

## Introduction à la théorie classique des invariants

Gérard Schiffmann

► **To cite this version:**

Gérard Schiffmann. Introduction à la théorie classique des invariants. 3rd cycle. Monastir (Tunisie), 1996, pp.90. <cel-00372870>

**HAL Id: cel-00372870**

**<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00372870>**

Submitted on 2 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INTRODUCTION A LA THEORIE CLASSIQUE DES INVARIANTS

Gérard Schiffmann

## Introduction.

Prenons comme corps de base le corps des nombres complexes. On considère un groupe “classique”  $G$ . Le groupe  $G$  est donc soit un groupe linéaire, soit un groupe orthogonal, soit un groupe symplectique. Dans tous les cas il est défini comme un sous-groupe du groupe de tous les automorphismes d’un espace vectoriel  $V$  de dimension finie ; soit  $V^*$  le dual de  $V$ .

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers positifs ou nuls et

$$W = V^{\oplus p} \oplus V^{*\oplus q}$$

(pour les groupes orthogonaux et symplectiques, on peut prendre  $q = 0$  ). On considère l’algèbre des fonctions polynomiales sur  $W$ , invariantes sous l’action de  $G$ . Le premier théorème fondamental décrit un système de générateurs de cette algèbre et le deuxième théorème fondamental décrit les relations entre ces générateurs.

D’autre part, en décomposant l’action de  $G$  dans l’algèbre tensorielle  $T(V)$  de  $V$ , on obtient (plus ou moins) toutes les représentations irréductibles de dimension finie de  $G$ . Pour chaque groupe classique, le livre de Weyl [**W**] contient la classification de ces représentations ainsi que le calcul de leurs caractères. Il contient bien d’autres choses...

Malheureusement ce livre a la réputation, probablement justifiée, d’être très difficile à lire. Il est possible aujourd’hui de présenter les choses un peu plus simplement et c’est ce que nous avons essayer de faire. On a quand même suivi l’approche générale de Schur et de Weyl. Les représentations du groupe linéaire sont paramétrées par celles des groupes symétriques ; autrement dit la construction de ces représentations et les théorèmes fondamentaux sont traités simultanément. Il y a une autre approche, d’ailleurs connue de Weyl, qui consiste à construire les représentations des groupes linéaires, et plus généralement des groupes réductifs, à l’aide de la théorie des poids dominants et à appliquer ceci à la théorie des invariants. Ces idées sont introduites à la fin du chapitre 2. On se reportera à [**H**] ainsi qu’à [**F-H**] pour un développement systématique de ce point de vue.

Le premier chapitre est purement combinatoire. Après avoir construit les représentations du groupe symétrique, nous avons emprunté à I.G. Macdonald, [**Mac**] sa présentation de la théorie des fonctions symétriques ainsi que le calcul des caractères du groupe symétrique.

Le deuxième chapitre traite le cas du groupe linéaire. Nous avons donné en détail

2

la construction des représentations, et la théorie des poids dominants. Comme l'a montré R.Howe dans [H] il est possible d'obtenir très simplement les deux théorèmes fondamentaux en raisonnant directement sur les vecteurs dominants (une remarque clé est que les représentations qui interviennent sont de multiplicité 1). Nous présentons à la fin du chapitre sa démonstration des deux théorèmes fondamentaux.

Le troisième chapitre est consacré aux groupes orthogonaux et symplectiques. Nous avons simplement démontré les deux théorèmes fondamentaux. Pour le premier théorème nous avons utilisé la méthode de [A-B-P] et, pour le deuxième, nous avons suivi [H]. A ce stade il aurait été facile de construire les représentations et de calculer leurs caractères

Enfin en appendice on a rassemblé, les quelques résultats de théorie générale des représentations dont nous avons besoin.

Ce texte est une simple introduction à la théorie et n'a pas la prétention d'apporter du neuf. Bien au contraire nous avons puisé sans mesure dans [Mac] et dans [H]. Le lecteur voulant aller plus loin pourra, outre ces deux références, faire son profit de [F-H]. Nous nous sommes limités à la caractéristique 0. Les références [C-P] et [P] traitent le cas général.

## Chapitre 1 : REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SYMÉTRIQUE

Les deux premiers § de ce chapitre présentent la classification des représentations, complexes, irréductibles du groupe symétrique, à l'aide des tableaux de Young. Ceci utilise les résultats élémentaires sur les représentations induites.

La seconde partie explicite le calcul des caractères du groupe symétrique. La méthode suivie est celle de Frobenius. L'exposé qu'en donne H.Weyl n'est guère facile à suivre, aussi avons nous choisi de suivre I.G.Macdonald, pratiquement sans modification [Mac]. Notons quand même que sur le fond tout ceci remonte à Frobenius et à Schur, que les démonstrations "modernes" ne diffèrent que dans leur forme de celles qu'on trouve dans leurs articles. Il y a une autre approche possible, qu'on peut sans risque attribuer à H.Weyl qui consiste à étudier en premier les représentations (de dimension finie) de  $GL_n$ , et ensuite, via les théorèmes de la théorie des invariants d'en déduire les résultats sur le groupe symétrique. Ceci permet en particulier d'éviter la partie la plus technique du calcul de Frobenius... à condition de connaître un minimum sur la théorie des représentations de dimension finie des algèbres et groupes de Lie semi-simples.

**§ 1 Le groupe symétrique.** — Soit  $n$  un entier strictement positif. Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  est le groupe des permutations de l'ensemble  $\Delta_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Le support de  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est l'ensemble des  $i$  tels que  $\sigma(i) \neq i$ . La seule permutation de support vide est l'identité. Une transposition est une permutation dont le support a exactement deux éléments. Une permutation circulaire ou cycle est une permutation dont le support est non vide et peut s'écrire

$$\text{supp}(\sigma) = \{i_1, \dots, i_\ell\}$$

avec

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{\ell-1}) = i_\ell, \sigma(i_\ell) = i_1$$

### Proposition 1-1

1) Toute permutation se décompose de manière unique en un produit de permutations circulaires dont les supports sont disjoints.

2) Toute permutation se décompose en un produit de transpositions.

C'est élémentaire et bien connu. Dans la suite on parle de la décomposition en produit de cycles d'une permutation il s'agira toujours de la décomposition canonique ci-dessus. Soit  $\sigma$  une permutation et soit  $H$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$

engendré par  $\sigma$ . Le groupe  $H$  opère dans  $\Delta_n$  ce qui fournit une partition de  $\Delta_n$  suivant les orbites de  $H$ . Les orbites ayant plus d'un élément correspondent à la décomposition en cycles de  $\sigma$ , les orbites réduites à un élément sont les points fixes de  $\sigma$ . Ordonnons les cardinaux de ces orbites :

$$\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_r \geq 1$$

On a  $n = \sum \ell_j$  donc on a obtenu une partition de  $n$ .

**Proposition 1-2.** — *Pour que deux permutations soient conjuguées par automorphismes intérieurs, il faut et il suffit que leurs décompositions en produit de cycles donnent la même partition.*

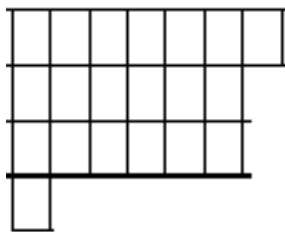
C'est bien connu et d'ailleurs évident.

Les classes de conjugaison par automorphismes intérieurs dans  $\mathfrak{S}_n$  sont donc canoniquement en bijection avec les partitions de  $n$ . Dans la suite nous adopterons pour les partitions les conventions de I.G. Macdonald. Une partition  $\lambda$  est donc une suite décroissante d'entiers positifs ou nuls

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots$$

La suite peut-être infinie mais pour  $r$  assez grand  $\lambda_r = 0$ . On ne distingue pas entre deux suites qui ne diffèrent que par un nombre plus ou moins grand de zéros. La longueur  $\ell(\lambda)$  de la partition est le nombre de  $\lambda_i$  non nuls et son poids  $|\lambda|$  est la somme des  $\lambda_i$ . Une partition de  $n$  est une partition de poids  $n$ . On note  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des partitions de  $n$  et  $\mathcal{P}$  l'ensemble de toutes les partitions.

A toute partition  $\lambda$  on associe un diagramme de Ferrers. C'est l'ensemble de tous les couples  $(i, j)$  avec  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$  et  $1 \leq j \leq \lambda_i$ . Chacun de ces couples est en fait représenté par une case. La première ligne de cases contient  $\lambda_1$  cases, la deuxième  $\lambda_2$  ... Par exemple (avec  $n = 20$ )



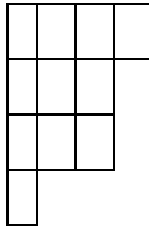
La terminologie “diagramme de Ferrers” est celle de l'orthodoxie combinatoire. On les appelle aussi souvent “diagramme de Young” mais il faut alors bien distinguer d'avec les “tableaux de Young” définis plus loin.

Enfin rappelons que toute permutation  $\sigma$  a une signature  $\varepsilon(\sigma)$  qui vaut  $\pm 1$  et qui est définie par exemple par

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

La signature est un homomorphisme de  $\mathfrak{S}_n$  dans le groupe multiplicatif  $\{-1, +1\}$ .

§ 2 **Construction des représentations.** — A toute partition de  $n \geq 1$  on vient d'associer un diagramme de Ferrers. Ce diagramme a  $n$  cases. Soit  $\tau$  une permutation de  $\Delta_n$ . On remplit les cases du diagramme en commençant par la première ligne, de gauche à droite, puis la deuxième ligne, toujours de gauche à droite, ... et en inscrivant les entiers de 1 à  $n$  pris dans l'ordre  $\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)$ . Par exemple si on part du diagramme



associé à la partition  $4 \geq 3 \geq 3 \geq 1$  de  $n = 11$  et si on prend

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 10 & 3 & 1 & 6 & 11 & 8 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

on obtient

4	7	10	3
1	6	11	
8	9	2	
5			

Un couple formé d'une partition d'un entier  $n$  et d'une permutation de  $\Delta_n$  est appelé un tableau de Young; pratiquement un tableau de Young est un "tableau" analogue à celui qu'on vient de construire. Pour un diagramme donné, il y a donc  $n!$  tableaux de Young.

Soit  $T$  est un tableau de Young, pour un entier  $n$  donné. Tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$  apparaît exactement une fois dans  $T$ . On notera  $\ell_T(i)$  le numéro de la ligne où se trouve  $i$  (on compte à partir du haut) et  $c_T(i)$  le numéro de la colonne (on compte à partir de la gauche). Dans l'exemple ci-dessus on a donc  $\ell_T(11) = 2$  et  $c_T(11) = 3$ . Notons que ceci fournit deux partitions de  $\Delta_n$ , suivant les lignes ou suivant les colonnes. On note  $P(T)$  le sous-groupe des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  qui laissent invariante la fonction  $\ell_T$ . Autrement dit  $\ell_T(\sigma(i)) = \ell_T(i)$ ; la permutation  $\sigma$  ne mélange pas les lignes. De même on note  $Q(T)$  le sous-groupe des permutations qui laissent  $c_T$  invariante c'est-à-dire qui ne mélangent pas les colonnes.

le groupe  $\mathfrak{S}_n$  opère sur les tableaux de Young, à  $n$  cases, de la manière suivante. Si  $T$  est un tableau à  $n$  cases et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , le tableau  $\sigma(T)$  est celui obtenu en remplaçant dans  $T$  l'entier  $i$  par l'entier  $\sigma(i)$ .

**Lemme 2-1.** — *On a*

$$P(\sigma(T)) = \sigma P(T)\sigma^{-1}, \quad Q(\sigma(T)) = \sigma Q(T)\sigma^{-1}$$

En effet si  $p \in P(T)$ , alors pour tout  $i$  on a  $\ell_T(i) = \ell_T(p(i))$ . D'autre part, par définition de  $\sigma(T)$ , on a, aussi pour tout  $i$ , que  $\ell_{\sigma(T)}(\sigma(i)) = \ell_T(i)$ . En combinant ces deux relations on obtient

$$\ell_{\sigma(T)}(\sigma p(i)) = \ell_{\sigma(T)}(\sigma(i))$$

et en remplaçant  $i$  par  $\sigma^{-1}(i)$  on voit que  $\sigma p \sigma^{-1} \in P(\sigma(T))$ . On a donc  $\sigma P(T)\sigma^{-1} \subset P(\sigma(T))$ . Ceci reste vrai si on remplace  $T$  par  $\sigma^{-1}(T)$  donc  $\sigma P(\sigma^{-1}(T))\sigma^{-1} = P(T)$  et on peut encore changer  $\sigma$  en  $\sigma^{-1}$  ce qui donne  $\sigma P(T)\sigma^{-1} \supset P(\sigma(T))$  d'où l'égalité. La deuxième partie s'établit de même.

**Lemme 2-2.** — *L'intersection des sous-groupes  $P(T)$  et  $Q(T)$  est réduite à l'élément neutre. Une permutation  $\sigma$  se décompose d'au plus une manière sous la forme  $\sigma = pq$  avec  $p \in P(T)$  et  $q \in Q(T)$ . Une telle décomposition existe si et seulement si pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$  et  $\ell_T(i) = \ell_T(j)$  on a  $c_{\sigma(T)}(i) \neq c_{\sigma(T)}(j)$*

En effet si une permutation  $\sigma \in P(T) \cap Q(T)$  alors pour tout  $i$  on a  $\ell_T(i) = \ell_T(\sigma(i))$  et  $c_T(i) = c_T(\sigma(i))$  donc  $i$  et  $\sigma(i)$  sont dans la même case de  $T$  ce qui signifie qu'ils sont égaux.

Une permutation  $\sigma$  quelconque s'écrit donc d'au plus une manière sous la forme  $pq$ . Supposons que  $\sigma = pq$  donc  $\sigma^{-1} = q^{-1}p^{-1}$ . Soient  $i$  et  $j$  deux entiers distincts figurant sur la même ligne de  $T$ . Les entiers  $p^{-1}(i)$  et  $p^{-1}(j)$  sont distincts et sur la même ligne de  $T$  que  $i$  et  $j$ . Ils appartiennent donc à des colonnes différentes de  $T$ . Mais  $q^{-1}$  conserve les colonnes de  $T$  donc  $\sigma^{-1}(i)$  et  $\sigma^{-1}(j)$  apparaissent sur des colonnes distinctes de  $T$ . En sens inverse supposons la condition de l'énoncé satisfaite. Notons  $T[a, b]$  l'entier  $i$  tel que  $\ell_T(i) = a$  et  $c_T(b) = b$  autrement dit celui qui figure dans la case de coordonnées  $(a, b)$ . Définissons la permutation  $q$  par

$$q(j) = T[\ell_T(\sigma(j)), c_T(j)]$$

Si  $j$  et  $j'$  appartiennent à la même colonne de  $T$ , alors  $\sigma(j)$  et  $\sigma(j')$  n'appartiennent pas à la même ligne de sorte que  $q$  est bien une permutation; comme elle conserve les colonnes de  $T$  on a  $q \in Q(T)$ . Par définition  $q(j)$  et  $\sigma(j)$  appartiennent à la même ligne de  $T$  donc  $p = q^{-1}\sigma \in P(T)$ .

On utilisera le Lemme précédent comme suit : si  $\sigma \notin P(T)Q(T)$  alors il existe  $i$  et  $j$  appartenant à la même ligne de  $T$ , distincts et appartenant à la même colonne de  $\sigma(T)$ . Soit alors  $\tau$  la transposition qui échange  $i$  et  $j$ . On a  $\tau \in P(T) \cap Q(\sigma(T)) = P(T) \cap \sigma Q(T)\sigma^{-1}$ .

On peut maintenant commencer la construction des représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$ . On fixe un tableau de Young  $T$ . Soit  $1_{P(T)}$  la représentation triviale de  $P(T)$  et  $\varepsilon_{Q(T)}$  la restriction à  $Q(T)$  de la signature : c'est une représentation de dimension 1.

**Proposition 2-3.** — *On a*

$$\dim \left( \text{Hom}_{\mathfrak{S}_n} \left( \text{Ind}_{P(T)}^{\mathfrak{S}_n} (1_{P(T)}), \text{Ind}_{Q(T)}^{\mathfrak{S}_n} (\varepsilon_{Q(T)}) \right) \right) = 1$$

En effet d'après le Théorème 4-4 de l'Appendice, on doit pour chaque double classe  $P(T)\sigma Q(T)$  considérer le sous-groupe  $P(T)\cap\sigma Q(T)\sigma^{-1}$ . Dans notre cas les deux représentations de ce sous-groupe qui interviennent sont la représentation triviale et la restriction de la signature. Pour qu'il existe un entrelacement il faut et il suffit que tout élément du sous-groupe soit de signature 1. Or on vient de voir que si la double classe n'est pas  $P(T)Q(T)$ , le sous-groupe contient une transposition qui est de signature  $-1$ . La seule double classe qui contribue est donc  $P(T)Q(T)$ , le sous-groupe est alors réduit à l'élément neutre et l'espace des opérateurs d'entrelacement est bien de dimension 1.

Il existe donc une unique classe  $\gamma = \gamma(T)$  de représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  qui intervient à la fois dans la décomposition de  $\text{Ind}_{P(T)}^{\mathfrak{S}_n} (1_{P(T)})$  et dans celle de  $\text{Ind}_{Q(T)}^{\mathfrak{S}_n} (\varepsilon_{Q(T)})$  et de plus elle intervient dans chacune d'entre elles avec la multiplicité 1.

On peut préciser. Rappelons qu'on note  $\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]$  l'algèbre (de convolution) des applications de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $\mathbf{C}$ . Pour toute permutation  $a$ , la mesure  $\delta_a$ , masse +1 au point  $a$  s'identifie à la fonction  $e_a$  qui vaut  $n!$  en  $a$  et 0 ailleurs.

L'opérateur d'entrelacement  $U$

$$U : \quad \text{Ind}_{P(T)}^{\mathfrak{S}_n} (1_{P(T)}) \rightarrow \text{Ind}_{Q(T)}^{\mathfrak{S}_n} (\varepsilon_{Q(T)})$$

est unique à la multiplication par un scalaire près. On l'obtient comme suit. Soit  $L$  la fonction sur  $G$  définie par

$$L(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin P(T)Q(T) \\ \varepsilon(q) & \text{si } x = pq \end{cases}$$

Toujours à un facteur constant près,  $L$  est l'unique fonction qui est invariante à gauche par  $P(T)$  et qui se transforme à droite suivant le caractère signature de  $Q(T)$ . Pour toute classe à gauche  $P(T)s$  soit  $\varphi_s$  la fonction qui vaut 1 sur cette classe et 0 ailleurs. On a

$$U(\varphi_s)(\sigma) = L(s\sigma^{-1})$$

Pour la suite il est préférable d'introduire la fonction

$$e_T = \sum_{p,q} \varepsilon(q) e_{qp}$$

Avec un peu de soin on vérifie que

$$U(\varphi) = e_T * \varphi$$



La fonction  $e_T$  est cette fois invariante à droite par  $P(T)$  et se transforme à gauche suivant le caractère signature de  $Q(T)$ . Notons que

$$e_T = \left( \sum_q \varepsilon(q) e_q \right) * \left( \sum_p e_p \right)$$

et aussi que

$$\left( \sum_p e_p \right) * \left( \sum_p e_p \right) = \#(P(T)) \left( \sum_p e_p \right)$$

La fonction  $U(\varphi)$  est définie pour toute  $\varphi$ , invariante à gauche par  $P(T)$  ou pas. Ainsi prolongé, et à des facteurs constants près, l'opérateur  $U$  s'obtient en composant la projection sur le sous-espace des fonctions invariantes à gauche par  $P(T)$  avec la projection sur le sous-espace des fonctions qui se transforment suivant le caractère signature de  $Q(T)$ . L'image de  $U$  est un sous-espace invariant minimal pour  $\mathfrak{S}_n$  opérant par translations à droite et ceci fournit un modèle pour  $\gamma(T)$ .

On a  $e_T * e_T = \mu e_T$  car ce produit de convolution se transforme comme  $e_T$  donc doit lui être proportionnel. En considérant  $U$  comme défini sur  $\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]$  cela signifie que  $U^2 = \mu U$ . En particulier la trace de  $U$  est égale au produit de son rang par  $\mu$  donc  $\text{Tr}(U) = \mu \dim \gamma(T)$ . D'autre part, en utilisant la base  $e_b$ ,  $b \in \mathfrak{S}_n$  de  $\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]$ , on voit immédiatement que l'opérateur de convolution par  $e_T$  a pour trace  $e_T(1) = n!$ . On a donc la :

**Proposition 2-4.** — *On a*

$$e_T * e_T = \frac{n!}{\dim \gamma(T)} e_T$$

Classiquement on dit que  $e_T$  est un symétriseur de Young; cette terminologie sera justifiée dans un chapitre ultérieur. Il résulte du calcul précédent que  $e_T/\mu$  est un idempotent; c'est donc un idempotent minimal.

Il nous faut maintenant faire varier le tableau de Young  $T$ .

**Théorème 2-5.** — *Etant donnés deux tableaux de Young  $T$  et  $T'$ , ayant chacun  $n$  cases, pour que  $\gamma(T) = \gamma(T')$ , il faut et il suffit que  $T$  et  $T'$  aient le même diagramme de Ferrers. De plus toute classe de représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  est associée à un (unique) diagramme de Ferrers.*

Pour la deuxième partie, il suffit de noter que  $\widehat{\mathfrak{S}}_n$  a autant d'éléments qu'il y a de classes de conjugaison par automorphismes intérieurs dans  $\mathfrak{S}_n$ . Or ces classes sont paramétrées par les partitions de  $n$  et il en est de même des diagrammes de Ferrers. Il suffit donc de montrer que l'application est injective ce qui est conséquence de la première partie du théorème. Pour établir cette dernière, on a besoin d'un nouveau Lemme.

Soient

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \lambda_r \geq \dots, \quad \lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots$$

deux partitions de même poids  $n$ . On note  $\lambda \geq \lambda'$  si

$$\lambda_1 \geq \lambda'_1, \lambda_1 + \lambda_2 \geq \lambda'_1 + \lambda'_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3, \dots$$

C'est une relation d'ordre mais elle n'est pas totale. Par extension on note  $T \geq T'$  pour des diagrammes de Ferrers ou des tableaux de Young associés aux partitions  $\lambda$  et  $\lambda'$ . Dans la terminologie classique on dit que  $\lambda$  domine  $\lambda'$ .

Pour simplifier on dit désormais qu'un tableau de Young est de forme  $\lambda$  si cette dernière est la partition correspondant au diagramme de Ferrers sous-jacent au tableau.

**Lemme 2-6.** — *Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions de même poids  $n$ . Considérons les trois conditions suivantes :*

1) *La partition  $\mu$  domine la partition  $\lambda$ .*

2) *Il existe un tableau de Young  $T$  de forme  $\lambda$  et un tableau de Young  $U$  de forme  $\mu$ , tels que si  $i$  et  $j$  sont deux entiers distincts appartenant à la même ligne de  $T$ , alors ils appartiennent à des colonnes différentes de  $U$ .*

3) *Il existe un tableau de Young  $T$  de forme  $\lambda$  et un tableau de Young  $U$  de forme  $\mu$ , tels que le groupe  $P(T) \cap Q(U)$  soit réduit à l'élément neutre.*

*La condition 2) implique la condition 3) qui implique elle-même la condition 1)*

2) implique 3) En effet prenons  $T$  et  $U$  comme dans 2). Si une permutation  $\sigma \neq Id$  appartient à  $P(T) \cap Q(U)$  alors chacun de ses cycles appartient aussi à cette intersection. Soit  $c$  l'un de ces cycles ; on peut le décomposer en un produit de transpositions entre éléments de son support. Chacune de ces transpositions appartient à  $P(T) \cap Q(U)$ . Soit  $\tau$  l'une d'entre elles qui échange  $i$  et  $j$ . Les éléments  $i$  et  $j$  appartiennent à la même colonne de  $U$  et à la même ligne de  $T$  ce qui est contraire à 2). Par suite  $P(T) \cap Q(T)$  est réduit à l'élément neutre.

3) implique 2). En effet si  $P(T) \cap Q(U)$  est réduit à l'élément neutre et si  $i$  et  $j$  sont distincts et appartiennent à la même colonne de  $T$ , alors la transposition  $\tau$  qui échange  $i$  et  $j$  appartient à  $P(T)$  donc n'appartient pas à  $Q(T)$  ce qui signifie que  $i$  et  $j$  n'appartiennent pas à la même colonne de  $U$ .

Enfin prouvons que 2) implique 1). Quitte à appliquer une permutation convenable, on peut supposer que dans le tableau  $T$  les entiers apparaissent dans l'ordre naturel en commençant comme d'habitude en haut et à gauche et on peut aussi supposer que dans le tableau  $U$ , les colonnes sont strictement décroissantes, du haut vers le bas. Considérons les entiers contenus les  $i$  premières lignes de  $T$  ; ce sont les entiers de 1 à  $\lambda_1 + \dots + \lambda_i$ . Examinons leurs emplacements dans  $U$ . Dans chaque colonne, on les trouve à partir du haut sans qu'aucune case ne soit sautée (sinon la case sautée contiendrait un entier strictement plus grand). D'autre part il y en a au

plus  $i$  par colonne. Finalement on a “casé” les  $\lambda_1 + \dots + \lambda_i$  premiers entiers dans les  $i$  premières lignes de  $U$  ce qui impose  $\mu_1 + \dots + \mu_i \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_i$ .

La démonstration a donné un peu plus. Si un groupe de la forme  $P(T) \cap Q(U)$  est un sous-groupe du groupe alterné (permutations paires) alors il est réduit à l’élément neutre; dans le cas contraire il contient des transpositions.

Revenons à la démonstration du Théorème. Supposons qu’on ait deux tableaux  $T$  et  $T'$  avec le même diagramme sous-jacent. Il existe donc une permutation  $\sigma$  telle que  $\sigma(T) = T'$ . D’après le Lemme 2-1, on a  $P(T') = \sigma P(T) \sigma^{-1}$  et de même pour  $Q(T')$ . Il en résulte que

$$e_{T'} = \varepsilon_\sigma * e_T * \varepsilon_{\sigma^{-1}}$$

Si on pose  $S(\varphi) = \varepsilon_\sigma * \varphi$ , alors

$$e_{T'} * S(\varphi) = S(e_T * \varphi)$$

Par suite  $S$  est une application linéaire de  $e_T * \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]$  dans  $e_{T'} * \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]$ . Elle est inversible, son inverse étant la convolution à gauche par  $\varepsilon_{\sigma^{-1}}$ . De plus  $S$  commute aux translations à droite; on a ainsi construit une équivalence entre un modèle de  $\gamma(T)$  et un modèle de  $\gamma(T')$ .

L’implication en sens contraire est plus délicate. En fait on va faire mieux.

**Proposition 2-7.** — *Si  $T$  ne domine pas  $T'$  alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n} \left( \mathrm{Ind}_{P(T')}^{\mathfrak{S}_n} (1_{P(T')}), \mathrm{Ind}_{Q(T)}^{\mathfrak{S}_n} (\varepsilon_{Q(T)}) \right) = (0)$$

Démontrons la Proposition. Considérons une double classe  $P(T')\sigma Q(T)$ . Elle fournit un entrelacement si et seulement si le sous-groupe  $P(T') \cap \sigma Q(T) \sigma^{-1} = P(T') \cap Q(\sigma(T))$  est contenu dans le groupe alterné donc est réduit à l’élément neutre. D’après le Lemme ceci implique que  $\sigma(T)$  domine  $T'$  donc puisque la relation de domination ne dépend que de la forme du tableau on aurait  $T \geq T'$ .

On peut enfin finir la démonstration du Théorème. Si  $\gamma(T)$  et  $\gamma(T')$  sont égales, alors, d’après la Proposition précédente on a  $T \geq T'$  et aussi  $T' \geq T$  donc les tableaux ont même forme.

Comme la classe  $\gamma(T)$  ne dépend que de la partition  $\lambda$  correspondant à la forme de  $T$  c’est-à-dire au diagramme de Ferrers, on la note désormais  $\gamma(\lambda)$ .

**Corollaire 2-8.** — *Soit  $T$  un tableau de forme  $\lambda$ .*

$$\mathrm{Ind}_{P(T)}^{\mathfrak{S}_n} (1_{P(T)}) = \gamma(\lambda) \bigoplus_{\mu > \lambda} m_{\mu, \lambda} \gamma(\mu)$$

Les  $m_{\mu, \lambda}$  sont les multiplicités; ce sont des entiers positifs ou nuls.

L’étape suivante est de calculer les caractères de ces représentations  $\gamma(\lambda)$ . C’est un problème combinatoire non trivial et, avant de l’aborder, on va au moins partiellement, présenter la théorie des fonctions symétriques.

§ 3 **Les fonctions symétriques.** — La référence de base est le livre de I.G.Macdonald [Mac]. En fait ce § est entièrement extrait du chapitre 1 de ce livre auquel on renvoie pour les détails.

Soient  $n \geq 1$  entier et  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$ . On considère l'anneau  $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ . Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  opère dans cet anneau : on pose  $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$  pour toute permutation  $\sigma$ . Le sous-anneau des polynômes invariants est noté

$$\Lambda_n = \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

C'est un anneau gradué ; on note  $\Lambda_n^k$  le sous-espace des polynômes invariants homogènes de degré  $k$ . Comme il est usuel on parlera de polynômes symétriques en les  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ .

Le jeu consiste à introduire une demi-douzaine de bases plus ou moins classiques de l'espace des polynômes symétriques, puis à déterminer les matrices de changements de base.

La base la plus naturelle est celle obtenue en symétrisant les monômes. Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  un multientier ; posons  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$  une partition de longueur au plus  $n$ . On pose

$$m_\lambda = \sum_{\mu} x^\mu$$

où la sommation est étendue à l'ensemble des multientiers  $\mu$  déduit de  $\lambda$  par une permutation des coordonnées. Par exemple si  $n = 3$  et  $\lambda = (2, 1, 0, 0, \dots)$  alors

$$m_\lambda = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$$

Si  $n = 3$  et  $\lambda = (1, 1, 1, 0, \dots)$  alors

$$m_\lambda = x_1 x_2 x_3$$

( et non pas 6 fois le triple produit... ). Comme le note Macdonald, le nombre de variables a moins d'importance qu'il n'y paraît. Si on considère les polynômes symétriques homogènes de degré 2, alors si  $n = 1$ , la dimension est 1 avec comme base  $x_1^2$  mais si  $n \geq 2$  alors la dimension est 2 avec comme base  $(\sum_{i < j} x_i x_j, \sum x_i^2)$ . Autrement dit la dimension est stable pour  $n \geq 2$ .

D'une manière générale, pour  $k$  quelconque et  $m \geq n$ , on a une application linéaire surjective

$$\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \rightarrow \Lambda_n^k$$

obtenue en spécialisant  $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$ . Si la partition  $\lambda$  est de longueur au plus  $n$ , alors le polynôme  $m_\lambda$  construit avec  $m$  variables se spécialise en le

polynôme  $m_\lambda$  construit avec  $n$  variables et si la longueur de  $\lambda$  vérifie  $n < \ell(\lambda) \leq m$  alors  $m_\lambda$  donne 0. Comme on regarde des polynômes homogènes de degré  $k$ , on doit prendre  $\lambda$  de poids  $|\lambda| = k$  donc de longueur au plus  $k$ . La conclusion est que pour  $n \geq k$ , l'application  $\rho_{m,n}^k$  est bijective et on peut considérer que  $\Lambda_n^k$  ne dépend pas de  $n$ . Formellement on appelle  $\Lambda^k$  la limite projective du système  $(\Lambda_n^k, \rho_{m,n}^k)$ . On a donc des applications linéaires

$$\rho_n^k : \Lambda^k \rightarrow \Lambda_n^k$$

qui sont bijectives pour  $n \geq k$ . Ceci conduit à introduire

$$\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k, \quad \rho_n = \bigoplus_{k \geq 0} \rho_n^k$$

La structure d'anneau gradué de  $\Lambda_n$  donne une structure d'anneau gradué sur  $\Lambda$ . Ce dernier est l'anneau des fonctions symétriques, à coefficients entiers. Bien entendu on peut remplacer  $\mathbf{Z}$  par  $\mathbf{Q}$  ou  $\mathbf{C}$ ; on note alors  $\Lambda_{\mathbf{Q}}$  ou  $\Lambda_{\mathbf{C}}$  l'anneau des fonctions symétriques.

