Eléments d'Analyse et de Calcul Matriciel

M. Kibler

Éléments d'Analyse et de Calcul Matriciel

Maurice Kibler
Professeur des universités
Université de Lyon
Université Claude Bernard Lyon 1
Institut de Physique Nucléaire de Lyon

UE MVA101 - Année 2008-2009 - v04/10/08
ARCNAM Rhône-Alpes

AVERTISSEMENT

Ce fascicule constitue un **résumé** détaillé en 135 pages des thèmes abordés dans un cours élémentaire d'analyse et de calcul matriciel dispensé à l'ARCnam de Lyon en 2008.

Une **version révisée et considérablement enrichie** de ce fascicule est disponible sous forme d'un livre intitulé :

"Éléments d'analyse et de calcul matriciel à l'usage des étudiants en sciences physiques"

(auteur : Maurice Kibler, éditions : Ellipses, date de publication : 9 septembre 2014). Ce livre, en 336 pages avec de nombreux exemples et des exercices et problèmes corrigés, couvre quelques thèmes de mathématiques (de niveau L1, L2, L3 et DUT) utiles à des étudiants en sciences physiques. À ce titre, il sera utile aux étudiants des disciplines scientifiques et aux élèves ingénieurs. De plus, les différents thèmes abordés dans le livre correspondent aux mathématiques que le professionnel, scientifique ou ingénieur, doit maîtriser quand il a presque tout oublié ; le livre intéressera donc aussi le lecteur désirant une remise à niveau en mathématiques de type post-bac.

Chapitre 1

Suites

I Suites numériques

1 Définition

Une suite numérique est une image d'une application $g : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$: $n \mapsto g(n)$. $\diamond$

N.B. : $\mathbf{N}$ peut être remplacé par E avec $E \subset \mathbf{N}$. L'ensemble $\mathbf{N}$ peut même être remplacé par $\mathbf{Z}$ ou une partie de $\mathbf{Z}$.

Notation : On pose

$$u_n = g(n)$$

que l'on appelle terme général de la suite et on parle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou, simplement, (u_n) ou $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$.

En pratique : Une suite peut être définie par

- la donnée des u_i s'ils sont en nombre fini ou
- la donnée du terme général u_n ou
- une relation de récurrence à deux termes

  $$u_n = f_2(u_{n-1})$$

  avec la donnée d'un terme (en général le premier) ou une relation de récurrence à trois termes

  $$u_n = f_3(u_{n-1}, u_{n-2})$$

  avec la donnée de deux termes (en général les deux premiers) où f_2 et f_3 sont deux fonctions données.

Exemple 1 : L'énumération $1, 2, \cdots, 100$ définit la suite des cent premiers entiers positifs.

Exemple 2 : La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ a pour terme général

$$u_n = \frac{1}{n}$$

Ici l'application correspondante est $g : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R} : n \mapsto g(n) = \frac{1}{n}$. On peut aussi définir cette suite numérique par l'énumération $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$.

Exemple 3 : La relation de récurrence

$$u_n = (n+1)u_{n-1} \quad \text{avec} \quad u_0 = 1$$

définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. L'élément u_0 est donné ; on en déduit $u_1 = 2u_0 = 2$, puis $u_2 = 3u_1 = 6$, etc.

Exemple 4 : La relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{avec} \quad u_1 = u_2 = 1$$

définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. On a évidemment $u_3 = u_2 + u_1 = 2$, puis $u_4 = u_3 + u_2 = 3$, etc.

N.B. 1 : Dans le cas d'une suite définie par une relation de récurrence on parle de suite récurrente.

N.B. 2 : De façon générale, la suite est dite finie (respectivement, infinie) si elle a un nombre fini (respectivement, infini) de termes.

2 Convergence (d'une suite infinie)

a Définition

On dit que la suite numérique (u_n) est convergente et converge vers u si $u_n \to u$ lorsque $n \to \infty$. Autrement dit

$$\lim_{n\to\infty}(u_n - u) = 0$$

ce que l'on peut traduire par

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\eta(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid \forall n > \eta(\varepsilon) : |u_n - u| < \varepsilon$$

et l'on écrit $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente. $\diamond$

b Propriété

La limite u si elle existe est unique. $\diamond$

Démonstration (ab absurdo). Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ_1 et ℓ_2. On a alors

$$\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - u_n + u_n - \ell_2$$

Donc

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{n\to\infty}(\ell_1 - \ell_2) & = & \lim\limits_{n\to\infty}(\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2)\\ \ell_1 - \ell_2 & = & \lim\limits_{n\to\infty}(\ell_1 - u_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(u_n - \ell_2)\\ \ell_1 - \ell_2 & = & 0+0\\ \ell_1 - \ell_2 & = & 0\end{array}$$

D'où $\ell_1 = \ell_2$.

c Suite de Cauchy

Par définition, une suite (u_n) est dite de Cauchy si

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty}(u_p - u_q) = 0$$

soit encore

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\eta(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid \forall p > \eta(\varepsilon) \ \forall q > \eta(\varepsilon) : |u_p - u_q| < \varepsilon$$

en termes de η et de ε. $\diamond$

d Théorème (critère de Cauchy)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite (numérique) soit convergente est qu'elle soit de Cauchy. $\diamond$

Démonstration (partielle). La condition est nécessaire. En effet, si la suite (u_n) converge vers u, on a

$$u_p - u_q = u_p - u + u - u_q$$

donc

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{p\to\infty}\lim\limits_{q\to\infty}(u_p - u_q) & = & \lim\limits_{p\to\infty}(u_p - u) + \lim\limits_{q\to\infty}(u - u_q)\\ & = & 0+0\\ & = & 0\end{array}$$

et la suite (u_n) est de Cauchy. On admettra que la condition est suffisante (c'est-à-dire que toute suite de Cauchy est convergente).

L'intérêt de ce critère réside dans le fait que pour s'assurer qu'une suite est convergente il suffit de vérifier qu'elle est une suite de Cauchy (sans qu'il soit besoin de déterminer la limite de la suite).

e Propriétés

Soit deux suites convergentes (u_n) et (v_n) de limites u et v, respectivement. Alors, on a

– la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $u + v$
– $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, la suite (λu_n) converge vers λu
– la suite $(u_n v_n)$ converge vers uv. $\diamond$

3 Suites monotones et suites bornées

On considère ici le cas de suites dans $\mathbf{R}$ avec $g : E \to \mathbf{R}$ où E est $\mathbf{N}$ ou une partie de $\mathbf{N}$.

a Définitions

- Une suite $(u_n)_{n \in E}$ est dite monotone croissante si

$$\forall n \in E : u_{n+1} \geq u_n$$

Elle est dite monotone décroissante si

$$\forall n \in E : u_{n+1} \leq u_n$$

- Une suite $(u_n)_{n \in E}$ est dite majorée si il existe $M \in \mathbf{R}$ (M = majorant) tel que

$$\forall n \in E : u_n \leq M$$

Elle est dite minorée si il existe $m \in \mathbf{R}$ (m = minorant) tel que

$$\forall n \in E : u_n \geq m$$

Une suite majorée et minorée est dite bornée. $\diamond$

b Théorème

Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et minorée est convergente. $\diamond$

4 Cas des suites récurrentes

Dans le cas d'une suite récurrente (u_n) définie par une relation de récurrence à deux termes $u_n = f_2(u_{n-1})$, la limite u, si elle existe, s'obtient à partir de

$$u = f_2(u)$$

(qui fournit une équation permettant de calculer u).

II Suites de fonctions

1 Définition

Soit F l'ensemble des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes. On appelle suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'image d'une application $\mathbf{N} \to F : n \mapsto f_n$ où $f_n : D \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C} : t \mapsto f_n(t)$ avec $D \subset \mathbf{R}$ (le domaine D est $\mathbf{R}$ ou un intervalle dans $\mathbf{R}$). $\diamond$

En pratique : On parle de la suite de fonctions

$$(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ ou } (f_n) \text{ ou } f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$$

à laquelle est associée la suite numérique

$$(f_n(t))_{n\in\mathbf{N}} \text{ ou } (f_n(t)) \text{ ou } f_0(t), f_1(t), \cdots, f_n(t), \cdots$$

(il y a une suite pour chaque valeur de t).

N.B. : $\mathbf{N}$ peut être remplacé par une partie (finie ou pas) E de $\mathbf{N}$.

2 Convergence simple

Définition

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f si pour tout $t \in D$ la suite numérique $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$ c'est-à-dire si

$$\forall t \in D : \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

Autrement dit, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall t \in D \ \ \exists \eta(\varepsilon, t) \in \mathbf{N} \mid \forall n > \eta(\varepsilon, t) : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

où η dépend de ε et de t. $\diamond$

3 Convergence uniforme

a Définition

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f si $\eta(\varepsilon, t) \equiv \eta(\varepsilon)$, c'est-à-dire que l'entier $\eta(\varepsilon)$ ne dépend pas de t. $\diamond$

b Critère de convergence uniforme

La convergence est uniforme sur D si

$$\sup_{t\in D} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

dès que $n > \eta(\varepsilon)$, soit encore si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in D} |f_n(t) - f(t)| = 0$$

(cette dernière relation constituant un critère très utile). $\diamond$

La signification de la convergence uniforme s'obtient en traduisant graphiquement la relation

$$\forall t \in D : f(t) - \varepsilon < f_n(t) < f(t) + \varepsilon \quad \text{dès que} \quad n > \eta(\varepsilon)$$

(considérer les graphes de f et f_n en fonction de t).

4 Propriétés des suites uniformément convergentes

Les suites de fonctions uniformément convergentes ont des propriétés remarquables. Nous donnerons trois propriétés (P1 à P3) et trois corollaires (C1 à C3) sans démonstration.

a Propriétés

P1 (continuité). Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur D qui converge uniformément sur D vers la fonction f, alors f est continue sur D. $\diamond$

P2 (intégration). Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur D fini ($D = [a, b]$) qui converge uniformément sur D vers la fonction f, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

(on peut intervertir les signes $\int$ et lim). $\diamond$

P3 (dérivation). Si (f_n) est une suite de fonctions continues et dérivables sur D fini qui converge uniformément sur D vers la fonction f et si $\left(\frac{d}{dt} f_n\right)$ est une suite de fonctions continues sur D qui converge uniformément sur D vers la fonction g, alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} f_n = \frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} f_n$$

soit encore $g = f'$ (on peut intervertir les signes $\frac{d}{dt}$ et lim). $\diamond$

b Corollaires

C1. Si une suite de fonctions continues converge vers une fonction qui n'est pas continue, alors la convergence est simple. $\diamond$

C2. Si (sous des hypothèses évidentes)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt$$

alors la convergence est simple. $\diamond$

C3. Si (sous des hypothèses évidentes)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} f_n \neq \frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} f_n$$

alors la convergence est simple. $\diamond$

III Exercices et problèmes

Exercice 1

On considère la suite finie $1, 2, \cdots, 100$. Calculer la somme des termes de cette suite. Plus généralement, montrer que la somme S_N des termes de la suite finie $1, 2, \cdots, N$ avec $N \in \mathbf{N}^*$ est donnée par

$$S_N = \frac{1}{2} N(N+1)$$

(Il suffit d'écrire $S_N = 1 + 2 + \cdots + N$ et $S_N = N + \cdots + 2 + 1$ d'où l'on tire $2S_N$ en ajoutant les deux relations.)

Exercice 2

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général

$$u_n = \frac{n-1}{n+1}$$

est-elle convergente ?

Exercice 4

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \tan^{-1}\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

est-elle convergente ?

Exercice 5

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général

$$u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 6

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$, dite suite harmonique, est-elle convergente ?

Exercice 7

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$u_n = a + (n-1)r, \quad a \in \mathbf{R}, \quad r \in \mathbf{R}$$

Cette suite est appelée suite arithmétique de premier terme a et de raison r. Cette suite est-elle convergente ? Calculer la somme S_N des N premiers termes ($N \in \mathbf{N}^*$) de cette suite.

Exercice 8

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général

$$u_n = aq^n, \quad a \in \mathbf{R}^*, \quad q \in \mathbf{R}_+^*$$

Cette suite est appelée suite géométrique de raison q et de premier terme a. Montrer que

- si $q > 1$: la suite diverge
- si $0 < q < 1$: la suite converge vers 0
- si $q = 1$: la suite converge vers a.

Montrer que la somme S_N des N (avec $N \in \mathbf{N}^*$) premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est

$$S_N = a\frac{1-q^N}{1-q}$$

En déduire que la somme S de tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est

$$S = a\frac{1}{1-q}$$

pour $0 < q < 1$.

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par l'intégrale

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt$$

Calculer u_0, u_1 et u_2. Montrer que cette suite converge vers $u = 2$.

Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par l'intégrale

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln x\, dx$$

Calculer u_0 et u_1. Pour n arbitraire dans $\mathbf{N}$, montrer que

$$u_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

et vérifier que ce résultat est compatible avec ceux obtenus pour $n = 0$ et $n = 1$. La suite considérée est-elle convergente ?

Exercice 11

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par l'intégrale

$$u_n = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

Montrer au moyen d'une intégration par parties que l'on a la relation de récurrence

$$u_{n+1} = (n+1)u_n$$

En itérant cette relation, montrer que

$$u_n = (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)u_0$$

Montrer que $u_0 = 1$ et en déduire que

$$u_n = n!$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle ?

Problème 1

On considère l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

avec $x > 0$.

1) Montrer que la fonction $\Gamma : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ satisfait la relation de récurrence

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

2) Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ et $\Gamma(3)$.

3) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{\Gamma(n+1)}$$

Calculer le terme général de cette suite. Cette suite est-elle convergente ?

4) On considère la suite $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$ définie par

$$v_p = \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)$$

Calculer le terme général de cette suite en fonction de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 12

On considère la suite $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ définie par

$$a_i = -\frac{1}{i(2\nu + i)} a_{i-2} \quad \text{où} \quad i = 2, 3, \cdots$$

avec $a_1 = 0$ et où ν est un paramètre réel positif ou nul. Montrer que tous les termes impairs de la suite considérée sont nuls (c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbf{N}$: $a_{2k+1} = 0$). Déterminer le terme général pair a_{2p}, $p \in \mathbf{N}$, en fonction de a_0. Que devient ce résultat pour $\nu = 0$?

Exercice 13

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à deux termes définie par

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1$$

avec $u_1 = 1$. Déterminer le terme général u_n de cette suite. Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 14

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$$

avec $u_0 = 2$. Calculer les quatre premiers termes de cette suite. Montrer que la limite de cette suite récurrente est $u = 1$. Reprendre l'exercice avec

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$$

et $u_0 = 2$. Montrer que dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 15

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4}{u_n} - \sqrt{2}$$

avec $u_1 = -1$. Calculer les dix premiers termes de la suite. Montrer que cette suite récurrente converge vers $u = -2\sqrt{2}$.

Exercice 16

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

avec $u_1 = 1$. Calculer u_2, u_3 et u_4 à l'aide d'une calculette. Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est $u = \sqrt{2}$.

Exercice 17

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Calculer au moyen d'une calculette le terme correspondant à $n = 1000$. Appliquer la formule du binôme de Newton

$$\forall n \in \mathbf{N} : (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

où

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

au cas $a = 1$ et $b = \frac{1}{n}$. En déduire que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

et que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

où e est la base des logarithmes népériens. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers e.

Exercice 18

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ : t \mapsto f_n(t) = \mathrm{e}^{-nt}$$

converge simplement vers la fonction

$$f : \mathbf{R}_+ \to \{0,1\} : t \mapsto f(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \ t = 0 \\ 0 \ \text{ pour } \ t > 0 \end{cases}$$

Solution

On a

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-nt} = \begin{cases} 1 \text{ pour } \ t = 0 \\ 0 \ \text{ pour } \ t > 0 \end{cases}$$

D'où la limite f donnée dans l'énoncé. La convergence n'est pas uniforme car f n'est pas continue. On peut obtenir ce résultat (de façon plus compliquée) en calculant $|f_n(t) - f(t)|$. On a pour $t = 0$

$$|f_n(t) - f(t)| = 1 - 1 = 0 < \varepsilon \ \text{ dès que } \ n > 1$$

Pour $t \neq 0$, on a

$$|f_n(t) - f(t)| = |\mathrm{e}^{-nt} - 0| = \mathrm{e}^{-nt} < \varepsilon \ \text{ dès que } \ nt > -\ln\varepsilon$$

(car $\mathrm{e}^{-nt} < \varepsilon \Rightarrow nt > -\ln\varepsilon$). On peut donc prendre

$$\eta(\varepsilon, t) = \mathrm{Ent}\left(-\frac{\ln\varepsilon}{t}\right)$$

où $\mathrm{Ent}(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbf{R}$. Il est clair que l'on ne peut pas faire disparaître la dépendance en t dans $\eta(\varepsilon, t)$. La convergence n'est donc pas uniforme.

Exercice 19

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$f_n : [0,1] \to \mathbf{R}_+ : t \mapsto f_n(t) = \frac{n}{n+t}\mathrm{e}^{-t}$$

converge uniformément vers la fonction

$$f : [0,1] \to \mathbf{R}_+ : t \mapsto f(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

Solution

La limite f est évidente. On montre aisément que

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{n+t} \leq \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{n}$$

dont la limite pour $n \to \infty$ est nulle, de sorte que la convergence est uniforme.

Exercice 20

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$f_n : [0,1] \to \mathbf{R}_+ : t \mapsto f_n(t) = \frac{n\mathrm{e}^{-t} + t}{n+t}$$

converge uniformément vers la fonction

$$f : [0,1] \to \mathbf{R}_+ : t \mapsto f(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

Solution

On a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

(car $n\mathrm{e}^{-t} + t \sim n\mathrm{e}^{-t}$ et $n + t \sim n$ pour n infiniment grand). D'où la limite $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$. De plus, on a

$$f_n(t) - f(t) = \frac{n\mathrm{e}^{-t} + t}{n+t} - \mathrm{e}^{-t} = \frac{t - t\mathrm{e}^{-t}}{n+t}$$

Mais pour $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{t - t\mathrm{e}^{-t}}{n+t} \leq \frac{t}{n+t} \leq \frac{1}{n+t} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{n}$$

dont la limite pour $n \to \infty$ est nulle, de sorte que la convergence est uniforme.

Exercice 21

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ : t \mapsto f_n(t) = \frac{t}{t^2+n^2}$$

converge uniformément vers la fonction

$$f : \mathbf{R}_+ \to \{0\} : t \mapsto f(t) = 0$$

Peut-on écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(t)\,dt = \int_0^a \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$$

où a est fini ? Vérifier la relation précédente par un calcul direct.

Solution

On a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

pour $t = 0$ et $t > 0$ de sorte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $f : t \mapsto f(t) = 0$. De plus, pour $t \in \mathbf{R}_+$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on a

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{t}{t^2+n^2} \leq \frac{1}{2n}$$

car $2nt \leq n^2 + t^2$. La convergence est donc uniforme. Il en résulte que la relation proposée entre les intégrales est vraie ce que l'on vérifie par calcul direct puisque

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^a \frac{t}{t^2+n^2}\,dt &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+n^2)\right]_0^a \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+n^2}{n^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^a \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = 0$$

car f est la fonction nulle.

Exercice 22

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n : [0,\pi] \to \mathbf{R} : t \mapsto f_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

Montrer que cette suite converge uniformément vers la fonction $f : [0,\pi] \to \{0\} : t \mapsto f(t) = 0$.

Solution

On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nt}{n} = 0$$

pour tout $t \in [0, \pi]$. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la fonction nulle $f = 0$ sur $[0, \pi]$. De plus, on a

$$\sup_{t\in[0,\pi]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in[0,\pi]} \frac{|\sin nt|}{n} = \frac{1}{n}$$

et

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

On peut donc prendre

$$\eta(\varepsilon) = \mathrm{Ent}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

où $\mathrm{Ent}(x)$ est la partie entière de $x \in \mathbf{R}$. Comme $\eta(\varepsilon)$ est indépendant de t, la convergence est bien uniforme.

Exercice 23

On considère la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$f_n : [0, \pi] \to \mathbf{R} : t \mapsto f_n(t) = \frac{\sin \frac{1}{n} t}{\frac{1}{n}}$$

Montrer que cette suite converge vers la fonction

$$f : [0, \pi] \to \mathbf{R} : t \mapsto f(t) = t$$

Exercice 24

On considère la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$f_n : \mathbf{R} \to [0, 1] : t \mapsto f_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } \ t \leq 0 \\ nt \ \text{ pour } \ 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 \ \text{ pour } \ t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Tracer le graphe de f_n. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers la fonction

$$f : \mathbf{R} \to \{0, 1\} : t \mapsto f(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } \ t \leq 0 \\ 1 \ \text{ pour } \ t > 0 \end{cases}$$

(qui n'est pas continue).

Solution

La limite f s'obtient aisément à partir du graphe de f_n. La fonction f n'est pas continue en $t = 0$. Donc la convergence ne peut pas être uniforme.

Chapitre 2

Séries

I Séries numériques

1 Généralités

a Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite numérique de terme général u_n (avec $u_n \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). La suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dont les termes sont

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & u_1 \\ S_2 & = & u_1 + u_2 \\ & \vdots & \\ S_n & = & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ & \vdots & \end{array}$$

est appelée série. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers S, on dit que la série est convergente et a pour somme S. On écrit

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} u_j$$

qui est noté

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} u_j$$

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne converge pas on dit que la série est divergente. $\diamond$

Dans la pratique, on parle de la série

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

ou plus simplement

$$S = \sum_{j} u_j \quad \text{ou} \quad \sum_{n} u_n$$

que la série soit convergente ou pas. Étudier la série $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Notons que u_n s'appelle le terme général de S.

Par extension, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=-m}^{j=+n} u_j \\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{j=-m}^{j=-1} u_j + u_0 + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{j=n} u_j\end{aligned}$$

et l'étude de la série $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j$ nécessite donc l'étude de deux séries.

b Condition nécessaire

Pour que la série $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ soit convergente, il est nécessaire (mais non suffisant) que $u_j \to 0$ pour $j \to \infty$. Si le terme général u_j ne tend pas vers zéro pour $j \to \infty$, alors la série est divergente. $\diamond$

Démonstration. On a

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$$

c Opérations sur les séries

Soit deux séries

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ et } V = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

convergentes. La somme $S = U + V$ et le produit λU, avec $\lambda \in \mathbf{C}$, sont définis par

$$U + V = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) \text{ et } \lambda U = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$$

qui sont deux séries convergentes.

