j = \sum_{j=1}^{r} \gamma_{jkk} \alpha_j = \psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r).$$

On a

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_r = 0.$$

Soit $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$ la base de $\mathfrak{g}^*$, regardé comme l'espace des covecteurs tangents à G en l'élément neutre e de G, duale de la base $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathfrak{g}$. Si la base $(a_1, \ldots, a_n)$ est bien choisie, il existe un système de fonctions coordonées $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans G possédant les propriétés suivantes :

1°. l'application $g \to (\xi_1(g), \ldots, \xi_n(g))$ est un isomorphisme de la variété analytique G sur $\mathbb{C}^n$ qui transforme e en $(0, \ldots, 0)$; nous identifierons désormais G et $\mathbb{C}^n$ par cet isomorphisme ; autrement dit, nous transportons à $\mathbb{C}^n$ par cet isomorphisme la structure de groupe de G ;

2°. il existe n formes différentielles invariantes à gauche

$$\omega_1(\xi_1, \ldots, \xi_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_n), \ \ldots, \ \omega_n(\xi_1, \ldots, \xi_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_n)$$

sur $\mathbb{C}^n$, linéairement indépendantes en tout point de $\mathbb{C}^n$, et telles que la valeur en e de ω_j soit a_j^* ;

3°. on a

$$\omega_1 = d\xi_1, \ \ldots, \ \omega_r = d\xi_r,$$

$$\omega_k = e^{\psi_k(\xi_1,\ldots,\xi_r)}[d\xi_k + \sum_{s=1}^{k-1} P_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{k-1})d\xi_s]\ (k = r+1,\ \ldots,\ n),$$

où les P_{ks} sont des polynômes.

Ceci posé, soient $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ des nombres complexes. Soit $(\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t))$ la solution du système différentiel

$$\omega_1 = \alpha_1 dt,\ \ldots,\ \omega_n = \alpha_n dt \tag{1}$$

qui s'annule pour $t = 0$ (t est une variable réelle). On sait que $\Lambda(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n)$ est le point de G de coordonnées $\xi_1(1),\ldots,\xi_n(1)$.

Les r premières équations de (1) donnent $\xi_1 = \alpha_1 t,\ldots,\xi_r = \alpha_r t$. Les suivantes s'écrivent alors

$$e^{\psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)t}[d\xi_k + \sum_{s=1}^{k-1} P_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{k-1})d\xi_s] = \alpha_k dt\ (k = r+1,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Soient z une variable complexe, et $\tau(z)$ la fonction de z égale à 1 pour $z = 0$ et à $\frac{e^z-1}{z}$ pour $z \neq 0$. C'est une fonction entière, dont les zéros sont les nombres $2m\pi i$, m entier rationnel $\neq 0$. Ceci posé, montrons que les solutions des équations (2) sont de la forme

$$\xi_k = \alpha_k t\tau(-\psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)t) + F_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t), \tag{3}$$

où F_k est une fonction entière de $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t$ s'annulant pour $t = 0$. Procédant par récurrence sur k, supposons ceci établi pour les entiers $< k$. Alors, l'équation $\omega_k = \alpha_k dt$ s'écrit

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \alpha_k e^{-\psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)t} + G_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t), \tag{4}$$

où G_k est une fonction entière de $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t$. Soit $F_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t)$ la primitive de G_k par rapport à la dernière variable qui s'annule pour $t = 0$. C'est une fonction entière de $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t$. Suivant que $\psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ est nul ou non nul, l'equation (4) s'intègre sous la forme suivante : ou bien

$$\xi_k = \alpha_k t + F_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t)$$

ou bien

$$\begin{aligned}\xi_k &= \alpha_k \frac{e^{-\psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)t} - 1}{-\psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)} + F_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t)\\ &= \alpha_k t\tau\left(-\psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)t\right) + F_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},t)\end{aligned}$$

de sorte que la formule (3) est bien établie dans tous les cas. Donc les coordonnées de $\Lambda(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n)$ sont données par les formules

$$(*) \begin{cases}\xi_1 = \alpha_1,\ \ldots,\ \xi_r = \alpha_r,\\ \xi_k = \alpha_k\tau\left(-\psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\right) + F_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},1)\ (k = r+1,\ \ldots,\ n).\end{cases}$$

Le jacobien de la transformation définie par $(*)$ est $\prod_{k=r+1}^{n} \tau\,(-\psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_r))$. L'ensemble des points de $\mathfrak{g}$ où il s'annule est donc l'ensemble des points de $\mathfrak{g}$ où s'annule l'un des nombres $\tau\,(-\psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_r))$, c'est-à-dire $\mathfrak{s}$.

Les coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (resp. $\xi_1, \dots, \xi_r$) définissent par passage au quotient des coordonnées dans $\mathfrak{g}'$ (resp. G') que nous noterons $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ (resp. $\xi'_1, \dots, \xi'_r$). Comme l'application exponentielle commute aux homomorphismes, l'application exponentielle Λ' de $\mathfrak{g}'$ dans G' est définie, en vertu de $(*)$, par les formules $\xi'_1 = \alpha'_1,\ \dots,\ \xi'_r = \alpha'_r$. La variété $\theta(\mathfrak{g}_{\varphi_k,m})$ a pour équation $\psi_k(\alpha'_1, \dots, \alpha'_r) = 2m\pi i$, donc la variété $\Lambda'\,(\theta(\mathfrak{g}_{\varphi_k,m}))$ a pour équation $\psi_k(\xi'_1, \dots, \xi'_r) = 2m\pi i$. Donc $G_{\varphi_k,m}$ a pour équation $\psi_k(\xi_1, \dots, \xi_r) = 2m\pi i$. L'ensemble S du théorème est donc défini par l'équation

$$\prod_{k=r+1}^{n} \tau\,(-\psi_k(\xi_1, \dots, \xi_r)) = 0.$$

Si $\prod_{k=r+1}^{n} \tau\,(-\psi_k(\xi_1, \dots, \xi_r)) \neq 0$, il est claire que le système $(*)$, où l'on considère $\xi_1, \dots, \xi_n$ comme donnés, admet une solution et une seule en $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Donc la restriction de Λ à $\mathfrak{r}$ est une bijection de $\mathfrak{r}$ sur R. Comme le jacobien de $(*)$ est non nul sur $\mathfrak{r}$, cette restriction est un isomorphisme analytique complexe. Ainsi, les assertions 1° et 2° du théorème sont démontrées.

Soit $a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \in \mathfrak{s}$. Soit h le plus grand indice tel que $\tau\,(\varphi_h(a)) = 0$. Quel que soit le nombre complexe β, il existe des nombres complexes uniques $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ tels que : 1°. $\alpha'_1 = \alpha_1, \dots, \alpha'_{h-1} = \alpha_{h-1}$; 2°. $\alpha'_h = \beta$; 3°. $\Lambda(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j) = \Lambda(\sum_{j=1}^{n} \alpha'_j a_j)$. En effet, $\alpha'_{h+1}, \dots, \alpha'_n$ sont définis par les conditions

$$\begin{aligned} &\alpha_k \tau\,(-\psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) + F_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 1) \\ &\qquad = \alpha'_k \tau\,(-\psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) + F_k(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{k-1}, 1)\ (k = h+1,\ \dots,\ n); \end{aligned}$$

et, comme $\tau\,(-\psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) \neq 0$ pour $k > h$, on voit aussitôt par récurrence l'existence et l'unicité des α'_k. En outre, par récurrence également, on voit que $\alpha'_k \to \alpha_k$ si $\beta \to \alpha_h$. Ceci prouve que Λ n'est pas localement injective en a.

Soit toujours $a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \in \mathfrak{s}$, et montrons que Λ n'est pas localement surjective en a. Désignons cette fois par h le plus petit indice tel que $\tau\,(\varphi_h(a)) = 0$. Soit m l'entier rationnel non nul tel que $a \in \mathfrak{g}_{\varphi_h,m}$. Soient $\xi_1, \dots, \xi_n$ les coordonnées de $\Lambda(a)$. Si $\epsilon > 0$ est assez petit, les conditions $|\ \alpha'_k - \alpha_k| < \epsilon$ pour $k = 1,\ \dots,\ h-1$ entraînent

$$\tau\,(-\psi_k(\alpha'_1, \dots, \alpha'_r)) \neq 0,\ k = 1,\ \dots,\ h-1.$$

Alors, les équations

$$(**) \begin{cases} \xi'_1 = \alpha'_1,\ \dots,\ \xi'_r = \alpha'_r \\ \xi'_k = \alpha'_k \tau\,(-\psi_k(\alpha'_1, \dots, \alpha'_r)) + F_k(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{k-1}, 1)\ (k = r+1,\ \dots,\ h-1) \end{cases}$$

définissent une transformation birégulière. Il existe donc un nombre $\epsilon' > 0$ et des fonctions holomorphes $F'_k(\xi'_1, \dots, \xi'_k)$ $(k = r+1,\ \dots,\ h-1)$ définies pour $|\ \xi'_1 - \xi_1| < \epsilon',\ \dots,\ |\ \xi'_{h-1} - \xi_{h-1}| < \epsilon'$ telles qu'on ait les propriétés suivantes : 1° en réduisant au besoin ϵ, les conditions $|\ \alpha'_k - \alpha_k| < \epsilon$ pour $k = 1, \ \ldots, \ h-1$ entraînent $|\ \xi'_k - \xi_k| < \epsilon'$ pour $k = 1, \ \ldots, \ h-1$; 2° on a alors

$$\alpha'_1 = \xi'_1, \ \ldots, \ \alpha'_r = \xi'_r,$$

$$\alpha'_k = F'_k(\xi'_1, \ldots, \xi'_k) \ (k = r+1, \ \ldots, \ h-1).$$

Soit maintenant $a' = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j a_j \in \mathfrak{g}_{\varphi_h,m}$, tel que

$$|\ \alpha'_1 - \alpha_1| < \epsilon, \ \ldots, \ |\ \alpha'_{h-1} - \alpha_{h-1}| < \epsilon.$$

Soient $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$ les coordonnées de $\Lambda(a')$. Les nombres $\xi'_1, \ldots, \xi'_{h-1}$ sont liés aux nombres $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{h-1}$ par les formules $(**)$. D'autre part

$$\xi'_h = F_h(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{h-1}, 1) = K(\xi'_1, \ldots, \xi'_{h-1}),$$

K désignant une certaine fonction holomorphe de $\xi'_1, \ldots, \xi'_{h-1}$ définie pour $|\ \xi'_1 - \xi_1| < \epsilon', \ \ldots, \ |\ \xi'_{h-1} - \xi_{h-1}| < \epsilon'$. Donc il existe un voisinage de a dans $\mathfrak{g}_{\varphi_h,m}$ dont l'image par Λ n'est pas un voisinage de $\Lambda(a)$ dans $G_{\varphi_h,m}$. Comme les points de $\mathfrak{g}$ qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{g}_{\varphi_h,m}$ ont une image par Λ qui n'appartient pas à $G_{\varphi_h,m}$, il existe un voisinage de a dans $\mathfrak{g}$ dont l'image par Λ n'est pas un voisinage de $\Lambda(a)$ dans G, de sorte que Λ n'est pas localement surjective en a. Le théorème est démontré. c.q.f.d.

Remarque. Ce dernier raisonnement prouve le résultat suivant dont nous aurons besoin plus loin : soit $a \in \mathfrak{s}$; alors, Λ applique $a + \mathfrak{n}$ dans $\Lambda(a)N$, et il existe un voisinage V de a dans $a + \mathfrak{n}$ tel que les points de $\Lambda(V)$ appartiennent tous à une sous-variété de codimension 1 dans $\Lambda(a)N$.

Corollaire. Soient G un groupe de Lie résoluble complexe simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et Λ l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1°. Λ est injective.

2°. Λ est surjective.

3°. Λ est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}$ sur la variété analytique G.

4°. G est nilpotent.

Démonstration. Les implications $4° \Rightarrow 3° \Rightarrow 2°, 3° \Rightarrow 1°$ sont claires ; $1° \Rightarrow 4°$ résulte du théorème 1. Pour montrer que (non 4°) $\Rightarrow$ (non 2°), on utilise la fin de la démonstration précédente, quelque peu simplifiée, en considérant cette fois le plus petit indice h tel que $\varphi_h \neq 0$. c.q.f.d.

2. Cas des groupes résolubles réels. Soient G un groupe de Lie résoluble réel simplement connexe de dimension n, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ et N le sous-groupe correspondant de G. On désignera par $\tilde{\mathfrak{g}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}$) l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{n}$), par $\tilde{G}$ (resp. $\tilde{N}$) le groupe de Lie complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}$). Alors, $\tilde{\mathfrak{n}}$ s'identifie au plus grand idéal nilpotent de $\tilde{\mathfrak{g}}$, et $\mathfrak{g}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Le sous-groupe de Lie réel de $\tilde{G}$ correspondant à $\mathfrak{g}$ est fermé et simplement connexe. Donc il existe un isomorphisme canonique de G sur ce sous-groupe. On peut donc identifier canoniquement G à un sous-groupe fermé de $\tilde{G}$.

Soit φ une racine non nulle, restriction à $\mathfrak{g}$ d'une racine non nulle $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors, le noyau $\mathfrak{g}_\varphi = \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\varphi}} \cap \mathfrak{g}$ de φ est un idéal de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{n}$. Si m est un entier rationnel non nul, soit $\mathfrak{g}_{\varphi,m} = \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\varphi},m} \cap \mathfrak{g}$ la variété linéaire dans $\mathfrak{g}$ définie par l'équation $\varphi(x) = 2m\pi i$. D'autre part, soient $G_\varphi = \tilde{G}_{\tilde{\varphi}} \cap G$ et $G_{\varphi,m} = \tilde{G}_{\tilde{\varphi},m} \cap G$; désignant par θ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, par p l'application canonique de G sur $G' = G/N$, par Λ (resp. Λ') l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G (resp. de $\mathfrak{g}'$ dans G'), on a

$$G_\varphi = p^{-1}\left(\Lambda'(\theta(\mathfrak{g}_\varphi))\right), \quad G_{\varphi,m} = p^{-1}\left(\Lambda'(\theta(\mathfrak{g}_{\varphi,m}))\right).$$

Écrivant $\varphi = \varphi' + i\varphi''$, où φ' et φ'' sont des formes linéaires réelles sur $\mathfrak{g}$, trois cas sont possibles :

1°. $\varphi'' = \alpha\varphi'$, où α est une constante réelle ; alors, $\mathfrak{g}_\varphi, G_\varphi$ sont de dimension réelle $n-1$, et les $\mathfrak{g}_{\varphi,m}, G_{\varphi,m}$ sont vides ;

2°. $\varphi' = 0$; alors $\mathfrak{g}_\varphi, G_\varphi$, les $\mathfrak{g}_{\varphi,m}$ et les $G_{\varphi,m}$ sont de dimension réelle $n-1$;

3°. $\varphi' \neq 0, \varphi'' \neq 0$, et les noyaux de φ', φ'' sont distincts ; alors, $\mathfrak{g}_\varphi, G_\varphi$, les $\mathfrak{g}_{\varphi,m}$ et les $G_{\varphi.m}$ sont de dimension réelle $n-2$.

On appellera variétés linéaires exceptionnelles de $\mathfrak{g}$ les $\mathfrak{g}_{\varphi,m}$, et sous-variétés exceptionnelles de G les $G_{\varphi,m}$. Dire que les variétés linéaires exceptionnelles de $\mathfrak{g}$ sont toutes vides revient donc à dire que toutes les racines non nulles sont du premier type envisagé ci-dessus.

Théorème 2. Le théorème 1 est valable pour les groupes résolubles réel simplement connexe.

Démonstration. Les deux premières assertions à établir résultent aussitôt des assertions correspondantes du théorème 1. Soit a un point appartenant à l'une des variétés linéaires exceptionnelles de $\mathfrak{g}$. D'après la remarque antérieure, il existe un voisinage V de a dans $a + \mathfrak{n}$ et une hypersurface H de codimension 1 dans $\Lambda(a)\tilde{N}$ tel que $\Lambda(V) \subset H$. Si $\Lambda(V)$ était un voisinage de $\Lambda(a)$ dans $\Lambda(a)N$, H contiendrait un voisinage de $\Lambda(a)$ dans $\Lambda(a)N$ donc serait un voisinage de $\Lambda(a)$ dans $\Lambda(a)\tilde{N}$, ce qui est absurde. Donc $\Lambda(V)$ n'est pas un voisinage de $\Lambda(a)$ dans $\Lambda(a)N$. Par ailleurs, l'image par Λ d'un point qui n'est pas dans $a + \mathfrak{n}$ n'appartient pas à $\Lambda(a)N$ (par exemple, parce que l'application exponentielle Λ' est un isomorphisme). Donc Λ n'est pas localement surjective en a. Si Λ était localement injective en a, Λ appliquerait homéomorphiquement tout voisinage compact de a dans $\mathfrak{g}$ suffisamment petit sur une partie compacte de G qui, d'après l'invariance du domaine, serait un voisinage de $\Lambda(a)$ dans G. Donc, Λ serait localement surjective en a, ce qui n'est pas. Donc, Λ n'est pas localement injective en a. Le théorème est démontré. c.q.f.d.

Il est immédiat que l'algèbre $\mathfrak{g}_3$ de l'exemple 1.3.5 admet des variétés linéaires exceptionnelles de sorte que l'application exponentielle n'y est pas injective.

Théorème 3. Soient G un groupe de Lie réel résoluble simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et Λ l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1°. Λ est bijective.

2°. Λ est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}$ sur la variété analytique G.

3°. Toute racine de $\mathfrak{g}$ est de la forme $\varphi' + i\varphi''$, avec φ', φ'' réelles et φ'' proportionnelle à φ'.

4°. Il n'existe pas d'algèbre quotient de $\mathfrak{g}$ admettant une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{g}_3$.

Démonstration. Le théorème 2 et les remarques qui le précèdent prouvent les implications $3° \Rightarrow 2°, 1° \Rightarrow 3°$; comme on a évidemment $2° \Rightarrow 1°$, les conditions $1°, 2°, 3°$ sont équivalentes.

Considérons une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$: c'est une suite décroissante d'idéaux

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots, \supset \mathfrak{g}_{n-1} \supset \mathfrak{g}_n = \{0\},$$

où les quotients $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1}$ sont de dimension 1 ou 2. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}_j$ le complexifié de $\mathfrak{g}_j$, qui est un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Si $\dim(\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1}) = 2$, il existe un idéal $\mathfrak{b}_j$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ tel que

$$\tilde{\mathfrak{g}}_j \supset \mathfrak{b}_j \supset \tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}, \quad \dim(\tilde{\mathfrak{g}}_j/\mathfrak{b}_j) = \dim(\mathfrak{b}_j/\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}) = 1.$$

Toute racine de $\tilde{\mathfrak{g}}$ correspond, soit à un quotient $\tilde{\mathfrak{g}}_k/\tilde{\mathfrak{g}}_{k+1}$ de dimension 1, soit à un quotient $\tilde{\mathfrak{g}}_j/\mathfrak{b}_j$, soit à un quotient $\mathfrak{b}_j/\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$. Les racines du premier type sont réelles sur $\mathfrak{g}$. Soit $y + iz$ un élément de $\mathfrak{b}_j$ n'appartenant pas à $\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$, avec $y, z \in \mathfrak{g}_j$. On a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$[x, y + iz] = \varphi(x)(y + iz) + u + iv,$$

φ désignant la racine correspondant à $\mathfrak{b}_j/\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$, et u, v désignant des éléments de $\mathfrak{g}_{j+1}$. Si φ' et φ'' sont les parties réelle et imaginaire de φ, on en déduit

$$(\dagger) \begin{cases} [x, y] = \varphi'(x)y - \varphi''(x)z + u, \\ [x, z] = \varphi''(x)y + \varphi'(x)z + v. \end{cases}$$

Si y et z étaient proportionnels modulo $\mathfrak{g}_{j+1}$, on déduirait de là l'existence d'un idéal de $\mathfrak{g}$ strictement compris entre $\mathfrak{g}_j$ et $\mathfrak{g}_{j+1}$, de sorte que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{n-1}, \mathfrak{g}_n)$ ne serait pas une suite de Jordan-Hölder. Donc, en désignant par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, on a $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{j+1} + \mathbb{R}y + \mathbb{R}z$. Comme

$$[x, y - iz] = (\varphi'(x) - i\varphi''(x))(y - iz) + u - iv,$$

et que $y - iz$ n'appartient pas à $\mathfrak{b}_j$, on voit que la racine correspondant à $\tilde{\mathfrak{g}}_j/\mathfrak{b}_j$ est $\bar{\varphi} = \varphi' - i\varphi''$.

Ceci posé, supposons que la condition 3° du théorème ne soit pas satisfaite. Il existe donc une racine ψ de $\mathfrak{g}$ qui n'est pas de la forme indiquée dans cette condition 3°. Cette racine correspond à un quotient $\mathfrak{b}_j/\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$ ou à un quotient $\tilde{\mathfrak{g}}_j/\mathfrak{b}_j$. Comme $\bar{\psi}$ ne vérifie pas non plus la condition 3° du théorème, on peut supposer que ψ est égale à la racine φ de l'alinéa précédent. Il existe $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\varphi'(x) = 0, \varphi''(x) \neq 0$. En multipliant x par un scalaire convenable, on peut supposer $\varphi''(x) = 1$. Alors, les formules $(\dagger)$ deviennent

$$[x, y] = -z + u, \quad [x, z] = y + v,$$

avec $u, v \in \mathfrak{g}_{j+1}$. Comme $2i[z, y] = [y + iz, y - iz] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{j+1}$ possède une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{g}_3$. On voit donc que la condition 4° du théorème implique la condition 3°.

Enfin, supposons que la condition 3° du théorème soit satisfaite. Soient $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ et H le sous-groupe distingué de G correspondant à $\mathfrak{h}$. Il existe une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ dont l'un des termes est $\mathfrak{h}$. Donc toute racine de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ se déduit d'une racine de $\mathfrak{g}$ par passage au quotient, de sorte que toute racine de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vérifie la condition 3° du théorème. L'application exponentielle de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dans G/H est donc injective. Sa restriction à toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est également injective. Il ne peut donc exister dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{g}_3$. Ainsi, la condition 3° implique la condition 4°, ce qui achève la démonstration. c.q.f.d.

Un groupe exponentiel $G = \exp \mathfrak{g}$ jouit de la propriété suivante : soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Il existe une base $\{X_1, \ldots, X_p\}$ d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que, si on pose $g_j(t) = \exp(tX_j)$ $(t \in \mathbb{R})$, l'application

$$(t_1, \ldots, t_p, X) \to g_1(t_1) \cdots g_p(t_p) \exp X$$

soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^p \times \mathfrak{h}$ sur G. Une telle base sera dite coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, et se construit comme suit. Remarquons d'abord que si $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre contenant $\mathfrak{h}$, la réunion d'une base coexponentielle à $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ et d'une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{k}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Il suffit donc d'examiner les cas suivants :

(1) $\mathfrak{h}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$;

(2) $\mathfrak{h}$ n'est pas un idéal, et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est un $\mathfrak{h}$-module irréductible.

Dans le cas (1) n'importe quel élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{h}$ forme une base coexponentielle. Il s'ensuit que si $\mathfrak{g}$ est nilpotent, on construit une base coexponentielle à n'importe quelle sous-algèbre par itération du cas (1), puisque toute sous-algèbre de codimension 1 est un idéal.

Procédons au cas (2). Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})$ s'identifie à un sous-$\mathfrak{h}$-module non nul de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, donc à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Tout sous-espace contenant $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ donc on construit une base coexponentielle à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$ en itérant (1). On peut la supposer formée d'éléments de $\mathfrak{h}$. En appliquant le cas (1), on construit une base coexponentielle $\{X\}$ ou $\{X_1, X_2\}$, selon la dimension, à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{n}$. Il est alors clair que c'est aussi une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

Définition 1.3.6. Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et V un G-module ou $\mathfrak{g}$-module. On dit que V est de type exponentiel si tout poids de $\mathfrak{g}$ dans V s'écrit

$$X \mapsto \lambda(X)(1 + i\alpha)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathfrak{g}^*$.

Théorème 1.3.7. Soient $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe exponentiel (d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) et V un G-module de type exponentiel. Alors le stabilisateur dans G d'un point de V est connexe.

Démonstration. Désignons par ρ l'action de G dans V. Soient $X \in \mathfrak{g}, v \in V$ tels que $\rho(\exp X)v = v$. L'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $\rho(\exp(tX))v = v$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. S'il est discret, soit t_0 son plus petit élément positif. Nous avons :

$$\rho\left(\exp(\frac{t_0}{2}X)\right)\left(\rho\left(\exp(\frac{t_0}{2}X)\right)v - v\right) = -\left(\rho\left(\exp(\frac{t_0}{2}X)\right)v - v\right) \neq 0,$$

d'où $d\rho(\frac{t_0}{2}X)$ a une valeur propre $in\pi$ avec un entier non nul n. c.q.f.d.

On peut paramétrer les orbites dans cette situation afin de trouver le lemme suivant.

Lemme 1.3.8. Soient G un groupe exponentiel et V un G-module de type exponentiel. On note $G(v)$ le stabilisateur dans G de $v \in V$ et munit l'orbit $G\Delta v$ de la topologie induite par celle de V. Alors $G\Delta v$ est homéomorphe à l'espace homogène $G/G(v)$. Ils sont homéomorphes à un espace $\mathbb{R}^d$ pour un certain entier non négatif d.

Désormais dans cette section on désigne par $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. On note $S(f, \mathfrak{g})$ (resp. $M(f, \mathfrak{g})$) l'ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ qui sont sous-espaces isotropes (resp. isotropes maximaux) pour B_f. On se donne maintenant $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ et définit un caractère unitaire χ_f de $H = \exp \mathfrak{h}$ par

$$\chi_f(\exp X) = e^{if(X)} \ (\forall\ X \in \mathfrak{h}).$$

Ensuite, posons

$$\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G) = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$$

et notons $\hat{\mathcal{H}}(f, \mathfrak{h}, G)$ l'espace de Hilbert pour $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$. Désignons finalement par $I(f, G)$ l'ensemble des $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ telles que la représentation induite $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$ soit irréductible.

Remarque.

(i) $G(f)$ étant connexe d'après le théorème 1.3.7, il est simplement connexe. Tout $f \in \mathfrak{g}^*$ est intégral et le caractère unitaire η_f est uniquement déterminé.

(ii) Pour $\mathfrak{p} \in P(f, G)$ vérifiant la condition de Pukanszky forte, $\rho(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G)$ (resp. $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{p}, G)$) définie dans la section 1.2 s'écrit simplement $\rho(f, \mathfrak{p}, G)$ (resp. $\mathcal{H}(f, \mathfrak{p}, G)$).

(iii) Si $\mathfrak{h} \in M(f, G)$, il est trivial que $\mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{g}(f)$ et que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est stable par $\mathrm{Ad}\,(G(f))$. C'est à dire que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est une polarisation réelle de G en f.

(iv) Soit $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$. Lorsque $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \in P^+(f, G)$ vérifie la condition de Pukanszky forte, $\rho(f, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, G)$ coïncide avec $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$.

Théorème 1.3.9. ([14], Chap. VI) Soient $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$. Alors :
(1) $I(f, \mathfrak{g}) \neq \emptyset$;
(2) $I(f, \mathfrak{g}) \subset M(f, \mathfrak{g})$;
(3) pour $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$, on a $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_1, G) \simeq \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_2, G)$.

L'assertion (3) du théorème 1.3.9 permet que la notation $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$ se simplifie à $\hat{\rho}(f)$; nous confondons parfois une représentation unitaire avec sa classe d'équivalence. Donc, l'application $f \mapsto \hat{\rho}(f)$ fournit une application de $\mathfrak{g}^*$ dans le dual unitaire $\hat{G}$ de G, l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G. En outre, pour $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g}), g \in G$, il vient $g\Delta\mathfrak{h} \in S(g\Delta f, \mathfrak{g})$ et $\hat{\rho}(g\Delta f, g\Delta\mathfrak{h}, G) \simeq \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$. Il en découle que l'application décrite ci-dessus induit l'application, notée aussi $\hat{\rho} = \hat{\rho}_G$ de l'espace des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/G$ de G dans $\hat{G}$.

Théorème 1.3.10. ([14]) L'application $\hat{\rho}$ est une bijection de $\mathfrak{g}^*/G$ sur $\hat{G}$.

Précisons ce résultat un peu plus. On munit $\hat{G}$ de la topologie de Fell ([32], [34], [50]). Soit $\pi \in \hat{G}$, dont l'espace de Hilbert se note $\mathcal{H}_\pi$. On définit dans $\hat{G}$ un voisinage de π comme suit. On se donne des vecteurs en nombre fini $v_1, \ldots, v_k$ dans $\mathcal{H}_\pi$, un sous-ensemble compact C de G et un nombre positif $\epsilon > 0$. Le voisinage $\mathcal{U}(v_1, \ldots, v_k; C; \epsilon)$ de π se constitue des $\rho \in \hat{G}$ telles qu'il existe $w_1, \ldots, w_k$ dans son espace de Hilbert $\mathcal{H}_\rho$ vérifiant

$$|(\pi(g)v_i, v_j) - (\rho(g)w_i, w_j)| < \epsilon,\ g \in C,\ 1 \leq i, j \leq k.$$

Théorème 1.3.11. ([57]) On munit l'espace des orbites $\mathfrak{g}^*/G$ de la topologie quotient et le dual unitaire $\hat{G}$ de la topologie de Fell. L'application de Kirillov-Bernat $\hat{\rho}$ est alors homéomorphisme.

On note simplement dg une mesure de Haar à gauche sur G et introduit l'espace $L^1(G)$ pour la mesure dg. On définit pour $\varphi \in L^1(G)$ l'opérateur $\pi(\varphi)$ dans $\mathcal{H}_\pi$ par

$$\pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi(g)dg.$$

Lorsque $\pi(\varphi)$ est un opérateur compact pour $\varphi \in L^1(G)$ quelconque, on dit que π est une représentation liminaire. G est dit liminaire si toutes les représentations unitaires irréductibles sont liminaires ([4], [25]). On sait que $\pi \in \hat{G}$ est liminaire si et seulement si $\{\pi\} \subset \hat{G}$ est un fermé pour la topologie de Fell ([2], [33]). Alors, le théorème 1.3.11 signifie qu'un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe est liminaire car toutes les orbites coadjointes sont fermées.

Lorsque $G = \exp \mathfrak{g}$ est nilpotent, la bijection $\hat{\rho}$ s'obtient via la formule de caractère de Kirillov [56]. dX désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur G, on pose, pour $\varphi \in \mathcal{D}(G)$,

$$\hat{\varphi}(\ell) = \int_{\mathfrak{g}} \varphi(\exp X) e^{i\ell(X)} dX \ \ (\ell \in \mathfrak{g}^*).$$

Théorème 1.3.12. Supposons que $G = \exp \mathfrak{g}$ est nilpotent. Soient $\pi \in \hat{G}$ et $\Omega(\pi)$ son orbite associée dans $\mathfrak{g}^*$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, l'opérateur $\pi(\varphi)$ est traçable. On peut normaliser la mesure G-invariante sur $\Omega(\pi)$ de sorte qu'on ait la formule

$$\mathrm{Tr}(\pi(\varphi)) = \int_{\Omega(\pi)} \hat{\varphi}(\ell) dv(\ell)$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Contrairement au cas nilpotent, il se peut dans le cas exponentiel que $I(f, \mathfrak{g}) \neq M(f, \mathfrak{g})$. L'ensemble $I(f, \mathfrak{g})$ se caractérise par le théorème suivant.

Théorème 1.3.13. ([14]) Soient $G = \exp \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*, \mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $H\Delta f = f + \mathfrak{h}^\perp$;
(2) $f + \mathfrak{h}^\perp \subset G\Delta f$ et $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$;
(3) $\mathfrak{h} \in M(f + \lambda, \mathfrak{g})$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^\perp$;

(4) $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$.

Définition 1.3.14. Lorsque $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ satisfait à l'assertion (1) du théorème 1.3.13, on dit que $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky.

Remarque. $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky si et seulement si $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \in P^+(f, G)$ vérifie la condition de Pukanszky forte.

Voyons qu'il se peut que $M(f, g) = \emptyset$ si $\mathfrak{g}$ n'est plus exponentielle, ce qui montre la nécessité d'introduire des polarisations (complexes).

Exemple 1.3.15. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4 = \langle X, P, Q, E\rangle_{\mathbb{R}}; [X, P] = -Q, [X, Q] = P, [P, Q] = E$. Prenons $f = E^* \in \mathfrak{g}^*$. Alors $\mathfrak{g}(f) = \mathbb{R}X + \mathbb{R}E$. Comme il n'existe aucune sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ ayant la dimension 3 et contenant $\mathfrak{g}(f)$, on constate que $M(f, \mathfrak{g}) = \emptyset$.

On connaît bien un procédé standard dû à M. Vergne pour construire un élément de $I(f, \mathfrak{g})$. Considérons une bonne suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, c'est à dire une suite de sous-algèbres :

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g},\ \dim(\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1}) = 1\ (1 \leq j \leq n)$$

telle que, si $\mathfrak{g}_j$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{j-1}$ et $\mathfrak{g}_{j+1}$ soient toutes deux des idéaux de $\mathfrak{g}$ et l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_{j-1}$ soit irréductible. Soit $f_j = f|_{\mathfrak{g}_j}$ pour $1 \leq j \leq n$.

Théorème 1.3.16. ([14], Chap. IV) $\mathfrak{h} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{g}_j(f_j)$ appartient à $I(f, \mathfrak{g})$.

Nous appellerons polarisations de Vergne les éléments de $I(f, \mathfrak{g})$ qui sont construits par ce procédé.

Concernant le résultat (3) du théorème 1.3.9, la construction explicite d'un opérateur d'entrelacement entre deux représentations monomiales $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_2, G)$, où $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$, apparaît comme une question naturelle. Pour tout $X \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, on trouve :

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_1/(\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2)} X + \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2)} X = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\Delta_{H_1,G}(h) = \Delta_{H_2,G}(h)\Delta^2_{H_1\cap H_2,H_2}(h)\ (h \in H_1 \cap H_2).$$

Cela étant, pour $\phi \in \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$, la fonction Φ_g sur H_2 définie par

$$\Phi_g(h) = \phi(gh)\chi_f(h)\Delta^{-1/2}_{H_2,G}(h)$$

vérifie la relation

$$\Phi_g(hx) = \Delta_{H_1\cap H_2,H_2}(x)\Phi_g(h)\ (h \in H_2, x \in H_1 \cap H_2).$$

On est donc en mesure d'écrire formellement l'intégrale :

$$(T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}\phi)(g) = \oint_{H_2/H_1\cap H_2} \phi(gh)\chi_f(h)\Delta^{-1/2}_{H_2,G}(h)d\nu(h)\ (g \in G). \qquad (1.3.1),$$

où $\nu = \mu_{H_2,H_1\cap H_2}$.

Au moins au niveau formel, il est clair que la fonction $T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}\phi$ vérifie la condition de covariance pour appartenir à $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_2, G)$ et que l'opérateur $T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}$ commute à l'action de G

par translation à gauche. De plus, si l'intégrale (1.3.1) converge sur l'espace des vecteurs C^∞, nous pourrions même démontrer que $T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}$ fournit un vrai opérateur d'entrelacement. Il n'est donc pas exagéré de dire qu'un des principaux problèmes est la convergence de (1.3.1). Il s'avère que le produit simple H_2H_1 est localement fermé dans G et donc que l'espace homogène $H_2/H_2 \cap H_1$ est homéomorphe à l'espace H_2H_1/H_1. Si donc H_2H_1 est fermé dans G, ce qui est par exemple vrai lorsque G est nilpotent, l'intégrale (1.3.1) est convergente pour toute fonction ϕ continue à support compact modulo H_1. Malheureusement, nous ignorons jusqu'à présent si H_2H_1 est toujours fermé.

Question. Soient G un groupe exponentiel, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}_j \in I(f, \mathfrak{g})$ et $H_j = \exp \mathfrak{h}_j$ $(j = 1, 2)$. Le produit simple H_2H_1 est-il fermé dans G ?

Si $\mathfrak{h}_1$ ou $\mathfrak{h}_2$ est une polarisation de Vergne, on vérifie en prenant une base coexponentielle convenable à $\mathfrak{h}_1$ dans $\mathfrak{g}$ que H_2H_1 est fermé dans G, et en utilisant la transitivité des formes $\mu_{\cdot,\cdot}$ que l'opérateur $T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}$ fournit un vrai opérateur d'entrelacement.

Soit toujours $f \in \mathfrak{g}^*$. On considère trois sous-espaces lagrangiens $W_j (1 \leq j \leq 3)$ de $\mathfrak{g}$ pour la forme bilinéaire B_f et on définit, comme Kashiwara, une forme quadratique Q sur $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ par la formule :

$$Q(X_1, X_2, X_3) = f([X_1, X_2]) + f([X_2, X_3]) + f([X_3, X_1]).$$

L'indice de la forme quadratique Q s'appelle l'indice de Maslov des espaces W_j et se note $\tau(W_1, W_2, W_3)$. Notons les principales propriétés de cet indice.

Lemme 1.3.17. ([58], [59]) Convenons d'écrire τ_{ijk} au lieu de $\tau(W_i, W_j, W_k)$.

(a) $\tau_{123} = -\tau_{213} = -\tau_{132}$.

(b) $\tau_{234} - \tau_{134} + \tau_{124} - \tau_{123} = 0$.

(c) Si $\mathfrak{p}$ est un sous-espace isotrope pour B_f de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{g}(f)$ et si W est un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{g}$, alors $W^{\mathfrak{p}} = (W \cap \mathfrak{p}^f) + \mathfrak{p}$ est lagrangien. De plus si $\mathfrak{p}$ est inclus dans $W_1 \cap W_2 + W_2 \cap W_3 + W_3 \cap W_1$, on a $\tau_{123} = \tau(W_1^{\mathfrak{p}}, W_2^{\mathfrak{p}}, W_3^{\mathfrak{p}})$.

En faisant intervenir une polarisation de Vergne $\mathfrak{h}_0$ en $f \in \mathfrak{g}^*$, on pose

$$T'_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} = e^{\frac{i\pi}{4}\tau(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_2)} T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_0} \circ T_{\mathfrak{h}_0\mathfrak{h}_1}.$$

Théorème 1.3.18. ([1]) L'opèrateur d'entrelacement $T'_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{h}_0$ et vérifie la formule de composition :

$$T'_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_3} \circ T'_{\mathfrak{h}_3\mathfrak{h}_2} \circ T'_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} = e^{\frac{i\pi}{4}\tau(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1)}.$$

De plus $T'_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}$ coïncide avec $T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}$ si au moins $\mathfrak{h}_1$ ou $\mathfrak{h}_2$ est de Vergne.

1.4. Représentation $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ pour un groupe exponentiel

Nous gardons les notations introduites jusqu'ici et nous proposons de montrer le théorème suivant.

Théorème 1.4.1. ([35]) Soient $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h} \in P^+(f, G)$ vérifiant la condition de Pukanszky forte. Si $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G) \neq \{0\}$, $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$

est irréductible et équivalente à la représentation unitaire irréductible associée à l'orbite coadjointe $G\Delta f$.

Démonstration. The théorème est trivial lorsque $\dim G = 1$. Nous allons donc le prouver par récurrence sur $\dim G$. Soit $\dim G = n$, et supposons que le théorème s'établit pour les groupes exponentiels dont la dimension est inférieure à n.

Cas 1. Supposons qu'il existe un idéal $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $f|_{\mathfrak{a}} = 0$.

Posons $A = \exp \mathfrak{a}, \tilde{G} = G/A = \exp \tilde{\mathfrak{g}}$ et $p : G \to \tilde{G}$ la projection canonique. On désigne la différentielle de p par dp qu'on étend par linéarité sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Considérons la suite exacte de groupes exponentiels :

$$1 \to A \to G \xrightarrow{p} \tilde{G} \to 1,$$

et prenons $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ tel que $\tilde{f} \circ dp = f$.

Puisque $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{h}$, il est évident que $\tilde{\mathfrak{h}} = dp(\mathfrak{h})$ appartient à $P^+(\tilde{f}, \tilde{G})$. Comme à la proposition 1.2.16, $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{a}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ de sorte que $\tilde{\mathfrak{h}}$ vérifie la condition de Pukanszky forte. Il résulte de la proposition 1.2.16 que

$$\rho(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{G}) \circ p \simeq \rho(f, \mathfrak{h}, G). \tag{1.4.1}$$

Notre hypothèse assure donc que $\mathcal{H}(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{G}) \neq \{0\}$. Comme $\dim \tilde{G} < \dim G$, l'hypothèse de récurrence dit qu'il existe $\tilde{\mathfrak{h}}_0 \in I(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{g}})$ tel que

$$\rho(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{G}) \simeq \hat{\rho}(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}_0, \tilde{G}). \tag{1.4.2}$$

En posant $\mathfrak{h}_0 = (dp)^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}_0)$, on voit que

$$\hat{\rho}(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}_0, \tilde{G}) \circ p \simeq \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_0, G) \tag{1.4.3}$$

et que $\mathfrak{h}_0 \in I(f, \mathfrak{g})$. Les trois relations (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3) donnent le résultat attendu.