Les fonctions symétriques élémentaires  $e_r$  sont définies par

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$$

Ce sont des cas particuliers des  $m_\lambda$ , obtenus en prenant  $\lambda = (1, 1, \dots, 1, 0 \dots)$ . On doit prendre  $n \geq r$  mais ce souci disparaît si on se place dans  $\Lambda$ . Avec  $n$  variables, on a

$$E_n(T) = \sum_0^n e_r T^r = \prod_1^n (1 + x_i T)$$

et à la limite

$$E(T) = \sum_0^{+\infty} e_r T^r = \prod_1^{+\infty} (1 + x_i T)$$

Pour toute partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , on pose

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$$

Si on veut travailler avec  $n$  variables, on considère les partitions telles que  $\lambda_1 \leq n$ . Soit  $\lambda$  une partition quelconque et considérons son diagramme de Ferrers. On appelle partition conjugué de  $\lambda$  et on note  $\lambda'$  la partition obtenue en permutant les lignes et les colonnes du diagramme. Autrement dit  $\lambda'_1$  est le nombre de cases de la première colonne du diagramme de  $\lambda$ , puis  $\lambda'_2$  le nombre de cases de la deuxième colonne...

**Proposition 3-1.** — *Il existe des entiers  $a_{\lambda,\mu} \geq 0$  tels que*

$$e_{\lambda'} = m_{\lambda} + \sum_{\mu < \lambda} m_{\mu}$$

La démonstration est laissée en exercice.

La formule précédente donne donc la décomposition des  $e_{\lambda}$  suivant la base de  $m_{\lambda}$ . Relativement à la relation de dominance, la matrice qui intervient est triangulaire avec des 1 dans la diagonale. C'est une situation typique dont on verra d'autres exemples.

Bien que l'ordre ne soit pas total, le fait que la matrice soit triangulaire avec des 1 dans la diagonale implique qu'elle est inversible. Une manière simple de le voir est de procéder par récurrence sur le poids  $|\lambda|$  d'une partition en notant que si  $\mu < \lambda$  alors  $|\mu| < |\lambda|$ . On prouve par récurrence sur le poids que

$$m_{\lambda'} = e_{\lambda} + \sum_{\mu > \lambda} b_{\lambda,\mu} e_{\mu}, \quad b_{\lambda,\mu} \in \mathbf{Z}$$

Comme les  $e_{\lambda}$  sont les monomes en les  $e_r$  on obtient le résultat bien connu suivant :

**Corollaire 3-2.** — *Les fonctions symétriques élémentaires sont algébriquement indépendantes sur  $\mathbf{Z}$  et*

$$\Lambda = \mathbf{Z}[e_1, e_2, \dots]$$

dans cet énoncé on peut remplacer  $\mathbf{Z}$  par  $\mathbf{Q}$  ou  $\mathbf{C}$ .

La fonction symétrique  $e_r$  est homogène de degré  $r$ . Il y a un autre choix possible les fonctions "symétriques complètes"

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_{\lambda}$$

par exemple

$$h_0 = 1, \quad h_1 = \sum x_i, \quad h_2 = \sum x_i^2 + \sum_{i < j} x_i x_j$$

Il n'est pas difficile de passer des  $e_r$  aux  $h_r$ . En effet la fonction génératrice des  $h_r$  est

$$H(T) = \sum_0^{+\infty} h_r T^r = \prod_1^{+\infty} (1 - x_i T)^{-1}$$

On a donc  $H(T)E(-T) = 1$  ce qui en développant fournit la relation

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r}, \quad n \geq 1$$

Soit  $\omega$  l'homomorphisme d'anneaux gradués de  $\Lambda$  dans lui-même défini par  $\omega(e_r) = h_r$ . La relation de récurrence ci-dessus étant symétrique en les  $e$  et les  $h$ , si on lui applique  $\omega$ , on conclut que  $\omega(h_r) = e_r$ . D'où

**Proposition 3-3.** — *L'homomorphisme  $\omega$  est un automorphisme involutif de  $\Lambda$ . En particulier les  $h_r$  sont algébriquement indépendants et  $\Lambda = \mathbf{Z}[h_1, h_2, \dots]$*

Soit, pour  $r \geq 1$

$$p_r = \sum x_i^r$$

Définissons la série génératrice par

$$P(T) = \sum_{r \geq 1} p_r T^{r-1}$$

On vérifie de suite que

$$P(T) = \frac{H'(T)}{H(T)} = \frac{E'(-T)}{E(-T)}$$

ce qui donne

$$h_n = \frac{1}{n} \sum_1^n p_r h_{n-r}$$

$$e_n = \frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}$$

Ce sont les formules de Newton qui permettent d'exprimer les sommes de puissances en fonction des fonctions symétriques élémentaires et inversement. De tout ceci on conclut :

**Proposition 3-4.** — *Les  $p_r$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathbf{Q}$  et*

$$\Lambda_{\mathbf{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}[p_1, p_2, \dots]$$

*De plus*

$$\omega(p_n) = (-1)^{n-1} p_n$$

Comme prévu, pour toute partition  $\lambda$ , on pose

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$$

en se limitant aux  $\lambda_i > 0$  ou en convenant que  $p_0 = 1$ . Les  $p_\lambda$  forment une base de  $\Lambda_{\mathbf{Q}}$ .

Enfin pour la suite les fonctions symétriques les plus importantes sont les fonctions de Schur. La signature d'une permutation  $\sigma$  est notée  $\varepsilon(\sigma)$ .

Plaçons nous dans  $\Lambda_n$ . L'application

$$f \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sigma(f)$$

est un projecteur sur le sous-espace des fonctions antisymétriques. En particulier, pour tout multientier  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , posons

$$a_\alpha = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sigma(x^\alpha)$$

Si les  $\alpha_i$  ne sont pas tous distincts on obtient 0 de sorte qu'on peut supposer que  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ . Comme la suite le prouve abondamment, il convient de poser  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$  puis  $\alpha = \lambda + \delta$  où  $\lambda$  est une partition de longueur au plus  $n$ . On a ainsi

$$a_{\lambda+\delta} = \sum \varepsilon(\sigma) \sigma(x^{\lambda+\delta}) = \text{Det}(x_i^{\lambda_j+n-j})$$

Ce polynôme est, pour  $i < j$  divisible par  $x_i - x_j$  (utiliser l'anti-invariance par la transposition qui échange  $i$  et  $j$ ), donc, ces polynômes étant premiers entre eux, par le produit

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

mais ce dernier est un "déterminant de Vandermonde"

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j) = \text{Det}(x_i^j) = a_\delta$$

Il résulte des considérations précédentes que tout polynôme antisymétrique s'obtient en multipliant par  $a_\delta$  un polynôme symétrique. Or les polynômes  $a_{\lambda+\delta}$ , avec  $\lambda$  une partition de longueur au plus  $n$  forment une base de l'espace des polynômes antisymétriques donc les polynômes

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

forment une base de  $\Lambda_n$ . Ce sont ces polynômes  $s_\lambda$  qu'on appelle polynômes de Schur.

Le passage à la limite inductive est sans problèmes : si  $\ell(\lambda) \leq n$ , si on construit  $s_\lambda$  avec  $m \geq n$  variables et si on spécialise sur 0 les variables  $x_{n+1}, \dots, x_m$  alors on



obtient bien le  $s_\lambda$  construit avec  $n$  variables. L'ensemble des  $s_\lambda$  pour toutes les partitions est donc une base, sur  $\mathbf{Z}$ , de  $\Lambda$ .

On montrera au § suivant que

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$$

Si on pose  $f_\lambda = \omega(m_\lambda)$  on a finalement 6 bases de  $\Lambda$  (dont une sur  $\mathbf{Q}$ ), à savoir  $m, e, h, p, s, f$ , chacune indexée par les partitions. On doit donc calculer 30 matrices de changements de base! Ces calculs sont faits dans le livre de Macdonald. Ils ne sont d'ailleurs pas très compliqués. On y reviendra au § suivant.

Un point crucial et moins élémentaire est l'existence d'un produit scalaire raisonnable sur  $\Lambda$ . on a besoin d'un résultat préliminaire.

Donnons nous deux séries d'indéterminées  $x_1, x_2, \dots$  et  $y_1, y_2, \dots$ . On peut donc considérer  $m_\lambda(x), m_\lambda(y), \dots$

**Lemme 3-4.** — *on a*

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} &= \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) \\ &= \sum_{\lambda} h_\lambda(x) m_\lambda(y) \\ &= \sum_{\lambda} m_\lambda(x) h_\lambda(y) \\ &= \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y) \end{aligned}$$

Ces identités sont quelquefois appelées identités de Cauchy. Le nombre  $z_\lambda$  est le suivant. Pour tout entier  $r$  soit  $u_r$  le nombre de  $j$  tels que  $\lambda_j = r$ . Alors

$$z_\lambda = \prod r^{u_r} u_r!$$

La démonstration sera donnée au § suivant.

Il existe un unique forme bilinéaire  $\langle, \rangle$  sur  $\Lambda$  tel que

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$$

Elle est non dégénérée et symétrique. Si  $u$  et  $v$  sont deux éléments de  $\Lambda$  alors

$$\langle u, v \rangle = \sum_{\lambda} \langle u, h_\lambda \rangle \langle v, m_\lambda \rangle$$

Si  $(u_\lambda)$  et  $(v_\lambda)$  sont deux familles indexées par les partitions alors

$$\sum_{\lambda} u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \sum_{\lambda, \mu, \nu} \langle u_\lambda, m_\mu \rangle h_\mu(x) \langle v_\lambda, h_\nu \rangle m_\nu(y)$$

de sorte que

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}(x)v_{\lambda}(y) = \sum_{\lambda} m_{\lambda}(x)h_{\lambda}(y)$$

si et seulement si

$$\sum_{\lambda} \langle u_{\lambda}, m_{\mu} \rangle \langle v_{\lambda}, h_{\nu} \rangle = \delta_{\nu, \mu}$$

mais, exercice d'algèbre linéaire, ceci équivaut à

$$\sum_{\lambda} \langle u_{\mu}, m_{\lambda} \rangle \langle v_{\nu}, h_{\lambda} \rangle = \delta_{\nu, \mu}$$

c'est-à-dire à

$$\langle u_{\mu}, v_{\nu} \rangle = \delta_{\mu, \nu}$$

La conclusion est que  $(u_{\lambda})$  et  $(v_{\lambda})$  sont deux bases duales si et seulement si

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}(x)v_{\lambda}(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$$

la signification du Lemme 2-4 est maintenant claire. D'une part on a

$$\langle p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle = z_{\lambda} \delta_{\lambda, \mu}$$

et d'autre part et surtout, les fonctions de Schur forment une base orthonormale de  $\Lambda$

$$\langle s_{\lambda}, s_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$$

Les  $s_{\lambda}$  tels que  $|\lambda| = n$  forment une base orthonormale de  $\Lambda^n$  qui est lui de dimension finie (sur  $\mathbf{Z}$ ). La forme bilinéaire est positive. Toute autre base orthonormale de  $\Lambda^n$  se déduit de la base des  $s_{\lambda}$  par une matrice orthogonale à coefficients entiers. Les seules matrices possibles sont des matrices de permutation et de changements de signe de sorte qu'à la multiplication par  $\pm$  près (et à permutation près si on veut ordonner les vecteurs d'une base), les  $s_{\lambda}$  avec  $|\lambda| = n$  sont l'unique base orthonormale du  $\mathbf{Z}$ -module des fonctions symétriques homogènes de degré  $n$ .

Finalement  $\omega$  est une isométrie car  $\omega(s_{\lambda}) = s_{\lambda'}$ .

**§ 4 Quelques calculs.** — On conserve les notations du § précédent et on va maintenant établir les points admis.

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots)$  une permutation et  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots)$  la permutation conjuguée.

**Lemme 4-1.** — *On a*

$$\text{Det}(h_{\lambda_i - i + j}) = \text{Det}(e_{\lambda'_i - i + j})$$

Rappelons un résultat de calcul matriciel. Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , à coefficients dans un anneau commutatif. Soit  $B$  la puissance extérieure  $(n-1)^{\text{ème}}$  de  $A$ . Le coefficient  $b_{i,j}$  de  $B$  est donc le déterminant de la matrice obtenu en supprimant dans  $A$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne. Soient  $H$  et  $K$  deux parties à  $m$  éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$  et soit  $A_{H,K}$  le mineur de  $A$  obtenu en conservant les lignes (resp. les colonnes) dont l'indice appartient à  $H$  (resp. à  $K$ ). On définit de même les mineurs  $B_{H,K}$ . Enfin soit  $K'$  le complémentaire de  $K$  et  $H'$  celui de  $H$ . On a alors

$$B_{H,K} = (\det A)^{p-1} A_{H,K}$$

Supposons maintenant que  $A$  soit inversible et soit  $C$  la transposée de sa matrice inverse. La matrice  $C$  s'obtient à partir de  $B$  en multipliant le coefficient  $b_{i,j}$  par  $(-1)^{i+j}$  et en le divisant par  $\text{Det}(A)$ . On a donc

$$B_{H,K} = (-1)^{h+k} (\text{Det } A^p) C_{H,K}$$

où  $h$  (resp.  $k$ ) est la somme des éléments de  $H$  (resp. de  $K$ ). On en tire

$$A_{H,K} = (-1)^{h+k} \text{Det}(A) C_{H,K}$$

On peut maintenant prouver le Lemme. Les relations

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r}, \quad n \geq 1$$

signifient que les matrices carrées d'ordre  $n+1$

$$H = (h_{i-j}), \quad E = ((-1)^{i+j} e_{i-j}), \quad 0 \leq i, j \leq n$$

sont inverses l'une de l'autre (on convient que les  $e_*$  et les  $h_*$  d'indices négatifs sont nuls). Elles sont de plus de déterminant 1. On prend  $n = \ell(\lambda) + \ell(\lambda') - 1$  et on choisit

$$H = \{\lambda_i + \ell(\lambda) - i \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda)\}, \quad K = \{\ell(\lambda) - j \mid 1 \leq j \leq \ell(\lambda)\}$$

et on vérifie (exercice) que

$$H' = \{\ell(\lambda) - 1 + i - \lambda'_i \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda')\}, \quad K' = \{\ell(\lambda) - 1 + j \mid 1 \leq j \leq \ell(\lambda')\}$$

On obtient alors directement le Lemme.

**Lemme 4-2.** — On a, pour  $n \geq \ell(\lambda)$

$$s_\lambda = \text{Det}(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Donnons rapidement la marche. On travaille avec  $n$  variables et on définit les  $e_r^{(k)}$  par

$$\sum_0^{n-1} e_r^{(k)} T^r = \prod_{i \neq k} (1 + x_i T)$$

de sorte que

$$H(T) \sum_0^{n-1} e_r^{(k)} T^r = (1 - x_k T)^{-1}$$

Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , on déduit de l'identité précédente, en comparant les coefficients de  $T^{\alpha_i}$ , l'égalité matricielle

$$(x_j^{\alpha_i}) = (h_{\alpha_i - n + j}) ((-1)^{n-i} e_{n-i}^j)$$

On écrit l'égalité des déterminants ; à gauche on obtient par définition  $a_\alpha$  ; pour un instant prenons  $\alpha = \delta$ . La matrice  $(h_{\alpha_i - n + j})$  est égale à  $(h_{j-i})$  qui est diagonale de déterminant 1 donc la matrice  $((-1)^{n-i} e_{n-i}^j)$  qui ne dépend pas de  $\alpha$  est de déterminant 1. Si maintenant  $\alpha$  est quelconque, on obtient

$$a_\alpha = a_\delta \text{Det}(h_{\alpha_i - n + j})$$

Pour  $\alpha = \lambda + \delta$  on a ainsi

$$s_\lambda = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) h_{\lambda + \delta - \sigma(\delta)} = \text{Det}(h_{\lambda_i - i + j})$$

On a donc

$$\omega(s_\lambda) = \text{Det}(\omega(h_{\lambda_i - i + j})) = \text{Det}(e_{\lambda_i - i + j}) = s_{\lambda'}$$

Il nous reste à prouver le Lemme 3-4. Commençons par la première égalité. On a vu que  $P(T) = H'(T)/H(T)$ . On a donc, puisque  $H(0) = 1$

$$H(T) = \text{Exp}\left(\sum_{r \geq 1} p_r T^r / r\right)$$

Notons que l'écriture a un sens car on peut substituer une série formelle sans terme constant dans la série exponentielle. Pour tout  $N$  ceci peut s'écrire

$$H(T) = \prod_1^N \text{Exp}(p_r T^r / r) \text{Exp}\left(\sum_{r \geq N+1} p_r T^r / r\right)$$

On a donc

$$H(T) \equiv \prod_1^N \text{Exp}(p_r T^r / r) \pmod{T^{N+1}}$$

ou encore

$$H(T) \equiv \prod_1^N \sum_{u_r=0}^{+N} p_r^{u_r} r^{-u_r} T^{r u_r} / u_r! \pmod{T^{N+1}}$$

Si on développe on obtient une somme de termes de la forme

$$\prod_1^N p_r^{u_r} \frac{T^r u_r}{u_r! r^{u_r}}$$

Si  $\lambda$  est l'unique partition qui contient  $u_1$  fois 1,  $u_2$  fois  $u_2 \dots$  alors ce terme vaut

$$p_\lambda z_\lambda^{-1} T^{|\lambda|}$$

On a donc l'identité

$$H(T) = \prod (1 - x_i T)^{-1} = \sum_\lambda p_\lambda z_\lambda^{-1} T^{|\lambda|}$$

Ce calcul formel est valable pour n'importe quelle suite d'indéterminées. En particulier on peut l'appliquer à une suite à double indice comme  $x_i y_j$ . Dans ce cas

$$p_r = \sum_{i,j} x_i^r y_j^r = \sum_i x_i^r \sum_j y_j^r = p_r(x) p_r(y)$$

ceci prouve la première identité.

La suivante est immédiate :

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \sum_r h_r(x) y_j^r = \sum_\alpha h_\alpha(x) y^\alpha = \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y)$$

Pour la dernière, prenons  $n$  variables

$$a_\delta(x) a_\delta(y) \prod_{i,j=1}^n (1 - x_i y_j)^{-1} = a_\delta(x) \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \sum_\sigma h_\alpha(x) \varepsilon(\sigma) y^{\alpha + \sigma(\delta)}$$

Posons alors  $\beta = \alpha + \sigma(\delta)$  et sommions pour  $\beta \in \mathbf{N}^n$  (on a convenu que  $h_r = 0$  pour  $r < 0$ ), ce qui donne, en appliquant le lemme précédent

$$a_\delta(x) \sum_{\beta, \sigma} \varepsilon(\sigma) h_{\alpha - \sigma(\delta)} y^\beta = \sum_\beta a_\beta y^\beta$$

On peut se limiter aux  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  où les  $\beta_j$  sont tous distincts (sinon on obtient 0). En rassemblant les  $\beta$  qui se correspondent par permutation on obtient

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda}(x) a_{\lambda}(y)$$

Pour terminer on va calculer certaines des matrices de changements de base. Il nous faut d'abord bien préciser la terminologie concernant les tableaux et les diagrammes. Cette terminologie semblant un peu fluctuante suivant les références, il convient donc d'être prudent.

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions. A chacune correspond un diagramme de Ferrers. Supposons que, pour tout  $i$ , on ait  $\lambda_i \geq \mu_i$  de sorte que le diagramme de  $\lambda$  contient celui de  $\mu$ . On note  $\lambda \supset \mu$ . Le diagramme obtenu en supprimant du diagramme de  $\lambda$  les cases de  $\mu$  est appelé un diagramme gauche; on le note  $\lambda/\mu$ . Son poids est  $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$ . Si pour tout  $i$ , on a  $\lambda_i - \mu_i \leq 1$  alors  $\lambda/\mu$  a au plus une case par ligne; on dit que c'est une bande verticale ou plus précisément une  $m$ -bande verticale si ce diagramme a  $m$  cases. On définit de même les  $m$ -bandes horizontales (au plus une case par colonne).

D'une manière générale un tableau est un diagramme où l'on a inscrit un entier dans chaque case. le diagramme est la "forme" du tableau.

Un tableau de Young est un tableau dont la forme est un diagramme (ordinaire) donc associé à une partition  $\lambda$  et faisant intervenir les entiers de 1 à  $|\lambda|$ . Le poids est  $|\lambda|$ ; il n'y a pas de répétitions dans le tableau.

Un tableau de Young est standard si dans chaque colonne (resp. dans chaque ligne) le contenu des cases est une suite strictement croissante d'entiers.

En général dans un tableau le même entier figure plusieurs fois.

Un tableau de forme  $\lambda/\mu$  est colonne-strict si dans chaque colonne (resp. dans chaque ligne) le contenu des cases est une suite strictement croissante (resp. croissante au sens large) d'entiers. En transposant on obtient les tableaux ligne-strict. Voici un exemple; les cases avec des 0 sont celles de  $\mu$ ; elles ne font pas partie du tableau.

0	0	0	1	1	3	4
0	0	1	3			
0	1	2	4			
0	3					

Dans [Mac] le mot tableau signifie tableau colonne-strict. Nous dirons qu'un tel tableau est un tableau semi-standard de forme  $\lambda/\mu$ . Le cas ligne-strict ne devrait pas intervenir.

Un tableau semi-standard de forme  $\lambda/\mu$  peut encore se décrire avec des partitions. Soit  $\theta_i$  l'ensemble des cases contenant  $i$ ; c'est une  $|\theta_i|$ - bande horizontale. Soit

$\lambda_i = \mu \cup \theta_1 \cup \dots \cup \theta_i$ . C'est une partition et le tableau est entièrement déterminé par la suite, croissante au sens large, des partitions

$$\mu = \lambda^0 \subset \lambda^1 \subset \dots \subset \lambda^k = \lambda$$

### Remarques

Il y a encore des variantes possibles. On peut demander que la suite précédente soit strictement croissante ce qui veut dire qu'on ne saute aucun entier. Si comme nous l'avons fait on accepte des égalités dans la suite de partitions, alors on sera obligé de limiter l'entier  $k$  sauf à accepter d'avoir une infinité de tableaux de la même forme. On précisera à chaque fois.

**Lemme 4-3 (Formule de Pieri).** — *Soit  $\mu$  une partition et  $r$  un entier positif ou nul. On a*

$$s_\mu e_r = \sum_{\lambda} s_\lambda$$

où  $\lambda$  parcourt l'ensemble des partitions qui contiennent  $\mu$  et telles que  $\lambda/\mu$  soit une  $r$ - bande verticale.

Par définition

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}$$

donc

$$a_{\mu+\delta} e_r = \sum_{\sigma} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \varepsilon(\sigma) x^{\sigma}(\mu + \delta) x_{i_1} \dots x_{i_r}$$

ou encore

$$a_{\mu+\delta} e_r = \sum a_{\mu+\delta+\alpha}$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  avec  $\alpha_i \leq 1$  et  $\sum \alpha_i = r$ . Si deux des composantes de  $\mu + \alpha + \delta$  sont égales  $a_{\mu+\alpha+\delta} = 0$ ; les cas restants sont ceux où  $\mu + \alpha$  est une partition  $\lambda$  et on obtient exactement les partitions annoncées par l'énoncé.

Si on applique l'involution  $\omega$ , on obtient une formule équivalente

$$s_\mu h_r = \sum_{\lambda} s_\lambda$$

où  $\lambda$  parcourt l'ensemble des partitions qui contiennent  $\mu$  et telles que  $\lambda/\mu$  soit une  $r$ - bande horizontale.

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions telles que  $\lambda \supset \mu$ ; soit  $\nu$  une partition de même poids que  $\lambda/\mu$ . On note

$$K_{\lambda/\mu, \nu}$$

le nombre de tableaux semi-standards, de forme  $\lambda/\mu$  et de poids  $\nu$ . Si  $\mu = (0)$  (diagramme vide) on note

$$K_{\lambda,\nu}$$

le nombre de tableaux semi-standards de forme  $\lambda$  et de poids  $\nu$  c'est-à-dire contenant  $\nu_1$  fois 1,  $\nu_2$  fois 2 etc

A partir du Lemme précédent et par une récurrence facile sur le poids de  $\nu$  on prouve la

**Proposition 4-4.** — *Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux partitions. On a*

$$s_\mu h_\nu = \sum K_{\lambda/\mu,\nu} s_\lambda$$

où la sommation porte sur toutes les permutations  $\lambda \supset \mu$  et telles que  $|\lambda/\mu| = |\nu|$ .  
En particulier

$$h_\nu = \sum K_{\lambda,\nu} s_\lambda$$

où la sommation porte sur toutes les permutations  $\lambda$  de même poids que  $\nu$ .

Les nombres  $K_{\lambda,\nu}$  sont les nombres de Kostka. Ce sont des entiers positifs ou nuls

**Proposition 4-5.** — *On a  $K_{\lambda,\lambda} = 1$  et  $K_{\lambda,\nu} \neq 0$  implique  $\lambda \geq \nu$*

C'est un exercice. Si  $\lambda$  et  $\nu$  ne sont pas de même poids, on convient que  $K_{\lambda,\nu} = 0$ . La matrice  $K = (K_{\lambda,\nu})$  est donc la matrice qui fait passer des  $s_*$  aux  $h_*$ . En utilisant l'involution et le produit scalaire, il est facile de calculer, en fonction de  $K$ , de sa transposée, de son inverse, les matrices de passages entre les bases  $m_*, e_*, h_*, f_*, s_*$ .

On vient de voir que

$$h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu,\lambda} s_\mu$$

Appliquons  $\omega$

$$e_\lambda = s_{\lambda'} + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu,\lambda} s_{\mu'}$$

Si on utilise le fait que  $(s_\lambda)$  est autoduale et que la base  $(h_\lambda)$  est duale de la base  $(m_\lambda)$ , on obtient

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} K_{\lambda,\mu} m_\mu$$

Pour terminer remarquons que si on note  $1^{(n)}$  la permutation de poids  $n$  et dont toutes les composantes valent 1, alors  $K_{\lambda,(1^{(n)})}$  est le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ . En particulier il est strictement positif.



§ 5 **Le calcul des caractères du groupe symétrique.** — Comme on va le voir, il n'y a plus de difficultés majeures. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $\widehat{\mathfrak{S}}_n$  l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$ . Pour simplifier les notations soit  $R_n$  le  $\mathbf{Z}$ -module libre de base  $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ . Comme chaque classe est caractérisée par son caractère qui est une fonction centrale sur le groupe, on peut considérer que  $R_n$  est un espace de fonctions centrales sur  $\mathfrak{S}_n$ . On dit quelquefois que  $R_n$  est l'espace des caractères virtuels de  $\mathfrak{S}_n$ . Le produit tensoriel de deux représentations fournit un produit sur  $R_n$  mais dans ce § on choisit d'oublier ce produit "interne". Par contre on va avoir besoin d'un produit "externe" qui fait intervenir tous les groupes  $\mathfrak{S}_n$ .

Convenons que  $R_0 = \mathbf{Z}$  et posons

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$$

On peut plonger le groupe  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$  dans le groupe  $\mathfrak{S}_{m+n}$  en faisant opérer  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\{1, \dots, n\}$  et  $\mathfrak{S}_m$  sur  $\{n+1, \dots, m+n\}$ . Si  $\sigma$  est une représentation de  $\mathfrak{S}_n$  et  $\tau$  une représentation de  $\mathfrak{S}_m$ , on définit  $\sigma \otimes \tau$  représentation de  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$  dans  $V_\sigma \otimes V_\tau$ . On induit ensuite cette représentation à  $\mathfrak{S}_{n+m}$ . Exprimée en termes de caractères ceci donne une application bilinéaire

$$R_n \times R_m \rightarrow R_{n+m}$$

et on obtient sur  $R$  une structure d'anneau commutatif, associatif, gradué, de centre  $R_0 \dots$

On va voir que  $R$  est isomorphe à  $\Lambda$ . On fait opérer  $\mathfrak{S}_n$  dans lui-même par automorphismes intérieurs ; soit  $\gamma$  une orbite. Elle est caractérisée par une partition de  $n$  correspondant à la décomposition en cycles d'un élément quelconque de  $\gamma$ . Soit  $\lambda(\gamma)$  cette partition et soit  $p_\gamma = p_{\lambda(\gamma)}$ . On a ainsi une bijection de l'ensemble des orbites sur l'ensemble des partitions. On note aussi  $p_\sigma = p_{\lambda(\gamma)}$  lorsque  $\sigma \in \gamma$  de sorte qu'on a une application de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $\Lambda^n$  (fonctions symétriques homogènes de degré  $n$ ). On prolonge cette application à  $R_n$  en posant

$$\theta(\chi) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \chi(\sigma) p_\sigma$$

(Macdonald note cette application  $ch$  mais on a déjà utilisé  $ch$  pour le caractère d'une représentation en tant que fonction définie sur  $\mathfrak{S}_n$ ). Ceci est valable pour tout  $n$  et on obtient ainsi une application linéaire de  $R$  dans  $\Lambda$ . Comme tous les  $p_\lambda$  appartiennent à l'image, cette application est bijective. En fait

**Proposition 5-1.** — *L'application  $\theta$  est un isomorphisme d'anneaux et une isométrie*

Rappelons que  $R_n$  est muni d'un produit hermitien :

$$(\chi, \chi') = \frac{1}{n!} \sum \chi(\sigma) \overline{\chi'(\sigma)}$$

les caractères irréductibles ont la symétrie hermitienne  $\chi(\sigma^{-1}) = \overline{\chi(\sigma)}$  et il en est de même de leurs combinaisons linéaires à coefficients entiers. On peut donc dans la formule précédente remplacer  $\overline{\chi(\sigma)}$  par  $\chi(\sigma^{-1})$ . Comme les caractères irréductibles forment une base orthonormale ce produit scalaire est en fait à valeurs entières.

Vérifions que  $\theta$  est bien une isométrie. Soit  $\sigma$  une permutation et, pour tout  $i$ , soit  $m_i$  le nombre de cycles de longueur  $i$  dans la décomposition de  $\sigma$ . Le lecteur se convaincra facilement que le nombre de permutations qui commutent à  $\sigma$  est

$$\prod_i i^{m_i} m_i!$$

qui vaut donc  $z_{p_\sigma}$ . Par suite l'orbite de  $\sigma$  a  $n!/z_{p_\sigma}$  éléments. Si dans la formule du produit scalaire  $(\chi, \chi')$ , on regroupe les éléments d'une même orbite, on obtient donc

$$(\chi, \chi') = \sum_\gamma \frac{1}{z_{p_\gamma}} \chi(\gamma) \chi'(\gamma)$$

On a noté  $\chi(\gamma)$  la valeur de la fonction centrale  $\chi$  sur l'orbite  $\gamma$  et de même pour  $\chi'$  et on a utilisé le fait que  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  sont dans la même orbite.

On sait que  $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}$  donc  $\theta$  est bien une isométrie.

Soient  $n$  et  $m$  deux entiers et soient  $\chi \in R_n$  et  $\chi' \in R_m$ . Soit

$$\chi'' = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (\chi \otimes \chi')$$

On doit montrer que  $\theta(\chi'') = \theta(\chi)\theta(\chi')$ . C'est exactement le théorème de réciprocité de Frobenius. En effet soit  $\tau$  un caractère irréductible de  $\mathfrak{S}_{m+n}$ . D'après ce théorème, on a

$$(\chi'', \tau)_{\mathfrak{S}_{n+m}} = (\chi \otimes \chi', \tau|_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m})_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}$$

Par linéarité cette égalité reste valable pour tout  $\tau \in R_{m+n}$ . Plus généralement si  $A$  est une algèbre commutative sur  $\mathbf{Q}$  et  $f$  une application de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $A$ , on pose

$$(\chi, f)_{\mathfrak{S}_n} = \frac{1}{n!} \sum_\sigma \chi(\sigma^{-1}) f(\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma \chi(\sigma) f(\sigma)$$

et on fait de même pour  $m$  et  $m+n$ . L'égalité de Frobenius reste valable pour toute fonction centrale sur  $\mathfrak{S}_{m+n}$  car une telle fonction est combinaison linéaire

des fonctions caractéristiques des orbites. En particulier si on prend pour  $f$  la fonction

$$f_{n+m}(\sigma) = p_\sigma, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}$$

alors on obtient  $\theta(\chi'')$ . D'autre part on a

$$(f_{n+m})|_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} = f_n f_m$$

Par suite

$$\begin{aligned} \theta(\chi'') &= (\chi\chi', (f_{n+m})|_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m})_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \\ &= (\chi, f_n)_{\mathfrak{S}_n} (\chi', f_m)_{\mathfrak{S}_m} \\ &= \theta(\chi)\theta(\chi') \end{aligned}$$

Dans le  $\mathbf{Z}$ -module  $R_n$ , les caractères irréductibles forment une base orthonormale et, au signe près, cela les caractérise. Si on applique  $\theta$  on doit donc obtenir, au signe près, les polynômes de Schur  $s_\lambda$ .