2 Critères de convergence (série à termes positifs)

Soit une série numérique $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de terme général u_n positif (à partir d'un certain rang).

a Critère de comparaison

Si à partir d'un certain rang on a $0 < u_n < v_n$ et si la série $\sum_n v_n$ converge, alors la série S converge. Si à partir d'un certain rang on a $u_n > v_n > 0$ et si la série $\sum_n v_n$ diverge, alors la série S diverge. $\diamond$

b Critère de d'Alembert

Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

la série S converge. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

la série S diverge. On ne peut rien dire si la limite vaut 1. $\diamond$

c Critère de Cauchy

Si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$$

la série S converge. Si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$$

la série S diverge. On ne peut rien dire si la limite vaut 1. $\diamond$

d Critère de Riemann

Si lorsque $n \to \infty$ on a $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$, alors la série S converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$. $\diamond$

3 Série absolument convergente

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série numérique dont les termes appartiennent à $\mathbf{R}$ ou à $\mathbf{C}$ (série à termes réels ou complexes).

a Théorème

Si la série des modules $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. $\diamond$

Démonstration. On a

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

et si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge alors $|\sum_{n=1}^{\infty} u_n|$ converge et donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. La réciproque n'est pas vraie.

b Définition

Si $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ est dite absolument convergente. Si $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ converge sans que $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ est dite semi-convergente. $\diamond$

c Critères de d'Alembert et de Cauchy

Les critères de d'Alembert et de Cauchy s'appliquent à la série $S = \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ dont les termes u_n appartiennent à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ à condition d'introduire des valeurs absolues. Autrement dit, la série S converge (respectivement, diverge) suivant que

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$$

est strictement inférieur (respectivement, strictement supérieur) à 1. De même, la série S converge (respectivement, diverge) suivant que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$$

est strictement inférieur (respectivement, strictement supérieur) à 1. Dans les deux cas , on ne peut rien dire *a priori* si la limite vaut 1.

4 Série alternée (série à termes réels)

a Définition

Une série numérique $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, avec $\forall n \in \mathbf{N}^* : u_n \in \mathbf{R}$, dont les termes sont alternativement positifs et négatifs est dite alternée. $\diamond$

b Théorème

Une série alternée $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ dont le terme général u_n décroît en valeur absolue et tend vers 0 pour n tendant vers l'infini est convergente. $\diamond$

5 Valeur approchée

Soit

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

une série numérique convergente. Une valeur approchée de S est

$$S_p = u_1 + u_2 + \cdots + u_p$$

et on appelle reste d'indice p la quantité $R_p = S - S_p$.

II Séries de fonctions

1 Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de fonctions

$$f_n : D \to \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C} : t \mapsto f_n(t)$$

La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dont les termes sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & f_1 \\ S_2 & = & f_1 + f_2 \\ & \vdots & \\ S_n & = & f_1 + f_2 + \cdots + f_n \\ & \vdots & \end{array}$$

est appelée série de fonctions. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers

$$S : D \to \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C} : t \mapsto S(t)$$

on dit que la série est convergente et a pour somme S. On écrit

$$S(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j(t)$$

qui est noté

$$S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)$$

En d'autres mots, la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall t \in D \ \exists \eta(\varepsilon, t) \in \mathbf{N}^* \mid n > \eta(\varepsilon, t) : |S(t) - S_n(t)| < \varepsilon$$

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne converge pas on dit que la série est divergente. $\diamond$

2 Convergence uniforme

Définition

Si $\eta(\varepsilon, t)$ est indépendant de $t \in D$, alors la convergence est dite uniforme. On dit dans ce cas que la série est uniformément convergente. $\diamond$

3 Critères de convergence

a Cas général

Pour étudier la convergence d'une série de fonctions, on peut toujours appliquer les critères de convergence pour une série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ avec $u_n = f_n(t)$.

b Théorème

Si $\forall t \in D : |f_n(t)| < v_n$ où v_n est le terme général d'une série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergente, la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est uniformément convergente sur D (et absolument convergente). $\diamond$

4 Dérivabilité terme à terme

Théorème

On a

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} f_n$$

si

- $\forall n \in \mathbf{N}^* : f_n$ est dérivable sur D
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est convergente sur D
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} f_n$ est uniformément convergente sur D.

On dit alors que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est dérivable terme à terme. $\diamond$

5 Intégrabilité terme à terme

Théorème

On a

$$\int_D \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_D f_n(t)dt$$

si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est uniformément convergente sur D. On dit alors que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est intégrable terme à terme. $\diamond$

III Séries entières

1 Définition

La série

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \equiv f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

est dite entière si

$$\forall n \in \mathbf{N} : f_n(t) = a_n t^n$$

avec $a_n \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. $\diamond$

2 Théorème (Abel)

Si la série entière

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

converge pour $t = t_0 \in D$, alors elle est absolument convergente pour tout t tel que $|t| < |t_0|$. $\diamond$

3 Rayon de convergence

a Définition

Considérons la série entière

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Soit $E \subset D$ l'ensemble des t_0 tels que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|t_0^n|$ converge. Deux cas peuvent se présenter.

- Si E est borné par $R \in \mathbf{R}_+^*$, alors $S(t)$ est absolument convergente pour $|t| < R$ et est divergente pour $|t| > R$. L'intervalle ouvert $]-R, +R[$ est appelé intervalle de convergence et R est dit rayon de convergence de la série $S(t)$. On ne peut rien dire *a priori* pour $t = \pm R$; une étude spécifique est en général nécessaire lorsque $t = \pm R$.
- Si $D = \mathbf{R}$ et si E n'est pas borné, alors $S(t)$ est absolument convergente pour tout t dans $\mathbf{R}$ et on dit que le rayon de convergence est infini. $\diamond$

b Détermination du rayon de convergence

On montre que le rayon de convergence de la série $S(t)$ est donné par les formules (de Cauchy et Hadamard)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

ou

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

qui rappellent les critères de d'Alembert et de Cauchy. $\diamond$

4 Convergence uniforme

Théorème

La série entière $S(t)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé contenu dans $]-R, +R[$. $\diamond$

5 Propriétés des séries entières

a Théorème (de continuité)

Une série entière définit une fonction continue en tout point de l'intervalle de convergence. $\diamond$

b Théorème (de dérivabilité)

Une série entière est (indéfiniment) dérivable terme à terme en tout point de l'intervalle de convergence. En d'autres mots, on a

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

(on peut intervertir les signes $\frac{d}{dt}$ et $\sum$). $\diamond$

6 Quelques séries entières

a Série géométrique

La série géométrique (de premier terme 1 et de raison t)

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \\ &= 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots \end{aligned}$$

converge pour $|t| < 1$. On peut retrouver ce résultat à partir du critère de d'Alembert en considérant la série

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbf{N} : u_n = t^n \quad \text{où} \quad t \in \mathbf{R}$$

et en notant que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |t|$$

de sorte que l'on a convergence pour $|t| < 1$. Ce résultat s'obtient aussi en calculant le rayon de convergence de la série

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbf{N} : a_n = 1$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

et on a bien convergence pour $-1 < t < 1$ donc $|t| < 1$. Il est clair que la série diverge pour $t = \pm 1$.

On obtient la somme de la série géométrique en considérant

$$\begin{array}{rcl} S_N & = & 1 + t + t^2 + \cdots + t^{N-1} + t^N \\ tS_N & = & t + t^2 + \cdots + t^{N-1} + t^N + t^{N+1} \end{array}$$

qui donne

$$S_N = \frac{1 - t^{N+1}}{1 - t}, \ \ t \neq 1$$

et

$$S(t) = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-t} \ \text{ si } \ |t| < 1$$

(on retrouve au passage que le rayon de convergence de la série est égal à 1).

b Série géométrique alternée

En changeant t en $-t$ dans

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^n t^n + \cdots$$

où chacune des deux séries convergent pour $-1 < t < 1$.

c Quelques séries associées

L'intégration terme à terme des deux dernières séries conduit à

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} + \cdots$$

et

$$-\ln(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^n}{n} + \cdots$$

pour $-1 < t < 1$. En fait, l'étude de la convergence pour $t = \pm 1$ montre que

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} \ \text{ pour } \ -1 < t \leq 1$$

et

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \ \text{ pour } \ -1 \leq t < 1$$

de sorte que

$$\ln\frac{1+t}{1-t} = 2\left(t + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^{2p+1}}{2p+1} + \cdots\right)$$

soit encore

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p+1}}{2p+1}$$

qui converge pour $-1 < t < 1$.

d Série exponentielle

La série

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k$$

où $x \in \mathbf{R}$ a un rayon de convergence infini. (Ce résultat reste vrai si on remplace x par $z \in \mathbf{C}$.) On montre que la somme de cette série est $\exp x$. On a donc

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k$$

(équation qui est quelquefois prise pour définition de $\exp x$ noté aussi e^x).

e Séries entières et trigonométrie

Les lignes (ou fonctions trigonométriques) sphériques cos, sin et tan sont définies par

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)}{2} \\
\sin x &= \frac{\exp(\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)}{2\mathrm{i}} \\
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}
\end{aligned}$$

avec $x \in \mathbf{R}$ (ici i est l'imaginaire pur c'est-à-dire que $\mathrm{i}^2 = -1$). De façon similaire, les lignes (ou fonctions trigonométriques) hyperboliques cosh, sinh et tanh sont définies par

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \\
\sinh x &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}
\end{aligned}$$

avec $x \in \mathbf{R}$. En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle dans chacune des définitions précédentes, on obtient les développements en série entière suivants

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que toutes ces séries ont un rayon de convergence infini.

f Développements limités

Dans le cas où $t = \varepsilon$ est un infiniment petit, les développements en série entière précédents donnent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\varepsilon} &= 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^3) \\
\frac{1}{1+\varepsilon} &= 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^3) \\
\ln(1+\varepsilon) &= +\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^3) \\
\ln(1-\varepsilon) &= -\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^3) \\
\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} &= 2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^3 + \mathrm{O}(\varepsilon^5) \\
\exp\varepsilon &= 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^3) \\
\sin\varepsilon &= \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \mathrm{O}(\varepsilon^5) \\
\cos\varepsilon &= 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^4) \\
\sinh\varepsilon &= \varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \mathrm{O}(\varepsilon^5) \\
\cosh\varepsilon &= 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^4)
\end{aligned}$$

où $\mathrm{O}(\varepsilon^k)$ signifie que les termes négligés sont d'ordre supérieur ou égal à k.

7 Application aux équations différentielles

De nombreuses équations différentielles du deuxième ordre à coefficients non constant du type

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + P\frac{df}{dx} + Qf = 0,$$

où les fonctions $P : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : x \mapsto P(x)$ et $Q : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : x \mapsto Q(x)$ sont données et où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : x \mapsto f(x)$ est une fonction à déterminer, admettent une solution développable en série entière. Plutôt que de faire une théorie générale, nous illustrerons ce point avec un exemple et donnerons les grandes lignes de la méthode dans le cas général.

a Exemple

Chercher une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} + f = 0$$

sous forme d'un développement en série entière

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

Ici $P(x) = \frac{1}{x}$ et $Q(x) = 1$. Il faut donc déterminer les a_n et étudier la convergence de la série obtenue.

Formellement, on a en dérivant terme à terme

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \end{aligned}$$

et, en reportant dans l'équation différentielle, il vient

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = 0$$

après multiplication par x des deux membres de l'équation. De façon détaillée, on a

$$\begin{aligned} 2a_2 x &+ 6a_3 x^2 + \cdots \\ &+ a_1 x^0 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \\ &+ a_0 x + a_1 x^2 + \cdots = 0 \end{aligned}$$

soit encore

$$a_1 + (4a_2 + a_0)x + (9a_3 + a_1)x^2 + \cdots = 0$$

qui est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbf{Z} : c_n = 0$$

car cette dernière série doit être nulle pour tout x. La considération de chaque puissance de x conduit à

- terme en x^0 : $a_1 = 0$
- terme en x^1 : $4a_2 + a_0 = 0$
- terme en x^2 : $9a_3 + a_1 = 0$

– ...

Pour trouver le terme en x^j, on fait $j = i-2$, $j = i-1$ et $j = i$ dans la première, deuxième et troisième série de l'équation différentielle, respectivement. Il vient

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}x^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}x^j + \sum_{j=0}^{\infty}a_j x^{j+1} = 0$$

Mais

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k &= a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k \\ &= a_1 + \sum_{j=0}^{\infty}(j+2)a_{j+2}x^{j+1}\end{aligned}$$

après avoir fait $j = k-1$ dans la somme sur k de $k = 1$ à l'infini. On a alors

$$a_1 + \sum_{j=0}^{\infty}\left[(j+2)(j+1)a_{j+2} + (j+2)a_{j+2} + a_j\right]x^{j+1} = 0$$

qui devant être vraie pour tout x donne

$$a_1 = 0 \text{ et } (j+2)^2 a_{j+2} + a_j = 0,\ j = 0, 1, 2, \cdots$$

d'où la relation de récurrence

$$a_{j+2} = -\frac{1}{(j+2)^2}a_j,\ j \in \mathbf{N}$$

accompagnée de la condition $a_1 = 0$. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbf{N} : a_{2k+1} = 0$$

et on peut itérer la relation de récurrence pour j pair. On a

$$\begin{aligned}a_{2p} &= -\frac{1}{(2p)^2}a_{2p-2} \\ a_{2p-2} &= -\frac{1}{(2p-2)^2}a_{2p-4} \\ &\vdots \\ a_2 &= -\frac{1}{2^2}a_0\end{aligned}$$

dont la multiplication membre à membre donne

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{(2^p p!)^2}a_0,\ p \in \mathbf{N}$$

Finalement on obtient la série entière

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p} \\ &= a_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p} \end{aligned}$$

dont on montre aisément que le rayon de convergence est infini.

b Cas général

Beaucoup d'équations du type

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + P \frac{df}{dx} + Qf = 0$$

(où $P : x \mapsto P(x)$ et $Q : x \mapsto Q(x)$ sont des fonctions données) se résolvent, de la même façon que pour l'exemple précédent, en cherchant une solution sous forme d'un développement en série entière. On introduit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \ \frac{df}{dx} = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}, \ \frac{d^2 f}{dx^2} = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}$$

dans l'équation différentielle considérée. On obtient alors une relation que l'on essaie de mettre sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Cette dernière relation, devant être vraie pour tout x, conduit à une relation de récurrence sur les a_j. On itère la relation obtenue et on étudie la convergence de la série correspondante pour f.

IV Exercices et problèmes

Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Calculer au moyen d'une calculette les six premiers termes de cette suite. On montre dans l'étude des séries de Fourier (et cela n'est pas à faire ici) que la limite de cette suite est égale à $\frac{1}{6}\pi^2$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} u_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$$

Quelle est l'erreur commise en limitant la sommation dans la série aux six premiers termes ?

Problème 1

1) Montrer à partir du critère de Cauchy et du critère de d'Alembert que la série géométrique

$$S(t) = a \sum_{n=0}^{\infty} t^n = a + at + at^2 + \cdots + at^n + \cdots$$

(où $a \in \mathbf{R}$) converge pour $|t| < 1$ et diverge pour $|t| \geq 1$.

2) Montrer que la série $S(t)$ a pour somme

$$S(t) = a\frac{1}{1-t} = \quad \text{pour} \quad |t| < 1$$

En déduire que la série

$$T(t) = a \sum_{n=1}^{\infty} t^n = at + at^2 + at^3 + \cdots + at^n + \cdots$$

a pour somme

$$T(t) = a\frac{t}{1-t} \quad \text{pour} \quad |t| < 1$$

3) Déduire de ce qui précède que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2$$

4) Retrouver le rayon de convergence $R = 1$ des séries $S(t)$ et $T(t)$ à partir de la formule de Cauchy et Hadamard.

Exercice 2

En notant que

$$\begin{array}{lcl} 1 & + & \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & + & \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} & + & \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ \cdots & & \end{array}$$

montrer que la série harmonique

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est divergente. (Bien observer cependant que le terme général $\frac{1}{n} \to 0$ pour $n \to \infty$.) Retrouver ce résultat à partir du critère de Riemann. Par contre, vérifier que le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure à propos de la convergence de S.

Exercice 3

Montrer que la série harmonique alternée

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots \end{aligned}$$

est convergente. Par contre, bien réaliser que la série T n'est pas absolument convergente puisque la série des modules associée, c'est-à-dire la série harmonique

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \end{aligned}$$

diverge.

Exercice 4

Montrer que les séries entières

$$A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n, \quad B(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}, \quad C(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$$

convergent avec un rayon de convergence $R=1$. Vérifier que $A(t)$ diverge pour $t=\pm1$, que $B(t)$ converge pour $t=-1$ et diverge pour $t=1$ et que $C(t)$ converge pour $t=\pm1$.

Exercice 5

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}nt^n \\ &= t+2t^2+3t^3+\cdots+nt^n+\cdots \end{aligned}$$

est $R=1$. Étudier $S(\pm1)$.

Exercice 6

Montrer que les séries entières

$$X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}, \quad Y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{n}\right)^n$$

ont un rayon de convergence infini.

Exercice 7

Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

Calculer les septs premiers termes de $S(1)$. Comparer le résultat obtenu avec la valeur numérique de e. On rappelle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \mathrm{e}^t$$

où e est la base des logarithmes népériens.

Problème 2

1) À partir de

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots$$

pour $-1 < t < 1$ (qui est le développement en série entière de $(1-t)^{-1}$ pour $|t| < 1$ obtenu à partir de l'étude de la série géométrique), montrer par intégration que

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \cdots - \frac{t^n}{n} - \cdots$$

pour $-1 \leq t < 1$.

2) En changeant t en $-t$ dans l'expression précédente, vérifier que

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} + \cdots$$

pour $-1 < t \leq 1$.

3) En déduire que

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

pour $-1 < t < 1$.

4) Dans le cas où $t = \varepsilon \sim 0$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à trois, montrer que les développements limités

$$\ln(1-\varepsilon) \sim -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \ln(1+\varepsilon) \sim \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sim 2\varepsilon$$

sont compatibles, c'est-à-dire que l'on obtient le troisième à partir des deux premiers.

5) Montrer à partir de la question 1 (en changeant t en $-v$ puis v en u^2) que

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + u^4 - \cdots + (-1)^n u^{2n} + \cdots$$

pour $-1 < u < 1$.

6) Montrer par intégration de la relation précédente que

$$\tan^{-1} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

pour $-1 \leq u \leq 1$ où $\tan^{-1}$ désigne l'arc tangente.

7) En déduire que

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots\right]$$

8) Dans le cas où $u = \varepsilon \sim 0$, retrouver le développement limité

$$\tan^{-1} \varepsilon \sim \varepsilon$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 3.

Exercice 8

Soit la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(t) = (1+t)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

Calculer $f'(t)$ et vérifier que f satisfait l'équation différentielle

$$(1+t)f' - \alpha f = 0$$

Chercher une solution de cette équation sous la forme d'un développement en série entière

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Montrer que les coefficients a_n satisfont la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(\alpha - n)a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)a_0$$

et en déduire que

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + \cdots$$

Montrer que le rayon de convergence de la série entière obtenue est égal à 1 pour $\alpha \notin \mathbf{Z}$.

Chapitre 3

Séries de Fourier

Le cours ainsi que les exercices et problèmes qui seront faits en séance sont tirés de l'ouvrage :

M. Kibler, *Éléments de mathématiques pour la physique et la chimie*, **Éditions scientifiques GB, Contemporary Publishing International (Paris, seconde édition 2003).**

I Séries trigonométriques

1 Définition

Une série de la forme

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n(\omega t + \varphi) + b_n \sin n(\omega t + \varphi)$$

ou de la forme

$$T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\omega t + \varphi)}$$

avec $t \in \mathbf{R}$, $\omega \in \mathbf{R}_+^*$, $\varphi \in \mathbf{R}$, $(a_n, b_n) \in \mathbf{C}^2$ et $c_n \in \mathbf{C}$, est dite série trigonométrique. $\diamond$

2 Critère d'Abel

Toute série

$$S(t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(t)$$

avec $t \in \mathbf{R}$ telle que

- chaque terme $u_n(t)$ est de la forme

$$u_n(t) = x_n v_n(t)$$

- avec

$$\left| \sum_{p=M}^{N>M} v_p(t) \right| \leq A(t)$$

où $A(t)$ est indépendant de M et N

- et où la suite numérique (x_n) est monotone avec $x_n \to 0$ pour $n \to \infty$

est convergente presque partout. $\diamond$

3 Corollaire

La série

$$S(t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{2\mathrm{i}n(at+b)}$$

avec $t \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}^*$ et $b \in \mathbf{R}$, où les coefficients x_n sont de même signe et tels que $x_n \to 0$ pour $n \to \infty$, est convergente sauf peut être aux points t_k donnés par

$$at_k + b = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

(si elle est convergente sauf aux points t_k, on dit qu'elle est convergente presque partout). $\diamond$

Démonstration. La suite (x_n) satisfait bien au critère d'Abel. Ici

$$v_n(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}n(at+b)}$$

et on vérifie aisément que

$$\left| \sum_{p=M}^{N>M} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}p(at+b)} \right| \leq \frac{1}{|\sin(at+b)|}$$

où le second membre est indépendant de M et N et est fini pour $at+b \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

4 Exemple

La série trigonométrique

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-4n^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}$$

converge sauf aux points $t_k = k \in \mathbf{Z}$. En effet, ici on a

$$x_n = \frac{n}{1-4n^2}$$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est monotone (les x_n sont tous négatifs) décroissante vers 0 ($x_n \to 0$ pour $n \to \infty$). De plus, ici

$$a = \pi,\ b = 0 \Rightarrow \sin(at+b) = \sin \pi t = 0 \text{ pour } t = k \in \mathbf{Z}$$

Il y a donc problème pour $t = k \in \mathbf{Z}$ et il faut étudier la série dans ce cas. On a

$$\forall k \in \mathbf{Z} : S(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-4n^2}$$

qui diverge en vertu du critère de Riemann (le terme général se comporte comme $-\frac{1}{4}\frac{1}{n}$ pour n suffisamment grand). La série $S(t)$ converge donc sauf pour $t = k \in \mathbf{Z}$. Notons que si la somme sur n dans $S(t)$ allait de $-\infty$ à $+\infty$, il faudrait étudier séparément les séries pour $n > 0$ et $n < 0$ puisque

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1-4n^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{n}{1-4n^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-4n^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}$$

le terme $n = 0$ ne contribuant pas.