Cas 2. Il n'existe aucun idéal $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ tel que $f|_{\mathfrak{a}} = 0$.

(i) Sous-cas où $\mathfrak{e} = (\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}$:

On choisit et fixe un sous-espace supplémentaire $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{e}$ dans $\mathfrak{g}$, et identifie $\mathfrak{e}^*$ avec $\mathfrak{m}^\perp$ de sorte que $\mathfrak{e}^* \subset \mathfrak{g}^*$. Soit $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{e}^*$ l'application restriction de sorte que $p|_{\mathfrak{e}^*}$ est l'application identique. Écrivons $\ell' = p(\ell) = \ell|_{\mathfrak{e}}$ pour $\ell \in \mathfrak{g}^*$.

Il se voit aussitôt que $\mathfrak{h} \in P^+(f', E)$. On va montrer que $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky forte en tant que polarisation de $\mathfrak{e}$. D'abord, $\mathfrak{e}$ étant une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$,

$$p(E\Delta f) = (E\Delta f)' = E\Delta f' \subset \mathfrak{e}^*. \tag{1.4.4}$$

Voyons maintenant que $p^{-1}(E\Delta f') = E\Delta f$. Pour tous $a \in E, \ell \in \mathfrak{e}^\perp$, il est clair que $a\Delta\ell \in \mathfrak{e}^\perp$. On décompose $a\Delta f$ $(a \in E)$ comme

$$a\Delta f = (a\Delta f)' + \hat{f}, \ \hat{f} \in \mathfrak{e}^\perp.$$

On a donc, pour $\ell \in \mathfrak{e}^\perp$ arbitraire,

$$a\Delta \left(f - a^{-1}\Delta(\hat{f} - \ell) \right) = (a\Delta f)' + \ell,$$

où $a^{-1}\Delta(\hat{f} - \ell) \in \mathfrak{e}^{\perp}$. Puisque $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky forte en tant que polarisation de $\mathfrak{g}$ en $f \in \mathfrak{g}^*$, la proposition 1.2.11 entraîne qu'il existe $b \in D \subset E$ tel que $b\Delta f = f - a^{-1}\Delta(f - \ell)$. D'où,

$$(ab)\Delta f = (a\Delta f)' + \ell. \tag{1.4.5}$$

Comme $a \in E, \ell \in \mathfrak{e}^{\perp}$ sont arbitraires, les relations (1.4.4), (1.4.5) montrent que

$$p^{-1}(E\Delta f') = E\Delta f, \tag{1.4.6}$$

ce qui implique que $E\Delta f' = E\Delta f \cap \mathfrak{e}^*$ est un fermé de $\mathfrak{e}^*$ et que $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky forte en tant que polarisation de $\mathfrak{e}$ en f'.

Or $\rho(f, \mathfrak{h}, G) = \operatorname{ind}_E^G \rho(f', \mathfrak{h}, E)$, et donc si $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G) \neq \{0\}$, on a $\mathcal{H}(f', \mathfrak{h}, E) \neq \{0\}$. Ce que $\dim E < \dim G$ nous permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour assurer qu'il existe $\mathfrak{h}_0 \in I(f', \mathfrak{e})$ tel que

$$\rho(f', \mathfrak{h}, E) \simeq \hat{\rho}(f', \mathfrak{h}_0, E). \tag{1.4.7}$$

D'après le théorème 1.3.9, $\mathfrak{h}_0 \in M(f', \mathfrak{e})$. Comme $\mathfrak{h} \in P(f', E)$,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(f)).$$

D'où $\mathfrak{h}_0 \in M(f, \mathfrak{g})$. Montrons que $\mathfrak{h}_0$ vérifie la condition de Pukanszky. Nous avons

$$f + {\mathfrak{h}_0}^{\perp,\ \mathfrak{g}^*} = f' + {\mathfrak{h}_0}^{\perp,\ \mathfrak{e}^*} + \mathfrak{e}^{\perp,\ \mathfrak{g}^*}. \tag{1.4.8}$$

Comme $\mathfrak{h}_0 \in I(f', \mathfrak{e})$, il découle du théorème 1.3.11 que $\mathfrak{h}_0$ vérifie la condition de Pukanszky au niveau de E, i.e.

$$f' + {\mathfrak{h}_0}^{\perp,\ \mathfrak{e}^*} \subset E\Delta f'. \tag{1.4.9}$$

Les propriétés (1.4.6), (1.4.8), (1.4.9) entraîne que

$$f + {\mathfrak{h}_0}^{\perp,\ \mathfrak{g}^*} \subset G\Delta f,$$

à savoir que $\mathfrak{h}_0 \in M(f, \mathfrak{g})$ vérifie la condition de Pukanszky et par conséquent que $\mathfrak{h}_0 \in I(f, \mathfrak{g})$. Ainsi, $\operatorname{ind}_E^G \hat{\rho}(f', \mathfrak{h}_0, E) = \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_0, G)$ est irréductible. D'après (1.4.7),

$$\rho(f, \mathfrak{h}, G) = \operatorname{ind}_E^G \rho(f', \mathfrak{h}, E) \simeq \operatorname{ind}_E^G \hat{\rho}(f', \mathfrak{h}_0, E) = \hat{\rho}_G(f).$$

(ii) Sous-cas où $\mathfrak{e} = \mathfrak{g}$ (i.e. $\mathfrak{h}$ est totalement complexe) : Dans ce cas le théorème 1.2.21 dit que $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ est irréductible. Supposons donc que $\rho(f, \mathfrak{h}, G) = \hat{\rho}_G(f_0)$ et montrons que $f_0 \in G\Delta f$.

Lemme 1.4.2. Lorsque G est exponentiel, $\mathfrak{d}$ est un idéal de $\mathfrak{e}$.

Démonstration. Comme $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ sont mutuellement orthogonaux par rapport à B_f, on a

$$0 = f([x, [y, z]]) = f([[x, y], z]) + f([y, [x, z]]) \ (x \in \mathfrak{d},\ y, z \in \mathfrak{e}).$$

Donc,

$$B_f(\operatorname{ad}(x)y, z) = -B_f(y, \operatorname{ad}(x)z). \tag{1.4.10}$$

Notons $A(x)$ l'endomorphisme induit sur $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ par $\mathrm{ad}(x)$. De ce que $x \in \mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{h}}$, L'endomorphisme $\mathrm{ad}(x)$ étendu sur $\mathfrak{e}_{\mathbb{C}}$ laisse $\mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{h}}$ stables. Il s'ensuit que $A(x)$ laisse $\mathfrak{h}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}, \bar{\mathfrak{h}}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}$ stables et par suite commute à J. Il résulte de (1.4.10) que, pour $y, z \in \mathfrak{e}/\mathfrak{d}$,

$$\hat{B}_f(A(x)y, Jz) = -\hat{B}_f(y, A(x)Jz) = -\hat{B}_f(y, JA(x)z),$$

autrement dit

$$S_f(A(x)y, z) = -S_f(y, A(x)z).$$

Cela veut dire que $A(x)$ est anti-symétrique pour la forme bilinéaire symétrique définie positive S_f. Ses valeurs propres sont donc purement imaginaires tandis que $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ est de type exponentiel comme $\mathfrak{d}$-module par A. On en conclut que $A(x) = 0$ et que $[\mathfrak{d}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{d}$. c.q.f.d.

Revenons à la suite de la démonstration du théorème.

Corollaire 1.4.3. $\mathfrak{d}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{d} \leq 1$. En outre, $\mathfrak{z}$ désignant le centre de $\mathfrak{g}$, il s'avère que $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}$.

Démonstration. Comme $\mathfrak{e} = \mathfrak{g}$, le lemme (1.4.2) implique que $\mathfrak{d}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Posons $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} \cap \ker f$. Puisque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{d}$ et que $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{d}]) = f([\mathfrak{e}, \mathfrak{d}]) = \{0\}$, on trouve que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{b}$. Ainsi, $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et $f(\mathfrak{b}) = \{0\}$. L'hypothèse du sous-cas exige $\mathfrak{b} = \{0\}$. Enfin, $\dim \mathfrak{d} \leq 1$ et $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{z}$. D'autre part, il est trivial que $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{d}$. En somme, $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}$. c.q.f.d.

Afin de continuer la démonstration du théorème, on a besoin du théorème suivant.

Théorème 1.4.4. (Invariance de domaines [70]) Soient U_1, U_2 deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$ homéomorphes l'un à l'autre. Pourvu que U_1 soit un ouvert de $\mathbb{R}^m$, il en est de même pour U_2.

Allons continuer la démonstration du théorème. Si $\dim \mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{g}(f) = \{0\}$ et $\dim G\Delta f = \dim \mathfrak{g}^* = n$. Compte tenu du lemme 1.3.8, l'orbite $G\Delta f$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et donc elle est un ouvert de $\mathfrak{g}^*$ d'après le théorème 1.4.4. Pourtant, $G\Delta f = E\Delta f$ est un fermé de $\mathfrak{g}^*$ car $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky forte. Ces observations signifient que $G\Delta f = \mathfrak{g}^*$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\dim \mathfrak{d} = 1$.

De ce qui précède $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z} = \mathbb{R}Z$, $f(Z) \neq 0$ et

$$\dim G\Delta f = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}(f) = n - 1. \tag{1.4.11}$$

Posons $V = \{\ell \in \mathfrak{g}^*; \ell(Z) = f(Z)\}$. Comme $Z \in \mathfrak{z}$, $(a\Delta f)(Z) = f(Z)$ pour tout $a \in G$, i.e. $G\Delta f \subset V$. Le lemme 1.3.8 et le fait (1.4.11) disent que l'orbite $G\Delta f$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$, et le théorème 1.4.4 implique que $G\Delta f$ est un ouvert de V. Pourtant, $G\Delta f$ est un fermé de V car $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky forte. Enfin,

$$G\Delta f = V. \tag{1.4.12}$$

Soit maintenant $\mathfrak{h}_0 \in I(f_0, \mathfrak{g})$, d'où $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}_0$. Un opérateur d'entrelacement entre $\hat{L} = \hat{\rho}(f_0, \mathfrak{h}_0, G) = \hat{\rho}_G(f_0)$ et $L = \rho(f, \mathfrak{h}, G)$ se note

$$R : \hat{\mathcal{H}}(f_0, \mathfrak{h}_0, G) \to \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G).$$

On a donc, pour tous $\phi \in \hat{\mathcal{H}}(f_0, \mathfrak{h}_0, G)$ et $g \in G$,

$$\left(R\circ\hat{L}(g)\right)(\phi) = (L(g)\circ R)(\phi).$$

On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$ et pose $g_0 = \exp(t_0 Z)$. g_0 étant central dans G, on a pour $g \in G$:

$$\left(\hat{L}(g_0)\phi\right)(g) = \phi(\exp(-t_0 Z)g) = \phi(g\exp(-t_0 Z)) = e^{it_0 f_0(Z)}\phi(g).$$

Donc,

$$\left(R\circ\hat{L}(g_0)\right)(\phi) = e^{it_0 f_0(Z)} R(\phi).$$

D'autre part,

$$((L(g_0)\circ R)(\phi))(g) = (R\phi)(\exp(-t_0 Z)g) = (R\phi)(g\exp(-t_0 Z)) = e^{it_0 f(Z)}(R\phi)(g).$$

Donc,

$$(L(g_0)\circ R)(\phi) = e^{it_0 f(Z)} R(\phi).$$

Tout compte fait, $e^{it_0 f_0(Z)} = e^{it_0 f(Z)}$ pour $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. Il s'ensuit que

$$f_0(Z) = f(Z). \tag{1.4.13}$$

On conclut de (1.4.12), (1.4.13) que $f_0 \in G\Delta f$. c.q.f.d.

Pour une étude beaucoup plus avancée de la représentation induite holomorphe d'un groupe exponentiel, voir [36].

§2. Désintégration

Soit toujours $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il est bien connu qu'il existe une forte dualité entre l'induction et la restriction de représentations. Dans ce chapitre nous allons étudier leur désintégrations en irréductibles pour établir la réciprocité de Frobenius.

2.1. Représentations monomiales

Commençons par un lemme simple.

Lemme 2.1.1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, où opère G par une représentation de type exponentiel. Soit v un vecteur non nul de V tel qu'on ait $g\Delta v = v$ pour tout $g \in G$. On considère, pour $x \in V$ arbitrairement fixé, la ligne droite $L_x = x + \mathbb{R}v$. Alors, il y a deux possibilités :

$$\text{ou bien } L_x \cap G\Delta x = x \text{ ou bien } L_x \cap G\Delta x = L_x.$$

En d'autres termes, la ligne droite passant par x et ayant la direction du vecteur invariant v rencontre l'orbite $G\Delta x$ en un seul point, ou bien y est complètement contenu.

Démonstration. Notons V_0 le sous-espace de V engendré par v, $\bar{V}$ l'espace quotient V/V_0 et $p : V \to \bar{V}$ l'application canonique. La représentation de G sur $\bar{V}$, qui s'obtient par passage au quotient, est évidemment une représentation de type exponentiel. Ceci étant, pour qu'on ait $g\Delta x \in L_x$ $(g \in G)$, il faut et il suffit que g appartienne à $G(p(x))$. D'autre part, en posant $g\Delta x = x + \lambda(g)v$, on constate aussitôt que λ définit un homomorphisme de $G(p(x))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $G(p(x))$ est connexe par le théorème 1.3.7, on a ou bien $\lambda \equiv 0$ ou bien l'image de λ coïncide avec $\mathbb{R}$ tout entier. De là il suffit d'observer que la partie commune de L_x et de $G\Delta x$ n'est autre que l'ensemble $\{g\Delta x; g \in G(p(x))\}$. c.q.f.d.

Définition 2.1.2. Dans la situation du lemme above, l'orbite $G\Delta x$ est dite saturée dans la direction de v si $L_x \subset G\Delta x$, sinon $G\Delta x$ est dite non-saturée.

Lorsqu'il existe un idéal $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = 1$, une forme linéaire $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\ell|_{\mathfrak{g}_0} = 0$ est un vecteur invariant pour la représentation coadjointe de G. Soient $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathfrak{g}_0$, p la projection de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}_0^*$ et $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$. Le lemme suivant se voit aussitôt de la définition du radical d'une forme bilinéaire alternée.

Lemme 2.1.3. Soient $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et $\ell_0 = p(\ell)$. Si $\mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_0$, alors $\mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_0(\ell_0)$ et $\dim \mathfrak{g}_0(\ell_0) = \dim \mathfrak{g}(\ell) + 1$. Si $\mathfrak{g}(\ell) \not\subset \mathfrak{g}_0$, alors $\mathfrak{g}_0(\ell_0) \subset \mathfrak{g}(\ell)$ et $\dim \mathfrak{g}(\ell) = \dim \mathfrak{g}_0(\ell_0) + 1$.

Lemme 2.1.4. Soient $\ell \in \mathfrak{g}^*, \ell_0 = p(\ell)$ et $\Omega = G\Delta\ell$.

(1) Si l'orbite Ω est saturée dans la direction $\mathfrak{g}_0^\perp$, il existe une famille $\{\omega_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ de G_0-orbites dans $\mathfrak{g}_0^*$ telle que $p(\Omega) = \cup_{s\in\mathbb{R}}\omega_s$, et $\exp(tX)\cdot\omega_s = \omega_{s+t}$. De plus, $G(\ell_0) \subset G_0$.

(2) Si l'orbite Ω est non saturée dans la direction $\mathfrak{g}_0^\perp, p(\Omega) = G_0\Delta\ell_0$.

Démonstration. (1) On a $G = \exp(\mathbb{R}X)\Delta G_0 = G_0\Delta\exp(\mathbb{R}X)$. Posons $\omega_0 = G_0\Delta\ell_0$. Alors $\omega_0 \subset p(\Omega)$ et on constate immédiatement que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tX)\Delta\omega_0$ est une G_0-orbite qui est contenue dans $p(\Omega)$. Posons $\omega_t = \exp(tX)\Delta\omega_0$. Puisque $p(\Omega) = p(G\Delta\ell) = G\Delta\ell_0 = \exp(\mathbb{R}X)\Delta\omega_0$, la réunion des $\{\omega_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est égale à $p(\Omega)$. Par définition de ω_s on a bien $\exp(tX)\Delta\omega_s = \omega_{s+t}$. De plus $\omega_s = \omega_t$ si et seulement si $s = t$. En effet, si $\exp(sX)\Delta\ell_0 \in \omega_t$ on a $\exp(sX)\Delta\ell_0 = \exp(tX)\Delta g_0\Delta\ell_0$ où $g_0 \in G_0$. On a donc $(\exp(t-s)X)\,\Delta g_0 \in G(\ell_0)$. Si on montre que $G(\ell_0) \subset G_0$, on aura $\exp((t-s)X) \in G_0$ donc $s = t$. Vérifions donc que $G(\ell_0) \subset G_0$. Il suffit pour cela de montrer que $\mathfrak{g}(\ell_0) \subset \mathfrak{g}_0$. Le lemme 2.1.3 assure qu'il existe $X_1 \in \mathfrak{g}_0(\ell_0)\backslash\mathfrak{g}(\ell)$, d'où $\lambda = X_1\Delta\ell \neq 0$ appartient à $\mathfrak{g}_0^\perp$. Soit Y un élément quelconque de $\mathfrak{g}(\ell_0)$. Alors $Y\Delta\ell \in \mathfrak{g}_0^\perp$ donc $Y\Delta\ell = (tX_1)\Delta\ell$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $Y - tX_1 \in \mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_0$ donc $Y \in \mathfrak{g}_0$ puisque $X_1 \in \mathfrak{g}_0$.

(2) Comme $\mathfrak{g}(\ell) \not\subset \mathfrak{g}_0$, on a $G = G_0\Delta G(\ell)$. L'orbite $G\Delta\ell$ est donc égale à $G_0\Delta\ell$. On en déduit aussitôt $p(G\Delta\ell) = p(G_0\Delta\ell) = G_0\Delta\ell_0$. c.q.f.d.

Écrivons simplement $\hat{\rho}_0$ au lieu de $\hat{\rho}_{G_0}$.

Proposition 2.1.5. Soit $\pi_0 \in \hat{G_0}$. On suppose que $\pi_0 \simeq \hat{\rho}_0(\ell_0)$ où $\ell_0 \in \mathfrak{g}_0^*$. Soient ℓ un prolongement de ℓ_0 à $\mathfrak{g}$ et $\Omega = G\Delta\ell$.

(1) Si Ω est saturée dans la direction $\mathfrak{g}_0^\perp$, alors $\mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_0 \simeq \hat{\rho}(\ell)$.

(2) Si Ω est non saturée dans la direction $\mathfrak{g}_0^\perp$, alors $\mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_0 \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \hat{\rho}(\ell^\nu)d\nu$, où $\ell^\nu \in \mathfrak{g}*$ est définie par $\ell^\nu|_{\mathfrak{g}_0} = \ell_0$ et $g^\nu(X) = -2\pi\nu$ où X est un élément fixé de $\mathfrak{g}(\ell)\backslash\,(\mathfrak{g}(\ell)\cap\mathfrak{g}_0)$.

Démonstration. (1) Soit $\mathfrak{h}$ une polarisation de Vergne de $\mathfrak{g}$ en ℓ construite à partir d'une bonne suite de sous-algèbres qui passe par $\mathfrak{g}_0$. Alors $\mathfrak{h} \in I(\ell, \mathfrak{g})$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, d'où $\mathfrak{h} \in$

$I(\ell_0, \mathfrak{g}_0)$. Il en résulte

$$\operatorname{ind}_{G_0}^{G} \pi_0 \simeq \operatorname{ind}_{G_0}^{G} \left(\operatorname{ind}_{H}^{G_0} \chi_{\ell_0}\right) \simeq \hat{\rho}(\ell),$$

où $H = \exp \mathfrak{h}$, ce qui prouve l'assertion.

(2) Il est clair que chaque G-orbite qui rencontre $\ell + \mathfrak{g}_0^\perp$ est non saturée dans la direction $\mathfrak{g}_0^\perp$. Soit X un élément fixé de $\mathfrak{g}(\ell) \setminus (\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{g}_0)$. On définit $\ell^\nu \in \mathfrak{g}^*$ ($\nu \in \mathbb{R}$) par

$$\ell^\nu|_{\mathfrak{g}_0} = \ell_0, \ \ell^\nu(X) = -2\pi\nu.$$

On construit $\mathfrak{h} \in I(\ell, \mathfrak{g})$ comme dans (1). Il se trouve immédiatement que $\mathfrak{h} \in I(\ell^\nu, \mathfrak{g})$. Posons $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ et $H_0 = \exp \mathfrak{h}_0$.

Montrons $\operatorname{ind}_{H_0}^{H} \chi_{\ell_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{\ell^\nu} d\nu$. Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions ϕ de H dans $\mathbb{C}$, continues à support compact modulo H_0 et telles que

$$\phi(hh_0) = \chi_\ell(h_0)^{-1}\phi(h)$$

pour tout $h \in H$ et $h_0 \in H_0$. Comme $\mathfrak{h}_0$ est un idéal de $\mathfrak{h}$, il existe sur H/H_0 une mesure γ invariante par H. Notons ρ la représentation $\operatorname{ind}_{H_0}^{H} \chi_{\ell_0}$. Son espace $\mathcal{H}_\rho$ est donc complété de $\mathcal{C}$ pour la norme

$$\|\phi\| = \left(\int_{H/H_0} |\phi(h)|^2 d\gamma(hH_0)\right)^{1/2}.$$

L'application $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ avec $\tilde{\phi}(t) = \phi(\exp(tX))$ permet d'identifier $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, γ s'identifie donc à la mesure de Lebesgue et $\mathcal{H}_\rho$ s'identie à $L^2(\mathbb{R})$. On a donc $\|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(\exp(tX))|^2 dt$.

L'espace de la représentation $\sigma = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{\ell^\nu} d\nu$ est $L^2(\mathbb{R})$ et, si $h \in H$ et $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, on a $(\sigma(h)\phi)(\nu) = \chi_{\ell^\nu}(h)\phi(\nu)$.

Soit $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier de $L^2(\mathbb{R})$. Montrons que l'opérateur U de $\mathcal{H}_\rho$ dans $L^2(\mathbb{R})$ défini par $U\phi = \mathcal{F}\tilde{\phi}$ réalise l'équivalence de ρ à σ. U est évidemment unitaire et bijectif puisque $\mathcal{F}$ l'est ainsi que l'application $\phi \mapsto \tilde{\phi}$. Il suffit donc de vérifier que U entrelace ρ et σ. Soient $h \in H, \nu \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{H}_\rho$, on a

$$((U \circ \rho(h))\phi)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t} \phi(h^{-1}\exp(tX))dt,$$

$$((\sigma(h) \circ U)(\phi))(\nu) = \chi_{\ell^\nu}(h) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t} \phi(\exp(tX))dt.$$

Puisque $H = \exp(\mathbb{R}X)\Delta H_0 = H_0 \Delta \exp(\mathbb{R}X)$, il suffit de vérifier l'égalité des expression ci-dessus pour $h = \exp(sX)$ ($s \in \mathbb{R}$) et $h \in H_0$. Or, si $X_0 \in \mathfrak{h}_0$,

$$\begin{aligned} ((U \circ \rho(\exp X_0)(\phi))(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t} \phi(\exp(-X_0)\exp(tX))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t} \phi\left(\exp(tX)\exp\left(e^{\operatorname{ad}(-tX)}(-X_0)\right)\right) dt. \end{aligned}$$

Mais $\exp\left(e^{\mathrm{ad}(-tX)}(-X_0)\right) = \exp(-X_0+Y)$ où $Y \in [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \ker \ell \cap \mathfrak{h}_0$. Donc,

$$((U \circ \rho(\exp X_0))(\phi))(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t}\chi_{\ell_0}\left(\exp(-X_0+Y)\right)^{-1}\phi(\exp(tX))dt.$$

De plus, $\chi_{\ell_0}(\exp(-X_0+Y)) = e^{i\ell_0(-X_0+Y)} = e^{-i\ell_0(X_0)} = \chi_{\ell_0}(\exp(X_0))^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned}((U \circ \rho(\exp X_0))(\phi))(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t}\chi_{\ell_0}(\exp(X_0))\phi(\exp(tX))dt \\ &= ((\sigma(\exp(X_0))\circ U)(\phi))(\nu).\end{aligned}$$

D'autre part, si $\kappa \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}((U \circ \rho(\exp(\kappa X)))(\phi))(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t}\phi(\exp((t-\kappa)X)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t}e^{-2i\pi\nu\kappa}\phi(\exp(tX))dt \\ &= \chi_{\ell^\nu}(\exp(\kappa X))\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t}\phi(\exp(tX))dt \\ &= ((\sigma(\exp(\kappa X))\circ U)\phi)(\nu),\end{aligned}$$

ce qui achève de prouver que $\mathrm{ind}_{H_0}^H \chi_\ell \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{\ell^\nu} d\nu$.

On en déduit aussitôt à l'aide du théorème 1.1.1 que

$$\mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_0 \simeq \mathrm{ind}_{G_0}^G \left(\mathrm{ind}_{H_0}^{G_0} \chi_{\ell_0}\right) \simeq \mathrm{ind}_H^G \left(\mathrm{ind}_{H_0}^H \chi_{\ell_0}\right) \simeq \mathrm{ind}_H^G \left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{\ell^\nu} d\nu\right).$$

Comme $\mathrm{ind}_H^G \left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{\ell^\nu} d\nu\right) \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \left(\mathrm{ind}_H^G \chi_{\ell^\nu}\right) d\nu$ et que $\mathfrak{h} \in I(\ell^\nu, \mathfrak{g})$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_0 \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \hat{\rho}(\ell^\nu) d\nu,$$

ce qui termine la démonstration. c.q.f.d.

Nous nous donnons maintenant $\mathfrak{h} \in S(f,\mathfrak{g})$ et nous proposons d'étudier la représentaion monomiale $\tau = \hat{\rho}(f,\mathfrak{h},G) = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$. Le sous-espace affine $\Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{g}^*$ joue un rôle principal pour étudier τ. Ici nous nous intéressons à sa désintégration centrale canonique. Notons $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$, i.e. minimal parmi des idéaux non centraux. Bien évidemment, $\dim \mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{z}) \leq 2$.

Comme tout le monde l'a sans doute remarqué, quand il s'agit des groupes exponentiels, l'outil principal de démonstrations est la récurrence. On utilise la récurrence sur $\dim \mathfrak{g}, \dim \mathfrak{h}, \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Il est parfois sans encombre de passer de $\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{h}+\mathfrak{z}$, ce qui nous amène au cas où $\mathfrak{h}$ contiendrait $\mathfrak{z}$. Si $f \in \mathfrak{g}^*$ s'annule sur un idéal non nul de $\mathfrak{g}$, on est en mesure de descendre au quotient par cet idéal. Après ces observations on se trouve dans le cas où $\dim \mathfrak{z} \leq 1, \dim \mathfrak{a} \leq 3$. Si $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{h} + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, il existe un idéal $\mathfrak{g}_0$ de

$\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ tel que $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = 1$. On est alors en mesure de combiner la proposition 2.1.5 avec l'hypothèse de récurrence appliquée à $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, soient $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ et $K = \exp \mathfrak{k}$. Compte tenu du théorème d'induction par étages, notre première affaire est d'analyser la représentation monomiale $\mathrm{ind}_H^K \chi_f$.

Exemple 2.1.6. (1) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_2$ avec $\mathfrak{g}_2 = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y : [X, Y] = Y$. Soient $f \in \mathfrak{g}_2^*, \mathfrak{h} = \mathbb{R}X$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Alors $\mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_{Y^*} \oplus \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_{-Y^*}$ avec $H' = \exp \mathfrak{h}', \mathfrak{h}' = \mathbb{R}Y$.

(2) Soit $G = \exp(\mathfrak{g}_3(\alpha))$ avec $\mathfrak{g}_3(\alpha) = \langle T, Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}} : [T, Y_1] = Y_1 - \alpha Y_2, [T, Y_2] = Y_2 + \alpha Y_1$ $(0 \neq \alpha \in \mathbb{R})$. Soient $f \in \mathfrak{g}_3(\alpha)^*, \mathfrak{h} = \mathbb{R}T$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Alors

$$\mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq \int_{[0,2\pi]}^{\oplus} \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_{\hat{\theta}} d\theta$$

avec $H' = \exp(\mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2), \hat{\theta} = (\cos\theta)Y_1^* + (\sin\theta)Y_2^* \in \mathfrak{g}_3(\alpha)^*$.

(3) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_4$ avec $\mathfrak{g}_4 = \langle T, X, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}} : [T, X] = -X, [T, Y] = Y, [X, Y] = Z$. Soient $f = \alpha T^* + \beta Z^* \in \mathfrak{g}_4^*$ $(\beta \neq 0), \mathfrak{h} = \langle T, X, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Alors $\mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_f$ avec $H' = \exp \mathfrak{h}', \mathfrak{h}' = \langle T, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$.

(4) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_6$ avec $\mathfrak{g}_6 = \langle T, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z \rangle_{\mathbb{R}} : [T, X_1] = -X_1 - \alpha X_2, [T, X_2] = -X_2 + \alpha X_1, [T, Y_1] = Y_1 - \alpha Y_2, [T, Y_2] = Y_2 + \alpha Y_1, [X_i, Y_j] = \delta_{ij} Z$ $(0 \neq \alpha \in \mathbb{R})$. Soient $f = \beta T^* + \gamma Z^*$ $(\gamma \neq 0), \mathfrak{h} = \langle T, X_1, X_2, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Alors $\mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_f$ avec $H' = \exp \mathfrak{h}', \mathfrak{h}' = \langle T, Y_1, Y_2, Z \rangle_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Ces faits sont bien connus ([14], [74]), peut-être sauf (2) qu'on va voir ici. Il suffit pour cela qu'on continue un peu plus loin les observations faites à la page 135 de [14]. On y emprunte certaines notations. Au moyen de la bijection $\xi Y_1 + \eta Y_2 \mapsto \xi + i\eta,\ i = \sqrt{-1}$, on identifie $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$ au plan $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit $\lambda = f(T)$. La représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ se réalise dans $L^2(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}^2)$ par la formule suivante : pour $\xi_0 \in \mathbb{R}, z_0, z \in \mathbb{C}$ et $\phi \in L^2(\mathbb{C})$,

$$\tau(\exp(\xi_0 T) \exp z_0)\phi(z) = e^{\xi_0(i\lambda - 1)} \phi\left(z e^{-\xi_0(1 - i\alpha)} - z_0\right).$$

Soient $\mathcal{F}$ l'isomorphisme de Fourier de $L^2(\mathbb{C})$, $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ et dz la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. Un calcul direct vérifie : pour $\hat{g} = \exp(\xi_0 T) \exp z_0 \in G, \psi \in L^2(\mathbb{C})$ et $v \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}\left(\tau(\hat{g})\psi\right)(v) = e^{\xi_0(i\lambda + 1) + i(v | e^{\xi_0(1 - i\alpha)} z_0)} \mathcal{F}\psi\left(e^{\xi_0(1 + i\alpha)} v\right).$$

Or, à l'aide de la duale $\{Y_1^*, Y_2^*\}$ de $\mathfrak{a}^*$ et de la bijection $\xi Y_1^* + \eta Y_2^* \mapsto \xi + i\eta$, $\mathfrak{a}^*$ s'identifie à $\mathbb{C}$. Alors $\xi' + i\eta' = \exp(tT) \cdot (\xi + i\eta)$ se calcul par

$$\xi' = e^{-t}\left(\xi \cos(\alpha t) + \eta \sin(\alpha t)\right), \ \eta' = e^{-t}\left(\xi \sin(-\alpha t) + \eta \cos(\alpha t)\right).$$

On en constate que l'orbite coadjointe Ω_θ passant par le point $e^{i\theta}$ s'obtient comme $e^{-t + i(\theta - \alpha t)}$, t décrivant $\mathbb{R}$, et que e^{-2t} est le déterminant fonctionnel de la transformation des variables $(\xi', \eta') \mapsto (t, \theta)$.

Posons $\tau_1 = \mathcal{F} \circ \tau \mathcal{F}^{-1}$. Comme, pour $\hat{g} = \exp(\xi_0 T) \exp z_0 \in G$,

$$\tau_1(\hat{g})\phi\left(e^{-t + i(\theta - \alpha t)}\right) = e^{\xi_0(1 + i\lambda) + i(e^{-t + i(\theta - \alpha t)} | e^{\xi_0(\theta - \alpha t)} z_0)} \phi\left(e^{(-t + \xi_0)(1 + i\alpha) + i\theta}\right),$$

τ_1 laisse stable $L^2(\Omega_\theta)$. Cela nous donne une représentation $\hat{\tau}$ de G, qui agit par la formule

$$\hat{\tau}(\hat{g})\Psi(t) = e^{\xi_0(1+i\lambda)+i(e^{i\theta}|e^{(\xi_0-t)(1-i\alpha)}z_0)}\Psi(t-\xi_0)$$

dans l'espace des fonctions Ψ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2t}|\Psi(t)|^2 dt < +\infty.$$

Toutefois $\hat{\tau}$ n'est autre que $\pi_\theta = \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_{\hat{\theta}}$. En effet,

$$\pi_\theta(\hat{g})\phi(x) = e^{i(e^{i\theta}|e^{(\xi_0-x)(1-i\alpha)}z_0)}\phi(x-\xi_0)\ (x \in \mathbb{R})$$

pour $\hat{g} \in G$ comme avant et $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Finalement on retrouve $\hat{\tau}$ en transférant π_θ par l'application qui à $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ associe $\Phi \in L^2(\mathbb{R}; e^{-2x}dx)$, $\Phi(x) = e^{(1+i\lambda)x}\phi(x)$, ce qui achève la démonstration. c.q.f.d.

Le chemin de raisonnements qu'on vient d'esquisser nous mène au résultat suivant. On prend sur Γ_τ une mesure finie $\tilde{\mu}$ équivalente à la mesure de Lebesgue et la considère comme une mesure sur $\mathfrak{g}^*$. Posons $\mu = \hat{\rho}_*(\tilde{\mu})$, l'image de $\tilde{\mu}$ par l'application de Kirillov-Bernat $\hat{\rho} : \mathfrak{g}^* \to \hat{G}$. Pour $\pi \in \hat{G}$, $\Omega(\pi) = \Omega_G(\pi)$ désigne l'orbite coadjointe de G associée à π et $m(\pi)$ le nombre des H-orbites contenues dans $\Gamma_\tau \cap \Omega(\pi)$.

Théorème 2.1.7. ([19], [39])

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi). \tag{2.1.1}$$

Généralisons un petit peu ce résultat. On se donne un sous-groupe $K = \exp \mathfrak{k}$ et $\sigma \in \hat{K}$ pour étudier la représentation induite $\mathrm{ind}_K^G \sigma$. On désigne par $\omega(\sigma)$ l'orbite coadjointe $\hat{\rho}_K^{-1}(\sigma) \subset \mathfrak{k}^*$ de K associée à σ, et par $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$ l'application restriction. Une mesure K-invariante sur $\omega(\sigma)$ et une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{k}^\perp$ déterminent une mesure $\hat{\mu}$ sur la sous-variété $p^{-1}(\omega(\sigma))$ de $\mathfrak{g}^*$. On prend une mesure finie $\tilde{\mu}$ sur $\mathfrak{g}^*$ équivalente à $\hat{\mu}$ et pose $\mu = (\hat{\rho}_G)_*(\tilde{\mu})$. Puis, pour $\pi \in \hat{G}$ on note $n_\pi(\sigma)$ le nombre des K-orbites contenues dans $\Omega(\pi) \cap p^{-1}(\omega(\sigma))$. Puisque σ est monomiale, le théorème 2.1.7 se généralise :

Théorème 2.1.8. ([19], [41])

$$\mathrm{ind}_K^G \sigma \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} n_\pi(\sigma)\pi d\mu(\pi).$$

2.2. Restriction de représentations unitaires

On se place dans la situation décrite au début de la section précédente. Gardons les notations utilisées à la proposition 2.1.5. Soit $\pi \in \hat{G}$. On étudie la restriction $\pi|_{G_0}$ de π à G_0.

Proposition 2.2.1. ([52]) Soit $\pi = \hat{\rho}(\ell)$ avec $\ell \in \mathfrak{g}^*$.

(1) Supposons que l'orbite $G\Delta\ell$ est saturée dans la direction $\mathfrak{g}_0^{\perp}$. Soit $X \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}_0$. On a

$$\pi|_{G_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \hat{\rho}_0(\ell_s)ds,$$

où $\ell_s = \exp(sX)\Delta\ell_0$.

(2) Supposons que l'orbite $G\Delta\ell$ est non saturée dans la direction $\mathfrak{g}_0^{\perp}$. Alors $\pi|_{G_0} \simeq \hat{\rho}_0(\ell_0)$.

Démonstration. (1) On utilise le théorème des sous-groupes de Mackey ([63]). Soient $\mathfrak{h}$ une polarisation de Vergne de $\mathfrak{g}$ en ℓ construite à partir d'une bonne suite de sous-algèbres qui passe par $\mathfrak{g}_0$, et $H = \exp\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{h} \in I(\ell, \mathfrak{g})$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Vérifions que H et G_0 sont régulièrement reliés. Comme $H \subset G_0$, les doubles classes $HgG_0 = HG_0g = G_0g$ sont les classes modulo G_0. Par suite, l'espace des doubles classes est le groupe G/G_0. Il est donc dénombrablement séparé et les sous-groupes K et G_0 sont bien régulièrement reliés. Le groupe G/G_0 s'identifiant à $\mathbb{R}$ par l'application $s \mapsto \exp(sX)G_0$, on peut choisir comme mesure admissible ([63]) la mesure de Haar sur G/G_0 donc la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\pi|_{G_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} V_t dt,$$

où V_t est la représentation de G_0 induite par la représentation

$$\sigma_t : g_0 \mapsto \chi_\ell(\exp(tX)g_0\exp(-tX))$$

du sous-groupe $H_t = G_0 \cap (\exp(-tX)H\exp(tX)) = \exp(-tX)H\exp(tX)$ de G_0. Mais σ_t n'est autre que $\exp(-tX)\Delta\chi_\ell = \chi_{\exp(-tX)\Delta\ell}$. Donc,

$$V_t \simeq \operatorname{ind}_{H_t}^{G_0} \chi_{\exp(-tX)\cdot\ell} \simeq \exp(-tX)\cdot\left(\operatorname{ind}_H^{G_0}\chi_\ell\right) \simeq \exp(-tX)\cdot\hat{\rho}_0(\ell_0).$$

Ainsi, V_t est irréductible et l'algèbre de Lie de H_t appartient à $I(\exp(-tX)\cdot\ell_0, \mathfrak{g}_0)$. D'où, $V_t \simeq \hat{\rho}_0(\exp(-tX)\cdot\ell_0)$. Si on pose $\ell_s = \exp(sX)\cdot\ell_0$, on obtient la désintégration cherchée :

$$\pi|_{G_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \hat{\rho}_0(\ell_{-s})ds \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \hat{\rho}_0(\ell_s)ds.$$

(2) Si on construit une polarisation de Vergne $\mathfrak{h} \in I(\ell, \mathfrak{g})$ comme plus haut, il vient que $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0 \in I(\ell_0, \mathfrak{g}_0)$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{g}(\ell)$. $\mathfrak{h}_0$ étant un idéal de $\mathfrak{h}$, $H = H_0\exp(\mathbb{R}X)$ avec $H_0 = \exp\mathfrak{h}_0$. Appliquons encore le théorème des sous-groupes de Mackey au couple (H, G_0). On remarque qu'il n'y a qu'une seule classe double car $HG_0 = H_0(\exp(\mathbb{R}X)G_0) = G$, ce qui prouve que H et G_0 sont régulièrement reliés. On a donc

$$\pi|_{G_0} \simeq \operatorname{ind}_{G_0\cap H}^{G_0}\chi_{\ell_0}.$$

Mais $G_0 \cap H = H_0$ et comme $\mathfrak{h}_0 \in I(\ell_0, \mathfrak{g}_0)$, on a $\operatorname{ind}_{G_0\cap H}^{G_0}\chi_{\ell_0} \simeq \hat{\rho}_0(\ell_0)$. Donc, $\pi|_{G_0} \simeq \hat{\rho}_0(\ell_0)$, ce qui prouve l'assertion. c.q.f.d.

Soit maintenant $K = \exp\mathfrak{k}$ un sous-groupe de G et $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$ l'application restriction. Soit $\pi \in \hat{G}$. On prend une mesure finie $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_\pi$ sur $\mathfrak{g}^*$ équivalente à la mesure G-invariante sur l'orbite $\Omega(\pi)$ et pose $\nu = (\hat{\rho}_K \circ p)_*(\tilde{\nu})$. En utilisant la mesure ν sur $\hat{K}$ ainsi obtenue et la même multiplicité $n_\pi(\sigma)$ qu'au théorème 2.1.8, nous avons la désintégration centrale canonique de la restriction $\pi|_K$ de π à K.

Théorème 2.2.2. ([20], [41])

$$\pi|_K \simeq \int_{\hat{K}}^{\oplus} n_\pi(\sigma)\sigma d\nu(\sigma).$$

Corollaire 2.2.3. La réciprocité de Frobenius s'établit dans ces circonstances.