**Théorème 5-2.** — *Pour toute partition  $\lambda$  de  $n$ , la fonction  $\chi_\lambda = \theta^{-1}(s_\lambda)$  est un caractère irréductible de  $\mathfrak{S}_n$  et on obtient ainsi tous les caractères irréductibles.*

Il suffit de prouver que  $\chi_\lambda(1) > 0$ . D'une manière générale pour toute permutation  $\sigma$  on a  $\chi(\sigma) = \langle \theta(\sigma), p_\sigma \rangle$ . On doit donc prouver que, pour toute partition de  $n$ , on  $\langle s_\lambda, p_1^n \rangle > 0$ . Or  $p_1 = h_1$  donc  $\langle s_\lambda, p_1^n \rangle = \langle s_\lambda, h_1^n \rangle$ . C'est le coefficient de  $s_\lambda$  dans la décomposition de  $h_1^n = h_{1(n)}$  suivant la base des  $s_*$ ; il vaut donc  $K_{\lambda, 1(n)}$  qui est strictement positif.

**Proposition 5-3.** — *La représentation de caractère  $\chi_\lambda$  a pour dimension le nombre de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$*

Il nous faut encore faire le lien avec le § 2.

**Théorème 5-4.** — *La représentation  $\gamma(\lambda)$  a pour caractère  $\theta^{-1}(s_\lambda)$*

Tout d'abord soit  $\chi_1$  le caractère de la représentation triviale de  $\mathfrak{S}_n$ . on a

$$\theta(\chi_1) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p_\lambda$$

et, au § 4 on a obtenu la formule

$$H(T) = \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda T^{|\lambda|}$$

Par suite

$$\theta(\chi_1) = h_n$$

Si maintenant on considère le caractère  $\chi_\varepsilon$  de la représentation signature, on trouve

$$\theta(\chi_\varepsilon) = \sum_{|\lambda|=n} \varepsilon(\lambda) z_\lambda^{-1} p_\lambda$$

avec

$$\varepsilon(\lambda) = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}$$

En appliquant  $\omega$  à  $H$  on obtient

$$E(T) = \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} \varepsilon(\lambda) p_\lambda T^{|\lambda|}$$

d'où

$$\theta(\chi_\varepsilon) = e_n$$

Soient  $\lambda$  une partition de  $n$  et  $T$  un tableau de Young de forme  $\lambda$ . On a donc le sous-groupe  $P(T)$  de  $\mathfrak{S}_n$ , c'est celui qui conserve les lignes de  $T$ , et le sous-groupe  $Q(T)$  qui lui conserve les colonnes.

Le sous-groupe  $P(T)$  est un produit de sous-groupes

$$P(T) \approx \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_n}$$

Le groupe  $\mathfrak{S}_{\lambda_1}$  opère sur les entiers qui figurent dans la première ligne du tableau,  $\mathfrak{S}_{\lambda_2}$  sur les entiers de la deuxième ligne *etc.* Soit  $\pi_T$  la représentation de  $\mathfrak{S}_n$  induite par la représentation triviale de  $P(T)$ . Comme  $\theta$  est un homomorphisme, les remarques ci-dessus montrent que

$$\theta(\text{ch}(\pi_T)) = h_\lambda$$

de manière analogue, le caractère de la représentation  $\rho_T$  induite par le caractère signature de  $Q(T)$  est donné par

$$\theta(\text{ch}(\rho_T)) = e_{\lambda'}$$

Or on a vu que

$$h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu, \lambda} s_\mu$$

$$e_{\lambda'} = s_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} K_{\mu', \lambda'} s_\mu$$

Or  $\gamma(\lambda)$  est l'unique représentation qui intervient des deux côtés. On a donc  $s_\lambda = \gamma(\lambda)$ .

**Proposition 5-5.** — *Si on note  $\varepsilon$  la représentation signature alors, pour toute représentation  $\pi$  de  $\mathfrak{S}_n$ , on a*

$$\theta(\text{ch}(\pi \otimes \varepsilon)) = \omega(\theta(\text{ch}(\pi)))$$

Autrement dit l'involution  $\omega$  correspond au produit tensoriel (interne) par le caractère signature. En effet si  $c_\lambda$  est la valeur du caractère de  $\pi$  sur l'orbite paramétrée par la partition  $\lambda$ , alors

$$\theta(\text{ch}(\pi)) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} c_\lambda p_\lambda$$

or  $\omega(p_\lambda) = \varepsilon(\lambda)p_\lambda$  donc

$$\omega(\theta(\text{ch}(\pi))) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} \varepsilon(\lambda) c_\lambda p_\lambda$$

Mais si  $\sigma$  appartient à l'orbite paramétrée par  $\lambda$  alors c'est un produit de cycles de longueurs  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  donc sa signature est

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_1^r (-1)^{\lambda_i - 1} = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)} = \varepsilon(\lambda)$$

Le caractère de  $\pi \otimes \varepsilon$  vaut donc  $c_\lambda \varepsilon(\lambda)$  en un tel point et le résultat est évident.

Bien entendu, comme  $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$ , l'involution correspond aussi au passage de  $\gamma(\lambda)$  à  $\gamma(\lambda')$  de sorte que  $\gamma(\lambda')$  s'obtient en tensorisant  $\gamma(\lambda)$  par  $\varepsilon$ .

Dans tout ce chapitre on a pris  $\mathbf{C}$  comme corps de base mais il est clair que toutes les constructions ont été faites sur  $\mathbf{Q}$ . On a donc obtenu une  $\mathbf{Q}$ -représentation pour toute partition  $\lambda$  de  $n$  et elles sont deux à deux inéquivalentes. Il reste à voir qu'il n'y en a pas d'autres.

Soit  $G$  un groupe fini et notons  $R$  l'algèbre (de convolution) des applications de  $G$  dans  $\mathbf{Q}$ . Elle est semi-simple. Soit  $R = \oplus R_i$  sa décomposition en somme directe de sous-algèbres simples et en particulier soit  $e = \sum e_i$  la décomposition de l'élément neutre. Si  $\pi_j$  est une représentation de "type  $R_j$ ", et si  $i \neq j$ , alors  $\pi_j(e_i) = 0$  et donc le caractère de  $\pi_j$  est nul sur  $e_i$ . Par contre sa valeur sur  $e_j$  est non nulle : c'est la dimension de  $\pi_j$  (à ce stade on aurait des ennuis en caractéristique  $p > 0$ ). On en déduit immédiatement que les caractères de représentations irréductibles inéquivalentes sont linéairement indépendants. Ce sont des fonctions centrales. Les fonctions centrales constituent le centre de  $R$ . La dimension de l'espace des fonctions centrales est égale au nombre d'orbites de  $G$  opérant dans lui-même par automorphismes intérieurs. La conclusion est que le nombre de classes d'équivalence de  $\mathbf{Q}$ -représentations irréductibles est au plus égale au nombre d'orbites.

Si on revient au groupe symétrique, on constate qu'on a rien oublié. Les représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$ , construites sur  $\mathbf{Q}$ , ou sur tout autre corps de caractéristique 0, sont donc absolument irréductibles, c'est-à-dire restent irréductibles lorsqu'on étend le corps des scalaires. Le lemme de Schur est valable; le commutant est réduit aux scalaires.

Plaçons nous sur  $\mathbf{Q}$ . Dans  $\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$  chaque classe de représentations irréductibles  $\gamma(\lambda)$  intervient autant de fois que sa dimension  $m(\lambda)$ . Pour chaque tableau de Young de forme  $\lambda$ , on a construit un symétriseur et donc un modèle de  $\gamma(\lambda)$  dans  $\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$ . Or il y a  $n!$  tableaux de Young de forme  $\lambda$  donc on en a trop.

D'autre part, on a vu que  $m(\lambda)$  est égale au nombre de tableaux de Young standard de forme  $\lambda$ . On va montrer que ces tableaux suffisent.

Introduisons sur les tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ , l'ordre lexicographique : on dit que  $T_1$  précède  $T_2$  si, lorsqu'on compare les cases, en partant de la case gauche de la première ligne et en lisant comme dans un livre, alors la première fois que l'on a des entiers distincts celui fourni par  $T_1$  est plus petit que celui fourni par  $T_2$ . C'est par exemple le cas si

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

**Lemme 5-6.** — *Si  $T_1$  précède  $T_2$  alors  $e_{T_2} * e_{T_1} = 0$*

Il suffit de démontrer qu'il existe deux entiers distincts qui appartiennent à la même ligne de  $T_1$  et à la même colonne de  $T_2$ . Considérons la première case où  $T_1$  et  $T_2$  diffèrent. Soit  $n_1$  et  $n_2$  les entiers qu'on y trouve,  $n_1 < n_2$ . Notons que  $c_{T_1}(n_1) > 1$  car une fois remplies un certain nombre de lignes, le premier entier qui apparaît sur la ligne suivante doit être le plus petit de ceux qui restent. Cherchons à localiser  $n_1$  dans  $T_2$ . On a  $\ell_{T_2}(n_1) \geq \ell_{T_1}(n_1)$  et s'il y a égalité, on doit avoir  $c_{T_2}(n_1) > c_{T_1}(n_1)$ . De plus, comme  $T_2$  est standard et que  $n_2 > n_1$ , le nombre  $n_1$  vérifie en fait  $\ell_{T_2} > \ell_{T_2}(n_2)$  et  $c_{T_2}(n_1) < c_{T_2}(n_2)$ . A l'intersection de la ligne  $\ell_{T_2}(n_2)$  et de la colonne  $c_{T_2}(n_1)$  on trouve le même entier  $m$  dans  $T_1$  et  $T_2$ . Comme  $m$  et  $n_1$  appartiennent à la même colonne de  $T_2$  et à la même ligne de  $T_1$ , on a gagné.

Ordonnons les tableaux de Young standards, de forme  $\lambda$ , dans l'ordre lexicographique  $T_1, T_2, \dots, T_{m(\lambda)}$  et considérons les sous-espaces  $e_{T_i} * \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$ . Leur somme est directe. En effet, avec des notations évidentes, si

$$\sum_1^{m(\lambda)} \varphi_i = 0$$

en convolant à gauche avec  $e_{T_{m(\lambda)}}$ , il reste  $e_{T_{m(\lambda)}} * \varphi_{m(\lambda)} = 0$  ce qui implique que  $\varphi_{m(\lambda)} = 0$ . On convole ensuite avec l'avant dernier ... En conclusion :

**Proposition 5-7.** — *On a*

$$\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]_\lambda = \bigoplus_{e_T} e_T^* \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$$

*où la somme est étendue aux tableaux de Young standards de forme  $\lambda$*

## Chapitre 2 LA THÉORIE DES INVARIANTS POUR $GL(n)$

Soit  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique 0 La théorie est maintenant établie en toute caractéristique mais les démonstrations les plus directes ne sont valables qu'en caractéristique 0.

Il y a classiquement deux types de théorèmes. Le premier théorème fondamental est un théorème qui fournit un système de générateurs pour la sous-algèbre des invariants. Le deuxième théorème fondamental décrit les relations entre ces invariants. Chacun de ces théorèmes admet des variantes. Nous allons démontrer ces théorèmes puis en déduire la construction des représentations rationnelles de dimension finie de  $GL(n)$  ainsi que le calcul de leurs caractères. Ceci utilisera les résultats du Chapitre 1

**§ 1 Les deux théorèmes fondamentaux.** — Soit donc  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique 0. On fixe un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbf{K}$ , de dimension finie  $r$  et on considère le groupe linéaire  $GL(V)$ . Il opère dans  $V$ . Soit  $n$  un entier  $n \geq 1$ . Notons  $V^{\otimes n}$  le produit tensoriel de  $V$  par lui-même  $n$  fois; par exemple  $V^{\otimes 3} = V \otimes V \otimes V$ . Le groupe  $GL(V)$  opère par

$$\pi_{r,n}(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_n$$

Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  opère aussi dans  $V^{\otimes n}$ . De manière précise, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on pose

$$\rho_{r,n}(\sigma)(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(i)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$$

Ceci doit s'interpréter comme une permutation des places : l'effet de  $\sigma$  est de mettre à la première place la composante qui était à la place  $\sigma^{-1}(1)$ . Si on applique maintenant une deuxième permutation  $\tau$ , à la première place on obtient la composante qui, après application de  $\sigma$  était à la place  $\tau^{-1}(1)$ , c'est-à-dire  $v_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))} = v_{(\tau\sigma)^{-1}(1)}$ . On a bien une représentation du groupe symétrique!

Soit  $\mathcal{A}_{r,n}$  la sous-algèbre de  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V^{\otimes n})$  engendrée par les endomorphismes  $\pi_{r,n}(g)$ . La représentation  $\rho_{r,n}$  se prolonge à l'algèbre  $\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]$ ; soit  $\mathcal{B}_{r,n}$  l'image de  $\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]$ . Il est clair que  $\mathcal{A}_{r,n}$  et  $\mathcal{B}_{r,n}$  commutent.

**Théorème 1-1 (Premier Théorème Fondamental).** — *La sous-algèbre  $\mathcal{A}_{r,n}$  est le commutant dans  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V^{\otimes n})$  de la sous-algèbre  $\mathcal{B}_{r,n}$  et cette dernière est le commutant de  $\mathcal{A}_{r,n}$*



Puisqu'on est en caractéristique 0, l'algèbre  $\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]$  est semi-simple. Elle est aussi unitaire. La représentation  $\rho_{r,n}$  est donc semi-simple et elle est non dégénérée. Le théorème du double commutant s'applique donc. Il suffit de prouver que le commutant de  $\mathcal{B}_{r,n}$  est  $\mathcal{A}_{r,n}$ .

Commençons par un lemme. Soit  $W$  un espace vectoriel de dimension finie. Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  opère dans le produit tensoriel  $W^{\otimes n}$ . Soit  $\mathcal{S}$  le sous-espace des invariants c'est-à-dire des tenseurs symétriques. Soit  $X$  un ouvert de Zariski non vide de  $W$ .

**Lemme 1-2.** — *Le sous-espace  $\mathcal{S}$  est engendré par les tenseurs de la forme*

$$w \otimes w \otimes \cdots \otimes w \quad w \in X$$

Soit  $e_1, \dots, e_r$  une base de  $W$ . Les tenseurs  $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$  forment une base de  $W^{\otimes n}$ . Fixons une partition  $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$  de  $n$  et notons la  $\alpha$ . Soit  $s_\alpha$  la somme des vecteurs de base  $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$  qui contiennent  $\alpha_1$  fois  $e_1, \alpha_2$  fois  $e_2, \dots$ . L'ensemble des  $s_\alpha$  est une base du sous-espace des tenseurs symétriques. Soit  $f$  une forme linéaire sur  $W^{\otimes n}$  nulle sur tous les tenseurs symétriques décomposés c'est-à-dire de la forme  $w^{\otimes n} = w \otimes \cdots \otimes w$  avec de plus  $w \in X$ . Il nous faut montrer qu'elle est nulle sur tous les tenseurs symétriques et il suffit de le faire pour les  $s_\alpha$ . Prenons

$$w = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$$

On a

$$w^{\otimes n} = \sum t^\alpha s_\alpha$$

donc

$$0 = \sum f(s_\alpha) t^\alpha$$

Ceci est valable quels que soient les éléments  $t_i$  de  $\mathbf{K}$  tels que  $w \in X$  donc, le corps étant infini, pour tout  $w \in W$  (principe du prolongement des identités algébriques). Il en résulte que tous les coefficients  $f(s_\alpha)$  sont nuls.

La démonstration ci-dessus a été reprise de [**Proc**]. Passons à la démonstration du théorème. On a

$$\text{End}_{\mathbf{K}}(V^{\otimes n}) = \left( \text{End}_{\mathbf{K}}(V) \right)^{\otimes n}$$

La flèche de droite à gauche s'obtient en posant

$$(T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_n)(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = T_1(v_1) \otimes T_2(v_2) \otimes \cdots \otimes T_n(v_n)$$

Soit  $W = \text{End}_{\mathbf{K}}(V)$ . Soit

$$T = \sum T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$$

un élément du commutant de  $\mathcal{B}_{r,n}$ . La relation de commutation s'écrit

$$\sum T_{\sigma^{-1}(1)}(v_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes T_{\sigma^{-1}(n)}(v_{\sigma^{-1}(n)}) = \sum T_1(v_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes T_n(v_{\sigma^{-1}(n)})$$

Les  $v_i$  étant quelconques cela signifie que  $T$  est un tenseur symétrique. Or  $\text{GL}(V)$  est un ouvert dense de  $W = \text{End}_K(V)$  donc d'après le Lemme tout tenseur symétrique dans  $W^{\otimes n}$  est combinaison linéaire de tenseurs de la forme  $g \otimes g \otimes \cdots \otimes g$  avec  $g \in \text{GL}(V)$ . Comme  $g \otimes \cdots \otimes g = \pi_{r,n}(g)$ , le théorème est démontré.

Donnons une première version du second théorème fondamental. Considérons  $\rho_{r,n}$  comme une application de  $\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]$  dans  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V^{\otimes n})$ .

Si  $r < n$ , plongeons  $\mathfrak{S}_{r+1}$  dans  $\mathfrak{S}_n$  en le faisant opérer sur les  $r$  premiers entiers. Soit

$$\delta_{r+1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} \varepsilon(\sigma) e_{\sigma}$$

Ici  $e_{\sigma}$  est la fonction définie sur  $\mathfrak{S}_n$  qui vaut 0 sauf en  $\sigma$  où elle vaut  $n!$ . On a donc  $\rho_{r,n}(e_{\sigma}) = \rho_{r,n}(\sigma)$  et

$$\rho_{r,n}(\delta_{r+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} \varepsilon(\sigma) \rho_{r,n}(\sigma)$$

**Théorème 1-3 (Deuxième Théorème Fondamental).** — *Si  $r \geq n$  alors  $\rho_{r,n}$  est injective.*

*Si  $r < n$ , le noyau de  $\rho_{r,n}$  est l'idéal bilatère engendré par  $\delta_{r+1}$ .*

Montrons d'abord que si  $r < n$  alors  $\rho_{r,n}(\delta_{r+1}) = 0$ . Soit  $v_1, v_2, \dots, v_r$  une base de  $V$ . On a donc une base  $(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_n})$  de  $W = V^{\otimes n}$ . Comme  $r < n$  dans chacun de ces vecteurs de base, au moins l'un des  $v_j$  intervient au moins deux fois. Supposons par exemple que  $v_{i_1} = v_{i_2}$ . Soit  $\tau$  la transposition qui échange 1 et 2. le vecteur de base considéré est donc invariant par  $\tau$ . D'autre part

$$\delta_{r+1} * e_{\tau} = \sum \varepsilon(\sigma) e_{\sigma\tau} = \varepsilon(\tau) \delta_{r+1} = -\delta_{r+1}$$

Il en résulte que le vecteur de base étudié est annulé par  $\rho_{r,n}(\delta_{r+1})$ . On a donc bien  $\rho_{r,n}(\delta_{r+1}) = 0$ .

Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . Il lui correspond une classe  $\gamma(\lambda)$  de représentations irréductibles du groupe symétrique; soit  $\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_{\lambda}$  la sous-algèbre simple associée à  $\gamma(\lambda)$ . Pour tout tableau  $T$  de forme  $\lambda$ , on a construit un symétriseur de Young

$$e_T = \sum_{p,q} \varepsilon(q) e_{qp}$$

où  $p$  (resp.  $q$ ) parcourt le sous-groupe  $P(T)$  (resp.  $Q(T)$ ) des permutations qui stabilisent les lignes (resp. les colonnes) de  $T$ . Le symétriseur  $e_T$  appartient à

$\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_\lambda$ . L'intersection du noyau de  $\rho_{r,n}$  avec  $\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_\lambda$  est un idéal bilatère donc c'est  $\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_\lambda$  ou  $(0)$ .

Rappelons que  $\ell_T(i)$  est le numéro de la ligne qui, dans le tableau  $T$ , contient  $i$ . Supposons que  $\lambda$  soit de longueur au plus  $r$ . Soit

$$v_T = v_{\ell_T(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\ell_T(n)}$$

Avec un peu de sang froid on constate que

$$\rho_{r,n}(\sigma)v_T = v_{\sigma(T)}$$

De plus si  $\sigma$  conserve les lignes de  $T$  alors  $v_T$  est invariant par  $\sigma$ . On en tire que

$$\rho_{r,n}(e_T) = (\#P(T)) \sum_q \varepsilon(q)v_{qT}$$

Or  $v_{qT} = v_T$  si et seulement si  $q$  est l'identité. On a donc  $\rho_{r,n}(e_T) \neq 0$ . Dans ce cas

$$(\text{Ker } \rho_{n,r}) \cap (\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_\lambda) = (0), \quad \ell(\lambda) \leq r$$

Enfin supposons que  $\ell(\lambda) > r$ . Si  $J$  est l'idéal bilatère engendré par  $\delta_{r+1}$  alors on a  $J \cap \mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_\lambda = \mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_\lambda$  ou  $J \cap \mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_\lambda = (0)$ . Prenons un tableau  $T$  de forme  $\lambda$  et dont la première colonne commence par  $1, 2, \dots, r+1$ . Pour un tel tableau  $\mathfrak{S}_{r+1} \subset Q(T)$ . Il vient

$$\delta_{r+1} * e_T(\tau) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma \delta_{r+1}(\sigma) e_T(\sigma^{-1}\tau)$$

Mais  $e_T(\sigma^{-1}\tau) = \varepsilon(\sigma)e_T(\tau)$  donc

$$\delta_{r+1} * e_T(\tau) = (r+1)!e_T$$

Il en résulte que  $e_T \in J$  et donc que  $J \supset \mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]_\lambda$ .

En conclusion l'idéal bilatère engendré par  $\delta_{r+1}$  est le noyau de la représentation et il est formé des sous-algèbres simples associées aux partitions de longueur au moins  $r+1$ .

**§ 2. Les représentations de  $GL(V)$ .** — Le corps  $\mathbf{K}$  est toujours de caractéristique 0. On conserve les notations précédentes.

**Proposition 2-1.** — *L'algèbre  $\mathcal{A}_{r,n}$  est semi-simple.*

On vient de déterminer la structure de  $\mathcal{B}_{r,n}$  qui est semi-simple. Le  $\mathfrak{S}_n$  module  $V^{\otimes n}$  est semi-simple de dimension finie et admet une décomposition en composantes isotypiques :

$$V^{\otimes n} = \bigoplus (V^{\otimes n})_\lambda$$

où  $\lambda$  parcourt l'ensemble des partitions de  $n$  de longueur au plus  $r$ . Aucune de ces composantes n'est réduite à  $(0)$ . Pour un tel  $\lambda$ , soit  $m(\lambda)$  la multiplicité; le module  $(V^{\otimes n})_\lambda$  se décompose de manière non canonique en la somme de  $m(\lambda)$  modules de type  $\gamma(\lambda)$ . Le commutant d'un tel module irréductible étant réduit aux scalaires, on peut appliquer la Proposition 2-4 de l'appendice. On a donc

$$\mathcal{A}_{r,n} \cong \prod_{\lambda} M_{m(\lambda)}(\mathbf{K})$$

C'est une algèbre semi-simple.

Fixons une partition  $\lambda$  de longueur au plus  $r$ . Soit  $C_\lambda$  le commutant du  $\mathfrak{S}_n$ -module  $(V^{\otimes n})_\lambda$ . C'est l'ensemble des restrictions à  $(V^{\otimes n})_\lambda$  des éléments de  $\mathcal{A}_{r,n}$ . Le commutant  $C_\lambda$  est isomorphe à  $M_{m(\lambda)}(K)$ . La restriction de  $\pi_{r,n}$  à  $V_\lambda^{\otimes n}$  est un homomorphisme de  $\text{GL}(V)$  dans le groupe multiplicatif  $C_\lambda$ . Si on choisit un isomorphisme de  $C_\lambda$  avec  $M_{m(\lambda)}(K)$ , on obtient une représentation de  $\text{GL}(V)$ . La classe  $\varpi(\lambda)$  de cette représentation est bien déterminée.

**Théorème 2-2.** — *La classe  $\varpi(\lambda)$  est irréductible et la représentation de  $\text{GL}(V) \times \mathfrak{S}_n$  dans  $(V^{\otimes n})_\lambda$  est irréductible de type  $\varpi(\lambda) \otimes \gamma(\lambda)$ .*

Fixons une décomposition

$$(V^{\otimes n})_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{m(\lambda)}$$

en somme directe de  $\mathfrak{S}_n$ -modules simples ( tous de la classe  $\gamma(\lambda)$  ). Pour tout  $i$  choisissons un isomorphisme  $T_i$  du  $\mathfrak{S}_n$ -module  $V_1$  sur le  $\mathfrak{S}_n$ -module  $V_i$ ; en particulier prenons  $T_1 = \text{Id}$ . Pour tout couple  $(i, j)$  on a un isomorphisme  $T_i T_j^{-1}$  de  $V_j$  sur  $V_i$ . Soit  $e_1$  un élément non nul de  $V_1$ ; posons  $e_j = T_j(e_1)$  et soit  $W$  le sous-espace vectoriel ayant pour base  $e_1, \dots, e_n$ .

Soit  $T \in C_\lambda$ . Si  $P_i$  est la projection de  $(V^{\otimes n})_\lambda$  sur  $V_i$ , alors  $P_i T \in C_\lambda$ . La restriction à  $V_j$  de  $P_i T$  est un homomorphisme de  $\mathfrak{S}_n$ -modules de  $V_j$  sur  $V_i$ ; c'est donc un multiple de  $T_i T_j^{-1}$ . Il existe des scalaires  $a_{i,j}$  tels que

$$P_i T P_j = a_{i,j} T_i T_j^{-1} P_j$$

L'application qui à  $T$  fait correspondre la matrice  $A = (a_{i,j})$  est un isomorphisme de  $C_\lambda$  sur  $M_{m(\lambda)}(K)$ . Cette représentation de  $C_\lambda$  est évidemment irréductible et peut être considérée comme une représentation dans  $W$ . La représentation de  $\text{GL}(V)$  obtenue en restreignant  $\pi_{r,n}$  à  $W$  est donc irréductible puisque  $C_\lambda$  est la sous-algèbre engendrée par les restrictions des  $\pi_{r,n}(g)$ . Ceci prouve la première assertion du théorème. Pour la deuxième, on considère l'application

$$\theta : \left( \sum t_j e_j, v_1 \right) \mapsto \sum t_j T_j(v_1)$$

de  $W \times V_1$  dans  $(V^{\otimes n})_\lambda$ . Elle se prolonge à  $W \otimes V_1$  et on vérifie de suite qu'elle est surjective, donc bijective (les dimensions sont les mêmes). De plus si on munit

$V_1$  de sa structure de  $\mathfrak{S}_n$ -modules et  $W$  de sa structure de  $\mathrm{GL}(V)$ -module, alors  $W \otimes V_1$  est un  $\mathrm{GL}(V) \times \mathfrak{S}_n$ -module (produit tensoriel externe) et  $\theta$  est un isomorphisme sur  $(V^{\otimes n})_\lambda$ . Les vérifications sont sans mystères.

Il nous faut maintenant comparer ces représentations de  $\mathrm{GL}(V)$ . Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux partitions de  $n$ , de longueur au plus  $r$  et si  $\varpi(\lambda) = \varpi(\mu)$  alors il existe un endomorphisme  $U$  du  $K$ -espace vectoriel  $(V^{\otimes n})$  qui commute à  $\mathrm{GL}(V)$  et tel que  $U((V^{\otimes n})_\lambda)$  soit non nul et contenu dans  $(V^{\otimes n})_\mu$ . Mais  $U \in \mathcal{B}_{r,n}$  donc l'image de  $(V^{\otimes n})_\lambda$  est contenue dans  $(V^{\otimes n})_\lambda$ . On a donc  $\lambda = \mu$ . Pour un  $n$  fixé les représentations obtenues sont donc deux à deux inéquivalentes. De plus prenons  $g = t\mathrm{Id}$  un élément du centre de  $\mathrm{GL}(V)$ . Alors  $\pi_{r,n}(t\mathrm{Id}) = t^n \mathrm{Id}$  et donc les séries obtenues pour différentes valeurs de  $n$  sont deux à deux disjointes.

On peut obtenir des modèles explicites pour les représentations. Fixons à nouveau  $\lambda$  et soit  $T$  un tableau de forme  $\lambda$ . On suppose que  $\ell(\lambda) \leq r$  de sorte qu'on a une composante isotypique  $(V^{\otimes n})_\lambda$ . Considérons cette composante comme un  $\mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]$ -module. Soit  $(V^{\otimes n})_T$  l'image de  $\rho_{r,n}(e_T)$ . C'est un sous-espace invariant par  $\mathrm{GL}(V)$ . Supposons qu'il ne soit pas irréductible et soit  $F$  un sous-espace invariant non trivial. Soit  $\mathcal{J}$  l'ensemble des  $\varphi \in \mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]$  tel que l'image de  $\rho_{r,n}(\varphi)$  soit contenu dans  $F$ . C'est un idéal à droite contenu dans l'idéal à droite  $\mathcal{I}$  engendré par  $e_T$ . Or on sait que ce dernier idéal est minimal donc  $\mathcal{J} = (0)$  ou  $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ . Mais  $F$  admet un supplémentaire invariant par  $\mathrm{GL}(V)$  (l'action de  $\mathrm{GL}(V)$  est semi-simple) et le projecteur correspondant appartient à  $\mathcal{B}_{r,n}$  donc est de la forme  $\rho_{r,n}(\varphi)$  pour une fonction  $\varphi$  non nulle et qui appartient à  $\mathcal{J}$ . Enfin l'image de  $\rho_{r,n}(e_T)$  contient strictement  $F$  de sorte que  $e_T \notin \mathcal{J}$ . On a une contradiction.

En tant que  $\mathrm{GL}(V)$ -module  $(V^{\otimes n})_T$  est donc irréductible de type  $\varpi(\lambda)$ .

Rappelons que pour obtenir un idempotent on doit normaliser  $e_T$  en le divisant par un scalaire convenable. Notons  $e'_T$  cet idempotent. Supposons alors qu'on ait des tableaux  $T_1, \dots, T_s$  de forme  $\lambda$  et tels que les idempotents associés  $e'_{T_j}$  vérifient  $e'_{T_i} e'_{T_j} = 0$  pour  $i < j$ . Les  $\rho_{r,n}(e'_{T_j})$  sont des projecteurs  $p_j$  qui vérifient  $p_i p_j = 0$  pour  $i < j$  ce qui prouve que la somme des  $V_{T_j}$  est une somme directe.

Or on sait qu'un tel système de tableaux s'obtient en prenant les tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ . Leur nombre est exactement  $m(\lambda)$ . On a donc démontré le théorème suivant.

**Théorème 2-3.** — *Soit  $\lambda$  une partition de  $n$  de longueur au plus  $r$ . On a*

$$(V^{\otimes n})_\lambda = \bigoplus_T (V^{\otimes n})_T$$

où  $T$  parcourt l'ensemble des tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ .

Il est temps de donner un ou deux exemples. Prenons  $r$  quelconque.

Si  $n = 1$ , il y a une seule classe  $\lambda = (1)$  de longueur au plus 1. L'action de  $\mathfrak{S}_1$  dans  $V$  est triviale et l'action de  $\mathrm{GL}(V)$  est irréductible.

Si  $n = 2$  et  $r \geq 2$ , on peut prendre  $\lambda = (1, 1)$  ou  $\lambda = (2, 0)$ . Les tableaux de Young

standard sont

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Soient  $\sigma_0$  l'élément neutre de  $\mathfrak{S}_2$  et  $\sigma_1$  l'élément non trivial. Pour le premier tableau on a

$$e_T = e_{\sigma_0} - e_{\sigma_1}$$

donc

$$\rho_{r,2}(e_T)v_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$$

L'image est donc le sous-espace des tenseurs antisymétriques, qui, en tant que  $\text{GL}(V)$ -module est isomorphe à  $\bigwedge^2(V)$ , muni de l'action évidente. On a  $m((1,1)) = 1$  et la dimension est  $\dim \varpi((1,1)) = r(r-1)/2$ . la représentation  $\gamma((1,1))$  de  $\mathfrak{S}_2$  est le caractère signe.

Pour le deuxième tableau, on a

$$e_T = e_{\sigma_0} + e_{\sigma_1}$$

donc

$$\rho_{r,2}(e_T)v_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$$

L'image est donc le sous-espace des tenseurs symétriques, qui, en tant que  $\text{GL}(V)$ -module est isomorphe à  $S^2(V)$ , muni de l'action évidente. On a  $m((2,0)) = 1$  et la dimension est  $\dim \varpi((2,0)) = r(r+1)/2$ . la représentation  $\gamma((2,0))$  de  $\mathfrak{S}_2$  est la représentation triviale.