II Séries de Fourier

1 Théorème (Dirichlet et Jordan)

a Hyptothèse

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) : $t \mapsto f(t)$ une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ($\omega > 0$) lisse par morceaux (c'est-à-dire C^∞ par intervalles avec éventuellement des discontinuités de première espèce). La "sinusoïde redressée" et la fonction périodique "créneau" sont des exemples de telles fonctions.

b Théorème (forme 1)

Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) : $t \mapsto f(t)$ est une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, et lisse par morceaux, alors la série trigonométrique

$$\mathrm{SF}_1[f](t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n[f]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}$$

où

$$c_n[f] = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}dt$$

(avec $T_0 \in \mathbf{R}$) converge presque partout vers f sauf aux points de discontinuité de f. En un tel point t_0, on a

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n[f] \mathrm{e}^{in\omega t_0} = \frac{1}{2}\left[f(t_0^-) + f(t_0^+)\right]$$

avec

$$f(t_0^\pm) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(t_0 \pm \varepsilon)$$

mais $\mathrm{SF}_1[f](t_0)$ diverge. $\diamond$

La fonction $\mathrm{SF}_1[f] : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) : $t \mapsto \mathrm{SF}_1[f](t)$ définit la série de Fourier de f ou le développement en série de Fourier de f. Les coefficients $c_n[f]$, ou simplement c_n, sont les coefficients de Fourier généralisés de f ; ils sont indépendant du réel T_0 et l'on prend souvent $T_0 = 0$ ou $T_0 = -\frac{T}{2}$. Dans la pratique on écrit souvent

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{in\omega t}$$

mais il faut bien noter qu'il s'agit d'une égalité presque partout dans le cas où f présente des points de discontinuité de première espèce où $\mathrm{SF}_1[f](t)$ diverge.

c Théorème (forme 2)

La série de Fourier de f peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{SF}_2[f](t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega t + b_m \sin m\omega t$$

où

$$\begin{array}{ll} a_m & \equiv a_m[f] = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \cos m\omega t \, dt \\ b_m & \equiv b_m[f] = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \sin m\omega t \, dt \end{array}$$

avec

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega t_0 + b_m \sin m\omega t_0 = \frac{1}{2}\left[f(t_0^-) + f(t_0^+)\right]$$

où t_0 est un point de discontinuité de f. On a

$$\mathrm{SF}_2[f] = \mathrm{SF}_1[f] \quad \text{p.p.}$$

l'égalité ayant lieu sauf aux points t_0. $\diamond$

Démonstration. Le passage de la forme 1 (en termes d'exponentielles) à la forme 2 (en termes de sinus et cosinus) se fait au moyen des relations d'Euler. (Nous admettrons sans démonstration la forme 1.)

Les coefficients a_m et b_m sont appelés coefficients de Fourier ordinaires de la fonction f. Ici encore, on écrit souvent

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega t + b_m \sin m\omega t$$

mais il faut bien noter qu'il s'agit d'une égalité presque partout dans le cas où f présente des points de discontinuité de première espèce. Il faut bien noter aussi que les formes 1 et 2 sont égales presque partout ; elles diffèrent aux points de discontinuité de première espèce de f.

2 Coefficients de Fourier

a Formules de passage

Le passage de la forme 1 à la forme 2 montre que

$$c_m = \frac{1}{2}(a_m - \mathrm{i}b_m),\ c_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + \mathrm{i}b_m) \Leftrightarrow a_m = c_m + c_{-m},\ b_m = \mathrm{i}(c_m - c_{-m})$$

où $m \in \mathbf{N}$. Noter que ces formules donnent $b_0 = 0$ et $a_0 = 2c_0$. On les retrouve aisément en introduisant la relation d'Euler

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\omega t} = \cos m\omega t - \mathrm{i}\sin m\omega t$$

dans la formule donnant c_m.

b Parité

Le réel T_0 étant arbitraire, on peut prendre $2T_0 = -T$ ce qui permet de trouver des propriétés remarquables des coefficients de Fourier lorsque f est paire ou impaire.

• Si f est paire : la formule donnant b_m avec $2T_0 = -T$ et les formules de passage montrent que

$$\forall m \in \mathbf{N} : b_m = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbf{N} : c_m = c_{-m} = \frac{1}{2}a_m$$

• Si f est impaire : la formule donnant a_m avec $2T_0 = -T$ et les formules de passage montrent que

$$\forall m \in \mathbf{N} : a_m = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbf{N} : c_m = -c_{-m} = \frac{1}{2\mathrm{i}}b_m$$

En résumé, on a :

$$\begin{aligned} f(-t) &= +f(t) \Rightarrow c_m[f] = +c_{-m}[f] \\ f(-t) &= -f(t) \Rightarrow c_m[f] = -c_{-m}[f] \end{aligned}$$

3 Fonction génératrice

Définition

Soit f une fonction périodique de période T. La fonction génératrice f_T de f sur $[T_0, T_0+T]$ est la fonction telle que

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [T_0, T_0+T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et f est alors l'extension périodique de f_T. $\diamond$

Les coefficients de Fourier généralisés peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned} c_n[f] &= \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,dt \end{aligned}$$

et des formules similaires peuvent être données pour les coefficients de Fourier ordinaires $a_m[f]$ et $b_m[f]$.

4 Exemple

Soit f la fonction périodique de période T et de fonction génératrice f_T sur $[0, T]$ définie par

$$f_T(t) = \begin{cases} t \text{ pour } 0 \leq t < T \\ 0 \text{ si } \mathrm{t} \leq 0 \text{ ou } \mathrm{t} > \mathrm{T} \end{cases}$$

(La fonction f est une rampe périodique comme le montre aisément son graphe.)

Le calcul des coefficients de Fourier généralisés conduit à

$$c_n = \begin{cases} -\frac{T}{2\pi\mathrm{i}n} & \text{pour} \quad n \in \mathbf{Z}^* \\ \\ \frac{T}{2} & \text{pour} \quad n = 0 \end{cases}$$

après une simple intégration par parties. Le développement en série de Fourier, en termes d'exponentielles, est alors donné par la forme 1 suivante

$$\mathrm{SF}_1[f](t) = \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n\in\mathbf{Z}^*}\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi\frac{t}{T}}$$

dont on peut étudier la convergence au moyen du critère d'Abel. La somme sur n peut être séparée en une somme sur $n > 0$ et une autre sur $n < 0$;

nous nous limiterons à l'étude de la somme sur $n > 0$ (l'étude est similaire pour $n < 0$). Dans les notations du critère d'Abel, on a

$$x_n \mathrm{e}^{2\mathrm{i}n(at+b)} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\frac{\pi}{T}t}$$

d'où

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad a = \frac{\pi}{T}, \quad b = 0$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est monotone et convergente vers 0. De plus,

$$\sin(at+b) = \sin\frac{\pi}{T}t = 0 \Rightarrow t \equiv t_k = kT,\ k \in \mathbf{Z}$$

La fonction $\mathrm{SF}_1[f]$ converge vers f sauf aux points t_k. En effet, en ces points

$$\mathrm{SF}_1[f](t_k) = \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n\in\mathbf{Z}^*}\frac{1}{n}$$

qui fait apparaître la série harmonique divergente.

Le passage aux a_m et b_m est immédiat

$$\begin{array}{rcl} a_m & = & c_m + c_{-m} = 0 \quad \text{pour} \quad m \in \mathbf{N}^* \\ a_0 & = & 2c_0 = T \quad \text{pour} \quad m = 0 \\ b_m & = & \mathrm{i}\,(c_m - c_{-m}) = -\frac{T}{\pi m} \quad \text{pour} \quad m \in \mathbf{N}^* \end{array}$$

D'où le développement en série de Fourier, en termes de sinus et cosinus, de f donné par la forme 2 suivante

$$\mathrm{SF}_2[f](t) = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin 2\pi m\frac{t}{T} \quad \text{p.p.}$$

Pour $t \equiv t_k = kT$ avec $k \in \mathbf{Z}$, on obtient

$$\mathrm{SF}_2[f](t_k) = \frac{T}{2} \equiv \frac{f(t_k^-) + f(t_k^+)}{2}$$

qui montre bien que les fonctions $\mathrm{SF}_1[f]$ et $\mathrm{SF}_2[f]$ diffèrent en t_k.

III Théorème de Bessel et Parseval

1 Le théorème

Soit deux fonctions périodiques f et g de même période T et de fonctions génératrices f_T et g_T sur $[T_0, T_0+T]$, respectivement. On a la suite d'égalités

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}\overline{f(t)}\,g(t)\,dt & = & \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}\overline{f_T(t)}\,g_T(t)\,dt \\ & = & \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_T(t)}\,g_T(t)\,dt \\ & = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{c_n[f]}\,c_n[g] \\ & = & \frac{1}{4}\overline{a_0[f]}\,a_0[g] + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{a_m[f]}\,a_m[g] + \overline{b_m[f]}\,b_m[g] \end{array}$$

où la barre désigne la conjugaison complexe. $\diamond$

Démonstration. L'égalité des trois premières intégrales est évidente. Pour le reste, le point de départ consiste à remplacer f et g dans l'intégrale de départ par leur développements en série de Fourier. On procède ensuite à l'inversion des signes "intégrale" et "somme" dans l'intégrale. On obtient alors une double somme d'intégrales. Chacune des intégrales se calcule aisément et la double somme se réduit à une simple somme sur $\overline{c_n[f]}\, c_n[g]$. On peut alors utiliser les formules de passage pour passer des c_n aux a_m et b_m.

Dans le cas particulier où $f = g$, le théorème conduit à

$$\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n[f]|^2 = \frac{1}{4}|a_0[f]|^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} |a_m[f]|^2 + |b_m[f]|^2$$

En théorie du signal, dans le cas général comme dans le cas particulier, le théorème porte aussi le nom de théorème énergétique. Il donne en effet la répartition de l'énergie d'un signal sur une période suivant les différents modes de fréquence.

Du point de vue mathématique, le théorème de Bessel et Parseval permet de ramener le calcul de la somme de certaines séries au calcul d'intégrales élémentaires.

2 Exemple

Soit la rampe périodique décrite par la fonction périodique f de période T et de fonction génératrice f_T sur $[0, T]$ définie par

$$f_T(t) = t \text{ pour } 0 \le t < T$$

On a vu que les coefficients de Fourier ordinaires de f sont donnés par

$$a_m = 0 \text{ si } m \in \mathbf{N}^*, \quad a_0 = T, \quad b_m = -\frac{T}{\pi m} \text{ si } m \in \mathbf{N}^*$$

Le théorème de Bessel et Parseval en termes des a_m et b_m donne

$$\frac{1}{T}\int_0^T t^2\, dt = \frac{T^2}{4} + \frac{T^2}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$$

Or

$$\frac{1}{T}\int_0^T t^2\, dt = \frac{T^2}{3}$$

d'où la répartition de la puissance sur une période suivant les différents modes $m = 0, 1, 2, \cdots$ donnée dans le tableau suivant.

m	0	1	2	$\cdots$
partition de $\frac{T^2}{3}$	$\frac{T^2}{4}$	$\frac{T^2}{2\pi^2}$	$\frac{T^2}{8\pi^2}$	$\cdots$
partition de 0,33 (cas $T = 1$)	0,25	0,05	0,01	$\cdots$

Ce tableau fait clairement apparaître l'importance des premiers modes puisque les modes $m = 0$, 1 et 2 donnent $0,25 + 0,05 + 0,01 = 0,31$ à comparer à $\frac{1}{3} \sim 0,33$ que l'on obtient pour la somme de tous les modes (dans le cas où $T = 1$).

En termes de somme de série, le théorème de Bessel et Parseval conduit ici à

$$\frac{T^2}{3} = \frac{T^2}{4} + \frac{T^2}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

d'où l'on tire

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{1}{6}\pi^2$$

qui est un résultat bien connu.

IV Application aux problèmes de type Dirichlet

Les séries de Fourier peuvent intervenir dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites. C'est le cas par exemple dans le problème de Dirichlet qui consiste à trouver une fonction harmonique, c'est-à-dire satisfaisant l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0,$$

dans un domaine D de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ et prenant des valeurs données sur la frontière de D. C'est aussi le cas dans le problème de la chaleur qui consiste à trouver une fonction satisfaisant l'équation de la chaleur

$$\Delta u = k\frac{\partial u}{\partial t}$$

dans un domaine D de $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ et prenant des valeurs données sur la frontière de D.

Les grandes étapes pour la résolution de problèmes de ce type sont les suivantes.

- On cherche des solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles correspondante en utilisant la méthode de séparation des variables.

- On ne garde que les solutions continues dans le domaine D plus sa frontière.

- On essaie de satisfaire aux conditions aux limites en formant une somme en général infinie de solutions particulières. C'est là que peuvent s'introduire les séries de Fourier.

- On vérifie que le résultat obtenu satisfait bien les conditions de l'énoncé en étudiant en particulier les problèmes de convergence.

Nous ne développerons pas plus cette partie hors programme.

V Exercices et problèmes

Exercice 1

Développer en série de Fourier la fonction périodique f de période $T = 2$ et de fonction génératrice f_2 définie par

$$f_2(t) := \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < t < 1 \\ 0 \text{ si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

En déduire la série de Fourier de la fonction périodique g de période $T = 2$ et de fonction génératrice g_2 définie par

$$g_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 \text{ si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

par application du théorème de Bessel et Parseval au couple (f, g).

Solution

Les éléments de réponse essentiels sont

$$\begin{aligned} c_n[f] &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n\pi}, \quad n \in \mathbf{Z}^* \\ c_n[g] &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} c_n[f], \quad n \in \mathbf{Z}^* \end{aligned}$$

avec pour $n = 0$

$$c_0[f] = c_0[g] = \frac{1}{2}$$

Le théorème de Bessel et Parseval conduit ici à

$$0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}^*} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} \frac{\sin^2 n\frac{\pi}{2}}{n^2}$$

où les n pairs ne contribuent pas. Pour n impair, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} \frac{\sin^2 n\frac{\pi}{2}}{n^2} = -\frac{1}{n^2}$$

et de plus

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

Donc

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} 2 \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{8}$$

Problème 1

1) Soit $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction périodique de période $T = 2$ définie par sa fonction génératrice

$$f_2 : [0,2] \to \mathbf{R} : t \mapsto f_2(t) = \begin{cases} \cos \pi t \ \text{ pour } \ 0 < t < 1 \\ \\ 0 \ \text{ pour } \ 1 < t < 2 \end{cases}$$

Déterminer les coefficients de Fourier généralisés $c_n[\tilde{f}]$ de $\tilde{f}$. En déduire la série de Fourier $\mathrm{SF}_1[\tilde{f}]$ de $\tilde{f}$ en termes des $c_n[\tilde{f}]$.

2) Déduire de la question 1 que

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{p^2}{(1-4p^2)^2} = \frac{1}{32}\pi^2$$

3) Écrire la série de Fourier $\mathrm{SF}_2[\tilde{f}]$ de $\tilde{f}$ en termes des coefficients réels de Fourier $a_n[\tilde{f}]$ et $b_n[\tilde{f}]$.

4) Discuter de la convergence des séries $\mathrm{SF}_1[\tilde{f}](t)$ et $\mathrm{SF}_2[\tilde{f}](t)$. Que peut-on dire de ces séries pour $t = 0$ et $t = 1$? Les séries sont-elles dérivables terme à terme ?

Solution

1) Le calcul des coefficients de Fourier généralisés conduit à

$$\begin{aligned} c_n[\tilde{f}] &= \frac{\mathrm{i}}{\pi} \frac{n}{1-n^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}} \cos n\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \frac{n}{1-n^2} (1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi}), \quad n \in \mathbf{Z}\backslash\{\pm 1\} \end{aligned}$$

et

$$c_{\pm 1}[\tilde{f}] = \frac{1}{4}$$

De manière détaillée, on a donc

$$\begin{aligned} c_{2p}[\tilde{f}] &= \frac{2\mathrm{i}}{\pi} \frac{p}{1-4p^2} \ \text{ si } \ p \in \mathbf{Z} \\ c_{2p+1}[\tilde{f}] &= 0 \ \text{ si } \ p \in \mathbf{Z}\backslash\{-1, 0\} \\ c_{+1}[\tilde{f}] &= c_{-1}[\tilde{f}] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où la série de Fourier de $\tilde{f}$ en termes d'exponentielles.

$$\mathrm{SF}_1[\tilde{f}](t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t} + \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{p}{1-4p^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi pt}$$

2) Le théorème de Bessel et Parseval conduit à

$$\frac{1}{2}\int_0^2 |f_2(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n[\tilde{f}]\right|^2$$

En faisant apparaître dans la somme sur n les cas $n=-1$, $n=1$, $n=2p+1$ (impair) et $n=2p$ (pair), il vient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \cos^2 \pi t dt = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{p^2}{(1-4p^2)^2}$$

d'où l'on tire (après calcul de l'intégrale)

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{p^2}{(1-4p^2)^2} = \frac{1}{32}\pi^2$$

3) Les formules de passage entre les c_n et les (a_m, b_m) conduisent à

$$\begin{array}{rcl} a_m & = & 0 \quad \text{si} \quad m \neq 1 \\ a_1 & = & \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad m = 1 \\ b_m & = & -\frac{1}{\pi}\frac{m}{1-m^2}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi}) \quad \text{si} \quad m \neq 1 \\ b_1 & = & 0 \quad \text{si} \quad m = 1 \end{array}$$

soit encore

$$a_m = 0 \text{ si } m \neq 1,\ a_1 = \frac{1}{2},\ b_{2p+1} = 0 \text{ si } p \in \mathbf{N},\ b_{2p} = -\frac{4}{\pi}\frac{p}{1-4p^2} \text{ si } p \in \mathbf{N}^*$$

La série de Fourier de $\tilde{f}$ en termes de sinus et cosinus est alors

$$\mathrm{SF}_2[\tilde{f}](t) = \frac{1}{2}\cos \pi t - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p}{1-4p^2}\sin 2\pi pt$$

4) En vertu du critère d'Abel, la série $\mathrm{SF}_1[\tilde{f}](t)$ converge presque partout. Elle converge vers $\tilde{f}(t)$ sauf aux points $t \equiv t_k = k$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Elle est donc divergente pour $t=0$ et $t=1$. Elle n'est pas dérivable terme à terme car $\tilde{f}$ est discontinue aux points $t_k = k \in \mathbf{Z}$ (la série dérivée terme à terme diverge).

En vertu du théorème de Dirichlet et Jordan, la série $\mathrm{SF}_2[\tilde{f}](t)$ converge vers $\tilde{f}(t)$ sauf aux points $t \equiv t_k = k$ avec $k \in \mathbf{Z}$ où elle prend la valeur

$$\mathrm{SF}_2[\tilde{f}](t_k) = \frac{1}{2}\cos k\pi = \frac{(-1)^k}{2} = \frac{f(t_k^-)+f(t_k^+)}{2}$$

de sorte que

$$\mathrm{SF}_2[\tilde{f}](0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{SF}_2[\tilde{f}](1) = -\frac{1}{2}$$

Elle n'est pas dérivable terme à terme car $\tilde{f}$ est discontinue aux points $t_k = k \in \mathbf{Z}$.

Problème 2

On considère les fonctions

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbf{R} \mapsto [0,1] : t \mapsto |\cos \pi t| \\ g & : & \mathbf{R} \mapsto [0,1] : t \mapsto |\sin \pi t| \end{array}$$

1) Quelle est la période de f ?

2) Déterminer la série de Fourier de f. En déduire le développement de f en sinus et cosinus.

3) Vérifier que la série de Fourier de f est convergente. Est-elle absolument convergente ?

4) Déduire la série de Fourier de g à partir de celle de f.

5) Déterminer la somme de la série

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

en utilisant le théorème de Bessel et Parseval.

Solution

1) La fonction $t \mapsto \cos \pi t$ a pour période $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Le fait de prendre le module de $\cos \pi t$ introduit un redressement qui a pour effet de diviser la période par 2. La période de la fonction $t \mapsto |\cos \pi t|$ est donc $T = 1$.

2) Les coefficients de Fourier généralisés dont donnés par

$$c_n[f] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\cos \pi t| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t} dt$$

Ici on prend $T_0 = -\frac{T}{2} = -\frac{1}{2}$ car $|\cos \pi t| = \cos \pi t$ pour $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Donc

$$\begin{aligned} c_n[f] &= \textstyle\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cos \pi t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n t} dt \\ &= \textstyle\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n t} dt \\ &= \textstyle\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-2n)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(1+2n)t} dt \\ &= \textstyle\frac{1}{2} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-2n)t}}{\mathrm{i}\pi(1-2n)}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(1+2n)t}}{-\mathrm{i}\pi(1+2n)}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Finalement

$$c_n[f] = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi(1-2n)}(a-b) - \frac{1}{2\mathrm{i}\pi(1+2n)}(c-d)$$

où

$$\begin{array}{rcl} a & = & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(1-2n)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} = \mathrm{i}(-1)^n \\ b & = & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(1-2n)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} = -\mathrm{i}(-1)^n \\ c & = & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(1+2n)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} = -\mathrm{i}(-1)^n \\ d & = & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(1+2n)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} = \mathrm{i}(-1)^n \end{array}$$

de sorte que

$$c_n[f] = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi(1-2n)}2\mathrm{i}(-1)^n + \frac{1}{2\mathrm{i}\pi(1+2n)}2\mathrm{i}(-1)^n$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$c_n[f] = (-1)^n\frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$$

La série de Fourier, en termes d'exponentielles de f est donc

$$\mathrm{SF}[f](t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{1-4n^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi t}$$

Le passage de c_n aux a_m et b_m est évident. On a (pour $m \in \mathbf{N}$)

$$\begin{array}{rcl} a_m & = & c_m + c_{-m} \\ & = & (-1)^m\frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4m^2} + (-1)^{-m}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4(-m)^2} \\ & = & (-1)^m\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4m^2} \end{array}$$

et $b_m = 0$ (car la fonction f est paire). D'où l'expression de $\mathrm{SF}[f](t)$ en termes de cosinus

$$\mathrm{SF}[f](t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{1-4m^2}\cos 2\pi mt$$

(il n'y a pas de sinus car les b_m sont nuls).