Soient π_j $(j = 1, 2)$ deux représentations unitaires irréductibles de G. Le produit de Kronecker extérieur de π_1 et de π_2, noté $\pi_1 \times \pi_2$, correspond à l'orbite $\Omega_{G\times G}(\pi_1 \times \pi_2) = (\Omega(\pi_1), \Omega(\pi_2)) \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$. On identifie G au sous-groupe de $G \times G$ constitué par les éléments diagonaux.

Corollaire 2.2.4. ([41]) Soit $p : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ l'application restriction. Alors

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\nu(\pi),$$

où $\nu = (\hat{\rho}_G \circ p)_*(tilde\nu_{\pi_1\times\pi_2})$ et où la multiplicité $m(\pi)$ s'obtient par le nombre des G-orbites incluses dans $(\Omega(\pi_1), \Omega(\pi_2)) \cap p^{-1}(\Omega_G(\pi))$.

§3. Éléments $e-$centraux

Afin d'avancer dans une analyse plus détaillée de représentations monomiales, nous supposons dans ce chapitre que $G = \exp \mathfrak{g}$ est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Introduisons des éléments e-centraux dûs à Corwin-Greenleaf [22]. Soient

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g},\ \dim \mathfrak{g}_k = k\ (0 \le k \le n) \tag{3.1}$$

un drapeau d'idéaux de $\mathfrak{g}$, $\{X_j\}_{1\le j\le n}$ une base de Malcev associée à ce drapeau, i.e. $X_j \in \mathfrak{g}_j \backslash \mathfrak{g}_{j-1}$ $(1 \le j \le n)$ et $\{X_j^*\}_{1\le j\le n}$ la base duale de $\mathfrak{g}^*$. Notons $(\ell_1, \ldots, \ell_n), \ell_j = \ell(X_j)$, les coordonnées de $\ell \in \mathfrak{g}^*$. On a $\mathfrak{g}_j^\perp = \langle X_{j+1}^*, \ldots, X_n^* \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}_j^* \cong \mathfrak{g}^*/\mathfrak{g}_j^\perp$ et la projection $p_j : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_j^*$ entrelace les opérations de G sur $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}_j^*$. Pour $\ell \in \mathfrak{g}^*$ on définit $e_j(\ell) = \dim(G\Delta p_j(\ell)), e(\ell) = (e_1(\ell), \ldots, e_n(\ell))$ et pose $\mathcal{E} = \{e(\ell); \ell \in \mathfrak{g}^*\}$. Soit $e \in \mathcal{E}$. On définit la couche G-invariante $U_e = \{\ell \in \mathfrak{g}^*; e(\ell) = e\}$ et, en posant $e_0 = 0$, l'ensemble des indices de saut $S(e) = \{1 \le j \le n; e_j = e_{j-1} + 1\}$ et celui de non-saut $T(e) = \{1 \le j \le n; e_j = e_{j-1}\}$. Maintenant, soit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et on dit que $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est e-central si $\pi_\ell(A)$, où $\pi_\ell = \hat{\rho}_G(\ell)$, est un scalaire pour tout $\ell \in U_e$.

Décrivons des résultats fondamentaux de Corwin-Greenleaf. Il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\mathcal{Z} \cap U_e$ soit non vide et G-invariant, et $A_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_j)$ pour chaque $j \in T(e)$ jouissant les propriétés suivantes.

1. Chaque A_j est e-central sur $\mathcal{Z} \cap U_e$, i.e. $\pi_\ell(A_j)$ est un scalaire pour $\ell \in \mathcal{Z} \cap U_e$, ayant la forme $A_j = P_jX_j + Q_j$, où

   (i) P_j est un polynôme de A_k $(k \in T(e), k < j)$, en particulier $P_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$;

   (ii) P_j est e-central sur $\mathcal{Z} \cap U_e$;

(iii) $Q_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$, en particulier $P_1, Q_1 \in \mathbb{C}1$.

2. $\pi_\ell(P_j) \neq 0$ pour $\forall \ell \in \mathcal{Z} \cap U_e$.
3. $\pi_\ell(A_j) = \varphi_j(\ell) Id$, où $\varphi_j(\ell) = \tilde{p_j}(\ell')\ell_j + \tilde{q_j}(\ell')$ avec deux fonctions rationnelles $\tilde{p_j}, \tilde{q_j}$ sur $\mathcal{Z} \cap U_e$ qui ne dépendent que de $\ell' = (\ell_1, \ldots, \ell_{j-1})$.
4. $\tilde{p_j}(\ell')$ est G-invariante et $\tilde{p_j}(\ell') \neq 0$ pour $\forall \ell \in \mathcal{Z} \cap U_e$.

Remarque 3.1. La construction de ces éléments A_j peut se répéter sur $U_e \backslash (\mathcal{Z} \cap U_e)$.

En retournant à la représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$, où $H = \exp \mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$, considérons l'algèbre $D_\tau(G/H)$ des opérateurs différentiels G-invariants sur le fibré de base G/H et associé aux données (H, χ_f). On fixe une base $\{Y_s\}_{1 \leq s \leq d}$ de $\mathfrak{h}$ et définit un sous-espace vectoriel

$$\mathfrak{a}_\tau = \sum_{s=1}^{d} \mathbb{C}\left(Y_s + if(Y_s)\right)$$

dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Soient $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ l'idéal à gauche de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{a}_\tau$, et

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) = \{A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}); [A, Y] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau,\ \forall Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ agissant comme opérateurs différentiels G-invariants à gauche : pour $X \in \mathfrak{g}$ et $\psi \in C^\infty(G)$,

$$\left(R(X)\psi\right)(g) = \frac{d}{dt}\psi(g \exp\,(tX))|_{t=0}\ (\forall\ g \in G),$$

il se trouve que l'algèbre $D_\tau(G/H)$ est l'image de l'application $R : \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) \ni A \mapsto R(A)$, dont le noyau est $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. D'où, elle est isomorphe à

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \cong \left(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau\right)^H,$$

où la dernière expression représente l'ensemble des éléments H-invariants.

Corwin et Greenleaf [22] ont laissé deux conjectures concernant l'algèbre $D_\tau(G/H)$.

Conjecture de commutativité. L'algèbre $D_\tau(G/H)$ est commutative si et seulement si τ est à multiplicités finies, c'est à dire qu'au théorème 2.1.7 $m(\pi) < \infty$ presque partout pour μ.

Conjecture polynomiale. Lorsque τ est à multiplicités finies, $D_\tau(G/H)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$ des fonctions polynomiales H-invariantes sur Γ_τ.

Remarque 3.2. La conjecture de commutativité avait été antérieurement présentée par M. Duflo [30] dans un cadre beaucoup plus général.

Il existe un et un seul $e \in \mathcal{E}$ tel que $\Gamma_\tau \cap U_e$ soit un ouvert de Zariski de Γ_τ.

Théorème 3.3. ([46]) Soit $j \in T(e)$, et prenons l'élément e-central A_j. Alors $\pi_\ell(A_j) = \varphi_j(\ell) Id$ pour tout $\ell \in \Gamma_\tau$ et $\varphi_j(\ell)$ est une fonction polynomiale sur Γ_τ.

Rappelons le drapeau d'idéaux (3.1) de $\mathfrak{g}$. Soient

$$\mathcal{I} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_d\} = \{1 \leq i \leq n; \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i \neq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{i-1}\}$$

et $\mathcal{J} = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_q\} = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \mathcal{I}$, d'où $d = \dim \mathfrak{h}$ et $q = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. D'une part, en posant $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}_r = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{j_r}$ $(1 \leq r \leq q)$, on a une suite de sous-algèbres

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{q-1} \subset \mathfrak{k}_q = \mathfrak{g}, \ \dim \mathfrak{k}_r = d + r, \tag{3.2}$$

et d'autre part, en posant $\mathfrak{h}_0 = \{0\}, \mathfrak{h}_s = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{i_s}$ $(1 \leq s \leq d)$, on obtient une suite d'idéaux de $\mathfrak{h}$:

$$\{0\} = \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{h}_{d-1} \subset \mathfrak{h}_d = \mathfrak{h}, \ \dim \mathfrak{h}_s = s. \tag{3.3}$$

Choisissons la base $\{Y_s\}_{1 \leq s \leq d}$ de $\mathfrak{h}$ de façon qu'on ait $Y_s \in \mathfrak{h}_s \setminus \mathfrak{h}_{s-1}$ $(1 \leq s \leq d)$. Ensuite, pour $1 \leq s \leq d$, posons

$$\mathfrak{a}_s = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{C}(Y_j + if(Y_j)).$$

On désigne par $T(e_H)$ l'ensemble des indices $i_s \in \mathcal{I}$ tels qu'on ait $\mathfrak{h}_s \subset \mathfrak{h}_{s-1} + \mathfrak{g}(\ell)$ pour $\tilde{\mu}$-presque tout $\ell \in \Gamma_\tau$. Comme $T(e_H) \subset T(e)$, soit $U(e) = T(e) \backslash T(e_H)$. On note $\Diamond$ l'anti-automorphisme principal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Soit $i_s \in T(e_H)$. Écrivons $T(e) \cap \{1, 2, \ldots, i_s\} = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k = i_s\}$. Les éléments e-centraux A_{m_j} $(1 \leq j \leq k)$ de Corwin-Greenleaf s'écrit σ_j pour simplicité. Le lemme suivant nous servira énormément.

Lemme 3.4. Modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{i_s})\mathfrak{a}_s$, $\Diamond(\sigma_k)$ est algébrique sur $\{\Diamond(\sigma_1), \ldots, \ \Diamond(\sigma_{k-1})\}$.

Calculons dans un cas typique des éléments e-centraux de Corwin-Greenleaf, qui ne sont autre que des éléments centraux de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans notre cas, et voyons ce que signifie notre lemme.

Exemple 3.5. Soit $\mathfrak{g} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle_{\mathbb{R}}$ avec les crochets non-nuls : $[X_n, X_k] = X_{k-1}$, $(2 \leq k \leq n-1)$. D'où le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{z} = \mathbb{R}X_1$ et $\mathfrak{b} = \langle X_1, \ldots, X_{n-1} \rangle_{\mathbb{R}}$ est un idéal abélien de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Les G-orbites coadjointes ont génériquement la dimension 2 et là $\mathfrak{b}$ se qualifie pour polarisation commune de $\mathfrak{g}$. Ceci posé, notre représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ est à multiplicités finies même si $\dim \mathfrak{h} = 1$, sauf le cas où $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}$ et où $f|\mathfrak{z} \neq 0$. En posant $\mathfrak{g}_j = \langle X_1, \ldots, X_j \rangle_{\mathbb{R}}$ pour $1 \leq j \leq n$, on obtient une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$:

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}.$$

Nous allons chercher tout simplement des éléments centraux de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Il y en a

$$\sigma_1 = X_1, \sigma_2 = 2X_1X_3 - {X_2}^2, \sigma_3 = {X_1}^2X_4 - X_1X_2X_3 + \frac{1}{3}{X_2}^3$$

etc. Soient, par exemple, $n = 5, \mathfrak{h} = \langle X_3, X_4 \rangle_{\mathbb{R}}$ et $f(X_3) = \lambda, f(X_4) = \kappa$. Alors, τ est à multiplicités finies et l'algèbre $D_\tau(G/H)$ coïncide avec l'algèbre des polynômes de X_1, X_2. Donc, σ_3 ne contribue pas à la formation de $D_\tau(G/H)$. Posons

$$\mathfrak{a}_\tau = \mathbb{C}(X_3 + if(X_3)) + \mathbb{C}(X_4 + if(X_4)) = \mathbb{C}(X_3 + i\lambda) + \mathbb{C}(X_4 + i\kappa)$$

et $\mathfrak{a}_1 = \mathbb{C}(X_3 + if(X_3)) = \mathbb{C}(X_3 + i\lambda)$. On a $\sigma_2 \equiv -2i\lambda\sigma_1 - {X_2}^2$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)\mathfrak{a}_1$ et

$$\sigma_3 \equiv {\sigma_1}^2X_4 + \left(i\lambda\sigma_1 + \frac{1}{3}{X_2}^2\right)X_2 \equiv {\sigma_1}^2X_4 + \left\{i\lambda\sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1)\right\}X_2$$

$$= {\sigma_1}^2 X_4 - \frac{1}{3}(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)X_2 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)\mathfrak{a}_\tau.$$

D'où, si l'on prend $\mathfrak{h}' = \mathbb{R}X_3$, σ_3 contribuerait effectivement à former $D_{\tau'}(G/H')$, $\tau' = \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_f$ avec $H' = \exp \mathfrak{h}'$, mais

$$9(\sigma_3 - \sigma_1^2 X_4)^2 + (\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1)(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)^2 \equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)\mathfrak{a}_\tau$$

et en particulier

$$9(\sigma_3 + i\kappa{\sigma_1}^2)^2 + (\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1)(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)^2 \equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_4)\mathfrak{a}_\tau.$$

Nous pouvons continuer ainsi de suite. En effet, pour $n \geq 6$, $\sigma_4 = 2X_1X_5 - 2X_2X_4 + {X_3}^2$ est central dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, et si l'on part de $\mathfrak{h} = \langle X_3, X_4, X_5 \rangle_{\mathbb{R}}$ avec $f(X_5) = \zeta$, on obtient

$$\sigma_4 = 2\sigma_1(-i\zeta) - 2X_2(-i\kappa) + (-i\lambda)^2 = -2i\zeta\sigma_1 + 2i\kappa X_2 - \lambda^2$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_3)\mathfrak{a}_\tau$. D'où,

$$(\sigma_4 + 2i\zeta\sigma_1 + \lambda^2)^2 \equiv -4\kappa^2 {X_2}^2 \equiv 4\kappa^2(\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1)$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_5)\mathfrak{a}_\tau$.

Soit maintenant $n \geq 7$. Considérons

$$\sigma_5 = {X_1}^4 X_6 - {X_1}^3 X_2 X_5 + \frac{1}{2}{X_1}^2 {X_2}^2 X_4 - \frac{1}{6} X_1 {X_2}^3 X_3 + \frac{1}{30}{X_2}^5$$

qui est encore central dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Prenons $\mathfrak{h} = \langle X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle_{\mathbb{R}}$ pour que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(\ell)$ soit assez grand en $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. Soit $f(X_6) = \gamma$. Alors,

$$\sigma_5 = {\sigma_1}^4(-i\gamma) - {\sigma_1}^3 X_2(-i\zeta) + \frac{1}{2}{\sigma_1}^2 {X_2}^2(-i\kappa) - \frac{1}{6}\sigma_1 {X_2}^3(-i\lambda) + \frac{1}{30}{X_2}^5$$

$$= -i\gamma{\sigma_1}^4 + i\zeta{\sigma_1}^3 X_2 - \frac{i\kappa}{2}{\sigma_1}^2{X_2}^2 + \frac{i\lambda}{6}\sigma_1{X_2}^3 + \frac{1}{30}{X_2}^5$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)\mathfrak{a}_\tau$. D'où,

$$\sigma_5 \equiv -i\gamma{\sigma_1}^4 + i\zeta{\sigma_1}^2 X_2 + \frac{i\kappa}{2}{\sigma_1}^2(\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1) - \frac{i\lambda}{6}\sigma_1(\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1)X_2 + \frac{1}{30}(\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1)^2 X_2$$

$$= -i\gamma{\sigma_1}^4 - \lambda\kappa{\sigma_1}^3 + \frac{i\kappa}{2}{\sigma_1}^2\sigma_2 + \frac{1}{30}({\sigma_2}^2 + 4i\lambda\sigma_1\sigma_2 - 4\lambda^2{\sigma_1}^2 - 5i\lambda\sigma_1\sigma_2 + 10\lambda^2{\sigma_1}^2)X_2$$

$$= -\frac{1}{2}(2i\gamma{\sigma_1}^4 + 2\lambda\kappa{\sigma_1}^3 - i\kappa{\sigma_1}^2\sigma_2) + \frac{1}{30}(6\lambda^2{\sigma_1}^2 - i\lambda\sigma_1\sigma_2 + {\sigma_2}^2)$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)\mathfrak{a}_\tau$. Finalement nous avons

$$\begin{gathered}\left\{30\sigma_5 + 15(2i\gamma{\sigma_1}^4 + 2\lambda\kappa{\sigma_1}^3 - i\kappa{\sigma_1}^2\sigma_2)\right\}^2 \\ +(6\lambda^2{\sigma_1}^2 - i\lambda\sigma_1\sigma_2 + {\sigma_2}^2)^2(\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1) \equiv 0\end{gathered}$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_6)\mathfrak{a}_\tau$. Tout indique que σ_1, σ_2, par exemple, engendrent algébriquement l'algèbre des élèments Γ_τ-centraux.

Soient maintenant $\mathfrak{h} = \langle X_3, X_5 \rangle_{\mathbb{R}}$ et $f(X_3) = \lambda, f(X_5) = \zeta$ comme avant. On a

$$\sigma_4 \equiv 2\sigma_1(-i\zeta) - 2X_2X_4 + (-i\lambda)^2 = -2i\zeta\sigma_1 - 2X_2X_4 - \lambda^2$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_3)\mathfrak{a}_\tau$. Donc,

$$\begin{aligned}\sigma_1{}^2\sigma_4 &\equiv -2i\zeta\sigma_1{}^3 - 2X_2\left\{\sigma_3 + \frac{1}{3}(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)X_2\right\} - \lambda^2\sigma_1{}^2\\ &\equiv -2i\zeta\sigma_1{}^3 - 2X_2\sigma_3 + \frac{2}{3}(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)(\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1) - \lambda^2\sigma_1{}^2\\ &= -2i\zeta\sigma_1{}^3 + \frac{1}{3}\lambda^2\sigma_1{}^2 + \frac{2i\lambda}{3}\sigma_1\sigma_2 + \frac{2}{3}\sigma_2{}^2 - 2X_2\sigma_3\end{aligned}$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_3)\mathfrak{a}_\tau$. Finalement,

$$(3\sigma_1{}^2\sigma_4 - 2\sigma_2{}^2 - 2i\lambda\sigma_1\sigma_2 + 6i\zeta\sigma_1{}^3 - \lambda^2\sigma_1{}^2)^2 + 36(\sigma_2 + 2i\lambda\sigma_1)\sigma_3{}^2 \equiv 0$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_5)\mathfrak{a}_\tau$. Si l'on jette un coup d'l au cas où $n = 6$, $D_\tau(G/H)$ s'identifie avec l'algèbre des polynômes à trois variables X_1, X_2, X_4.

Enfin, soient $\mathfrak{h} = \langle X_4, X_5\rangle_{\mathbb{R}}$ et $f(X_4) = \kappa, f(X_5) = \zeta$ comme précédemment. Cette fois,

$$\sigma_4 \equiv 2\sigma_1(-i\zeta) - 2X_2(-i\kappa) + X_3{}^2 = -2i\zeta\sigma_1 + 2i\kappa X_2 + X_3{}^2$$

et

$$4\sigma_1{}^2\sigma_4 \equiv -8i\zeta\sigma_1{}^3 + 8i\kappa\sigma_1{}^2X_2 + (\sigma_2 + X_2{}^2)^2 = -8i\zeta\sigma_1{}^3 + 8i\kappa\sigma_1{}^2X_2 + \sigma_2{}^2 + 2\sigma_2X_2{}^2 + X_2{}^4$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)\mathfrak{a}_\tau$. D'autre part,

$$\sigma_3 \equiv \sigma_1{}^2(-i\kappa) - \frac{1}{3}(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)X_2 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)\mathfrak{a}_\tau.$$

En combinant ces deux relations, nous avons

$$\begin{aligned}(4\sigma_1{}^2\sigma_4 - \sigma_2{}^2 + 8i\zeta\sigma_1{}^3)(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)^4 &\equiv -24i\kappa\sigma_1{}^2(\sigma_3 + i\kappa\sigma_1{}^2)(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)^3\\ &+18\sigma_2(\sigma_3 + i\kappa\sigma_1{}^2)^2(\sigma_2 - i\lambda\sigma_1)^2 + 81(\sigma_3 + i\kappa\sigma_1{}^2)^4\end{aligned}$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_5)\mathfrak{a}_\tau$. Tout comme avant, l'algèbre $D_\tau(G/H)$ est l'algèbre des polynômes à trois variables X_1, X_2, X_3 lorsque $n = 6$.

Notons $\mathcal{F}$ l'algèbre des fonctions ζ sur $G\Delta\Gamma_\tau$ telles qu'il existe $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ vérifiant $\pi_\ell(W) = \zeta(\ell)Id$ pour tout $\ell \in \Gamma_\tau$. En se servant du lemme 3.4, on trouve :

Théorème 3.5. ([46]) $\{\phi_j; j \in U(e)\}$ est une base de transcendance de $\mathcal{F}$.

§4. Réciprocité de Frobenius

Soit G un groupe de Lie, que nous supposons réunion dénombrable de compacts, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère uniquement des représentation unitaire π dont l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ est séparable. Soit $v \in \mathcal{H}_\pi$. Lorsque la fonction $G \ni g \mapsto \pi(g)v \in \mathcal{H}_\pi$ est C^∞, on appelle v vecteur C^∞. On note $\mathcal{H}_\pi^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de π. $\mathcal{H}_\pi^\infty$ est un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\pi$, sur lequel $\mathfrak{g}$ opère par la différentielle $d\pi$ de π :

$$d\pi(X)v = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))v|_{t=0}\ (X \in \mathfrak{g}, v \in \mathcal{H}_\pi^\infty).$$

La représentation différentielle $d\pi$ s'étend uniquement en une représentation de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. $\{X_1, \ldots, X_n\}$ étant une base de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{H}_\pi^\infty$ devient un espace de Fréchet pour les semi-normes

$$\rho_d(v) = \sum_{1 \leq i_k \leq n} \|d\pi(X_{i_1} \cdots X_{i_d})v\| \ (d \in \mathbb{N}).$$

On désigne par $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ l'anti-dual de $\mathcal{H}_\pi^\infty$, i.e. l'espace vectoriel des formes antilinéaires continues de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ dans $\mathbb{C}$. Des éléments de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ s'appelle vecteurs généralisés de π. On munit $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ de la topologie dual fort de $\mathcal{H}_\pi^\infty$. L'antidual de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ s'identifie à $\mathcal{H}_\pi^\infty$. Pour $a \in \mathcal{H}_\pi^{\pm\infty}$ et $b \in \mathcal{H}_\pi^{\mp\infty}$, on note $\langle a, b \rangle$ l'image de b par a et donc $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$. Les actions de G et de $\mathfrak{g}$ se prolongent continuement dans $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ par dualité. Remarquons que

$$\pi(\varphi) \left(\mathcal{H}_\pi^{-\infty}\right) \subset \mathcal{H}_\pi^\infty$$

si $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Étant donnés un sous-groupe fermé K et un caractère $\chi : K \to \mathbb{C}^*$, posons

$$\left(\mathcal{H}_\pi^{-\infty}\right)^{K,\chi} = \{a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}; \pi(k)a = \chi(k)a, \ \forall k \in K\}.$$

Théorème 4.1. ([38], [55]) Soient $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe exponentiel, $f \in \mathfrak{g}^*, \mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$. On définit comme avant caractère χ_f de $H = \exp \mathfrak{h}$ par $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$ $(X \in \mathfrak{h})$ et $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f \in \hat{G}$. Alors, pour $\pi \in \hat{G}$,

$$\dim \left(\mathcal{H}_\pi^{-\infty}\right)^{H,\chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}} = \begin{cases} 1, & \pi \simeq \tau, \\ 0, & \pi \not\simeq \tau. \end{cases}$$

On a constaté au corollaire 2.2.3 que la réciprocité de Frobenius s'établit. En outre, le théorème 4.1 annonce aussi une sorte de la réciprocité de Frobenius dans un cas très particulier. On se demande si la réciprocité de ce type reste vrai dans la situation générale :

Question 4.2. A la formule (2.1.1) de la désintégration d'une représentation monomiale, est-il vrai que :

$$m(\pi) = \dim \left(\mathcal{H}_\pi^{-\infty}\right)^{H,\chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$$

pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$?

Nous allons examiner de près cette question dans le cas nilpotent. Supposons dans la suite de ce chapitre que $G = \exp \mathfrak{g}$ est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Puisque R. Penney [66] a montré l'inégalité

$$m(\pi) \leq \dim \left(\mathcal{H}_\pi^{-\infty}\right)^{H,\chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$$

pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$, on s'intéresse à l'inégalité inverse.

Soient $\ell \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{b} \in M(\ell, \mathfrak{g}) = I(\ell, \mathfrak{g})$ et $B = \exp \mathfrak{b}$. Au moyen d'une base coexponentielle à $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$, la représentation unitaire irréductible $\pi = \mathrm{ind}_B^G \chi_\ell = \hat{\rho}(\ell)$ se réalise dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ $(m = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{b})$. Dans cette situation le théorème suivant nous sera fort utile.

Théorème 4.3. L'espace de Fréchet $\mathcal{H}_\pi^\infty$ coïncide avec l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Voici quelques commentaires sur la formule (2.1.1) :

(1) On se trouve dans l'alternative suivante : soit il existe une borne uniforme des multiplicités $m(\pi)$ pour μ-presque toutes π, soit $m(\pi) = \infty$ pour μ-presque toutes π. Selon ces deux éventualités, nous disons que τ est à multiplicités finies ou infinies.

(2) τ est à multiplicités finies si et seulement si $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}(\ell)$ est $\tilde{\mu}$-presque partout un sous-espace lagrangien, i.e. isotrope maximal, pour la forme bilinéaire B_ℓ.

(3) Lorsque τ est à multiplicités finies, pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$, chaque composante connexe de $\hat{\rho}^{-1}(\pi) \cap \Gamma_\tau$ est une seule H-orbite de dimension égale à $\frac{1}{2} \dim \hat{\rho}^{-1}(\pi)$. La multiplicité $m(\pi)$ s'obtient donc aussi par le nombre des composantes connexes de $\hat{\rho}^{-1}(\pi) \cap \Gamma_\tau$.

Supposons maintenant que $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ est à multiplicités finies. Pour $\pi \in \hat{G}$, écrivons $\Omega(\pi)$ au lieu de $\hat{\rho}^{-1}(\pi)$. Un sous-ensemble $\tilde{\mu}$-négligeable de Γ_τ près, soient C_k ($1 \leq k \leq m(\pi)$) les composantes connexes de $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau$. Chaqu'une d'elles est en même temps une H-orbite. On fixe $\ell \in \Omega(\pi)$ et $\mathfrak{b} \in M(\ell, \mathfrak{g})$, autrement dit une réalisation de $\pi = \mathrm{ind}_B^G \chi_\ell$ avec $B = \exp \mathfrak{b}$. Pour $1 \leq k \leq m(\pi)$, prenons $g_k \in G$ tel que $g_k \cdot \ell \in C_k$ et une mesure invariante $d\dot{h}$ sur l'espace homogène $H/(H \cap g_k B g_k^{-1})$.

Proposition 4.4. ([37]) On peut fabriquer des éléments a_π^k ($1 \leq k \leq m(\pi)$) linéairement indépendants dans $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f}$ par la formule suivante : pour tout $\phi \in \mathcal{H}_\pi^\infty$,

$$\langle a_\pi^k, \phi \rangle = \int_{H/(H \cap g_k B g_k^{-1})} \overline{\phi(hg_k)\chi_f(h)} d\dot{h}. \tag{4.1}$$

Démonstration. Voyons d'abord l'intégrale au membre droit est bien définie. En fait, quel que soit $h' \in H \cap g_k B g_k^{-1}$,

$$\begin{aligned} \phi(hh'g_k)\chi_f(hh') &= \phi(hg_k g_k^{-1} h' g_k)\chi_f(h)\chi_f(h') \\ &= \chi_\ell(g_k^{-1} h'^{-1} g_k)\phi(hg_k)\chi_f(h)\chi_f(h') \\ &= \chi_{g_k \cdot \ell}(h'^{-1})\chi_f(h')\phi(hg_k)\chi_f(h) = \phi(hg_k)\chi_f(h). \end{aligned}$$

Ensuite, il existe une base coexponentielle à $\mathfrak{h} \cap g_k \cdot \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}$ qui fait partie d'une base coexponentielle à $g_k \cdot \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$. Eu égard au théorème 4.3, l'espace translaté de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ par g_k à droite s'identifie par usage de cette base à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $m = \dim(G/B)$, et $d\dot{h}$ à une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^m$, $p = \dim(H/(H \cap g_k B g_k^{-1}))$, d'où la continuité de a_π^k. En réalité cette translation à droite par g_k n'est autre qu'un opérateur d'entrelacement entre deux réalisations de π aux points ℓ et $g_k \cdot \ell$. Un calcul direct assure la semi-invariance nécessaire de a_π^k.

Enfin, on choisit une mesure de Haar db sur B et définit, pour $\psi \in \mathcal{D}(G)$, une fonction $\tilde{\psi}$ sur G par

$$\tilde{\psi}(g) = \int_B \psi(gb)\chi_\ell(b)db.$$

Il est clair que $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ et qu'un vecteur généralisé a_π^k fournit une distribution $\widetilde{a_\pi^k}$ sur G par la formule $\widetilde{a_\pi^k}(\psi) = \langle \tilde{\psi}, a_\pi^k \rangle$. Alors le support de $\widetilde{a_\pi^k}$ coïncide à la double classe fermée Hg_kB. Cela étant, afin de montrer que $\{a_\pi^k\}_{1 \leq k \leq m(\pi)}$ sont linéairement indépendants, il suffit de vérifier que $Hg_jB \neq Hg_kB$ si $j \neq k$. Sinon, l'ensemble connexe $g_j\Delta(\ell + \mathfrak{b}^\perp) \cap \Gamma_\tau$ de $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau$ croiserait en même temps C_j et C_k, ce qui est absurde. c.q.f.d.

Remarque 4.5. Le vecteur généralisé a_π^k ne dépend pas du choix de $g_k \in G$ à un scalaire multiplicatif près, de même pour le choix de $\mathfrak{b} \in M(\ell, \mathfrak{g})$.

Nous sommes en mesure de répondre affirmativement à la question 4.2 lorsque G est nilpotent.

Théorème 4.6. Soient $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie nilpotent, $f \in \mathfrak{g}^*, \mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ et $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$. Soit

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi)$$

la désintégration centrale canonique de τ comme au théorème 2.1.7. Alors on a une sorte de la réciprocité de Frobenius :

$$m(\pi) = \dim \left(\mathcal{H}_\pi^{-\infty}\right)^{H,\chi_f}$$

pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$. En particulier, si τ est à multiplicités finies,

$$\left(\mathcal{H}_\pi^{-\infty}\right)^{H,\chi_f} = \sum_{k=1}^{m(\pi)} \mathbb{C} a_\pi^k$$

pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$.

Démonstration. On se contente ici de mentionner la ligne directrice d'une démonstration. On emploie la récurrence sur $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. On peut supposer que $\mathfrak{h}$ contient le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ et que f ne s'annule sur aucun idéal non nul. Cela nous mène au cas où $\dim \mathfrak{z} = 1, f|_\mathfrak{z} \neq 0$. Prenons comme d'habitude un triplet de Heisenberg $\{X, Y, Z\}$ tel que $\mathfrak{z} = \mathbb{R}Z, f(Z) = 1, [X, Y] = Z, \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathbb{R}X$ où $\mathfrak{g}_0$ désigne le centralisateur de Y dans $\mathfrak{g}$. Soit $\ell \in \Omega(\pi)$, et réalisons π au moyen d'une polarisation $\mathfrak{b}$ en ℓ de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{g}_0$. Conformément à la décomposition $G = \exp(\mathbb{R}X)G_0$, $G_0 = \exp\ \mathfrak{g}_0$, l'espace $\mathcal{H}_\pi^\infty$ devient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \cong \mathcal{S}(\mathbb{R})\widehat{\oplus}\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m-1})$, où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m-1})$ représente l'espace $\mathcal{H}_{\pi_0}^\infty$ avec $\pi_0 = \mathrm{ind}_B^{G_0} \chi_\ell \in \widehat{G_0}$. Tout $g \in G$ s'écrit uniquement comme $g = \exp(xX)g_0$ avec $x \in \mathbb{R}, g_0 \in G_0$. Nous aimerions descendre au sous-groupe G_0 en effaçant la première coordonnée x.

Soit $a \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f}$. Si $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$, on prend X dans $\mathfrak{h} \cap \ker f$ et la semi-invariance de a exige qu'avec un certain $a_0 \in \left(\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty}\right)^{H,\chi_f}$,

$$\langle a, \phi(x)\psi(g_0)\rangle = \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)} dx\right) \langle a_0, \psi(g_0)\rangle,$$

où $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}, \psi \in \mathcal{H}_{\pi_0}^\infty, g_0 \in G_0$. On descend ainsi à G_0.

Supposons maintenant que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Il nous suffit de traiter le cas où τ est à multiplicités finies. Cela posé, on déduit du lemme 3.4 qu'il existe des éléments e-centraux de Corwin-Greenleaf $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_\kappa\}$ tels qu'on ait une relation polynomiale :

$$P\left(\overline{(\Diamond(\sigma_1))}, \ldots, \overline{(\Diamond(\sigma_\kappa))}, Y\right) \equiv 0$$

modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau}$, où P désigne un polynôme à $\kappa + 1$ variables et où Y apparaît effectivement. Si nous appliquons cette relation à notre vecteur généralisé a, on trouve qu'il existe un polynôme non constant $F(x)$ tel que $F(x)a = 0$. Soit $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq r}$ les racines réelles de l'équation $F(x) = 0$. On voit donc que le support de la distribution $\tilde{a}$ est contenu dans la réunion disjointe des sous-variétés $M_j = \exp(\alpha_j X)G_0$ $(1 \leq j \leq r)$ de G. Par conséquent, a s'écrit dans un voisinage de M_j comme

$$a = \sum_{k=0}^{u} \frac{\partial^k}{\partial x^k} D_k$$

avec certaines distributions D_k $(1 \leq k \leq u)$ sur G_0. Il ne nous reste plus qu'à montrer que $u = 0$, ce qui est faisable par un choix convenable du polynôme P utilisé plus haut et de l'hypothèse que τ est à multiplicités finies. c.q.f.d.

Remarque 4.7. Lorsque $G = \exp \mathfrak{g}$ est exponentiel et que la repésentation monomiale τ est à multiplicités finies, est-ce possible de fabriquer des éléments de $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$ par la formule similaire : pour $\phi \in \mathcal{H}_\pi^\infty$,

$$\langle a_\pi^k, \phi \rangle = \oint_{H/H \cap g_k B g_k^{-1}} \overline{\phi(hg_k)\chi_f(h)} \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu(h) \ (g \in G), \tag{4.2}$$

où $\nu = \mu_{H, H \cap g_k B g_k^{-1}}$. Déjà sur la formation de cette valeur même on heurte deux questions : possibilité de prendre cette intégrale et sa convergence comme dans notre étude d'opérateurs d'entrelacement. Enfin, les éléments a_π^k $(1 \leq k \leq m(\pi))$ fournissent-ils des vecteurs généralisés de π ? Il est difficile de déterminer l'espace $\mathcal{H}_\pi^\infty$ dans le cas exponentiel, mais il y aura peut-être quelque chance à exploiter en prenant une polarisation de Vergne $\mathfrak{b}$.

Exemple 4.8. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre complètement résoluble à dimension 4 définie sur la base (T, P, Q, E) par les crochets

$$[T, P] = P/2, [T, Q] = Q/2, [T, E] = E, [P, Q] = E.$$

On prend $f = E^* \in \mathfrak{g}^*, \mathfrak{h} = \mathbb{R}T + \mathbb{R}Q \in M(f, \mathfrak{g})$ et pose $H = \exp \mathfrak{h}, \tau = \operatorname{ind}_H^G \chi_f$ comme d'habitude. Ici aussi nous avons $\tau \simeq \pi_+ \oplus \pi_-$, où $\pi_\pm \in \hat{G}$ sont deux représentations au carré intégrable associées à deux orbites ouvertes $\pm G \Delta E^*$.

Soit $a \in \left(\mathcal{H}_{\pi_\pm}^{-\infty}\right)^{H,\chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$. Le choix de $\mathfrak{b} = \mathbb{R}Q + \mathbb{R}E \in I(\pm E^*, \mathfrak{g})$ nous fournissant une réalisation de $\pi_\pm$, leur espace $\mathcal{H}_{\pi_\pm}$ s'identifie à $L^2(\mathbb{R}^2)$ sous l'application $\psi \mapsto \tilde{\psi}(s, t) =$

$\psi(\exp(sT)\exp(tP))$ $((s,t) \in \mathbb{R}^2)$. Dans ce cadre la semi-invariance de a entraîne

$$\begin{cases} \langle a, \tilde{\psi}(s+x,t)\rangle = e^{x/4}\langle a, \tilde{\psi}\rangle, \\ \langle a, (1-e^{\pm ixte^{-s/2}})\tilde{\psi}\rangle = 0 \end{cases}$$

quels que soient $\psi \in \mathcal{H}^\infty_{\pi_\pm}$ et $x \in \mathbb{R}$. La seconde condition exige que le support de a est contenu dans $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2; t = 0\}$ et puis la première conclut que, à un scalaire multiplicatif près,

$$\langle a, \tilde{\psi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\tilde{\psi}(s,0)} e^{-s/4} ds.$$

On retrouve ainsi $\dim \left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_\pm}\right)^{H,\chi_f \Delta^{1/2}_{H,G}} = 1$, ce qui n'est bien sûr qu'un simple cas particulier d'un résultat de [12] combiné avec celui de [66].

On considère maintenant $\pi_{\alpha,\beta} \in \hat{G}$ associée à l'orbite passant $\ell_{\alpha,\beta} = \alpha P^* + \beta Q^* \in \mathfrak{g}^*$, où (α,β) décrit $\mathbb{R}^2$ excepté l'origine. Soit $a \in \left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{\alpha,\beta}}\right)^{H,\chi_f \Delta^{1/2}_{H,G}}$. En prenant $\mathfrak{b} = \langle P, Q, E\rangle_{\mathbb{R}} \in I(\ell_{\alpha,\beta}, \mathfrak{g})$, on identifie $\mathcal{H}_{\pi_{\alpha,\beta}}$ à $L^2(\mathbb{R})$ sous l'application $\psi \mapsto \tilde{\psi}(t) = \psi(\exp(tT))$ $(t \in \mathbb{R})$. La semi-invariance de a nécessite que

$$\begin{cases} \langle a, \tilde{\psi}(t+x)\rangle = e^{3x/4}\langle a, \tilde{\psi}\rangle, \\ \langle a, (1-e^{-i\beta xe^{-t/2}})\tilde{\psi}(t)\rangle = 0 \end{cases}$$

quels que soient $\psi \in \mathcal{H}^\infty_{\pi_{\alpha,\beta}}$ et $x \in \mathbb{R}$. La seconde condition oblige que $a = 0$ si $\beta \neq 0$. Lorsque $\beta = 0$, la première exigence demande que

$$\langle a, \tilde{\psi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\tilde{\psi(s)}} e^{-3s/4} ds,$$

à un scalaire près. En fait, cette formule définit un élément non nul de $\left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{\alpha,0}}\right)^{H,\chi_f \Delta^{1/2}_{H,G}}$, ce qui se voit comme dans l'exemple précédent. Enfin $\dim \left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{\alpha,0}}\right)^{H,\chi_f \Delta^{1/2}_{H,G}} = 1$, quoique $\pi_{\alpha,\beta}$ n'apparaisse pas dans la désintégration de τ.

En dernier lieu, se notant c_α le caractère unitaire de G associé à l'orbite αT^* $(\alpha \in \mathbb{R})$, il arrive que $\left(\mathcal{H}^{-\infty}_{c_\alpha}\right)^{H,\chi_f \Delta^{1/2}_{H,G}} = \{0\}$.

De ce qu'on vient de voir, il est vrai tout au moins que l'espace $(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi})^{H,\chi_f \Delta^{1/2}_{H,G}}$ est trivial pour $\pi \in \hat{G}$ dont l'orbite ne rencontre pas Γ_τ.

On ajoute aussi un simple exemple non exponentiel.