Finalement, en tant que  $\text{GL}(V)$ -module

$$V \otimes V \cong \bigwedge^2(V) \oplus S^2(V)$$

Pour  $n = 3$  et  $r \geq 3$ , les tableaux de Young standards sont

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Le premier tableau correspond à nouveau aux tenseurs symétriques, le deuxième aux tenseurs antisymétriques. Les deux derniers ont la même forme donc

$\varpi((2, 1, 0))$  est une classe de représentations irréductibles de  $\text{GL}(V)$  qui intervient avec la multiplicité 2.

Enumérons les éléments de  $\mathfrak{S}_3$  :

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le troisième tableau  $T_3$  donne le symétriseur

$$e_{T_3} = e_{\sigma_0} + e_{\sigma_3} - e_{\sigma_2} - e_{\sigma_4}$$

donc

$$\rho_{r,3}(e_{T_3})(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_3 \otimes v_1 \otimes v_2$$

Le quatrième tableau  $T_4$  donne le symétriseur

$$e_{T_4} = e_{\sigma_0} + e_{\sigma_2} - e_{\sigma_3} - e_{\sigma_5}$$

donc

$$\rho_{r,3}(e_{T_4})(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 - v_2 \otimes v_3 \otimes v_1$$

La classe de représentation irréductibles  $\varpi((2, 1, 0))$  de  $\text{GL}(V)$  est de dimension la moitié de

$$r^3 - \frac{1}{6}r(r-1)(r-2) - \frac{1}{6}r(r+1)(r+2)$$

soit  $(r-1)r(r+1)/3$ . La représentation de  $\mathfrak{S}_3$  est de dimension 2. On peut la construire en faisant opérer  $\mathfrak{S}_3$  dans  $\mathbf{K}^3$ , par permutation des coordonnées, et en notant que le plan “somme des coordonnées nulle” est invariant.

Si  $n$  est quelconque, parmi les tableaux de Young standards, on trouve celui qui a une seule ligne de forme  $(n, 0, 0 \dots)$ , qui correspond aux tenseurs symétriques et, si  $n \leq r$ , le tableau a une seule colonne de forme  $1^{(n)} = (1, 1, 1 \dots, 1)$  qui correspond aux tenseurs antisymétriques.

Dans une autre direction prenons  $r = 2$ . Les cas  $n = 1, 2$  viennent d’être examinés. Si  $n \geq 3$ , on doit se limiter aux partitions de longueur au plus 2, ce qui donne les  $n + 1$  possibilités  $(m, n - m)$  avec  $0 \leq m \leq n$ . On a donc obtenu un ensemble de classes de représentations irréductibles de  $\text{GL}_2(\mathbf{K})$  avec les deux paramètres  $m$  et  $n$ .

Revenons à la situation générale. Si  $\pi$  est une représentation irréductible de dimension finie de  $\mathrm{GL}(V)$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , on peut “tordre”  $\pi$  par le caractère  $\chi_n(g) = \mathrm{Det}(g)^n$ . La représentation tordue est le produit tensoriel (interne)

$$\pi \otimes \chi_n(g) = \mathrm{Det}(g)^n \pi(g)$$

Cette notion passe aux classes d'équivalence de représentations. Il est naturel de chercher à déterminer les représentations obtenues en tordant les  $\varpi(\lambda)$ . On le fera plus loin. Pour le moment, on va caractériser les représentations de  $\mathrm{GL}(V)$  qu'on a construites.

Rappelons qu'une représentation  $\pi$  de  $\mathrm{GL}(V)$  dans un espace vectoriel de dimension finie  $E$  est rationnelle si  $\pi(g)$  est une fonction rationnelle de  $g$ , c'est-à-dire une fonction polynomiale des coefficients matriciels de  $g$  (relativement à une base de  $V$ ) et de l'inverse du déterminant de  $g$ . En tensorisant  $\pi$  avec une puissance convenable du déterminant, on se ramène au cas polynomial. Une représentation  $\pi$  polynomiale est homogène de degré  $n$  si pour tout  $t \in \mathbf{K}^*$ , on a  $\pi(tg) = t^n \pi(g)$

**Lemme 2-4.** — *Toute représentation polynomiale se décompose en la somme directe de représentations polynomiales homogènes*

Considérons l'opérateur  $\pi(t \mathrm{Id})$ ; c'est un polynôme en  $t$  à coefficients dans  $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(E)$

$$\pi(t \mathrm{Id}) = \sum_{n \geq 0} p_n t^n$$

L'identité  $\pi(tu \mathrm{Id}) = \pi(t \mathrm{Id})\pi(u \mathrm{Id})$  et le fait que  $\mathbf{K}$  soit infini, donnent  $p_n p_m = p_{n+m}$  et, pour  $n \neq m$ ,  $p_n p_m = 0$ . D'autre part, pour tout  $e \in E$ , on a, en prenant  $t = 1$ , la décomposition  $e = \sum p_n(e)$ . Si  $E_n = p_n(E)$  alors  $E = \bigoplus E_n$ . Notons que ceci est en fait la décomposition en sous-espaces propres pour l'action des matrices scalaires. Comme ces dernières sont dans le centre du groupe, chaque  $E_n$  est stable par  $\mathrm{GL}(V)$ . La représentation dans  $E_n$  est homogène de degré  $n$ .

**Lemme 2-5.** — *Soit  $\pi$  une représentation polynomiale homogène de degré  $n \geq 1$  de  $\mathrm{GL}(V)$ . Il existe une unique représentation  $\tilde{\pi}$  de  $\mathcal{A}_{r,n}$  dans  $E$  telle  $\pi = \tilde{\pi} \circ \pi_{r,n}$*

Pour tout  $g \in \mathrm{GL}(V)$  notons  $\delta_g$  la masse +1 au point  $g$  et considérons les mesures à support fini ou si on préfère les combinaisons formelles finies, à coefficients dans  $\mathbf{K}$  des points du groupe. En posant  $\delta_g * \delta_{g'} = \delta_{gg'}$ , on obtient une algèbre de convolution. Notons la  $\mathcal{C}(\mathrm{GL}(V))$ . La représentation  $\pi_{r,n}$  se prolonge en un homomorphisme  $\theta$  surjectif de  $\mathcal{C}(\mathrm{GL}(V))$  dans  $\mathcal{A}_{r,n}$ . Soit  $V^*$  le dual de  $V$ . Si  $v \in V$  et  $v^* \in V^*$ , alors  $\langle gv, v^* \rangle$  est un coefficient de  $g$ . Soient  $v_1, \dots, v_n$  des éléments de  $V$  et  $v_1^*, \dots, v_n^*$  des éléments de  $V^*$ . La quantité

$$\prod_1^n \langle gv_i, v_i^* \rangle$$



est un coefficient de  $\pi_{r,n}(g)$  et un coefficient quelconque s'obtient en combinant linéairement les "monômes" précédents. Par suite  $\sum \alpha_g \delta_g$  appartient au noyau de  $\theta$ , si et seulement si, pour tout choix des  $v_i$  et des  $v_i^*$ , on a

$$\sum \alpha_g \prod_1^n \langle gv_i, v_i^* \rangle = 0$$

L'espace vectoriel engendré par les  $\prod_1^n \langle gv_i, v_i^* \rangle$  est exactement l'espace des polynômes homogènes de degré  $n$  donc  $\sum \alpha_g \delta_g$  appartient au noyau de  $\theta$  si et seulement si, pour tout polynôme  $P$  homogène de degré  $n$ , on a  $\sum \alpha_g P(g) = 0$ . S'il en est ainsi, alors pour toute représentation polynomiale  $\pi$  homogène de degré  $n$  on a  $\sum \alpha_g \pi(g) = 0$  et le théorème est prouvé. Si  $(\pi, E)$  est une représentation homogène de degré 0 alors comme les seules fonctions polynomiales homogènes degré 0 sont les constantes, l'application  $\pi(g)$  est indépendante de  $g$  c'est toujours l'identité. La représentation  $\pi$  est donc un multiple de la représentation triviale.

**Théorème 2-6.** — *Les représentations rationnelles de dimension finie de  $\mathrm{GL}(V)$  sont semi-simples. Le groupe  $\mathrm{GL}(V)$  est linéairement réductif.*

On se ramène au cas polynomial en tordant la représentation, puis au cas homogène grâce au Lemme 2-4. Le Lemme 2-5 nous réduit au cas de  $\mathcal{A}_{r,n}$  qui est semi-simple. Toute cette construction ne dépend pas vraiment de  $\mathbf{K}$ . Les représentations sont construites sur  $\mathbf{Q}$  et elles restent irréductibles par extension des scalaires. Exactement comme pour le groupe symétrique les  $\varpi(\lambda)$  sont absolument irréductibles.

Soient  $(\pi_1, E_1)$  et  $(\pi_2, E_2)$  deux représentations de dimension finie de  $\mathfrak{S}_n$ . Considérons leur produit tensoriel interne  $(\pi_1 \otimes \pi_2, E_1 \otimes E_2)$  et cherchons le sous-espace

$$(E_1 \otimes E_2)^{\mathfrak{S}_n}$$

des invariants. Soit  $E_1^*$  le dual de  $E_1$  et  $\pi_1^*$  la représentation contragrédiente définie par  $\pi_1^*(\sigma) = {}^t \pi_1^*(\sigma^{-1})$ . On a un isomorphisme canonique

$$E_1 \otimes E_2 \cong \mathrm{Hom}(E_1^*, E_2)$$

Si on définit l'action de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $\mathrm{Hom}(E_1^*, E_2)$  par

$$(\sigma, f) \mapsto \pi_2(\sigma) \circ f \circ \pi_1^*(\sigma^{-1})$$

alors on a un isomorphisme de  $\mathfrak{S}_n$ -modules et les invariants de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $E_1 \otimes E_2$  correspondent aux opérateurs d'entrelacement entre  $E_1^*$  et  $E_2$

$$(E_1 \otimes E_2)^{\mathfrak{S}_n} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(E_1^*, E_2)$$

Si  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont irréductibles cet espace est de dimension 0 si  $\pi_1^*$  n'est pas équivalente à  $\pi_2$  et de dimension 1 si  $\pi_1^*$  est équivalente à  $\pi_2$ . En général la dimension de  $(E_1 \otimes E_2)^{\mathfrak{S}_n}$  est la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement de  $\pi_1^*$  et de  $\pi_2$ . Si  $\pi_1$  est irréductible c'est la multiplicité de  $\pi_1^*$  dans  $\pi_2$ . Ceci est évidemment valable pour tout groupe fini, pour les représentations rationnelles de dimension finie de  $\mathrm{GL}(V)$  ... Dans le cas du groupe symétrique il y a une simplification supplémentaire due au fait que toute représentation est équivalente à sa contragrédiente. En effet, il suffit de montrer qu'elles ont même caractère or le caractère de la contragrédiente s'obtient en composant le caractère de la représentation avec l'application  $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ . Comme  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  sont conjugués par automorphisme intérieur, ces deux caractères sont égaux.

Soit alors  $\lambda$  une partition de  $n$ , et  $M_\lambda$  un  $\mathfrak{S}_n$ -module simple de la classe  $\gamma(\lambda)$ ; posons

$$F_\lambda(V) = (M_\lambda \otimes V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(M_\lambda, V^{\otimes n})$$

C'est un espace vectoriel de dimension  $m(\lambda)$  et puisque les deux actions commutent c'est aussi un  $\mathrm{GL}(V)$ -module. D'après les remarques ci-dessus

$$(M_\lambda \otimes V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} = (M_\lambda \otimes V_\lambda^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$$

On a un isomorphisme

$$(V^{\otimes n})_\lambda \cong M_\lambda \otimes U_\lambda$$

où  $U_\lambda$  est un  $\mathrm{GL}(V)$ -module irréductible de type  $\varpi(\lambda)$  donc

$$(M_\lambda \otimes V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \cong (M_\lambda \otimes M_\lambda)^{\mathfrak{S}_n} \otimes U_\lambda \cong U_\lambda$$

Le  $\mathrm{GL}(V)$ -module  $F_\lambda(V)$  appartient donc à la classe  $\varpi(\lambda)$ . Ceci suppose que la longueur de  $\lambda$  est au plus  $r$ . Dans le cas contraire, on a simplement  $F_\lambda(V) = (0)$ . Supposons qu'on ait deux espaces vectoriels de dimension finie  $V$  et  $W$  ainsi qu'une application linéaire  $f$  de  $V$  dans  $W$ . On a, canoniquement, une application linéaire  $f^{\otimes n}$  de  $V^{\otimes n}$  dans  $W^{\otimes n}$ . Cette application commute à l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . On obtient une application linéaire

$$F_\lambda(f) : (M_\lambda \otimes V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \rightarrow (M_\lambda \otimes W^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$$

c'est-à-dire de  $F_\lambda(V)$  dans  $F_\lambda(W)$ . Quelques vérifications triviales montrent que, pour tout  $\lambda$ , on a obtenu un foncteur covariant de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie vers elle-même. De plus l'application  $f \mapsto F_\lambda(f)$  est polynomiale; on dit que le foncteur est polynomial. On peut montrer que la construction de ce § fournit tous les foncteurs de ce type (ce sont les foncteurs de Schur). Ce point de vue est systématiquement développé dans l'appendice du

Chapitre 1 de [Mac] Empruntons à cette référence un résultat qui va jouer un rôle essentiel dans le calcul des caractères.

Soient  $\lambda$  une partition d'un entier  $p$  et  $\mu$  une partition d'un entier  $q$ . On a donc une classe de représentations  $\gamma(\lambda)$  de  $\mathfrak{S}_p$  et une classe de représentations  $\gamma(\mu)$  de  $\mathfrak{S}_q$ . Comme dans le Chapitre 2, considérons  $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$  comme un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_{p+q}$  et soit  $\rho$  la classe de représentations induite par  $\gamma(\lambda) \otimes \gamma(\mu)$ . Rappelons que c'est cette construction qui fournit le produit sur l'anneau gradué  $R = \bigoplus R_n$  où  $R_n$  est le  $\mathbf{Z}$ -module libre de base l'ensemble des classes irréductibles de représentations de  $\mathfrak{S}_n$ . Soient  $M_\lambda, M_\mu, M_\rho$  des modules simples respectivement de classe  $\gamma(\lambda), \gamma(\mu), \rho$

**Proposition 2-7.** — *Les  $\mathrm{GL}(V)$ -modules*

$$\left(M_\lambda \otimes V^{\otimes p}\right)^{\mathfrak{S}_p} \otimes \left(M_\mu \otimes V^{\otimes q}\right)^{\mathfrak{S}_q} \quad \text{et} \quad \left(M_\rho \otimes V^{\otimes(p+q)}\right)^{\mathfrak{S}_{(p+q)}}$$

*sont isomorphes.*

Pour éviter des confusions notons  $\times$  le produit tensoriel externe. On utilise les exercices de la fin de l'appendice. On a,

$$M_\rho \otimes V^{\otimes(p+q)} \cong \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_n} \left( (M_\lambda \times M_\mu) \otimes \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_n} (V^{\otimes(p+q)}) \right)$$

La réciprocité de Frobenius donne ensuite

$$\left( \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_n} \left( (M_\lambda \times M_\mu) \otimes \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_n} (V^{\otimes(p+q)}) \right) \right)^{\mathfrak{S}_{p+q}} \cong \left( (M_\lambda \times M_\mu) \otimes \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes(p+q)} \right)^{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}$$

D'autre part

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes(p+q)} \cong V^{\otimes p} \times V^{\otimes q}$$

d'où

$$\left( (M_\lambda \times M_\mu) \otimes \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes(p+q)} \right)^{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q} \cong \left( (M_\lambda \otimes V^{\otimes p}) \times (M_\mu \otimes V^{\otimes q}) \right)^{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}$$

qui est encore isomorphe à

$$\left(M_\lambda \otimes V^{\otimes p}\right)^{\mathfrak{S}_p} \times \left(M_\mu \otimes V^{\otimes q}\right)^{\mathfrak{S}_q}$$

Tous ces calculs sont relatifs à l'action des groupes symétriques mais tous les isomorphismes ci-dessus sont des isomorphismes de  $\mathrm{GL}(V)$ -modules et en ce sens le dernier produit tensoriel  $\times$  est en fait un produit interne. La proposition est donc démontrée.

Soit  $\mathcal{R}_r$  le  $\mathbf{Z}$ -module libre ayant pour base les classes de représentations polynomiales irréductibles de  $\mathrm{GL}(V)$ . On note  $\mathcal{R}_r^n$  le sous-module des représentations homogènes de degré  $n$ . On a  $\mathcal{R}_r = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}_r^n$ . Si  $\lambda$  est une partition, on a d'une part une classe  $\gamma(\lambda)$  qui est l'un des éléments de base de  $R^{|\lambda|}$  et d'autre part la classe du  $\mathrm{GL}(V)$ -module  $M_\lambda \otimes V^{\otimes |\lambda|}$ , c'est-à-dire  $\varpi(\lambda)$  si  $\ell(\lambda) \leq r$  et 0 sinon. Remarquons au passage, qu'en théorie des représentations, la dimension de l'espace est toujours supposée au moins égale à 1 ; il n'y a donc pas de représentation (0). Par contre on peut parler du  $\mathbf{C}(\mathrm{GL}(V))$ -module nul. Pour  $n = 0$ , on a convenu que  $R_0 = \mathbf{Z}$  et on a aussi  $\mathcal{R}_r^0 = \mathbf{Z}$  ; on introduit l'application identique de  $R_0$  sur  $\mathcal{R}_r^0$ .

On a donc une application linéaire surjective de  $R$  sur  $\mathcal{R}_r$ , dont le noyau admet pour base les  $\gamma(\lambda)$  tels que  $\ell(\lambda) > r$ . Le produit tensoriel interne munit  $\mathcal{R}_r$  d'une structure d'anneau gradué ; l'élément neutre est la représentation triviale (sa dimension est 1 pas 0). La Proposition signifie qu'on a un homomorphisme d'anneau de  $R$  sur  $\mathcal{R}_r$ .

On va maintenant pouvoir calculer les caractères des représentations de  $\mathrm{GL}(V)$ . Si  $\pi$  est une représentation rationnelle de ce groupe, son caractère est la fonction

$$\mathrm{ch}(\pi)(g) = \mathrm{Tr} \pi(g)$$

Le caractère d'une somme directe est la somme des caractères, celui d'un produit tensoriel le produit des caractères. Si on tord par  $\mathrm{Det}^m$ , on multiplie donc le caractère par la fonction  $\mathrm{Det}(g)^m$  ; il suffit donc de considérer le cas polynomial.

Le caractère de  $\pi$  est alors une fonction polynomiale sur  $\mathrm{GL}(V)$  qui est centrale, c'est-à-dire invariante par automorphismes intérieurs. Fixons une base de  $V$ . Considérons le cas où  $g$  est diagonale de coefficients  $x_1, \dots, x_r$ . La restriction du caractère à ces matrices diagonales est un polynôme symétrique en  $x_1, x_2, \dots, x_r$

$$\mathrm{ch}(\pi)(g) = P(x_1, \dots, x_r)$$

Si on note  $e_1, \dots, e_r$  les fonctions symétriques élémentaires des  $x_i$ , il existe un polynôme  $Q$  tel que

$$\mathrm{ch}(\pi)(g) = Q(e_1, \dots, e_r)$$

Mais les  $e_i$  peuvent être considérées comme des fonctions polynomiales sur  $\mathrm{GL}(V)$  car, au signe près ce sont les coefficients du polynôme caractéristique. Avec cette interprétation, l'expression précédente pour le caractère est valable pour tout  $g$ , diagonalisable sur  $\mathbf{K}$ . Si le corps est algébriquement clos, alors les matrices diagonalisables sont Zariski denses donc on a l'égalité partout : le caractère est un polynôme symétrique en les valeurs propres de  $g$  ou si on préfère un polynôme en les coefficients du polynôme caractéristique.

Dans le cas général, on peut par exemple procéder comme suit. On se ramène au cas irréductible. La représentation  $\pi$  est définie sur  $\mathbf{Q}$  c'est-à-dire qu'il existe une

$\mathbf{Q}$ -forme  $V_{\mathbf{Q}}$  de  $V$  et une  $\mathbf{Q}$ -forme  $E_{\mathbf{Q}}$  de l'espace  $E$  de la représentation telle que  $\mathrm{GL}(V_{\mathbf{Q}})$  stabilise  $E_{\mathbf{Q}}$  (et y opère irréductiblement). Choisissons des bases de  $V_{\mathbf{Q}}$  et de  $E_{\mathbf{Q}}$ . Etendons le corps des scalaires à un clôture algébrique  $\overline{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{K}$ . Le caractère, restreint aux matrices diagonales, est une fonction polynomiale symétrique des  $x_i$ , à coefficients rationnels. On réintroduit le polynôme  $Q$  qui est donc à coefficients rationnels, donc indépendant de  $\mathbf{K}$ . Les coefficients du polynôme caractéristique sont des polynômes, à coefficients rationnels (et même entiers), des coefficients de la matrice; ils ne dépendent pas de  $\mathbf{K}$ . Ceci permet de se placer sur  $\overline{\mathbf{K}}$  et donc de conclure.

Le caractère  $\mathrm{ch}(\pi)$  est donc donné par un polynôme symétrique rationnel, en  $r$  indéterminées, la valeur du caractère en  $g$  est obtenue en substituant à ces indéterminées les valeurs propres de  $g$  (sur une extension de  $\mathbf{K}$ ). Avec les notations du Chapitre 2, on peut donc considérer que  $\mathrm{ch}(\pi)$  est un élément de l'anneau  $\bigwedge_r$  des polynômes symétriques en  $x_1, \dots, x_r$ . Plus précisément on dispose d'un homomorphisme d'anneaux

$$\mathrm{ch} : \mathcal{R}_r \rightarrow \Lambda_r$$

Notons de plus que si  $\pi \in \mathcal{R}_r^n$  alors  $\mathrm{ch}(\pi)$  est homogène de degré  $n$  donc appartient à  $\Lambda_r^n$ .

On va se débarrasser du paramètre  $r$ . Soit  $s > r$  et prenons  $\lambda$  de poids  $n$  et de longueur au plus  $r$ . Soient  $V_1$  un espace vectoriel de dimension  $r$  et  $W_1$  un sous-espace de dimension  $s - r$ ; posons  $V_2 = V_1 \oplus W_1$ . Choisissons une base de  $V_1$  ainsi qu'une base de  $W_1$ . Considérons une matrice diagonale  $g$  de coefficients  $x_1, \dots, x_r, \dots, x_s$ . Elle opère dans  $(M_\lambda \otimes V_2^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$  et on peut considérer sa trace  $\mathrm{ch}(\varpi_s(\lambda))(g)$  (l'indice  $s$  correspond donc à la dimension de  $V_2$ ). En fait cette trace a un sens même si certains des  $x_i$  sont nuls. On a une décomposition

$$V_2^{\otimes n} = V_1^{\otimes n} \oplus \dots$$

où les termes non écrits font intervenir  $W_1$ . Si on prend  $x_{r_1} = \dots = x_s = 0$ , alors on obtient la valeur de  $\mathrm{ch}(\varpi_r(\lambda))$  sur la matrice diagonale, d'ordre  $r$  et dont les coefficients diagonaux sont  $x_1, \dots, x_r$ . On a une application linéaire

$$\rho_{s,r}^{|\lambda|} : \Lambda_s^{|\lambda|} \rightarrow \Lambda_r^{|\lambda|}$$

(voir Chapitre 1). Les remarques précédentes signifient que

$$\rho_{s,r}^{|\lambda|}(\mathrm{ch}(\varpi_s(\lambda))) = \mathrm{ch}(\varpi_r(\lambda))$$

Mais on a aussi des homomorphismes

$$b_{s,r}^n : \mathcal{R}_s^n \rightarrow \mathcal{R}_r^n$$

définis par

$$b_{s,r}^n(\varpi_s(\lambda)) = \begin{cases} \varpi_r(\lambda) & \text{si } \ell(\lambda) \leq r \\ 0 & \text{si } s \geq \ell(\lambda) > r \end{cases}$$

On note  $\mathcal{R}^n$  la limite projective et  $\mathcal{R} = \bigoplus \mathcal{R}^n$  (limite projective dans la catégorie des anneaux gradués), Ce qui précède montre qu'on a un homomorphisme d'anneaux  $\text{ch}$  de  $\mathcal{R}$  dans  $\Lambda$ . On peut résumer la situation par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^n & \xrightarrow{\text{ch}} & \Lambda^n \\ \downarrow b_r^n & & \downarrow \rho_r^n \\ \mathcal{R}_r^n & \xrightarrow{\text{ch}} & \Lambda_r^n \end{array}$$

Noter que les flèches verticales sont des bijections si  $r \geq n$ . D'autre part revenons sur les homomorphismes de  $R$  sur les  $\mathcal{R}_r$ . En un sens évident ils sont compatibles avec les  $b_{s,r}^n$  et à la limite on obtient un isomorphisme  $\psi$  de  $R$  sur  $\mathcal{R}$ . Au chapitre 2 on a introduit un isomorphisme de  $R$  sur  $\Lambda$ . On va prouver que  $\text{ch} = \theta \circ \psi^{-1}$ .

Il suffit de le vérifier pour un système de générateurs. Dans  $\Lambda$  considérons les fonctions symétriques élémentaires  $e_n, n \geq 1$ . On a déjà montré, au chapitre 2, que  $e_n$  correspond à la représentation signature de  $\mathfrak{S}_n$ ; notons la  $sg_n$ . La représentation  $sg_n$  de  $\mathfrak{S}_n$  est associée, pour  $r \geq n$  à la représentation de  $\text{GL}(V)$  dans  $\bigwedge^n(V)$ . Pour calculer  $\text{ch}(\varpi(sg_n))$ , on peut prendre  $r = n$  et calculer  $\text{ch}(\varpi_n(sg_n))$ . Mais dans ce cas la représentation de  $\text{GL}(V)$  est de dimension 1 et est le caractère  $\text{Det}$ , c'est-à-dire le produit des valeurs propres, c'est-à-dire  $e_n$ .

On a ainsi démontré le théorème suivant

**Théorème 2-8.** — *Pour toute partition  $\lambda$  on a*

$$\text{ch}(\varpi(\lambda)) = s_\lambda$$

Plus explicitement :

**Corollaire 2-9.** — *Soit  $r = \dim(V)$  et soit  $\lambda$  une partition de longueur au plus  $r$ . Le caractère de la classe de représentations  $\varpi(\lambda)$  est*

$$\text{ch}(\varpi(\lambda))(g) = \frac{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma^{-1}(1)}^{\lambda_1+r-1} \cdots x_{\sigma^{-1}(r)}^{\lambda_r}}{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma^{-1}(1)}^{r-1} \cdots x_{\sigma^{-1}(r)}^0} = \frac{\text{Det}(x_i^{\lambda_j+r-j})}{\text{Det}(x_i^{r-j})}$$

où les  $x_i$  sont les valeurs propres de  $g$ .

Donnons une ou deux applications.

**Proposition 2-10.** — Soit  $\lambda$  une partition de longueur au plus  $r$ . La classe irréductible  $\varpi(\lambda) \otimes \text{Det}$  est la classe  $\varpi(\mu)$  avec  $\mu = (\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_r + 1)$

C'est immédiat en comparant les caractères. On peut aussi le voir à partir de la formule de Pieri.

Calculons la dimension de  $\varpi(\lambda)$ . On doit évaluer  $s_\lambda(1, 1, \dots, 1)$ . Dans la formule quotient de deux déterminants, prenons  $x_i = t^{i-1}$  où  $t \in \mathbf{K}^*$ . On a

$$s_\lambda(1, t, t^2, \dots, t^{r-1}) = \frac{\text{Det}(t^{(i-1)(\lambda_j+r-j)})}{\text{Det}(t^{(i-1)(r-j)})}$$

C'est un quotient de déterminants de Vandermonde d'où

$$s_\lambda(1, \dots, t^{r-1}) = \prod_{i < j} \left( \frac{t^{\lambda_i+r-i} - t^{\lambda_j+r-j}}{t^{r-i} - t^{r-j}} \right)$$

Dans cette expression tous les facteurs qui interviennent ont un zéro simple pour  $t = 1$ . En simplifiant par  $t - 1$  on obtient

$$\left( \frac{t^{\lambda_i+r-i} - t^{\lambda_j+r-j}}{t^{r-i} - t^{r-j}} \right) = \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} + (t - 1)(\dots)$$

En prenant alors  $t = 1$  on obtient la dimension cherchée.

**Théorème 2-10.** — La dimension de  $\varpi(\lambda)$  est

$$\prod_{1 \leq i < j \leq r} \left( \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \right)$$

Au passage :

**Corollaire 2-11.** — Les seules représentations rationnelles de dimension 1 de  $\text{GL}(V)$  sont les puissances du déterminant.

En effet on se ramène au cas polynomial en tordant par une puissance assez grande du déterminant. Pour que  $\varpi(\lambda)$  soit de dimension 1, il faut et il suffit d'après la formule précédente que tous les  $\lambda_i$  soient égaux. mais on sait que  $\lambda = (s, s, s, \dots, s)$  correspond à  $\text{Det}^s$ .

Dans la suite et lorsqu'il y aura risque de confusion, on notera  $\varpi_r$  au lieu de  $\varpi$ .

**§ 3. Le point de vue classique.** — Le corps  $\mathbf{K}$  est toujours de caractéristique 0 et  $V$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ , de dimension  $r \geq 1$ . On note  $V^*$  son dual. On considère l'espace

$$W = W_{p,q} = V^{\oplus p} \oplus V^{*\oplus q}$$

(sommes directes). Le groupe  $GL(V)$  opère naturellement dans  $V$  ainsi que dans  $V^*$ , représentation contragrédiente (transposée de l'inverse). Il opère donc dans  $W$  et donc aussi dans l'algèbre  $S(W^*)$  des fonctions polynômiales sur  $W$ . On cherche à déterminer les invariants dans  $S(W^*)$ .

Il s'agit donc de trouver les application polynômiales  $\psi$  de  $W$  dans  $\mathbf{K}$  telles que, pour  $g \in GL(V)$ , on ait  $\psi(g^{-1}w) = \psi(w)$ . Il est facile d'en construire. Pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq q$  considérons la forme linéaire  $\psi_{i,j}$  définie sur  $W$  par

$$\psi_{i,j}(v_1 \oplus v_2 \oplus \cdots \oplus v_p \oplus v_1^* \oplus v_2^* \oplus \cdots \oplus v_q^*) = \langle v_j^* | v_i \rangle$$

On a

$$\langle gv_j^*, v_i \rangle = \langle v_j, g^{-1}v_i \rangle$$

par définition même de l'action contragrédiente et ceci signifie que  $\psi_{i,j}$  est invariante. plus généralement tout polynôme en les  $\psi_{i,j}$  est invariant. Le premier théorème fondamental (deuxième version) dit qu'on a obtenu tous les invariants.

**Théorème 3-1.** — *La sous-algèbre des invariants de  $GL(V)$  dans  $S(W^*)$  est engendrée par les  $\psi_{i,j}$ .*

On procède en deux temps. On commence par chercher les invariants multilinéaires, c'est-à-dire linéaires par rapport à chacune des variables  $v_i$  et  $v_j^*$  et on procède ensuite par polarisation complète pour traiter le cas général.