3) L'étude de la convergence de $\mathrm{SF}[f](t)$, en termes d'exponentielles, se fait à l'aide du critère d'Abel. Ici

$$x_n = \frac{1}{1-4n^2}$$

et

$$v_n(t) = (-1)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2(\pi t-\frac{\pi}{2})}$$

si bien que les paramètres a et b du critère d'Abel sont

$$a = \pi \quad \text{et} \quad b = -\frac{\pi}{2}$$

Les x_n sont tous négatifs (sauf x_0 que l'on isole) et $x_n \to 0$ pour $n \to \pm\infty$. La série $\mathrm{SF}[f](t)$ converge vers $f(t)$ sauf peut être aux points tels que

$$\sin(at+b) = \sin\pi(t-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow t \equiv t_k = k + \frac{1}{2} = \frac{2k+1}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

En fait, en de tels points (où f est continue mais n'est pas dérivable), la série converge puisque

$$\mathrm{SF}[f]\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-4n^2}$$

qui est convergente en vertu du critère de Riemann. La série $\mathrm{SF}[f](t)$, en termes d'exponentielles, est absolument convergente car la série des modules associée est convergente.

4) On a

$$\cos\pi\left(t-\frac{1}{2}\right) = \sin\pi t \Rightarrow |\sin\pi t| = |\cos\pi(t-\frac{1}{2})|$$

d'où l'on déduit que

$$\mathrm{SF}[g](t) = \mathrm{SF}[f]\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

Comme

$$(-1)^n \mathrm{e}^{in2\pi(t-\frac{1}{2})} = (-1)^n \mathrm{e}^{in2\pi t}\mathrm{e}^{-in\pi} = \mathrm{e}^{in2\pi t}$$

On obtient

$$\mathrm{SF}[g](t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-4n^2}\mathrm{e}^{in2\pi t}$$

et il est donc inutile ici de calculer les $c_n[g]$; en fait le développement précédent montre que

$$c_n[g] = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$$

5) L'application du théorème de Bessel et Parseval au couple (f,g) donne

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \overline{f(t)}\, g(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n[f]}\,[g]$$

soit encore

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\sin\pi t|\,|\cos\pi t|\,dt = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-4n^2)^2}$$

La difficulté réside dans le calcul de l'intégrale à cause des valeurs absolues. Il faut scinder l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$ de manière convenable pour chasser les modules

- pour $t \in [-\frac{1}{2},0] : |\sin \pi t| = -\sin \pi t \quad \text{et} \quad |\cos \pi t| = \cos \pi t$
- pour $t \in [0,+\frac{1}{2}] : |\sin \pi t| = +\sin \pi t \quad \text{et} \quad |\cos \pi t| = \cos \pi t$

(on peut tracer le graphe de g et f sur $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$ pour s'en persuader). Il vient alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\sin \pi t|\, |\cos \pi t|\, dt &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} -\sin \pi t \cos \pi t dt + \int_{0}^{+\frac{1}{2}} \sin \pi t \cos \pi t dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sin 2\pi t dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\frac{1}{2}} \sin 2\pi t dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[-\frac{cos 2\pi t}{2\pi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{2}\left[-\frac{cos 2\pi t}{2\pi}\right]_{0}^{+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4\pi}(1+1) - \frac{1}{4\pi}(-1-1) \\
&= \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\frac{1}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)^2} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

On fractionne la somme de $-\infty$ à $+\infty$ en trois termes correspondant à $n < 0$, $n = 0$ et $n > 0$.

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)^2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

si bien que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi}{4} - 1 \Rightarrow$$

et en ajoutant 2 à chacun des membres de la dernière relation on a finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$$

Chapitre 4

Transformation de Fourier

Le cours ainsi que les exercices et problèmes qui seront faits en séance sont tirés de l'ouvrage :

M. Kibler, *Éléments de mathématiques pour la physique et la chimie*, **Éditions scientifiques GB, Contemporary Publishing International (Paris, seconde édition 2003).**

I Généralités

1 Transformation de Fourier

a Définition

Partie développée en cours.

b Exemple de la fonction porte

Partie développée en cours.

c Contre-exemple de la fonction de Heaviside

Partie développée en cours.

d Cas d'une fonction bornée à support borné

Partie développée en cours.

e Lien transformée de Fourier – coefficients de Fourier généralisés

Partie développée en cours.

2 Transformation de Laplace

a Définition

Partie développée en cours.

b Exemple de la fonction porte

Partie développée en cours.

c Exemple de la fonction de Heaviside

Partie développée en cours.

d Cas d'une fonction bornée à support borné

Partie développée en cours.

e Lien transformée de Fourier – transformée de Laplace

Partie développée en cours.

f Lien transformée de Fourier – transformée de Laplace – coefficients de Fourier généralisés

Partie développée en cours.

II Transformation de Fourier dans L^1, L^2 et S

1 Définition de L^p et S

Partie développée en cours.

2 Transformation de Fourier dans L^1

Partie développée en cours.

3 Transformation de Fourier dans L^2

Partie développée en cours.

4 Transformation de Fourier dans S

Partie développée en cours.

III Transformation de Fourier et convolution

Partie développée en cours.

IV Tables de transformées de Fourier

Voir : M. Kibler, *Éléments de mathématiques pour la physique et la chimie*, Éditions scientifiques GB, Contemporary Publishing International (Paris, seconde édition 2003).

Chapitre 5

Transformation de Laplace

Le cours ainsi que les exercices et problèmes qui seront faits en séance sont tirés de l'ouvrage :

M. Kibler, *Éléments de mathématiques pour la physique et la chimie*, **Éditions scientifiques GB, Contemporary Publishing International (Paris, seconde édition 2003).**

I Définition et exemples

Définition

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R} & \to & \mathbf{C}\,(\text{ou}\,\mathbf{R}) \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$$

une fonction de la variable réelle t à valeurs complexes (ou réelles). La transformée de Laplace bilatère de la fonction f est la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}[f] : \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ s & \mapsto & \mathcal{L}[f](s) \end{array}$$

définie par l'intégrale

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

sous réserve d'existence.

Très souvent, le domaine de définition de la fonction $\mathcal{L}[f]$ (lorsqu'elle existe) n'est pas $\mathbf{C}$ tout entier mais une partie de $\mathbf{C}$. Nous écrirons quelquefois

$$s = p + \mathrm{i}\omega \quad \text{avec} \quad p \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \omega \in \mathbf{R}$$

Notons que dans certains d'ouvrages $s = p \in \mathbf{R}$. Il faut noter aussi que dans beaucoup d'ouvrages, l'intégrale définissant la transformée de Laplace est prise de 0 à $+\infty$ (plutôt que de $-\infty$ à $+\infty$) : il s'agit alors de la transformée de Laplace unilatère.[1] Il est évident que la transformée de Laplace unilatère d'une fonction $f : t \mapsto f(t)$ coïncide avec la transformée de Laplace bilatère de la fonction associée $g : t \mapsto g(t) := H(t)f(t)$ où H est la fonction de Heaviside (avec $H(t) := 0$ si $t < 0$ et $H(t) := 1$ si $t > 0$). Dans cet ouvrage, nous nous intéresserons uniquement à la transformée de Laplace bilatère.

Notation

On dit que f a pour image $\mathcal{L}[f]$ ce que l'on note

$$f \sqsupset \mathcal{L}[f] \quad \text{ou} \quad f(t) \sqsupset \mathcal{L}[f](s)$$

Inversement, on dit que $\mathcal{L}[f]$ a pour l'original f ce que l'on note

$$\mathcal{L}[f] \sqsubset f \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}[f](s) \sqsubset f(t)$$

Dans la pratique, on utilise aussi $\mathcal{L}[f(t)]$ et $\mathcal{L}[f(t)](s)$ pour désigner $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[f](s)$, respectivement.

Contre-exemple

La fonction $f : t \mapsto \sin t$ n'a pas de transformée de Laplace bilatère. Il est en effet clair qu'il n'existe aucune valeur complexe de s telle que l'intégrale

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \, \mathrm{e}^{-st} \, dt$$

converge.

Exemple 1

La fonction (semi-périodique) $f : t \mapsto H(t) \sin t$ admet une transformée de Laplace. En effet, on montre aisément que

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \, \sin t \, \mathrm{e}^{-st} \, dt = \int_{0}^{+\infty} \sin t \, \mathrm{e}^{-st} \, dt$$

converge pour $\Re(s) > 0$. En faisant deux intégrations par parties, on obtient

$$H(t) \sin t \sqsupset \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{avec} \quad \Re(s) > 0$$

(Il faut toujours indiquer le domaine de définition, ici $\Re(s) > 0$, de la transformée de Laplace.) Bien entendu, la transformée de Laplace obtenue coïncide avec la transformée de Laplace unilatère de la fonction $t \mapsto \sin t$.

1. Bien noter la différence : la transformée de Laplace unilatère est définie par une intégrale de 0 à $+\infty$ par opposition à la transformée de Laplace bilatère qui est définie par une intégrale de $-\infty$ à $+\infty$.

Exemple 2

L'échelon unité de Heaviside $H : t \mapsto H(t)$ admet une transformée de Laplace dans le demi-plan complexe $\{s \in \mathbf{C} : \Re(s) = p > 0\}$ car l'intégrale

$$\mathcal{L}[H](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathrm{e}^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}dt = -\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}$$

converge pour $\Re(s) > 0$. On a donc

$$H(t) \sqsupset \frac{1}{s} \quad \text{avec} \quad \Re(s) > 0$$

Par contre, la fonction H n'admet pas de transformée de Fourier (voir chapitre 4) ce qui correspond au fait que $\mathcal{L}[H](s)$ n'existe pas pour $s \in \mathrm{i}\mathbf{R}$.

Exemple 3

La fonction porte $\sqcap : t \mapsto \sqcap(t)$, avec $\sqcap(t) := 1$ si $-\frac{1}{2} < t < +\frac{1}{2}$ et $\sqcap(t) := 0$ si $t < -\frac{1}{2}$ ou $t > +\frac{1}{2}$ admet une transformée de Laplace. En effet, un calcul immédiat conduit à

$$\mathcal{L}[\sqcap](s) = \frac{\mathrm{e}^{+\frac{s}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}}{s} = \frac{\sinh\frac{s}{2}}{\frac{s}{2}} \quad \text{avec} \quad s \in \mathbf{C}$$

avec prolongement par continuité en $s = 0$.

Exemple 4

La fonction $t \mapsto H(t)t$ admet une transformée de Laplace. On a

$$H(t)t \sqsupset \frac{1}{s^2} \quad \text{avec} \quad \Re(s) > 0$$

comme on peut le voir par intégration directe.

Exemple 5

La fonction $t \mapsto H(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$ (avec en général $\Re(\alpha) \geq 0$) admet une transformée de Laplace. On obtient aisément

$$H(t)\mathrm{e}^{-\alpha t} \sqsupset \frac{1}{s+\alpha} \quad \text{avec} \quad \Re(s) > -\Re(\alpha)$$

II Propriétés élémentaires

Nous donnons dans cette section cinq propriétés importantes pour les applications. Ces propriétés sont en général vraies sous réserve d'existence des expressions considérées. Les démonstrations des propriétés 1 à 4 (cf. les propriétés correspondantes de la transformation de Fourier) sont élémentaires. Par contre, la démonstration de la propriété 5 est assez délicate.

Propriété 1 (linéarité)

La transformation de Laplace est linéaire. Autrement dit, on a

$$\forall \lambda \in \mathbf{C},\ \forall \mu \in \mathbf{C}\ :\ \mathcal{L}\left[\lambda f + \mu g\right] = \lambda \mathcal{L}\left[f\right] + \mu \mathcal{L}\left[g\right]$$

dès lors que $\mathcal{L}\left[f\right]$ et $\mathcal{L}\left[g\right]$ existent.

Propriété 2 (translation en t)

On a la formule du “retard” ou de translation en t

$$\mathcal{L}\left[f_{t_0}\right](s) = \mathrm{e}^{-st_0}\mathcal{L}\left[f\right](s) \quad \text{avec} \quad f_{t_0}(t) := f(t-t_0) \quad \text{où} \quad t_0 \in \mathbf{R}$$

qui correspond à une translation de la variable réelle t.

Exemple 6

La propriété 3 permet de retrouver facilement que

$$\sqcap(t) \sqsupset \frac{\mathrm{e}^{+\frac{s}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}}{s} = \frac{\sinh \frac{s}{2}}{\frac{s}{2}}$$

En effet, en écrivant

$$\sqcap(t) = H\left(t + \frac{1}{2}\right) - H\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

on obtient

$$\mathcal{L}\left[\sqcap\right](s) = \mathrm{e}^{+\frac{s}{2}}\mathcal{L}\left[H\right](s) - \mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}\mathcal{L}\left[H\right](s) = \frac{\mathrm{e}^{+\frac{s}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}}{s}$$

après application de la propriété de linéarité et de la formule de translation en t. Il faut bien réaliser que l'expression obtenue pour $\mathcal{L}\left[\sqcap\right](s)$ est valable pour $s \in \mathbf{C}$ (et pas seulement pour $\Re(s) > 0$ comme on pourrait le penser en considérant les transformées de Laplace des deux fonctions H dans $\sqcap$).

Propriété 3 (translation en s)

On a la formule de translation en s

$$\mathcal{L}\left[f\right](s-s_0) = \mathcal{L}\left[f_{s_0}\right](s) \quad \text{avec} \quad f_{s_0}(t) := \mathrm{e}^{s_0 t}f(t) \quad \text{où} \quad s_0 \in \mathbf{C}$$

qui correspond à une translation de la variable complexe s.

Exemple 7

La propriété 4 permet de retrouver facilement que

$$H(t)\mathrm{e}^{-\alpha t} \sqsupset \frac{1}{s+\alpha}$$

pour $\Re(s+\alpha) > 0$; il suffit de prendre $f = H$ et $s_0 = -\alpha$. En faisant $\alpha = -\mathrm{i}$ puis $\alpha = +\mathrm{i}$ et en appliquant la propriété 1, on retrouve que $H(t)\sin t \sqsupset (s^2+1)^{-1}$ pour $\Re(s) > 0$.

Propriété 4 (dérivation en s)

On a la formule de dérivation en s

$$\forall n \in \mathbf{N} \ : \ \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f] = (-1)^n \mathcal{L}[f_n] \quad \text{avec} \quad f_n(t) := t^n f(t)$$

(Cette propriété est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe somme.)

Exemple 8

La propriété 4 permet de montrer facilement que

$$H(t)t \sqsupset \frac{1}{s^2}$$

pour $\Re(s) > 0$; il suffit de prendre $f = H$ et $n = 1$.

Propriété 5 (dérivation première en t)

On a la formule de dérivation première en t

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right](s) = s\mathcal{L}[f](s) - \sum_{t_0} \sigma[f](t_0)\, \mathrm{e}^{-st_0}$$

où t_0 est un point de discontinuité de première espèce de f (la fonction f est discontinue en t_0 avec un saut nul ou fini) et où

$$\sigma[f](t_0) \equiv f(t_0^+) - f(t_0^-) := \lim_{\epsilon \to 0^+} f(t_0+\epsilon) - \lim_{\eta \to 0^+} f(t_0-\eta)$$

est le saut de la fonction f en t_0.

Démonstration (idée). On commence avec un seul t_0 et on fait une intégration par parties. On complète la démonstration en prenant un nombre discret (fini ou infini dénombrable) de points t_0.

La propriété 5 est également connue sous l'appellation théorème des sauts.

Exemple 9

Prenons $f = H$. Dans ce cas, on a un seul t_0 (à savoir $t_0 = 0$) avec

$$\sigma[H](0) = 1 - 0 = 1$$

et comme

$$\frac{dH}{dt} = 0 \text{ pp}$$

la propriété 5 donne

$$\mathcal{L}\left[0 \text{ pp}\right](s) = s\mathcal{L}\left[H\right](s) - 1 \times \mathrm{e}^{-s\times 0}$$

et l'on retrouve que

$$\mathcal{L}\left[H\right](s) = \frac{1}{s}$$

pour $s \neq 0$ (en fait, on sait que l'on a $\Re(s) > 0$).

Exemple 10

Prenons $f = H\varphi$ avec $\varphi \in C^\infty$ telle que f est à croissance modérée (c'est-à-dire ne croît pas plus vite qu'un polynôme). Dans ce cas, il y a au plus un seul t_0 (à savoir $t_0 = 0$) et $\sigma[f](0) = \varphi(0)$. La propriété 6 conduit alors à

$$\mathcal{L}\left[H\frac{d\varphi}{dt}\right](s) = s\mathcal{L}\left[H\varphi\right](s) - \varphi(0)$$

En introduisant

$$f(0^+) := \lim_{\epsilon\to 0^+} f(\epsilon) = \varphi(0)$$

il vient

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right](s) = s\mathcal{L}\left[f\right](s) - f(0^+)$$

Il faut noter que la formule précédente (qui dans beaucoup d'ouvrages pour physiciens et ingénieurs est la seule formule de dérivation en t) n'est valable que pour une fonction f présentant, au plus, le point $t_0 = 0$ comme point de discontinuité de première espèce. Elle n'est pas valable si f présente des sauts finis pour $t > 0$. Dans le cas particulier où $f(0^+) = 0$, c'est-à-dire lorsque la fonction f est continue, on a

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right](s) = s\mathcal{L}\left[f\right](s)$$

III Quelques transformées de Laplace

Les transformées de Laplace suivantes sont très utiles pour la recherche d'originaux.

$$
\begin{aligned}
H(t) &\sqsupset \frac{1}{s}, \quad \Re(s) > 0 \\
H(t-t_0) &\sqsupset \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st_0}, \quad \Re(s) > 0, \quad t_0 \in \mathbf{R} \\
\sqcap(t) &\sqsupset \frac{2}{s}\sinh\frac{s}{2}, \quad s \in \mathbf{C} \\
a \sqcap (at) &\sqsupset \operatorname{sgn}(a)\frac{2a}{s}\sinh\frac{s}{2a}, \quad s \in \mathbf{C}, \quad a \in \mathbf{R}^* \\
H(+t)\mathrm{e}^{-at} &\sqsupset +\frac{1}{s+a}, \quad \Re(s+a) > 0 \\
H(-t)\mathrm{e}^{+at} &\sqsupset -\frac{1}{s-a}, \quad \Re(s-a) < 0 \\
tH(t) &\sqsupset \frac{1}{s^2}, \quad \Re(s) > 0 \\
t^2H(t) &\sqsupset \frac{2}{s^3}, \quad \Re(s) > 0 \\
t^nH(t) &\sqsupset \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \Re(s) > 0, \quad n \in \mathbf{N} \\
t^nH(t)\mathrm{e}^{-at} &\sqsupset \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \quad \Re(s+a) > 0, \quad n \in \mathbf{N} \\
H(t)\cos t &\sqsupset \frac{s}{s^2+1}, \quad \Re(s) > 0 \\
H(t)\sin t &\sqsupset \frac{1}{s^2+1}, \quad \Re(s) > 0 \\
H(t)\cos\omega t &\sqsupset \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \Re(s) > 0, \quad \omega \in \mathbf{R} \\
H(t)\sin\omega t &\sqsupset \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \Re(s) > 0, \quad \omega \in \mathbf{R} \\
H(t)\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t &\sqsupset \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}, \quad \Re(s+a) > 0, \quad \omega \in \mathbf{R} \\
H(t)\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t &\sqsupset \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}, \quad \Re(s+a) > 0, \quad \omega \in \mathbf{R}
\end{aligned}
$$

Il faut remarquer que certaines transformées de Laplace peuvent être déduites d'autres transformées de Laplace. Par exemple, en faisant $a = 0$ dans la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto H(t)\mathrm{e}^{-at}$ on obtient la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto H(t)$.

IV Transformation de Laplace et convolution

1 Définition

Le produit de convolution $f * g$ de la fonction $f : t \mapsto f(t)$ par la fonction $g : t \mapsto g(t)$ (fonctions de la variable réelle t à valeurs complexes) est la fonction $f * g : t \mapsto (f * g)(t)$ définie par

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

sous réserve d'existence de l'intégrale.

2 Propriété 1

Le produit de convolution $f * g$ est linéaire en f et g.

Démonstration. On montre facilement que

$$(\lambda f) * g = \lambda(f * g) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

si $f * g$ existe et que

$$(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$$

si $f_1 * g$ et $f_2 * g$ existent. Ceci assure la linéarité en f. On procède de la même façon pour la linéarité en g.

3 Propriété 2

Lorsqu'il existe, le produit de convolution $f * g$ est commutatif, c'est-à-dire que $f * g = g * f$.

4 Théorème

La transformée de Laplace du produit de convolution est le produit ordinaire des transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g]$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\,\mathcal{L}[g](s)$$

sous réserve d'existence. ◇

La transformée de Laplace permet donc de transformer un produit de convolution en un produit ordinaire.

V Applications de la transformation de Laplace

1 Détermination de transformées de Fourier

Le lien entre transformée de Laplace et transformée de Fourier n'est pas toujours clair dans la littérature. À ce sujet, nous pouvons faire les remarques suivantes.

- Une fonction peut avoir une transformée de Laplace sans avoir de transformée de Fourier. La fonction de Heaviside H n'admet pas de transformée de Fourier mais admet une transformée de Laplace.
- Si une fonction f admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ sur l'axe imaginaire (donc pour $\Re(s) = 0$), alors f admet une transformée de Fourier. Dans ce cas, on a

$$\mathcal{F}[f](\nu) = \mathcal{L}[f](\mathrm{i}2\pi\nu) \quad \text{avec} \quad \nu \in \mathbf{R}$$

  et on peut ainsi déduire la transformée de Fourier de la connaissance de la transformée de Laplace. Bien sûr, la formule précédente est *a fortiori* valable lorsque la transformée de Laplace de f est définie dans le plan complexe tout entier $\{s \in \mathbf{C}\}$.