Exemple 4.9. Soit G le revêtement universel du groupe des déplacements du plan. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est définie sur la base (T, X, Y) par les crochets $[T, X] = Y, [T, Y] = -X$. Les éléments de G sont présentés par un triplet de réels (θ, a, b) dont la loi de multiplication est :

$$(\theta, a, b)(\theta', a', b') = (\theta + \theta', a + a'\cos\theta - b'\sin\theta, b + a'\sin\theta + b'\cos\theta).$$

Prenons une polarisation réelle $\mathfrak{b} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y$ au point $\ell_s = -sY^* \in \mathfrak{g}^*$ $(0 \neq s \in \mathbb{R})$. Le stabilisateur $G(\ell_s)$ n'est autre que l'extension de $\exp(\mathbb{R}Y)$ par le centre $Z = \exp(2\pi\mathbb{Z}T)$ de G, dont les caractères unitaires $\chi_\alpha, \alpha \in [0,1)$, sont donnés par $\chi_\alpha(\exp(2m\pi T)) = e^{2\pi i m\alpha}$ $(m \in \mathbb{Z})$. Soient $B_0 = \exp \mathfrak{b}$ et $B = ZB_0$. On prolonge χ_α en un caractère unitaire $\chi_{s,\alpha}$ de B par la formule

$$\chi_{s,\alpha}(zb) = \chi_\alpha(z)\chi_{\ell_s}(b) \ (z \in Z, b \in B_0).$$

Quant on fabrique $\pi_{s,\alpha} = \mathrm{ind}_B^G \chi_{s,\alpha}$ par translation à droite, il est bien connu que $\pi_{s,\alpha}, s \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty), \alpha \in [0,1)$, sont irréductibles et inéquivalentes l'une à l'autre. L'action explicite de $\pi_{s,\alpha}$ est donnée dans l'espace $L^2(\mathbb{T}), \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ muni de la mesure $dt/2\pi$ par la formule

$$(\pi_{s,\alpha}((\theta, a, b))\phi)(t) = e^{is(a \sin t + b \cos t)} e^{i\alpha[t+\theta]} \phi(\widehat{t+\theta}),$$

où $g = (\theta, a, b) \in G$ et où on a utilisé la notation $t + \theta = [t+\theta] + \widehat{t+\theta}$ avec $[t+\theta] \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\widehat{t+\theta} \in [0, 2\pi)$.

Soit maintenant $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X$ et $H_0 = \exp \mathfrak{h}$. En partant de la représentation triviale 1_{H_0}, on construit la représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_{H_0}^G 1_{H_0}$ de G. D'après Benoist [10],

$$\tau \simeq 2 \int_{\mathbb{R}_+ \times [0,1)}^{\oplus} \pi_{s,\alpha} ds d\alpha,$$

tandis que $\left(\mathcal{H}_{\pi_{s,\alpha}}^{-\infty}\right)^{H_0, 1_{H_0}} = \mathbb{C}\delta_0 \oplus \mathbb{C}\delta_\pi$, où δ_x désigne la masse de Dirac en $x \in \mathbb{T}$. D'autre part, l'intersection $G\Delta\ell_s \cap \mathfrak{h}^\perp$ se compose de deux composantes connexes dont chacune est une H_0-orbite de dimension égale à $\frac{1}{2} \dim G\Delta\ell_s$.

Si on calcule $S = \{g \in G; g^{-1}\Delta(\ell_s + \mathfrak{b}^\perp) \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset\}$, il se trouve facilement que $S = \{g = (\theta, a, b) \in G; \theta \in \mathbb{Z}\pi\}$ qui coïncide avec la réunion des supports des éléments de $\left(\mathcal{H}_{\pi_{s,\alpha}}^{-\infty}\right)^{H_0, 1_{H_0}}$.

On considère désormais l'extension $H = \exp(\mathbb{Z}\pi T)\Delta H_0$ et ses caractères $\rho_\gamma, \gamma \in [0,1)$, définis par

$$\rho_\gamma(\exp(m\pi T)\Delta h_0) = e^{2\pi i m\gamma} \ (m \in \mathbb{Z},\ h_0 \in H_0).$$

L'action de $\tau_\gamma = \mathrm{ind}_H^G \rho_\gamma$, réalisée comme translation à droite, est donnée par

$$(\tau_\gamma(g)\phi)(t, \eta) = e^{2\pi i\gamma[[t+\theta]]} \phi(\widetilde{t+\theta}, (-1)^{[[t+\theta]]}(\eta + a \sin t + b \cos t)),$$

où $\phi \in L^2([0,\pi) \times \mathbb{R}), g = (\theta, a, b) \in G$ et où on a employé la notation $t + \theta = [[t+\theta]]\pi + \widetilde{t+\theta}$ avec $[[t+\theta]] \in \mathbb{Z}$ et $\widetilde{t+\theta} \in [0, \pi)$.

La transformation de Fourier concernant la seconde variable

$$\hat{\phi}(t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta y} \phi(t, y) dy$$

nous fournit une autre réalisation de τ_γ par la formule

$$(\tau_\gamma(g)\hat{\phi})(t, \eta) = e^{2\pi i\gamma[[t+\theta]]} e^{-i\eta(a \sin t + b \cos t)} \hat{\phi}(\widetilde{t+\theta}, (-1)^{[[t+\theta]]}\eta).$$

Ensuite on utilise l'application qui à $\hat{\phi} \in L^2([0,\pi) \times \mathbb{R})$ associe $\tilde{\phi} \in L^2([0,2\pi) \times \mathbb{R}_+)$ donnée par

$$\tilde{\phi}(t,\eta) = \begin{cases} \hat{\phi}(t,\eta) & \text{si } t \in [0,\pi), \\ e^{2\pi i\gamma}\hat{\phi}(t-\pi,-\eta) & \text{si } t \in [\pi,2\pi), \end{cases}$$

pour en obtenir la troisième dans $L^2([0,2\pi) \times \mathbb{R}_+)$:

$$\left(\tau_\gamma(g)\tilde{\phi}\right)(t,\eta) = e^{2i\gamma[t+\theta]}e^{-i\eta(a\sin t + b\cos t)}\tilde{\phi}(t+\theta,\eta).$$

On a ainsi vérifié que

$$\tau_\gamma \simeq \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} \pi_{s,2\gamma(\text{mod } \mathbb{Z})} ds,$$

sans multiplicité comme nous en prévient un résultat de [12].

D'un point de vue de la méthode des orbites, il est vraisemblable que ce phénomène s'explique par le fait que les deux H_0-orbites inclues dans $G\Delta\ell_s \cap \mathfrak{h}^\perp$ se relient sous l'action de $\exp(\pi T) \in H$, ce qui fait de $G\Delta\ell_s \cap \mathfrak{h}^\perp$, quoique non connexe, une seule H-orbite.

Finalement, pour que $a = \xi\delta_0 + \eta\delta_\pi \in \left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{s,\alpha}}\right)^{H_0,1_{H_0}}$ $(\xi,\eta \in \mathbb{C})$ appartienne à $\left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{s,\alpha}}\right)^{H,\rho_\gamma}$, il faut et il suffit que $\langle \pi_{s,\alpha}(\exp(\pi T))a,,\psi\rangle = \langle e^{2\pi i\gamma}a,\psi\rangle$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}^{\infty}_{\pi_{s,\alpha}}$. D'où,

$$\left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{s,\alpha}}\right)^{H,\rho_\gamma} = \begin{cases} \mathbb{C}(\delta_0 + e^{2\pi i\gamma}\delta_\pi) & \text{si } \alpha = 2\gamma, \\ 0 & \text{si } \alpha \neq 2\gamma,, \end{cases}$$

qui retrouve l'ensemble S mentionné ci-dessus comme la réunion des supports de ses éléments.

§5. Formule de Plancherel

Comme précédemment soient $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f,\mathfrak{g})$ et $\tau = \hat{\rho}(f,\mathfrak{h},G) = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ avec $H = \exp \mathfrak{h}$, $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$ $(X \in \mathfrak{h})$. On s'intéressera dans ce chapitre à la formule de Plancherel abstraite, due à Penney [66] et Bonnet [16], appliquée à la représentation cyclique (τ,δ_τ), où $\delta_\tau \in (\mathcal{H}^{-\infty}_\tau)^{H,\chi_f\Delta^{1/2}_{H,G}}$ est donné comme suit : tout $\phi \in \mathcal{H}^\infty_\tau$ étant une fonction C^∞ sur G ([67]), posons $\delta_\tau(\phi) = \langle \delta_\tau, \phi\rangle = \overline{\phi(e)}$ avec l'élément neutre e de G.

Lorsque $\mathfrak{h} \in I(f,\mathfrak{g})$, τ se trouve irréductible et le théorème 4.1 dit que l'espace $(\mathcal{H}^{-\infty}_\pi)^{H,\chi_f\Delta^{1/2}_{H,G}}, \pi \in \hat{G}$, est égal à $\mathbb{C}\delta_\pi$ si $\pi \simeq \tau$ et trivial si $\pi \not\simeq \tau$. Lorsque $\mathfrak{h} \notin I(f,\mathfrak{g})$, on désintègre (τ,δ_τ) en irréductibles :

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi), \delta_\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} a_\pi d\mu(\pi).$$

Les a_π éant μ-presque partout dans $(m(\pi)\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$, on a d'après l'unicité de désintégration [66] que $a_\pi = (a_\pi^k)_{1\leq k\leq m(\pi)}$ avec $a_\pi^k \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$ et, pour $\phi \in \mathcal{D}(G)$,

$$\langle \tau(\phi)\delta_\tau, \delta_\tau\rangle = \int_{\hat{G}} \sum\nolimits_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi)a_\pi^k, a_\pi^k\rangle d\mu(\pi).$$

Pour $\phi \in \mathcal{D}(G)$, on fabrique, en faisant le choix d'une mesure de Haar à gauche dh sur H, un élément ϕ_H^f de $\mathcal{H}_\tau^\infty$ par

$$\phi_H^f(g) = \int_H \phi(gh)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh \ (g \in G).$$

On calcule : pour $\psi \in \mathcal{H}_\tau^\infty$,

$$\begin{aligned}
\langle \tau(\phi)\delta_\tau, \psi\rangle &= \langle \int_G \phi(g)\tau(g)\delta_\tau dg, \psi\rangle = \langle \delta_\tau, \int_G \overline{\phi(g)}\tau(g^{-1})\psi dg\rangle \\
&= \int_G \phi(g)\overline{\psi(g)}dg = \oint_{G/H} d\mu_{G,H}(g) \int_H \phi(gh)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)\overline{\psi(gh)}dh \\
&= \oint_{G/H} \overline{\psi(g)}d\mu_{G,H}(g) \int_H \phi(gh)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh = \langle \phi_H^f, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

On a ainsi $\tau(\phi)\delta_\tau = \phi_H^f \in \mathcal{H}_\tau^\infty$ et par suite

$$\langle \tau(\phi)\delta_\tau, \delta_\tau\rangle = \int_H \phi(h)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh = \phi_H^f(e)$$

quel que soit $\phi \in \mathcal{D}(G)$.

On récrit ainsi la formule de Plancherel abstraite pour la représentation monomiale cyclique (τ, δ_τ).

Théorème 5.1. ([38], [66]) La désintégration centrale canonique de $\tau = \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$ se notant

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi),$$

il existe dans $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{G,H}^{1/2}}$, pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$, des éléments a_π^k, $1 \leq k \leq m(\pi)$, avec lesquels la formule

$$\phi_H^f(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi)a_\pi^k, a_\pi^k\rangle d\mu(\pi) \tag{5.1}$$

s'établit pour n'importe quelle $\phi \in \mathcal{D}(G)$.

Comme dans le cas symétrique de Benoist [10], nous pratiquerons dans certains cas des calculs explicites de $(a_\pi^k)_{\pi\in\hat{G},1\leq k\leq m(\pi)}$ pour obtenir une formule de Plancherel concrète.

Théorème 5.2. ([37]) Lorsque $G = \exp \mathfrak{g}$ est nilpotent et que τ est à multiplicités finies, les vecteurs généralisés construits par la formule (4.1) satisfont à la formule de Plancherel concrète (5.1) sous réserve d'une normalisation convenable des mesures $d\dot{h}$ utilisés dans leur constructions.

Démonstration. Commençons par préparer un lemme. On fait des choix de plusieurs mesures invariantes $dg, dh, d\dot{g}$ et $d\dot{h} = d_k\dot{h}$ sur $G, H, G/B$ et $H/(H\cap g_kBg_k^{-1})$. Puis, on en déduit une mesure quotient $d\ddot{g}$ sur G/H et, grâce à la propriété de transitivité, une mesure invariante $d_k\dot{g}$ sur $G/(H\cap g_kBg_k^{-1})$ et son image canonique sur $G/(g_k^{-1}Hg_k\cap B)$, enfin une mesure invariante $d_k\dot{b}$ sur $B/(B\cap g_k^{-1}Hg_k)$.

Lemme 5.3. Pour $\phi \in \mathcal{D}(G)$, on a

$$\left(\pi(\phi)a_\pi^k\right)(g) = \int_{B/(B\cap g_k^{-1}Hg_k)} \phi_H^f(gbg_k^{-1})\chi_\ell(b)d\dot{b} \ (g \in G),$$

et par suite

$$\langle \pi(\phi)a_\pi^k, a_\pi^k\rangle = \int_{H/(H\cap g_kBg_k^{-1})} \chi_f(h)d\dot{h} \int_{B/(B\cap g_k^{-1}Hg_k)} \phi_H^f(hg_kbg_k^{-1})\chi_\ell(b)d\dot{b}. \tag{5.2}$$

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{H}_\pi^\infty$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\langle \pi(\phi)a_\pi^k, \psi\rangle &= \int_G \phi(g)\langle a_\pi^k, \pi(g^{-1})\psi\rangle dg \\
&= \int_G \phi(g)dg \int_{H/(H\cap g_kBg_k^{-1})} \overline{\psi(ghg_k)\chi_f(h)}d_k\dot{h} \\
&= \int_{G/H} \phi_H^f(g)d\ddot{g} \int_{H/(H\cap g_kBg_k^{-1})} \overline{\psi(ghg_k)\chi_f(h)}d_k\dot{h} \\
&= \int_{G/H} d\ddot{g} \int_{H/(H\cap g_kBg_k^{-1})} \phi_H^f(gh)\overline{\psi(ghg_k)}d_k\dot{h} \\
&= \int_{G/(H\cap g_kBg_k^{-1})} \phi_H^f(g)\overline{\psi(gg_k)}d_k\dot{g} \\
&= \int_{G/B}\int_{B/(B\cap g_k^{-1}Hg_k)} \phi_H^f(gbg_k^{-1})\overline{\psi(gb)}d_k\dot{b} \\
&= \langle \int_{B/(B\cap g_k^{-1}Hg_k)} \phi_H^f(gbg_k^{-1})\chi_\ell(b)d_k\dot{b}, \psi\rangle,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. c.q.f.d.

Maintenant on va montrer le théorème en normalisant plutôt la mesure μ apparaissant dans la formule (2.1.1). Soit $\mathfrak{g}_0$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, et contenant $\mathfrak{h}$. Premièrement, presque toutes les orbites sont supposées non saturées dans la direction $\mathfrak{g}_0^\perp$. Pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$, la restriction de π à $G_0 = \exp\mathfrak{g}_0$ est irréductible, $m(\pi) = m(\pi_0)$ et à un ensemble négligeable près, l'espace borélien $\hat{G}$ s'identifie à $\widehat{G_0}\times\mathbb{R}$.

L'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une mesure μ_0 sur $\widehat{G_0}$ établissant la formule (5.1) pour G_0. Sous notre identification la mesure $\mu = \mu_0 \times dx$, dx étant une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, nous conviendra en posant $a_\pi^k = a_{\pi_0}^k$ pour $1 \leq k \leq m(\pi)$.

En effet, soit $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_0^*$ l'application restriction. En sorte que μ_0 existe, des choix de $d\dot{g}_0, d_k\dot{h}_0$ et donc de $d_k\dot{b}_0$ sont faisable, l'indice 0 signifiant des objets correspondants au niveau du sous-groupe G_0. On désigne $\mathfrak{b}_0 \in M(\ell_0, \mathfrak{g}_0)$ la polarisation réelle ainsi choisie et donnant $\pi_0 = \hat{\rho}_{G_0}(\ell_0) \in \widehat{G_0}$. On peut supposer que l'application $\widehat{G_0} \ni \pi_0 \mapsto \ell_0 \in \mathfrak{g}_0^*$ est une section borélienne. Pour μ_0-presque toute $\ell_0 \in \mathfrak{g}_0^*$, soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telle que $p(\ell) = \ell_0$. On peut prendre un élément $T = T(\ell_0)$, qui dépend de ℓ_0, dans $\mathfrak{g}$ de manière qu'on ait $\mathfrak{g}(\ell) = \mathbb{R}T + \mathfrak{g}_0(\ell_0)$ et que l'application borélienne $\pi \mapsto (\pi|_{G_0}, \ell(T))$ fournit notre identification entre $\hat{G}$ et $\widehat{G_0} \times \mathbb{R}$ à une partie μ-négligeable près. Or les vecteurs généralisés a_π^k ne changeant qu'un scalaire multiplicatif près selon le choix de polarisations, nous sommes capables de supposer avoir choisi $\mathfrak{b}_0$ de façon qu'une polarisation $\mathfrak{b} \in M(\ell, \mathfrak{g})$ s'obtienne par $\mathbb{R}T + \mathfrak{b}_0$ et, en écrivant $b \in B = \exp \mathfrak{b}$ comme $b = \exp(tT)\Delta b_0$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $b_0 \in B_0 = \exp \mathfrak{b}_0$, on constate que $B/(B \cap g_k^{-1} H g_k)$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times B_0/(B_0 \cap g_k^{-1} H g_k)$. On choisit $d\dot{g}$ de sorte que $d_k\dot{b} = dt \Delta d_k\dot{b}_0$.

Dans ces situations, si on pose $\lambda = \ell(T)$ la mesure $\mu = \mu_0 \times \frac{d\lambda}{2\pi}$ nous conviendra : pour $\phi \in \mathcal{D}(G)$ quelconque, compte tenu de la formule (5.2) et de l'hypothèse sur μ_0,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\mu(\pi) \\
&\qquad = \int_{\widehat{G_0}} d\mu_0(\pi_0) \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda}{2\pi} \sum_{k=1}^{m(\pi_0)} \int_{H/(H \cap g_k B g_k^{-1})} \chi_f(h) d_k\dot{h} \\
&\qquad \times \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dt \int_{B_0/(B_0 \cap g_k H g_k^{-1})} \phi_H^f(h g_k \exp(tT) b_0 g_k^{-1}) \chi_{\ell_0}(b_0) d_k\dot{b}_0 \\
&\qquad = \int_{\widehat{G_0}} d\mu_0(\pi_0) \sum_{k=1}^{m(\pi_0)} \int_{H/(H \cap g_k B g_k^{-1})} \chi_f(h) d_k\dot{h} \\
&\qquad \times \int_{B_0/(B_0 \cap g_k H g_k^{-1})} \phi_H^f(h g_k b_0 g_k^{-1}) \chi_{\ell_0}(b_0) d_k\dot{b}_0 \\
&\qquad = \int_{\widehat{G_0}} \sum_{k=1}^{m(\pi_0)} \langle \pi_0(\phi) a_{\pi_0}^k, a_{\pi_0}^k \rangle d\mu_0(\pi_0) = \phi_H^f(e)
\end{aligned}
$$

d'après la formule de Plancherel pour $\mathbb{R}$.

Deuxièmement, supposons que μ-presque toutes les orbites sont saturées dans la direction $\mathfrak{g}_0^\perp$. Soit $\pi \in \hat{G}$ telle que chaque composante connexe de $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau$ est une H-orbite de dimension $\frac{1}{2} \dim \Omega(\pi)$. Il existe les représentations irréductibles en nombre fini de G_0, notées $\pi_0^1, \ldots, \pi_0^s$ telles que $p\left(\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau\right)$ soit la réunion disjointe des $\Omega_0(\pi_0^j) \cap$

$\left(f_0+\mathfrak{h}^{\perp,\mathfrak{g}_0^*}\right), 1 \leq j \leq s$, dont les composantes connexes se notent $C_{0,1}^j, \ldots, C_{0,i_j}^j$ avec $i_j = m(\pi_0^j)$. Les composantes connexes de $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau$ ne sont autre que $C_k^j = p^{-1}(C_{0,k}^j)$ pour $1 \leq k \leq m(\pi_0^j)$, $1 \leq j \leq s$. À $C_{0,k}^j$ s'associe un $a_{\pi_0^j}^k \in \left(\mathcal{H}_{\pi_0^j}^{-\infty}\right)^{H,\chi_f}$ et à C_k^j un $a_\pi^r \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f}$ avec $r = \sum_{i=1}^{j-1} m(\pi_0^i) + k$.

Par hypothèse de récurrence, ayant choisi convenablement $d\dot{g}_0, d_k\dot{h}_0, 1 \leq k \leq m(\pi_0)$, on procure une mesure μ_0 sur $\widehat{G_0}$ jouissant des propriétés requises dans le théorème. Alors, il nous suffit de prendre l'image μ de μ_0 par induction de représentation. En effet, quand on considère la désintégration de μ_0 relative à μ :

$$\mu_0 = \int_{\hat{G}} \mu_\pi d\mu(\pi),$$

la fibre au-dessus de π se compose des π_0^j pour $1 \leq j \leq s$ et on voit aisément que $\mu_\pi = \sum_{j=1}^s c_j \delta_{\pi_0^j}$ avec $c_j > 0$, où $\delta_{\pi_0^j}$ signifie la mesure de Dirac au point $\pi_0^j \in \widehat{G_0}$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(G)$. L'expression (5.2) appliquée à $\langle \pi_0^j(\phi) a_{\pi_0^j}^k, a_{\pi_0^j}^k \rangle$ et à $\langle a_\pi^r, a_\pi^r \rangle$, où $r = \sum_{i=1}^{j-1} m(\pi_0^i) + k$, et le déplacement par des opérateurs d'entrelacement nous permettent de choisir $d\dot{g}, d_k\dot{h}$ de sorte qu'on ait, pour tous les indices j, k et toute $\phi \in \mathcal{D}(G)$,

$$\langle \pi(\phi) a_\pi^r, a_\pi^r \rangle = c_j \langle \pi_0^j(\phi) a_{\pi_0^j}^k, a_{\pi_0^j}^k \rangle.$$

Avec ces choix on calcul : pour n'importe quelle $\phi \in \mathcal{D}(G)$,

$$\begin{aligned}
\phi_H^f(e) &= \int_{\widehat{G_0}} \sum_{k=1}^{m(\pi_0)} \langle \pi_0(\phi) a_{\pi_0}^k, a_{\pi_0}^k \rangle d\mu_0(\pi_0) \\
&= \int_{\hat{G}} d\mu(\pi) \int_{\widehat{G_0}} \sum_{k=1}^{m(\pi_0)} \langle \pi_0(\phi) a_{\pi_0}^k, a_{\pi_0}^k \rangle d\mu_\pi(\pi_0) \\
&= \int_{\hat{G}} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{m(\pi_0^j)} c_j \langle \pi_0^j(\phi) a_{\pi_0^j}^k, a_{\pi_0^j}^k \rangle d\mu(\pi) \\
&= \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\mu(\pi),
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. c.q.f.d.

Exemple 5.4. Soit $\mathfrak{g} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_\mathbb{R}$: $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4$. Soit $f = e_4^*$ relativement à la base duale de $\mathfrak{g}^*$ et prenons $\mathfrak{h} = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_4 \in S(f, \mathfrak{g})$. On considère $f_\lambda = \lambda e_3^* + e_4^*$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) dans $\Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp$ et trouve alors $\mathfrak{g}(f_\lambda) = \mathbb{R}(e_2 - \lambda e_3) \oplus \mathbb{R}e_4$. Donc, $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}(f_\lambda)$ est lagrangien pour B_{f_λ} lorsque $\lambda \neq 0$. Soit $G = \exp\ \mathfrak{g}$. Pour $\ell \in \Gamma_\tau$ vérifiant $\ell(e_3) \neq 0$, l'intersection $G \cdot \ell \cap \Gamma_\tau$ consiste en deux droites dont chacune est une H-orbite pour $H = \exp \mathfrak{h}$, tandis qu'elle est une droite contenant des H-orbites en nombre infini pour $\ell \in \Gamma_\tau$

s'annulant en e_3. On voit aussitôt que $p(\Gamma_\tau) = \{G\Delta f_\lambda; \lambda \geq 0\}$, p étant l'application canonique de $\mathfrak{g}^*$ sur l'espace des orbites $\mathfrak{g}^*/G$, et qu'en posant $\pi_\lambda = \hat{\rho}(G\Delta f_\lambda)$ avec l'application de Kirillov $\hat{\rho} : \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$,

$$\tau = \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G) = \mathrm{ind}_H^G \chi_f \simeq 2 \int_0^\infty \pi_\lambda d\lambda.$$

En prenant une polarisation réelle $\mathfrak{b} = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ au point f_λ et en réalisant $\pi_\lambda \in \hat{G}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ sous l'identification $\mathcal{H}_{\pi_\lambda} \ni \phi \leftrightarrow \Phi \in L^2(\mathbb{R})$ donnée par $\Phi(t) = \phi(\exp(te_1))$ ($t \in \mathbb{R}$), on constate que l'espace $\mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty$ se réalise comme l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et par suite que

$$\left(\mathcal{H}_{\pi_\lambda}^{-\infty}\right)^{H,\chi_f} = \mathbb{C}a_\lambda^1 \oplus \mathbb{C}a_\lambda^2,$$

où $a_\lambda^1 : \Phi \mapsto \overline{\Phi(0)}$ tandis que $a_\lambda^2 : \Phi \mapsto \overline{\Phi(2\lambda)}$ si $\lambda \neq 0$ et $\Phi \mapsto \overline{\frac{d\Phi}{dt}(0)}$ si $\lambda = 0$. Il vient ainsi que $\dim \left(\mathcal{H}_{\pi_\lambda}^{-\infty}\right)^{H,\chi_f} = 2$, égale à la multiplicité dans τ. De même, $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f} = \{0\}$ si $\pi \in \hat{G}$ n'est équivalente à aucune π_λ.

Quant à la formule de Plancherel, on pose, pour $\psi \in \mathcal{D}(G)$,

$$\psi_H^f(g) = \int_H \psi(gh)\chi_f(h)dh \ (g \in G),$$

où $dh = dx_2dx_4$ si $h = \exp(x_2e_2)\exp(x_4e_4)$. Choisissons $dg = \Pi_{j=1}^4 dx_j$ pour $g = \Pi_{j=1}^4 \exp(x_je_j)$. Dans ces circonstances, on a la formule :

$$\psi_H^f(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{\langle \pi_\lambda(\psi)a_\lambda^1, a_\lambda^1 \rangle + \langle \pi_\lambda(\psi)a_\lambda^2, a_\lambda^2 \rangle\} d\lambda.$$

En effet, soient $B = \exp \mathfrak{b}$ et $db = \Pi_{j=2}^4 dx_j$ pour $b = \Pi_{j=2}^4 \exp(x_je_j)$. Alors, $\Psi_\lambda^1 = \pi_\lambda(\psi)a_\lambda^1 \in \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'obtient par

$$\Psi_\lambda^1(t) = \int_B \psi(\exp(te_1)\Delta b)\chi_{f_\lambda}(b)db \ (t \in \mathbb{R}),$$

et par suite

$$\langle \pi_\lambda(\psi)a_\lambda^1, a_\lambda^1 \rangle = \int_B \psi(b)\chi_{f_\lambda}(b)db.$$

De même, $\Psi_\lambda^2 = \pi_\lambda(\psi)a_\lambda^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'obtient par

$$\Psi_\lambda^2(t) = \int_B \psi(\exp((t - 2\lambda)e_1)\Delta b)\chi_{f_{-\lambda}}(b)db \ (t \in \mathbb{R}),$$

et puis

$$\langle \pi_\lambda(\psi)a_\lambda^2, a_\lambda^2 \rangle = \int_B \psi(b)\chi_{f_{-\lambda}}(b)db.$$

De tout ce qui précède,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \{\langle \pi_\lambda(\psi)a_\lambda^1, a_\lambda^1\rangle + \langle \pi_\lambda(\psi)a_\lambda^2, a_\lambda^2\rangle\}d\lambda \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{\mathbb{R}} dx_3 \int_H \left(e^{i\lambda x_3} + e^{-i\lambda x_3}\right)\psi(h\exp(x_3e_3))\chi_{f_\lambda}(h)dh \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda x_3}d\lambda dx_3 \int_H \psi(h\exp(x_3e_3))\chi_f(h)dh \\
&\qquad = \int_H \psi(h)\chi_f(h)dh = \psi_H^f(e)
\end{aligned}
$$

à l'aide de la formule de Plancherel pour $\mathbb{R}$.

Au delà du cas nilpotent on connaît peu. Nous allons mentionner ici un cas particulier. Soient $G = \exp\mathfrak{g}$ un groupe exponentiel, $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h} \in M(f,\mathfrak{g})$. La désintégration de $\tau = \mathrm{ind}_H^G\chi_f$ a été obtenue par M. Vergne [74], qui nous a offert un point de départ vers le théorème 2.1.7. Notons $U(f,\mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ qui rencontrent Γ_τ suivant un ouvert non vide de Γ_τ.

Théorème 5.5. Soit $\mathfrak{h} \in M(f,\mathfrak{g})$, alors :
1) $U(f,\mathfrak{h})$ est un ensemble fini ;
2) si $\Omega \in U(f,\mathfrak{h})$, le nombre de composantes connexes $c(\Omega)$ de $\Omega \cap \Gamma_\tau$ est fini ;
3) $\tau \simeq \sum_{\Omega\in U(f,\mathfrak{h})} c(\Omega)\hat{\rho}(\Omega)$.

Pour étudier la formule de Plancherel concrète nous commençons par montrer le :

Lemme 5.6. Soit toujours $\mathfrak{h} \in M(f,\mathfrak{g})$. Il existe $\mathfrak{b} \in I(f,\mathfrak{g})$ possédant les propriétés suivantes. Posons $B = \exp\mathfrak{b}, \pi = \mathrm{ind}_B^G\chi_f$ et notons $(\mathcal{H}_\pi^\infty)_0$ le sous-espace de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ constitué par les fonctions à support compact modulo B. Alors on a :
1) $\Delta_{H\cap B,H}(h)\Delta_{H\cap B,B}(h) = 1$ quel que soit $h \in H\cap B$;
2) HB est fermé in G ;
3) d'après 1) et 2), on est en mesure de fabriquer une forme antilinéaire

$$a : (\mathcal{H}_\pi^\infty)_0 \ni \phi \mapsto \oint_{H/(H\cap B)} \overline{\phi(h)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\mu_{H,H\cap B}(h) \in \mathbb{C}$$

qui se prolonge en un élément de $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$.

Démonstration. S'il existe un idéal non nul $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ sur lequel f s'annule, tout passe immédiatement au quotient auquel s'applique l'hypothèse de récurrence. Supposons désormais la non-existance de tel $\mathfrak{a}$. Soit maintenant $\mathfrak{a}$ un idéal non central minimal. Posons $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}^f \neq \mathfrak{g}, G_0 = \exp\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{a} \in M(f,\mathfrak{g})$ et $H' = \exp\mathfrak{h}'$. L'hypothèse de récurrence nous offre $\mathfrak{b} \in I(f_0,\mathfrak{g}_0), f_0 = f|_{\mathfrak{g}_0} \in \mathfrak{g}_0^*$, possédant au niveau du sous-groupe G_0 les trois propriétés requises. Il s'agit du cas où $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{h}$.

1) Soient $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0$ et $H_0 = \exp\mathfrak{h}_0$. Pour tout $h = \exp X \in H\cap B = H_0\cap B$ ($X \in \mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{b}$),

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0} X + \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a})} X = 0. \tag{5.3}$$

Mais $\mathfrak{b}$ a été choisie de sorte qu'on ait

$$\Delta_{H'\cap B,H'}(h')\Delta_{H'\cap B,B}(h') = 1 \ (h' \in H' \cap B),$$

ce qui revient au même de dire que, pour tout $X \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{a}$,

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}'/(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{b})} X + \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}/(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{b})} X = 0,$$

ou encore que

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_0/(\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{b})} X + \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{b}} X - \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{b})/(\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{b})} X = 0. \tag{5.4}$$

On déduit de (5.3) et de (5.4), $(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b})/(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{b})$ s'identifiant à $\mathfrak{a}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a})$,

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_0/(\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{b})} X + \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{b}} X + \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0} X = 0$$

ou encore

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{b})} X + \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{b})} X = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$, d'où l'égalité souhaitée.

2) On note $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{j}$ (resp. $\mathfrak{g}_1$) le noyau de la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{g}$) dans $\mathfrak{a}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a})$ (resp. $\mathfrak{a}/(\mathfrak{z}\cap\mathfrak{a})$). Alors deux possibilités se produisent ; $\mathfrak{j}+\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$ ou $\mathfrak{j} + \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0$. Dans la première éventualité, soit $\mathfrak{m}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{h}$ contenu dans $\mathfrak{j}$. Alors HB est fermé dans G car une base de $\mathfrak{m}$ fait partie d'une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{j} + \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0$, alors $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$ et $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = \dim \mathfrak{a}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) = 1$. D'où, $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}_1$, ce qui nous rend capable de choisir notre $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}_1$ d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à celle-ci. Pourvu qu'on prenne $X \in \mathfrak{h}, X \notin \mathfrak{j}$, en tant que base coexponentielle à $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$, $HB = \exp(\mathbb{R}X)\Delta H'B$ serait bien fermé dans G car $H'B$ l'est dans $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$.

3) Compte tenu de 1), on peut appliquer la fonctionnelle $\mu_{H,H\cap B}$ à la fonction

$$\phi_H : H \ni h \mapsto \overline{\phi(h)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)$$

pourvu que $\phi \in \mathcal{H}_\pi$. Or, lorsque ϕ parcourt $(\mathcal{H}_\pi^\infty)_0$, on sait d'après 2) que

$$\mu_{H,H\cap B}(\phi_H) = \oint_{H/(H\cap B)} \overline{\phi(h)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\mu_{H,H\cap B}(h) < \infty.$$

Il se voit alors que cette forme antilinéaire $(\mathcal{H}_\pi^\infty)_0 \ni \phi \mapsto \mu_{H,H\cap B}(\phi_H)$ se prolonge uniquement en un élément non nul a de $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$. Cela résulterait presque immédiatement de tout ce qu'on vient de voir, mais toutefois on va ajouter un commentaire.

Si on peut choisir $\mathfrak{b} \in I(f,\mathfrak{g})$ de façon qu'un opérateur d'entrelacement R entre $\pi = \mathrm{ind}_B^G \chi_f$ et $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ s'obtienne, pour $\phi \in (\mathcal{H}_\pi^\infty)_0$, par la formule

$$(R\phi)(g) = \oint_{H/H\cap B} \phi(gh)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\mu_{H,H\cap B}(h) \ (g \in G),$$

le vecteur généralisé $a = \delta_\tau \circ R$ nous conviendrait. Quant à R, soit $\tau' = \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_f$. Si un opérateur d'entrelacement T entre τ' et τ s'obtient en donnant un sens à l'opérateur formel

$$(T\psi)(g) = \oint_{H/H_0} \psi(gh)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\mu_{H,H_0}(h) \ (g \in G)$$

pour $\psi \in \mathcal{H}_{\tau'}$, l'hypothèse de récurrence appliquée à G_0 et la transitivité de $\mu_{\cdot,\cdot}$ nous donneraient R cherché.

En ce qui concerne T, il suffit de raisonner dans la sous-algèbre $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ et donc on suppose $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$. Considérons par exemple le cas où τ se divise en deux partie sous la modification $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$. Soit $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y$ (ou $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathfrak{z}$), $f(Y) = 1, \mathfrak{h} = \mathbb{R}X + \mathfrak{h}_0$ et $[X, Y] = Y$. Grâce au sous-groupe à un paramètre $\exp(\mathbb{R}Y)$ (resp. $\exp(\mathbb{R}X)$), l'espace $\mathcal{H}_\tau$ (resp. $\mathcal{H}_{\tau'}$) s'identifiant à $L^2(\mathbb{R})$, notre T devient, pour $\psi \in \mathcal{H}_{\tau'}$,

$$\begin{aligned}(T\psi)(s) = (T\psi)(\exp(sY)) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(\exp(sY)\exp(tX))e^{-t/2}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(\exp(tX)\exp(se^{-t}Y))e^{-t/2}dt = \int_{\mathbb{R}} \psi(\exp(tX))e^{-ise^{-t}}e^{-t/2}dt.\end{aligned}$$

Par suite, effectuant des changements de variables,

$$\begin{aligned}\|T\psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} ds|\int_{\mathbb{R}} \psi(\exp(tX))e^{-ise^{-t}}e^{-t/2}dt|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} ds|\int_0^{+\infty} \psi(\exp((-\log u)X))e^{-isu}\frac{du}{\sqrt{u}}|^2 \\ &= 2\pi\int_0^{+\infty} |\psi(\exp((-\log u)X))|^2\frac{du}{u} \\ &= 2\pi\int_{\mathbb{R}} |\psi(\exp((-vX))|^2 dv = 2\pi\|\psi\|^2.\end{aligned}$$

Le cas où τ ne se divise pas se traitant tout à fait pareillement, T s'interprète comme transformation de Fourier. c.q.f.d.

Se situant toujours dans la même situation qu'avant, on vérifie le :

Théorème 5.7. Lorsque Ω parcourt $U(f, \mathfrak{h})$, on prend ℓ_Ω^k $(1 \leq k \leq c(\Omega))$ arbitrairement dans chaque composante connexe C_Ω^k de $\Omega \cap \Gamma_\tau$. À tous ces points $\ell_\Omega^k \in \mathfrak{g}^*$ $(\Omega \in U(f, \mathfrak{h}),\ 1 \leq k \leq c(\Omega))$ on peut choisir $\mathfrak{b}_\Omega^k \in I(\ell_\Omega^k, \mathfrak{g})$ du lemme 5.6, qui nous fournit donc $a_\Omega^k \in \left(\mathcal{H}_{\hat{\rho}(\Omega)}^{-\infty}\right)^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$, de sorte que la formule de Plancherel concrète pour τ s'exprime en termes des coefficients matriciels pour ces a_Ω^k convenablement normalisés : quelle que soit $\phi \in \mathcal{D}(G)$,

$$\phi_H^f(e) = \sum_{\Omega \in U(f,\mathfrak{h})} \sum_{k=1}^{c(\Omega)} \langle \hat{\rho}(\Omega)a_\Omega^k, a_\Omega^k \rangle.$$

On peut donner par récurrence une démonstration de ce théorème en examinant de différents cas possibles. On s'abstient de le donner ici et se contente d'en exhiber d'ici bas quelques exemples.

Exemple 5.8. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de $ax+b$: $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, [e_1, e_2] = e_2$. On prend $f = e_2^*$ et $\mathfrak{h} = \mathbb{R}e_1 \in M(f, \mathfrak{g})$. Le groupe complètement résoluble $G = \exp \mathfrak{g}$ n'a que deux représentations unitaires irréductibles à dimension infinie $\pi_\pm$ associées à deux orbites ouvertes $\pm G\Delta e_2^*$. La représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f, H = \exp \mathfrak{h}$, est équivalente à la somme directe $\pi_+ \oplus \pi_-$.

On réalise $\pi_\pm$ comme $\mathrm{ind}_B^G \chi_{\pm e_2^*}$ où $B = \exp(\mathbb{R}e_2)$ et identifie $\mathcal{H}_{\pi_\pm}$ à $L^2(\mathbb{R})$ par l'application $\psi \mapsto \tilde{\psi}(t) = \psi(\exp(te_1))$ $(t \in \mathbb{R})$. Lorsque $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_\pm}^\infty$, on constate que

$$((\pi_\pm(e_2))^m \psi)(t) = (\pm i)^m e^{-mt} \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

pour n'importe quel entier m non négatif. Donc,

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}} e^{-t/2}\tilde{\psi}(t)dt| &\leq \int_{-\infty}^{0} |e^{-t/2}\tilde{\psi}(t)|dt + \int_{0}^{+\infty} |e^{-t/2}\tilde{\psi}(t)|dt \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{0} e^t dt\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{0} |e^{-t}\tilde{\psi}(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt\right)^{1/2} \left(\int_{0}^{+\infty} |\tilde{\psi}(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{0}^{+\infty} |\tilde{\psi}(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_{-\infty}^{0} |e^{-t}\tilde{\psi}(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \|\psi\| + \|\pi_\pm(e_2)\psi\|.
\end{aligned}$$

Il en découle que $a_\pm \in \left(\mathcal{H}_{\pi_\pm}^{-\infty}\right)^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$ si on pose

$$a_\pm(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(\exp(te_1)} e^{-t/2} dt$$

pour $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_\pm}^\infty$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(G)$. Sous un choix de dg sur G, un calcul direct mène à

$$(\pi_+(\phi)a_+)(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\exp(se_1)\exp(ue_2)) e^{iue^{s-t}} e^{(s-t)/2} ds du$$

et ensuite à

$$\langle \pi_+(\phi)a_+, a_+ \rangle = \int_{0}^{+\infty} dv \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\exp(se_1)\exp(ue_2)) e^{iuv} e^{-s/2} ds du.$$

De même,

$$\langle \pi_-(\phi)a_-, a_- \rangle = \int_{-\infty}^{0} dv \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\exp(se_1)\exp(ue_2)) e^{iuv} e^{-s/2} ds du.$$

Notre formule de Plancherel concrète pour τ s'en réduit alors à la formule claire

$$\langle \pi_+(\phi)a_+, a_+\rangle + \langle \pi_-(\phi)a_-, a_-\rangle$$
$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \phi(\exp(se_1))e^{-s/2}ds = \phi_H^f(e) = \langle \tau(\phi)\delta_\tau, \delta_\tau\rangle,$$

pourvu qu'on normalise de différentes mesures à leur convenance.