**Lemme 3-2.** — *Le sous-espace des invariants multilinéaires de  $GL(V)$  dans  $S(W^*)$  est réduit à (0) si  $p$  est différent de  $q$  et, si  $p = q$  il est engendré par les*

$$\prod_1^p \psi_{j, \sigma(j)}$$

où  $\sigma$  appartient au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_p$

En effet soit  $\varphi$  une telle fonction. Ecrivons qu'elle est invariante par les opérateurs scalaires  $tId$ . Ces derniers opèrent par multiplication par  $t$  dans  $V$  et par multiplication par  $t^{-1}$  dans  $V^*$ . On a donc

$$f(tv_1, \dots, tv_p, t^{-1}v_1^*, \dots, t^{-1}v_q^*) = f(v_1, \dots, v_1^*, \dots, v_q^*)$$

Si  $f$  est multilinéaire et non nulle ceci n'est possible que si  $t^{p-q} = 1$  donc  $p = q$ . Supposons donc que  $p = q$ . Soit  $E = V^{\otimes p}$  donc  $E^* = V^{*\otimes p}$ . Les formes multilinéaires sur  $W$  s'identifient aux formes linéaires sur  $E \otimes E^*$  et ceci est compatible avec les actions canoniques de  $GL(V)$ . On est donc à la recherche de

$$\left( (E \otimes E^*)^* \right)^{GL(V)}$$



Mais on a un isomorphisme

$$\theta : \quad \text{End}_{\mathbf{K}} E \rightarrow (E \otimes E^*)^*$$

donné par

$$\theta(T)(e \otimes e^*) = \langle e^*, T(e) \rangle.$$

Pour que  $T$  commute à l'action de  $\text{GL}(V)$ , il faut et il suffit que, pour tout  $g$  on ait  $g^{-1}Tg = T$  c'est-à-dire que, pour tout  $e$  et  $e^*$

$$\langle e^*, g^{-1}Tge \rangle = \langle e^*, Te \rangle$$

c'est-à-dire que

$$\langle ge^*, Tge \rangle = \langle e^*, Te \rangle$$

ce qui signifie que  $\theta(T)$  est une forme linéaire invariante. Mais le premier théorème fondamental, sous sa première forme, dit que le commutant de  $\text{GL}(V)$  dans  $\text{End}_{\mathbf{K}} E$  est le sous-espace vectoriel engendré par les  $\rho_{r,p}(\sigma)$  où  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ . Calculons  $\theta(\rho_{r,p}(\sigma))$ . Il vient

$$\langle v_1^* \otimes \cdots \otimes v_p^*, \rho_{r,p}(\sigma)v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \rangle = \prod_1^p \langle v_j^*, v_{\sigma^{-1}(j)} \rangle$$

et le Lemme est démontré.

Passons au théorème. Soit  $P \in S(W^*)$  un polynôme invariant. C'est une fonction de  $p + q$  variables vectorielles et on peut le décomposer en une somme de polynômes multihomogènes c'est-à-dire homogènes par rapport à chacune de ces variables. Il est clair que chacune de ces composantes est invariante. On peut donc supposer que  $P$  est homogène de degré  $\alpha_i$  par rapport à  $v_i$  et homogène de degré  $\beta_j$  par rapport à  $v_j$ .

D'une manière générale, si  $Q$  est un polynôme homogène de degré  $s$ , on définit

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^s}{\partial t_1 \dots \partial t_s} (t_1 x_1 + \cdots + t_s x_s)$$

C'est une forme  $s$ -linéaire symétrique et on reconstruit  $Q$  par

$$Q(x) = \frac{1}{s!} f(x, \dots, x)$$

ce qui suppose la caractéristique 0. C'est le processus de polarisation.

On applique ceci à chacune des  $p + q$  variables de  $P$ . On obtient ainsi une forme multilinéaire

$$L(v_{1,1}, \dots, v_{1,\alpha_1}, \dots, v_{p,1}, \dots, v_{p,\alpha_p}, v_{1,1}^*, \dots, v_{1,\beta_1}^*, \dots, v_{q,\beta_q}^*, \dots, v_{q,\beta_q}^*)$$

et elle est invariante. D'après le Lemme, on doit avoir  $\sum \alpha_i = \sum \beta_j$  et  $L$  s'obtient à l'aide de produits  $\langle v_{j,j'}^* | v_{i,i'} \rangle$  qui dans la reconstruction donnent des produits  $\langle v_j^* | v_i \rangle$  et on obtient le théorème.

Ce théorème est valable en toute caractéristique [**Proc**], [**C-P**].

On peut faire un petit peu mieux. Conservons les notations précédentes. Les caractères de  $\text{GL}(V)$  sont les puissances du déterminant; un invariant relatif de poids  $m$  est un polynôme qui se transforme suivant le caractère  $\text{Det}^m$

$$P(g^{-1}w) = (\text{Det } g)^m P(w)$$

Traisons d'abord le cas multilinéaire; on peut supposer  $m > 0$ , quitte à échanger  $V$  et  $V^*$ . A l'aide des homothéties on vérifie, comme pour le cas  $m = 0$  que de tels invariants relatifs multilinéaires non nuls ne peuvent exister que si  $p - q = mr$ . Dans cette situation, donnons nous une partition de  $\{1, 2, \dots, p\}$  en une partie à  $q$  éléments et  $m$  parties à  $r$  éléments. Pour fixer les idées fabriquons ces parties en suivant l'ordre naturel des entiers. On obtient un invariant relatif multilinéaire et de poids  $m$  en choisissant une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, q\}$ ,

$$\left( \prod_1^q \langle v_j^* | v_{\sigma^{-1}(j)} \rangle \right) \prod_1^m \text{Det}(v_{q+sr+1}, \dots, v_{q+sr+r})$$

( On choisit une fonction déterminant sur  $V$  ).

Il faut se convaincre que, lorsqu'on fait varier la partition et  $\sigma$  on obtient un système de générateurs de l'espace vectoriel des formes multilinéaires relativement invariante et de poids  $m$ . En procédant comme dans le cas  $m = 0$ , on introduit l'isomorphisme

$$\theta : \quad \text{Hom}_{\mathbf{K}}(V^{\otimes(q+mr)}, V^q) \rightarrow V^{\otimes(q+mr)} \otimes V^{*q})^*$$

et on se réduit à chercher les applications linéaires  $T$

$$T : \quad V^{\otimes(q+mr)} \rightarrow V^{\otimes q}$$

qui vérifient

$$g^{-1}Tg = (\text{Det}(g))^m T$$

Dans  $V^{\otimes r}$ , le sous-espace des tenseurs antisymétriques est de dimension 1; choisissons un tel tenseur  $a$ , non nul. On a donc  $ga = \text{Det}(g)a$ . Soit  $S$  l'endomorphisme de  $V^{\otimes(q+mr)}$  défini par

$$S(x) = T(x) \otimes a \otimes a \cdots \otimes a$$

Il commute à  $GL(V)$  donc appartient à  $\rho_{r,q+mr}(\mathbf{K}[\mathfrak{S}_{q+mr}])$ . On doit donc déterminer les  $\varphi \in \mathbf{K}[\mathfrak{S}_{q+mr}]$  tels que  $\rho_{r,q+mr}(\varphi)$  ait son image contenu dans le sous-espace  $V^{\otimes q} \otimes a \otimes a \otimes \dots \otimes a$ . Considérons le sous-groupe  $\mathfrak{S}_r \times \dots \times \mathfrak{S}_r$  de  $\mathfrak{S}_{q+mr}$  où les  $m$  copies de  $\mathfrak{S}_r$  correspondent aux entiers de  $q+1$  à  $q+r$ , de  $q+r+1$  à  $q+2r$  ... Soit

$$\varepsilon = \sum_{\mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) \delta_\sigma$$

et notons  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  les “copies” de  $\varepsilon$  dans chacun des sous-groupes  $\mathfrak{S}_r$ . Au produit par une constante non nulle près,  $\rho_{r,q+mr}(\varepsilon_1 * \varepsilon_2 * \dots * \varepsilon_m)$  est le projecteur sur le sous-espace  $V^{\otimes q} \otimes a \otimes a \otimes \dots \otimes a$ . Les applications  $S$  qui conviennent sont donc les combinaisons linéaires des  $\rho_{r,q+mr}(\varepsilon_1 * \varepsilon_2 * \dots * \varepsilon_m) \rho_{r,q+mr}(\sigma)$  pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_{q+mr}$ . Si on revient aux formes linéaires relativement invariantes ceci correspond à

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_{q+rm} \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* \mapsto \prod_{s=0}^{m-1} \text{Det}(v_{\sigma^{-1}(q+sr+1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(q+sr+r)}) \prod_{j=1}^q \langle v_j^* | v_{\sigma^{-1}(j)} \rangle$$

On a ainsi obtenu pour les invariants relatifs l'équivalent du Lemme 3-2.

Le processus de polarisation fonctionne sans modifications. Finalement :

**Théorème 3-3.** — *Soient  $W = V^{\oplus p} \oplus V^{*\oplus q}$ . La sous-algèbre des invariants relatifs dans  $S(W^*)$  est engendrée par les éléments de la forme suivante :*

- $(v_1, \dots, v_p, v_1^*, \dots, v_q^*) \mapsto \langle v_j^* | v_i \rangle$  (poids 0)
- $(v_1, \dots, v_p, v_1^*, \dots, v_q^*) \mapsto \text{Det}(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$  (poids 1)
- $(v_1, \dots, v_p, v_1^*, \dots, v_q^*) \mapsto \text{Det}(v_{j_1}^*, \dots, v_{j_r}^*)$  (poids -1)

Il est clair que ces éléments ne sont pas algébriquement indépendants. La détermination des relations algébriques entre les générateurs relève (entre autres...) du second théorème fondamental.

Passons au deuxième théorème fondamental. On considère  $V^{\oplus p} \oplus V^{*\oplus q}$  et les fonctions polynomiales invariantes sur cet espace. D'après le premier théorème fondamental, ce sont des polynômes en les  $pq$  fonctions  $\langle v_j^* | v_i \rangle$ . Soit  $X(v_1, \dots, v_q^*)$  la matrice à  $p$  lignes et  $q$  colonnes dont les coefficients sont les  $\langle v_j^* | v_i \rangle$ . Toute relation linéaire entre les  $v_i$  se transporte en une relation linéaire entre les lignes de cette matrice qui est donc de rang au plus  $r$ . En fait l'image de l'application  $X$  est exactement la sous-variété des matrices de rang au plus  $r$ . En effet multiplier  $X$  à gauche ou à droite par des matrices carrées revient à remplacer les  $v_i$  ou les  $v_j^*$  par des combinaisons linéaires de sorte que l'image est invariante par ces opérations. Soit  $e_1, \dots, e_r$  une base de  $V$  et soit  $e_1^*, \dots, e_r^*$  la base duale. Soit  $s$  un entier au plus égal à  $\text{Inf}(p, q, r)$ . On choisit  $v_i = e_i$  pour  $i \leq s$  et 0 sinon, puis  $v_j^* = e_j^*$  si  $j \leq s$  et 0 sinon. La matrice  $X$  correspondante est de rang  $s$  ce qui prouve notre assertion sur l'image.

Si  $p \leq r$  ou  $q \leq r$ , alors l'application est surjective et les  $\langle v_j^* | v_i \rangle$  sont donc

algébriquement indépendants. Par contre si  $r < p$  et  $r < q$ , alors tout mineur d'ordre  $r + 1$  extrait de la matrice  $X$  est nul ce qui fournit déjà un certain nombre de relations. Du point de vue ensembliste elles caractérisent l'image mais il n'est pas évident qu'elles donnent toutes les relations. Autrement dit il n'est pas clair a priori que les mineurs d'ordre  $r + 1$  sont un système de générateurs de l'idéal des fonctions polynômes nulles sur la sous-variété des matrices de rang au plus  $r$ . Le second théorème fondamental affirme que c'est vrai.

**Théorème 3-4.** — *Si  $r > p$  ou  $r > q$  alors les  $pq$  invariants  $\langle v_j^* | v_i \rangle$  sont algébriquement indépendants. Si  $r < \text{Inf}(p, q)$  alors les mineurs d'ordre  $r + 1$  engendrent l'idéal des relations entre les  $\langle v_j^* | v_i \rangle$ .*

Pour le démontrer, on revient à la démonstration du premier théorème. Si  $P(x_{i,j})$  est un polynôme à  $pq$  variables alors  $P(\langle v_j^* | v_i \rangle)$  s'écrit comme somme de termes multihomogènes par rapport à chacune des  $p + q$  variables  $v_i$  et  $v_j^*$ . Si donc identiquement  $P(\langle v_j^* | v_i \rangle) = 0$ , alors chacune de ces composantes le sera aussi. On peut donc supposer que  $P$  est homogène de degré  $\alpha_i$  par rapport à chaque  $v_i$  et homogène de degré  $\beta_j$  par rapport à chaque  $v_j^*$ . Le problème est donc de trouver les relations linéaires entre les monômes en les  $\langle v_j^* | v_i \rangle$  ayant les degrés d'homogénéité précédents. Mais ces monômes sont précisément ceux qu'on construit par polarisation. On doit avoir  $\sum \alpha_i = \sum \beta_j$ ; soit  $n$  cet entier. A tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  on a fait correspondre l'un de ces monômes ou peut-être 0. On obtient ainsi au moins une fois chacun de ces monômes. Les relations linéaires sont données par les  $\varphi \in \mathbf{K}[\mathfrak{S}_n]$  telles que  $\rho_{r,n}(\varphi) = 0$ . La première forme du deuxième théorème fondamental nous dit que  $\varphi$  doit appartenir à l'idéal bilatère engendré par

$$\delta_{r+1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} \varepsilon(\sigma) \delta_\sigma$$

où  $\mathfrak{S}_{r+1}$  est le sous-groupe des permutations qui laissent fixes chacun des entiers  $r + 2, \dots, n$ . Une base de cet idéal est donc formé des éléments  $\delta_a * \delta_{r+1} * \delta_b$  où  $a$  et  $b$  sont des éléments de  $\mathfrak{S}_n$ . Si  $T = \rho_{r,n}(\delta_a * \delta_{r+1} * \delta_b)$  la forme multilinéaire associée est

$$\langle Tu_1 \otimes \cdots \otimes u_n | u_1^* \otimes \cdots \otimes u_n^* \rangle$$

ou encore

$$\left\langle \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) u_{b^{-1}\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{b^{-1}\sigma^{-1}(r+1)} \otimes u_{b^{-1}(r+2)} \otimes \cdots \otimes u_{b^{-1}(n)} \mid u_{a(1)}^* \otimes \cdots \otimes u_{a(n)}^* \right\rangle$$

On obtient donc un mineur d'ordre  $r + 1$  extrait de la matrice  $\langle u_i | u_j^* \rangle$  que multiplie un monôme en ces coefficients. Dans notre cas chaque  $u_i$  est l'un des  $u_i$ , chaque  $u_j^*$  l'un des  $v_j$  mais chacun intervient plusieurs fois. Si lorsqu'on forme le déterminant on pioche deux fois dans le même tas on obtient 0 sinon on obtient l'un des mineurs cherchés. Le théorème est donc une simple réinterprétation de la première forme. Ici encore c'est le processus de polarisation qui est essentiel.

§ 4. **Des poids et des racines.** — Dans les § précédents nous avons suivi Schur et Weyl : les représentations de  $G = \mathrm{GL}(V)$  ont été construites à peu près en même temps que l'on a démontré les théorèmes fondamentaux. On va maintenant introduire l'outil essentiel que sont les poids d'une représentation.

Soit  $V$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $r$ . On choisit une base  $e_1, \dots, e_r$  de  $V$  et on note  $e_j^*$  la base duale. Soit  $A \subset \mathrm{GL}(V)$  le sous-groupe des matrices diagonales et soit  $U$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, avec des 1 dans la diagonale. Il est immédiat que  $A$  normalise  $U$ . Le sous-groupe  $B = AU = UA$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ . Le centralisateur de  $A$  dans  $G$  est  $A$ ; soit  $N(A)$  son normalisateur. Soit  $g \in N(A)$  et soit  $a$  une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont  $t_1, \dots, t_r$ . La matrice  $gag^{-1}$  est à nouveau diagonale et ses coefficients sont les  $t_j$  convenablement permutés. Comme l'application  $a \mapsto gag^{-1}$  est un automorphisme de  $A$ , il est facile de voir qu'il existe  $w \in \mathfrak{S}_r$  tel que, pour tout  $a$  diagonale la matrice  $gag^{-1}$  soit la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont, dans l'ordre,  $t_{w^{-1}(i)}$ . Comme toute permutation peut se réaliser à l'aide d'une matrice du même nom, on a un isomorphisme du groupe quotient  $W = N(A)/A$  sur  $\mathfrak{S}_r$ . Le groupe  $W$  est le groupe de Weyl. Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  soit  $w_\sigma$  la matrice défini par  $w_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ . Alors  $w_\sigma$  est un représentant de l'élément  $w$  de  $W$  correspondant à  $\sigma$ . Dans la suite on note souvent  $w$  à la fois un élément de  $W$  et l'un de ses représentants dans  $G$ ; on peut par exemple prendre le précédent mais cela est rarement indispensable.

**Théorème 4-1 (Décomposition de Bruhat).** — *On a*

$$G = \bigcup_{w \in W} U w B$$

*Cette réunion est disjointe. Si  $w_0$  correspond à la permutation  $\sigma_0(i) = n - i$ , alors  $U w_0 B$  est un ouvert de Zariski de  $G$ .*

C'est un classique qui remonte à Gauß.

Rappelons que  $\mathbf{K}^*$  est muni d'une structure de variété affine en l'identifiant à l'hyperbole  $xy = 1$  de  $\mathbf{K}^2$ . En particulier les caractères rationnels de  $\mathbf{K}^*$  sont les caractères  $t \mapsto t^n$  avec  $n \in \mathbf{Z}$ . Le groupe (algébrique)  $A$  est isomorphe à  $\mathbf{K}^{*r}$  (c'est un tore déployé maximal de  $G$ ). Le groupe de ses caractères rationnels est identifié à  $\mathbf{Z}^r$ . A tout élément  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de ce réseau est associé le caractère  $\prod t_i^{\lambda_i}$ . On note  $E_{\mathbf{Z}}$  ce groupe et  $E_{\mathbf{Q}} = E_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ . On note  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  la base naturelle de ce réseau; c'est aussi une base sur  $\mathbf{Q}$ .

Soit  $(\pi, F)$  une représentation rationnelle de dimension finie de  $A$ . On a donc, avec les notations usuelles pour les multientiers, de signe quelconque dans ce cas,

$$\pi(a) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} t^{\alpha}$$

La somme est finie et  $f_{\alpha} \in \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(F)$ . On a  $\pi(aa') = \pi(a)\pi(a')$  ce qui impose  $f_{\alpha} f_{\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$  et  $f_{\alpha} f_{\alpha} = f_{\alpha}$ . En prenant  $a = \mathrm{Id}$ , on obtient  $\sum f_{\alpha} = \mathrm{Id}$  donc les

$f_\alpha$  sont des projecteurs sur des sous-espaces  $F_\alpha$  dont la somme est directe et égale à  $F$ . Chacun de ces sous-espaces est invariant par  $A$  et la restriction de  $\pi$  à  $F_\alpha$  est un multiple du caractère  $t^\alpha$ .

Soit  $(\pi, F)$  une représentation rationnelle de  $G$ ; appliquons ce qui précède à la restriction de  $\pi$  à  $A$ . Les  $\alpha$  tels que  $F_\alpha \neq (0)$  sont appelés les poids de  $\pi$ .

Prenons  $F = M_r(\mathbf{K})$ . et

$$\pi(g)(m) = gmg^{-1}$$

C'est la représentation "adjointe". Soit  $X_{i,j}$  la matrice carrée d'ordre  $r$  dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient  $(i, j)$  qui vaut 1. Si  $a$  est diagonale

$$\pi(a)X_{i,j} = \frac{t_i}{t_j}X_{i,j}$$

Le vecteur  $f_{i,j}$  est donc un vecteur de poids  $t_i/t_j$ . En notation additive, ce poids est  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ . Les poids non nuls de la représentation adjointe sont les racines de  $G$ , relativement à  $A$ . Les racines sont donc les  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$  pour  $i \neq j$ . Elles appartiennent toutes à l'hyperplan  $H$ , somme des coordonnées nulles.

Utilisons l'ordre lexicographique : une racine est positive si sa première coordonnée non nulle est positive. Les racines positives sont donc les  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$  avec  $i < j$ . Soient

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{r-1} = \varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r$$

Pour  $i < j$

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$$

Toute racine positive est combinaison linéaire des  $\alpha_i$ . Ces dernières sont les racines simples; elles forment une base de  $H$ .

Soient  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  deux éléments de  $E_{\mathbf{Z}}$ . On dit que  $\Lambda$  est plus grand que  $\Lambda'$  (ou domine  $\Lambda'$ ) si  $\Lambda - \Lambda'$  est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de racines simples. Si

$$\Lambda = \sum \lambda_i \varepsilon_i, \quad \Lambda' = \sum \lambda'_i \varepsilon_i$$

et

$$\Lambda = \Lambda' + \sum n_j \alpha_j$$

alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda'_1 + n_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \lambda'_1 + \lambda'_2 + n_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_{r-1} &= \lambda'_1 + \dots + \lambda'_{r-1} + n_{r-1} \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_r &= \lambda'_1 + \dots + \lambda_r \end{aligned}$$

On retrouve donc la relation de dominance introduite dans un chapitre précédent mais pour des partitions de même poids.

Soit à nouveau  $(\pi, F)$  une représentation rationnelle de  $G$ . Supposons la irréductible. L'ensemble de ses poids est une partie finie de  $E_{\mathbf{Z}}$ . Pour la relation de dominance il y a donc des éléments maximaux. Un tel élément maximal est appelé un plus haut poids ou poids dominant de la représentation et les vecteurs non nuls sont dits dominants ou de plus haut poids.

**Théorème 4-2.** — *Le poids dominant d'une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de  $\mathrm{GL}(V)$  est unique. Le sous-espace des vecteurs dominants (et du vecteur 0) est de dimension 1 et est le sous-espace des vecteurs fixés par le sous-groupe  $U$ . La classe de la représentation est déterminée par le poids dominant. Enfin les poids dominants sont les  $\lambda = \sum_1^r \lambda_i \varepsilon_i$  qui vérifient  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ .*

On peut supposer, en tensorisant avec une puissance convenable du déterminant, que  $(\pi, F)$  est une sous-représentation de la représentation de  $G$  dans l'algèbre tensorielle de  $V$ . Les tenseurs  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$  forment une base de vecteurs propres pour l'action de  $A$  et un tel vecteur est de poids  $\sum_j \varepsilon_{i_j}$ . D'autre part il est facile de montrer que le groupe  $U$  est engendré par les sous-groupes à un paramètre

$$\mathrm{Exp}(xX_{i,j}) = \mathrm{Id} + xX_{i,j}, \quad i < j$$

Or on a

$$\mathrm{Exp}(xX_{i,j})e_k = \begin{cases} e_k & \text{si } k \neq j \\ e_k + xe_i & \text{si } k = j \end{cases}$$

de sorte que le vecteur  $\mathrm{Exp}(xX_{i,j})e_k$  est soit de poids  $\varepsilon_k$  soit somme d'un vecteur de poids  $\varepsilon_k$  et d'un vecteur de poids  $\varepsilon_i = \varepsilon_k + \alpha_i + \dots + \alpha_{k-1}$ . En rassemblant les remarques ci-dessus, on obtient que, pour  $u \in U$  et pour tout poids  $\alpha$  de  $\pi$ , on a

$$\pi(u)F_\alpha \subset F_\alpha + \sum_{\lambda > \alpha} F_\lambda$$

Les vecteurs dominants sont donc invariants par  $U$ . Prouvons l'unicité du poids dominant. Considérons la représentation contragrédiente  $\pi^*$  de  $\pi$ . Soit  $\mu$  un plus bas poids pour la représentation contragrédiente et  $f_\mu^* \in F^*$  un vecteur non nul de poids  $\mu$ . Soit  $\overline{U} = w_0 U w_0^{-1}$  le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures avec des 1 dans la diagonale. D'après ce qui précède,  $f_\mu^*$  est invariant par  $\overline{U}$ . Soit  $\Lambda$  un poids dominant de  $\pi$  et  $f_\Lambda$  un vecteur dominant. Considérons la fonction

$$\varphi(g) = \langle f_\mu^* | \pi(g) f_\Lambda \rangle$$

Pour  $u \in U$  et  $\overline{u} \in \overline{U}$  on a

$$\varphi(\overline{u}gu) = \langle f_\mu^* | \pi(\overline{u}gu) f_\Lambda \rangle = \langle \pi^*(\overline{u}^{-1}) f_\mu^* | \pi(g) \pi(u) f_\Lambda \rangle = \varphi(g)$$

D'autre part comme  $\pi$  est irréductible, le vecteur  $f_\Lambda$  est cyclique : les vecteurs  $\pi(g)f_\Lambda$  engendrent  $F$  ; la fonction  $\varphi$  n'est donc pas identiquement nulle. C'est aussi une fonction rationnelle et donc elle n'est pas identiquement nulle sur l'ouvert de Zariski  $Uw_0AU = w_0\overline{U}AU$  et elle ne l'est pas non plus sur l'ouvert translaté  $\overline{U}AU$ . Finalement  $\varphi(a)$  est non nul. Notons  $a^\lambda$  la valeur du caractère  $\lambda$  en  $a$ . On a

$$\varphi(a) = \langle f_\mu^* | \pi(a)f_\Lambda \rangle = \langle \pi^*(a^{-1})f_\mu^* | f_\Lambda \rangle$$

d'où

$$\varphi(a) = \langle f_\mu^* | f_\Lambda \rangle a^\Lambda = \langle f_\mu^* | f_\Lambda \rangle a^{-\mu}$$

et donc  $\Lambda = -\mu$  ce qui prouve l'unicité de  $\Lambda$  (et de  $\mu$ ).

Le même calcul donne l'unicité, à un facteur constant près, du vecteur dominant. En effet soit  $f'_\Lambda$  un vecteur dominant et  $\varphi'(g) = \langle f_\mu^* | \pi(g)f'_\Lambda \rangle$  ; les fonctions  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont proportionnelles sur un ouvert de Zariski, donc partout. En multipliant  $f'_\Lambda$  par un scalaire convenable on peut supposer que ces deux fonctions sont égales. Il en résulte que, pour tout  $g$ , on a  $\langle \pi^*(g)f_\mu^* | f_\Lambda - f_{\Lambda'} \rangle = 0$ . Comme  $\pi^*$  est irréductible le vecteur  $f_\mu^*$  est cyclique donc  $f_\Lambda = f_{\Lambda'}$ .

Considérons le sous-espace des vecteurs invariants par  $U$ . Il est stable par  $A$  donc somme directe de ses intersections non nulles avec les  $F_\alpha$ . Si  $f$  est invariant par  $U$  et de poids  $\lambda$ , le calcul précédent reste valable et nous dit que  $\lambda + \mu = 0$  donc que  $\lambda$  est le poids dominant.

Avec les mêmes notations soit, pour tout  $f \in F$ ,

$$\varphi_f(g) = \langle f_\mu^* | \pi(g)f \rangle$$

L'application  $f \mapsto \varphi_f$  est linéaire injective et  $\varphi_{\pi(x)f}(g) = \varphi_f(gx)$ . Soit  $\varphi$  la fonction  $\varphi_f$  pour  $f = f_\Lambda$ , un vecteur dominant. L'espace vectoriel des fonctions  $\varphi_f$  est donc engendré par les translatées à droite de  $\varphi$ . D'autre part la fonction  $\varphi$  vérifie  $\varphi(\overline{u}gau) = a^\Lambda \varphi(g)$  ce qui, comme on l'a vu, la détermine à un facteur constant près. La classe de la représentation  $\pi$  est donc entièrement déterminée par le poids dominant  $\Lambda$ . Il nous reste à caractériser ces derniers.

Pour cela on utilise le groupe de Weyl  $W$ . Si  $w \in W$  et si  $\lambda \in E_{\mathbf{Z}}$ , on définit  $w(\lambda)$  par

$$a^{w^{-1}(\lambda)} = (waw^{-1})^\lambda$$

Il est clair que l'ensemble des poids d'une représentation irréductible  $\pi$  est invariant par  $W$ . Soit

$$\Lambda = \sum_1^r \lambda_i \varepsilon_i$$

le poids dominant et prenons pour  $w$  la transposition de  $i$  et  $j$  avec  $i < j$ . On a  $\Lambda - w(\Lambda) = \lambda_i \varepsilon_i + \lambda_j \varepsilon_j - \lambda_i \varepsilon_j - \lambda_j \varepsilon_i = (\lambda_i - \lambda_j) \varepsilon_i - (\lambda_i - \lambda_j) \varepsilon_j = (\lambda_i - \lambda_j) (\varepsilon_i - \varepsilon_j)$



Comme  $\Lambda$  est le poids dominant ceci impose  $\lambda_i \geq \lambda_j$ . Tout poids dominant vérifie donc

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$$

On va montrer que tout élément de cette forme est un poids dominant. Soit  $(\pi, F)$  une représentation rationnelle de dimension finie de  $G$ . Elle se décompose en somme de représentations irréductibles  $F = \oplus F_i$ . Dans chaque  $F_i$  le sous-espace  $F^U$  des vecteurs  $U$ -invariants est de dimension 1 et  $F^U = \oplus (F^U \cap F_i)$ . Enfin  $A$  opère scalairement dans chacun des  $F^U \cap F_i$ , le caractère qui intervient étant le poids dominant de  $(\pi_{F_i}, F_i)$ . Pour déterminer la décomposition d'une représentation telle que  $\pi$ , il suffit donc d'analyser l'action de  $A$  dans le sous-espace des vecteurs  $U$ -invariants.

Soient  $(\pi_1, F_1)$  et  $(\pi_2, F_2)$  deux représentations irréductibles de poids dominants respectifs  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ . Choisissons des vecteurs dominants  $f_1$  et  $f_2$  et considérons le produit tensoriel  $(\pi_1 \otimes \pi_2, F_1 \otimes F_2)$ . le vecteur  $f_1 \otimes f_2$  est  $U$ -invariant et de poids  $\Lambda_1 + \Lambda_2$ . Par conséquent  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  est un poids dominant et la classe de représentations correspondante intervient au moins une fois dans  $\pi_1 \otimes \pi_2$ . Toute combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de poids dominants est donc un poids dominant.

D'autre part, pour  $1 \leq j \leq r$ , la représentation naturelle de  $G$  dans  $\bigwedge^j(V)$  est irréductible; c'est la représentation qui provient du caractère signature du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_j$ . On peut prouver l'irréductibilité directement. En effet notons que les vecteurs

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_j}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_j$$

forment une base et sont de poids  $\varepsilon_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_j}$  et ces poids sont deux à deux distincts. Parmi ces vecteurs le seul qui soit invariant par  $U$  est  $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_j$ . Le sous-espace des vecteurs invariants par  $U$  étant de dimension 1, la représentation est irréductible et de poids dominant  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_j$ . Soit  $\varpi_j = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j$

On a

$$\sum \lambda_i \varepsilon_i = \lambda_r \varpi_r + (\lambda_{r-1} \lambda_r) \varpi_{r-1} + \dots + (\lambda_1 - \lambda_2) \varpi_1$$

Si  $\lambda_r \geq 0$ , la condition  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$  implique donc que  $\sum \lambda_i \varepsilon_i$  soit un poids dominant. Si  $\lambda_r < 0$ , alors cette condition implique que  $\sum (\lambda_i - \lambda_r) \varepsilon_i$  soit un poids dominant et en tensorisant avec la puissance  $\lambda_r$  du déterminant on obtient que  $\sum \lambda_i \varepsilon_i$  est un poids dominant.

En définitive les poids dominants sont les  $\sum_1^r n_i \varpi_i$  avec  $n_r \in \mathbf{Z}$  et  $n_i \in \mathbf{N}$  pour  $1 \leq i \leq r - 1$ . Les  $\varpi_i$  sont appelés les poids fondamentaux.

Les représentations polynomiales sont celles dont le poids dominant vérifie  $\lambda_r \geq 0$ . Elles sont donc paramétrées par les partitions de longueur au plus  $r$ .

**Remarque.** — Les résultats sont souvent énoncés pour  $\mathrm{SL}(V)$  au lieu de  $\mathrm{GL}(V)$ . Cela revient à se restreindre l'hyperplan  $H$ . Il y a alors  $r - 1$  poids fondamentaux

et les poids dominants sont exactement les combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatifs de ces poids fondamentaux.

On va comparer la paramétrisation obtenue avec les vecteurs dominants et celle qui provient des foncteurs de Schur.

Le plus efficace est d'utiliser la formule des caractères (Théorème 2-8). La valeur du caractère de  $\varpi_r(\lambda)$  sur la matrice diagonale  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  est  $s_\lambda(x_1, \dots, x_r)$  ou encore

$$\sum_{\nu} x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r}$$

où  $\nu$  parcourt l'ensemble des poids de  $\varpi_r(\lambda)$ , chacun étant compté autant de fois que sa multiplicité. On a donc

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\nu} x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r}$$

mais

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} K_{\lambda, \mu} m_\mu$$

On se restreint ici à  $r$  variables donc  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$  est une partition de longueur au plus  $r$  qui est dominée par  $\lambda$ . En termes de poids cela signifie que  $\mu$  est dominant et que  $\lambda$  est la somme de  $\mu$  et de racines positives. Rappelons que  $m_\mu$  est le symétrisé (sans répétitions) du monôme  $x_1^{\mu_1} \dots x_r^{\mu_r}$ .