2 Détermination de coefficients de Fourier

Soit f une fonction périodique (bornée) de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de fonction génératrice f_T sur $[T_0, T_0 + T]$ avec $T_0 \in \mathbf{R}$. On sait que les coefficients de Fourier généralisés $c_n[f]$ sont donnés par

$$c_n[f] := \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t} dt$$

avec $n \in \mathbf{Z}$. Or l'intégrale dans l'expression précédente n'est pas autre chose que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f_T](s)$ de la fonction f_T au point $s = \mathrm{i}n\omega$ (cette transformée de Laplace existe pour tout s dans $\mathbf{C}$ lorsque f_T est une fonction bornée et à support borné). On a donc la formule

$$c_n[f] = \frac{1}{T}\mathcal{L}[f_T](\mathrm{i}n\omega)$$

Cette formule permet de déterminer les coefficients de Fourier généralisés $c_n[f]$ de f sans intégration dès lors que l'on connaît la transformée de Laplace de sa fonction génératrice f_T. On peut alors en déduire les coefficients de Fourier ordinaires $a_n[f]$ et $b_n[f]$ de f en utilisant les relations liant (c_n, c_{-n}) et (a_n, b_n) avec $n \in \mathbf{N}$. Dans la pratique, on a

$$\mathcal{L}[f_T] \to c_n[f] \to a_n[f] \text{ et } b_n[f]$$

3 Résolution d'équations différentielles

a Cas général

La transformation de Laplace (et la convolution) sont des outils indispensables pour résoudre des équations différentielles qui interviennent en électronique et dans la théorie du signal. La transformation de Laplace permet de trouver (ou filtrer) la solution y, si elle existe, d'une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants du type :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = e \quad \text{pp}$$

où e est une fonction donnée et y une fonction à déterminer soumise aux contraintes suivantes :

- la fonction y est nulle pour $t < t_0$ (t_0 donné)
- les fonctions y, $\frac{dy}{dt}$, $\cdots$, $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$ satisfont éventuellement des conditions de saut données.

b Un exemple type

Fait en cours.

4 Application aux systèmes linéaires

La transformation de Laplace peut être appliquée à la résolution de systèmes linéaires d'équations différentielles. Plutôt que de faire la théorie générale, nous procéderons à l'aide d'un exemple.

On se propose de résoudre le système de deux équations différentielles à deux fonctions inconnues

$$\frac{dx}{dt} - 2y = -H(t)\sin t, \quad x + 2\frac{dy}{dt} = +H(t)\cos t$$

où les fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ satisfont $x(t) = y(t) = 0$ si $t < 0$, $x \in C^0$ sauf en $t_0 = 0$ où $\sigma[x](0) = 3$ et $y \in C^0$ sauf en $t_0 = 0$ où $\sigma[y](0) = 1$ (on rappelle que $\sigma[f](t_0)$ est le saut de f en t_0).

On applique la même méthode que si on avait une seule équation différentielle avec une seule fonction mais ici on prend la transformée de Laplace des deux équations différentielles : en posant $\hat{x}\mathcal{L}[x](s)$ et $\hat{y} = \mathcal{L}[y](s)$, on a

$$\begin{array}{rcl} L[\frac{dx}{dt}](s) & = & s\hat{x} - 3 \\ L[\frac{dy}{dt}](s) & = & s\hat{y} - 1 \end{array}$$

après avoir appliqué deux fois le théorème des sauts (relatif à la dérivation en t). La transformée de Laplace appliquée aux deux équations différentielles donne

$$s\hat{x} - 3 - 2\hat{y} \quad = \quad -\frac{1}{s^2+1}$$

$$\hat{x} + 2\,(s\hat{y} - 1) \quad = \quad \frac{s}{s^2+1}$$

où l'on a utilisé

$$H(t)\cos t \sqsupset \frac{s}{s^2+1}, \quad H(t)\sin t \sqsupset \frac{1}{s^2+1} \quad \text{avec } \Re(s) > 0$$

On a donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues $\hat{x}$ et $\hat{y}$. On résoud ce système par les méthodes tradititionnelles (par substitution ou à l'aide du calcul matriciel) et on trouve

$$\begin{array}{rcl} \hat{x} & = & 3\frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1} \\ \hat{y} & = & \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \end{array}$$

et on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & H(t)\,(3\cos t + 2\sin t) \\ y(t) & = & H(t)\,(\cos t - \sin t) \end{array}$$

On vérifie aisément que les solutions obtenues satisfont bien les conditions de l'énoncé.

Chapitre 6

Calcul matriciel

I Définitions

Cette partie sera développée en séance. Nous nous limitons ci-dessous à un plan très détaillé de cette section.

1 Généralités sur les matrices

a Matrice $m \times n$

-) Une matrice $m \times n$ sur $\mathbf{C}^{m \times n}$ est un tableau de $m \times n$ nombres complexes répartis en m lignes et n colonnes. Soit A une telle matrice. On utilise la notation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sous forme condensée, on écrit

$$A = (a_{ij}) \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

L'élément de matrice a_{ij} est noté aussi $(A)_{ij}$: la notation $a_{ij} = (A)_{ij}$ est très pratique. On dit que A est de dimension $m \times n$.

-) Matrice nulle (notée $\mathbf{O}$ ou O ou simplement 0) : c'est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

-) Égalité de deux matrices : deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de dimension $m \times n$ sont dites égales si $a_{ij} = b_{ij}$ pour $i = 1, 2, \cdots, m$ et $j = 1, 2, \cdots, n$.

b Matrice $m \times m$

-) Matrice carrée

-) Matrice triangulaire

-) Matrice diagonale
-) Matrice constante
-) Matrice unité (notée I ou simplement 1)

c Vecteur colonne $m \times 1$

d Vecteur ligne $1 \times n$

2 Matrices associées à une matrice donnée

a Matrice transposée

b Matrice conjuguée complexe

c Matrice conjuguée hermitique

II Opérations sur les matrices

1 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $m \times n$. La matrice $B = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$ est la matrice $B = (b_{ij})$ de dimension $m \times n$ et d'éléments $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

2 Somme de deux matrices

a Définition

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $m \times n$. La matrice $C = A + B$ est la matrice $m \times n$ définie par

$$C = (c_{ij}) \text{ avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ où } i = 1, 2, \cdots, m \text{ et } j = 1, 2, \cdots, n$$

b Propriétés

La somme est commutative c'est-à-dire que $A + B = B + A$ et associative c'est-à-dire que $A + (B + C) = (A + B) + C$ que l'on note $A + B + C$.

3 Produit de deux matrices

a Définition

- Cas général : $(m \times p)(p \times n) \to m \times n$. Soit

$$A = (a_{ik}) : m \times p, \ B = (b_{kj}) : p \times n$$

La matrice $C = AB$, $C = (c_{ij})$, est la matrice $m \times n$ d'éléments

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \text{ où } i = 1, 2, \cdots, m \text{ et } j = 1, 2, \cdots, n$$

Le produit ainsi défini d'une matrice $m \times p$ par une matrice $p \times n$ est une matrice $m \times n$.

- Cas $n = 1$: $(m \times p)(p \times 1) \to m \times 1$ (on passe d'un vecteur colonne $p \times 1$ à un vecteur colonne $m \times 1$).

- Cas $m = 1$: $(1 \times p)(p \times n) \to 1 \times n$ (on passe d'un vecteur ligne $1 \times p$ à un vecteur ligne $1 \times n$).

b Propriétés

- Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

- Il est clair que $AI = IA = A$ et $AO = OA = O$ où I est la matrice unité et O la matrice nulle.

- Le produit est distributif par rapport à l'addition c'est-à-dire que $A(B+C) = AB + AC)$.

- Le produit est associatif c'est-à-dire que $A(BC) = (AB)C$ que l'on note ABC.

- Dans le cas des matrices carrées, le produit n'est pas commutatif en général c'est-à-dire que AB et BA sont en général différents. On définit le commutateur $[A, B]$ de A et B par

$$[A, B] = AB - BA$$

On dit que A et B commutent si $[A, B] = 0$ c'est-à-dire que $[A, B]$ est la matrice nulle. Les produits AB et BA sont égaux si et seulement si $[A, B] = 0$. Comme exemple trivial, deux matrices diagonales commutent.

c Interprétation du produit

Soit A une matrice $p \times n$, B une matrice $m \times p$ et x un vecteur colonne $n \times 1$. Le produit $y = Ax$ est un vecteur colonne $p \times 1$ et le produit $z = By = B(Ax)$ est un vecteur colonne $m \times 1$. Le produit matriciel étant associatif, on peut écrire $z = (BA)x$. Dans le détail, on a

$$y = Ax,\ z = By \Rightarrow z = B(Ax) \Rightarrow z = (BA)x$$

Le produit BA est donc la matrice $m \times n$ qui permet de passer du vecteur x au vecteur z.

4 Inverse d'une matrice carrée

a Définition

Soit A une matrice carrée. Si il existe une matrice A' telle que

$$A'A = AA' = I$$

on dit que A' est l'inverse de A. En général, la matrice A' est notée A^{-1}. La définition précédente est redondante. En fait, on montre que $A'A = I \Leftrightarrow AA' = I$. $\diamond$

b Unicité

Lorsqu'elle existe, la matrice inverse d'une matrice donnée est unique.

5 Produit scalaire de deux vecteurs

a Définition

Soit v et w deux vecteurs colonne $m \times 1$. Par définition le produit scalaire $v \cdot w$ est le nombre (a priori) complexe défini par

$$v \cdot w = v^\dagger w$$

b Expression

En définissant les vecteurs v et w par $v^t = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ et $w^t = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$, on a

$$v \cdot w = \overline{v_1} w_1 + \overline{v_2} w_2 + \cdots + \overline{v_m} w_m = \sum_{i=1}^{m} \overline{v_i} w_i$$

Noter que cette dernière expression généralise le produit scalaire $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ de deux vecteurs $x(x_1, x_2, x_3)$ et $y(y_1, y_2, y_3)$ de l'espace euclidien à trois dimensions.

c Propriétés

On a

$$w \cdot v = \overline{v \cdot w}$$

de sorte que $v \cdot v$ est un nombre réel. Compte tenu de l'expression de $v \cdot v$, on a $v \cdot v \geq 0$ et $v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$.

d Vecteurs orthogonaux

Les vecteurs (colonne) v et w sont dits orthogonaux si $v \cdot w = 0$.

6 Norme d'un vecteur

Par définition, la norme $\parallel v \parallel$ d'un vecteur v, défini par $v^t = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$, est donnée par

$$\parallel v \parallel = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |v_i|^2}$$

expression qui généralise la norme $\parallel x \parallel$ (ou module noté souvent $|x|$) avec $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$ d'un vecteur $x(x_1, x_2, x_3)$ de l'espace euclidien à trois dimensions. Le vecteur (colonne) v est dit normé à l'unité si $\parallel x \parallel = 1$.

7 Règles concernant la somme et le produit de matrices

a Transposée d'une somme

La transposée d'une somme de deux matrices $m \times n$ est la matrice $n \times m$ égale à la somme des transposées des deux matrices

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

b Conjuguée hermitique d'une somme

La conjuguée hermitique d'une somme de deux matrices $m \times n$ est la matrice $n \times m$ égale à la somme des conjuguées hermitiques des deux matrices

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

c Transposée d'un produit

La transposée du produit d'une matrice $m \times p$ par une matrice $p \times n$ est la matrice $n \times m$ égale au produit des transposées prises dans l'ordre inverse des deux matrices

$$(A\,B)^t = B^t\,A^t$$

d Conjuguée hermitique d'un produit

La conjuguée hermitique du produit d'une matrice $m \times p$ par une matrice $p \times n$ est la matrice $n \times m$ égale au produit des conjuguées hermitiques prises dans l'ordre inverse des deux matrices

$$(A\,B)^\dagger = B^\dagger\,A^\dagger$$

e Inverse d'un produit

L'inverse du produit d'une matrice inversible $m \times m$ par une matrice inversible $m \times m$ est la matrice $m \times m$ égale au produit des inverses pris dans l'ordre inverse des deux matrices

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

On en déduit que

$$(ABC\cdots)^{-1} = \cdots C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

sous réserve que chacune des matrices soit inversible.

III Matrices carrées particulières

1 Matrice symétrique (anti-symétrique)

Une matrice carrée A est dite symétrique si

$$A^t = A$$

Elle est anti-symétrique si

$$A^t = -A$$

Il est clair que toute matrice anti-symétrique a tous les éléments de sa diagonale égaux à zéro.

2 Matrice inversible ou régulière

Une matrice carrée inversible est dite régulière.

3 Matrice hermitienne

Une matrice carrée A est dite hermitienne ou hermitique si

$$A^\dagger = A$$

c'est-à-dire si A est égale à sa conjuguée hermitique. Il est clair que toute matrice symétrique réelle est hermitienne.

4 Matrice orthogonale

Une matrice carrée A est dite orthogonale si

$$A^t A = A A^t = I$$

5 Matrice unitaire

Une matrice carrée A est dite unitaire si

$$A^\dagger A = A A^\dagger = I$$

Il est clair que toute matrice orthogonale réelle est unitaire.

Si $x' = Ux$ et $y' = Uy$ où U est une matrice unitaire et où x et y sont des matrices de type vecteur colonne, alors $x' \cdot y' = x \cdot y$. Autrement dit, le produit scalaire est conservé par une transformation unitaire.

6 Matrice normale

Une matrice carrée A est dite normale si

$$A^\dagger A - A A^\dagger = 0$$

c'est-à-dire si $[A, A^\dagger] = 0$. Il est clair que toute matrice unitaire est normale. Il en est de même de toute matrice hermitienne.

IV Invariants d'une matrice

1 Trace d'une matrice carrée

a Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $m \times m$. On appelle trace de A le nombre (complexe en général) donné par

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

b Propriétés

P1) Soit A et B deux matrices $m \times m$. On a

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

et, plus généralement, la trace d'une somme de plusieurs matrices est égale à la somme des traces de chaque matrice.

P2) Soit A et B deux matrices $m \times m$. On a

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

de sorte que la trace d'un produit de matrices est invariant par permutations circulaires.

P3) Soit A et B deux matrices $m \times m$. La matrice B est dite semblable à la matrice A si il existe une matrice S inversible telle que

$$B = S^{-1}AS$$

L'application de la propriété P2 conduit à

$$\mathrm{tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{tr}A \Rightarrow \mathrm{tr}B = \mathrm{tr}A$$

qui montre que deux matrices semblables ont même trace.

2 Déterminant d'une matrice carrée

a Définition

-) Cas d'une matrice 1x1

Soit $A = (a)$ une matrice 1×1. On appelle déterrminant de A le nombre (complexe en général) donné par

$$\det A = (-1)^{1+1}a = a$$

-) Cas d'une matrice 2×2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice 2×2. On appelle déterrminant de A le nombre (complexe en général) donné par

$$\det A = (-1)^{1+1} a \det(d) + (-1)^{1+2} b \det(c) = ad - bc$$

-) Cas d'une matrice 3×3 (règle de Sarrus)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

une matrice 3×3. On appelle déterrminant de A le nombre (complexe en général) donné par

$$\det A = (-1)^{1+1} a \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} b \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} c \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

soit

$$\det A = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

ou

$$\det A = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

-) Cas d'une matrice $m \times m$

Les cas particuliers précédents laissent entrevoir comment définir le déterminant d'une matrice $m \times m$. Soit

$$A = (a_{ij}) \text{ avec } i \text{ et } j = 1, 2, \cdots, m$$

On appelle déterrminant de A le nombre (complexe en général) donné par

$$\det A = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k}$$

où A_{1k} est la matrice A à laquelle on a retiré la ligne 1 et la colonne k.

Dans la formule précédente, le déterminant de A est calculé suivant un développement par rapport à la première ligne. On obtient la même valeur pour $\det A$ en faisant un développement par rapport à n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.

b Propriétés d'un déterminant

P1) Le déterminant d'une matrice ne change pas de valeur quand on échange les lignes et les colonnes de cette matrice. Autrement dit, on a

$$\det A^t = \det A$$

(le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée).

P2) Le déterminant d'une matrice change de signe quand on échange deux lignes (ou deux colonnes) de cette matrice.

P3) Le déterminant d'une matrice qui a deux lignes (ou deux colonnes) identiques est nul.

P4) Si on multiplie tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'une matrice A par un scalaire $\lambda \in \mathbf{C}$, le déterminant de la matrice obtenue est égal à $\lambda \det A$, produit du scalaire par le déterminant de la matrice d'origine.

P5) Le déterminant d'une matrice qui a deux lignes (ou deux colonnes) proportionnelles est nul.

P6) Le déterminant d'une matrice ne change pas de valeur quand on ajoute ou soustrait aux éléments d'une ligne (ou d'une colonne) les éléments correspondants d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) multipliés par un même scalaire.

Ces propriétés sont très utiles pour calculer le déterminant d'une matrice.

c Quelques déterminants particuliers

-) Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.

-) Déterminant d'une matrice diagonale

Comme cas particulier du précédent, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments de la diagonale.

-) Déterminant d'une matrice unité

Comme cas particulier du précédent, le déterminant de la matrice unité I_m (en dimension $m \times m$), notée aussi simplement I, est égal à 1 :

$$\forall m \in \mathbf{N}^* : \det I = 1$$

d Propriétés

P1) Soit A et B deux matrices $m \times m$. On a

$$\det(AB) = \det A \det B$$

de sorte que le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants des matrices.

P2) Si la matrice carrée A admet un inverse A^{-1}, alors on a

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

par simple application de la propriété P1.

P3) Soit A et $B = S^{-1}AS$ deux matrices $m \times m$ semblables. L'application de la propriété P1 conduit à

$$\det(S^{-1}AS) = \det A \Rightarrow \det B = \det A$$

qui montre que deux matrices semblables ont même déterminant.

e Rang d'une matrice quelconque

-) Définition. Soit A une matrice $m \times n$. Soit B une matrice carrée $t \times t$ extraite de A avec $t \leq \min(m, n)$ (on dit que B est une sous matrice de A). Le déterminant de B est appelé un mineur d'ordre t de A. On appelle rang de la matrice A le plus grand entier r tel qu'il existe au moins un mineur d'ordre r de A non nul.

-) Cas d'une matrice carrée. Si A est une matrice carrée $m \times m$, on calcule son déterminant. Si $\det A \neq 0$, alors $r = m$. Si $\det A = 0$, alors $r \leq m - 1$ et r s'obtient en appliquant la définition ci-dessus.

-) Exemples.

V Détermination de l'inverse d'une matrice

1 Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A soit inversible est que $\det A \neq 0$. Autrement dit

- si $\det A = 0$, la matrice A n'admet pas d'inverse (elle est dite singulière)

- si $\det A \neq 0$, la matrice A admet un inverse unique (elle est dite régulière ou inversible). $\diamond$

Démonstration (partielle). L'idée de la démonstration repose sur le fait que si A^{-1} existe on a $A^{-1}A = AA^{-1} = I \Rightarrow \det A^{-1} \det A = 1 \Rightarrow \det A^{-1} \neq 0$.

2 Calcul pratique de l'inverse

a Cas d'une matrice 2×2

Si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est régulière, c'est-à-dire si $ad - bc \neq 0$, son inverse A^{-1} est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

comme on le vérifie aisément en calculant AA^{-1}.

b Cas d'une matrice $m \times m$

L'inverse A^{-1} d'une matrice régulière A est donné par ses éléments de matrice

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det A} \times \left[\text{co-facteur de l'élément } \left(A^t\right)_{ij}\right]$$

où le co-facteur (appelé aussi mineur) de l'élément $\left(A^t\right)_{ij}$ de la matrice A^t est le déterminant de la matrice déduite de A^t en supprimant sa ligne i et sa colonne j.

À titre d'exercice, l'application de la formule précédente permet de retrouver aisément le résultat correspondant à $m = 2$.

c Règle pratique

Pour déterminer A^{-1}, donc les éléments $(A^{-1})_{ij}$ d'une matrice A régulière,

-) on cacule $\det A$
-) on détermine A^t
-) on calcule le co-facteur de chaque élément $(A^t)_{ij}$
-) on applique la formule donnant les $(A^{-1})_{ij}$.

VI Systèmes linéaires

1 Transformation linéaire

a Système de m équations à n inconnues

C'est un système du type

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= x'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= x'_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= x'_m \end{aligned}$$

où les x_j sont les inconnues et les coefficients a_{ij} et x'_i sont donnés (avec $i = 1, 2, \cdots, m$ et $j = 1, 2, \cdots, n$). Sous forme condensée on a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x'_i$$

où $i = 1, 2, \cdots, m$.

b Mise sous forme matricielle

En introduisant la matrice $A = (a_{ij})$ et les vecteurs colonne x et x' définis respectivement par $x^t = (x_1 x_2 \cdots x_n)$ et $x'^t = (x'_1 x'_2 \cdots x'_m)$, on peut mettre le système précédent sous la forme matricielle

$$Ax = x'$$

La matrice A décrit une transformation linéaire qui permet de passer du vecteur x au vecteur $x' = Ax$. Le système $Ax = x'$ est appelé système de m équations linéaires à n inconnues.

Si $x' = 0$ (vecteur colonne dont tous les éléments sont nuls), le système est dit homogène ou sans second membre. Le système est dit inhomogène ou avec second membre si au moins une des composantes du vecteur colonne x' est non nulle.

2 Système 2×2

Dans le cas $m = n = 2$, le système le plus général peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} au + bv &= u' \\ cu + dv &= v' \end{aligned}$$

soit encore, sous forme matricielle, $Ax = x'$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

On a soit $\det A = 0$ soit $\det A \neq 0$.

Pour $\det A = ad - bc \neq 0$ (c'est-à-dire que A est de rang 2), le sytème est dit de Cramer. La matrice A admet un inverse A^{-1} de sorte que $x = A^{-1}x'$ soit encore

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\det A}(du' - bv') = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} u' & b \\ v' & d \end{pmatrix} \\ v &= \frac{1}{\det A}(av' - cu') = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a & u' \\ c & v' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En résumé, on a une solution unique pour u et v si $\det A \neq 0$. Cette solution est la solution triviale $u = v = 0$ si le système est homogène (c'est-à-dire pour $u' = v' = 0$).