Si on considère la représentation triviale π_0 de G, il est évident que $\Omega(\pi_0) \cap \Gamma_\tau = \Omega(\pi_0) = \{0\}$, qui est sûrement connexe et même une H-orbite. En plus, quand on regarde π_0 construite moyennant $\mathfrak{g} \in I(0, \mathfrak{g})$, l'adhérence de l'ensemble $\{g \in G; g\Delta(0 + \mathfrak{g}^\perp) \cap \Gamma_\tau \neq \emptyset\}$ atteint G tout entier. Malgré tout cela, il est certain que $\left(\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty}\right)^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}} = \{0\}$.

Exemple 5.9. $G = G_3(\alpha) = \exp \mathfrak{g}_3(\alpha), \mathfrak{g}_3(\alpha) = \langle T, Y_1, Y_2\rangle_{\mathbb{R}} : [T, Y_1] = Y_1 - \alpha Y_2, [T, Y_2] = \alpha Y_1 + Y_2$. Soient $f = Y_1^* \in \mathfrak{g}_3(\alpha)^*$ et $\mathfrak{h} = \mathbb{R}Y_1$. Ici α peut être supposé négatif. On a l'expression paramétrée de l'orbite passant $\ell = (1, \lambda) \in \mathfrak{a}^* = \mathbb{R}Y_1^* + \mathbb{R}Y_2^*$: y utilisant (x, y)-coordonnées

$$x(t) = e^t(\cos(\alpha t) - \lambda \sin(\alpha t)), \tag{5.5}$$
$$y(t) = e^t(\sin(\alpha t) + \lambda \cos(\alpha t)). \tag{5.6}$$

Si la ligne directe $x = 1$ est tangente à l'orbite de ℓ, on voit $(dx/dt)_{t=0} = 1 - \alpha\lambda = 0$, ce qui donne $\lambda = 1/\alpha$, noté λ_0. Soit t^* le premier nombre positif t vérifiant

$$e^t(\cos(\alpha t) - (1/\alpha)\sin(\alpha t)) = 1,$$

et la y-coordonnée du point d'intersection se notant λ_1, nous prenons $\ell = (1, \lambda) \in \mathfrak{a}^*, \lambda_0 \leq \lambda < \lambda_1$, comme représentants des orbites qui rencontrent l'espace affine Γ_τ. Ces orbites sont toutes saturées dans la direction $\mathbb{R}T^*$.

Nous utilisons la paramétrisation de l'orbite et cherchons, en posant $e^t(\cos(\alpha t) - \lambda \sin(\alpha t)) = 1$, des points d'intersection avec Γ_τ. D'où $e^t(1 + \lambda^2)^{1/2}\cos(\alpha t + \theta) = 1$ avec θ tel que

$$\sin\theta = \lambda(1 + \lambda)^{-1/2}, \cos\theta = (1 + \lambda^2)^{-1/2},$$

ce qui entraîne

$$e^t(\sin(\alpha t) + \lambda\cos(\alpha t)) = (1 + \lambda^2)^{1/2}e^t\sin(\alpha t + \theta) = \tan(\alpha t + \theta).$$

On en trouve les points $\ell_n = (1, \tan(\alpha t_n + \theta)), \ell_0 = \ell$. Choisissons arbitrairement des $g_n \in G$ tels que $g_n : \ell \mapsto \ell_n$, et fabriquons l'application

$$a_n : \phi \mapsto \oint_{H/(H\cap g_n H g_n^{-1})} \overline{\phi(hg_n)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\nu(h) \ (\phi \in \mathcal{H}_\pi), \tag{4.2}$$

ce dernier n'est autre que $\overline{\phi(g_n)}$, ici on a noté $B = \exp \mathfrak{b}$, associé à la polarisation $\mathfrak{b} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2, \pi = \pi_\ell = \mathrm{ind}_B^G \chi_\ell$ dont l'espace se notant $\mathcal{H}_\pi$. On voit facilement que $a_n \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}$. Par suite, pour $\psi \in \mathcal{D}(G)$, un calcul mène à

$$(\pi(\psi)a_n)(g) = \Delta_G^{-1}(g_n)\int_B \psi(gbg_n^{-1})\chi_\ell(b)db \ (g \in G).$$

Ensuite

$$\langle \pi(\psi)a_n, a_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_H^f(\exp(sY_2))\exp(is\tan(\alpha t_n+\theta))ds.$$

Les formules (5.5), (5.6) entraînent, $y(t)$ s'écrivant simplement y,

$$(1-\alpha y)(dt/d\lambda) = e^t\sin(\alpha t), \tag{5.7}$$

$$(dy/d\lambda) - (y+\alpha)(dt/d\lambda) = e^t\cos(\alpha t). \tag{5.8}$$

D'autre part, compte tenu de $e^{2t} = (1+y^2)/(1+\lambda^2)$,

$$\{(1+\lambda^2)(dt/d\lambda)+\lambda\}(1+y^2)/(1+\lambda^2) = y(dy/d\lambda). \tag{5.9}$$

Les égalités (5.7), (5.8) impliquent

$$\lambda(dy/d\lambda) + (1-\alpha y-\lambda y-\alpha\lambda)(dt/d\lambda) = y,$$

$$(dy/d\lambda) + (\lambda\alpha y-\lambda-y-\alpha)(dt/d\lambda) = 1,$$

donc

$$(\lambda-y)(dy/d\lambda) + (1-\alpha\lambda)(1+y^2)(dt/d\lambda) = 0.$$

Par substitution de (5.9),

$$(\lambda-y)(dy/d\lambda) + (1-\alpha\lambda)\{y(dy/d\lambda) - \lambda(1+y^2)/(1+\lambda^2)\} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda(1-\alpha y)(dy/d\lambda) = \lambda(1+\alpha\lambda)(1+y^2)/(1+\lambda^2).$$

En conséquence, pour λ non nul,

$$(dy/d\lambda) = (1-\alpha\lambda)(1+y^2)/(1-\alpha y)(1+\lambda^2).$$

Notre formule à montrer revient à la suivante, $y_n = y_n(\lambda)$ désignant $\tan(\alpha t_n+\theta)$,

$$\begin{aligned}\psi_H^f(e) &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\xi(\lambda)d\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty}\kappa(n)\int_{\mathbb{R}}\psi_H^f(\exp(sY_2))\exp(is\tan(\alpha t_n+\theta))\right)ds\\ &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\xi(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\kappa(n)(\psi_H^f)(y_n)d\lambda\end{aligned}$$

avec certaines fonctions mesurables $\xi(\lambda)$ et $\kappa(n)\geq 0$, car on multiplie au besoin a_n par un scalaire convenable, et (ψ_H^f) signifiant la transformée de Fourier inverse de $\psi_H^f\circ\exp$.

En effet, soient $\xi(\lambda) = (1-\alpha\lambda)/2\pi(1+\lambda^2)$ et $\kappa(n) = (1+y_n^2)|1-\alpha y_n|$, ce qui veut dire qu'on prend $\{(1+y_n^2)/|1-\alpha y_n|\}^{1/2}a_n$. Alors,

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_H^f)(y_n)\kappa(n)\right)\xi(\lambda)d\lambda$$
$$= (2\pi)^{-1/2}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}(\psi_H^f)(y_n)(1-\alpha\lambda)(1+y_n^2)/|1-\alpha y_n|(1+\lambda^2)d\lambda$$
$$= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}(\psi_H^f)(s)ds = (\psi_H^f\circ\exp)(0) = \psi_H^f(e).$$

Exemple 5.10. Soit $G = G_3(\alpha) = \exp\mathfrak{g}_3(\alpha)$ comme dans l'exemple précédent. Étant données cette fois $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T$ et $f \in \mathfrak{g}^*$ arbitraire. Alors

$$\Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp = f(T)T^* + \mathbb{R}Y_1^* + \mathbb{R}Y_2^*$$

et on y trouve que les orbites générales ont leur représentant $\hat{\theta} = (\cos\theta)Y_1^* + (\sin\theta)Y_2^*$ à laquelle s'associe la représentation irréductible $\pi_\theta = \mathrm{ind}_B^G\,\chi_{\hat{\theta}}$ de G, où B est le sous-groupe analytique correspondant à la polarisation $\mathfrak{b} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$.

Dans ce cas, notre formule habituelle (4.2) pour obtenir des vecteurs généralisés H-semi-invariants nous offre

$$a_\theta : \phi \mapsto \int_H \overline{\phi(h)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh.$$

Des raisonnements analogues à ceux faits pour le cas $ax+b$ montrent que notre a_θ possède les propriétés requises. Il est aisé de voir, pour $\psi \in \mathcal{D}(G)$,

$$\left(\pi_\theta(\psi)a_\theta\right)(g) = \int_B \psi_H^f(gb)\chi_{\hat{\theta}}(b)db \ (g \in G),$$
$$\langle \pi_\theta(\psi)a_\theta, a_\theta\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{2t}dt\int_B \psi_H^f(b)\chi_\ell(b)db,$$

avec la notation $\ell = h\Delta\hat{\theta} = e^t\cos(\alpha t+\theta)Y_1^* + e^t\sin(\alpha t+\theta)Y_2^*,\ h = \exp(tT)$.

Ceci posé,

$$(2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\langle\pi_\theta(\psi)a_\theta, a_\theta\rangle d\theta$$
$$= (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\mathbb{R}}e^{2t}dt\int_{\mathbb{R}^2}\psi_H^f(\exp(b_1Y_1+b_2Y_2))\times$$
$$\times\exp\left(ie^t(b_1\cos(\alpha t+\theta)+b_2\sin(\alpha t+\theta))\right)db_1db_2.$$

Appliquons le changement de variables

$$x = e^t\cos(\alpha t+\theta), y = e^t\sin(\alpha t+\theta),$$

dont le jacobien est

$$\partial(x,y)/\partial(t,\theta) = e^{2t}; dxdy = e^{2t}dtd\theta.$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^{-2} & \int_0^{2\pi} \langle \pi_\theta(\psi) a_\theta, a_\theta \rangle d\theta \\
& = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} dxdy \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_H^f)^*(b_1, b_2) \exp(i(xb_1 + yb_2)) db_1 db_2 \\
& = (\psi_H^f)^*(0,0) = \psi_H^f(e),
\end{aligned}
$$

où $(\psi_H^f)^*(b_1, b_2) = \psi_H^f(\exp(b_1 Y_1 + b_2 Y_2))$.

Exemple 5.11. $G = \exp \mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_4 = \langle T, X, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}; [T, X] = X, [T, Y] = -Y, [X, Y] = Z$ (oscillateur complètement résoluble). Soient $f(\alpha, \beta) = \alpha T^* + \beta Z^* \in \mathfrak{g}_4^*$ et $\Omega(\alpha, \beta) = G\Delta f(\alpha, \beta)$ pour $\beta \neq 0$. On se donne $f = f(\alpha_0, \beta_0)$.

(i) Soit premièrement $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T + \mathbb{R}X$. Alors

$$\tau = \operatorname{ind}_H^G \chi_f \simeq \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\Omega(\alpha_0, \beta)) d\beta.$$

Au moyen de $\ell = f(\alpha_0, \beta) \in \Gamma_\tau \cap \Omega(\alpha_0, \beta)$ et d'une polarisation $\mathfrak{b} = \langle T, X, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ en ℓ, on construit $\pi(\alpha_0, \beta) = \operatorname{ind}_B^G \chi_\ell = \hat{\rho}(\Omega(\alpha_0, \beta))$. Dans cette situation, la façon usuelle propose a_β par $\langle a_\beta, \phi \rangle = \overline{\phi(e)}$, qui satisfait clairement aux conditions requises. Comme $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathbb{R}Z$ et que Z est central,

$$\left(\mathcal{H}_{\pi(\alpha_0, \beta)}^{-\infty} \right)^{H, \chi_f \Delta_{G,H}^{1/2}} = \mathbb{C} a_\beta.$$

Maintenant pour $\psi \in \mathcal{D}(G), \pi(\alpha_0, \beta)(\psi) a_\beta = \psi_B^\ell$, i.e.

$$\left(\pi(\alpha_0, \beta)(\psi) a_\beta \right)(g) = \int_B \psi(gb) \chi_\ell(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db \ (g \in G),$$

par suite,

$$\langle \pi(\alpha_0, \beta)(\psi) a_\beta, a_\beta \rangle = \int_B \psi(b) \chi_\ell(b) \Delta_{H,G}^{-1/2}(b) db.$$

De tout ce qui précède,

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^{-1} & \int_{\mathbb{R}} \langle \pi(\alpha_0, \beta)(\psi) a_\beta, a_\beta \rangle d\beta \\
& = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} d\beta \int_{\mathbb{R}} \psi_H^f(\exp(wZ)) \exp(i\beta w) dw = \psi_H^f(e).
\end{aligned}
$$

(ii) Deuxièmement soit $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T + \mathbb{R}Z$. Prenons $\ell = f(\alpha, \beta_0) = \alpha T^* + \beta_0 Z^*$, ce qui dit

$$\Gamma_\tau \cap \Omega(\alpha, \beta_0) = \alpha_0 T^* + xX^* + yY^* + \beta_0 Z^*; xy = \beta_0(\alpha - \alpha_0).$$

Si la valeur

$$\begin{aligned}(\exp(aX)\exp(bY)\Delta\ell)\,(T) = (\exp(bY)\Delta\ell)(T+aX)& \\ = \ell(T+aX-bY+abZ) = \alpha + ab\beta_0&\end{aligned}$$

est égale à $f(T)$, il vient $\alpha+ab\beta_0=\alpha_0$, i.e. $ab\beta_0=\alpha_0-\alpha$. En modifiant les éléments de la base par des scalaires convenables, on peut supposer que $\beta_0=1$. L'égalité obtenue ci-dessus devient $ab=\alpha_0-\alpha$. Par conséquent, pour $f(\alpha,\beta_0)$ telle que $\alpha\neq\alpha_0$, $g_j\Delta f(\alpha,\beta_0)\in\Gamma_\tau$ $(j=1,2)$ avec $g_1=\exp X\exp((\alpha_0-\alpha)Y), g_2=\exp(-X)\exp((\alpha-\alpha_0)Y)$.

Pareillement au cas (i), on réalise la représentation $\pi(\alpha,\beta_0)=\mathrm{ind}_B^G\,\chi(\alpha,\beta_0)=\hat\rho(\Omega(\alpha,\beta_0))$. Pour $\phi\in\mathcal{H}^\infty_{\pi(\alpha,\beta_0)}$, nous rappelons la formule familière :

$$\begin{aligned}\langle a^1_\alpha,\phi\rangle &= \oint_{H/(H\cap g_1Bg_1^{-1})}\overline{\phi(hg_1)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}d\nu(h)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\overline{\phi(\exp(tT)\exp X)}e^{-it\alpha_0}dt = \int_{\mathbb{R}}\overline{\phi(\exp(e^tX))}e^{it(\alpha-\alpha_0)+t/2}dt\\ &= \int_0^\infty\overline{\phi(\exp(sX))}s^{i(\alpha-\alpha_0)-1/2}ds.\end{aligned}$$

L'intégrand de ce dernier est bien intégrable et il est immédiat que

$$a^1_\alpha\in\left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi(\alpha,\beta_0)}\right)^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}.$$

De même la formule

$$\begin{aligned}\langle a^2_\alpha,\phi\rangle &= \oint_{H/(H\cap g_2Bg_2^{-1})}\overline{\phi(hg_2)\chi_f(h)}\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\nu(h)\\ &= \int_0^\infty\overline{\phi(\exp(-sX))}s^{i(\alpha-\alpha_0)-1/2}ds\end{aligned}$$

définit un élément non nul

$$a^2_\alpha\in\left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi(\alpha,\beta_0)}\right)^{H,\chi_f\Delta_{H,G}^{1/2}}.$$

Soit a un élément quelconque de celui-ci. La semi-invariance de a par rapport à $h=\exp(tT), t\in\mathbb{R}$, nous donne

$$\langle e^{it(\alpha_0-\alpha)-t/2}a,\phi(\exp(xX))\rangle=\langle a,\phi(\exp(e^txX))\rangle.$$

On en déduit que

$$\langle a,\phi\rangle = c_1\int_{\mathbb{R}_+}\overline{\phi(\exp(xX))}x^{i(\alpha-\alpha_0)-1/2}dx\ (c_1 : \text{constante})$$

si le support de ϕ est contenu dans $\mathbb{R}_+=\{s\in\mathbb{R}; s>0\}$, c'est-à-dire que $a=c_1a^1_\alpha$ (c_1 : constante) sur $\mathbb{R}_+$. De même, $a=c_2a^2_\alpha$ (c_2 : constante) sur $\mathbb{R}_-=\{s\in\mathbb{R}; s<0\}$.

Supposons maintenant que le support de a est contenu dans B, et écrivons

$$a=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j D_j,\ \langle D_j,\phi\rangle=\overline{(d^j\hat{\phi}/dx^j)(0)}$$

avec $\hat{\phi}(x)=\phi(\exp(xX))$. Alors en considérant la semi-invariance de a pour $h=\exp(tT)$, on a

$$e^{i\alpha_0 t}\sum_{j=0}^{m}\overline{(d^j\hat{\phi}/dx^j)(0)}=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\overline{(d^j\hat{\phi}/dx^j)(0)}e^{(j+1/2)t}e^{i\alpha t}.$$

Si on y choisit ϕ vérifiant $(d^j\hat{\phi}/dx^j)(0)=\delta_{jm}$, il s'ensuit que

$$\lambda_m e^{i\alpha_0 t}=\lambda_m e^{(m+1/2)t}e^{i\alpha t}\ (t\in\mathbb{R}).$$

On en conclut que $\lambda_m=0$, ce qui veut dire que $a=0$. En somme,

$$\left(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi(\alpha,\beta_0)}\right)^{H,\chi_f\Delta^{1/2}_{H,G}}=\mathbb{C}a^1_\alpha\oplus\mathbb{C}a^2_\alpha.$$

Passons à la formule de Plancherel concrète pour la représentation monomiale $\tau=\mathrm{ind}_H^G\chi_f,\ f=f(\alpha_0,\beta_0)$. pour alléger les notations, $\pi(\alpha,\beta_0)$, examinée de près pour le moment, sera notée π. Soient $\psi\in\mathcal{D}(G)$ et $\phi\in\mathcal{H}^\infty_\pi$ à support compact modulo B. On calcule : a^j_α $(j=1,2)$ se notant simplement a^j,

$$\begin{aligned}\langle\pi(\psi)a^1,\phi\rangle=&\oint_{H/(H\cap g_1Bg_1^{-1})}d\nu(h)\oint_{G/B}d\mu_{G,B}(g)\int_B\psi(gbg_1^{-1}h^{-1})\\&\times\overline{\phi(g)}\Delta^{-1/2}_{B,G}(h)\chi_\ell(b)\overline{\chi_f(h)}\Delta^{-1}_G(h)\Delta^{-1/2}_{H,G}(h)db.\end{aligned}$$

L'ordre des deux premières intégrales au membre droit s'échange, ce qu'on va voir dans la suite. Tout d'abord $\Delta_G(h)=\Delta_{H,G}(h)=1$ et à l'expression ci-dessus g se met comme $g=\exp(xX)$, x parcourant un certain intervalle fini J. On note $\Xi(h,g,b)$ l'intégrand dans (5.10) et écrit $h=\exp(tT),b=\exp(sT)\exp(yY)\exp(wZ)$. Alors

$$\begin{aligned}\int_B\Xi(h,g,b)db=\overline{\hat{\phi}(x)}&\int_{\mathbb{R}^3}\psi(\exp(xX)\exp(yY)\exp(wZ)\exp((\alpha-\alpha_0)Y)\\&\times\exp(-X)\exp(-tT))e^{-s/2}e^{i(w+\alpha s-\alpha_0)}dsdydw.\end{aligned}$$

On y trouve

$$\begin{aligned}&\exp(xX)\exp(sT)\exp(yY)\exp((\alpha-\alpha_0)Y)\exp(-X)\exp(-tT)\\=&\exp\left((w+e^{-s}x(y+\alpha-\alpha_0))Z\right)\\&\times\exp\left(e^{-s}(y+\alpha-\alpha_0)Y\right)\exp\left((x-e^s)X\right)\exp((s-t)T).\end{aligned}$$

Compte tenu de cela

$$|\int_B \Xi(h,g,b)db| \leq |\hat{\phi}(x)| \int_{\mathbb{R}^3}$$
$$\times \exp\left((x-e^s)X\right)\exp((s-t)T)|e^{-s/2}dsdydw$$
$$= |\hat{\phi}(x)| \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\exp(wZ)\exp(yY)\exp\big((x-e^{s+t})X\big)\exp(sT)|e^{(s+t)/2}dsdydw.$$

Puisque x parcourt l'intervalle fini J, cette expression est intégrable par rapport à $dtdx$ et on est en mesure d'échanger l'ordre des deux premières intégrales dans l'équation pour $\langle \pi(\psi)a^1, \phi\rangle$, ce qu'on vient de chercher.

Nous arrivons ainsi à

$$\langle \pi(\psi)a^1, \phi\rangle = \oint_{G/B} d\mu_{G,B}(g) \oint_{H/(H\cap g_1Bg_1^{-1})} d\nu(h) \int_B \psi(gbg_1^{-1}h^{-1})$$
$$\times \overline{\phi(g)}\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)\chi_\ell(b)\overline{\chi_f(h)}\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)db.$$

Donc pour $g \in G$,

$$(\pi(\psi)a^1)(g) = \oint_{H/(H\cap g_1Bg_1^{-1})} d\nu(h) \int_B \psi(gbg_1^{-1}h^{-1})$$
$$\times \Delta_{B,G}^{-1/2}(b)\chi_\ell(b)\overline{\chi_f(h)}\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)db.$$
$$= \oint_{H/(H\cap g_1Bg_1^{-1})} d\nu(h) \oint_{B/(B\cap g_1^{-1}Hg_1)} \chi_\ell(b)\overline{\chi_f(h)}\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\hat{\nu}(b)$$
$$\times \int_{B\cap g_1^{-1}Hg_1} \psi(gbb_0^{-1}g_1^{-1}h^{-1})\Delta_{B,G}^{1/2}(b_0)\overline{\chi_\ell(b_0)}\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1,B}(b_0)\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1}(b_0)db_0$$

avec $\hat{\nu} = \mu_{B,B\cap g_1^{-1}Hg_1}$. Des arguments tout à fait pareils à ceux employés plus haut constatent que les deux premières intégrales sont prêtes à échanger leur ordre. Finalement,

$$(\pi(\psi)a^1)(g) = \oint_{B/(B\cap g_1^{-1}Hg_1)} \chi_\ell(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)d\hat{\nu}(b)$$
$$\times \oint_{H/(H\cap g_1Bg_1^{-1})} \overline{\chi_f(h)}\Delta_G^{-1}(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\nu(h)$$
$$\times \int_{B\cap g_1^{-1}Hg_1} \psi(gbb_0^{-1}g_1^{-1}h^{-1})\overline{\chi_\ell(b_0)}\Delta_{B,G}^{1/2}(b_0)\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1,B}(b_0)\Delta_{B\cap g_1^{-1}Hg_1}^{-1}(b_0)db_0,$$

dont la dernière intégrale est égale à

$$\int_{H\cap g_1Bg_1^{-1}} \psi(gbg_1^{-1}b'^{-1}h^{-1})\chi_{g_1\Delta\ell}(b')$$
$$\times\, \Delta^{1/2}_{g_1Bg_1^{-1},G}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H,g_1Bg_1^{-1}}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H}(b')db'.$$

Pourvu que l'égalité

$$\Delta_H^{1/2}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H}(b') = \Delta_{g_1^{-1}Bg_1}(b')\ (b' \in g_1Bg_1^{-1}\cap H)$$

s'établisse, ce qui est aisé à constater dans notre cas, on aurait

$$\Delta^{1/2}_{g_1Bg_1^{-1},G}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H,g_1Bg_1^{-1}}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H}(b')$$
$$= \Delta_H^{-1}(b')\Delta^{1/2}_{H,G}(b')\Delta_{g_1Bg_1^{-1}\cap H,H}(b'),$$

et enfin

$$\begin{aligned}(\pi(\psi)a^1)(g) &= \oint_{B/(B\cap g_1^{-1}Hg_1)} \Delta_{B,G}^{-1/2}(b)\chi_\ell(b)d\hat{\nu}(b)\\ &\quad\times \int_H \psi(gbg_1^{-1}h)\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh\\ &= \oint_{B/(B\cap g_1^{-1}Hg_1)} \psi_H^f(gbg_1^{-1})\chi_\ell(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)d\hat{\nu}(b).\end{aligned}$$

De même façon,

$$(\pi(\psi)a^2)(g) = \oint_{B/(B\cap g_2^{-1}Hg_2)} \psi_H^f(gbg_2^{-1})\chi_\ell(b)d\tilde{\nu}(b)$$

avec $\tilde{\nu} = \mu_{B,B\cap g_2^{-1}Hg_2}$. De tout ce qui précède,

$$\begin{aligned}\langle\pi(\psi)a^1,a^1\rangle &= \oint_{H/(H\cap g_1Bg_1^{-1})} \chi_\ell(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\nu(h)\\ &\quad\times \oint_{B/(B\cap g_1^{-1}Hg_1)} \psi_H^f(hg_1bg_1^{-1})\chi_\ell(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)d\hat{\nu}(b)\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{it(\alpha_0-\alpha)+t/2}dt \int_{\mathbb{R}} \psi_H^f\left(\exp\left(e^tX\right)\exp(xT)\exp(yY)\exp(-X)\right)e^{i\alpha x-x/2}dxdy\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-x)(\alpha_0-\alpha)+(t+x)/2}dt \int_{\mathbb{R}^2} \psi_H^f\left(\exp\left((e^t-e^x)X\right)\exp(yY)\right)e^{-iye^x}dxdy.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $t \to t+x, e^x = s$, on obtient

$$\langle\pi(\psi)a^1,a^1\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{it(\alpha_0-\alpha)+t/2}dt \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \psi_H^f\left(\exp\left(s(e^t-1)X\right)\exp(yY)\right)e^{-iys}dyds.$$

D'une façon analogue,

$$\begin{aligned}\langle \pi(\psi)a^2, a^2\rangle = &\oint_{H/(H\cap g_2Bg_2^{-1})} \chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)d\nu(h)\\ &\times \oint_{B/(B\cap g_2^{-1}Bg_2)} \psi_H^f(hg_2bg_2^{-1})\chi_\ell(b)\Delta_{B,G}^{-1/2}(b)d\tilde{\nu}(b)\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{it(\alpha_0-\alpha)+t/2}dt \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \psi_H^f(\exp\left(s\left(1-e^t\right)X\right)\exp(yY)e^{iys}dyds.\end{aligned}$$

Ces calculs se terminent donc à

$$\begin{aligned}&\langle \pi(\psi)a^1, a^1\rangle + \langle \pi(\psi)a^2, a^2\rangle\\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}} e^{it(\alpha_0-\alpha)+t/2}dt \int_{\mathbb{R}^2} \psi_H^f(\exp(s(1-t)X)\exp(yY))e^{iys}dyds.\end{aligned}$$

Si on y pose

$$\Psi(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_H^f\left(\exp\left(s(1-e^t)X\right)\exp(yY)\right)e^{iys}dyds,$$

cette fonction est infiniment différentiable pour t non nulle car dans ce cas l'intégrale serait effectuée sur un compact. D'ailleurs, la fonction $\mathbb{R}^2 \ni (s,y) \to \psi_H^f(\exp(sX)\exp(yY))$ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, dont on fait des L^1-approximation par des fonctions de la forme $\sum_j \xi_j(s)\eta_j(y)$ ($\xi_j, \eta_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$), pour un nombre positif ϵ quelconque, on peut choisir des ξ_j, η_j de telle manière que

$$|\Psi(t) - (2\pi)^{1/2}\sum_j \int_{\mathbb{R}} \xi_j\left(s(1-e^t)\right)\widehat{\eta_j}(s)ds| < \epsilon$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}$, où $\widehat{\eta_j}$ désigne la transformée de Fourier inverse de η_j. Compte tenu du fait que la limite, lorsque t tend vers zéro, de

$$\int_{\mathbb{R}} \xi_j\left(s(1-e^t)\right)\widehat{\eta_j}(s)ds$$

est ègale à $(2\pi)^{1/2}\xi_j(0)\eta_j(0)$, $\Psi(t)$ est continue même en $t=0$.

Nous considérons à la fin la fonction $e^{t/2}\Psi(t)$, lorsque $t \to -\infty$ elle décroit rapidement grâce au facteur $e^{t/2}$. Examinons son comportement quand t tend vers $+\infty$. Un changement de variables mène à

$$e^{t/2}\Psi = e^{t/2}(1-e^t)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} \psi_H^f(\exp(sX)\exp(yY))e^{iys(1-e^t)^{-1}}dsdy,$$

et à

$$|e^{t/2}\Psi(t)| \leq e^{t/2}(1-e^t)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} |\psi_H^f(\exp(sX)\exp(yY))|dsdy,$$

ce qui prouve que $e^{t/2}\Psi(t)$ est à décroissance rapide, t tendant vers $+\infty$.

Il en découle que la formule d'inversion de Fourier nous amène à notre formule de Plancherel concrète pour la représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$:

$$(2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}} \left(\langle \pi(\psi)a_\alpha^1, a_\alpha^1\rangle + \langle \pi(\psi)a_\alpha^2, a_\alpha^2\rangle\right) d\alpha$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \psi_H^f(\exp(yY))e^{iys}dsdy = \psi_H^f(e).$$

Jusqu'ici nous avons étudié et explicité la formule de Plancherel abstraite due à Penney pour $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ supposée à multiplicités finies. Avant de terminer ce chapitre, nous allons traiter dans le cas nilpotent celle due à Bonnet. Soient $G = \exp \mathfrak{g}, H = \exp \mathfrak{h}$ avec une mesure de Haar dh et χ un caractère unitaire de H. D'après Bonnet [16] χ admet, comme une distribution de type positif sur G, une transformée de Fourier qui est un couple (μ, U). À savoir, μ est une mesure positive sur $\hat{G}$ et U un champs d'opérateurs nucléaires $U_\pi : \mathcal{H}_\pi^\infty \to \mathcal{H}_\pi^{-\infty}, \pi \in \hat{G}$, tels qu'on ait pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(G)$ la formule de Plancherel abstraite :

$$\int_H \phi(h)\chi(h)dh = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}\left(\pi(\phi)U_\pi\right) d\mu(\pi),$$

où tr désigne la trace d'opérateurs. On identifie (μ, U) et (μ', U') si $\mu' = \lambda\mu$ $(\lambda > 0)$ et si $U' = \lambda^{-1}U$. Alors un seul couple (μ, U) satisfait à la formule.

Pour compléter la formule écrivons $\chi = \chi_f$ avec $f \in \mathfrak{g}^*$. Alors on sait bien que la mesure μ en question n'est autre que celle de la désintégration centrale canonique (2.1.1) de la représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$. Gardons les notations et commençons par jeter un coup d'l au cas où H serait distingué. Puisque G agit sur $\mathfrak{h}^*$, il se voit aussitôt que $G\Delta\ell \cap \Gamma_\tau = P\Delta\ell$, $P = G(f|_\mathfrak{h})$, pour tout $\ell \in \Gamma_\tau$. Par ailleurs, il est bien connu [19] que les multiplicités $m(\pi)$ dans la formule (2.1.1) sont uniformément égales soit à 1 soit à ∞. Des raisonnements développés dans [54] marchent bien dans cette situation. Nous réalisons $\pi \in \hat{G}$, appartenant au support de μ, au moyen d'une polarisation $\mathfrak{b}$ en $\ell \in \hat{\rho}^{-1}(\pi) \cap \Gamma_\tau$; $\pi = \mathrm{ind}_B^G \chi_\ell$ avec $B = \exp \mathfrak{b}$. Ce qui simplifie les choses, c'est ce qu'on peut choisir $\mathfrak{b}$ de manière que $\mathfrak{b}$ contienne $\mathfrak{h}$. Donc $H \subset B \subset P$. Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\pi^\infty$, la fonction $\alpha\bar{\beta}$ est B-invariante à droite et intégrable pour la mesure P-invariante $d\dot{g}$ sur P/B. Par la formule

$$\langle U_\pi \alpha, \beta\rangle = \int_{P/B} \alpha(g)\overline{\beta(g)}d\dot{g}$$

se définit un opérateur nucléaire U_π de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ dans $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$. Cet opérateur est autoadjoint positif. D'autre part, pour $\phi \in \mathcal{D}(G)$, $\pi(\phi)$ est un opérateur à noyau qui s'exprime par la formule :

$$K_\phi(x, y) = \int_B \phi(xby^{-1})\chi_\ell(b)db$$

pour $(x, y) \in G \times G$, db étant une mesure de Haar sur B. C'est justement comme Grélaud [54] qu'on en déduit

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\pi(\phi)U_\pi) &= \int_{P/B} K_\phi(g,g)d\dot g = \int_{P/B} d\dot g \int_B \phi(gbg^{-1})\chi_\ell(b)db\\ &= \int_{P/B} d\dot g \int_{\mathfrak b} \phi^g(\exp X)e^{i\ell X}dX\end{aligned}$$

avec $\phi^g(x) = \phi(gxg^{-1})$ $(x \in G)$. Puisque $\ell|_{\mathfrak b} \neq 0$, on prend un supplémentaire $\mathfrak t$ de $\mathfrak b$ dans $\mathfrak g$ tel que $\ell|_{\mathfrak t} = 0$. Compte tenu de $B\Delta\ell = \ell + \mathfrak b^\perp$, si on note $\mathcal F(\psi)$ la transformée de Fourier de $\psi \in \mathcal D(G)$, la formule d'inversion de Fourier nous fournit

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\pi(\phi)U_\pi) &= \int_{P/B} d\dot g \int_{\mathfrak b^\perp} d\xi \int_{\mathfrak t} dY \int_{\mathfrak b} \phi^g(\exp(X+Y))e^{i\ell(X)+i\xi(Y)}dX\\ &= \int_{P/B} d\dot g \int_{\mathfrak b^\perp} d\xi \int_{\mathfrak g} \phi^g(\exp X)e^{i(\ell+\xi)(X)}dX\\ &= \int_{P/B} d\dot g \int_{B/G(\ell)} d\dot b \int_{\mathfrak g} \phi(\exp X)e^{ib\Delta\ell(g^{-1}\Delta X)}dX\\ &= \int_{P/G(\ell)} \mathcal F(\phi\circ\exp)(g\cdot\ell)d\dot g\\ &= \int_{G\Delta\ell\cap\Gamma_\tau} \mathcal F(\phi\circ\exp)(\lambda)d\lambda.\end{aligned}$$

Nous arrivons ainsi à la formule, l'orbite $\hat\rho^{-1}(\pi)$ se notant $\Omega(\pi)$,

$$\operatorname{tr}(\pi(\phi)U_\pi) = \int_{\Omega(\pi)\cap\Gamma_\tau} \mathcal F(\phi\circ\exp)(\lambda)d\lambda,$$

qui devient visiblement la formule du caractère de Kirillov lorsque H est trivial.

On en tire immédiatement la formule de Plancherel : pour toute $\phi \in \mathcal D(G)$,

$$\begin{aligned}\int_H \phi(h)\chi_f(h)dh = \int_{\mathfrak h} \phi(\exp X)e^{if(X)}dX &= \int_{\Gamma_\tau} \mathcal F(\phi\circ\exp)(\xi)d\xi\\ &= \int_{\hat G} d\mu(\pi) \int_{\Omega(\pi)\cap\Gamma_\tau} \mathcal F(\phi\circ\exp)(\lambda)d\lambda = \int_{\hat G} \operatorname{tr}(\pi(\phi)U_\pi)\,d\mu(\pi).\end{aligned}$$

Nous ne supposons plus H distingué et montrons d'abord un lemme. Quoiqu'abusif, on se permettra de noter Γ_τ/G au lieu de $(G\Delta\Gamma_\tau)/G$.

Lemme 5.12. Une mesure de Lebesgue ν sur Γ_τ se désintègre relative à une mesure de base μ sur Γ_τ/G :

$$\nu = \int_{\Gamma_\tau/G} \nu_\Omega d\mu(\Omega),$$

ν_Ω étant supportée sur une G-orbite Ω.

Démonstration. On se ramène facilement au cas où $\mathfrak{h}$ contient le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$, puis d'après un raisonnement classique à celui où $\dim \mathfrak{z} = 1, f|_{\mathfrak{z}} \neq 0$. Choisissons dans $\mathfrak{g}$ un triplet de Heisenberg $\{X, Y, Z\}$, $[X, Y] = Z$, tel que $\mathfrak{z} = \mathbb{R}Z, f(Y) = 0, f(Z) = 1$ et que $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ soit un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Alors le centralisateur $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ est un idéal de codimension 1. Par hypothèse de récurrence, on suppose le lemme établi pour $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$, les objets concernés se notant avec l'indice 0.

Soient $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ l'application restriction et $\Gamma_0 = p(\Gamma_\tau)$. Pour $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ telle que $\Omega \cap \Gamma_\tau \neq \emptyset$, il se voit que $\Omega = p^{-1}(p(\Omega))$ et le lemme 2.1.4 dit que $p(\Omega)$ se décompose en G_0-orbites ω_t à un paramètre $t \in \mathbb{R}$ telles que $\omega_t = \exp(tX) \cdot \omega_0$. Plus précisément, ω_t s'obtient par exemple comme $\omega_t = p(\Omega) \cap P_t$, P_t désignant l'hyperplan $\{\ell \in \mathfrak{g}^*; \ell(Y) = t\}$ dans $\mathfrak{g}^*$. Soit ν_0 une mesure de Lebesgue sur l'espace affine Γ_0.

(1) Supposons premièrement $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$. Dans ce cas ν s'identifie avec ν_0. Par ailleurs, X étant choisi dans $\mathfrak{h}$, on a $\exp(tX) \cdot (\omega_0 \cap \Gamma_0) = \omega_t \cap \Gamma_0$ pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Posons $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 + \mathbb{R}Y, f_0 = p(f) \in \mathfrak{g}_0^*$ et $\Gamma_1 = \{\ell_0 \in \mathfrak{g}_0^*; \ell_0|_{\mathfrak{h}_1} = f_0|_{\mathfrak{h}_1}\}$. L'espace borélien Γ_τ/G s'identifie avec Γ_1/G_0.

L'hypothèse de récurrence désintègre une mesure de Lebesgue ν_1 sur Γ_1 selon l'action de G_0 :

$$\nu_1 = \int_{\Gamma_1/G_0} \nu_\omega d\mu_0(\omega),$$

μ_0 étant une mesure de base et ν_ω une mesure sur $\omega \cap \Gamma_1$. D'où

$$\nu \cong \nu_0 = \int_{\Gamma_1/G_0} d\mu_0(\omega) \int_{\mathbb{R}} \exp(tX) \cdot \nu_\omega dt = \int_{\Gamma/G} \nu_\Omega d\mu(\Omega)$$

avec $\mu(\Omega) = \mu_0(\omega_0) = \mu_0(p(\Omega) \cap P_0)$ et $\nu_\Omega = \int_{\mathbb{R}} \exp(tX) \cdot \nu_\omega dt$.

(2) Supposons deuxièmement $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Dans ce cas $\nu = \nu_0 \times dx$ avec une mesure de Lebesgue dx sur $\mathfrak{g}_0^\perp \subset \mathfrak{g}^*$. D'après [39], un ensemble négligeable près, $\Omega \cap \Gamma_\tau$ (resp. $\omega \cap \Gamma_0$) est une variété différentiable dont la dimension r (resp. r_0) ne dépend pas de $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ (resp. $\omega \in \mathfrak{g}_0^*/G_0$). Il en existe deux possibilités : soit $r = r_0 + 2$ soit $r = r_0 + 1$.

(a) Si $r = r_0 + 2$, on raisonne comme dans le cas (1). Soient $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} + \mathbb{R}Y, f_t \in \Gamma_\tau$ telle que $f_t(Y) = t$ et $\Gamma_t = \{\ell_0 \in \mathfrak{g}_0^*; \ell_0|_{\mathfrak{h}_1} = f_t|_{\mathfrak{h}_1}\}$ $(t \in \mathbb{R})$. Alors,

$$\nu_0 = \int_{\mathbb{R}} \nu^t dt,$$

ν^t étant une mesure de Lebesgue sur l'espace affine Γ_t.

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\nu^t = \int_{\Gamma_t/G_0} \nu_\omega^t d\mu_t(\omega) \ (t \in \mathbb{R})$$

avec des notations sous-entendues. Les espaces Γ_t/G_0 $(t \in \mathbb{R})$ s'identifient tous à Γ_τ/G. Cela fait, les μ_t sont équivalentes l'une à l'autre. En reprenant ν_ω^t au besoin, on peut supposer que toutes les μ_t coïncident avec une mesure μ sur Γ_τ/G. Enfin,

$$\nu = \int_{\Gamma_\tau/G} \nu_\Omega d\mu(\Omega),$$

où $\nu_\Omega = \left(\int_{\mathbb{R}} \nu^t_{\omega_t} dt\right) \times dx$ pour $p(\Omega) = \sqcup_{t\in\mathbb{R}} \omega_t$.