Par ailleurs, puisque  $\mu$  est dominant, pour tout élément  $w$  du groupe de Weyl, c'est-à-dire toute permutation de  $\{1, 2, \dots, r\}$  on a  $w\mu \leq \mu$ . l'égalité

$$m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} K_{\lambda, \mu} m_\mu = \sum_{\nu} x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r}$$

signifie donc que  $\lambda$  est le poids dominant et que la multiplicité du poids  $\mu$  (ou de l'un de ses conjugués par  $W$ ) est l'entier  $K_{\lambda, \mu}$ .

**Théorème 4-3.** — *Pour toute partition de longueur au plus  $r$ , le poids dominant de  $\varpi_r(\lambda)$  est précisément  $\lambda$ .*

L'utilisation des vecteurs de plus haut poids est certainement l'outil le plus efficace dans la théorie des représentations rationnelles de dimension finie de  $GL(V)$ . Leur théorie se généralise à tous les groupes réductifs déployés ce qui permet de dépasser le cadre des groupes classiques. On va donner un premier exemple sous forme d'une introduction à une synthèse récente de R. Howe [Ho] où il montre comment la théorie classique des invariants peut s'organiser autour de résultats affirmant que certaines représentations se décomposent avec multiplicité 1. La dualité de Schur entre  $GL(V)$  et  $\mathfrak{S}_n$  en est bien sur un exemple mais pas du type considéré dans [Ho]. Par contre la situation suivante est caractéristique.

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers. Soit  $M = M_{p,q}$  l'espace vectoriel des matrices à  $p$  lignes et  $q$  colonnes. Une telle matrice se multiplie à gauche par une matrice carrée d'ordre  $p$  et à droite par une matrice carrée d'ordre  $q$ . Soit  $S = S(M^*)$  l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $M$ . On a une représentation  $\pi$  de  $\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$  dans  $S$  :

$$\pi(a, b)f(m) = f({}^t amb)$$

On veut décomposer cette représentation; on peut déjà noter que les actions des deux groupes commutent. Regardons la structure des orbites dans  $M$ . Pour fixer les idées supposons que  $p \leq q$ . Deux matrices de même rang sont conjuguées; il y a donc  $p+1$  orbites  $\Omega_j$  où l'indice  $j$  est le rang. Comme représentants on peut prendre les matrices  $\omega_j$  définies par  $\omega_j(e_i) = f_i$  si  $i \leq j$  et 0 sinon. Ici  $e_i$  (resp.  $f_i$ ) est la base canonique de  $\mathbf{K}^q$  (resp. de  $\mathbf{K}^p$ ). Il est clair que l'orbite  $\Omega_p$  est Zariski ouverte. Toute fonction polynomiale est donc définie par sa restriction à cette orbite. Choisissons comme précédemment les sous-groupes de Borel  $B_p$  et  $B_q$  formés des matrices triangulaires supérieures. Avec des notations évidentes  $B_p = A_p U_p$  et  $B_q = A_q U_q$ . On introduit aussi les sous-groupes triangulaires inférieurs  $\overline{U}_p$  et  $\overline{U}_q$ .

Si  $x$  est une matrice carrée d'ordre  $p$ , alors pour  $1 \leq i \leq p$ , on note  $\Delta_i(x)$  le mineur d'ordre  $i$ , construit sur les  $i$  premières lignes et les  $i$  premières colonnes. On convient que  $\Delta_0(x) = 1$ . Une matrice générique  $m \in M$  est écrite  $m = (x \ y)$  où  $x$  est carrée d'ordre  $p$  et  $y \in M_{p, q-p}$ .

**Proposition 4-4.** — *Soit  $x$  une matrice carrée d'ordre  $p$ . On suppose que  $\prod_1^p \Delta_i(x) \neq 0$ . Il existe un unique couple de matrices  $(\overline{u}_p, b_p)$  telles que  $\overline{u}_p \in \overline{U}_p$  et  $b_p \in B_p$  et telles que de plus  $x = \overline{u}_p b_p$ . Le  $i^{\text{ème}}$  coefficient diagonal de  $b_p$  est  $\Delta_i(x)/\Delta_{i-1}(x)$ .*

C'est bien connu, c'est du à Gauß, c'est la méthode du pivot.

Soit alors  $m = (x \ y) \in M$ . Supposons que  $\prod \Delta_i(x) \neq 0$  et introduisons  $\overline{u}_p$  et  $b_p$ . On peut encore décomposer  $b_p$ , de manière unique, sous la forme  $b_p = a_p u_p$  avec  $a_p$  diagonale de coefficients les  $\Delta_i(x)/\Delta_{i-1}(x)$  et  $u_p \in U_p$ . Il vient

$$m = (x \ y) = \overline{u}_p (a_p \ 0) \begin{pmatrix} u_p & a_p^{-1} \overline{u}_p^{-1} y \\ 0 & \mathrm{Id}_{q-p} \end{pmatrix}$$

Ce qu'on écrira simplement

$$m \in \overline{U}_p \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} U_q$$

avec

$$t_i = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta_{i-1}(x)}$$

Notons que la condition  $\prod \Delta_i(x) \neq 0$  définit un ouvert de Zariski  $\Omega'_p \subset \Omega_p$  de  $M$ .

**Proposition 4-5.** — *Les fonctions polynômiales  $\Delta_i$  sur  $M$  sont algébriquement indépendantes et la sous-algèbre des fonctions polynômiales invariantes par  $U_p \times U_q$  est  $\mathbf{K}[\Delta_1, \dots, \Delta_p]$*

En effet si on a une relation  $P(\Delta_1, \dots, \Delta_i) = 0$  où  $P$  est un polynôme, alors en se restreignant aux  $m$  tels que  $y = 0$  et  $x$  diagonale, on a, quels que soient les  $t_i \in \mathbf{K}$

$$P(t_1, t_1 t_2, \dots, t_1 t_2 \dots t_p) = 0$$

Les  $t_i$  étant quelconques et le corps  $\mathbf{K}$  infini ceci entraîne  $P = 0$ . La Proposition 4-4 prouve l'invariance des  $\Delta_i$  en restriction à  $\Omega'_p$  ce qui implique l'invariance tout court. Inversement soit  $f$  une fonction polynomiale sur  $M$  invariante par  $U_p \times U_q$ . Si on la restreint aux  $m$  de la forme  $(x \ 0)$  avec  $x$  diagonale, on obtient un polynôme en les coefficients  $t_i$  de  $x$ . Par suite

$$f((x \ y)) = \sum c_\alpha \Delta_1^{\alpha_1 - \alpha_2}(x) \dots \Delta_{p-1}^{\alpha_{p-1} - \alpha_p}(x) \Delta_p^{\alpha_p}(x)$$

Soient  $x_1, \dots, x_p$  des éléments quelconques de  $\mathbf{K}$ . Prenons  $y = 0$  et

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{p-1} & x_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on constate que,  $\Delta_i(x) = \pm x_i$ . Comme  $f((x \ 0))$  doit être un polynôme en les  $x_i$  on en déduit que  $c_\alpha \neq 0$  implique  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p \geq 0$  de sorte que  $f$  est bien un polynôme en les  $\Delta_i$ .

On est maintenant en position de décomposer la représentation  $\pi_{p,q}$  de  $\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$  dans l'algèbre  $\mathbf{K}[M]$  des fonctions polynômiales sur  $M$ . Comme le degré est préservé, c'est une somme de représentations de dimension finie et on peut donc appliquer les résultats de ce §. On vient de trouver la sous-algèbre  $\mathbf{K}[M]^{U_p \times U_q}$  des invariants de  $U_p \times U_q$ . D'autre part, pour

$$a_p = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_p), \quad a_q = \mathrm{diag}(y_1, \dots, y_q)$$

on a

$$\pi_{p,q}(a_p a_q)(\Delta_i) = x_1 x_2 \dots x_p y_1 y_2 \dots y_q \Delta_i$$

Les poids dominants possibles pour  $A_p \times A_q$  sont donc paramétrés par les partitions  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de longueur au plus  $p$ , le poids dominant correspondant étant

$$\prod_1^p (x_j y_j)^{\lambda_j}$$

et le vecteur dominant étant, à un facteur constant près

$$\prod_1^p \Delta_i^{\lambda_i - \lambda_{i+1}}$$

avec la convention  $\lambda_{p+1} = 0$ . La représentation  $\pi_{p,q}$  se décompose donc avec multiplicité 1. On a ici utilisé la théorie des vecteurs dominants pour le groupe produit. Le seul point à justifier est que toute représentation rationnelle irréductible d'un tel produit s'obtient en faisant le produit tensoriel externe d'une représentation rationnelle irréductible de  $GL_p$  par une représentation rationnelle irréductible de  $GL_q$ . On a donc formellement

$$\pi_{p,q} = \oplus (\pi'_n \otimes \pi''_n)$$

où  $\pi'_n$  (resp  $\pi''_n$ ) est une représentation rationnelle irréductible de  $GL_p$  (resp. de  $GL_q$ ). Mais on a mieux car  $\pi'_n \neq \pi'_m$  pour  $n \neq m$  et de même pour les  $\pi''_n$ . On a donc une correspondance injective entre (certaines) classes de représentations de  $GL_p$  et de  $GL_q$ . Dans le cas présent elle s'exprime très simplement : toutes les représentations polynômiales de  $GL_p$  interviennent et la correspondance est  $\varpi_p(\lambda) \mapsto \varpi_q(\lambda)$ .

**Théorème 4-6.** — *La représentation  $\pi_{p,q}$  se décompose avec multiplicité 1 :*

$$\pi_{p,q} = \bigoplus_{\ell(\lambda) \leq \text{Inf}(p,q)} \varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_q(\lambda)$$

Comme le note R. Howe ce théorème est “bien connu”. Ce qui l'est beaucoup moins c'est qu'il est équivalent aux théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants. Or il y a, pour chacun des groupes classiques toute une série de théorèmes de multiplicité 1 ( en gros chaque fois qu'un sous-groupe de Borel a une orbite ouverte). Dans [Ho], de nombreux exemples sont donnés et réinterprétés en termes de théorie des invariants.

Revenons au théorème 4-6. Soit  $m = (m_{i,j})$  un élément quelconque de  $M$ . C'est un vecteur propre pour  $A_p \times A_q$  de valeur propre  $x_i y_j$ . On voit donc que dans le développement formel de

$$\prod_{i \leq p, j \leq q} (1 - x_i y_j)^{-1}$$

chaque terme est la valeur propre d'un unique monôme en les  $m_{i,j}$ . Ce produit est donc, formellement, la restriction à  $A_p \times A_q$  du “caractère” de  $\pi_{p,q}$ . Le théorème 4-6 dit que cette restriction est

$$\sum_{\ell(\lambda) \leq \text{Inf}(p,q)} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

En égalant les deux expressions on obtient l'identité de Cauchy. Il est facile de justifier ce qui précède par exemple en considérant les polynômes homogènes d'un degré donné.

Considérons la situation de base;  $W = V^{\oplus p} \oplus V^{*\oplus q}$  et on cherche les invariants de  $G = \text{GL}(V)$  dans l'algèbre  $\mathbf{K}[W] = S(W^*)$  des fonctions polynomiales sur  $W$ . On a les identifications

$$V^{\oplus p} \cong \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^p, V) \quad V^{*\oplus q} \cong \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, V^*)$$

Si  $f$  est une fonction polynomiale sur  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^p, V)$  et si  $g_p \in \text{GL}_p$  et  $g \in \text{GL}(V)$  alors l'action de  $(g, g_p)$  sur  $f$  est donnée par

$$(g, g_p)(f)(u) = f(g^{-1}ug_p)$$

Si  $\varphi$  est une fonction polynomiale sur  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, V^*)$  et si  $g_q \in \text{GL}_q$  et  $g \in \text{GL}(V)$  alors l'action de  $(g, g_q)$  sur  $\varphi$  est donnée par

$$(g, g_q)(\varphi)(s) = \varphi({}^t g s g_q)$$

L'algèbre  $\mathbf{K}[W]$  des fonctions polynomiales sur  $W$  s'identifie alors à l'algèbre des fonctions polynomiales de deux variables  $u, s$  avec l'action;

$$(g, g_p, g_q)f(u, s) = f(g^{-1}ug_p, {}^t g s g_q)$$

Considérons l'application

$$\theta : (u, s) \mapsto {}^t u s$$

de  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^p, V) \oplus \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, V^*)$  dans  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^{p*})$ . Par composition avec  $\theta$ , on a un homomorphisme d'algèbres

$$\Theta : \mathbf{K}[\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^{p*})] \rightarrow \mathbf{K}[\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^p, V) \oplus \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, V^*)]^{\text{GL}(V)}$$

Le seul point à vérifier est qu'on obtient bien des invariants. Si  $\psi \in \mathbf{K}[\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^{p*})]$  alors  $\Theta(\psi)(u, s) = \psi({}^t u s)$  donc  $g(\Theta(\psi))(u, s) = \Theta(\psi)(g^{-1}u, {}^t g s) = \psi({}^t u s) = \Theta(\psi)(u, s)$ . On fait opérer  $\text{GL}_p \times \text{GL}_q$  sur  $\mathbf{K}[\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^{p*})]$  par  $(g_p, g_q)\psi(m) = \psi({}^t g_p m g_q)$ . Un calcul trivial montre que  $\Theta$  commute aux actions de  $\text{GL}_p \times \text{GL}_q$ .

On va utiliser le Théorème 4-6. Considérons  $\mathbf{K}[\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^{p*})]$ . On est exactement dans la situation du Théorème. On conclut que la représentation de  $\text{GL}_p \times \text{GL}_q$  dans  $\mathbf{K}[\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^{q*})]$  se décompose suivant

$$\bigoplus_{\ell(\lambda) \leq \text{Inf}(p, q)} \varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_q(\lambda)$$

La représentation de  $\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}(V)$  dans  $\mathbf{K}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^p, V)]$  se décompose suivant

$$\bigoplus_{\ell(\lambda) \leq \mathrm{Inf}(p,r)} \varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_r(\lambda)$$

Enfin pour  $\mathbf{K}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, V^*)]$ , il faut noter que l'application  $g \mapsto {}^t g^{-1}$  de  $\mathrm{GL}(V)$  dans lui même est un automorphisme et que si  $\pi$  est une représentation alors  $\pi({}^t g^{-1})$  est équivalente à la contragrédiente  $\pi^*$ . La décomposition est alors

$$\bigoplus_{\ell(\lambda) \leq \mathrm{Inf}(q,r)} \varpi_q(\lambda) \otimes \varpi_r^*(\lambda)$$

On a un isomorphisme

$$\mathbf{K}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^p, V) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, V^*)] \cong \mathbf{K}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^p, V)] \otimes \mathbf{K}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^q, V^*)]$$

et il est compatible avec les différentes actions. on a donc une décomposition de cette algèbre suivant ;

$$\left( \bigoplus_{\ell(\lambda) \leq \mathrm{Inf}(p,r)} \varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_r(\lambda) \right) \otimes \left( \bigoplus_{\ell(\mu) \leq \mathrm{Inf}(q,r)} \varpi_q(\mu) \otimes \varpi_r^*(\mu) \right)$$

Il est facile de prouver que si  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont deux représentations irréductibles (rationnelles de dimension finie) de  $\mathrm{GL}(V)$ , alors la représentation triviale apparait dans le produit tensoriel  $\pi_1 \otimes \pi_2$  si et seulement si  $\pi_2$  est la contragrédiente de  $\pi_1$  et dans ce cas la multiplicité de la représentation triviale est exactement 1.

Dans la dernière décomposition ci-dessus, les invariants de  $\mathrm{GL}(V)$  ne peuvent donc apparaitre que dans les composantes du type

$$\varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_r(\lambda) \otimes \varpi_q(\lambda) \otimes \varpi_r^*(\lambda)$$

et dans chacune de ces composantes le sous-espace des vecteurs  $\mathrm{GL}(V)$  invariant est un  $\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ - module irréductible de type  $\varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_\lambda(q)$ . Les partitions  $\lambda$  qui figurent sont celles qui sont de longueur au plus  $\mathrm{Inf}(p, q, r)$ . Ainsi

$$\mathbf{K}[W]^{\mathrm{GL}(V)} \cong \bigoplus_{\ell(\lambda) \leq \mathrm{Inf}(p,q,r)} \varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_q(\lambda)$$

de sorte que  $\Theta$  est toujours surjective. L'espace  $\mathrm{Hom}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^{p*})$  est réalisé comme l'espace des matrices  $m \in M_{p,q}$ . L'algèbre des fonctions polynômes est  $\mathbf{K}[m_{i,j}]$  où les  $m_{i,j}$  sont les coefficients de la matrice  $m$ . Si on compose avec  $\theta$ , on retrouve les fonctions  $\langle v_i^* | v_j \rangle$  et on a redémontré le premier théorème fondamental.

Pour le deuxième, le noyau  $\mathcal{J}$  de  $\Theta$  admet la décomposition

$$\bigoplus_{r < \ell(\lambda) \leq \text{Inf}(p, q)} \varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_q(\lambda)$$

En particulier il est réduit à (0) si  $r \leq \text{Inf}(p, q)$ . L'image de l'application  $\theta$  est la sous-variété des matrices de rang au plus  $r$ . L'idéal  $\mathcal{J}$  est donc aussi celui des fonctions polynômes nulles sur cette sous-variété. Il contient l'idéal  $\mathcal{I}$  engendré par les mineurs de  $m$  d'ordre  $r + 1$  et il s'agit de montrer qu'il lui est égal. Rappelons que l'action de  $\text{GL}_p \times \text{GL}_q$  se fait par multiplication matricielle à droite et à gauche. Le sous-espace vectoriel engendré par les mineurs d'ordre  $r + 1$  est invariant et il en est donc de même de  $\mathcal{I}$ . Par construction même l'idéal  $\mathcal{J}$  est aussi invariant. D'autre part les vecteurs dominants sont des vecteurs cycliques. Il suffit donc de démontrer que si  $\ell(\lambda) \geq r + 1$  alors le vecteur dominant de la composante de type  $\varpi_p(\lambda) \otimes \varpi_q(\lambda)$  appartient à  $\mathcal{I}$ . Or ce vecteur dominant est de la forme  $\Delta_1^{\alpha_1} \dots \Delta_r^{\alpha_r}$ , la condition sur la longueur signifiant que pour au moins un  $j \geq r + 1$  on a  $\alpha_j \neq 0$ . On est donc ramené à démontrer que, pour  $j \geq r + 1$  le mineur  $\Delta_j \in \mathcal{I}$ . C'est évident car en développant successivement suivant  $j - r + 1$  lignes on l'exprime comme combinaison, à coefficients polynômes, de déterminant d'ordre  $r + 1$ .

On a ainsi retrouvé les théorèmes fondamentaux et mis en évidence une structure supplémentaire sur l'algèbre des invariants. En parcourant [Ho] on pourra se convaincre du caractère très général de ce type d'arguments.



### Chapitre 3 : CAS DES GROUPES ORTHOGONAUX ET SYMPLECTIQUES

Ce court chapitre est consacré aux théorèmes fondamentaux pour les groupes orthogonaux et symplectiques. La méthode suivie, différente de celle de Weyl, a son origine dans [A-P-B] et dans [Ho-2]. On utilise les résultats déjà acquis sur le groupe linéaire mais rien sur les représentations des groupes orthogonaux et symplectiques. A ce stade il n'est plus très difficile de construire les représentations irréductibles de dimension finie et de calculer leurs caractères. On renvoie le lecteur à [F-H].

**§ 1. Les théorèmes fondamentaux pour le groupe orthogonal.** — Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $r$ , sur un corps  $\mathbf{K}$  de caractéristique 0. Soit  $V^*$  le dual de  $V$ . On suppose donnée une application linéaire bijective auto-adjointe  $S$  de  $V$  dans  $V^*$ . On a donc une forme quadratique

$$Q(x) = \langle Sx|x \rangle$$

ainsi qu'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$$B(x, y) = \langle Sx|y \rangle$$

Nous supposerons toujours que  $Q$  est isotrope, c'est-à-dire que  $Q(V) = \mathbf{K}$ . C'est automatique si  $\mathbf{K}$  est algébriquement clos. Si on fixe une base  $e_1, \dots, e_r$  de  $V$ , on note  $e_1^*, \dots, e_r^*$  la base duale. Relativement à ces bases,  $S$  est représentée par une matrice symétrique, qu'on note encore  $S$ . Les vecteurs  $x$  et  $y$  sont représentés par des vecteurs colonnes  $X$  et  $Y$  et on a

$$Q(x) = {}^t X S X \quad B(x, y) = {}^t X S Y$$

Soit  $G = O(Q)$  le groupe orthogonal de la forme  $Q$ . On a une représentation naturelle  $\pi_r$  de  $G$  dans  $V$  ainsi que la représentation contragrédiente  $\pi_r^*$  dans  $V^*$ . Par définition

$$\pi_r^*(g) = {}^t g^{-1}$$

Comme  $g$  est une transformation orthogonale, on a  ${}^t g S g = S$  ce qui s'écrit  $S g = {}^t g^{-1} S$ . Autrement dit  $S$  commute aux actions de  $G$  dans  $V$  et  $V^*$ ; les deux représentations  $\pi_r$  et  $\pi_r^*$  sont équivalentes et il nous suffira de considérer les actions de  $G$  dans les sommes directes  $V^{\oplus n}$  où les produits tensoriels  $V^{\otimes n}$  sans avoir à introduire  $V^*$ .

Nous allons d'abord énoncer les deux théorèmes. Considérons la somme directe

$$W = V^{\oplus n}$$

de  $n$  copies de  $V$  ; le groupe  $G$  opère dans  $W$  ainsi que dans l'algèbre  $S(W^*)$  des fonctions polynômiales sur  $W$ . On cherche les polynômes invariants. On a déjà les polynômes

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto B(v_i, v_j), \quad i \leq j$$

**Théorème 1-1 (Premier théorème fondamental).** — *La sous-algèbre des invariants du groupe orthogonal est engendrée par les "produits scalaires"  $B(v_i, v_j)$*

Soit  $\text{Sym}_n(\mathbf{K})$  l'espace vectoriel des matrices symétriques, de dimension  $n$  et à coefficients dans  $\mathbf{K}$ . On définit une application

$$\theta : W \rightarrow \text{Sym}_n(\mathbf{K})$$

par

$$\theta((v_1, \dots, v_n)) = (B(v_i, v_j))$$

Comme toute relation linéaire entre les  $v_j$  fournit une relation linéaire entre les colonnes (ou les lignes) de la matrice symétrique  $\theta(w)$  cette dernière est de rang au plus  $r$ .

**Théorème 1-2 (Deuxième théorème fondamental).** — *L'idéal des relations entre les  $B(v_i, v_j)$  est engendré par les mineurs d'ordre  $r + 1$  de la matrice  $\theta(w)$ .*

Pour caractériser l'image de  $\theta$  le plus simple est de choisir une base  $e_j$  de  $V$  et de considérer les  $v_j$  comme les vecteurs colonnes d'une matrice  $w$ , matrice qui a donc  $r$  lignes et  $n$  colonnes. La forme quadratique  $Q$  est représentée par une matrice symétrique  $S$  et on a  $\theta(w) = {}^t w S w$ . Le groupe  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$  opère à droite sur les matrices  $w$  et on a  $\theta(wg) = {}^t g w g$ . On retrouve donc l'action usuelle sur les matrices symétriques. L'image de  $\theta$  est réunion d'orbites pour cette action et comme toute orbite contient une matrice diagonale, il suffit de déterminer les matrices diagonales qui appartiennent à l'image. Pour que  $\theta(w)$  soit diagonale, il faut et il suffit que les vecteurs  $v_j$  soient 2 à 2 orthogonaux, il y en a donc au plus  $r$  non nuls et les coefficients diagonaux de  $\theta(w)$  sont les scalaires  $Q(v_j)$ . Comme la forme  $Q$  est isotrope, l'image de  $\theta$  est exactement la sous-variété des matrices symétriques de rang au plus  $\text{Inf}(r, n)$ . On voit donc que, si  $r < n$ , le second théorème fondamental dit que les mineurs d'ordre  $r + 1$  forment un système de générateurs de l'idéal des fonctions polynômes nulles sur la sous-variété des matrices symétriques de rang au plus  $r$ . Si  $r \geq n$ , il n'y a pas de relations.

Pour démontrer le premier théorème nous allons suivre [A-P-B]. On traite d'abord le cas  $r = n$  et, pour le cas général, on se ramène au premier théorème fondamental pour le groupe linéaire.

Supposons donc que  $r = n$  et fixons une base de  $V$ . Un élément  $w = (v_1, v_2, \dots, v_r)$  de  $W$  peut-être considéré comme une matrice carrée d'ordre  $r$  dont les  $v_i$  sont les vecteurs colonnes. On peut donc identifier  $W$  avec  $M_n(\mathbf{K})$ . En notations matricielles

$$\theta(w) = {}^t w S w$$

Notons  $\text{Sym}_{\mathbf{K}}(V)$  l'espace vectoriel des applications auto-adjointes de  $V$  dans son dual  $V^*$ . Le groupe orthogonal  $G$  opère dans  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$  par multiplication à gauche.

**Lemme 1-3.** — *Soit  $\varphi$  une application polynomiale de  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$  dans  $\mathbf{K}$ , invariante par  $G$ . Il existe une unique application polynomiale  $f$  de  $\text{Sym}_n(V)$  dans  $\mathbf{K}$  telle que  $\varphi(w) = f({}^t w S w)$*

Nous aurons besoin du théorème de Witt, sous la forme suivante :

**Lemme 1-4.** — *Pour que deux éléments  $w$  et  $w'$  de  $W$  soient conjugués par  $G$ , il faut et il suffit qu'ils aient même noyau et que  $\theta(w) = \theta(w')$ .*

Les conditions sont clairement nécessaires. Inversement l'égalité des noyaux signifie que les relations linéaires entre les vecteurs colonnes  $v_j$  de  $w$  sont les mêmes que celles entre les vecteurs colonnes  $v'_j$  de  $w'$ . En particulier si on suppose pour fixer les idées que les vecteurs  $v_1, \dots, v_s$  forment une base de l'image de  $w$ , alors les vecteurs  $v'_1, \dots, v'_s$  forment une base de l'image de  $w'$ . La deuxième condition nous dit alors que l'application  $u$  qui transforme  $v_i$  en  $v'_i$ , pour  $i = 1, \dots, s$ , est une isométrie de l'image de  $w$  sur celle de  $w'$  et qu'en plus elle transforme  $v_i$  en  $v'_i$  pour  $i > s$ . Le théorème de Witt, sous sa forme classique, affirme que  $u$  se prolonge en une isométrie  $g$  de  $V$  sur lui même; par construction  $g w = w'$ .

Démontrons maintenant le Lemme 1-3. Soit donc  $\varphi$  une application polynomiale de  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$  dans  $\mathbf{K}$ , invariante par  $G$ . Comme  $\theta$  est surjective, il existe une unique application  $f$  de  $\text{Sym}_n(\mathbf{K})$  dans  $\mathbf{K}$  telle que  $\varphi(w) = f({}^t w S w)$  et il faut montrer que  $f$  est polynômiale. Pour cela, en suivant [A-P-B], on va, plus ou moins, construire une section pour  $\theta$ . Notons d'abord que la propriété d'invariance de  $\varphi$  reste vraie par extension du corps des scalaires (exercice). Soit alors  $\overline{\mathbf{K}}$  une clôture algébrique de  $\mathbf{K}$ . L'application  $f$  est définie sur  $\text{Sym}_n(\overline{\mathbf{K}})$ . Si on démontre qu'elle est polynômiale sur  $\text{Sym}_n(\overline{\mathbf{K}})$  alors sa restriction à  $\text{Sym}_n(\mathbf{K})$  sera une application polynômiale, à valeurs dans  $\mathbf{K}$  par construction. On peut donc supposer que  $\mathbf{K}$  est algébriquement clos et donc choisir la base de  $V$  telle que  $S$  soit la matrice identité. Soit  $s = (s_{i,j})$  une matrice symétrique générique. Autrement dit les  $s_{i,j}$  sont des indéterminées avec la condition  $s_{i,j} = s_{j,i}$ . Notons  $\mathbf{K}(s)$  l'extension transcendante pure obtenue en adjoignant à  $\mathbf{K}$  les indéterminées  $s_{i,j}$ . Soit  $L$  un corps de décomposition sur  $\mathbf{K}(s)$  du polynôme  $\text{Det}(s - T^2) \in \mathbf{K}(s)[T]$ . C'est une extension galoisienne de  $\mathbf{K}(s)$  engendrée par les racines du polynôme. Notons ces racines  $\pm\mu_1, \dots, \pm\mu_r$  et soient  $\lambda_1 = \mu_1^2, \dots, \lambda_r = \mu_r^2$  les valeurs propres de  $s$ . L'anneau  $A = \mathbf{K}[s]$  est intégralement clos; soit  $B$  sa clôture intégrale dans  $L$ . Les  $\pm\mu_j$  sont des éléments de  $B$ .

Soit  $s \mapsto \sigma$  une spécialisation de  $s$ , où  $\sigma$  est une matrice symétrique non nulle à coefficients dans  $\mathbf{K}$ . On a un  $\mathbf{K}$ -homomorphisme  $\psi$  de  $A = \mathbf{K}[s]$  dans  $\mathbf{K}$ . Le noyau de  $\psi$  est un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ . Il existe au moins un idéal maximal  $\mathfrak{m}'$  de  $B$  qui relève  $\mathfrak{m}$  c'est-à-dire tel que  $\mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m}$ . Soit  $\psi' : B \rightarrow B/\mathfrak{m}'$  le prolongement de  $\psi$ . le corps  $B/\mathfrak{m}'$  est une extension algébrique de  $\mathbf{K}$  donc lui est égal.

La condition  $\text{Det}(s - \mu_j^2) = 0$  implique  $\text{Det}(\sigma - \psi'(\mu_j)^2) = 0$  donc les  $\psi'(\mu_j)^2$  sont les valeurs propres de  $s$ . En choisissant convenablement  $\sigma$ , on peut les supposer distinctes et non nulles. Par conséquent les  $2r$  éléments  $\pm\mu_j$  sont deux à deux distincts (et non nuls). En particulier  $s$  est diagonalisable sur  $L$ .

Soit

$$t = \sum_1^r \mu_j \prod_{i \neq j} \frac{s - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

C'est une matrice symétrique, à coefficients dans  $L$ . En calculant sur une base de vecteurs propres on constate que  $t^2 = s$ . Si  $\sigma$  a ses valeurs propres distinctes, alors la spécialisation  $\tau$  de  $t$  est bien définie et  $\tau^2 = \sigma$ .

Soit  $\gamma$  un élément du groupe de Galois de  $L$  sur  $\mathbf{K}(s)$ . on a  $t^\gamma t^\gamma = s = tt$  donc  $t^{-1} t^\gamma t^\gamma t^{-1} = 1$  et comme  $t$  est symétrique cela signifie que  $t^\gamma t^{-1}$  est une matrice orthogonale.

On a donc  $\varphi(t)^\gamma = \varphi(t^\gamma) = \varphi(t^\gamma t^{-1} t) = \varphi(t)$  puisque  $\varphi$  est invariante à gauche par le groupe orthogonal. Autrement dit  $\varphi(t) \in \mathbf{K}(s)$ . Il existe donc une fraction rationnelle  $f \in \mathbf{K}(s)$  telle que  $\varphi(t) = f(s)$ . Si la spécialisation  $\sigma$  de  $s$  a toutes ses valeurs propres distinctes non nulles et n'est pas pôle de  $\varphi$ , alors on peut spécialiser l'égalité précédente et on obtient que  $\varphi(\tau) = f(\sigma)$  ou encore  $\varphi(\tau) = f(t^\gamma \tau)$ .

Ceci reste valable si on remplace  $\tau$  par  $g\tau$  avec  $\tau$  orthogonale. D'après le Lemme 1-4, l'égalité  $\varphi(w) = f(t^\gamma w)$  est donc valable au moins pour  $w$  appartenant à un ouvert de Zariski non vide; elle est donc valable partout. Enfin comme  $\varphi$  est polynomiale, la fraction rationnelle  $f$  n'a pas de pôles donc est un polynôme.