Pour $\det A = ad - bc = 0$ (c'est-à-dire que A est de rang 1), les formules précédentes laissent entrevoir que le système n'a pas de solution si $du' - bv' \neq 0$ ($\Rightarrow av' - cu' \neq 0$) ou a une infinité de solutions si $du' - bv' = av' - cu' = 0$. Pour $\det A = 0$ et $du' - bv' = av' - cu' = 0$, on a le faisceau de solutions

$$\{u, v = -\frac{a}{b}u + \frac{u'}{b} = -\frac{c}{d}u + \frac{v'}{d}\}$$

(pour chaque valeur de u on a une valeur de v). Ce faisceau contient la solution triviale $u = v = 0$ lorsque le système est homogène (c'est-à-dire pour $u' = v' = 0$).

3 Système $m \times m$

a Théorème 1

Dans le cas $m = n$ et lorsque A est de rang m ($\det A \neq 0$), le système $Ax = x'$ est dit de Cramer et a une solution unique. Elle est donnée par

$$x = A^{-1}x'$$

qui permet de calculer x dès lors que l'inverse A^{-1} de la matrice A est connue. Les différentes composantes x_j de x sont données par les formules de Cramer

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det A_j, \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

où A_j est la matrice $m \times m$ déduite de A en remplaçant la $j$ème colonne de la matrice A par l'unique colonne du vecteur x'. Dans le cas particulier d'un système homogène ($x' = 0$), la solution unique est la solution triviale $x = 0$ (dont toutes les composantes sont nulles). $\diamond$

On observera que ce théorème généralise les résultats obtenus pour un système 2×2.

Dans le cas $m = n$ et lorsque A est de rang $r < m$ ($\det A = 0$), soit le système $Ax = x'$ n'admet pas de solution (le système est alors dit impossible) soit il admet un faisceau de solutions (cf. le cas $m = n = 2$). Ceci peut être précisé par le théorème suivant.

b Théorème 2

Dans le cas $m = n$, une condition nécessaire et suffisante pour que le système homogène $Ax = 0$ admette des solutions autres que la solution triviale (en plus de la solution triviale) est que $\det A = 0$. $\diamond$

VII Éléments propres d'une matrice

1 Définition

Soit A une matrice $m \times m$. Si il existe un vecteur x, x vecteur colonne $m \times 1$, avec $x^t \neq (00 \cdots 0)$, tel que

$$Ax = \lambda x$$

avec $\lambda \in \mathbf{C}$, on dit que x est vecteur propre de A avec la valeur propre λ.

Les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice sont appelés éléments propres de la matrice.

Si x est vecteur propre de A avec la valeur propre λ, alors αx, pour tout α dans $\mathbf{C}$, est vecteur propre de A avec la même valeur propre λ. Donc si on connaît un vecteur propre x correspondant à une valeur propre donnée λ, on peut générer une infinité de vecteurs propres linéairement dépendants αx, $\alpha \in \mathbf{C}$, correspondant à λ.

Pour une même valeur propre λ, il peut exister plusieurs vecteurs propres linéairement indépendants. Dans ce cas on dit que λ est dégénérée. Le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à une même valeur propre λ est appelé degré de dégénérescence ou multiplicité de λ. Si la multiplicité de λ est égale à 1 on dit que λ est non dégénérée, si elle est égale à 2 on dit que λ est doublement dégénérée, etc.

2 Détermination des valeurs propres

a Théorème

Une matrice $m \times m$ admet m valeurs propres qui sont les racines de l'équation

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

où I est la matrice unité $m \times m$. $\diamond$

Démonstration. On a $Ax = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda I x$, donc

$$(A - \lambda I)x = 0$$

qui est du type $Bx = 0$, correspondant à un système homogène, où $B = A - \lambda I$. Pour avoir x tel que $x^t \neq (00 \cdots 0)$, il est donc nécessaire que $\det B = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Le déterminant $\det(A - \lambda I)$ est appelé déterminant séculaire et l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ équation séculaire. Du point de vue pratique pour trouver les valeurs propres λ on résoud l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ qui donne une équation de degré m ayant m racines. (Si $m = 2$, les deux racines sont réelles ou conjuguées complexes l'une de l'autre.)

b Cas d'une matrice triangulaire

On vérifie aisément que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont égales aux éléments diagonaux de la matrice.

3 Détermination des vecteurs propres

L'obtention des vecteurs propres x correspondant à la valeur propre λ se fait en reportant la valeur obtenue pour λ dans l'équation $(A - \lambda I)x = 0$. Éventuellement, le vecteur x ou les vecteurs x linéairement indépendants correspondant à λ sont normés (à l'unité) en imposant la condition $x^\dagger x = 1$ (soit $x \cdot x = 1$).

4 Cas d'une matrice hermitienne

a Théorème 1

Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles. $\diamond$

b Théorème 2

Les vecteurs propres d'une matrice hermitienne correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. $\diamond$

Il faut bien noter que les deux théorèmes précédents s'appliquent au cas particulier d'une matrice symétrique réelle (une matrice symétrique réelle est hermitienne).

VIII Réduction d'un endomorphisme

1 Interprétation de la notion de matrice

a Opérateur linéaire et endomorphisme

Définition

Une application $\hat{A} : E_n \to F_m : \vec{a} \mapsto \hat{A}(\vec{a})$ d'un espace vectoriel (sur $\mathbf{C}$) E_n de dimension n dans un espace vectoriel (sur $\mathbf{C}$) F_m de dimension m telle que

$$\forall \alpha \in \mathbf{C},\ \forall \beta \in \mathbf{C},\ \forall \vec{a} \in E_n,\ \forall \vec{b} \in E_n : \hat{A}\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \alpha\hat{A}(\vec{a}) + \beta\hat{A}(\vec{b})$$

est appelée opérateur linéaire. Dans le cas où $m = n$, si $F_n = E_n$ on dit que $\hat{A}$ est un endomorphisme de E_n. $\diamond$

b Réalisation matricielle d'un opérateur linéaire

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

une matrice $m \times n$. Au vecteur colonne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

associons le vecteur $\vec{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de l'espace E_n. Alors la relation

$$x' = Ax$$

conduit au vecteur colonne

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

auquel nous pouvons associer le vecteur $\vec{x'}(x'_1, x'_2, \cdots, x'_m)$ de l'espace F_m. Dans le détail, nous avons

$$\left.\begin{array}{rcl} x'_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \vdots & \\ x'_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} (1)$$

En résumé, à $x' = Ax$ nous associons

$$\vec{x'} = \hat{A}(\vec{x})$$

avec $\hat{A}$ décrit par (1). Nous vérifions aisément que $\hat{A}$ est un opérateur linéaire. À la matrice A, nous associons donc l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rll} \hat{A}: & E_n & \to F_m \\ & \vec{x} & \mapsto \vec{x'} = \hat{A}(\vec{x}) \end{array}$$

Une matrice est donc la réalisation d'un opérateur linéaire (sur une base donnée).

Une matrice carrée (cas où $m = n$) correspond à un endomorphisme d'un espace vectoriel dans lui-même.

2 Diagonalisation d'une matrice

a Définition

Soit A une matrice carrée de dimension $n \times n$ et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. La matrice A est dite diagonalisable si on peut trouver une matrice régulière (ou inversible) S de dimension $n \times n$ telle que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on dit que l'on a réduit l'endomorphisme associé à la matrice A. $\diamond$

b Théorème 1

On a

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

où tr$A$ désigne la trace de la matrice A. $\diamond$

Démonstration. Faisons la démonstration dans le cas où A est diagonalisable. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(S^{-1}AS) &= \mathrm{tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned}$$

Or

$$\mathrm{tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{tr}A$$

D'où le théorème.

c Théorème 2

On a

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

où $\det A$ désigne le déterminant de la matrice A. $\diamond$

Démonstration. Faisons la démonstration dans le cas où A est diagonalisable. On a

$$\begin{aligned}\det(S^{-1}AS) &= \det\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n}\lambda_i\end{aligned}$$

Or

$$\det(S^{-1}AS) = \det A$$

D'où le théorème.

d Signification de S

Soit

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad b_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

où le i dans b_i est situé sur la ième ligne. On a alors

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix} b_i = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

que l'on peut réécrire

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix} b_i = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\\lambda_i\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \lambda_i\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

et b_i est vecteur propre de $S^{-1}AS$ avec la valeur propre λ_i puisque l'on a

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} b_i = \lambda_i b_i$$

Donc
$$S^{-1}ASb_i = \lambda_i b_i$$
soit encore
$$SS^{-1}ASb_i = S\lambda_i b_i$$
et comme $SS^{-1} = I$ est la matrice unité $n \times n$, on a
$$\begin{aligned} IASb_i &= \lambda_i Sb_i \\ ASb_i &= \lambda_i Sb_i \\ A(Sb_i) &= \lambda_i(Sb_i) \end{aligned}$$
Autrement dit Sb_i est vecteur propre de A avec la valeur propre λ_i. Or
$$Sb_i = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1i} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & \cdots & S_{2i} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & \cdots & S_{ni} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ \vdots \\ S_{ni} \end{pmatrix}$$
qui est la ième colonne de la matrice S.

Il en résulte que les colonnes de la matrice S sont des vecteurs propres de A. Ceci peut être précisé par le théorème suivant.

e Théorème 3

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable est que ses vecteurs propres soient linéairement indépendants. ◇

f Aspect pratique

Pour trouver S, on cherche les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de A. Les vecteurs propres étant définis à une constante multiplicative près, on peut prendre chaque vecteur propre sous une forme normée à l'unité. Deux cas peuvent alors se présenter :

- Si les vecteurs propres (éventuellement normés à l'unité) de A sont linéairement indépendants, la matrice S^{-1} existe et A est diagonalisable par la matrice S dont les colonnes sont les vecteurs propres de A (normés à l'unité).

- Si les vecteurs propres (éventuellement normés à l'unité) de A ne sont pas linéairement indépendants, la matrice S^{-1} n'existe pas et la matrice A n'est pas diagonalisable. (Elle peut être éventuellement triangularisable.)

Il faut bien noter que lorsque la matrice A est diagonalisable, la matrice S n'est pas unique puisque les vecteurs propres de A sont définis à une constante multiplicative près. Le fait de prendre les vecteurs propres de A sous une forme normée à l'unité limite les choix de S.

g Théorème 4

Toute matrice hermitienne est diagonalisable au moyen d'une transformation unitaire. $\diamond$

Ce théorème important s'applique au cas d'une matrice symétrique réelle (donc hermitienne).

h Exemples

Exemple 1

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbf{R}^*$$

n'est pas diagonalisable. Pour le voir, déterminons ses éléments propres.

– Valeurs propres. Elles sont données par

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & t \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

soit encore

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 0 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 0$$

Donc $\lambda = 1$ est racine double ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$).

– Vecteurs propres. L'équation

$$Ax = \lambda x$$

conduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

De sorte que

$$\left.\begin{aligned} x_1 + tx_2 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = 0 \text{ car } t \neq 0$$

d'où les vecteurs propres

$$\lambda_1 = 1 \quad : \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbf{C}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad : \quad \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \in \mathbf{C}$$

Ces deux vecteurs propres sont linéairement dépendant donc S^{-1} n'existe pas et il en résulte que A n'est pas diagonalisable. Cependant, A est triangularisable (en fait elle est déjà sous forme triangulaire).

Exemple 2

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Pour le voir, cherchons ses éléments propres.

– Valeurs propres. Elles sont données par

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

donc par

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(3-\lambda)-(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) &= 0 \\ \lambda^2-5\lambda+6-(1-\mathrm{i}^2) &= 0 \\ \lambda^2-5\lambda+4 &= 0 \end{aligned}$$

D'où les deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$.

– Vecteurs propres. L'équation

$$Ax = \lambda x$$

conduit au système homogène

$$\begin{array}{rcl} (2-\lambda)x_1 & + & (1+\mathrm{i})x_2 = 0 \\ (1-\mathrm{i})x_1 & + & (3-\lambda)x_2 = 0 \end{array}$$

Dans le cas $\lambda = 1$, on a

$$\begin{aligned} x_1+(1+\mathrm{i})x_2 &= 0 \\ (1-\mathrm{i})x_1+2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

qui sont deux équations équivalentes (il suffit de multiplier la première par $1-\mathrm{i}$ pour s'en rendre compte). Donc

$$2x_2 = -(1-\mathrm{i})x_1$$

et, comme x_1 est arbitraire, si on prend $x_1 = 2$, on obtient le vecteur propre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{i}-1 \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

Dans le cas $\lambda = 4$, on a

$$\begin{aligned} -2x_1+(1+\mathrm{i})x_2 &= 0 \\ (1-\mathrm{i})x_1-x_2 &= 0 \end{aligned}$$

qui sont deux équations équivalentes (il suffit de multiplier la deuxième par $1 + \mathrm{i}$ pour s'en rendre compte). Donc

$$x_2 = (1 - \mathrm{i})x_1$$

et, comme x_1 est arbitraire, si on prend $x_1 = 1$, on obtient le vecteur propre

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre $\lambda_2 = 4$.

Il est clair que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. En fait, ces deux vecteurs sont orthogonaux dans le sens où

$$v_1^\dagger v_2 = 0$$

que l'on vérifie aisément (et comme ils sont orthogonaux, ils sont linéairement indépendants). On peut donc prendre

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \mathrm{i} - 1 & 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

qui correspond à des vecteurs propres non normalisés à l'unité. On vérifie alors que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si l'on veut des vecteurs propres normalisés à l'unité, on procède comme suit. Dans le cas $\lambda_1 = 1$, on part de

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ (\mathrm{i} - 1)\alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbf{C}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} v_1^\dagger v_1 &= (2\bar{\alpha}, (-\mathrm{i} - 1)\bar{\alpha}) \begin{pmatrix} 2\alpha \\ (\mathrm{i} - 1)\alpha \end{pmatrix} \\ &= (4|\alpha|^2 + 2|\alpha|^2) \\ &= (6|\alpha|^2) \end{aligned}$$

La condition de normalisation $v_1^\dagger v_1 = 1$ entraîne que

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(si on prend α réel et positif). D'où le vecteur normé

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

à un facteur de phase près. Dans le cas $\lambda_2 = 4$, on part de

$$v_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ (1-\mathrm{i})\beta \end{pmatrix}$$

avec $\beta \in \mathbf{C}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} v_2^\dagger v_2 &= (\bar{\beta}, (1+\mathrm{i})\bar{\beta}) \begin{pmatrix} \beta \\ (1-\mathrm{i})\beta \end{pmatrix} \\ &= (|\beta|^2 + 2|\beta|^2) \\ &= (3|\beta|^2) \end{aligned}$$

La condition de normalisation $v_2^\dagger v_2 = 1$ entraîne que

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(si on prend β réel et positif). D'où le vecteur normé

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

à un facteur de phase près. Une matrice S qui diagonalise la matrice A peut alors être prise sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{6}} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

et on vérifie que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Mais il faut bien noter que la détermination de vecteurs propres normalisés à l'unité n'est pas un passage obligé pour déterminer S.

3 Puissance d'une matrice

La puissance A^p, avec $p \in \mathbf{N}^*$, d'une matrice carrée A est définie par

$$A^p = AA \cdots A$$

où il y a p facteurs. Il est quelquefois facile de calculer A^p lorsque A présente beaucoup de zéros mais lorsque A a une forme compliquée le calcul peut être inextricable.

Dans le cas où A est diagonalisable, le calcul de A^p peut être effectué de la manière suivante. Soit S une matrice qui diagonalise A. On a donc

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres de la matrice A de dimension $n \times n$. On en déduit que

$$S^{-1}A^pS = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\cdots(S^{-1}AS)$$

où l'on a p facteur $S^{-1}AS$. Donc la matrice $S^{-1}A^pS$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$S^{-1}A^pS = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & \\ & \lambda_2^p & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit que

$$A^p = S \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & \\ & \lambda_2^p & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^p \end{pmatrix} S^{-1}$$

Cette dernière relation fournit un moyen simple pour calculer A^p.

En conclusion A^p est connue dès lors que la matrice S et les valeurs propres de A le sont.

4 Exponentielle d'une matrice

Définition

Soit A une matrice $m \times m$. La matrice $\exp(A)$, notée aussi e^A, est la matrice $m \times m$ définie par la série

$$\exp(A) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p$$

avec par convention $A^0 = I$ (matrice unité $m \times m$). $\diamond$

5 Application aux systèmes différentiels linéaires

Cette partie sera développée en séance.

IX Exercices et problèmes

Exercice 1

On considère les matrices

$$S(Z) = \begin{pmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P(Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que la matrice

$$M_T = S(Z_3)P(Z_2)S(Z_1)$$

(appelée en électronique matrice de transfert d'une cellule en T) est donnée par

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_3}{Z_2} & -Z_1 - Z_3 - \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{pmatrix}$$

b) Vérifier que la matrice

$$M_\Pi = P(Z_3)S(Z_2)P(Z_1)$$

(appelée en électronique matrice de tranfert d'une cellule en Π) est donnée par

$$M_\Pi = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_1} & -Z_2 \\ -\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_3} - \frac{Z_2}{Z_1 Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{pmatrix}$$

c) Vérifier que

$$\det M_T = \det M_\Pi = 1$$

le plus simplement possible.

Exercice 2

Montrer que les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ont pour déterminant -1, -11 et 9, respectivement.

Exercice 3

On considère la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$$

Montrer (le plus simplement possible) que

$$\det A = (a+b+c)^3$$

Exercice 4

Soit A la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0$$

Vérifier (par simple multiplication matricielle) que A admet pour inverse la matrice 2×2

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

avec $\Delta = ad - bc$. Retrouver ce résultat au moyen de la formule donnant l'inverse d'une matrice.

Exercice 5

On considère la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8\mathrm{i} \\ 0,8\mathrm{i} & 0,6 \end{pmatrix}$$

où i est l'imaginaire pur ($\mathrm{i}^2 = -1$). Vérifier que la matrice U est unitaire. Quel est l'inverse U^{-1} de U ?

Exercice 6

Refaire l'exercice 5 en remplaçant U par

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad aa^* + bb^* = 1$$

où $a \in \mathbf{C}$ et $b \in \mathbf{C}$ (N.B. : l'étoile désigne ici la conjugaison complexe de sorte que $aa^* + bb^* = 1$ s'écrit aussi $|a|^2 + |b|^2 = 1$).

Exercice 7

On considère la matrice

$$T(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbf{R}$$

a) Montrer que

$$T(a_1)\, T(a_2) = T(a_1 + a_2)$$

b) En déduire que $T(a)$ admet une matrice inverse $T(a)^{-1}$ donnée par

$$T(a)^{-1} = T(-a)$$

c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N} : T(a)^n = T(na)$$

où l'on utilise la notation $A^n = AA \cdots A$ avec n facteurs.

d) Montrer que

$$\det T(a) = 1$$

e) Refaire les questions a) à d) en remplaçant $T(a)$ par

$$S(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

On considère la matrice

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varphi \in \mathbf{R}$$

a) Montrer que

$$M(\varphi_1)\, M(\varphi_2) = M(\varphi_1 + \varphi_2)$$

b) Montrer que le commutateur

$$[M(\varphi_1), M(\varphi_2)] = M(\varphi_1)\, M(\varphi_2) - M(\varphi_2)\, M(\varphi_1)$$

de $M(\varphi_1)$ et $M(\varphi_2)$ est nul.

c) Montrer que $M(\varphi)$ admet une matrice inverse $M(\varphi)^{-1}$ donnée par

$$M(\varphi)^{-1} = M(-\varphi)$$

d) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N} : M(\varphi)^n = M(n\varphi)$$

e) Montrer que

$$\det M(\varphi) = 1$$

f) Refaire les questions a) à e) en remplaçant $M(\varphi)$ par la matrice

$$N(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

On considère les matrices

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice $M(\varphi)$ est orthogonale. En déduire qu'elle admet un inverse. Quel est l'inverse $M(\varphi)^{-1}$ de $M(\varphi)$?

b) Calculer le produit matriciel

$$B = M(\varphi)^{-1} A M(\varphi)$$

c) Montrer que tr$B$ est indépendante de φ.

d) Montrer que $\det B$ est indépendant de φ.

e) Dans le cas $c = b$, à quelle condition sur φ la matrice B est-elle diagonale ?

Exercice 10

Montrer (par simple produit matriciel) que la matrice triangulaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admet pour inverse la matrice triangulaire

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrouver ce résultat au moyen de la formule donnant l'inverse d'une matrice.

Exercice 11

Montrer (par simple produit matriciel) que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

admet pour inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -7 & 11 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Retrouver ce résultat au moyen de la formule donnant l'inverse d'une matrice.

Exercice 12

On considère la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de A.
b) La matrice A admet-elle une matrice inverse ?
c) Montrer que l'inverse A^{-1} de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Résoudre par substitution le système (de Cramer) de deux équations à deux inconnues x et y

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

avec $ad - bc \neq 0$. Retrouver le résultat ainsi obtenu au moyen du calcul matriciel.

Exercice 14

Montrer que le système inhomogène

$$x - y + 3z = 6, \quad x + 3y - 3z = -4, \quad 5x + 3y + 3z = 11$$

n'admet pas de solution (on a un système impossible).

Exercice 15

Montrer que le système inhomogène

$$x - y + 3z = 6, \quad 3x - 2y + 7z = 14, \quad x + 3y - 3z = -4$$

admet la solution unique $x = -1, y = 2, z = 3$.

Exercice 16

Montrer que le système inhomogène

$$x - y + z = 1, \quad 2x + z = 2, \quad -2y + z = a$$

(où a est une constante) n'admet pas de solution pour $a \neq 0$. Montrer que pour $a = 0$ il admet le faisceau de solutions (infinité de solutions)

$$x = 1 - \frac{z}{2}, \quad y = \frac{z}{2}, \quad z = \text{arbitraire}$$

Exercice 17

Le système homogène

$$3x - 2y = 0, \quad -12x + 8y = 0$$

admet-il une solution non triviale (c'est-à-dire $x \neq 0$ et $y \neq 0$) ?

Exercice 18

Le système homogène

$$x + 2y + 3z = 0, \quad 4x + 5y + 6z = 0, \quad 7x + 8y + 9z = 0$$

admet-il une solution non triviale ?

Exercice 19

Le système homogène

$$x + 3y + 3z = 0, \quad x - y + z = 0, \quad 2x + y + 3z = 0$$

admet-il une solution non triviale ?