(b) Si $r = r_0 + 1$, l'hypothèse de récurrence nous fournit une désintégration de ν_0 :

$$\nu_0 = \int_{\Gamma_0/G_0} \nu_\omega d\mu_0(\omega).$$

L'action de G dans $\widehat{G_0}$ introduit une relation d'équivalence dans Γ_0/G_0, ce qui nous donne la projection $q : \Gamma_0/G_0 \to \Gamma_\tau/G$. On constate aussitôt l'existence d'une constante $k > 0$ telle que $\sharp\{q^{-1}(\Omega)\} < k$ pour presque toute $\Omega \in \Gamma_\tau/G$, où $\sharp(A)$ désigne le nombre cardinal de A.

Il en résulte (cf. [17]) que μ_0 se désintègre relativement à q :

$$\mu_0 = \int_{\Gamma_\tau/G} \nu^0_\Omega d\mu(\Omega),$$

où ν^0_Ω est égale à la somme finie des ν_ω pour ω vérifiant $q(\omega) = \Omega$. Finalement

$$\nu = \int_{\Gamma_\tau/G} \nu_\Omega d\mu(\Omega)$$

avec $\nu_\Omega = \nu^0_\Omega \times dx$. c.q.f.d.

Remarque 5.13. Des raisonnements standard montrent que la classe de la mesure μ est l'image de la classe de ν par l'application canonique de Γ_τ sur Γ_τ/G, et que cette décomposition de ν est essentiellement unique : si

$$\nu = \int_{\Gamma_\tau/G} \nu'_\Omega d\mu'(\Omega)$$

pour d'autres choix de mesures μ' et $(\nu'_\Omega)_{\Omega\in\Gamma_\tau/G}$, alors il existe une fonction mesurable et strictement positive F telle que $\mu' = F\mu$ et $\nu_\Omega = F\nu'_\Omega$ pour μ-presque toute Ω. En outre ces ν_Ω sont naturellement invariantes sous l'action de H.

On se donne une orbite coadjointe Ω de G. Soit $\ell \in \Omega$. On note ϵ l'application $G \ni g \to g\cdot\ell \in \Omega$ et pose $G_\ell = \epsilon^{-1}(\Gamma_\tau)$. Soient $\mathfrak{b} \in M(\ell, \mathfrak{g})$ et $B = \exp\mathfrak{b}$. L'espace $H\backslash G/B$ des doubles classes est un espace borelien standard [31]. On écrit p la projection de G sur $H\backslash G/B$ et σ une section borélienne de $H\backslash G/B$ dans G. Posons $\Xi = p(G_\ell)$ et $\Theta = \sigma(\Xi)$. Pour $x \in \Theta$, soient $d\dot{h}$ une mesure invariante sur $H/(H\cap xBx^{-1})$, $d\xi$ une mesure de Lebesgue sur l'espace affine $\mathfrak{b}[x] = (\ell + \mathfrak{b}^\perp) \cap x^{-1}\cdot\Gamma_\tau$, $B_x = \epsilon^{-1}(\mathfrak{b}[x])$ et H_x l'image d'une section fabriquée à l'aide d'une base coexponentielle à $\mathfrak{h} \cap x\cdot\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}$. Alors, chaque élément $g \in G_\ell$ s'écrit

$$g = hxb,\ h \in H_x,\ x \in \Theta,\ b \in B_x$$

de la façon unique. On transporte la mesure ν_Ω sur $\widetilde{G_\ell} = G_\ell/G(\ell)$. Dans la démonstration du lemme 5.12, il se voit par récurrence que ν_Ω se désintègre relativement à une mesure λ sur Ξ :

$$\nu_\Omega = \int_\Xi \nu_x d\lambda(\dot{x})\ (\dot{x} = p(x)),$$

où la mesure ν_x sur la fibre $H_x \times B_x$ s'obtient comme $d\dot{h} \times \epsilon_*^{-1}(d\xi)$.

En réalisant π au moyen de $\mathfrak{b}$, $\pi = \mathrm{ind}_B^G \chi_\ell$, on définit un opérateur nucléaire U_π de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ dans $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ par la formule :

$$\langle \phi, U_\pi \psi \rangle = \int_\Xi d\lambda(\dot{x}) \int_{H/(H\cap xBx^{-1})} \phi(hx)\chi_f(h)d\dot{h} \int_{H/(H\cap xBx^{-1})} \overline{\psi(h'x)\chi_f(h')} d\dot{h}'$$

quels que soient $\phi,\ \psi \in \mathcal{H}_\pi^\infty$. Quand on utilise une base coexponentielle à $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$, $\mathcal{H}_\pi^\infty$ s'identifie avec l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m),\ m = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$, et donc $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ avec l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ des distributions tempérées. Dans cette situation l'opérateur U_π se définit par le noyau

$$K_\pi(hx, h'x) = \Big(\chi_f(h) d_{H/(H\cap xBx^{-1})}\dot{h} \times \overline{\chi_f(h')} d_{H/(H\cap xBx^{-1})}\dot{h}'\Big)\, d\lambda(\dot{x}),$$

qui se trouve par récurrence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ (cf. la démonstration du lemme 5.12). C'est ce qui entraîne que U_π est nucléaire (cf. [72]) et qui nous permet de calculer $\mathrm{tr}\,(\pi(\phi)U_\pi)$ pour $\phi \in \mathcal{D}(G)$. Posons comme avant

$$\phi_H^f(g) = \int_H \phi(gh)\chi_f(h)dh\ (g \in G).$$

Maintenant on est en mesure de prouver les deux théorèmes suivants.

Théorème 5.14. (Formule de caractère [40]) On voit que, $d\dot{b}$ étant une mesure invariante,

$$\mathrm{tr}\,(\pi(\phi)U_\pi) = \int_\Xi d\lambda(\dot{x}) \int_{H/(H\cap xBx^{-1})} d\dot{h} \int_{B/(B\cap x^{-1}Hx)} \phi_H^f(hxbx^{-1}h^{-1})\chi_\ell(b)d\dot{b},$$

et que, à la normalisation des mesures près, cette valeur ne dépend pas des choix de $\ell \in \Omega$ ni de $\mathfrak{b}$.

Théorème 5.15. (Formule de Plancherel [40]) Sous réserve de normalisations des mesures, on obtient pour toute $\phi \in \mathcal{D}(G)$

$$\phi_H^f(e) = \int_{\Gamma_\tau/G} \mathrm{tr}\,(\pi_\Omega(\phi)U_{\pi_\Omega})\, d\mu(\Omega),$$

π_Ω désignant la représentation unitaire irréductible de G associée à l'orbite coadjointe $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$.

§6. Conjecture de commutativité : cas d'induction

Soient G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $H = \exp\ \mathfrak{h}$ un sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Étant donné un caractère unitaire χ de H, on construit la représentation monomiale $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi$ et se propose d'étudier l'algèbre $D_\tau(G/H)$ des opérateurs différentiels G-invariants sur le fibré $G \times_H \mathbb{C}$ associé à χ. Notre but est la conjecture de commutativité due à Duflo [30] et à Corwin-Greenleaf [22]. Ce dernier en a montre une implication : si τ est à multiplicités finies, alors $D_\tau(G/H)$ est commutative. Nous nous intéressons donc à l'implication inverse.

Prenons $f \in \mathfrak{g}^*$ vérifiant $d\chi = if|_\mathfrak{h}, i = \sqrt{-1}$, et posons comme avant $\Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp$.

Théorème 6.1. ([45]) Supposons que τ est à multiplicités infinies. Soit $\mathfrak{g}_0$ une sous-algèbre de codimension 1 contenant $\mathfrak{h}$ telle que $\tau_0 = \mathrm{ind}_H^{G_0} \chi$, où $G_0 = \exp\ \mathfrak{g}_0$, soit à multiplicités finies. Supposons qu'il existe $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ tel que $W \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Alors il existe $T \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau_0)$ tel que $[W, T] \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer que $\mathfrak{h}$ contient le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. En effet, si $\mathfrak{z} \not\subset \mathfrak{h}$, prenons $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ en dehors de $\mathfrak{h}$. On écrit les éléments représentatifs dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau_0)$ en utilisant une base adaptée $\{Z, X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$, où $\{X_j\}_{j=1}^p$ est celle à $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathbb{R}Z$ dans $\mathfrak{g}_0$. Pour générique $\ell \in \Gamma_\tau$ on note $\alpha = \ell(Z)$. Alors $\tau^\alpha = \mathrm{ind}_H^{G_0} \chi_\ell$, où χ_ℓ désigne le caractère habituel de $H' = \exp\ \mathfrak{h}'$ défini par $d\chi_\ell = i\ell|_{\mathfrak{h}'}$, est à multiplicités finies. Au moyen de $\{X_j\}_{j=1}^p$, on voit qu'il existe pour générique α un système de générateurs rationnels dont tout élément dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau^\alpha)/\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)\mathfrak{a}_{\tau^\alpha}$ est représenté par

$$T(\alpha) = \sum_{k,J} c_{k,J}(-i\alpha)^k X_1^{j_1} X_2^{j_2} \cdots X_p^{j_p}$$

avec un certain élément

$$T = \sum_{k,J} c_{k,J} Z^k X_1^{j_1} X_2^{j_2} \cdots X_p^{j_p}$$

de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau_0)$. Là, on a utilisé la notation $J = (j_1, j_2, \ldots, j_p)$ pour p-uplets d'entiers non-négatifs.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathbb{R}X$ et l'on écrit à l'aide de la base $\{Z, X_1, \ldots, X_p, X\}$ un élément représentatif de W et construit $W(\alpha) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau_\alpha), \tau_\alpha = \mathrm{ind}_{G_0}^G \tau^\alpha$. D'après ce qui précède, si $[W, T] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ pour $T \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau_0)$ quelconque, alors

$$[W, T(\alpha)] = [W(\alpha) + \tilde{W}(Z + i\alpha), T(\alpha)] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau_\alpha}$$

avec un certain $\tilde{W} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. α étant choisi de la façon qu'on ait $W(\alpha) \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau_\alpha}$, cela contredit l'hypothèse de récurrence appliquée à la paire $(\mathfrak{h}', \chi_\ell)$. (Tout ce qui précède correspond à la désintégration $\tau \simeq \int_{\mathbb{R}} \tau^\alpha d\alpha$.)

Supposons désormais que $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{z} \cap \ker f \neq \{0\}$, tout peut se passer au quotient pour nous fournir le résultat cherché. Il ne reste qu'à examiner le cas où $\dim \mathfrak{z} = 1$ et où $f|_{\mathfrak{z}} \neq 0$. Prenons comme d'habitude un triplet de Heisenberg $(\tilde{X}, Y, Z)$ tel que $\mathfrak{z} = \mathbb{R}Z, [\tilde{X}, Y] = Z, Y \in \mathfrak{g}_0$ et que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\tilde{X} + \mathfrak{k}$, où $\mathfrak{k}$ désigne le centralisateur de Y dans $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$. Si $Y \in \mathfrak{h}$, alors $\tau' = \mathrm{ind}_H^K \chi$ ($K = \exp\ \mathfrak{k}$) doit être à multiplicités infinies. Étant donnée $\mathfrak{g}_0$, $\tau_0' = \mathrm{ind}_H^{G_0 \cap K} \chi$ est à multiplicités finies et il nous suffit d'appliquer à τ' l'hypothèse de récurrence. Si $Y \notin \mathfrak{h}$, alors $T = Y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau_0)$ jouit de la propriété requise lorsque $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}$. Supposons donc que $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{k}$. Pourvu que $W \notin \mathcal{U}(\mathfrak{k}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, nous pouvons toujours choisir $T = Y$. Supposons que $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Comme $\tau_0 = \mathrm{ind}_{G_0 \cap K}^{G_0} \left(\mathrm{ind}_H^{G_0 \cap K} \chi\right)$ est à multiplicités finies, τ' doit être à multiplicités infinies. Sinon, $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, ce qui est exclu par hypothèse. Il nous suffit maintenant d'appliquer à $\mathfrak{k}$ notre hypothèse de récurrence.

Soit enfin $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{k}$. Considérons $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}, H_0 = \exp\ \mathfrak{h}_0$ et $f_0 = f|_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}^*$. Il s'ensuit que $\tau_1 = \mathrm{ind}_{H_0}^K \chi_{f_0}$ est à multiplicités infinies. Posons $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$ et $M = \exp\ \mathfrak{m}$. Remarquons que $\tau_2 = \mathrm{ind}_{H_0}^M \chi_{f_0}$ est à multiplicités finies. W étant représenté par un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$, l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{k}$ signifie qu'il existe $T \in \mathcal{U}(\mathfrak{m}, \tau_2)$ tel que $[W, T] \notin \mathcal{U}(\mathfrak{k})\mathfrak{a}_{\tau_1}$. Ici on peut supposer que T est un des générateurs rationnels de $\mathcal{U}(\mathfrak{m}, \tau_2)$ introduits dans Corwin-Greenleaf [22]. Mais à l'aide d'une base de Malcev faible adaptée à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$, on constate que $\{Y, \gamma_2, \ldots, \gamma_q\}$ forment un tel système de générateurs rationnels pour $\mathcal{U}(\mathfrak{m}, \tau_2)$, $\{\gamma_j\}_{j=2}^q$ étant celui pour $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau_0)$. Comme $[W, Y] = 0$, on peut admettre l'existence d'un tel T dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau_0)$. c.q.f.d.

Nous allons reprendre certaines notations introduites au début du chapitre 3 sauf $\{X_r\}_{1 \le r \le q}$ qui désignera une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ adaptée à la suite de sous-algèbres (3.2), i.e. $X_r \in \mathfrak{k}_r \setminus \mathfrak{k}_{r-1}$ $(1 \le r \le q)$. Dans ce qui suit, si $\mathfrak{g} \ne \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}'$ désignera toujours un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}$. De plus, nous choisirons le drapeau (3.1) de manière que $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}'$. De même, si $\dim \mathfrak{h} \ge 1$, $\mathfrak{h}'$ désignera toujours une sous-algèbre de codimension 1 dans $\mathfrak{h}$ et le drapeau (3.3) sera tel que $\mathfrak{h}_{d-1} = \mathfrak{h}'$. Ceci posé, lorsque $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$ existent tous les deux, alors $\dim \mathfrak{g} \ge 2$ et $\mathfrak{g}\mathfrak{g}' \supset \mathfrak{h}\mathfrak{h}'$.

Par ailleurs, nous utiliserons la convention suivante bien étendue. Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Quand nous considérons les éléments $\{X_r\}_{1 \le r \le q}$ ou $\{Y_s\}_{1 \le s \le d}$ introduits plus haut ou juste avant le lemme 3.4, pour chaque q-uplet $J = (j_1, j_2, \ldots, j_q) \in \mathbb{N}^q$, d-uplet $K = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ et $(d-1)$-uplet $L = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d-1}$, nous notons respectivement X^J, Y^K et Y'^L les éléments $X^J = X_q^{j_q} \cdots X_2^{j_2} X_1^{j_1}$, $Y^K = Y_d^{k_d} \cdots Y_2^{k_2} Y_1^{k_1}$ et $Y'^L = Y_{d-1}^{\ell_{d-1}} \cdots Y_2^{\ell_2} Y_1^{\ell_1}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Comme d'habitude, désignons par $|J|$ (resp. $|K|$, $|L|$) la somme $j_1 + j_2 + \cdots + j_q$ (resp. $k_1 + k_2 + \cdots + k_d$, $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{d-1}$). Nous considérons aussi les éléments $\hat{Y}_s = Y_s + if(Y_s)$, $1 \le s \le d$, de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de sorte que $\hat{Y}^K = \hat{Y}_d^{k_d} \cdots \hat{Y}_2^{k_2} \hat{Y}_1^{k_1}$ et $\hat{Y'}^L = \hat{Y}_{d-1}^{\ell_{d-1}} \cdots \hat{Y}_2^{\ell_2} \hat{Y}_1^{\ell_1}$.

Une simple conséquence du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt dit que les familles

$$\{X^J \hat{Y}^K; (J, K) \in \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}^d\},\ \{X^J \hat{Y}^K; (J, K) \in \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}^d, |K| > 0\}$$

forment respectivement une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Observons que the éléments $\{X^J; J \in \mathbb{N}^q\}$ forme une base d'un sous-espace supplémentaire S de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Supposons que $\mathfrak{h} \ne \{0\}$ et posons $\tau' = \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_f$ avec $H' = \exp\ \mathfrak{h}'$. Soit $\hat{Y}^K = \hat{Y}_d^k \hat{Y'}^L$. Nous voyons donc que les familles

$$\{X^J \hat{Y}_d^k \hat{Y'}^L; (J, k, L) \in \mathbb{N}^q \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{d-1}, |L| > 0\},\ \{X^J \hat{Y}_d^k; (J, k) \in \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}\}$$

forment respectivement une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ et d'un sous-espace supplémentaire de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Nous allons mentionner certaines propriétés de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ obtenus dans [7].

Lemme 6.2. (i) $\mathfrak{g}_{i_d - 1} S \subset S \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$.

(ii) $[\mathfrak{h}, S] \subset S \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$.

Démonstration. (i) Pour $0 \leq r \leq q$ et $k \in \mathbb{N}$, notons $S_{r,\ k}$ le sous-espace de S engendré par les éléments $X^J = X_r^{j_r} \cdots X_1^{j_1},\ J \in \mathbb{N}^r$ vérifiant $|J| \leq k$. En particulier, $S_{0,\ k} = S_{r,\ 0} = \mathbb{C}$. L'indice r est utile pour contrôler que certains monômes sont bien ordonnés. Il suffit de prouver par récurrence sur k que

(*) $Y'X^J \in S_{r,\ k+1} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}, \forall\ Y' \in \mathfrak{h}',\ \forall\ X^J \in S_{r,\ k}$;

(**) $X_s X^J \in S_{\max(s,\ r),\ k+1} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}, \forall\ s$ tel que $j_s \leq i_d - 1,\ \forall\ X^J \in S_{r,\ k}$.

C'est clair pour $k = 0$. Soit $k > 0$, et supposons que le résultat vrai jusqu'au rang $k-1$. Si l'on prend X_s avec $s \geq r$, on a $X_s X^J \in S_{s,\ k+1}$ de sorte que le résultat est évident. Si l'on prend $T \in \mathfrak{g}_{i_d - 1}$ tel que $T = Y' \in \mathfrak{h}'$ ou $T = X_s$ avec $s < r$, alors on peut écrire X^J comme $X^J = X_r X^{J'}$ avec $X^{J'} = X_r^{j_r - 1} \cdots X_1^{j_1}$ et se servir de la identité

$$TX^J = [T, X_r]X^{J'} + X_r T X^{J'}.$$

On a $[T, X_r] \in \mathfrak{g}_{j_r - 1} \cap \mathfrak{g}_{i_d - 1}$ et $X^{J'} \in S_{r,\ k-1}$. Donc, par récurrence

$$[T, X_r]X^{J'} \in S_{r,\ k} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}.$$

D'une façon analogue, $TX^{J'} \in S_{r,\ k} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. Ainsi, $X_r T X^{J'} \in S_{r,\ k+1} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$.

(ii) Nous montrons par récurrence sur k que

$$[Y, X^J] \in S_{r,\ k} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'},\ \forall\ Y \in \mathfrak{h},\ \forall\ X^J \in S_{r,\ k}.$$

C'est clair pour $k = 0$. Supposons-le vrai au rang $k-1,\ k \neq 0$. On a

$$[Y, X^J] = [Y, X_r]X^{J'} + X_r[Y, X^{J'}].$$

Comme $[Y, X_r] \in \mathfrak{g}_{j_r - 1} \cap \mathfrak{g}_{i_d - 1}$ et que $X^{J'} \in S_{r,\ k-1}$, on sait d'après l'assertion (i) que $[Y, X_r]X^{J'} \in S_{r,\ k} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. Finalement, on a par récurrence que $[Y, X^{J'}] \in S_{r,\ k-1} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. Donc, $X_r[Y, X^{J'}] \in S_{r,\ k} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. c.q.f.d.

Lemme 6.3. Soit W un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ écrit modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ comme $W \equiv \sum_{k \leq k'} A_k \hat{Y}_d^k$, où les A_k appartiennent à S. Soit $Y \in \mathfrak{h}$. Le lemme 6.2 nous fournit les éléments $(B_k)_{k \leq k'}$ de S tels que $[Y, A_k] \equiv B_k$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. Alors, on a modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$

$$[Y, W] \equiv [Y, \sum_{k \leq k'} A_k \hat{Y}_d^k] \equiv \sum_{k \leq k'} [Y, A_k]\hat{Y}_d^k \equiv \sum_{k \leq k'} B_k \hat{Y}_d^k.$$

Démonstration. Les première et troisième identités s'ensuivent de l'inclusion $\mathfrak{h} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau')$ et la seconde de la relation $[Y, A_k \hat{Y}_d^k] = [Y, A_k]\hat{Y}_d^k + A_k[Y, \hat{Y}_d^k]$ et de $[Y, \hat{Y}_d] \in \mathfrak{h}' \cap \ker f \subset \mathfrak{a}_{\tau'}$. c.q.f.d.

Proposition 6.4. (i) On a $[\mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) \cap S] \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. En particulier,

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) \cap S \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau').$$

(ii) On a la décomposition $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) = (\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) \cap S) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, de sorte que la restriction à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) \cap S$ de la projection de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ sur $D_\tau(G/H)$ est une bijection et chaque élément de

$$D_\tau(G/H) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$$

admet un représentant unique dans S. Ce représentant appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau')$.

Démonstration. (i) L'assertion (ii) du lemme 6.2 produit

$$[\mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\cap S] \subset (S\oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'})\cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}.$$

(ii) Le résultat vient de la décomposition $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = S\oplus\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ et de l'inclusion $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. c.q.f.d.

Proposition 6.5. Soit $(A_k)_{0\le k\le k'}$ une famille d'éléments de S, on a

$$\sum_{k\le k'} A_k\hat{Y}_d^k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \Longleftrightarrow A_k\in\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau'),\ \forall\ k\le k'.$$

Démonstration. Soit $Y'\in\mathfrak{h}'$. Pour tout k, on définit l'élément B_k de S tel que $[Y', A_k] = B_k$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ et déduit du lemme 6.3 que

$$[Y', \sum_{k\le k'} A_k\hat{Y}_d^k] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'} \Longleftrightarrow B_k = 0, \forall\ k\le k'.$$

c.q.f.d.

Proposition 6.6. Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ comme avant.

(i) On a l'équivalence

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\not\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'} \Longleftrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\not\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau}.$$

(ii) Supposons de plus que $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Alors on a

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\not\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'} \Longleftrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\not\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau}.$$

Démonstration. (i) $\Leftarrow$ est évident. Pour $\Rightarrow$, soit W un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\backslash(\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'})$. Il se peut que W' s'écrit comme $W'\equiv\sum_{k\le k'}A_k\hat{Y}_d^k$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$, où les A_k appartiennent à S. Puisque W' n'est pas dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$, l'un des A_k, disons A_{k_0}, n'est pas dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Autrement dit, X_q apparaît dans A_{k_0}. Alors, la proposition 6.5 implique que $A_{k_0}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$. Puisque $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)\cap S = \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\cap S$ et que $A_{k_0}\in S\setminus\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$, A_{k_0} n'appartient pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Cela prouve $\Rightarrow$.

(ii) L'implication $\Rightarrow$ est une conséquence directe de (i) et de notre supposition. Pour $\Leftarrow$, les décompositions

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau = (\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\cap S)\oplus\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau,\ \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) = (\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\cap S)\oplus\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$$

et notre hypothèse impliquent que $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\cap S\not\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\cap S = (\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)\cap S$. Ceci posé, le résultat s'ensuit de l'inclusion $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\cap S\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$ de la proposition 6.4. c.q.f.d.

Proposition 6.7. Supposons que $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\cap S\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\cap S$. Alors,

$$[\mathfrak{h},\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')]\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}.$$

Démonstration. Écrivons un élément W de $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$ sous la forme

$$W\equiv\sum_{k\le k'}A_k\hat{Y}_d^k \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'},$$

où les A_k appartiennent à S. La proposition 6.5 implique que $A_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap S$ de sorte que $A_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap S$ compte tenu de l'hypothèse. Finalement, on déduit de la première assertion de la proposition 6.4 que

$$[\mathfrak{h}, W] \subset \sum_{k \leq k'} \Big([\mathfrak{h}, A_k]\hat{Y}_d^k + A_k[\mathfrak{h}, \hat{Y}_d^k] \Big) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}.$$

c.q.f.d.

Proposition 6.8. Supposons que $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}$ (puis encore $\mathfrak{h}'$ dans la troisième assertion) sont comme avant de sorte que X_q existe.

(i) Soit $W = \sum_{k=0}^m X_q^k A_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ avec $m \geq 1$ et $A_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Alors $A_m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ et $mX_qA_m + A_{m-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$.

(ii) Soit $W = X_qU + V$ avec $U,\ V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Alors

$$W \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \Longleftrightarrow U \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau.$$

(iii) Supposons que $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ (resp. $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$), alors il existe un élément

$$\begin{aligned} W = X_qU + V &\in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \setminus (\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau) \\ (\text{resp. } &\in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \setminus (\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau) \end{aligned}$$

tel que $U \in (\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')) \setminus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ (resp. $U \in (\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')) \setminus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$) et $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$.

Démonstration. (i) Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt entraîne immédiatement que

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \oplus_j X_q^j \mathcal{U}(\mathfrak{g}'),\ \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau = \oplus_j X_q^j \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau. \tag{6.1}$$

Posons $\mathfrak{i}_{m-2} = \oplus_{j=0}^{m-2} X_q^j \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Nous avons alors pour tout $Y \in \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned} [W, Y] &\equiv X_q^m[A_m, Y] + \sum_{j=1}^m X_q^{j-1}[X_q, Y]X_q^{m-j}A_m + X_q^{m-1}[A_{m-1}, Y] \bmod \mathfrak{i}_{m-2} \\ &\equiv X_q^m[A_m, Y] + X_q^{m-1}(m[X_q, Y]A_m + [A_{m-1}, Y]) \bmod \mathfrak{i}_{m-2} \end{aligned}$$

appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ de sorte que $A_m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ et $mX_qA_m + A_{m-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$.

(ii) En utilisant les expressions (6.1), nous voyons que $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ si et seulement si $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ car

$$W \in (X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')) \cap \big(\oplus_j X_q^j \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\big) = X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}').$$

(iii) Soit $W' = \sum_{k=0}^m X_q^k A_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \setminus (\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)$ (resp. $W' = \sum_{k=0}^m X_q^k A_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \setminus (\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)$) avec les A_k appartenant à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. L'assertion (i) implique que $A_m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ et que $W = mX_qA_m + A_{m-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ (resp. $A_m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$ et $W = mX_qA_m + A_{m-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$). Sans perte de la généralité, nous pouvons supposer que $A_m \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ de sorte qu'on voit en tenant compte de (ii) que W possède la propriété requise.

c.q.f.d.

Théorème 6.9. Avec les notations et les hypothèse de la proposition 6.8, supposons que

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'} \text{ et } \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}').$$

Alors on a $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.

Démonstration. Tout d'abord prouvons qu'il existe un élément $W = X_qU+V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\cap S$ avec $U, V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \cap S$ tel que :
(a) $W \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, ce qui revient au même de dire que $U \neq 0$;
(b) $(\mathrm{ad}Y_d)W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.
Ce fait nous servira plus tard dans des situations variées pour construire un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Nous savons de l'assertion (i) de la proposition 6.6 qu'actuellement $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Donc, la troisième assertion de la proposition 6.8 dit qu'il existe $W'' = X_qU'' + V'' \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \setminus (\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)$ avec $U'' \in (\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')) \setminus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ et $V'' \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Ensuite, soit $m' \in \mathbb{N}$ l'entier le plus grand vérifiant $W' = (\mathrm{ad}\ Y_d)^{m'}(W'') \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. En utilisant le fait que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = S \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, nous définissons W l'unique élément de S tel que $W \equiv W'$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Nous constatons alors que W satisfait aux conditions (a) et (b).

Maintenant nous introduisons quelques notations qui ne nous servent que dans cette démonstration. Pour $A, B \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, posons $\{A, B\} = AB + BA$. Or, pour $s \in \mathbb{N}$ écrivons $A_s = (\mathrm{ad}\ Y_d)^s A$ de sorte que $A_0 = A$. Puis pour $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous définissons

$$\mathcal{T}_r(A) = \{A_0, A_{2r}\} - \{A_1, A_{2r-1}\} + \cdots + (-1)^{r-1}\{A_{r-1}, A_{r+1}\} + (-1)^r A_r^2.$$

Comme Y_d appartient à l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$, nous observons que les A_s et $\mathcal{T}_r(A)$ sont tous dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$ lorsque A y est. En outre, si r est suffisamment grand pour que $A_{2r+1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$, alors $\mathcal{T}_r(A) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Pour vérifier cela, il suffit de montrer que cette nouvelle condition entraîne que $(\mathrm{ad}\ Y_d)\mathcal{T}_r(A) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. En effet, nous obtenons

$$(\mathrm{ad}\ Y_d)\mathcal{T}_r(A) = A_{2r+1}A + AA_{2r+1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}.$$

Soit m le plus petit entier tel que $W_m = (\mathrm{ad}\ Y_d)^m(W) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. En utilisant la récurrence sur s et l'assertion (ii) du lemme 6.2, nous voyons que les W_s appartiennent à $S \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$, ce qui implique qu'au fait $W_m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. Allons considérer de différents cas selon la valeur de m.

– Si $m = 1$, le résultat est évident car $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \setminus (\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)$.

– Si $m = 2r + 1$ avec $r \geq 1$, les remarques notées ci-dessus impliquent que

$$\mathcal{T}_r(W) = \{W_0, W_{2q}\} - \{W_1, W_{2q-1}\} + \cdots + (-1)^{r-1}\{W_{r-1}, W_{r+1}\} + (-1)^r W_r^2$$

appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Nous aimerions montrer que $\mathcal{T}_r(W) \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Nous avons $\mathcal{T}_r(W) \equiv 2WW_{2r} \equiv 2X_qUW_{2r}$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. D'où le résultat, compte tenu du fait que ni U ni W_{2r} n'appartiennent à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ et de ce que l'anneau $(\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}'))\,/\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ n'admet pas de diviseur de zéro non trivial.

– Si $m = 2r$ avec $r > 1$, nous observons alors que pour $c \in \mathbb{C}$ quelconque

$$(\mathrm{ad}Y_d)^{2r+1}\left(W(W_{2r-2} + cW_{2r-1})\right) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$$

de sorte qu'on a, en posant $\tilde{W}(c) = W(W_{2r-2} + cW_{2r-1})$, $\mathcal{T}_r\left(\tilde{W}(c)\right) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ d'après la remarque précédente. Nous aimerions montrer que $\mathcal{T}_r\left(\tilde{W}(c)\right) \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ pour un certain $c \in \mathbb{C}$. Pour le moment nous regardons $\tilde{W}(c)$ et $\mathcal{T}\left(\tilde{W}(c)\right)$ comme éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[c]$, l'algèbre des polynômes de c aux coefficients dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Pour $r \geq 1$ quelconque on a modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau[c]$:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{W}(c)_0 = W(W_{2r-2} + cW_{2r-1}) \\
&\tilde{W}(c)_1 \equiv W_1(W_{2r-2} + cW_{2r-1}) + WW_{2r-1} \\
&\tilde{W}(c)_2 \equiv W_2(W_{2r-2} + cW_{2r-1}) + 2W_1W_{2r-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')[c] \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\tilde{W}(c)_{2r-1} \equiv W_{2r-1}(W_{2r-2} + cW_{2r-1}) + (2r-1)W_{2r-2}W_{2r-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')[c] \\
&\tilde{W}(c)_{2r} \equiv 2rW_{2r-1}^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')
\end{aligned}
$$

Maintenant, nous vérifions que

$$\mathcal{T}_r\left(\tilde{W}(c)\right) \in cX_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \oplus X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')[c] \bmod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau[c]$$

et en extrayons la composante relative à $cX_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Les relations en bas tiennent pour $r > 1$, mais non pas pour $r = 1$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_r\left(\tilde{W}(c)\right) &\equiv \{\tilde{W}(c)_0, \tilde{W}(c)_{2r}\} - \{\tilde{W}(c)_1, \tilde{W}(c)_{2r-1}\} \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}')[c] + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau[c] \\
&\equiv 2\tilde{W}(c)_0\tilde{W}(c)_{2r} - 2\tilde{W}(c)_1\tilde{W}(c)_{2r-1} \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}')[c] + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau[c] \\
&\equiv 2c(2r-1)WW_{2r-1}^3 \mod X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')[c] + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau[c] \\
&\equiv 2c(2r-1)X_qUW_{2r-1}^3 \mod X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')[c] + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau[c]
\end{aligned}
$$

En regardant ci-après $\mathcal{T}_r\left(\tilde{W}(c)\right)$ comme un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on infère de ce qui précède qu'il existe $\tilde{U} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ tel que

$$\mathcal{T}_r\left(\tilde{W}(c)\right) \equiv X_q\left(2c(2r-1)UW_{2r-1}^3 + \tilde{U}\right) \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

Ici, UW_{2r-1}^3 n'appartient pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ car ni U ni W_{2r-1} n'y appartiennent et que l'anneau $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}'))\,/\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ n'admet pas de diviseur de zéro non trivial. En remarquant que $X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \cap (\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau) = X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$, on voit que $\mathcal{T}_r\left(\tilde{W}(c)\right) \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ pour tout c tel que

$$2c(2r-1)UW_{2r-1}^3 + \tilde{U} \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau.$$

Remarquons que cette méthode fournit aucun résultat pour $m = 2$ car dans ce cas

$$\mathcal{T}_1\left(\tilde{W}(c)\right) \in X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}')[c] + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau[c].$$

– Si $m = 2$, utilisons pour la première fois l'hypothèse $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Cela implique aussitôt qu'il existe $T \in (\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \cap S) \setminus (\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}'))$ tel que $(\mathrm{ad}\ Y_d)T \in (\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')) \setminus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Alors, on a $WT \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$, $(\mathrm{ad}\ Y_d)^3(WT) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ et

$$\mathcal{T}_1(WT) = \{(WT)_0, (WT)_2\} - (WT)_1^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau).$$

On aimerait prouver que $\mathcal{T}_1(WT) \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1(WT) &\equiv \{WT, W_1T_1 + T_1W_1\} - (W_1T + WT_1)^2 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \\ &\equiv -W^2T_1^2 \equiv -X_q^2(UT_1)^2 \mod X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.\end{aligned}$$

Notons que $X_q^2\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \cap (X_q\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau) = X_q^2\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$. Alors, le fait que ni U ni T_1 n'appartiennent à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ implique le résultat attendu. c.q.f.d.

Les théorèmes 6.1 et 6.9 nous offrent de bons outils pour attaquer la conjecture de commutativité dans de nombreuses situations, mais il reste encore des cas qui échappent leur portée. Il s'agit de traiter le cas où $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ en termes du théorème 6.9. Afin d'effectuer ce but, nous avons besoin d'exploiter davantage (cf. [46]) les éléments e-centraux de Corwin-Greenleaf introduits dans le chapitre 3.

Un élément $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est dit Γ_τ-central si $\pi_\ell(A)$ est un scalaire pour tout ℓ dans un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{O}$ de Γ_τ, à savoir, s'il existe une fonction φ_A sur $G \cdot \mathcal{O}$ telle que

$$\pi_\ell(A) = \varphi_A(\ell) Id, \quad \forall\ \ell \in G \cdot \mathcal{O} \tag{6.2}$$

Il s'avère que le théorème 3.3 s'applique à cette situation afin d'assurer que $\pi_\ell(A)$ est un scalaire pour tout $\ell \in \Gamma_\tau$ et que φ nous y donne une fonction polynomiale H-invariante. Soient $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\Gamma_\tau)$ l'algèbre des éléments Γ_τ-centraux dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et

$$Z(\mathfrak{g},\Gamma_\tau) = \{\varphi_A; A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\Gamma_\tau)\}$$

l'algèbre des fonctions vérifiant (6.2). Notons α l'application

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\Gamma_\tau) \ni A \mapsto \varphi_A \in Z(\mathfrak{g},\Gamma_\tau).$$

Nous désignons par $CD_\tau(G/H)$ le centre de l'algèbre $D_\tau(G/H)$ et posons

$$\mathcal{U}_C(\mathfrak{g},\tau) = R^{-1}\left(CD_\tau(G/H)\right) = \{A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau); [A, \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)] \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau\}.$$

Notons ϖ l'application R restreinte à $\mathcal{U}_C(\mathfrak{g},\tau)$, d'où

$$\varpi : \mathcal{U}_C(\mathfrak{g},\tau) \ni A \mapsto R(A) \in CD_\tau(G/H).$$

On note L l'action à gauche de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: pour $X \in \mathfrak{g}$ et $\psi \in C^\infty(G)$,

$$\left(L(X)\psi\right)(g) = \frac{d}{dt}\psi(\exp\ (-tX)g)|_{t=0}.$$

L'anti-automorphisme principal $\Diamond$ envoie $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\Gamma_\tau)$ dans $\mathcal{U}_C(\mathfrak{g},\tau)$ et les applications α, ϖ sont surjectives. D'ailleurs il se trouve qu'il existe une application injective $\delta : Z(\mathfrak{g},\Gamma_\tau) \to CD_\tau(G/H)$ telle que $\delta(\varphi_A) = L(A) = R\left(\Diamond(A)\right)$

Rappelons le drapeau (3.1) où $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}'$. Pour $\ell \in \mathfrak{g}^*$, posons encore $\ell' = \ell|_{\mathfrak{g}'}$. Pour une sous-algèbre $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$, désignons respectivement par $\mathfrak{m}(\ell)$ et $\mathfrak{m}(\ell')$ les sous-algèbres $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{g}(\ell)$ et $\mathfrak{m}\cap(\mathfrak{g}')^\ell$. Dans le chapitre 3 on a pris l'unique multi-indice $e \in \mathcal{E}$ et introduit les ensembles d'indices $T(e), T(e_H)$ et $U(e) = T(e)\backslash T(e_H)$. Soit

$$T(e) = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_t\},$$

Pour $0 \leq i \leq n$, posons encore $T_i(e) = T(e) \cap \{0,\ldots,i\}$, $T_i(e_H) = T(e_H)\cap\{0,\ldots,n\}$, et $U_i(e) = U(e)\cap\{1,\ldots,i\}$. Définissons enfin les algèbres

$$Z_i(\mathfrak{g},\tau) = \{\phi_A; A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_i)\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g},\Gamma_\tau)\},\ 0 \leq i \leq n.$$

D'où,

$$\{0\} = Z_0(\mathfrak{g},\tau) \subseteq Z_1(\mathfrak{g},\tau) \subseteq \cdots \subseteq Z_n(\mathfrak{g},\tau) = Z(\mathfrak{g},\tau).$$

Les résultats principaux de [46] s'expriment comme suit :

$(*)$ Pour tout entier $0 \leq i \leq n$, la famille $\{\varphi_{\sigma_j}; m_j \in T_i(e)\}$ est un système de générateurs rationnels de $Z_i(\mathfrak{g},\tau)$.

$(**)$ Pour tout entier $0 \leq i \leq n$, la famille $\{\varphi_{\sigma_j}; m_j \in U_i(e)\}$ est une base de transcendance de l'algèbre $Z_i(\mathfrak{g},\tau)$.

Nous somme maintenant prêts à détailler le lemme 3.4.

Lemme 6.10. Supposons que $\dim\mathfrak{h} \geq 1$. Soit $i_s \in T(e_H)$. Cela veut dire que $\mathfrak{h}_s = \mathfrak{h}_{s-1} + \mathfrak{h}_s(\ell)$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique, et qu'il existe k $(1 \leq k \leq t)$ tel que $m_k = i_s$. Alors les assertions suivantes s'établissent.

(i) Il existe un polynôme P vérifiant

$$P\left(\Diamond(\sigma_1),\ldots,\Diamond(\sigma_k)\right) \equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m_k})\mathfrak{a}_s, \tag{6.3}$$

et tel que le coefficient du terme à la plus haute puissance de $\Diamond(\sigma_k)$ n'appartienne pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.

(ii) Il existe un polynôme Q vérifiant

$$Q\left(\Diamond(\sigma_1),\ldots,\Diamond(\sigma_k), Y_s\right) \equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m_k-1})\mathfrak{a}_{s-1},$$

et tel que le coefficient du terme à la plus haute puissance de Y_s n'appartienne pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.

Démonstration. Puisque $m_k \in T(e_H)$, $m_k \notin U(e)$. Il vient donc de $(**)$ que la famille $\{\varphi_{\sigma_j}; j \in U_{m_k-1}(e)\}$ est une base de transcendance pour $Z_{m_k}(\mathfrak{g},\tau)$. En particulier, l'élément φ_{σ_k} de $Z_{m_k}(\mathfrak{g},\tau)$ est algébrique sur l'anneau engendré par cette famille et, à fortiori, par la famille $\{\varphi_{\sigma_j}; j \in T_{m_k-1}(e)\}$. Autrement dit, il existe un polynôme P de k-variables tel qu'on ait

$$P(\varphi_{\sigma_1},\ldots,\varphi_{\sigma_k}) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\varphi_1,\ldots,\varphi_{\sigma_{k-1}})\varphi_{\sigma_k}^j = 0$$

avec $P_m(\varphi_{\sigma_1}, \ldots, \varphi_{\sigma_{k-1}}) \neq 0$. On en déduit que

$$\varpi\left(P\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_k)\right)\right) = \delta(P(\varphi_{\sigma_1}, \ldots, \varphi_{\sigma_k})) = 0$$

avec $\varpi\left(P_m\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_{k-1})\right)\right) \neq 0$. D'où,

$$P\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_k)\right) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m_k}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m_k})\mathfrak{a}_s$$

avec $P_m\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_{k-1})\right) \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.