Revenons au cas général et prouvons la version multilinéaire du premier théorème fondamental. Soit donc  $n \geq 1$  et cherchons les formes linéaires  $G$ -invariantes sur l'espace vectoriel  $U = V^{\otimes n}$ . La multiplication par  $(-1)^n$  dans  $U$  s'obtient en faisant agir l'élément  $-Id$  de  $G$ . Si  $n$  est impair, la seule forme linéaire invariante est donc la forme nulle. Supposons donc que  $n = 2m$  est pair. Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . On définit une forme linéaire invariante  $L_\sigma$  par

$$L_\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) = \prod_1^m B(v_{\sigma(2i-1)}, v_{\sigma(2i)})$$

**Proposition 1-5.** — *Les formes linéaires  $L_\sigma$  engendrent le sous-espace des formes linéaires invariantes*

L'idée de base est d'utiliser l'action de  $GL(V)$  dans  $U$ . Soit  $\varphi$  une forme linéaire

sur  $U$ , invariante par  $G$ . Considérons l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \text{End}_{\mathbf{K}}(V) &\rightarrow U^* \\ \langle \Phi(a), u \rangle &= \varphi(au)\end{aligned}$$

Notons qu'elle est homogène de degré  $n = 2m$  et invariante à gauche par  $G$ . D'après le Lemme 1-3, il existe donc une application polynomiale  $F$  de  $\text{Sym}_{\mathbf{K}}(V)$  dans  $U^*$  telle que

$$F({}^t a S a) = \Phi(a)$$

Le polynôme  $F$  est homogène de degré  $m = n/2$ . Le groupe  $\text{GL}(V)$  opère dans  $\text{Sym}_{\mathbf{K}}(V)$  par  $s \mapsto {}^g s g$  et dans  $U^*$  par l'action contragrédiente de l'action dans  $U$ . L'identité  $\varphi(au) = \varphi(ag^{-1}gu)$  équivaut à

$$\langle F({}^t g s g), u \rangle = \langle F(s), gu \rangle$$

ce qui signifie que  $F$  commute à l'action de  $\text{GL}(V)$ . Inversement si on part d'une telle application  $F$ , on reconstruit  $\varphi$  par

$$\varphi(u) = \langle F(S), u \rangle$$

Remarquons que si  $F$  est non nulle, elle est automatiquement homogène de degré  $m$  (commutation aux homothéties).

La détermination des applications  $F$  ne fait plus intervenir le groupe orthogonal, c'est un problème de théorie des invariants pour le groupe linéaire. L'espace  $\text{Sym}_{\mathbf{K}}(V)$  est isomorphe au sous-espace des tenseurs symétriques dans  $V^* \otimes V^*$  et on dispose d'un projecteur  $P$ , invariant par  $\text{GL}(V)$ . En composant  $F$  avec  $P$ , on obtient une application  $\tilde{F}$ , polynomiale et homogène de degré  $m$  de  $V^* \otimes V^*$  dans  $U^* = V^{*\otimes 2m}$ . Enfin par polarisation complète, on considère  $\tilde{F}$  comme une application linéaire de  $(V^* \otimes V^*)^{\otimes m} = V^{*\otimes 2m}$  dans  $V^{*\otimes 2m}$  qui commute à l'action de  $\text{GL}(V)$ . On est donc exactement dans la situation du théorème du double commutant : l'application  $\tilde{F}$  provient de l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{2m}$ .

Un système de générateurs de l'espace des  $\tilde{F}$  s'obtient en associant à tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , l'application  $F_\sigma$  définie par

$$\langle \tilde{F}_\sigma((v_1^* \otimes v_2^*) \otimes \cdots \otimes (v_{2m-1}^* \otimes v_{2m}^*)), v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2m} \rangle = \prod_1^m \langle v_{2i-1}^*, v_{\sigma(2i-1)} \rangle \langle v_{2i}^*, v_{\sigma(2i)} \rangle$$

Si on remplace  $V^* \otimes V^*$  par  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(V, V^*)$ , cette formule devient

$$\langle \tilde{F}_\sigma(T_1 \otimes \cdots \otimes T_m), v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2m} \rangle = \prod_1^m \langle T_i v_{\sigma(2i-1)}, v_{\sigma(2i)} \rangle$$

Il suffit alors de prendre tous les  $T_j$  égaux à  $S$  pour obtenir une forme linéaire invariante sur  $U$ ; on trouve exactement  $L_\sigma$ . On a donc démontré la Proposition 1-5. Le premier théorème fondamental en résulte immédiatement par polarisation. Pour démontrer le deuxième nous allons procéder comme au §4 du Chapitre précédent. Soit toujours  $\text{Sym}_n(\mathbf{K})$  l'espace vectoriel des matrices symétriques, de taille  $n$  et à coefficients dans  $\mathbf{K}$ . Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal engendré par les mineurs d'ordre  $r+1$  et  $\mathcal{J}$  l'idéal des fonctions polynômes nulles sur les matrices de rang au plus  $r$ . On a  $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$  et on doit montrer l'égalité.

Le groupe  $H = \text{GL}_n(\mathbf{K})$  opère dans l'espace  $\mathbf{K}[\text{Sym}_n(\mathbf{K})]$  des fonctions polynômiales sur  $\text{Sym}_n(\mathbf{K})$  par

$$(\pi(h)f)s = f({}^t hsh)$$

Les deux idéaux sont invariants. Soit  $B = AU$  le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. Il nous suffit de montrer que tout vecteur dominant qui appartient à  $\mathcal{J}$  appartient déjà à  $\mathcal{I}$ .

Pour  $s \in \text{Sym}_n(\mathbf{K})$  soit  $\Delta_i(s)$  le mineur d'ordre  $i$ , construit sur les  $i$  premières lignes et les  $i$  premières colonnes. Ce sont des fonctions polynômiales invariantes par  $U$ .

**Proposition 1-6.** — *Soit  $s \in \text{Sym}_n(\mathbf{K})$  telle que  $\prod_1^n \Delta_i(s) \neq 0$ . Il existe  $u \in U$  telle que  ${}^t us$  soit diagonale, les coefficients diagonaux étant*

$$\Delta_1(s), \Delta_2(s)/\Delta_1(s), \dots, \Delta_n(s)/\Delta_{n-1}(s)$$

C'est le résultat classique donné par la méthode de réduction de Gauß des formes quadratiques. La démonstration est une récurrence facile sur  $n$ .

**Proposition 1-7.** — *Les  $\Delta_i \in \mathbf{K}[\text{Sym}_n(\mathbf{K})]$  sont algébriquement indépendantes et engendrent la sous-algèbre des invariants de  $U$ .*

Considérons l'action du groupe diagonal  $A$ . Notons  $(t_1, \dots, t_n)$  les coefficients diagonaux d'une matrice diagonale  $t$  et  $s_{i,j}$  les coefficients d'une matrice symétrique  $s$ . Le polynôme  $s_{i,j}$  est fonction propre pour  $A$  de poids  $t_i t_j$ ; plus généralement tout monôme en les  $s_{i,j}$  est propre. Les poids de  $A$  dans  $\mathbf{K}[\text{Sym}_n(\mathbf{K})]$  sont donc les caractères de la forme  $\prod t_i^{m_i}$  avec  $m_i \geq 0$  et tels que  $\sum m_i$  soit pair.

L'action de  $A$  dans  $\mathbf{K}[\text{Sym}_n(\mathbf{K})]^U$  est aussi diagonalisable; soit  $P$  un vecteur propre. Sa restriction aux matrices diagonales est une fonction polynômiale des coefficients diagonaux, ce qui permet de l'écrire

$$P = \sum c_\alpha \Delta_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \Delta_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \Delta_n^{\alpha_n}$$

Mais  $\Delta_i$  est fonction propre de poids  $t_1^2 \dots t_i^2$  donc  $\Delta_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \Delta_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \Delta_n^{\alpha_n}$  est de poids  $t_1^{2\alpha_1} \dots t_n^{2\alpha_n}$ . Ces poids sont deux à deux distincts donc, puisqu'on suppose que  $P$  est fonction propre, il existe  $\alpha$  tel que  $P$  soit de la forme

$$P = c_\alpha \Delta_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \Delta_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \Delta_n^{\alpha_n}$$

D'après la Proposition 1-7 cette expression reste valable sur un ouvert de Zariski. Finalement  $P$  doit être dominant donc  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$  ce qui est aussi conséquence du fait que  $P$  est un polynôme. Les autres assertions de la Proposition se démontrent comme pour la Proposition 4-5 du Chapitre 2.

Si un tel vecteur dominant  $P \in \mathcal{J}$  alors il est nul sur toutes les matrices de rang au plus  $r$  de sorte que l'un des  $\Delta_j$  avec  $j \geq r + 1$  doit apparaître avec une puissance non nulle. Or un tel  $\Delta_j \in \mathcal{I}$  donc on a bien  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ .

A ce stade il est facile d'obtenir le commutant du groupe orthogonal dans  $V^{\otimes n}$ . En dehors de l'action du groupe symétrique, on obtient des opérateurs construits à partir des contractions. On renvoie le lecteur à [F-H] pour la suite de l'histoire (dans le cas algébriquement clos).

**§ 2. Les théorèmes fondamentaux pour le groupe symplectique.** — Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et paire  $r = 2m$ , sur un corps  $\mathbf{K}$  de caractéristique 0. Soit  $V^*$  le dual de  $V$ . On suppose donnée une application linéaire bijective antisymétrique  $A$  de  $V$  dans  $V^*$ . On a donc une forme bilinéaire alternée non dégénérée

$$B(x, y) = \langle Ax | y \rangle$$

Si on fixe une base  $e_1, \dots, e_r$  de  $V$ , on note  $e_1^*, \dots, e_r^*$  la base duale. Relativement à ces bases,  $A$  est représentée par une matrice antisymétrique, qu'on note encore  $A$ . Les vecteurs  $x$  et  $y$  sont représentés par des vecteurs colonnes  $X$  et  $Y$  et on a

$$B(x, y) = {}^t X A Y$$

Soit  $G$  le groupe symplectique, c'est-à-dire le sous-groupe de  $GL(V)$  formé des endomorphismes qui laissent invariante la forme bilinéaire alternée  $A$ . pour  $g \in G$ , on a  ${}^t g A g = A$  ou encore  $A g = {}^t g^{-1}$  ce qui implique à nouveau que la représentation standard  $\pi_r$  de  $G$  dans  $V$  est équivalente à sa contragrédiente.

Les deux théorèmes fondamentaux s'énoncent, presque mot pour mot, comme dans le cas du groupe orthogonal.

Considérons la somme directe

$$W = V^{\oplus n}$$

de  $n$  copies de  $V$ ; le groupe  $G$  opère dans  $W$  ainsi que dans l'algèbre  $S(W^*)$  des fonctions polynômiales sur  $W$ . On cherche les polynômes invariants. On a déjà les polynômes

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto B(v_i, v_j), \quad i \leq j$$

**Théorème 2-1 (Premier théorème fondamental).** — *La sous-algèbre des invariants du groupe symplectique est engendrée par les "produits scalaires"  $B(v_i, v_j)$*

Soit  $A_n(\mathbf{K})$  l'espace vectoriel des matrices antisymétriques, de dimension  $n$  et à coefficients dans  $\mathbf{K}$ . On définit une application

$$\theta : W \rightarrow A_n(\mathbf{K})$$

par

$$\theta((v_1, \dots, v_n)) = (B(v_i, v_j))$$

Comme toute relation linéaire entre les  $v_j$  fournit une relation linéaire entre les colonnes (ou les lignes) de la matrice antisymétrique  $\theta(w)$  cette dernière est de rang au plus  $r$ . Déterminons l'image. Fixons une base  $e_1, \dots, e_r$  de  $V$ . Identifions  $W$  à l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $r$  colonnes. Le groupe  $GL_n(\mathbf{K})$  opère par multiplications à droite et le groupe  $G$  par multiplications à gauche. On a

$$\theta(w) = {}^t w A w$$

Le groupe  $GL_n(\mathbf{K})$  opère dans  $A_n(\mathbf{K})$  par  $(g, a) \mapsto {}^t g a g$  de sorte que  $\theta$  commute à l'action de  $GL_n(\mathbf{K})$ . L'image de  $\theta$  est donc réunion d'orbites ; mais ces dernières sont classées par le rang qui doit être un nombre pair. Si

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors un système de représentants est formé des matrices (carrées de dimension  $n$ )

$$0, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

On peut choisir la base de  $V$  telle que la matrice  $A$  soit la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & j \end{pmatrix}$$

En partant de l'égalité entre matrices 2 – 2

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix}$$

on montre trivialement que chacun des représentants ci-dessus appartient à l'image de  $\theta$  qui est donc exactement la sous-variété des matrices (antisymétriques) de rang



au plus  $r$ . Le deuxième théorème fondamental donne un système de générateurs de l'idéal des fonctions polynômiales sur  $A_n(\mathbf{K})$  qui sont nulles sur la sous-variété des matrices (antisymétriques) de rang au plus  $r$ . Nous aurons besoin de la notion de pfaffien.

Soit  $S$  une matrice antisymétrique de dimension  $2q$ . Soient  $v_1, \dots, v_{2q}$  des vecteurs colonnes et

$$f_S(v_1, \dots, v_{2q}) = \frac{1}{q!2^q} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2q}} \varepsilon(\sigma) \prod_1^q {}^t v_{\sigma(2i-1)} S v_{\sigma(2i)}$$

C'est une forme multilinéaire alternée donc un multiple du déterminant. On définit le pfaffien  $\text{Pf}(S)$  de  $S$  par

$$f_S(v_1, \dots, v_{2q}) = \text{Pf}(S) \text{Det}(v_1, \dots, v_{2q})$$

Soient  $s_{i,j}$  les coefficients de  $S$ ; en appliquant la formule précédente aux vecteurs de base, on obtient

$$\text{Pf}(S) = \frac{1}{q!2^q} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2q}} \varepsilon(\sigma) \prod_1^q s_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)}$$

Soit  $g \in M_{2q}(\mathbf{K})$ ; on a

$$f_{gSg}(v_1, \dots, v_{2q}) = f_S(gv_1, \dots, gv_{2q})$$

d'où

$$\text{Pf}({}^t g S g) = \text{Det}(g) \text{Pf}(S)$$

Un calcul direct donne

$$\text{Pf}(J_{2q}) = 1$$

Il existe  $g \in M_{2q}(\mathbf{K})$  tel que  $S = {}^t g J_{2q} g$ . On a alors  $\text{Pf}(S) = \text{Det}(g)$  d'où  $(\text{Pf}(S))^2 = \text{Det}(S)$ .

Revenons à l'espace vectoriel  $A_n(\mathbf{K})$  des matrices antisymétriques de dimension  $n$ . Soit  $e$  une partie de  $\{1, 2, \dots, n\}$  ayant un nombre pair  $2q$ , d'éléments. Pour  $a \in A_n(\mathbf{K})$  considérons la sous matrice obtenue en conservant les lignes et les colonnes dont l'indice appartient à  $e$ . Cette sous-matrice est antisymétrique, de dimension  $2q$ . On note  $\text{Pf}_e(a)$  son pfaffien. On a ainsi une fonction polynômiale  $\text{Pf}_e$  sur  $A_n(\mathbf{K})$ .

**Théorème 2-2 (Deuxième théorème fondamental).** — *L'idéal des relations entre les  $B(v_i, v_j)$  est engendré par les pfaffiens  $Pf_e$  avec  $\text{Card}(e) = r + 2$  de la matrice  $\theta(w)$ .*

Si  $r + 2 > n$  cela signifie qu'il n'y a pas de relations.

Nous suivrons en gros la même méthode que pour le groupe orthogonal. Commençons par étudier l'action de  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$  sur les matrices antisymétriques. Considérons à nouveau le sous groupe de Borel  $B = AU$  des matrices triangulaires supérieures.

Si  $a \in A_n(\mathbf{K})$  on note  $\Delta_i(a)$  le pfaffien de la matrice obtenue en sélectionnant les  $2i$  premières lignes et les  $2i$  premières colonnes ( on suppose que  $2i \leq n$  ). Soit  $\Omega$  l'ouvert de Zariski défini par  $\Delta_1(a) \neq 0, \Delta_2(a) \neq 0, \dots$

**Lemme 2-3.** — *Il existe une application  $a \mapsto u(a)$  de  $\Omega$  dans  $U$  ayant les propriétés suivantes :*

a) pour tout  $a \in \Omega$

$$a = {}^t u(a) \begin{pmatrix} \Delta_1(a)j & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\Delta_2(a)}{\Delta_1(a)}j & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3(a)}{\Delta_2(a)}j & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_4(a)}{\Delta_3(a)}j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} u(a)$$

b) les coefficients de  $u(a)$  sont des fractions rationnelles ayant pour dénominateurs des monômes en les  $\Delta_i$

C'est une récurrence fondée sur l'identité

$$a = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -a_{2,3}/\Delta_1(a) & a_{1,3}/\Delta_1(a) & 1 & 0 & \dots \\ -a_{2,4}/\Delta_1(a) & a_{1,4}/\Delta_1(a) & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1(a)j & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_{2,3}/\Delta_1(a) & -a_{2,4}/\Delta_1(a) & \dots \\ 0 & 1 & a_{1,3}/\Delta_1(a) & a_{1,4}/\Delta_1(a) & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

La matrice  $a'$  est antisymétrique, de dimension  $n - 2$  et ses coefficients sont des polynômes en les coefficients de  $a$ , divisés par une puissance de  $\Delta_1(a)$ . De plus on a  $\Delta_i(a') = \Delta_{i+1}(a)/\Delta_1(a)$ .

On peut maintenant prouver le premier théorème fondamental pour le cas  $r = n$ . Supposons que  $r = n$  et, en choisissant une base de  $V$  telle que  $A = J$ , identifions  $W$  à  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$

**Lemme 2-4.** — *Pour que deux éléments  $w$  et  $w'$  de  $W$  soient conjugués par  $G$ , il faut et il suffit qu'ils aient même noyau et que  $\theta(w) = \theta(w')$ .*

La démonstration est identique à celle du Lemme 1-4.

**Lemme 2-5.** — *Soit  $\varphi$  une application polynomiale de  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$  dans  $\mathbf{K}$ , invariante par  $G$ . Il existe une unique application polynomiale  $f$  de  $A_n(V)$  dans  $\mathbf{K}$  telle que  $\varphi(w) = f({}^t w J w)$*

On a

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} J_r \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^j & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & x_2^j & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x_3^j & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & x_4^j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

En combinant avec le lemme 2-3 on en déduit qu'il existe une application  $a \mapsto b(a)$  de  $\Omega$  dans  $B$ , dont les coefficients sont des polynômes en les coefficients de  $a$  divisés par des monômes en les  $\Delta_i(a)$  et telle que  $a = {}^t b(a) J_r b(a)$ . D'après le lemme 2-4 il existe un unique  $f$  tel que  $\varphi(w) = f({}^t w J w)$ . On a donc  $f(a) = \varphi(b(a))$  pour tout  $a \in \Omega$ . Par suite  $f$  est une fraction rationnelle et on a  $\varphi(w) = f({}^t w J w)$  pour  $w \in \theta^{-1}(\Omega)$ . Comme  $\varphi$  est un polynôme,  $f$  doit aussi être polynomiale.

La démonstration du premier théorème fondamental se termine alors comme dans le cas du groupe orthogonal. Passons au deuxième théorème fondamental. L'entier  $n$  est à nouveau quelconque mais on peut supposer que  $r < n$ . Sur  $A_n(\mathbf{K})$  les pfaffiens  $\Delta_i$  sont définies pour  $2i \leq n$ .

**Proposition 2-6.** — *Les  $\Delta_i \in \mathbf{K}[S]$  sont algébriquement indépendants et engendrent la sous-algèbre des invariants de  $U$ .*

Cela résulte facilement du lemme 2-3.

**Lemme 2-7.** — *L'espace vectoriel engendré par les  $Pf_e$  avec  $\text{Card}(e) = r + 2$  est invariant par  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$*

Notons d'abord que ces  $Pf_e$  sont linéairement indépendants car les monômes qu'ils contiennent sont distincts. De plus leur nombre est  $\binom{n}{r+2}$ . Parmi eux le seul vecteur dominant est  $\Delta_{m+1}$ . A l'aide de la formule de la dimension établie au chapitre précédent on vérifie que la dimension du module engendré est aussi  $\binom{n}{r+2}$ . Mais l'action des matrices de permutation transforme  $\Delta_{r/2+1}$  en les  $Pf_e$ . Le module engendré admet donc ces pfaffiens comme base.

L'idéal des fonctions polynomiales nulles sur l'image de  $\theta$ , c'est-à-dire sur la sous-variété des matrices antisymétriques de rang au plus  $r$  est stable par  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ . Pour le déterminer on cherche les vecteurs dominants qui lui appartiennent, donc les monômes en les  $\Delta_i$  qui sont nuls sur les matrices de rang au plus  $r$ . Ce sont exactement les monômes qui contiennent un  $\Delta_i$  avec  $2i > r$ . En utilisant la formule explicite, on voit que le pfaffien d'une matrice de dimension  $2s$  se développe comme

combinaison de pfaffiens de sous-matrices de dimension  $2s - 2$ . L'idéal cherché est donc engendré par les transformés par  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  des pfaffiens de "dimension"  $r + 2$ . D'après le lemme 2-7 c'est donc l'idéal engendré par ces pfaffiens.

## Appendice : un peu d'algèbre élémentaire

Cet appendice rassemble, essentiellement sans démonstrations, quelques résultats classiques concernant les représentations des algèbres simples ainsi que les généralités sur les représentations des groupes finis. Pour les démonstrations, on pourra se reporter à [L] et à [S]. Dans tout le chapitre  $\mathbf{K}$  est un corps. A partir du § 3 on se limite à la caractéristique nulle

**§ 1. Le théorème du double commutant.** — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre sur  $\mathbf{K}$ . Elle est supposée associative mais, en général, elle ne sera pas commutative. Sa dimension est finie ou infinie et enfin elle n'a pas nécessairement d'élément unité ; si elle en a un on dit qu'elle est unitaire.

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  de dimension non nulle, finie ou infinie. Une *représentation*  $\pi$  de  $\mathcal{A}$  dans  $V$  est un homomorphisme de  $\mathcal{A}$  dans l'algèbre  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$ . On dit aussi que  $V$  est un  $\mathcal{A}$ -module et on note alors simplement  $av$  au lieu de  $\pi(a)v$ . Nous utiliserons indistinctement, et parfois dans la même phrase, les deux terminologies. Notons que si  $\mathcal{A}$  a un élément unité  $e$ , alors on suppose toujours que  $ev = v$ .

Un sous-espace  $W$  est invariant si, pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , on a  $\pi(a)W \subset W$ . Par restriction à  $W$  on obtient, si  $W \neq (0)$ , une sous-représentation de  $\pi$  (un sous-module). On a également, si  $V \neq W$ , une représentation quotient dans  $V/W$  (un module quotient). Une représentation est irréductible (module simple) si les seuls sous-espaces invariants sont  $(0)$  et  $V$ .

On a une notion évidente de somme directe de représentations. Une représentation est dite semi-simple si elle est somme directe de représentations irréductibles. Elle est complètement réductible si tout sous-espace invariant possède un supplémentaire invariant.

**Proposition 1-1.** — *Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre et  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module.*

- 1) *Si  $V$  est somme de sous-modules simples, il est semi-simple.*
- 2) *Si  $V$  est semi-simple, il est complètement réductible.*
- 3) *Si  $V$  est complètement réductible, de dimension finie, alors il est semi-simple.*
- 4) *Si  $V$  est complètement réductible et si  $\mathcal{A}$  possède un élément unité, alors il est semi-simple.*

Voir, par exemple [L].

**Corollaire 1-2.** — *Tout sous-module (resp. tout module quotient) d'un module semi-simple est semi-simple*

Pour les modules quotients cela résulte de l'assertion 1) de la proposition précédente. Si  $W$  est un sous-module d'un module semi-simple  $V$ , d'après l'assertion

2) il existe un sous-module supplémentaire  $W'$  et il suffit de noter que  $W$  est isomorphe au module quotient  $V/W'$ .

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux  $\mathcal{A}$ -modules. Un homomorphisme de  $\mathcal{A}$ -modules  $T$  de  $V_1$  dans  $V_2$  est une application linéaire de  $V_1$  dans  $V_2$  qui commute à l'action de  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire tel que  $aTv = Tav$ . Dans le langage des représentations, on parle d'opérateur d'entrelacement. Le commutant d'un  $\mathcal{A}$ -module  $V$  est l'ensemble des homomorphismes de  $V$  dans  $V$ ; c'est une sous-algèbre de  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$ .

**Proposition 1-3 (Lemme de Schur).** — *Supposons  $\mathbf{K}$  algébriquement clos. Soit  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module semi-simple de dimension finie ou, si  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ , au plus dénombrable. Pour qu'il soit simple, il faut et il suffit que son commutant soit réduit aux scalaires.*

Réduit aux scalaires signifie que les seuls éléments du commutant sont les applications  $v \mapsto \lambda v$ , avec  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Si  $V = V_1 \oplus V_2$  est une décomposition en somme directe de deux sous-modules, alors la projection sur chacun d'entre eux appartient au commutant ce qui prouve que la condition est suffisante. En sens inverse, si  $T$  est un élément du commutant, chacun de ses sous-espaces propres est un sous-module; en dimension finie, comme le corps de base est algébriquement clos, il existe au moins une valeur propre donc si  $V$  est simple  $T$  ne peut-être que scalaire.

Si la dimension est au plus dénombrable, soit  $C'$  le commutant. Si  $T \in C'$  alors le noyau et l'image de  $T$  sont des sous-modules donc le noyau est  $(0)$  et l'image  $V$  de sorte que  $T$  est bijectif. Son inverse est aussi dans le commutant. Identifions  $\mathbf{C}$  aux homothéties. L'algèbre  $C'$  est en fait un corps; c'est une extension de  $\mathbf{K}$ . Soit  $v$  un élément non nul de  $V$ . L'application  $T \mapsto Tv$  de  $C'$  dans  $V$  est linéaire injective. On en déduit que la dimension de  $C'$  est au plus dénombrable. Mais  $\mathbf{C}$  étant algébriquement clos, toute extension non triviale contient un corps de fractions rationnelles en une variable donc sa dimension est au moins la puissance du continu. L'extension  $C'$  ne peut donc être que triviale!

Il y a de nombreuses variantes du Lemme de Schur. Le fait que le commutant d'un module simple soit réduit aux scalaires est vrai dans des conditions beaucoup plus générales, par exemple pour des représentations unitaires irréductibles.

Dans l'autre sens si  $V$  est semi-simple, de dimension quelconque et de commutant réduit aux scalaires, il est simple (même argument) mais l'hypothèse de semi-simplicité est essentielle.

On dit que  $V$  est un *module non dégénéré* si pour tout  $v \in V$ , non nul, il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $av = v$ .

Notons  $C$  l'ensemble des applications  $v \mapsto av$  pour  $a \in \mathcal{A}$ . C'est une sous-algèbre de  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$ . Soit  $C'$  son commutant et soit  $C''$  son bicommutant c'est-à-dire le commutant de  $C'$ . On a évidemment  $C \subset C''$

**Théorème 1-4 (double commutant).** — *Si  $V$  est un module non dégénéré, semi-simple et de dimension finie, alors  $C = C''$*

Voir, par exemple [L].

Conservons les notations précédentes.

**Théorème 1-5 (Burnside).** — *Supposons  $\mathbf{K}$  algébriquement clos. Si  $\mathcal{A}$  possède un élément unité et si  $V$  est simple de dimension finie, alors  $C = \text{End}_{\mathbf{K}}(V)$*

En effet l'existence d'un élément unité implique que  $V$  est non dégénérée. D'après le lemme de Schur  $C'$  est réduit aux scalaires donc  $C''$  est l'algèbre de tous les endomorphismes sur  $\mathbf{K}$  de  $V$  et on conclut en appliquant le théorème du double commutant.

**§ 2. Quelques remarques sur les algèbres semi-simples.** — Le corps de base est toujours  $\mathbf{K}$ .

Soit à nouveau  $\mathcal{A}$  une algèbre; on suppose qu'elle possède un élément unité. Utilisons le langage des représentations. Soit  $(\pi, V)$  une représentation de  $\mathcal{A}$  dans un espace vectoriel  $V$  de dimension finie. Le noyau de  $\pi$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $a$  tels que  $\pi(a) = 0$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{A}$ ; on le note  $\mathcal{I}(\pi)$ . On a donc un homomorphisme injectif de l'algèbre quotient  $\mathcal{A}/\mathcal{I}(\pi)$  dans  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$ . Si  $\pi$  est irréductible et  $\mathbf{K}$  algébriquement clos, alors cet homomorphisme est un isomorphisme..

**Proposition 2-1.** — *Supposons  $\mathbf{K}$  algébriquement clos. Soient  $(\pi_1, V_1)$  et  $(\pi_2, V_2)$  deux représentations irréductibles de dimension finie d'une algèbre unitaire  $\mathcal{A}$ . Pour que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  soient équivalentes, il faut et il suffit que  $\mathcal{I}(\pi_1) = \mathcal{I}(\pi_2)$ .*

**Proposition 2-2.** — *Supposons  $\mathbf{K}$  algébriquement clos. Soient  $(\pi_1, V_1)$  et  $(\pi_2, V_2)$  deux représentations irréductibles de dimension finie d'une algèbre unitaire  $\mathcal{A}$ . Supposons que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  ne sont pas équivalentes. Alors quels que soient  $u_1 \in \text{End}_{\mathbf{C}}(V_1)$  et  $u_2 \in \text{End}_{\mathbf{C}}(V_2)$ , il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $\pi_1(a) = u_1$  et  $\pi_2(a) = u_2$ .*

Soit  $(\pi, V)$  une représentation de dimension finie d'une algèbre unitaire  $\mathcal{A}$ . On appelle caractère de  $\pi$  la forme linéaire  $a \mapsto \text{Tr } \pi(a)$ . Plus généralement si  $v \in V$  et  $v^* \in V^*$ , la forme linéaire  $a \mapsto \langle \pi(a)v, v^* \rangle$  est un coefficient de  $\pi$ .

**Théorème 2-3.** — *Supposons  $\mathbf{K}$  algébriquement clos. Soient  $(\pi_i, V_i)$  des représentations irréductibles, deux à deux inéquivalentes, de dimension finie d'une algèbre unitaire  $\mathcal{A}$ . Pour tout  $i$  soit  $(v_{i,j})$  une base de  $V$  et  $(v_{i,j}^*)$  la base duale. Dans ces conditions les formes linéaires  $a \mapsto \langle \pi_i(a)v_{i,j}, v_{i,k}^* \rangle$  sont linéairement indépendantes. En particulier les caractères sont linéairement indépendants.*

Soit toujours  $\mathcal{A}$  une  $\mathbf{K}$ -algèbre et soit  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module semi-simple. Soit  $V = \bigoplus V_i$  une décomposition en somme directe de modules simples; supposons tous ces sous-modules isomorphes. Soit  $W$  un sous-module simple de  $V$ ; il existe au moins un  $i$  tel que la restriction à  $W$  de la projection  $p_i$  de  $V$  sur  $V_i$  soit non nulle. Comme le noyau de cette restriction est un sous-module, il est donc réduit à  $(0)$  et comme  $p_i$  commute à  $\mathcal{A}$ , le sous-module  $W$  est isomorphe à sa projection  $p_i(W)$ . Mais comme cette dernière est non nulle et contenue dans le sous-module simple  $V_i$  cela veut dire que  $W$  et  $V_i$  sont isomorphes. Autrement dit si tous les  $V_i$  sont isomorphes, alors tout sous-module simple de  $V$  est aussi isomorphe aux  $V_i$ .

Soit alors  $\widehat{\mathcal{A}}$  l'ensemble des classes d'isomorphes de  $\mathcal{A}$ -modules simples. Soit  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module semi-simple et soit  $V = \bigoplus V_i$  une décomposition en somme directe de sous-modules simples. Pour tout  $\omega \in \widehat{\mathcal{A}}$ , soit  $V_\omega$  la somme directe des  $V_i$  qui appartiennent à la classe  $\omega$ . On a donc  $V = \bigoplus V_\omega$ . Soit  $p_\omega$  la projection de  $V$  sur  $V_\omega$ . Soit  $W$  un sous-module simple; comme plus haut fixons  $\omega$  tel que  $p_\omega(W) \neq (0)$ . On a encore que  $W$  est isomorphe à sa projection qui, d'après ce qui précède appartient à la classe  $\omega$ . Il en résulte que pour  $\omega' \neq \omega$ , on a  $p_{\omega'}(W) = (0)$  de sorte que  $W$  est contenu dans  $V_\omega$ . Tout ceci prouve que  $V_\omega$  ne dépend pas de la décomposition  $V = \bigoplus V_i$  dont on est parti. On dit que  $V_\omega$  est la composante isotypique de type  $\omega$  de  $V$ ; tout sous-module simple de type  $\omega$  est un sous-module de  $V_\omega$ . Par contre la décomposition de chaque composante isotypique en somme directe de sous-modules simples n'est pas unique.