Exercice 20

Montrer que le système homogène

$$x - y + 3z = 0, \quad 3x - 2y + 7z = 0, \quad x + 3y - 3z = 0$$

admet seulement la solution triviale $x = y = z = 0$ (solution unique).

Exercice 21

Montrer que le système homogène

$$x - y + 3z = 0, \quad x + 3y - 3z = 0, \quad 5x + 3y + 3z = 0$$

admet le faisceau de solutions (inifinité de solutions)

$$x = -\frac{3}{2}z, \quad y = \frac{3}{2}z, \quad z = \text{arbitraire}$$

(la solution triviale $x = y = z = 0$ est un cas particulier).

Exercice 22

On considère le système linéaire

$$x + 2y + 3z = a, \quad 4x + 5y + 6z = b, \quad 7x + 8y + 9z = c$$

avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Le système admet-il des solutions pour $(a = 6, b = 15, c = 24)$ et pour $(a = 2, b = 5, c = 8)$? A-t-on une solution du système pour $(a = 2, b = 5, c = 9)$? Dans le cas général, montrer que a, b et c doivent vérifier la relation

$$a - 2b + c = 0$$

pour que le système proposé admette des solutions.

Exercice 23

On considère la matrice 2×2

$$T(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbf{R}$$

et le vecteur colonne 2×1

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbf{R} \quad y \in \mathbf{R}$$

a) Déterminer le vecteur colonne 2×1

$$u = T(a)v$$

b) Dans le cas où $y = 0$, vérifier que v est vecteur propre de $T(a)$ avec la valeur propre $\lambda = 1$.

Exercice 24

Déterminer les valeurs propres (dans $\mathbf{C}$) de la matrice 2×2

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

où $\varphi \in \mathbf{R}$.

Exercice 25

Montrer que les valeurs propres de la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 3$.

Exercice 26

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que

$$\det A = 0$$

b) Déterminer les valeurs propres de A.

Exercice 27

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

admet pour éléments propres

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 & = -1, & u_1 & \mid \ \tilde{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ \lambda_2 & = 0, & u_2 & \mid \ \tilde{u}_2 = (0, 0, 1) \\ \lambda_3 & = 1, & u_3 & \mid \ \tilde{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{array}$$

où $\tilde{u}$ désigne le vecteur ligne transposé du vecteur colonne u. Vérifier que les résultats obtenus sont compatibles avec $\det A = 0$ et $\mathrm{tr} A = 0$.

Exercice 28

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

admet pour éléments propres

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 & = -1, & u_1 & \mid \ \tilde{u}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \lambda_2 & = 1, & u_2 & \mid \ \tilde{u}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \lambda_3 & = 1, & u_3 & \mid \ \tilde{u}_3 = (1, 0, 0) \end{array}$$

où $\tilde{u}$ désigne le vecteur ligne transposé du vecteur colonne u. Vérifier que les résultats obtenus sont compatibles avec $\det A = -1$ et $\mathrm{tr} A = 1$.

Exercice 29

Montrer que la matrice triangulaire

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

admet pour valeurs propres 0, -2, -6, -12 et pour vecteurs propres correspondants les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Exercice 30

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$. Soit la matrice

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et justifier le résultat obtenu.

Exercice 31

Montrer que les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$$

(où i est l'imaginaire pur) sont

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{i}-1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

On considère la matrice

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{6}} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Vérifier que

$$S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et justifier le résultat obtenu. Montrer que M est hermitienne et que S est unitaire.

Exercice 32

Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8\mathrm{i} \\ 0,8\mathrm{i} & 0,6 \end{pmatrix}$$

est unitaire. Trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Vérifier que les valeurs propres obtenues ont un module égal à 1. Montrer que la matrice

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

est unitaire. Vérifier que

$$S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 0,6+0,8\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0,6-0,8\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

et justifier le résultat obtenu.

Exercice 33

On considère les trois matrices

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}a & 0 \\ -\mathrm{i}a & 0 & \mathrm{i}a \\ 0 & -\mathrm{i}a & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Montrer que ces matrices sont hermitiennes. Calculer les commutateurs

$$X_1 = [L_2, L_3]\,, \quad X_2 = [L_3, L_1]\,, \quad X_3 = [L_1, L_2]$$

en termes de combinaisons linéaires des matrices L_1, L_2 et L_3. Montrer que la matrice

$$C = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

commute avec chacune des matrices L_1, L_2 et L_3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices C et L_3. Vérifier que C et L_3 admettent les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres communs.

Chapitre 7

Annales

Épreuves d'examen

On trouvera ci-après quelques annales concernant les examens à Lyon durant les années 2001-2005.

CNAM UV B113 - Enseignant : M. Kibler
Année 2001/2002 - Session de juin 2002 - Durée 3h

Les exercices et le problème peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Cependant l'exercice 1 et le problème forment un tout qu'il est préférable de traiter dans l'ordre des questions de 1 à 11.

Exercice 1 (3 points)

1) Dire (sans démonstration) si la série numérique

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est convergente ou divergente.

2) Les séries numériques

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-2n} \quad \text{et} \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-n}$$

sont-elles convergentes ?

3) Etudier la convergence de la série de fonctions

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\pi t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi t}$$

où $t \in \mathbf{R}$.

Problème (8 points)

4) Déterminer la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f_2] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[f_2](s)$ de la fonction $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f_2(t)$ définie par

$$f_2(t) = 1 \quad \text{si} \quad 0 < t < 1; \quad -1 \quad \text{si} \quad 1 < t < 2; \quad 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \quad \text{ou} \quad \text{si} \quad t > 2$$

Quelle est la valeur de $\mathcal{L}[f_2](0)$?

5) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par

$$v_n = \mathcal{L}[f_2](n)$$

Cette suite est-elle convergente ? La série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

est-elle convergente ?

6) Déterminer la transformée de Fourier $\mathcal{F}[f_2] : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \nu \mapsto \mathcal{F}[f_2](\nu)$ de la fonction f_2. Quelle est la valeur de $\mathcal{F}[f_2](0)$?

7) La fonction f_2 appartient-elle à $L^2(\mathbf{R}, dt)$? Peut-on lui appliquer le théorème de Parseval et Plancherel ?

8) Déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,(1 - \cos 2\pi x)^2 \, dx$$

(On pourra utiliser l'identité

$$(1 + \mathrm{e}^{+4\pi \mathrm{i}\nu} - 2\mathrm{e}^{+2\pi \mathrm{i}\nu})(1 + \mathrm{e}^{-4\pi \mathrm{i}\nu} - 2\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\nu}) = 4(1 - \cos 2\pi\nu)^2$$

valable pour tout ν dans $\mathbf{R}$.)

9) On considère la fonction périodique $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f(t)$ de période $T = 2$ et ayant f_2 pour fonction génératrice. Déterminer la série de Fourier

$$\mathrm{SF}[f](t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n[f] \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi t}$$

(où les $c_n[f]$ sont les coefficients de Fourier généralisés de la fonction f). Étudier la convergence de $\mathrm{SF}[f](t)$. Cette série est-elle dérivable terme à terme ?

10) Déterminer la somme de la série

$$U = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

11) Mettre la série de Fourier $\mathrm{SF}[f](t)$ sous la forme d'un développement en sinus et cosinus. Que vaut l'expression obtenue pour $t = n \in \mathbf{Z}$?

Exercice 2 (4 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} + y = H(t)(\cos t - \sin t)$$

où H est la fonction de Heaviside et où $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto y(t)$ est une fonction telle que $y(t) = 0$ si $t < 0$ et $y \in C^0$ sauf en $t = 0$ où elle présente un saut égal à 1.

On rappelle que les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto H(t)\cos t$ et $t \mapsto H(t)\sin t$ sont données par

$$H(t)\cos t \,]\, \frac{s}{s^2+1} \quad \text{et} \quad H(t)\sin t \,]\, \frac{1}{s^2+1}$$

avec $\Re s > 0$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} c(x) & s(x) \\ s(x) & c(x) \end{pmatrix}$$

où les fonctions c et s sont définies par

$$c : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto c(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad s : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto s(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$

1) Calculer la trace $\mathrm{tr}A(x)$ et le déterminant $\det A(x)$ de la matrice $A(x)$.
2) Calculer les valeurs propres de $A(x)$.
3) Déterminer les vecteurs propres de $A(x)$.
4) Déterminer la matrice

$$B(x, y) = A(x)\, A(y) - A(x + y)$$

où $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$.

5) Montrer que l'inverse de la matrice $A(x)$ est une matrice $A(y)$ où y est une fonction simple de x.
6) **Question facultative** : donner une matrice qui diagonalise $A(x)$.

CNAM UV113 - Session de juin 2002 - Éléments de correction

Exercice 1

1) A diverge.
2) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\begin{cases}\to \frac{1}{\mathrm{e}^2} < 1 \text{ pour } B\\ \to \frac{1}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pour } C\end{cases}$$

pour $n \to \infty$, donc B et C convergent.
3) Il est clair que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\mathrm{e}^{in2\pi t}$$

est du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2n(at+b)}$$

avec

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2n+1} > 0 \text{ et } x_n \to 0 \text{ pour } n \to \infty \\ \\ b = 0, \quad a = \pi \Rightarrow \sin at = 0 \text{ pour } t = k \in \mathbf{Z}\end{cases}$$

et le critère d'Abel $\Rightarrow F$ converge pp sauf en $t = k \in \mathbf{Z}$.

Problème

4) Par calcul direct de l'intégrale de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}[f_2](s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-st}dt - \int_1^2 \mathrm{e}^{-st}dt \Rightarrow \mathcal{L}[f_2](s) = \frac{1}{s}(1 + \mathrm{e}^{-2s} - 2\mathrm{e}^{-s})$$

et

$$\mathcal{L}[f_2](0) = 0$$

5) On obtient

$$v_n = \frac{1}{n}\left(1 + \mathrm{e}^{-2n} - 2\mathrm{e}^{-n}\right) \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty$$

de sorte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{Z}^*}$ est convergente ; par contre, S diverge.
6) Ici on a

$$\mathcal{F}[f_2](\nu) = \mathcal{L}[f_2](\mathrm{i}2\pi\nu)$$

donc

$$\mathcal{F}[f_2](\nu) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi\nu}\left(1 + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\pi\nu} - 2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[f_2](0) = 0$$

7) On a $f_2 \in L^2(\mathbf{R}, dt)$ car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)|^2 \, dt = 2$$

et on peut appliquer le théorème de Parseval et Plancherel.
8) Le théorème de Parseval et Plancherel donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}[f_2](\nu)|^2 \, d\nu \Rightarrow I = 2\pi^2$$

9) On utilise la formule

$$c_n[f] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f_2]\left(\frac{n}{2}\right)$$

qui conduit à

$$c_n[f] = \frac{1}{\mathrm{i}\pi n}[1-(-1)^n] \text{ pour } n \neq 0 \text{ et } c_0[f] = 0$$

de sorte que

$$\mathrm{SF}[f](t) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}^*}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi t} = \frac{2}{\mathrm{i}\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p+1)\pi t}$$

et $\mathrm{SF}[f](t)$ converge presque partout sauf en $t = k \in \mathbf{Z}$. La série n'est pas dérivable terme à terme.
10) Le théorème de Bessel et Parseval donne

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n[f]|^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 |f_2(t)|^2 dt \Rightarrow U = \frac{\pi^2}{4}$$

11) Le passage aux coefficients a_n et b_n est immédiat

$$a_n = c_n + c_{-n} = 0, \;\; b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]$$

avec $n \in \mathbf{N}^*$, d'où

$$\mathrm{SF}[f](t) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\pi t$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{Z} : \mathrm{SF}[f](n) = 0$$

Exercice 2

Par TL on a

$$\begin{array}{rcl} L[\frac{dy}{dt}](s) & + & \mathcal{L}[y](s) = L[H(t)\cos t](s) - L[H(t)\sin t](s) \\ L[\frac{dy}{dt}](s) & = & s\mathcal{L}[y](s) - 1 \Rightarrow (s+1)\mathcal{L}[y](s) = \frac{s(s+1)}{s^2+1} \\ \Rightarrow \mathcal{L}[y](s) & = & \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow y(t) = H(t)\cos t \end{array}$$

Exercice 3

1) On obtient aisément

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}\, A(x) & = & 2c(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \\ \det A(x) & = & (c(x))^2 - (s(x))^2 = 1 \end{array}$$

2) L'équation $A(x)u = \lambda u$ conduit à

$$\lambda = \lambda_+ = \mathrm{e}^x, \quad \lambda = \lambda_- = \mathrm{e}^{-x}$$

3) On a

$$\lambda = \lambda_+ : u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda = \lambda_- : u_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4) On vérifie que

$$A(x)A(y) = A(x+y) \Rightarrow B(x,y) = 0$$

5) Si $y = -x$, on a $A(x)A(-x) - A(0) = 0$. Or

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que

$$A(x)^{-1} = A(-x)$$

6) Les vecteurs u_+ et u_- conduisent à

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

pour matrice qui diagonalise $A(x)$.

CNAM UV B113 - Enseignant : M. Kibler
Année 2001/2002 - Session de septembre 2002 - Durée 3h

Les exercices et le problème peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Cependant l'exercice 2 et le problème forment un tout qu'il est préférable de traiter dans l'ordre des questions de 5 à 14.

Exercice 1 (5 points)
On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix}$$

où $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
1) Calculer la trace tr$M$ et le déterminant det$M$ de la matrice M.
2) Déterminer l'inverse de la matrice M.
3) Calculer les valeurs propres de M.
4) Déterminer les vecteurs propres de M.

Exercice 2 (3 points)
5) La série numérique

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est-elle convergente ? Répondre par oui ou par non.
6) Étudier la convergence des séries numériques

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-2n} \quad \text{et} \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-n}$$

au moyen du critère de d'Alembert.
7) Étudier la convergence de la série de fonctions

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\pi t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi t}, \quad t \in \mathbf{R}$$

au moyen du critère d'Abel.

Problème (8 points)
8) Déterminer la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f_2] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[f_2](s)$ de la fonction $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f_2(t)$ définie par

$$f_2(t) = 2 \quad \text{si} \quad 0 < t < 1; \quad 1 \quad \text{si} \quad 1 < t < 2; \quad 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \quad \text{ou} \quad \text{si} \quad t > 2$$

Quelle est la valeur de $\mathcal{L}[f_2](0)$?
9) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par

$$v_n = \mathcal{L}[f_2](n)$$

Cette suite est-elle convergente ? La série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

est-elle convergente ?

10) Obtenir la transformée de Fourier $\mathcal{F}[f_2] : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \nu \mapsto \mathcal{F}[f_2](\nu)$ de la fonction f_2 à partir de sa transformée de Laplace. Quelle est la valeur de $\mathcal{F}[f_2](0)$?

11) Déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} (1 - \cos 2\pi x) (5 + 4 \cos 2\pi x) \, dx$$

par application du théorème de Parseval et Plancherel. On pourra utiliser l'égalité

$$|\mathcal{F}[f_2](\nu)|^2 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos 2\pi\nu) (5 + 4 \cos 2\pi\nu)$$

sans la démontrer.

12) On considère la fonction périodique $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f(t)$ de période $T = 2$ et ayant f_2 pour fonction génératrice. Déterminer la série de Fourier

$$\mathrm{SF}[f](t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n[f] \, \mathrm{e}^{in\pi t}$$

où les $c_n[f]$ sont les coefficients de Fourier généralisés de la fonction f, coefficients que l'on pourra déduire de la transformée de Fourier de la fonction f_2. Étudier la convergence de $\mathrm{SF}[f](t)$.

13) Mettre la série de Fourier $\mathrm{SF}[f](t)$ sous la forme d'un développement en sinus et cosinus. Que vaut l'expression obtenue pour $t = n \in \mathbf{Z}$?

14) Déterminer la somme de la série

$$T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

par application du théorème de Bessel et Parseval.

Exercice 3 (4 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} y = \frac{5}{4} H(t) \cos t$$

où H est la fonction de Heaviside et où $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto y(t)$ est une fonction telle que $y(t) = 0$ si $t < 0$ et $y \in C^0$ sauf en $t = 0$ où elle présente un saut égal à $\frac{1}{2}$. On déterminera au préalable la transformée de Laplace $\mathcal{L}[y] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[y](s)$ de la fonction y.

On rappelle que les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto H(t)\cos t$ et $t \mapsto H(t)\sin t$ sont données par

$$H(t)\cos t\,]\,\frac{s}{s^2+1} \quad \text{et} \quad H(t)\sin t\,]\,\frac{1}{s^2+1}$$

avec $\Re s > 0$. On pourra utiliser l'identité

$$s^2 + 1 + \frac{5}{2}s = (s + \frac{1}{2})(s+2)$$

pour simplifier l'expression de $\mathcal{L}[y](s)$.

CNAM UV 113 - Enseignant : M. Kibler
Année 2002/2003 - Session de juin 2003 - Durée 3h

Documents non autorisés : manuels. Les notes de cours, les notes de TD et les documents remis en cours d'année par l'enseignant sont autorisés. Les calculettes sont autorisées.

Beaucoup de questions sont indépendantes les unes des autres et peuvent être abordées dans un ordre quelconque. Il est cependant recommandé de traiter chaque problème dans l'ordre naturel des questions.

Problème 1 (8 points)

1) On rappelle que e^z, avec $z \in \mathbf{C}$, est défini par

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

En prenant $z = \mathrm{i}t$, où i est l'imaginaire pur, avec $t \in \mathbf{R}$ et en utilisant la formule d'Euler, retrouver les développements en série entière de $\cos t$ et $\sin t$.

2) Quel est le rayon de convergence des séries obtenues ?

3) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner une matrice S qui réduit l'endomorphisme associé à A.

4) Calculer A^2 et A^3 et plus généralement A^{2k} et A^{2k+1} où $k \in \mathbf{N}^*$.

5) On considère la matrice

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}tA)^n}{n!}$$

avec $t \in \mathbf{R}$. Autrement dit

$$B(t) = I + \mathrm{i}\frac{t}{1!}A - \frac{t^2}{2!}A^2 - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots$$

où I désigne la matrice unité en dimension 2. Donner l'expression de $B(t)$ en termes de $\cos t$ et de $\sin t$.

6) Calculer le produit $B(t_1)B(t_2)$ en terme de $B(t_1 + t_2)$ avec $t_1 \in \mathbf{R}$ et $t_2 \in \mathbf{R}$. En déduire l'inverse de $B(t)$.

7) Montrer que les vecteurs propres de A sont également vecteurs propres de $B(t)$.

8) En déduire les valeurs propres de la matrice $B(t)$.

Problème 2 (12 points)

1) On considère la fonction $f_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f_0(t)$ définie par

$$f_0(t) = \begin{cases} \sin \pi t \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \text{ ou } t \geq 1 \end{cases}$$

Déterminer la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f_0] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[f_0](s)$ de f_0.

2) Peut-on en déduire la transformée de Fourier $\mathcal{F}[f_0] : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \nu \mapsto \mathcal{F}[f_0](\nu)$ de f_0 ?

3) On considère la fonction $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f_n(t)$ définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} \sin \pi(t-n) \text{ si } n \leq t \leq n+1 \\ \\ 0 \text{ si } t \leq n \text{ ou } t \geq n+1 \end{cases}$$

avec $n \in \mathbf{N}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle convergente ?

4) Exprimer la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f_n] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[f_n](s)$ de f_n en terme de celle de f_0. En déduire l'expression de $\mathcal{L}[f_n](s)$.

5) Déterminer la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[f](s)$ de la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f(t)$ définie par la série

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$$

On obtiendra $\mathcal{L}[f](s)$ sous forme d'une série dont on calculera la somme. Pour quelles valeurs de s la série obtenue converge-t-elle ?

6) Tracer le graphe de la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto g(t)$ définie par

$$g(t) = H(t)|\sin \pi t|$$

où H est la fonction de Heaviside. Montrer que l'on a l'égalité

$$g = f \quad \text{presque partout}$$

En déduire la transformée de Laplace de la fonction g.

7) Trouver la transformée de Laplace $\mathcal{L}[x] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[x](s)$ de la fonction $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto x(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \pi^2 x = 0 \quad \text{presque partout}$$

et satisfaisant les conditions

$x(t) = 0$ si $t < 0$

$x \in C^0$

$\frac{dx}{dt} \in C^0$ sauf au point $t_0 = 0$ où elle présente un saut égal à π et aux points $t_n = n$, avec $n \in \mathbf{N}^*$, où elle présente un saut égal à 2π.

En déduire la fonction x.

CNAM UV113 - Session de juin 2003 - Éléments de correction

Problème 1

1) On a

$$\begin{array}{rcl} e^{it} & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^2}{n!} \\ \cos t + i \sin t & = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos t + i \sin t & = & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{array}$$

et par identification, on obtient

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} t^{2k}, \quad \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

2) On obtient ainsi des séries entières du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ avec pour rayon de convergence R tel que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

L'application aux séries $\cos t$ et $\sin t$ conduit à un rayon de convergence infini dans les deux cas.
3) La résolution de

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

conduit aux valeurs propres $\lambda_1 = +1$ et $\lambda_2 = -1$. Les systèmes

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda = \pm 1$$

conduisent aux vecteur propres

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad x = 1, \quad \text{pour} \quad \lambda_1 = +1$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad x = 1, \quad \text{pour} \quad \lambda_2 = -1$$

Ces deux vecteurs propres sont linéairement indépendants. La matrice A est donc diagonalisable. Une matrice S qui réduit l'endomorphisme associé à A est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

4) On obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \ \text{ et } \ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = A$$

en faisant les produits $A^2 = AA$ et $A^3 = A^2 A$. Plus généralement, on a

$$\forall k \in \mathbf{N}^* : A^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \ \text{ et } \ A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = A$$

NB : $\mathbf{1}$ désigne la matrice unité 2×2.
5) En développant $B(t)$, on obtient

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots & \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \\ \\ -\frac{t}{1!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

6) En faisant le produit $B(t_1)B(t_2)$ et en utilisant les formules d'addition pour $\cos(t_1 + t_2)$ et $\sin(t_1 + t_2)$, on obtient

$$B(t_1)B(t_2) = B(t_1 + t_2)$$

et dans le cas $t_1 = -t_2 = t$, on a

$$B(t)B(-t) = B(0) = \mathbf{1}$$

de sorte que

$$B(t)^{-1} = B(-t)$$

7) et **8)** On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} B(t)\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \\ B(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si bien que la matrice $B(t)$ a les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ avec les valeurs propres $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, respectivement.