(ii) D'abord, observons que $\hat{Y}_s \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \subset \mathcal{U}_C(\mathfrak{g}, \tau)$. Écrivons $\sigma_k = \xi_k Y_s + R_k$ avec $\xi_k,\ R_k\ \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m_k - 1})$, d'où

$$\Diamond(\sigma_k) = -Y_s \Diamond(\xi_k) + \Diamond(R_k).$$

Nous voyons donc que l'identité (6.3) est récrit comme :

$$P\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_k) + \left(Y_s + \sqrt{-1} f(Y_s)\right)\Diamond(\xi_k)\right) \equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m_k-1})\mathfrak{a}_{s-1} \qquad (6.4),$$

de sorte que Y_s disparaît. Or, remarquons qu'à la relation (6.4) les éléments $\Diamond(\sigma_r)$ $(1 \leq r \leq k)$, ξ_k et Y_s appartiennent à $\mathcal{U}_C(\mathfrak{g}, \tau)$. En développant P par rapport à Y_s, nous obtenons

$$\varpi\left(P_m\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_{k-1})\right)\left(\Diamond(\xi_k) Y_s\right)^m + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{Q}_j\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_k), \Diamond(\xi_k)\right) Y_s^j\right) = 0, \tag{6.5}$$

où les $\tilde{Q}_j$ sont certains polynômes dont le degré en $\Diamond(\xi_k)$ est inférieur ou égal à m. Maintenant, d'après l'assertion $(*)$ mentionnée plus haut il existe deux polynômes S, T de $k-1$ variables tels que

$$\varpi\left(S\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_{k-1})\right)\Diamond(\xi_k)\right) = \varpi\left(T\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_{k-1})\right)\right)$$

dont les deux membres sont non nuls. En multipliant (6.5) par $\varpi\left(S\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_{k-1})\right)^m\right)$, nous obtenons

$$\varpi\left(T\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_{k-1})\right)^m P_m\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_{k-1})\right) Y_s^m \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{m-1} Q_j\left(\Diamond(\sigma_1), \ldots, \Diamond(\sigma_k)\right) Y_s^j\right) = 0,$$

pour certains polynômes Q_j, ce qui prouve (ii). c.q.f.d.

Lemme 6.11. Supposons que $\dim \mathfrak{h} \geq 1$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{h}(\ell)$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. Alors $R(Y_d)$ est algébrique sur $CD_{\tau'}(G/H)$. En d'autres termes, si $d \in T(e_H)$, il existe un polynôme Q de Y_d aux coefficients dans $\mathcal{U}_C(\mathfrak{g}, \tau')$ vérifiant $Q(Y_d) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ et tel que le coefficient du terme au plus haute puissance de Y_d n'appartienne pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$.

Démonstration. Commençons par montrer que $T_{i_d}(e') = T_{i_d}(e)$, où $e' \in \mathcal{E}$ désigne le multi-indice tel que $\Gamma_{\tau'} \cap U_{e'}$ soit un ouvert de Zariski de $\Gamma_{\tau'}$. Soit $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*_{i_d-1}$ l'application restriction, qui est en même temps continue et ouverte pour la topologie de Zariski. Remarquons $p(\Gamma_\tau) \subset p(\Gamma_{\tau'}) \cap \mathfrak{g}^*_{i_d-1}$ et $p^{-1}\left(p(\Gamma_\tau)\right) \subset \Gamma_{\tau'}$. Soit $1 \leq r \leq i_d$. Comme

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i_d}] \subset \mathfrak{g}_{i_d-1}$, la restriction de $\ell \in \mathfrak{g}^*$ quelconque à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i_d}]$ ne change pas si on remplace ℓ par un élément arbitraire de $p^{-1}(p(\ell))$, de même pour $\mathfrak{g}_r(\ell)$.

Supposons que $r \in T_{i_d}(e)$ (resp. $r \notin T_{i_d}(e)$). Cela veut dire que $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}_{r-1} + \mathfrak{g}_r(\ell)$ (resp. $\mathfrak{g}_r(\ell) \subset \mathfrak{g}_{r-1}$) sur un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{O}$ de Γ_τ. La même relation tient sur un ouvert de Zariski non vide $p^{-1}(p(\mathcal{O}))$ de $\Gamma_{\tau'}$. Donc, $r \in T(e')$ (resp. $r \notin T(e')$), d'où résulte notre assertion.

Il existe donc une suite partielle $(\sigma_r)_{1\leq r\leq k}$ d'éléments $\Gamma_{\tau'}$-centraux. Pour élément $\Gamma_{\tau'}$-central σ quelconque, $\pi_\ell(\sigma)$ est un scalaire pour tout $\ell \in \Gamma_{\tau'}$ et par conséquent pour tout $\ell \in \Gamma_\tau \subset \Gamma_{\tau'}$. S'il en est ainsi, $(\sigma_r)_{1\leq r\leq k}$ est aussi une suite d'éléments Γ_τ-centraux. Nous sommes en mesure de prendre cette suite, choisir $s = d$ et appliquer (ii) du lemme 6.10. Le résultat cherché s'ensuit du fait que les $\Diamond(\sigma_r)$ appartiennent à $\mathcal{U}_C(\mathfrak{g}, \tau) \cap \mathcal{U}_C(\mathfrak{g}, \tau')$. c.q.f.d.

Nous sommes maintenant prêts à nous engager à établir la conjecture de commutativité. Commençons par un simple lemme qui nous servira à plusieurs reprises dans la démonstration du théorème suivant.

Lemme 6.12. Soient $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}' \subset \mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{h}''$ une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$. Alors, les propriétés suivantes sont mutuellement équivalentes :

(i) $\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}^\ell = \mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}'^\ell$ (resp. $\dim(\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}^\ell) = \dim(\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}'^\ell) - 1$) pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique.

(ii) $\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}^\ell = \mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}'^\ell$ (resp. $\dim(\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}^\ell) = \dim(\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}'^\ell) - 1$) pour $\ell \in \Gamma_{\mathfrak{k},\mathfrak{h}''} = \{\ell \in \mathfrak{k}^*; \ell|_{\mathfrak{h}''} = f|_{\mathfrak{h}''}\}$ générique.

Démonstration. Soit $\mathfrak{k}''$ l'idéal de $\mathfrak{k}$ engendré par $\mathfrak{h}''$. Soient $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}''^*$ et $q : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{k}''^*$ les applications restrictions. On se servira du fait qu'elles sont toutes les deux continues et ouvertes pour la topologie de Zariski. Avec des notations similaires à $\Gamma_{\mathfrak{k},\mathfrak{h}''}$, on a $p(\Gamma_\tau) \subset \Gamma_{\mathfrak{k}'',\mathfrak{h}''}$, $q^{-1}(p(\Gamma_\tau)) \subset \Gamma_{\mathfrak{k},\mathfrak{h}''}$ et $p^{-1}(q(\Gamma_{\mathfrak{k},\mathfrak{h}''})) \subset \Gamma_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}''}$.

Soient $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et $\lambda \in q^{-1}(p(\ell))$. Puisque $[\mathfrak{k}, \mathfrak{h}''] \subset \mathfrak{k}''$, on a $\ell|_{[\mathfrak{k},\mathfrak{h}'']} = \lambda|_{[\mathfrak{k},\mathfrak{h}'']}$ D'où, $\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}^\ell = \mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}^\lambda$ et $\mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}'^\ell = \mathfrak{h}'' \cap \mathfrak{k}'^\lambda$. Donc, on constate que, si l'une des deux assertions (i) tient sur un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{O}$ de Γ_τ, alors elle tient aussi sur l'ouvert de Zariski non vide $q^{-1}(p(\mathcal{O}))$ de $\Gamma_{\mathfrak{k},\mathfrak{h}''}$. Cela entraîne (i) $\to$ (ii).

Inversement, soient $\ell \in \mathfrak{k}^*$ et $\lambda \in p^{-1}(q(\ell)) \subset \mathfrak{g}^*$. Les arguments identiques à ceux utilisés plus haut montrent que, si l'une des deux assertions (ii) tient sur un ouvert de Zariski non-vide $\mathcal{O}$ de $\Gamma_{\mathfrak{k},\mathfrak{h}''}$, alors elle tient aussi sur l'ouvert de Zariski non-vide $p^{-1}(q(\mathcal{O})) \cap \Gamma_\tau$ de Γ_τ. Cela entraîne (ii) $\to$ (i). c.q.f.d.

La conjecture de commutativité sera un sous-produit du théorème suivant.

Théorème 6.13. Soient G un groupe de Lie réel nilpotent, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que $\dim \mathfrak{g} \geq 1$, H un sous-groupe propre fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et f un élément du dual linéaire $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}$. Soit $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.

(ii) L'H-orbite $H \cdot \ell$ est saturée dans la direction $\mathfrak{g}'^{\perp}$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique.

Démonstration. Il est commode de prouver l'équivalence suivante :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \Longleftrightarrow \dim \mathfrak{h}(\ell) = \dim \mathfrak{h}(\ell') - 1$$
$$\text{pour } \ell \in \Gamma_\tau \text{ générique.}$$

Nous allons employer la récurrence sur la dimension n de $\mathfrak{g}$ et aussi sur la dimension d de $\mathfrak{h}$. Lorsque $d = 0$, évidemment $\mathfrak{h}(\ell) = \mathfrak{h}(\ell') = \{0\}$ pour tout $\ell \in \mathfrak{g}^*$. Par ailleurs, $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ (resp. $\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$) est égale à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$). Donc, le théorème est trivial dans ce cas.

Nous pouvons maintenant supposer que $n > d \geq 1$ et par hypothèse de récurrence que le théorème est vrai pour $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}', \tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{f})$ vérifiant les propriétés requises et tel que ou bien $\dim \tilde{\mathfrak{g}} < n$, ou bien $\dim \tilde{\mathfrak{g}} = n$ et $\dim \tilde{\mathfrak{h}} < d$. En choisissant $\mathfrak{h}'$ comme précédemment, on a $\mathfrak{h}'\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'\mathfrak{g}$. Il se produit de différents cas :

ou bien $\mathfrak{h}(\ell) = \mathfrak{h}(\ell')$ ou bien $\dim \mathfrak{h}(\ell) = \dim \mathfrak{h}(\ell') - 1$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique ;

ou bien $\mathfrak{h}'(\ell) = \mathfrak{h}'(\ell')$ ou bien $\dim \mathfrak{h}'(\ell) = \dim \mathfrak{h}'(\ell') - 1$ pour $\ell \in \Gamma_{\tau'}$ générique.

À l'aide du lemme 6.12, où on remplace $\mathfrak{k}$ par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}'$ par $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}''$ par $\mathfrak{h}'$, on comprend que $\mathfrak{h}'(\ell) = \mathfrak{h}'(\ell')$ (resp. $\dim \mathfrak{h}'(\ell) = \dim \mathfrak{h}'(\ell') - 1$) pour $\ell \in \Gamma_{\tau'}$ générique si et seulement si la même propriété tient pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. En outre, si $\mathfrak{h}(\ell) = \mathfrak{h}(\ell')$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique, évidemment $\mathfrak{h}'(\ell) = \mathfrak{h}'(\ell')$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique.

Ces remarques nous amènent à examiner les trois cas suivants.

Cas 1. $\dim \mathfrak{h}'(\ell) = \dim \mathfrak{h}'(\ell') - 1$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique

On a déjà noté que dans ce cas $\dim \mathfrak{h}(\ell) = \dim \mathfrak{h}(\ell') - 1$ génériquement. D'abord, l'hypothèse de récurrence appliquée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ assure $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}') \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. Réclamons ici $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. En effet, supposons qu'il existe un élément $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ tel que $W \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Alors, la deuxième assertion de la proposition 6.6 dit qu'il existe $W' \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \setminus (\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'})$ tel que $W' \equiv W$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

Cas 2. $\mathfrak{h}(\ell) = \mathfrak{h}(\ell')$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique

Dans ce cas, $\mathfrak{h}'(\ell) = \mathfrak{h}'(\ell')$ pour $\ell \in \Gamma_{\tau'}$ générique. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$, on a $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$. Considérons deux sous-cas.

(2-a) $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$

Compte tenu de ce qu'on vient de voir, le théorème 6.9 donne immédiatement

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

(2-b) $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$

Notre premier objectif sera de prouver que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{h}(\ell)$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique, i.e. $d \in T(e_H)$, de sorte qu'on puisse utiliser le lemme 6.11. En premier lieu montrons par récurrence que, pour $0 \leq r \leq q-1$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}_r^\ell)$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. C'est évident pour $r = 0$ car $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}_0^\ell = \mathfrak{h}$. Soit $r > 0$, et supposons la propriété vraie jusqu'à l'étape $r - 1$. Rappelons notre hypothèse $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau') \cap \mathcal{U}(\mathfrak{k}_r) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{k}_r)$.

Alors, en remplaçons $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{k}_r$ à l'assertion (ii) de la proposition 6.6, nous avons ou bien $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\cap\mathcal{U}(\mathfrak{k}_r)\not\subset\mathcal{U}(\mathfrak{k}_{r-1})+\mathcal{U}(\mathfrak{k}_r)\mathfrak{a}_\tau$, ou bien $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\cap\mathcal{U}(\mathfrak{k}_r)\subset\mathcal{U}(\mathfrak{k}_{r-1})+\mathcal{U}(\mathfrak{k}_r)\mathfrak{a}_\tau$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\cap\mathcal{U}(\mathfrak{k}_r)\subset\mathcal{U}(\mathfrak{k}_{r-1})+\mathcal{U}(\mathfrak{k}_r)\mathfrak{a}_{\tau'}$. Donc, l'hypothèse de récurrence sur la dimension de G fournit ou bien $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell$ pour $\ell\in\Gamma_\tau\cap\mathfrak{k}_r^*$ générique, ou bien $\dim\left(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell\right)=\dim\left(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell\right)-1$ pour $\ell\in\Gamma_\tau\cap\mathfrak{k}_r^*$ générique et $\dim\left(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{k}_r^\ell\right)=\dim\left(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell\right)-1$ pour $\ell\in\Gamma_{\tau'}\cap\mathfrak{k}_r^*$ générique. Compte tenu du lemme 6.12, où l'on remplace $\mathfrak{k}$ par $\mathfrak{k}_r$, $\mathfrak{k}'$ par $\mathfrak{k}_{r-1}$ et $\mathfrak{h}''$ par ou bien $\mathfrak{h}$ ou bien $\mathfrak{h}'$, cela revient au même de dire : ou bien $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique, ou bien $\dim\left(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell\right)=\dim\left(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell\right)-1$ et $\dim\left(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{k}_r^\ell\right)=\dim\left(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell\right)-1$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique.

Dans la première situation, il est évident par récurrence sur $r=\dim(\mathfrak{k}_r/\mathfrak{h})$ que $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique, tandis que dans la seconde situation nous serions amenés à une contradiction si $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell\subset\mathfrak{h}'$. En effet, en observant par récurrence que $\dim\left(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell\right)=\dim\left(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell\right)+1$, nous déduirions de $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell=\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{k}_r^\ell$ que

$$\dim\left(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell\right)=\dim\left(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{k}_r^\ell\right)=\dim\left(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell\right)-1=\dim\left(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_{r-1}^\ell\right)-2,$$

ce qui est impossible car $\mathfrak{k}_{r-1}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{k}_r$. Ainsi, nous avons dans tous les cas $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}_r^\ell$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique. En appliquant ce résultat avec $r=p-1$, nous avons $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{h}(\ell')$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique de sorte que $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{h}(\ell)$ car $\mathfrak{h}(\ell)=\mathfrak{h}(\ell')$.

Maintenant, nous allons montrer $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\not\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. La première assertion de la proposition 6.6 dit que $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\not\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ et la troisième assertion de la proposition 6.8 assure qu'il existe

$$W=X_qU+V\in\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\setminus\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau\right)$$

avec $U\in\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\right)\setminus\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ et $V\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Il nous reste à voir $[W,Y_d]\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Au fait, prouvons que $[W,Y_d]\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$.

Nous avons $Y_d\in\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')$, et la proposition 6.7, où nous remplaçons $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}'$, dit que $[Y_d,\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g}')]\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_{\tau'}$. Par conséquent,

$$[W,Y_d]=[X_qU+V,Y_d]\in\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}+\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\right)\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')=\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}+\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau')\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g}'),$$

d'où $[[W,Y_d],Y_d]\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$.

Or, nous sommes en mesure d'appliquer le lemme 6.11 pour constater qu'il existe $m>0$ et $Q_j\in\mathcal{U}_C(\mathfrak{g},\tau'),\ 0\le j\le m$ avec $Q_m\notin\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ tels qu'on ait

$$\sum_{j=0}^m Q_jY_d^j\equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}.$$

Parmi ces identités, choisissons une de manière que m soit minimal. L'action adjointe de W s'écrit comme :

$$\left(\sum_{j=1}^m jQ_jY_d^{j-1}\right)[W,Y_d]\equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}.$$

Ici, $\left(\sum_{j=1}^{m} jQ_jY_d^{j-1}\right) \not\equiv 0$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$, ce qui est dû à la condition de minimalité si $m>1$ et au fait que $Q_1 \not\equiv 0$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ si $m=1$. Comme l'anneau $\mathcal{U}_C(\mathfrak{g},\tau')/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$ est entier, on obtient $[W, Y_d] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$, ce qui achève la preuve dans ce cas-ci.

Cas 3. $\dim \mathfrak{h}(\ell) = \dim \mathfrak{h}(\ell') - 1$ et $\mathfrak{h}'(\ell) = \mathfrak{h}'(\ell')$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique

Remarquons que la condition $\dim \mathfrak{h}(\ell) = \dim \mathfrak{h}(\ell') - 1$ à un point ℓ implique que le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est contenu dans $\mathfrak{g}'$. La supposition $\mathfrak{h}'(\ell) = \mathfrak{h}'(\ell')$ sera utilisé seulement dans la situation (3-c-i).

Nous allons prouver l'inclusion $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. D'après l'assertion (iii) de la proposition 6.8, il est suffisant pour cela de montrer : si $W = X_qU + V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ avec $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ et $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$, alors nécessairement $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.

Nous allons considérer trois sous-cas selon $\mathfrak{z}$ et $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} \cap \ker f$.

(3-a) $\tilde{\mathfrak{z}} \neq \{0\}$

Ce sous-cas est aisément reglé par hypothèse de récurrence appliquée à $(\mathfrak{g}/\tilde{\mathfrak{z}}, \mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{z}})$.

(3-b) $\tilde{\mathfrak{z}} = \{0\}$ et $\dim \mathfrak{z} \geq 2$

Dans ce sous-cas, ou $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}) = 1$ ou $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$. Ces deux possibilités sont traitées pareillement, et nous ne traitons ici que la deuxième. Supposons donc ci-après que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$. Concernant le drapeau (3.1), rappelons les éléments $\{X_r\}_{1\leq r\leq q}$ et $\{Y_s\}_{1\leq s\leq d}$ introduits juste avant le lemme 3.4. Nous y supposons que X_1, X_2 appartiennent à $\mathfrak{z}$ et posons $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{k}_2$. Pour chaque $(q-3)$-uplet $J = (j_3, j_4, \ldots, j_{q-1}) \in \mathbb{N}^{q-3}$, posons $X^J = X_{q-1}^{q-1} \cdots X_4^{j_4} X_3^{j_3}$. Nous considérons les sous-espaces vectoriels S_1 de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ et S_1^* de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ engendrés par les familles $(X^J\hat{Y}^K)_{J\in\, \mathbb{N}^{q-3},\ K\in\, \mathbb{N}^d}$ et $(X^J\hat{Y}^K)_{J\in\, \mathbb{N}^{q-3},\ K\in\, \mathbb{N}^d,\ |K|>0}$. Dans cette démonstration on désigne par

$$\{X_1^*, X_2^*, Y_1^*, \ldots, Y_d^*, X_3^*, \ldots, X_{q-1}^*, X_q^*\}$$

la base de $\mathfrak{g}^*$ duale à la base

$$\{X_1, X_2, Y_1, \ldots, Y_d, X_3, \ldots, X_{q-1}, X_q\}$$

de $\mathfrak{g}$.

Pour $\hat{f} \in \Gamma_\tau$ quelconque, nous avons $\hat{f}([\hat{\mathfrak{h}}, \hat{\mathfrak{h}}]) = \{0\}$ et posons $\hat{\tau} = \mathrm{ind}_{\hat{H}}^{G} \chi_{\hat{f}}$ avec $\hat{H} = \exp\ \hat{\mathfrak{h}}$. Il vient que la famille

$$\Big\{X^J\hat{Y}^K \left(X_1 + \sqrt{-1}\hat{f}(X_1)\right)^j \left(X_2 + \sqrt{-1}\hat{f}(X_2)\right)^k ;\qquad J \in \mathbb{N}^{q-3},\ K \in \mathbb{N}^d,\ j,k \in \mathbb{N},\ |K| + j + k > 0\Big\}$$

forme une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_{\hat{\tau}}$. En particulier, tout élément U_* de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_{\hat{\tau}}$ s'écrit d'une façon unique comme

$$U_* = \sum_{j,k} U_*^{(j,k)} \left(X_1 + \sqrt{-1}\hat{f}(X_1)\right)^j \left(X_2 + \sqrt{-1}\hat{f}(X_2)\right)^k \tag{6.6}$$

avec $U_*^{(j,k)} \in S_1$ si $j + k \neq 0$ et $U_*^{(0,0)} \in S_1^*$.

Nous avons $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \hat{\tau})$ et $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \hat{\tau}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. On sait qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{O}_0$ de Γ_τ dont les éléments ℓ sont tels que $\dim \mathfrak{h}(\ell)$ et $\dim \mathfrak{h}'(\ell')$ sont minimales. Si l'on prend $\hat{f}$ dans $\mathcal{O}_0$ et remplace $\mathfrak{h}$ par $\hat{\mathfrak{h}}$, f par $\hat{f}$ et Γ_τ par $\Gamma_{\hat{\tau}}$, on voit que la condition du cas (3-a) est satisfaite. Cela implique que $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_{\hat{\tau}}$.

Maintenant on fixe $\hat{f}$ dans $\mathcal{O}_0$ et pose $\hat{X}_j = X_j + \sqrt{-1}\hat{f}(X_j)$ $(j = 1, 2)$. Le remplacement de U_* par U à l'expression (6.6) donne

$$U = \sum_{j,k} U^{(j,k)} \hat{X}_1^j \hat{X}_2^k \tag{6.7}$$

avec $U^{(j,k)} \in S_1$ si $j + k \neq 0$ et $U^{(0,0)} \in S_1^*$.

Il est élémentaire de vérifier qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ dont les éléments (u, v) are tels que $\hat{f}_{u,v} = \hat{f} + uX_1^* + vX_2^* \in \mathcal{O}_0$. En remplaçant U_* par U et $\hat{f}$ par $\hat{f}_{u,v}$ à l'expression (6.6), on voit aussi que pour tels éléments

$$U = \sum_{j,k} U_{u,v}^{(j,k)} \left(\hat{X}_1 + \sqrt{-1}u\right)^j \left(\hat{X}_2 + \sqrt{-1}v\right)^k \tag{6.8}$$

avec $U_{u,v}^{(j,k)} \in S_1$ si $j + k \neq 0$ et $U_{u,v}^{(0,0)} \in S_1^*$.

L'égalité

$$U = \sum_{j,k} U^{(j,k)} \left(\hat{X}_1 + \sqrt{-1}u - \sqrt{-1}u\right)^j \left(\hat{X}_2 + \sqrt{-1}v - \sqrt{-1}v\right)^k$$

et les formules (6.7), (6.8) fournissent

$$U_{u,v}^{(0,0)} = \sum_{j,k} (-\sqrt{-1}u)^j (-\sqrt{-1}v)^k U^{(j,k)} \in S_1^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{O}.$$

On déduit de cette relation que, pour tous $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ et $J \in \mathbb{N}^{q-3}$, le coefficient de X^J dans $U^{(j,k)}$ s'annule. Cela signifie que $U^{(j,k)} \in S_1^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$. En particulier, on a $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$, ce qui établit le théorème dans ce sous-cas.

Considérons maintenant la tranche du drapeau (3.1) coupée au niveau de $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{n-1}$ qui contient $\mathfrak{h}$:

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}'.$$

Soit $p_j^* : (\mathfrak{g}')^* \to \mathfrak{g}_j^*$ $(1 \leq j \leq n-1)$ l'application restriction. Pour $\ell \in (\mathfrak{g}')^*$ on définit tout comme avant $e_j^*(\ell) = \dim \left(G' \Delta p_j^*(\ell)\right)$, $e^*(\ell) = (e_1^*(\ell), \ldots, e_n^*(\ell))$ et pose $\mathcal{E}^* = \{e^*(\ell); \ell \in (\mathfrak{g}')^*\}$. Soit $e^* \in \mathcal{E}^*$. On définit la couche G'-invariante $U_{e^*}^* = \{\ell \in (\mathfrak{g}')^*; e^*(\ell) = e^*\}$ et, en posant $e_0 = 0$, l'ensemble des indices de saut $S'(e^*) = \{1 \leq j \leq n-1; e_j^* = e_{j-1}^* + 1\}$ et celui de non-saut $T'(e^*) = \{1 \leq j \leq n-1; e_j^* = e_{j-1}^*\}$. Prenons $e^* \in \mathcal{E}^*$ de manière que la couche $U_{e^*}^*$ rencontre $\Gamma_\tau' = \{\ell' \in (\mathfrak{g}')^*; \ell'|_\mathfrak{h} = f|_\mathfrak{h}\}$ en un ouvert de Zariski non vide de Γ_τ'. Enfin, désignons par $T'(e_H^*)$ l'ensemble des indices $i_s \in \mathcal{I}$ tel qu'on ait $\mathfrak{h}_s = \mathfrak{h}_{s-1} + \mathfrak{h}(\ell')$ pour $\ell' \in \Gamma_\tau'$ générique.

Avant de poursuivre l'étude du cas 3, remarquons que nos hypothèses impliquent que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{h}(\ell')$ et $\mathfrak{h}(\ell) = \mathfrak{h}'(\ell)$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. Autrement dit, nous avons

$i_d \in T'(e_H^*)$ et $i_d \notin T(e_H)$. En effet, nos hypothèses fournissent

$$\dim \mathfrak{h}(\ell) - \dim \mathfrak{h}'(\ell) = \dim \mathfrak{h}(\ell') - \dim \mathfrak{h}'(\ell') - 1$$

pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. Or, $\dim \mathfrak{h}(\ell) - \dim \mathfrak{h}'(\ell)$ et $\dim \mathfrak{h}(\ell') - \dim \mathfrak{h}'(\ell')$ sont soit 0 soit 1. D'où, $\dim \mathfrak{h}(\ell) - \dim \mathfrak{h}'(\ell) = 0$ et $\dim \mathfrak{h}(\ell') - \dim \mathfrak{h}'(\ell') = 1$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. Il se voit (cf. [46]) aussi que $T'(e_H^*)$ et $T_{n-1}(e_H)$ se diffèrent d'un élément au plus. Ainsi, dans la situation actuelle

$$T'(e_H^*) = T_{n-1}(e_H) \cup \{i_d\}. \tag{6.9}$$

(3-c) $\dim \mathfrak{z} = 1$ et $\tilde{\mathfrak{z}} = \{0\}$

Soit $\mathfrak{z}'$ le centre de $\mathfrak{g}'$. Prenons $Y \in \mathfrak{g}_2 \setminus \mathfrak{g}_1$ et $Z \in \mathfrak{z} \setminus \{0\}$ de sorte que $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Z$. Notons $\tilde{\mathfrak{g}}$ le centralisateur de $\mathfrak{g}_2$ dans $\mathfrak{g}$. Nous allons examiner quatre sous-cas.

(3-c-i) $\mathfrak{g}' = \tilde{\mathfrak{g}}$

Cela est équivalent à dire que $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{z}'$. On a $f([X_q, Y]) \neq \{0\}$ et $\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ dans ce cas. La supposition du présent cas implique que $2 \in T'(e^*)$ et $2 \notin T(e)$. Il se voit (cf. [46]) facilement que $T'(e^*)$ et $T_{n-1}(e)$ se diffèrent d'un élément au plus. Donc, on a

$$T'(e^*) = T_{n-1}(e) \cup \{2\}. \tag{6.10}$$

dans le cas actuel.

Notre premier objectif sera de prouver que $R(Y)$ est algébrique sur $CD_\tau(G/H)$. En d'autres termes, on prouvera qu'il existe un polynôme P de Y vérifiant

$$P(Y) = \sum_{j=0}^{m} P_j Y^j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau,$$

dont les coefficients P_j appartiennent à $\mathcal{U}_C(\mathfrak{g}, \tau)$ avec $P_m \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Ce résultat se voit aisément lorsque $2 \in \mathcal{I}$. En effet, il existe dans ce cas un nombre réel a tel que $Y + aZ \in \mathfrak{h}$. Visiblement $Y + aZ + if(Y + aZ) \in \mathfrak{a}_\tau$ avec $Z \in \mathcal{U}_C(\mathfrak{g}, \tau)$. Cela nous donne une relation polynomiale cherchée.

Supposons maintenant $2 \notin \mathcal{I}$. Dans ce cas, $i_d \neq 2$ ou encore $i_d > 2$. Les faits (6.9), (6.10) entraînent $i_d \in T'(e_H^*) \subset T'(e^*)$ et $i_d \in T(e) \backslash T(e_H) = U(e)$. C'est aussi directement montré comme suit. Il tient génériquement sur Γ_τ que $\dim \mathfrak{h}(\ell') - \dim \mathfrak{h}'(\ell') = 1$, ce qui implique qu'il existe $Y(\ell) \in \mathfrak{h}(\ell') \setminus \mathfrak{h}'$, c.-à-d. $Y(\ell) \in \mathfrak{g}_{i_d}(\ell') \setminus \mathfrak{g}_{i_d - 1}$. Alors, $\ell([X_q, Y(\ell)]) \neq 0$ car $i_d \notin T(e_H)$. Par conséquent,

$$\ell\left([X_q, \ell([X_q, Y])Y(\ell) - \ell([X_q, Y(\ell)])Y]\right) = 0.$$

D'où, on observe que $\ell([X_q, Y])Y(\ell) - \ell([X_q, Y(\ell)])Y \in \mathfrak{g}_{i_d}(\ell) \setminus \mathfrak{g}_{i_d - 1}$ et donc $i_d \in T(e)$.

Soit $m_k = i_d$. Les résultats antérieurs nous donnent une suite partielle $(\sigma_r)_{1 \leq r \leq k}$ d'éléments Γ_τ-centraux de Corwin-Greenleaf. On a vu que la famille $\left(\varpi\left(\Diamond(\sigma_r)\right)\right)_{1 \leq r \leq k}$ engendrent algébriquement la sous-algèbre $\delta\left(Z_{m_k}(\mathfrak{g}, \tau)\right)$ de $CD_\tau(G/H)$. Il s'avère que les σ_r sont en même temps Γ'_τ-centraux. En outre, Y est un élément Γ'_τ-central. Ainsi, la famille $\{Y\} \cup (\sigma_r)_{1 \leq r \leq k}$ forme une suite partielle d'éléments Γ'_τ-centraux de Corwin-Greenleaf et $\varpi(Y) \cup \left(\varpi\left(\Diamond(\sigma_r)\right)\right)_{1 \leq r \leq k}$ engendrent algébriquement la sous-algèbre $\delta\left(Z_{m_k}(\mathfrak{g}', \tau^*)\right)$ de $CD_{\tau^*}(G'/H)$, où $\tau^* = \mathrm{ind}_H^{G'} \chi_f$.

Comme $m_k \in T'(e_H^*)$, on sait de la première assertion du lemme 6.10 appliquée au niveau de $\mathfrak{g}'$ que $\lozenge(\sigma_r)$ dépend algébriquement sur la famille $\{Y\}\cup(\lozenge(\sigma_k))_{1\leq r\leq k-1}$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$. Par conséquent, on obtient un polynôme P tel que

$$P\left(\lozenge(\sigma_1),\ldots,\lozenge(\sigma_{k-1}),Y,\lozenge(\sigma_k)\right)\equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{i_d})\mathfrak{a}_\tau \qquad (6.11),$$

où le coefficient de la plus haute puissance de $\lozenge(\sigma_k)$ n'appartient pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. On récrit (6.11) comme :

$$\sum_{j=0}^{m} P_j\left(\lozenge(\sigma_1),\ldots,\lozenge(\sigma_k)\right)Y^j\equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{i_d})\mathfrak{a}_\tau \qquad (6.12)$$

pour certains polynômes $P_j = P_j\left(\lozenge(\sigma_1),\ldots,\lozenge(\sigma_k)\right),\ 0\leq j\leq m$. Les P_j sont des éléments de $\mathcal{U}_C(\mathfrak{g},\tau)$.

Puisque $m_k \in T(e)\backslash T(e_H)$, l'assertion (**) mentionnée antérieurement au lemme 6.10 dit que $\lozenge(\sigma_k)$ est algébriquement indépendant de la famille $(\lozenge(\sigma_r))_{1\leq r\leq k-1}$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Ceci étant, on peut supposer sans perte de généralité qu'à la relation (6.12) P_m n'appartient pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ avec $m\geq 1$, et bien évidemment (6.12) est une relation non-triviale. Désormais, on choisit le polynôme P de façon que le degré $m\geq 1$ dans (6.12) soit minimal.

Comme $[W,Y]=ZU=UZ$, on applique l'action adjointe de W à la formule (6.12) pour obtenir :

$$\left(\sum_{j=1}^{m} jP_jY^{j-1}\right)UZ\equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

Ici on constate que $\left(\sum_{j=1}^{m} jP_jY^{j-1}\right)\not\equiv 0$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Cela s'ensuit de la minimalité de m si $m>1$ et du fait que $P_1\not\equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ si $m=1$. Il est aussi clair que $Z\notin\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Comme l'anneau $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ ne possède aucun diviseur non trivial de zéro, on voit que $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

(3-c-ii) $\mathfrak{g}'\neq\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h}\subset\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\dim\mathfrak{h}(\ell)=\dim(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^\ell)$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique.

D'abord, on peut choisir $X_q\in\tilde{\mathfrak{g}}$ et $X\in\mathfrak{g}'$ de sorte que

$$\mathfrak{g}'=(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})\oplus\mathbb{R}X \quad\text{et}\quad \tilde{\mathfrak{g}}=(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})\oplus\mathbb{R}X_q.$$

Notons que les seules valeurs possibles de

$$\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^\ell\right)-\dim\left(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}^\ell\right)=\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^\ell\right)-\dim\mathfrak{h}(\ell)$$

sont 0, 1 ou 2 car $\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}}$ est de codimension 2 dans $\mathfrak{g}$. On a par hypothèse que

$$\dim\mathfrak{h}(\ell)=\dim\mathfrak{h}(\ell')-1 \quad\text{et}\quad \dim\mathfrak{h}(\ell)=\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^\ell\right)$$

pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique. On remarque aussi que

$$\begin{aligned}
&\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\mathfrak{h}(\ell)\\
&=\left(\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\mathfrak{h}(\ell')\right)+(\dim\mathfrak{h}(\ell')-\dim\mathfrak{h}(\ell))\\
&=\left(\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)\right)-\left(\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)-\dim\mathfrak{h}(\ell)\right).
\end{aligned}$$

On en conclut que $\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\mathfrak{h}(\ell)=1$.

On reprend $W=X_qU+V$ comme avant. On va voir qu'on serait amené à une contradiction si $W\notin\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. En effet, en posant $\tilde{G}=\exp\,\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\tau}=\mathrm{ind}_H^{\tilde{G}}\chi_f$, on montrera que cette condition entraîne l'existence d'un élément $\tilde{W}=X_q\tilde{U}+\tilde{V}\in\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\tau})$ avec $\tilde{U}\in(\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\tau})\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g}'))\setminus\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ et $V\in\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}')$, ce qui est contradictoire à l'hypothèse de récurrence sur $n=\dim G$ car $\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)=1$.

Pour $b\in\mathbb{N}$, on définit le sous-espace $S_b=\sum_{i=0}^{b-1}X^i\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})$ si $b\geq 1$ et $S_0=\{0\}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Il est facile de récrire W sous la forme

$$W=\sum_{i=0}^{a}X^iX_qU_i+\sum_{i=0}^{b}X^iV_i=\sum_{i=0}^{a}X^iX_qU_i+X^bV_b+W_b \tag{6.13}$$

pour certains entiers $a,\ b$. Ici, $U_i,\ V_i\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})$ et $W_b\in S_b$. Sans perte de généralité, on peut choisir W de façon que $U_i,\ V_i\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})\setminus\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})\mathfrak{a}_\tau$ et que $b\leq a$. En effet, supposons $b>a$. La première assertion de la proposition 6.8, où l'on remplace $\mathfrak{g}$ par $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}'$ par $\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}}$ et X_q par X dit que $V_b\in(\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\tau})\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g}'))$. Ensuit, compte tenu de $\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)=\dim\mathfrak{h}(\ell')$, on peut appliquer l'hypothese de récurrence afin d'obtenir un élément $XA+B\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}',\tau^*)$ avec $A\in(\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\tau})\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g}'))\setminus\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$ et $B\in\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}')$. On voit alors que

$$W'=WA^b-(XA+B)^bV_b=X^aX_qU_aA^b+X^{b'}V_{b'}+W_{b'}$$

est un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)\setminus(\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)$ tel que $b'<b$, $V_{b'}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})$ et $W_{b'}\in S_{b'}$. Par conséquent, en répétant ce procédé, on est en mesure de supposer $b\leq a$ dans (6.13). Si $b=a$, (resp. $b<a$), on applique encore la proposition 6.8 pour voir que $\tilde{W}=X_qU_a+V_a\in\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\tau})$ (resp. $\tilde{W}=X_qU_a\in\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\tau})$) avec $U_a\notin\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})\mathfrak{a}_\tau$. Cela contredit le fait que $\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)=\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-1$ et l'hypothèse de récurrence.

(3-c-iii) $\mathfrak{g}'\neq\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h}\subset\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\dim\mathfrak{h}(\ell)=\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)-1$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique

Les suppositions impliquent $\mathfrak{h}^\ell\subset\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}^\ell\subset\tilde{\mathfrak{g}}$ et donc $\mathfrak{h}^\ell\subset\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}}$. De la même raison, cela implique à son tour $\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\mathfrak{h}(\ell')=1$ et $\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)=1$.

On prend $W=X_qU+V$ comme avant. On va voir qu'on serait amené à une contradiction si $U\notin\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. On sait que $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}',\tau^*)$. Écrivons U sous la forme $\sum_{i=0}^{m}X^iU_i$ avec $U_i\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})$. En remplaçant $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}'$ par $\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}}$ et compte tenu du fait que

$\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\mathfrak{h}(\ell')=1$ pour $\ell\in\Gamma_{\tau^*}$ générique, on applique l'hypothèse de récurrence sur $\dim\mathfrak{g}$ afin de constater que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}',\tau^*)\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})+\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau$. Par conséquent, $U_i\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ pour $i\neq 0$. C'est ainsi qu'on peut supposer $U=U_0\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})$. De même, sans perte de généralité, on peut supposer que V s'écrit sous la forme $V=\sum_{i=0}^m X^iV_i$ avec $V_i\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})\setminus\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. On serait amené à une contradiction si $m\geq 1$. En effet, sous cette supposition, la première assertion de la proposition 6.8 dit que

$$mXV_m+V_{m-1}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}',\tau^*)\setminus\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})+\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\mathfrak{a}_\tau\right),$$

ce qu'on vient de trouver impossible.

En somme, on peut choisir $W=X_qU_0+V_0$ avec $U_0,\ V_0\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})$ et $U_0\notin\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})\mathfrak{a}_\tau$. Finalement, on se sert du fait que $\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)=1$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique. Il implique par récurrence que $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\tau})\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})+\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})\mathfrak{a}_\tau$. Cela nous donne une contradiction et le théorème s'établit dans cette situation.