Si  $T$  est un élément du commutant de  $V$ , alors chaque  $V_\omega$  est stable par  $T$ . Pour déterminer la structure du commutant de  $V$ , il suffit donc de considérer le cas où  $V = V_\omega$ .

**Proposition 2-4.** — *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre unitaire. Soit  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module semi-simple. Supposons que  $V = \bigoplus_1^n V_i$  où les sous-modules  $V_i$  sont simples, de commutant réduit aux scalaires et appartiennent tous à la même classe  $\omega$ . Le commutant de  $V$  est isomorphe à l'algèbre  $M_n(\mathbf{K})$ .*

Ceci est donc valable par exemple si les  $V_i$  sont simples de dimension finie et si  $\mathbf{K}$  est algébriquement clos.

Fixons un représentant  $W$  de la classe  $\omega$  et, pour tout  $i$  soit  $u_i$  un isomorphisme de  $W$  sur  $V_i$ . Soit  $p_j$  la projection de  $V$  sur  $V_j$ . Si  $T$  est un élément du commutant, on pose

$$T_{i,j} = u_i^{-1} \circ p_j \circ T \circ u_i$$

C'est un élément du commutant de  $W$ , donc un opérateur scalaire. Soit  $T_{i,j} = \lambda_{i,j} Id$  et notons  $A_T$  la matrice  $(\lambda_{i,j})$ . L'application  $T \mapsto A_T$  est linéaire injective. On a

$$T = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} u_i \circ u_j^{-1} \circ p_j$$

ce qui prouve que l'application est bijective et il est trivial que c'est un isomorphisme d'algèbres.

**Définition 2-5.** — *Une algèbre unitaire  $\mathcal{A}$  est dite semi-simple si, considérée comme module à gauche sur elle-même elle est semi-simple.*

A gauche signifie qu'on fait opérer l'algèbre dans elle-même par multiplication à gauche. Un sous-module est donc un idéal à gauche et un sous-module simple un idéal gauche minimal (non nul).

**Définition 2-6.** — *Une algèbre unitaire est dite simple si elle est semi-simple et si elle ne possède pas d'idéaux bilatères propres.*



**Théorème 2-7.** — *Supposons  $\mathbf{K}$  algébriquement clos. Les algèbres simples de dimension finie sont les algèbres isomorphes aux algèbres  $M_n(\mathbf{K})$*

*Remarque.* — Si  $K$  est un corps quelconque et si on suppose que  $\mathcal{A}$  est centrale (son centre est  $K$ ), de rang fini, alors elle est isomorphe à une algèbre  $M_n(D)$  où  $D$  est une algèbre à division sur  $K$ , de rang fini.

**Proposition 2-8.** — *Une algèbre unitaire  $\mathcal{A}$  est semi-simple si et seulement si tout  $\mathcal{A}$ -module est semi-simple.*

C'est nécessaire par définition. Inversement si  $\mathcal{A}$  est semi-simple et si  $V$  est un  $\mathcal{A}$ -module, alors, pour tout  $v \in V$ , le sous-module  $\mathcal{A}v$  engendré par  $v$  est isomorphe à un quotient de  $\mathcal{A}$  donc est semi-simple; de plus  $v = 1.v \in \mathcal{A}v$ . Le module  $V$  est donc semi-simple car somme de modules semi-simples.

**Théorème 2-9.** — *Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre unitaire semi-simple et  $\mathcal{A} = \bigoplus \mathcal{A}_i$  la décomposition en composantes isotypiques de  $\mathcal{A}$ , considérée comme  $\mathcal{A}$ -module à gauche. Cette décomposition est finie; chaque  $\mathcal{A}_i$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{A}$  et est une sous-algèbre simple. L'algèbre  $\mathcal{A}$  est isomorphe au produit direct des  $\mathcal{A}_i$ . Si  $\omega_i$  est la classe d'isomorphisme de  $\mathcal{A}$ -module associée à la composante isotypique  $\mathcal{A}_i$  alors les  $\omega_i$  sont les seules classes d'isomorphisme de  $\mathcal{A}$ -modules simples.*

*Inversement si  $\mathcal{A}$  est le produit direct fini d'algèbres unitaires simples  $\mathcal{A}_i$ , alors les  $\mathcal{A}_i$  sont les composantes isotypiques de  $\mathcal{A}$ , considérée comme  $\mathcal{A}$ -module à gauche sur elle-même.*

**Corollaire 2-10.** — *Pour qu'une algèbre unitaire semi-simple soit simple, il faut et il suffit qu'elle possède une seule classe de modules simples.*

Contrairement à ce qu'on pourrait espérer une algèbre unitaire qui n'a pas d'idéaux bilatères propres n'est pas automatiquement simple. Nous avons donc inclus la condition semi-simple dans la définition. En fait il suffit par exemple de la supposer artinienne... En dimension finie cette complication disparaît.

Terminons par une ou deux remarques. Soit  $\mathcal{A} = \prod_1^r \mathcal{A}_i$  une algèbre semi-simple. Pour tout  $\mathcal{A}$ -module  $V$ , la décomposition en composantes isotypiques est donnée par

$$V = \bigoplus_1^r \mathcal{A}_i V$$

Le sous-module  $V_i = \mathcal{A}_i V$  est somme directe de sous-modules isomorphes  $V_i = \bigoplus_j V_{i,j}$ . La projection sur chacun de ces  $V_{i,j}$  appartient au commutant de  $V_i$  et on a également des isomorphismes de  $\mathcal{A}_i$ -modules entre les  $V_{i,j}$ . On en tire de suite que le commutant de  $V_i$  est commutatif si et seulement si  $V_i$  est simple et si le lemme de Schur est valable. Par exemple, en dimension finie et sur un corps algébriquement clos, le commutant de  $V$  est commutatif si et seulement si  $V$  se décompose avec multiplicités 1.

Toujours dans le cas algébriquement clos, si on considère  $\mathcal{A}$  comme  $\mathcal{A}$ -module à gauche et si on suppose par exemple que  $\mathcal{A}$  est de dimension finie, alors chaque  $\mathcal{A}_i$

est isomorphe à une algèbre  $M_{n_i}(\mathbf{K})$ . La dimension du centre de  $\mathcal{A}$  est donc égale au nombre de composantes  $\mathcal{A}_i$ .

Pour  $K$  à nouveau quelconque, soit  $\mathcal{A}$  une algèbre semi-simple de dimension finie et soit  $\mathcal{A} = \prod A_i$  sa décomposition en produit d'algèbres simples. Chaque  $A_i$  correspond à une classe  $\lambda_i$  de  $\mathcal{A}$ -modules simples. Soit  $\mathcal{A}^*$  le dual de  $\mathcal{A}$ . Si  $L \in \mathcal{A}^*$ , on pose  $(aL)(x) = L(xa)$  ce qui donne une structure de  $\mathcal{A}$ -module sur  $\mathcal{A}^*$  (représentation corégulière).

Soit  $(\pi, V)$  un  $\mathcal{A}$ -module simple de type  $\lambda_i$ . Considérons à nouveau les coefficients  $\varphi_{v, v^*}(a) = \langle \pi(a)v, v^* \rangle$ ; fixons  $v^*$ . L'application  $v \mapsto \varphi_{v, v^*}$  de  $V$  dans  $\mathcal{A}^*$  commute à l'action de  $\mathcal{A}$ . L'espace vectoriel  $C_\pi$ , engendré par les coefficients de  $\pi$  est donc un sous-espace vectoriel de la composante isotypique  $(\mathcal{A}^*)_i$  de type  $\lambda_i$ . Comme  $C_\pi$  ne dépend que de la classe d'équivalence de  $\pi$ , on le note  $C_i$ . En particulier prenons pour  $(\pi, V)$  un sous-module de  $\mathcal{A}^*$ , donc en fait de  $\mathcal{A}_i^*$ . Le coefficient  $\varphi_{v, e}$  est donné par  $\varphi_{v, e}(a) = \langle av, e \rangle = \langle v, ea \rangle = \langle v, a \rangle$  donc  $\varphi_{v, e} = v$ . On en déduit que  $C_i = \mathcal{A}_i^*$ . Si on identifie  $V \otimes V^*$  et  $\text{End}_K$  alors l'application bilinéaire  $\varphi_{v, v^*}$  se prolonge en une application linéaire de  $\text{End}_K$  dans et en fait sur  $\mathcal{A}_i^*$ . A  $T \in \text{End}_K$  est associé la forme linéaire  $a \mapsto \text{Tr}(aT)$ . Il en résulte que la multiplicité de  $\lambda_i$  dans  $\mathcal{A}^*$  est au plus égale à la dimension de  $\lambda_i$ . Si  $\mathbf{K}$  est algébriquement clos, alors le théorème de Burnside montre que l'application ci-dessus est injective donc que la multiplicité est exactement la dimension.

Enfin notons que  $\pi(\mathcal{A}_j) = (0)$  pour  $j \neq i$  implique que  $\mathcal{A}_j$  et  $\mathcal{A}_i^*$  sont orthogonaux de sorte que  $\mathcal{A}_i^*$  s'identifie au dual de  $\mathcal{A}_i$ . En particulier ils ont même dimension. On conclut que les  $\mathcal{A}$ -modules  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^*$  sont équivalents.

### § 3 Application aux groupes finis

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $\#G$ . On suppose une fois pour toutes que la caractéristique de  $\mathbf{K}$  ne divise pas l'ordre du groupe. Soit  $\mathbf{K}[G]$  l'espace vectoriel des applications de  $G$  dans  $\mathbf{K}$ . Si  $f \in \mathbf{K}[G]$ , son intégrale sur  $G$  est

$$\int_G f(x) dx = \frac{1}{\#G} \sum_x f(x)$$

La masse totale de  $G$  est donc prise égale à 1. Le produit de convolution doit donc se définir par

$$f * g(x) = \frac{1}{\#G} \sum_y f(y)g(y^{-1}x)$$

Si  $a \in G$ , on note  $\delta_a$  la masse +1 au point  $a$ , c'est-à-dire la mesure  $f \mapsto f(a)$ . Si on veut identifier fonctions et mesures, il faut donc introduire la fonction  $\varepsilon_a$  qui vaut  $\#G$  en  $a$  et 0 ailleurs. On a

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}, \quad \varepsilon_a * \varepsilon_b = \varepsilon_{ab}$$

L'algèbre  $\mathbf{K}[G]$  est associative; son élément unité est  $\varepsilon_e$  où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ . Elle est commutative si et seulement si  $G$  est un groupe commutatif. Dans le cas général, il est facile de décrire le centre de cette algèbre. pour que

$$f = \frac{1}{\#G} \sum f(x)\varepsilon_x$$

appartienne au centre, il faut et il suffit que, pour tout  $a \in G$ , on ait  $\varepsilon_a * f = f * \varepsilon_a$  ce qui équivaut à  $f(ax) = f(xa)$ . Autrement dit la fonction  $f$  doit être centrale ou invariante par automorphismes intérieurs : pour tout  $x$  et tout  $y$  on a  $f(x^{-1}yx) = f(y)$ . On fait opérer  $G$  dans lui-même par automorphismes intérieurs. A toute orbite  $\Gamma \subset G$ , on associe

$$f_\Gamma = \sum_{x \in \Gamma} \varepsilon_x$$

Ces fonctions forment une base du centre dont la dimension est donc égale au nombre d'orbites de  $G$  opérant dans lui-même par automorphismes intérieurs.

Une représentation de  $G$  dans un espace vectoriel  $V$  est une application  $\pi$  de  $V$  dans  $\text{End}_{\mathbf{K}}(V)$  telle que  $\pi(e) = id$  et  $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ . On prolonge  $\pi$  à l'algèbre  $\mathbf{K}[G]$  en posant

$$\pi(f) = \frac{1}{\#G} \sum_x f(x)\pi(x)$$

En particulier  $\pi(\varepsilon_a) = \pi(a)$ . On vérifie immédiatement que ceci fournit une bijection entre les représentations de  $G$  et celles de son algèbre de groupe  $\mathbf{K}[G]$ .

**Théorème 3-1.** — *L'algèbre  $\mathbf{K}[G]$  est semi-simple*

Il suffit de démontrer que toute représentation  $(\pi, V)$  de dimension finie est complètement réductible. Soient  $W$  un sous-espace invariant et  $p$  un projecteur de  $V$  sur  $W$ . Soit

$$q = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \sigma p \sigma^{-1}$$

L'application linéaire  $q$  est un projecteur sur  $W$ , qui commute à  $G$  donc son noyau est un supplémentaire invariant.

Soit alors  $\widehat{G}$  l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de  $G$ , ou ce qui est la même chose de  $\mathbf{K}[G]$ -modules simples. On a donc une décomposition

$$\mathbf{K}[G] = \bigoplus_{\omega \in \widehat{G}} \mathbf{K}[G]_\omega$$

en produit ou somme directe d'algèbres simples.

Fixons une telle classe  $\omega$  et soit  $(\pi, V_\pi)$  un représentant de cette classe. Pour tout  $A \in \text{End}_K(V_\pi)$  soit  $f_A$  la fonction sur  $G$  définie par

$$f_A(x) = \text{Tr}(A\pi(x^{-1}))$$

Soit  $\lambda$  la représentation régulière gauche de  $G$  dans  $\mathbf{K}[G]$  définie par

$$\lambda(x)f(y) = f(x^{-1}y) \quad \lambda(x)f = \delta_x * f$$

De même soit  $\rho$  la représentation régulière droite

$$\rho(x)f(y) = f(yx) \quad \rho(x)f = f * \delta_{x^{-1}}$$

*Jusqu'à la fin du chapitre on suppose que  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ . On choisit sur  $V_\pi$  une structure hilbertienne telle que  $\pi$  soit unitaire.*

**Proposition 3-2.** — *L'application  $A \mapsto f_A$  est une bijection linéaire de  $\text{End}_K(V_\pi)$  sur  $\mathbf{K}[G]_\omega$ . De plus, on a*

$$\begin{aligned} \lambda(y)f_A &= f_{\pi(y)A} \\ \rho(y)f_A &= f_{A\pi(y^{-1})} \\ f_A * f_B &= \frac{1}{\dim(\pi)} f_{AB} \end{aligned}$$

L'algèbre  $\mathbf{K}[G]$  est munie de la structure hilbertienne de  $L^2(G)$ .

**Proposition 3-3.** — *Si  $\omega \neq \omega'$  alors les sous-espaces  $\mathbf{K}[G]_\omega$  et  $\mathbf{K}[G]_{\omega'}$  sont orthogonaux. De plus si  $A$  et  $B$  sont deux éléments de  $\text{End}_{\mathbf{C}}(V_\pi)$ , alors*

$$(f_A, f_B) = \frac{1}{\dim V_\pi} \text{Tr}(AB^*)$$

Soit  $\bar{\pi}$  la représentation conjuguée de  $\pi$ , c'est-à-dire la représentation déduite de  $\pi$  en remplaçant  $V_\pi$  par son conjugué (la multiplication par le scalaire  $z$  devient la multiplication par  $\bar{z}$ ). En général la classe correspondante  $\bar{\omega}$  est distincte de  $\omega$ . La restriction de  $\rho$  à  $\mathbf{K}[G]_\omega$  est la somme directe de  $\dim \pi$  copies de  $\bar{\pi}$ .

Conservons nos notations. On appelle caractère de  $\pi$  (ou de la classe  $\omega$ ), la fonction

$$\chi_\pi(x) = \text{Tr} \pi(x)$$

Il se prolonge en la forme linéaire  $\text{Tr} \pi(f)$  sur  $\mathbf{K}[G]$ . Sauf si  $\pi$  est de dimension 1, ce n'est pas un caractère de cette algèbre. On le notera aussi  $\text{ch}(\omega)$ . Le caractère est défini pour toute représentation de dimension finie, irréductible ou pas. Le caractère d'une somme directe est la somme des caractères, le caractère

d'un produit tensoriel le produit des caractères. Il est commode d'introduire une normalisation des caractères. Pour tout  $\omega \in \widehat{G}$ , posons

$$\xi_\omega = (\dim \omega) \text{ch}(\omega), \quad e_\omega = \overline{\xi_\omega}$$

**Proposition 3-4.** — *La fonction  $e_\omega$  appartient à  $\mathbf{K}[G]_\omega$  et l'application  $f \mapsto e_\omega * f$  est le projecteur orthogonal de  $\mathbf{K}[G]$  sur  $\mathbf{K}[G]_\omega$ . Pour le produit de convolution,  $e_\omega$  est un idempotent; c'est une fonction centrale, hermitienne et elle est minimale en le sens suivant : si  $e_\omega = e' + e''$  avec  $e'$  et  $e''$  des idempotents centraux alors soit  $e'$  soit  $e''$  est nul. Inversement tout idempotent central et minimal est égal à l'un des  $e_\omega$ .*

En effet  $e_\omega = (\dim \pi) f_{\text{Id}}$  donc il appartient à  $\mathbf{K}[G]_\omega$ . Les relations d'orthogonalité de Schur montrent que la convolution avec  $e_\omega$  est bien le projecteur annoncé. Il est évident que c'est une fonction centrale. On peut donc convoler à droite ou à gauche puisque les fonctions centrales sont exactement les éléments du centre de l'algèbre  $\mathbf{K}[G]$ . Comme l'application identique est sa propre adjointe,  $e_\omega = e_\omega^*$  (cela correspond à un projecteur orthogonal). Au passage remarquons que

$$(e_\omega, e_\omega) = (\dim \omega)^2$$

et aussi que

$$f = \sum_{\omega} e_\omega * f$$

ce qui donne en particulier

$$f(e) = \sum \dim \omega \text{Tr} \omega(f) \quad (\text{formule de Plancherel})$$

On sait que la dimension de l'espace vectoriel des fonctions centrales sur  $G$  est égal au cardinal de  $\widehat{G}$ . Les fonctions  $\text{ch}(\omega)$  forment donc une base orthonormale de cet espace et les fonctions  $e_\omega$  une base orthogonale. Si  $e$  est une fonction centrale, on peut donc la décomposer

$$e = \sum_{\omega} a_\omega e_\omega$$

et on a

$$e * e = \sum a_\omega^2 e_\omega$$

Pour que  $e$  soit un idempotent, il faut et il suffit que  $a_\omega^2 = a_\omega$  pour tout  $\omega$  et donc que, pour tout  $\omega$ , on ait  $a_\omega = 0$  ou 1. Les idempotents minimaux sont donc exactement les  $e_\omega$ .

Avant d'abandonner les fonctions centrales notons encore que le cardinal de  $\widehat{G}$  est égal au nombre d'orbites de  $G$  opérant dans lui-même par automorphismes intérieurs. Si  $\sigma$  est une représentation de dimension finie de  $G$  alors son caractère  $\text{ch}(\sigma)$  se décompose de manière unique

$$\text{ch}(\sigma) = \sum_{\omega} m_{\omega} \text{ch}(\omega)$$

les  $m_{\omega}$  étant les multiplicités.

On aura aussi l'usage de projecteurs non centraux, correspondant aux sous-représentations irréductibles de la représentation régulière gauche (ou droite). Soit  $F$  un sous-espace invariant minimal pour la représentation régulière gauche; soit  $P$  le projecteur sur  $F$ . C'est un élément du commutant de  $\lambda$  donc une multiplication à droite : il existe  $e \in \mathbf{K}[G]$  tel que  $Pf = f * e$ . Si  $\omega$  est la classe de la restriction de  $\lambda$  à  $F$  alors  $F \subset \mathbf{K}[G]_{\omega}$ . Il est clair que  $e$  est un idempotent,  $e * e = e$ . Il est de plus minimal en le sens suivant : si  $e = e' + e''$  avec  $e'$  et  $e''$  idempotents tels que  $e' * e'' = e'' * e' = 0$ , alors  $e' = 0$  ou  $e'' = 0$ . En effet soient  $P'$  et  $P''$  les projecteurs associés à  $e'$  et  $e''$ . On a  $e * e' = e'$  donc l'image  $F'$  de  $F$  est contenue dans  $F$  et de même l'image  $F''$  de  $P''$  est contenue dans  $F$ . Les relations  $e = e' + e''$  et  $e' * e'' = e'' * e' = 0$  signifient que  $F = F' \oplus F''$ , les sous-espaces  $F'$  et  $F''$  étant invariants, l'un d'entre eux doit être nul. Inversement il est facile de voir que si  $e$  est un idempotent minimal alors  $\mathbf{K}[G] * e$  est un sous-espace invariant minimal. Comme un sous-espace invariant minimal possède plusieurs supplémentaires invariants, la correspondance entre  $e$  et  $F$  n'est pas bijective. Elle le devient si on se limite aux projections orthogonales c'est-à-dire aux idempotents hermitiens,  $e = e^*$ , l'adjoint étant relatif à la structure  $L^2$ . En résumé :

**Proposition 3-5.** — *Les sous-espaces invariants à gauche minimaux sont paramétrés par les idempotents minimaux hermitiens. A un tel idempotent  $e$ , on fait correspondre l'image de l'opérateur de convolution à droite par  $e$*

Signalons encore la

**Proposition 3-6.** — *Soit  $e$  un idempotent minimal; soit  $\omega$  la classe de la restriction de  $\lambda$  à  $\mathbf{K}[G] * e$ . on a*

$$\frac{1}{\#G} \sum_{s \in G} e(sxs^{-1}) = e(1)e_{\omega}/(\dim \omega)^2$$

Dans cette formule 1 désigne l'élément neutre de  $G$ . La démonstration est laissée en exercice.

**§ 4 Représentations induites.** — Pour terminer rappelons les généralités sur les représentations induites. Soit toujours  $G$  un groupe fini; on conserve les notations du § précédent. Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On associe à toute représentation de

dimension finie  $(\sigma, V_\sigma)$  de  $H$  une représentation  $(\pi, V_\pi)$  de  $G$ . L'espace vectoriel  $V_\pi$  est l'espace des applications  $f$  de  $G$  dans  $V_\sigma$  telles que

$$f(hx) = \sigma(h)f(x), \quad h \in H, x \in G$$

et on définit  $\pi$  par

$$\pi(x)f(y) = f(yx)$$

On note souvent

$$\pi = \text{Ind}_H^G(\sigma)$$

Il est immédiat que deux représentations équivalentes induisent des représentations équivalentes de sorte que la construction à un sens pour les classes d'équivalence de représentations. Considérons le groupe  $\mathbf{Z}[\widehat{G}]$  des combinaisons formelles à coefficients entiers d'éléments de  $\widehat{G}$ . Si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont deux éléments de  $\widehat{G}$ , le produit tensoriel  $\omega_1 \otimes \omega_2$  est bien défini et il admet une unique décomposition de la forme

$$\omega_1 \otimes \omega_2 = \sum m(\omega)\omega$$

où les multiplicités  $m(\omega)$  sont des entiers positifs ou nuls. En prolongeant  $\mathbf{Z}$  linéairement ceci définit une structure d'anneau sur  $\mathbf{Z}[\widehat{G}]$ . La classe de la représentation triviale est l'élément neutre, ; l'anneau est commutatif et associatif. Revenons aux représentations induites. Il est clair qu'une somme directe induit la somme directe des induites de sorte que l'induction donne une application  $\mathbf{Z}$  linéaire

$$\text{Ind}_H^G : \mathbf{Z}[\widehat{H}] \rightarrow \mathbf{Z}[\widehat{G}]$$

Ce n'est pas un homomorphisme d'anneau.

**Proposition 4-1.** — *Si  $\pi = \text{Ind}_H^G(\sigma)$ , alors le caractère de  $\pi$  est*

$$\text{ch}(\pi)(x) = \frac{1}{\#H} \sum_{sxs^{-1} \in H} \text{ch}(\sigma)(sxs^{-1})$$

On a une application en sens inverse, la restriction

$$\text{Res}_H^G : \mathbf{Z}[\widehat{G}] \rightarrow \mathbf{Z}[\widehat{H}]$$

**Théorème 4-2 (Frobenius).** — *Soient  $\sigma$  une représentation de  $H$  et  $\tau$  une représentation de  $G$ . On a*

$$\left( \text{ch}(\text{Ind}_H^G(\sigma)), \text{ch}(\tau) \right) = \left( \text{ch}(\sigma), \text{ch}(\text{Res}_H^G(\tau)) \right)$$

Il s'agit ici de produits scalaires dans  $L^2(G)$  et  $L^2(H)$  respectivement. Si on prend  $\sigma$  et  $\tau$  irréductibles, le membre de gauche est la multiplicité de  $\tau$  dans la représentation induite par  $\sigma$  et le membre de droite, la multiplicité de  $\sigma$  dans la restriction de  $\tau$ .

Il y a deux autres résultats standards sur les représentations induites. On va les donner en esquissant les démonstrations. Conservons les notations  $H, \sigma, \pi, V_\pi$  et soit  $K$  un sous-groupe de  $G$ . On veut décomposer la restriction à  $K$  de la représentation induite  $\pi$ . Pour cela soit  $d \in G$  et introduisons la double classe  $H \backslash G / K$ . Les éléments de  $V_\pi$  dont le support est contenu dans cette double classe forment un sous-espace vectoriel  $V_\pi(d)$  qui est invariant par la restriction de  $\pi$  à  $K$  et clairement

$$V_\pi = \bigoplus_{H \backslash G / K} V_\pi(d)$$

Si  $\varphi \in V_\pi(d)$ , posons, pour  $k \in K$

$$\Phi(k) = \varphi(dk)$$

Soit  $K_d = K \cap d^{-1} H d$ . Si  $k \in K_d$  alors

$$\Phi(kk') = \varphi(dkk') = \varphi(dkd^{-1}dk') = \sigma(dkd^{-1})\varphi(dk') = \sigma(dkd^{-1})\Phi(k')$$

Si on pose  $\sigma_d(k) = \sigma(dkd^{-1})$  on obtient une représentation de  $K_d$  et on vient de constater que  $\Phi$  appartient à l'espace de la représentation de  $K$  induite par  $\sigma_d$ . Inversement si on part d'une fonction  $\Phi$  appartenant à cet espace, on retrouve  $\varphi$  en posant  $\varphi(hdk) = \sigma(h)\Phi(k)$ . Or l'application  $\varphi \mapsto \Phi$  commute à l'action de  $K$  (par translations à droite) donc la représentation de  $K$  dans  $V_\pi(d)$  est équivalente à  $\text{Ind}_{K_d}^K(\sigma_d)$ . Finalement :

**Théorème 4-3.** — *On a*

$$\text{Res}_K^G(\text{Ind}_H^G(\sigma)) = \bigoplus_{d \in H \backslash G / K} \text{Ind}_{K_d}^K(\sigma_d)$$

Enfin soient  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-groupes de  $G$  et soit  $\sigma_1$  une représentation de  $H_1$ , d'espace  $V_{\sigma_1}$  et  $\sigma_2$  une représentation de  $H_2$  d'espace  $V_{\sigma_2}$ . On va déterminer

$$\text{Hom}_G\left(\text{Ind}_{H_1}^G(\sigma_1), \text{Ind}_{H_2}^G(\sigma_2)\right)$$

Notons  $\pi_1$  et  $\pi_2$  ces représentations induites,  $V_{\pi_1}$  et  $V_{\pi_2}$  leurs espaces. Soit

$$T : V_{\pi_1} \rightarrow V_{\pi_2}$$



un opérateur d'entrelacement. Pour  $v_1 \in V_{\sigma_1}$  et  $s \in G$  soit

$$\varphi_{s,v_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin H_1 s \\ \sigma(h)v_1 & \text{si } x = h s \end{cases}$$

Définissons

$$L(s) : V_{\sigma_1} \rightarrow V_{\sigma_2}$$

par

$$L(s)(v_1) = T(\varphi_{s,v_1})(1)$$

Notons que

$$T(\varphi_{s,v_1})(x) = (\pi_2(x)T(\varphi_{s,v_1}))(1) = T(\pi_1(x)\varphi_{s,v_1})(1) = T(\varphi_{sx^{-1},v_1})(1) = L(sx^{-1})(v_1)$$

de sorte que  $L$  détermine  $T$ . Considérons  $L$  comme une application :

$$L : G \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(V_{\sigma_1}, V_{\sigma_2})$$

On vérifie sans effort que les  $L$  ainsi obtenues sont caractérisées par la condition d'invariance

$$L(h_1 s h_2) = \sigma_2(h_2^{-1})L(s)\sigma_1(h_1^{-1})$$

Pour  $s$  fixé soit

$$H_{1,s} = H_1 \cap s H_2 s^{-1}$$

et soit  $\sigma_{2,s}$  la représentation de  $H_{1,s}$  définie par

$$\sigma_{2,s}(h_1) = \sigma_2(s^{-1}h_1, s)$$

On doit alors avoir

$$L(s) \in \text{Hom}_{H_{1,s}}(\sigma_1, \sigma_{2,s})$$

Si on choisit des représentants  $s$  des doubles classes  $H_1 \backslash G / H_2$  et si, pour chacun de ces  $s$  on se donne une application linéaire  $L(s)$  de  $V_{\sigma_1}$  dans  $V_{\sigma_2}$  vérifiant la condition précédente, alors on peut reconstruire  $T$ .

**Théorème 4-4.** — *On a*

$$\text{Hom}_G \left( \text{Ind}_{H_1}^G(\sigma_1), \text{Ind}_{H_2}^G(\sigma_2) \right) = \bigoplus_{s \in H_1 \backslash G / H_2} \text{Hom}_{H_{1,s}}(\sigma_1, \sigma_{2,s})$$

Comme cas particulier, si on prend  $H_1 = H_2 = H$  et  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  irréductible, on obtient un critère d'irréductibilité pour les représentations induites.

**Corollaire 4-5.** — *Pour que la représentation  $\text{Ind}_H^G(\sigma)$  soit irréductible, il faut et il suffit que, pour tout  $s \notin H$  on ait  $\text{Hom}_{H_s}(\sigma, \sigma_s) = (0)$*

Le cas  $s \in H$  conduit au commutant de  $\sigma$  qui, d'après le Lemme de Schur, est réduit aux scalaires.

**Exercices** Soient  $G$  et  $H$  deux groupes finis. Soient  $M$  un  $G$ -module de dimension finie et  $N$  un  $H$ -module de dimension finie. On note  $M^G$  le sous-espace des invariants de  $G$  dans  $M$  et de même  $N^H$  le sous-espace des invariants de  $H$  dans  $N$ . On considère la représentation de  $G \times H$  dans  $N \otimes N$  (produit tensoriel externe de représentations) et ses invariants  $(M \otimes N)^{G \times H}$ . Démontrer que

$$M^G \otimes N^H = (M \otimes N)^{G \times H}$$

On suppose que  $H$  est un sous-groupe de  $G$ . Démontrer que

$$N^H \cong (\text{Ind}_H^G N)^G$$

Démontrer que

$$\text{Ind}_H^G(N \otimes \text{Res}_H^G M) \cong (\text{Ind}_H^G N) \otimes M$$

(cf [Mac], appendice du Chapitre I)

## BIBLIOGRAPHIE

On n'a indiqué que les références dans lesquelles nous avons directement puisé pour la rédaction de ces notes.

[A-B-P] ATIYAH— M., BOTT R., PATODI V.. — *On the heat equation and the Index Theorem*, Inv. Math., t. **19**, 1973, p. 279–330.

[B] BOERNER H.. — *Representations of groups*. — North-Holland, 1970.

[C-P] DE CONCINI C. and PROCESI C.. — *A Characteristic-free Approach to Invariant Theory*, Adv. in Math., t. **21**, 1976, p. 330–354.

[D-C] DIEUDONNE J. and CARRELL J.B.. — *Invariant Theory : Old and New*, Adv. in Math., t. **4**, 1970, p. 1–80.

[F] FORMANEK E.. — *The Polynomial Identities and Invariants of  $n \times n$  matrices*. — AMS, Regional Conferences series in Mathematics, 78, 1980.

[F-H] FULTON W. and HARRIS J.. — *Representation Theory, a first course*. — Springer (graduate texts), 1991.

[Ho] HOWE R.. — *Perspectives on Invariant Theory*. — Israel Mathematical Conference Proceedings, vol 8, 1995.

[L] LANG S.. — *Algebra*. — Addison-Wesley, 1965.

[Mac] MACDONALD I.G.. — *Symmetric functions and Hall polynomials*. — Clarendon Press, Oxford, 1995.

[P] PROCESI C.. — *A primer of invariant theory*. — Brandeis Lecture Notes 1, Brandeis University, 1982.

[W] WEYL H.. — *The classical groups*. — Princeton University Press, 1946.

[Z] ZELOBENKO D.P.. — *Compact Lie groups and their representations*. — A.M.S., Translation of mathematical Monographs, vol 40, 1973.