(3-c-iv) $\mathfrak{h}\not\subset\tilde{\mathfrak{g}}$

Dans ce cas, posons $\tilde{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}},\ \tilde{H}=\exp\ \tilde{\mathfrak{h}}$ et choisissons $X\in\mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{h}=\tilde{\mathfrak{h}}\oplus\mathbb{R}X$. Visiblement, $\mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{g}}+\mathbb{R}X$ et $\mathfrak{h}\subset(\mathbb{R}X)^\ell$ pour tout $\ell\in\Gamma_\tau$. D'où,

$$\dim\mathfrak{h}(\ell)=\dim\mathfrak{h}(\ell')-1\quad\text{et}\quad\dim\mathfrak{h}(\ell)=\dim\left(\mathfrak{h}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)$$

pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique. Ceci étant, les mêmes arguments développés dans le cas (3-c-ii) plus haut fournissent

$$\dim\left(\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\mathfrak{h}(\ell)=1$$

pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique. Puisqu'il est immédiat que, $\mathfrak{g}_*$ étant un idéal quelconque de $\mathfrak{g}$ contenant Y, $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_*^\ell=\tilde{\mathfrak{h}}\cap\mathfrak{g}_*^\ell$ pour $\ell\in\Gamma_\tau$ générique, nous constatons génériquement dans Γ_τ que

$$\dim\left(\tilde{\mathfrak{h}}\cap(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})^{\ell}\right)-\dim\left(\tilde{\mathfrak{h}}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^{\ell}\right)=1.\tag{6.14}$$

Montrons que la supposition $W\notin\mathcal{U}(\mathfrak{g}')+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ nous mène à une contradiction. En effet, dans le présent cas, nous pouvons écrire $W=X_q(\sum_i U_iX^i)+\sum_i V_iX^i$ avec $U_i,\ V_i\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})$, de sorte que

$$W\equiv X_q\sum_i\left(-\sqrt{-1}f(X)\right)^iU_i+\sum_i\left(-\sqrt{-1}f(X)\right)^iV_i\mod\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

Donc, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $W=X_qU+V$ avec $U,\ V\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})$, de sorte que $W\in\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\tau}),\ \tilde{\tau}=\mathrm{ind}_{\tilde{H}}^{\tilde{G}}\chi_f$, et $W\notin\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}})+\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})\mathfrak{a}_{\tilde{\tau}}$. L'hypothèse de récurrence sur $\dim\mathfrak{g}$, où nous remplaçons $\mathfrak{g}$ par $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}'$ par $\mathfrak{g}'\cap\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{h}$ par $\tilde{\mathfrak{h}}$, exige que ce n'est pas compatible avec (6.14).

La démonstration du théorème est terminée. c.q.f.d.

Nous somme prêts à prouver la conjecture de commutativité.

Corollary 6.14. On garde les notations. L'algèbre $D_\tau(G/H)$ est commutative si et seulement si $\tau=\mathrm{ind}_H^G\chi_f$ est à multiplicités finies.

Démonstration. Corwin-Greenleaf [22] a déjà montré une implication : si τ est à multiplicités finies, l'algèbre $D_\tau(G/H)$ est commutative. Il ne nous reste donc qu'à montrer l'implication inverse. Supposons que τ est à multiplicités infinies et voyons par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$ que $D_\tau(G/H)$ est non commutative. Rappelons d'abord [19] : génériquement sur Γ_τ,

$$\begin{aligned} \tau \text{ est à multiplicités finies} &\Longleftrightarrow \dim H\cdot\ell = \frac{1}{2}\dim G\cdot\ell \\ &\Longleftrightarrow 2(\dim\mathfrak{h} - \dim\mathfrak{h}(\ell)) = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}(\ell) \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de prouver que $2(\dim\mathfrak{h} - \dim\mathfrak{h}(\ell)) < \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}(\ell)$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique entraîne que $D_\tau(G/H)$ est non commutative. Dans ce cas, évidemment $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Si $D_{\tau*}(G'/H) \subset D_\tau(G/H)$ est déjà non commutative, plus rien à faire. Supposons donc $D_{\tau*}(G'/H)$ commutative, ce qui revient au même de dire que $2(\dim\mathfrak{h} - \dim\mathfrak{h}(\ell')) = \dim\mathfrak{g}' - \dim\mathfrak{g}'(\ell')$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. D'où,

$$2(\dim\mathfrak{h}(\ell') - \dim\mathfrak{h}(\ell)) < 1 + \dim\mathfrak{g}'(\ell') - \dim\mathfrak{g}(\ell) \leq 2$$

et donc $\mathfrak{h}(\ell') = \mathfrak{h}(\ell)$ pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique. Ceci étant, le théorème 6.13 réclame qu'il existe un élément $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ tel que $W \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Enfin, en se servant du théorème 6.1, on obtient un élément $T \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}', \tau^*)$ tel que $[W, T] \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. C'est ainsi que l'algèbre $D_\tau(G/H)$ est non commutative. c.q.f.d.

Exemple 6.15. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotent de dimension 7 engendrée par les vecteurs $\{X_i; 1 \leq i \leq 7\}$ avec les crochets non nuls :

$$\begin{aligned} &[X_6, X_2] = X_1,\ [X_6, X_4] = X_2,\ [X_6, X_5] = X_4,\ [X_6, X_7] = X_3, \\ &[X_4, X_5] = X_3,\ [X_5, X_3] = X_1,\ [X_4, X_7] = -X_1. \end{aligned}$$

Il est clair que le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{z} = \mathbb{R}X_1$. Choisissons le drapeau d'idéaux (3.1) comme suit :

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_6 \subset \mathfrak{g}_7 = \mathfrak{g},$$

où

$$\mathfrak{g}_j = \langle X_1, \ldots, X_j\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{R}X_k \ (1 \leq j \leq 7).$$

On munit $\mathfrak{g}^*$ de la base duale $\{X_j^*; 1 \leq j \leq 7\}$ de la base $\{X_j; 1 \leq j \leq 7\}$ de $\mathfrak{g}$. Prenons $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X_4$ et $f = \lambda X_4^*$ de sorte que

$$\Gamma_\tau = \left\{ \sum_{j=1}^{7} \xi_j X_j^*; \xi_4 = \lambda \right\}.$$

Décrivons maintenant les H-orbites génériques, à savoir, les H-orbites de dimension maximale dans Γ_τ. Elles sont contenues dans l'ouvert de Zariski suivant :

$$\mathcal{O} = \left\{ \sum_{j=1}^{7} \xi_j X_j^* \in \Gamma_\tau ; \xi_3 \neq 0 \right\}.$$

Un simple calcul direct vérifie que, si $\ell = \sum_{j=1}^{7} \xi_j X_j^* \in \Gamma_\tau$, $\mathrm{Ad}^*(\exp(-tX_4))(\ell) = \sum_{j=1}^{7} \xi_j(t) X_j^*$ $(\forall\, t \in \mathbb{R})$ où

$$\begin{aligned} \xi_6(t) = \xi_1 - t\xi_2, \quad \xi_1(t) = \xi_1, \quad \xi_2(t) = \xi_2, \ \xi_4(t) = \lambda, \\ \xi_5(t) = \xi_5 + t\xi_3, \quad \xi_3(t) = \xi_3, \quad \xi_7(t) = \xi_7 - t\xi_1. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Les ensembles d'indices $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ définis juste après le théorème 3.3 sont respectivement $\mathcal{I} = \{4\}$ et $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, de sorte que la suite de sous-algèbres (3.2) devient :

$$\begin{aligned} &\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{h} = \mathbb{R}X_4, \quad \mathfrak{k}_1 = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_4, \\ &\mathfrak{k}_2 = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_4, \quad \mathfrak{k}_j = \mathfrak{g}_{j+1} \ (3 \leq j \leq 6). \end{aligned}$$

En posant $\tau_j = \mathrm{ind}_H^{K_j} \chi_f$, $K_j = \exp\ \mathfrak{k}_j$, on considère la suite associée de sous-algèbres :

$$D_{\tau_1}(K_1/H) \subseteq D_{\tau_2}(K_2/H) \subseteq \cdots \subset D_{\tau_5}(K_5/H) \subseteq D_{\tau_6}(K_6/H) = D_\tau(G/H). \tag{6.16}$$

Le théorème 6.13 dit exactement laquelle de ces inclusions est propre ou non.

À l'aide du calcul (6.15) des H-orbites et en posant ici $\ell_j = \ell|_{\mathfrak{k}_j}$ $(1 \leq j \leq 6)$ pour tout $\ell \in \mathfrak{g}^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dim H \cdot \ell_j = 0, \quad \forall\, \ell \in \mathcal{O}, \quad 0 \leq j \ \leq 3, \\ \dim H \cdot \ell_j = 1, \quad \forall\, \ell \in \mathcal{O}, \quad 4 \leq j \leq 6. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Suivant la suite $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_6$, il y a un seul saut de la dimension des H-orbites génériques dans Γ_τ qui a lieu au passage de $\mathfrak{k}_3$ à $\mathfrak{k}_4$. Par conséquent, le théorème 6.13 implique que $D_{\tau_j}(K_j/H)$ sont proprement contenue dans $D_{\tau_{j+1}}(K_{j+1}/H)$ sauf pour $j = 3$, où l'on a l'égalité $D_{\tau_3}(K_3/H) = D_{\tau_4}(K_4/H)$. Donc, la suite (6.16) se détaille :

$$D_{\tau_1}(K_1/H) D_{\tau_2}(K_2/H) D_{\tau_3}(K_3/H) = D_{\tau_4}(K_4/H) D_{\tau_5}(K_5/H) D_\tau(G/H). \tag{6.18}$$

Autrement dit, il existe sauf pour $j = 3$ un non zéro élément de $D_{\tau_{j+1}}(K_{j+1}/H)$ qui n'appartient pas à $D_{\tau_j}(K_j/H)$. Pour confirmer cela, nous allons construire explicitement un tel nouveau élément. En posant $u = \xi_5 + t\xi_3$ dans les calculs (6.15), on paramètre les H-orbites génériques dans Γ_τ comme suit : si $\ell = \sum_{j=1}^{7} \xi_j X_j^* \in \mathcal{O}$, alors $\mathrm{Ad}^*(\exp\ (-tX_4))(\ell) = \sum_{j=1}^{7} r_j(u) X_j^*$ $(\forall\, t \in \mathbb{R})$ avec

$$\begin{aligned} r_6(u) = \frac{\xi_6\xi_3 + \xi_2\xi_5 - u\xi_2}{\xi_3}, \quad r_1(u) = \xi_1, \quad r_2(u) = \xi_2, \quad r_4(u) = \lambda, \\ r_5(u) = u, \quad r_3(u) = \xi_3, \quad r_7(u) = \frac{\xi_7\xi_3 + \xi_1\xi_5 - u\xi_1}{\xi_3}. \end{aligned}$$

Cela nous fournit les polynômes H-invariants

$$\xi_6\xi_3 + \xi_2\xi_5, \ \xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \xi_7\xi_3 + \xi_1\xi_5$$

sur $\mathfrak{g}^*$. En appliquant l'application symétrisation $S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ à ces polynômes, on obtient les éléments

$$X_6X_3 + X_2X_5,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_7X_3 + X_1X_5$$

de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$. Précisément, X_1 au passage de $\mathbb{C} = \mathcal{U}(\mathfrak{k}_0, \chi_f)$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_1, \tau_1)$, X_2 de $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_1, \tau_1)$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_2, \tau_2)$, X_3 de $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_2, \tau_2)$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_3, \tau_3)$, $X_6X_3+X_2X_5$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_4, \tau_4)$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_5, \tau_5)$, $X_7X_3+X_1X_5$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_5, \tau_5)$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$.

Vérifions qu'aucun nouvel élément de $D_\tau(G/H)$ se produit au passage de $D_{\tau_3}(K_3/H)$ à $D_{\tau_4}(K_4/H)$. Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}_4, \tau_4)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_3)+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. D'après l'assertion (iii) de la proposition 6.8, on peut supposer que A s'écrit $A = X_5U+V$ avec $U,\ V \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}_3)$. Comme $\mathfrak{k}_3$ est commutative, il est immédiat que $[A, X_4] = -X_3U$. Puisque $X_3 \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, cela exige $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ et puis $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}_3, \tau_3)$. Ainsi, $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}_3, \tau_3) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, d'où $D_{\tau_3}(K_3/H) = D_{\tau_4}(K_4/H)$.

Maintenant, tournons à la question de commutativité de $D_\tau(G/H)$. Un calcul direct nous fait aisément observer que les G-orbites génériques dans Γ_τ sont à dimension 6 tandis que H-orbites génériques y sont à dimension 1 par (6.17). Donc, $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ est à multiplicités infinies. Par conséquent, l'algèbre $D_\tau(G/H)$ doit être non commutative. En effet, pour $1 \leq j \leq 3$ les groupes $K_j = \exp\ \mathfrak{k}_j$ sont abéliens. D'où, les représentations $\tau_j = \mathrm{ind}_H^{K_j} \chi_{f_j}$ sont à multiplicités finies, tandis que les algèbres $D_{\tau_j}(K_j/H)$ sont commutatives.

Pour $j = 5$ et pour $\ell \in \Gamma_\tau$ générique, les orbites $K_5 \cdot \ell_5$ sont à dimension 4 tandis que les orbites $H \cdot \ell_5$ sont à dimension 1 par (6.17). On en déduit que $\tau_5 = \mathrm{ind}_H^{K_5} \chi_{f_5}$ est à multiplicités infinies. En même temps, X_2 et $X_6X_3 + X_2X_5$ sont deux éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{k}_5, \tau_5)$ vérifiant $[X_2, X_6X_3 + X_2X_5] = -X_1X_3$. Compte tenu de $X_1X_3 \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, on voit que

$$[X_2, X_6X_3 + X_2X_5] \not\equiv 0 \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

Cela prouve que $D_{\tau_5}(K_5/H)$ est non commutative.

§7. Conjecture de commutativité : cas de restriction

Comme la réciprocité de Frobenius le suggère, il y a une sorte de dualité entre l'induction et la restriction de représentations. Alors, dans cette ligne directrice, nous nous proposons de formuler pour la restriction de représentations une contrepartie de la conjecture de commutativité et la prouver. Ce texte devenant déjà beaucoup trop long pour mes cours à Monastir, nous nous contentons de noter seulement des résultats obtenus dans [8], sans y donner de démonstration. Soient toujours $G = \exp\ \mathfrak{g}$ un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $K = \exp\ \mathfrak{k}$ un sous-groupe analytique de G ayant l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Pour $\pi \in \hat{G}$, on note $\Omega(\pi) = \Omega_G(\pi)$ l'orbite coadjointe associée de G. Étant donnée $\pi \in \hat{G}$, nous allons étudier la restriction $\pi|_K$ de π à K, dont la désintégration centrale canonique se décrit par le théorème 2.2.2. Désignons par $\ker \pi$ l'idéal primitif associé à π dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Pour deux sous-espaces $\mathcal{M}$ et

$\mathcal{N}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on note

$$\mathfrak{c}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \{A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}); [A,\mathcal{M}] \subset \mathcal{N}\}$$

le centralisateur de $\mathcal{M}$ modulo $\mathcal{N}$. Posons $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} = \mathfrak{c}(\mathfrak{k}, \ker\pi)$. Manifestement, $\ker\pi$ est un idéal bilatère de $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$. Soit $D_\pi(G)^K$ l'algèbre image par l'homomorphisme π de $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ de sorte que

$$D_\pi(G)^K \simeq \mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}/\ker\pi = (\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\ker\pi)^K\,,$$

où la dernière algèbre est l'algèbre des éléments K-invariants de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\ker\pi$. L'algèbre $D_\pi(G)^K$ pourra être regardée comme une algèbre d'opérateurs différentiels qui lasse $\mathcal{H}_\pi^\infty$ invariant et qui commutent avec l'action de K sur cet espace. Nous aimerions comprendre la structure de l'algèbre $D_\pi(G)^K$ dans un rapport avec le spectre et les multiplicités de $\pi|_K$. D'ailleurs, quand la représentation $\pi|_K$ s'avère irréductible, il n'est pas difficile de voir que $D_\pi(G)^K$ est une algèbre triviale. Tout pareillement au cas des représentations monomiales, on se trouve dans l'alternative suivante : au théorème 2.2.2 soit il existe une borne uniforme des multiplicités $n_\pi(\sigma)$ pour ν-presque toutes σ, soit $n_\pi(\sigma) = \infty$ pour ν-presque toutes σ. Selon ces deux éventualités, nous disons que $\pi|_K$ est à multiplicités finies ou infinies.

Reprenons le drapeau d'idéaux (3.1) :

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g},\ \dim\mathfrak{g}_k = k\ (0 \le k \le n), \tag{3.1}$$

ainsi que les notations introduites au début du chapitre 3 : $X_j \in \mathfrak{g}_j \setminus \mathfrak{g}_{j-1},\ p_j : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_j^*,\ \mathcal{E},\ e \in \mathcal{E},\ U_e,\ S(e),\ T(e)$ etc. Posons

$$\mathfrak{g}_S^* = \sum_{j \in S(e)} \mathbb{R}X_j^* \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_T^* = \sum_{j \in T(e)} \mathbb{R}X_j^*$$

de sorte que $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_S^* \oplus \mathfrak{g}_T^*$. Il existe un ordre total dans $\mathcal{E}$, soit $\mathcal{E} = \{e^{(1)} > \cdots > e^{(k)}\}$, de telle sorte que $U_{e^{(k)}}$ et $\cup_{j \le i} U_{e^{(j)}}$ soient des ouverts de Zariski de $\mathfrak{g}^*$ pour tout i. Ainsi toutes les couches U_e sont des ensembles algébriques, c.-à-d. différence de deux ouverts de Zariski de $\mathfrak{g}^*$.

Décrivons le résultat de Pedersen [65]. Soit U_e une couche quelconque. On note $S(e) = \{j_1 < \cdots < j_m\}$, où m désigne la dimension des G-orbites dans U_e. Il existe alors des fonctions $R_j^e : U_e \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ 1 \le j \le n$, telles que :

- pour $\ell \in U_e$ fixée, $x = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto R_j^e(\ell, x)$ est une fonction polynomiale de $x \in \mathbb{R}^m$ dont les coefficients sont des fonctions G-invariantes sur U_e ;
- $R_j^e(\ell, x) = x_k$ pour $j = j_k \in S(e),\ \ell \in U_e$;
- si $j_k \le j \le j_{k+1}$, alors $R_j^e(\ell, x)$ ne dépend que de $x_1, \ldots, x_k$;
- pour tout $\ell \in U_e$, l'orbite coadjointe $G \cdot \ell$ est donnée par

$$G \cdot \ell = \left\{ \sum_{j=1}^n R_j^e(\ell, x) X_j^*; x \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Formons $R_j^e(\ell, -iX_{j_1}, \ldots, -iX_{j_m})$ dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$, en remplaçons la variable x_k dans $R_j^e(\ell, x)$ par $-iX_{j_k}$, et notons $r_j^e(\ell)$ son image dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ par la symétrisation.

En particulier, $r^e_{j_k}(\ell) = -iX_{j_k}$. Soient V_e le sous-espace de $S(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme $X^{k_1}_{j_1} \cdots X^{k_m}_{j_m},\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, F_e l'image dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de V_e par la symétrisation et E_e le sous-espace de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme $X^{k_1}_{j_1} \cdots X^{k_m}_{j_m},\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$. Si $e = \emptyset$, on pose $V_e = F_e = E_e = \mathbb{C}\Delta 1$. Pedersen [65] a prouvé que l'idéal primitif $\ker \pi_\ell$, où $\ell \in U_e$, est engendré par les éléments

$$u^e_j(\ell) = X_j - ir^e_j(\ell), \quad j \in T(e)$$

et que

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \ker \pi_\ell \oplus E_e = \ker \pi_\ell \oplus F_e.$$

De même, l'action de π sur E_e et F_e est fidèle. Ainsi, en identifiant E_e et F_e à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\ker \pi_\ell$ et par abus de notations nous avons :

$$D_{\pi_\ell}(G)^K \cong E^K_e \cong F^K_e \cong \mathbb{C}[X_{j_1}, \ldots, X_{j_m}]^K.$$

Ces isomorphismes sont tout simplement des isomorphismes d'espaces vectoriels.

C'est en chassant ℓ de ce résultat de Pedersen sur $\ker \pi_\ell$ que Corwin-Greenleaf [22] ont construit des éléments e-centraux. Comme nous allons le voir dans la suite, ces éléments e-centraux vont servir à construire des éléments de $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ et jouer un rôle capital dans notre démonstration de la commutativité.

Fixons maintenant une orbite coadjointe $\Omega = \Omega(\pi) \subset \mathfrak{g}^*$ associée à $\pi \in \hat{G}$. Fixons aussi une forme linéaire $\ell \in \Omega$ et introduisons des coordonées dans Ω à l'aide d'une base de Maslov $\{\tilde{X}_k; 1 \leq k \leq q\}$, où $q = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell) = \dim \Omega(\ell)$, relative à $\mathfrak{g}(\ell)$. Cela deut dire que

$$\mathfrak{g}(\ell) + \sum_{k=1}^{r} \mathbb{R}\tilde{X}_k,\ 1 \leq r \leq q,$$

sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. Alors l'application

$$\mathbb{R}^q \ni T = (t_1, \ldots, t_q) \mapsto \Phi(T) = \exp(t_q\tilde{X}_q) \cdots \exp(t_1\tilde{X}_1) \cdot \ell \in \Omega$$

est un difféomorphisme sous lequel la mesure $\tilde{\nu}_\pi$ s'avère équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^q$. Soit

$$\{0\} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{k}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{d-1} \subset \mathfrak{k}_d = \mathfrak{k}, \quad \dim \mathfrak{k}_s = s,\ 0 \leq s \leq d$$

une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{k}$ et $\{Y_1, \ldots, Y_d\}$ une base de $\mathfrak{k}$ adaptée à cette suite. Considérons maintenant les matrices $M_r,\ 1 \leq r \leq d$, de type (r, d) définies par

$$M_r = \left(\Phi(T)\left([Y_i, Y_j]\right)\right)_{1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq d}.$$

Notons $e_r\left(\Phi(T)|_{\mathfrak{k}}\right)$ le rang de M_r. L'ensemble

$$e\left(\Phi(T)|_{\mathfrak{k}}\right) = \left(e_1\left(\Phi(T)|_{\mathfrak{k}}\right), \ldots, e_d\left(\Phi(T)|_{\mathfrak{k}}\right)\right)$$

n'est autre que l'ensemble des indices de dimensions de $\Phi(T)|_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}^*$ donné au moyen de la suite de Jordan-Hölder écrite ci-dessus. Posons pour $1 \leq i \leq d,\ e^0_i = \max_{T \in \mathbb{R}^q} e_i\left(\Phi(T)|_{\mathfrak{k}}\right)$ et $e^0 = (e^0_1, \ldots, e^0_d)$. Il est clair que $\mathcal{D} = \{T \in \mathbb{R}^q; e\left(\Phi(T)|_{\mathfrak{k}}\right) = e^0\}$ est un ouvert de Zariski de $\mathbb{R}^q$. Par conséquent, si l'on introduit la couche $U_{\mathfrak{k}}(\pi) = U_{e^0} = \{\zeta \in \mathfrak{k}^*; e(\zeta) = e^0\}$ dans $\mathfrak{k}^*$, on conclut que $\nu\left(\hat{K} \setminus \hat{\rho}_K\left(U_{\mathfrak{k}}(\pi)\right)\right) = 0$.

Pour $A \in S(\mathfrak{k})$, on définit un fermé principal $\mathcal{F}(A)$ de $\mathfrak{k}^*$ par $\mathcal{F}(A) = \{\zeta \in \mathfrak{k}^*; A(\zeta) = 0\}$. Ceci étant, il en résulte que $\mathcal{F}_A = \{T \in \mathbb{R}^q; \Phi(T)|_{\mathfrak{k}} \in \mathcal{F}(A)\}$ est un fermé de Zariski de $\mathbb{R}^q$. D'après la construction (cf. [22]) des éléments e-centraux, il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{k}^*$ tel que $\mathcal{Z} \cap U_{e^0}$ soit non vide et K-invariant sur lequel se fasse la construction. Notons ici $p_{\mathfrak{k}}$ l'application restriction $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$. Si $\mathcal{Z} \cap p_{\mathfrak{k}}(\Omega) = \emptyset$, la construction se répète sur la sous-couche $U_{e^0} \setminus (\mathcal{Z} \cap U_{e^0})$ qui remplace U_{e^0} et ainsi de suite. S'il en est ainsi, ce procédé nous fournit un système d'éléments e^0-centraux de Corwin-Greenleaf valable ν-presque partout dans $\hat{K}$.

Au drapeau d'idéaux (3.1), soit

$$\mathcal{I} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_d\}$$

l'ensemble des indices $1 \leq i \leq n$ tels que $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}_{i-1} \cap \mathfrak{k}$, et posons

$$\mathcal{J} = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_p\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{I} \quad (p = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})).$$

En posant $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{l}_r = \mathfrak{k} + \mathfrak{g}_{j_r}$ pour $1 \leq r \leq p$, on obtient une suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{l}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{l}_{p-1} \subset \mathfrak{l}_p = \mathfrak{g}, \quad \dim(\mathfrak{l}_r/\mathfrak{l}_{r-1}) = 1.$$

D'autre part, en considérant $\mathfrak{k}_s = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{i_s}$ $(1 \leq s \leq d)$, nous procurons un drapeau d'idéaux de $\mathfrak{k}$:

$$\{0\} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{d-1} \subset \mathfrak{k}_d = \mathfrak{k}, \quad \dim \mathfrak{k}_s = s, \ 0 \leq s \leq d.$$

En extrayant un vecteur $Y_s \in \mathfrak{k}_s \setminus \mathfrak{k}_{s-1}$ pour $1 \leq s \leq d$, on forme une base de Jordan-Hölder $\{Y_1, \ldots, Y_d\}$ de $\mathfrak{k}$. De la même manière, en extrayant un vecteur $X_r \in \mathfrak{l}_r \setminus \mathfrak{l}_{r-1}$ pour $1 \leq r \leq p$, on forme une base de Malcev $\{X_1, \ldots, X_p\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{k}$. Commençons par généraliser le résultat de Pedersen mensionné ci-dessus.

Théorème 7.1. Supposons $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{k}_k \neq \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{k}_{k-1}$ pour ν_π-presque toute $\ell \in \Omega$, alors il existe un élément $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}_k) \cap \ker \pi$ ayant la forme $W = \sum_{j=0}^m P_j Y_k^j$ avec $P_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}_{k-1})$ $(0 \leq j \leq m)$ vérifiant $\pi(P_m) \neq 0$.

Définition 7.2. Soient $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et B_ℓ la forme bilinéaire définie antérieurement. Nous disons que $\mathfrak{k}$ est coisotrope en ℓ si l'espace $\mathfrak{k}^\ell = \{X \in \mathfrak{g}; B_\ell(X, \mathfrak{k}) = \{0\}\}$ est un sous-espace isotrope pour B_ℓ.

Cette notion de coisotropie va nous permettre de caractériser la finitude des multiplicités de $\pi|_K$.

Proposition 7.3. Gardons les notations. Alors $\pi|_K$ est à multiplicités finies si et seulement si $\mathfrak{k}$ est génériquement coisotrope sur Ω.

Nous allons donner une autre interprétation de ce fait selon le principle général dû à Michel Duflo. Soit $\ell \in p_{\mathfrak{k}}(\Omega) \subset \mathfrak{k}^*$. Notons ω l'orbite coadjointe de K passant par ℓ et σ la représentation unitaire irréductible de K associée à ω. Alors la proposition 7.2 s'interprète comme :

Proposition 7.4. La représentation $\pi|_K$ est à multiplicités finies si et seulement si les $K(\ell)$-orbites dans $\Omega \cap p_{\mathfrak{k}}^{-1}(\ell)$ sont génériquement ouvertes. En l'occurrence la multiplicité

$n_\pi(\sigma)$ dans le théorème 2.2.2 est donnée par le nombre des $K(\ell)$-orbites contenues dans $\Omega \cap p_{\mathfrak{k}}^{-1}(\ell)$.

Maintenant, en récrivant $\mathfrak{k}_{d+r}$ à la place de $\mathfrak{l}_r$ $(1 \leq r \leq p)$, nous nous procurons une suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$:

$$\{0\} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{d-1} \subset \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_d \subset \mathfrak{k}_{d+1} \subset \cdots \mathfrak{k}_{n-1} \subset \mathfrak{k}_n = \mathfrak{g},$$

avec $\dim(\mathfrak{k}_r) = r,\ 1 \leq r \leq n$. Ici, $\mathfrak{k}_r$ est un idéal de $\mathfrak{k}$ pour $1 \leq r \leq d$.

Extrayons un vecteur $X_s \in \mathfrak{k}_s \backslash \mathfrak{k}_{s-1}$ pour $1 \leq s \leq n$. En fait, la base duale $\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$ est une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}^*$ pour l'action unipotente $\mathrm{Ad}^*(K)$. Les projections $p_j : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}_j^*$ $(1 \leq j \leq n)$ entrelacent l'action de K, et tout comme avant une forme linéaire $\ell \in \mathfrak{g}^*$ nous donne un n-uplet

$$e(\ell) = (e_1(\ell), \ldots, e_n(\ell))$$

d'entiers non-négatifs définis par $e_k(\ell) = \dim K\Delta p_k(\ell)$ $(1 \leq k \leq n)$. Inversement chaque n-uplet $e = (e_1, \ldots, e_n)$ d'entiers non-négatifs nous fournit une couche U_e de K-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ définie par :

$$U_e = \{\ell \in \mathfrak{g}^*; e_k(\ell) = e_k,\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Alors il existe une et une seule couche U_e telle que $U_e \cap \Omega$ soit un ouvert de Zariski de Ω. Considérons alors l'ensemble $S(e)$ des indices de saut :

$$S(e) = \{1 \leq k \leq n; e_k = e_{k-1} + 1\}$$

et $T(e)$ celui de non-saut :

$$T(e) = \{1 \leq k \leq n; e_k = e_{k-1}\},$$

en convenant que $e_0 = 0$.

Théorème 7.5. Nous gardons la même situation. Lors du passage de $\mathfrak{k}_{j-1}$ à $\mathfrak{k}_j$, l'algèbre $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ s'agrandit lorsque $j \in T(e)$, par contre elle ne s'agrandit pas lorsque $j \in S(e)$. Plus précisément, en posant $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{k}_j)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{k}_j)$ pour $1 \leq j \leq n$ nous avons :

(1) Si $j \in T(e)$, alors $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{k}_j)^{\mathfrak{k}} \neq \mathcal{U}_\pi(\mathfrak{k}_{j-1})^{\mathfrak{k}} + \mathcal{U}(\mathfrak{k}_j)\,(\mathcal{U}(\mathfrak{k}_{j-1}) \cap \ker \pi)$ et il existe $W \in \mathcal{U}_\pi(\mathfrak{k}_j)^{\mathfrak{k}}$ ayant la forme $W = aX_j + b$ $(a,\ b \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}_{j-1}))$ avec $\pi(a) \neq 0$.

(2) Si $j \in S(e)$, alors $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{k}_j)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{U}_\pi(\mathfrak{k}_{j-1})^{\mathfrak{k}} + \mathcal{U}(\mathfrak{k}_j)\,(\mathcal{U}(\mathfrak{k}_{j-1}) \cap \ker \pi)$.

Enfin, nous aboutissons au :

Théorème 7.6. $\pi|_K$ est à multiplicités finies si et seulement si l'algèbre $D_\pi(G)^K$ est commutative.

§8. Postface

Quant à la conjecture polynomiale, je crois que nous venons d'en élaborer une démonstration et nous sommes en train de l'examiner. Cette conjecture aussi se traduit pour la restriction et cette contrepartie s'établit jusqu'à maintenant dans des cas particuliers (cf. [9]).

Comme il se voit bien, beaucoup d'études détaillées ne s'éffectuent que dans le cas nilpotent et il reste encore un tas de choses à réfléchir même dans le cas exponentiel.

Peut-être il serait instructif de traiter un groupe de Lie complètement résoluble dont l'algèbre de Lie est une j-algèbre normale au sens de Pjatetskii-Shapiro car il possède une structure algébrique remarquable.

Ici en Tunisie ou en France ou ailleurs il y a de jeunes chercheurs en pleines activités dans notre domaine. Nous comptons sur eux pour l'avenir de la méthode des orbites.

Pour le moment je n'ai pas le temps de relire ce texte, bien que je sois sûr et certain qu'il contient beaucoup de coquilles. Prière de m'en pardonner et merci infiniment pour votre attention.

Références

[1] D. Arnal, H. Fujiwara et J. Ludwig, *Opérateurs d'entrelacement pour les groupes de Lie exponentiels*, Amer. J. Math., **118** (1996), 839-878.

[2] G. Arsac, *Opérateurs compacts dans l'espace d'une représentation*, C. R. Acad. Sci. Paris, **286** (1982), 189-192.

[3] L. Auslander and B Kostant, *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. math., **14** (1971), 255-354.

[4] L. Auslander and C. C. Moore, *Unitary representations of solvable Lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **62** 1966.

[5] A. Baklouti, *Harmonic analysis on differential operators on nilpotent homogeneous spaces*, Russian J. Math. Physics **6** (1999), 125-136.

[6] A. Baklouti and J. Ludwig, *Invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces*, Monatsh. Math., **134** (2001), 19-37.

[7] A. Baklouti et H. Fujiwara, *Opérateurs différentiels associés à certaines représentations unitaires d'un groupe de Lie résoluble exponentiel*, Compositio Math., **139** (2003), 29-65.

[8] A. Baklouti et H. Fujiwara, *Commutativité des opérateurs différentiels sur l'espace des représentations restreintes d'un groupe de Lie nilpotent*, J. Math. Pures Appl., **83** (2004), 137-161.

[9] A. Baklouti, H. Fujiwara and J. Ludwig, *Analysis of restrictions of unitary representations of a nilpotent Lie group*, Bull. Sci. Math., **129** (2005), 187-209.

[10] Y. Benoist, *Espaces symétriques exponentiels*, Thèse de 3^{e} cycle, Univ. Paris VII, 1983.

[11] Y. Benoist, *Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents*, J. Func. Anal., **59** (1984), 211-253.

[12] Y. Benoist, *Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels*, Mém. Soc. Math. France, **15** (1984), 1-37.

[13] Y. Benoist, *Modules simples sur une algèbre de Lie nilpotente contenant un vecteur propre pour une sous-algèbre*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **23** (1990), 495-517.

[14] P. Bernat et al., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris, 1972.

[15] R. J. Blattner, *On induced representations I; II*, Amer. J. Math., **83** (1961), 79-98; 499-512.

[16] P. Bonnet, *Transformation de Fourier des distributions de type posotif sur un groupe de Lie unimodulaire*, J. Func. Anal., **55** (1984), 220-246.

[17] N. Bourbaki, *Intégration*, Hermann, Paris, 1967.

[18] P. Cartier, *Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie*, Lect. Notes. Math. Springer **514** (1975), 20-34.

[19] L. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grélaud, *Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **304** (1987), 549-583.

[20] L. Corwin and F. P. Greenleaf, *Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations in nilpotent Lie groups*, Pacific J. Math., **135** (1988), 233-267.

[21] L. Corwin and F. P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications, Part I : Basic theory and examples*, Cambridge University Press, 1990.

[22] L. Corwin and F. P. Greenleaf, *Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity*, Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 681-748.

[23] L. Corwin and F. P. Greenleaf, *Spectral decomposition of invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces*, J. Func. Anal., **108** (1992), 374-426.

[24] J. Dixmier, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 113-121.

[25] J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[26] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[27] J. Dixmier et P. Malliavin, *Factorisation de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables*, Bull. Sci. Math., **102** (1978), 305-330.

[28] M. Duflo, *Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A **289** (1979), 135-137.

[29] M. Duflo, *Opérateurs différentiels invariants et homologie des algèbres de Lie*, (l'appendice du cours à Tunis), 1983.

[30] M. Duflo, *Open problems in representation theory of Lie groups*, edited by T. Oshima, Katata in Japan 1986, 1-5.

[31] E. G. Effros, *Transformation groups and C*-algebras*, Ann. Math., **81** (1965), 38-55.

[32] J. M. G. Fell, *The dual space of C*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **94** (1960), 365-403.

[33] J. M. G. Fell, *A new proof that nilpotent groups are CCR*, Proc. Amer. Math. Soc., **107** (1962), 93-99.

[34] J. M. G. Fell, *Weak containment and induced representations of groups I; II*, Canad. J. Math., **14** (1962), 237-268; Trans. Amer. Math. Soc., **110** (1964), 424-447.

[35] H. Fujiwara, *On unitary representations of exponential groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **21** (1974), 465-471.

[36] H. Fujiwara, *On holomorphically induced representations of exponential groups*, Japan. J. Math., **4** (1978), 109-170.

[37] H. Fujiwara, *Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, Pacific J. Math., **127** (1987), 329-351.

[38] H. Fujiwara et S. Yamagami, *Certaines représentations monomiales d'un groupe de Lie résoluble exponentiel*, Adv. St. Pure Math., **14** (1988), 153-190.

[39] H. Fujiwara, *Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, in The orbit method in representation theory* , Proceedings of a conference in Copenhagen, Ed. M. Duflo, N. V. Pedersen and M. Vergne, Birkhäser, Boston, 1990, 61-84.

[40] H. Fujiwara, *La formule de Plancherel pour les représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, in Representation theory of Lie groups and Lie algebras*, The Proceedings of Fuji-Kawaguchiko Conference, Ed. T. Kawazoe, T. Oshima and S. Sano, World Scientific, 1992, 140-150.

[41] H. Fujiwara, *Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels*, Invent. math., **104** (1991), 647-654.

[42] H. Fujiwara, *Sur la conjecture de Corwin-Greenleaf* J. Lie Theory, **7** (1997), 121-146.

[43] H. Fujiwara, *Analyse harmonique pour certaines représentations induites d'un groupe de Lie nilpotent*, J. Math. Soc. Japan, **50** (1998), 753-766.

[44] H. Fujiwara, *Correction à "Analyse harmonique pour certaines représentations induites d'un groupe de Lie nilpotent"* J. Math. Soc. Japan **52** (2000).

[45] H. Fujiwara, G. Lion and S.Mehdi, *On the commutativity of the algebra of invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001), 4203-4217.

[46] H. Fujiwara, G. Lion et B. Magneron, *Algèbres de fonctions associées aux représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, Prépub. Math. Univ. Paris 13, **2002-2**, 2002.

[47] H. Fujiwara, G. Lion, B. Magneron and S.Mehdi, *Commutativity criterion for certain algebras of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces*, Math. Ann., **327** (2003), 513-544.

[48] H. Fujiwara, *Certaines remarques sur l'algèbre des opéerateurs différentiels invariants pour la représentation monomiale d'un groupe de Lie nilpotent*, African Diaspora Journal of Math., Proc. 12^{th} sympo. TMS, (2004), 78-94.

[49] H. Fujiwara, *Une réciprocité de Frobenius*, à paraître.

[50] R. Godement, *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc., **63**, (1948), 1-84.

[51] F. P. Greenleaf, *Harmonic analysis on nilpotent homogeneous spaces*, Contemporary Math., **177** (1994), 1-26.

[52] G. Grélaud, *Désintégration des représentations induites des groupes de Lie résolubles exponentiels*, Thèse de 3^{e} cycle, Univ. de Poitiers, 1973.

[53] G. Grélaud, *Sur les représentations des groupes de Lie résolubles*, Thèse, Univ. Poitiers, 1984.

[54] G. Grélaud, *La formule de Plancherel pour les espaces homogènes des groupes de Heisenberg*, J. reine angew. Math., **398** (1989), 92-100.

[55] R. HOWE, *On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities*, Pacific J. Math., **73** (1977), 329-364.

[56] A. A. KIRILLOV, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, Uspekhi Math. Nauk., **17** (1962), 57-110.

[57] H. LEPTIN AND J. LUDWIG, *Unitary representation theory of exponential Lie groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[58] G. LION, *Indice de Maslov et représentation de Weil*, Pub. Math. Univ. Paris VII, **2** (1978), 45-79.

[59] G. LION AND M. VERGNE, *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[60] R. LIPSMAN, *Orbital parameters for induced and restricted representations*, Trans. Amer. Math. Soc., **313** (1989), 433-473.

[61] R. LIPSMAN, *Attributes and applications of the Corwin-Greenleaf multiplicity function*, Contemporary Math., **177** (1994), 27-46.

[62] R. LIPSMAN, *The Penney-Fujiwara Plancherel formula for homogeneous spaces*, The Proceedings of Fuji-Kawaguchiko Conference on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras, World Scientific, 1992, 120-139.

[63] G. W. MACKEY, *Induced representations of locally compact groups I; II*, Ann. Math., **55** (1952), 101-139 ; ibid, **58** (1953), 193-221.

[64] G. W. MACKEY, *The theory of unitary group representations*, Chicago Lectures in Math., 1976.

[65] N. PEDERSEN, *On the infinitesimal kernel of irreducible representations of nilpotent Lie groups*, Bull. Soc. Math. France, **112** (1984), 423-467.

[66] R. PENNEY, *Abstract Plancherel theorem and a Frobenius reciprocity theorem*, J. Func. Anal., **18** (1975), 177-190.

[67] N. S. POULSEN, *On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups*, J. Func. Anal., **9** (1972), 87-120.

[68] L. PUKANSZKY, *Leçon sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris 1967.

[69] M. RAÏS, *Solutions élémentaires des opérateurs différentiels biinvariants sur un groupe de Lie nilpotent*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A **273** (1971), 495-498.

[70] H. SPANIER, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966.

[71] O. TAKENOUCHI, *Sur la facteur-représentation des groupes de Lie de type (E)*, Math. J. Okayama Univ., **7** (1957), 151-161.

[72] F. TREVES, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New-York, 1967.

[73] C. TOROSSIAN, *Opérateurs différential invariants sur les espaces symétriques I. Méthodes des orbites*, J. Func. Anal., **117** (1993), 118-173.

[74] M. VERGNE, *Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **3** (1970), 353-384.