Problème 2

1) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_0](s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\ &= \int_0^1 \sin \pi t\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}\mathrm{e}^{-st} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t}\mathrm{e}^{-st}\right)\,dt\end{aligned}$$

Le calcul des deux intégrales conduit à

$$\mathcal{L}[f_0](s) = \frac{\pi}{\pi^2+s^2}(1+\mathrm{e}^{-s}), \quad s \neq \pm\mathrm{i}\pi$$

En faisant $s = \pm\mathrm{i}\pi$ dans les deux intégrales on obtient

$$\mathcal{L}[f_0](\pm\mathrm{i}\pi) = \pm\frac{1}{2\mathrm{i}}$$

résultat que l'on retrouve en levant l'indétermination de la forme "$\frac{0}{0}$" associée à $s = \pm\mathrm{i}\pi$.

2) La fonction f_0 est bornée et à support borné. Elle admet donc une TL pour tout $s \in \mathbf{C}$. On peut donc appliquer la formule

$$\mathcal{F}[f_0](\nu) = \mathcal{L}[f_0](\mathrm{i}2\pi\nu)$$

avec $\nu \in \mathbf{R}$. Cela donne

$$\forall \nu \in \mathbf{R}^* : \mathcal{F}[f_0](\nu) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-4\nu^2}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu}\right)$$

et pour $\nu = \pm\frac{1}{2}$, on a

$$\mathcal{F}[f_0]\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{2\mathrm{i}}$$

3) On a

$$f_n(t) = \sin \pi(t-n) = (-1)^n \sin \pi t$$

et pour $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \left\langle \begin{array}{ll} +\sin \pi t & \text{si } n \text{ pair} \\ -\sin \pi t & \text{si } n \text{ impair} \end{array}\right.$$

Il en résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge sauf pour $t \in \mathbf{Z}$ auquel cas la suite converge vers 0.

4) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_n](s) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt \\ &= \textstyle\int_n^{n+1} \sin \pi(t-n)\mathrm{e}^{-st}\,dt\end{aligned}$$

En posant $\tau = t - n$, on aura

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_n](s) &= \int_0^1 \sin \pi\tau \ \mathrm{e}^{-s(\tau+n)}\ d\tau \\ &= \mathrm{e}^{-sn} \int_0^1 \sin \pi\tau \ \mathrm{e}^{-s\tau}\ d\tau\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f_n](s) = \mathrm{e}^{-sn}\mathcal{L}[f_0](s)$$

5) On a (par linéarité)

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[f_n](s)$$

sous réserve de convergence. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sn}\mathcal{L}[f_0](s) \\ &= \mathcal{L}[f_0](s) \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sn}\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sn} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s}} \quad \text{si} \quad \Re(s) > 0$$

et finalement

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s}}\mathcal{L}[f_0](s), \quad \Re(s) > 0$$

6) Si on trace les graphes de f et g, on voit aisément que $f = g$. (En fait, $f = g$ presque partout car g n'est pas définie pour $t = 0$.)
7) Comme x est causale ($x(t) = 0$ si $t < 0$), on peut procéder par transformation de Laplace. En prenant la TL de l'équation différentielle et en appliquant le théorème des sauts, on a

$$L\left[\tfrac{d^2x}{dt^2}\right](s) = \underbrace{sL\left[\frac{dx}{dt}\right](s)}_{s^2\mathcal{L}[x](s)} - \pi - 2\pi \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-sn}}_{\frac{\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-s}}}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}s^2\mathcal{L}[x](s) &- \pi - 2\pi\tfrac{\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-s}} + \pi^2\mathcal{L}[x](s) = 0 \\ \Rightarrow \mathcal{L}[x](s) &= \tfrac{1}{s^2+\pi^2}\pi\left(1 + 2\tfrac{\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-s}}\right) \\ \mathcal{L}[x](s) &= \tfrac{\pi}{s^2+\pi^2}(1+\mathrm{e}^{-s})\tfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-s}}, \quad \Re(s) > 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}[f](s)$ et finalement $x = f = g$ pp.

CNAM UV 113 - Enseignant : M. Kibler
Année 2002/2003 - Session de septembre 2003 - Durée 3 heures

Les notes de cours, les notes de TD et les documents remis en cours d'année par l'enseignant sont autorisés. Les calculettes sont autorisées. Les manuels ne sont pas autorisés.

Problème 1 (8 points)

1) On rappelle que

$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$$

soit encore

$$\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

avec $t \in \mathbf{R}$. En déduire les développements en série entière de

$$\cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

et

$$\sinh t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

2) Quels sont les rayons de convergence des séries obtenues ?

3) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2. En déduire l'expression de A^{2n} et A^{2n+1} pour $n \in \mathbf{N}$. (On rappelle que $A^0 = I$ où I est la matrice unité 2×2.)

4) On considère la matrice

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

soit encore

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} A^{2n+1}$$

Exprimer les coefficients de B en fonction de $\cosh t$ et $\sinh t$.

5) Calculer le déterminant et la trace de la matrice B. En déduire les valeurs propres b_1 et b_2 de B.

6) Calculer les valeurs propres a_1 et a_2 de la matrice A.

7) Calculer les vecteurs propres v_1 et v_2 correspondant à a_1 et a_2, respectivement. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner une matrice W qui réduit l'endomorphisme associé à A.

8) Montrer que les matrices A et B admettent les mêmes vecteurs propres.

Problème 2 (9 points)

1) La série

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

est-elle convergente ?

2) On considère la série

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cos \frac{2\pi}{T}(2k+1)t$$

où t est une variable réelle et T un paramètre strictement positif fixé.

a) Cette série converge-t-elle pour $t = (2p+1)\frac{T}{4}$ avec $p \in \mathbf{Z}$?

b) Cette série converge-t-elle pour $t = (2p+1)\frac{T}{2}$ avec $p \in \mathbf{Z}$?

c) Cette série converge-t-elle pour $t = pT$ avec $p \in \mathbf{Z}$?

d) Étudier la convergence de $V(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

3) Soit f_T la fonction définie par

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{T}{4} \text{ ou } \frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{T}{2} \text{ si } -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ 0 \text{ si } t \leq -\frac{T}{2} \text{ ou } t \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

La fonction f_T admet-elle une transformée de Laplace ? une transformée de Fourier ?

4) Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f_T] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[f_T](s)$ de f_T. Quelle est la valeur de $\mathcal{L}[f_T](0)$?

5) Déterminer la transformée de Fourier $\mathcal{F}[f_T] : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \nu \mapsto \mathcal{F}[f_T](\nu)$ de f_T.

6) On considère la fonction périodique $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f(t)$, de période T, ayant f_T pour fonction génératrice sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Déterminer les coefficients de Fourier généralisés $c_n[f]$ de f ; on distinguera trois cas : $n = 0$, $n = 2k$ avec $k \in \mathbf{Z}^*$ et $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

7) En déduire les coefficients de Fourier $a_m[f]$ et $b_m[f]$ de f ainsi que l'expression $\beta(t)$ de la série de Fourier de f en termes de cosinus et de sinus. Quelle est la valeur de $\beta(t)$ pour $t = (2p+1)\frac{T}{4}$ avec $p \in \mathbf{Z}$?

8) Déterminer la valeur de

$$a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n[f]|^2$$

En utilisant le fait que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n[f]|^2 = |c_0[f]|^2 + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} |c_{2k}[f]|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{2k+1}[f]|^2$$

trouver la somme de la série

$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Exercice (3 points)
Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad \text{presque partout}$$

où la fonction $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto x(t)$ satisfait les conditions :
*) $x(t) = 0$ si $t < 0$
*) $\frac{dx}{dt} \in C^0$
*) $x \in C^0$ sauf au point $t_0 = 0$ où elle présente un saut égal à 2.

CNAM UV 113 - Enseignant : M. Kibler
Année 2003/2004 - Session de février 2004 - Durée 3 heures

Les notes de cours, les notes de TD et les documents remis par l'enseignant sont autorisés. Les manuels et calculettes ne sont pas autorisés. Les questions peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso).

Partie A (2 points)

1) On considère les fonctions $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto \gamma(t)$ et $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto \sigma(t)$ définies par les séries

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} t^k \quad \text{et} \quad \sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} t^k$$

Quels sont les rayons de convergence des séries $\gamma(t)$ et $\sigma(t)$?

2) On définit les fonctions $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$c(x) = \gamma(x^2) \quad \text{et} \quad s(x) = x\, \sigma(x^2)$$

Donner $c(x)$ et $s(x)$ sous forme de deux séries entières. Connaissez-vous la somme de chacune des séries obtenues ?

Partie B (8 points)

1) On considère la matrice

$$X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

où $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$. Calculer $\mathrm{tr}X$ et $\det X$.

2) Calculer le produit

$$P = X^t\, X$$

3) Déterminer l'inverse X^{-1} de X.

4) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de X.

5) La matrice X est-elle diagonalisable ?

6) On considère la matrice

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

où i est l'imaginaire pur. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de Y ?

7) Soit la matrice

$$Z = \mathrm{i}\, Y$$

Déterminer Z^{2k} et Z^{2k+1} avec $k \in \mathbf{N}$. (On notera $1 \equiv Z^0$ la matrice unité 2×2.)

8) Donner les expressions des matrices

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} Z^{2k} \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} Z^{2k+1}$$

où x est une variable réelle. En déduire l'expression de

$$A = C + S$$

que l'on exprimera en terme de

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

9) Vérifier que les vecteurs propres de X sont également vecteurs propres de A. En déduire les valeurs propres de A.

Partie C (8 points)

1) On considère la fonction $\wedge : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\wedge(t) = \begin{cases} 1 - |t| \text{ si } |t| \leq 1 \\ \\ 0 \text{ si } |t| \geq 1 \end{cases}$$

Tracer le graphe de $\wedge$.

2) La fonction $\wedge$ admet-elle une transformée de Laplace ? Admet-elle une transformée de Fourier ?

3) On admettra que la transformée de Fourier $\mathcal{F}[\wedge] : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : \nu \mapsto \mathcal{F}[\wedge](\nu)$ de $\wedge$ est donnée par

$$\mathcal{F}[\wedge](\nu) = \begin{cases} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 \text{ pour } \nu \neq 0 \\ \\ 1 \text{ pour } \nu = 0 \end{cases}$$

Sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | \wedge (t)|^2 \, dt = \frac{2}{3}$$

trouver la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^4 dy$$

4) On considère la fonction périodique $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto f(t)$ de période $T = 2$ et de fonction génératrice $\wedge$ sur $[-1, 1]$. Déterminer les coefficients de

Fourier généralisés c_n de f ; on distinguera les cas $n = 0$, $n = 2k$ avec $k \in \mathbf{Z}^*$ et $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

5) Donner la série de Fourier $\beta(t)$ de f en terme de sinus et cosinus. Cette série est-elle convergente pour toute valeur de t ?

6) Retrouver la somme de la série

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

à partir de $\beta(0)$.

Partie D (2 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0 \quad \text{presque partout}$$

où la fonction $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto x(t)$ satisfait les conditions :

*) $x(t) = 0$ si $t < 0$

*) $\frac{dx}{dt} \in C^0$

*) $x \in C^0$ sauf au point $t_0 = 0$ où elle présente un saut égal à 3.

CNAM UV113 - Session de février 2004 - Éléments de correction

Partie A

1) La formule de Hadamard et d'Alembert conduit à un rayon de convergence infini pour $\gamma(t)$ et $\sigma(t)$.
2) En faisant $t = x^2$ dans $\gamma(t)$ et $\sigma(t)$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} c(x) & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \Rightarrow c(x) = \cos x \\ s(x) & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \Rightarrow s(x) = \sin x \end{array}$$

Partie B

1) Pour les questions 1, 2 et 3, il suffit d'appliquer un formulaire. On obtient

$$\mathrm{tr}\, X = 2a, \quad \det X = a^2 + b^2$$

2) De plus

$$X^t X = (a^2 + b^2)\mathbf{1}$$

3) Et enfin

$$X^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

4) La recherche des éléments propres de X conduit à

$$\begin{array}{ll} \lambda_+ & = a + \mathrm{i}b \quad \rightarrow v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \lambda_- & = a - \mathrm{i}b \quad \rightarrow v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \end{array}$$

(test : on vérifie que $\lambda_+ + \lambda_- = 2a = \mathrm{tr}\, X$ et $\lambda_+ \lambda_- = a^2 + b^2 = \det X$).
5) Les vecteurs propres v_+ et v_- sont linéairement indépendants. Il en résulte que X est diagonalisable.
6) La matrice Y se déduit de X en faisant $a = 0$ et $b = \mathrm{i}$. Les éléments propres de Y s'obtiennent donc à partir de **4)** :

$$\begin{array}{ll} \lambda_+ & = -1 \quad \rightarrow v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \lambda_- & = +1 \quad \rightarrow v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \end{array}$$

7) On obtient

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et un calcul direct conduit à

$$Z^{2k} = (-1)^k \mathbf{1} \quad \text{et} \quad Z^{2k+1} = (-1)^k Z$$

avec $k \in \mathbf{N}$.
8) Un calcul simple conduit à

$$C = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & \cos x \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

9) La matrice A est de type X avec $a = \cos x$ et $b = -\sin x$. Les valeurs propres et les vecteurs propres de A se déduisent donc de **4)** :

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \cos x - \mathrm{i} \sin x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \quad \to v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \lambda_- &= \cos x + \mathrm{i} \sin x = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} \quad \to v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie C

1) On trace aisément le graphe de $\Lambda : t \mapsto \Lambda(t)$. (Il correspond à un "accent circonflexe".)
2) La fonction Λ est bornée (par 1) et à support borné ($[-1, 1]$). Elle admet donc une TL et une TF.
3) Le théorème de Parseval et Plancherel donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 \right|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Lambda(t)|^2 \ dt$$

La dernière intégrale vaut $\frac{2}{3}$ par hypothèse de sorte qu'en posant $\pi\nu = y$ ($\Rightarrow d\nu = \frac{1}{\pi} dy$) dans la première, on obtient $I = \frac{2}{3}\pi$.
4) L'utilisation de la formule

$$c_n \equiv c_n[f] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[\Lambda](\frac{n}{2})$$

conduit à

$$c_0 = \frac{1}{2}; \quad c_{2k} = 0 \text{ pour } k \in \mathbf{Z}^*; \quad c_{2k+1} = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ pour } k \in \mathbf{Z}$$

5) La fonction f étant paire, on a

$$b_n = 0 \quad \text{et} \quad a_n = 2c_n \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}$$

donc

$$a_0 = 1; \quad a_{2k} = 0 \text{ pour } k \in \mathbf{N}^*; \quad a_{2k+1} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ pour } k \in \mathbf{N}$$

d'où

$$\beta(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi t$$

Comme on a

$$\forall t\in\mathbf{R}:\left|\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi t\right|\leq\frac{1}{(2k+1)^2}$$

et puisque $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ est convergente, il en résulte que $\beta(t)$ converge pour toute valeur de t.

6) En faisant $t=0$ dans $\beta(t)$, on obtient

$$\beta(0)=1\Rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}U\Rightarrow U=\frac{\pi^2}{8}$$

Partie D

Soit $\mathcal{L}[x]:s\mapsto\mathcal{L}[x](s)$ la transformée de Laplace (si elle existe) de la fonction $x:t\mapsto x(t)$. En prenant la TL des deux membres de l'équation différentielle, on obtient

$$\mathcal{L}[x](s)=3\frac{s}{s^2+9},\quad s\neq\pm 3\mathrm{i}$$

Les tables du cours donnent

$$x(t)=3H(t)\cos 3t$$

(test : x satisfait bien les conditions de l'énoncé).

CNAM UV B113 - Enseignant : M. Kibler
Année 2003/2004 - Session de septembre 2004 - Durée 3 heures

Les notes de cours, les notes de TD et les documents remis par l'enseignant sont autorisés. Les manuels et calculettes ne sont pas autorisés. Les questions peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso).

Partie A

1) Soit les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n},$$

respectivement. Ces suites sont-elles convergentes ?

2) Soit les séries

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

Étudier la convergence de ces séries.

3) Quel est le rayon de convergence R_U de la série

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} t^n$$

où $t \in \mathbf{R}$? La série converge-t-elle pour $t = 3$?

4) On considère les séries

$$\begin{array}{rcl} S_+(t) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}na} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}a} t\right)^n \\ S_-(t) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}na} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} t\right)^n \end{array}$$

où $t \in \mathbf{R}$ et a est un paramètre réel fixé. Quel est le rayon de convergence R_S de ces séries ? Calculer la somme de chacune de ces séries. En déduire que la somme de la série

$$S(t) = \frac{1}{2}[S_+(t) + S_-(t)]$$

est

$$S(t) = \frac{t(\cos a - t)}{1 - 2t\cos a + t^2}.$$

Partie B

1) Soit la matrice

$$M(\theta, a, b) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où θ, a et b sont trois paramètres réels. Déterminer le produit

$$X = M(\theta_1, a_1, b_1) M(\theta_2, a_2, b_2).$$

2) Mettre X sous la forme

$$X = M(\theta, a, b)$$

où l'on déterminera θ, a et b en fonction de $\theta_1, a_1, b_1, \theta_2, a_2$ et b_2.

3) En déduire l'inverse de la matrice $M(\theta_2, a_2, b_2)$. Plus précisément, déterminer les paramètres θ_1, a_1 et b_1 de la matrice $M(\theta_1, a_1, b_1)$ en fonction des paramètres θ_2, a_2 et b_2 de la matrice $M(\theta_2, a_2, b_2)$ tels que X soit la matrice unité 3×3.

4) Soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est l'inverse T^{-1} de T ?

5) Déterminer les valeurs propres de T.

6) Soit la matrice

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quel est l'inverse R^{-1} de R ?

7) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de R.

Partie C

1) On considère la fonction

$$f_2 : \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\} : t \mapsto f_2(t) = \begin{cases} +1 \text{ si } 0 < t < 1, \\ -1 \text{ si } -1 < t < 0, \\ 0 \text{ si } t < -1 \text{ ou } t > 1. \end{cases}$$

Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f_2] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[f_2](s)$ de f_2. Quelle est la valeur de $\mathcal{L}[f_2](0)$?

2) Déterminer la transformée de Fourier $\mathcal{F}[f_2] : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \nu \mapsto \mathcal{F}[f_2](\nu)$ de f_2.

3) On considère la fonction périodique $f : \mathbf{R} \to \{-1, 1\} : t \mapsto f(t)$ de période $T = 2$ et ayant f_2 pour fonction génératrice sur $[-1, 1]$. Déterminer les coefficients de Fourier c_n de f (du développement de f en série de Fourier en termes d'exponentielles).

4) En déduire les coefficients de Fourier usuels a_m et b_m de f et le développement $\beta(t)$ de f en série de Fourier en termes de sinus et de cosinus. Que vaut $\beta(k)$ où $k \in \mathbf{Z}$?

CNAM UV B113 - Enseignant : M. Kibler
Année 2004/2005 - Session de janvier 2005 - Durée 3 heures

Les notes de cours, les notes de TD et les documents remis par l'enseignant sont autorisés. Les calculettes sont autorisées. Les manuels ne sont pas autorisés. Les questions peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso).

Partie A (13 points)

1. Calculer

$$u_n = \sinh(\mathrm{i}n\pi), \quad v_n = \cosh(\mathrm{i}n\pi)$$

pour $n \in \mathbf{N}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont-elles convergentes ?

2. Donner une valeur approchée (à l'ordre de ε^2) de

$$x = \ln[(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)(1+3\varepsilon)]$$

où $\varepsilon = 10^{-4}$. Justifier le résultat.

3. La série

$$X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

est-elle convergente ? La série

$$Y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p+1)\frac{\pi}{2}t}, \quad t \in \mathbf{R}$$

est-elle absolument convergente ? En notant que

$$Y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi t}$$

étudier la convergence de $Y(t)$.

4. On considère la fonction $f_4 : \mathbf{R} \to [-1, 1] : t \mapsto f_4(t)$ définie par

$$f_4(t) = 1 + t \text{ pour } -2 \leq t \leq 0; \quad 1 - t \text{ pour } 0 \leq t \leq 2; \quad 0 \text{ ailleurs}$$

Tracer le graphe de f_4.

5. Soit $\mathcal{L}[f_4] : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : s \mapsto \mathcal{L}[f_4](s)$ la transformée de Laplace de f_4. Déterminer $\mathcal{L}[f_4](0)$. Un calcul direct (qui n'est pas à faire ici) conduit à

$$\mathcal{L}[f_4](s) = -\frac{2}{s} \sinh 2s + \frac{2}{s^2}(\cosh 2s - 1)$$

Sachant qu'au voisinage de $s = 0$, on a

$$\sinh 2s \sim 2s + \mathrm{O}(s^3), \quad \cosh 2s \sim 1 + 2s^2 + \mathrm{O}(s^4)$$

retrouver la valeur de $\mathcal{L}[f_4](0)$.

6. On considère la fonction périodique $f : \mathbf{R} \to [-1, 1] : t \mapsto f(t)$ de période $T = 4$ et de fonction génératrice f_4 sur $[-2, 2]$. Déterminer, le plus simplement possible, les coefficients de Fourier $c_n[f]$ de f.

7. Déterminer la série de Fourier de f en termes d'exponentielles. En déduire la valeur de

$$Z = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Suggérer une méthode pour évaluer la somme de la série

$$U = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

(On se limitera à la description de la méthode sans faire les calculs correspondants.)

Partie B (7 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\phi \in [0, 2\pi[$. Les auditeurs(trices) ayant des difficultés à traiter le cas général $\phi \in [0, 2\pi[$ pourront prendre $\phi = 0$, mais dans ce cas le barème des questions 8 à 11 sera divisé par 2.

8. Quel le rang de A ?

9. Déterminer la conjuguée hermitique $A^\dagger$ de A. Calculer

$$B = A^\dagger A$$

10. Déterminer l'inverse A^{-1} de A.

11. Montrer que les valeurs propres λ de A satisfont l'équation

$$\lambda^4 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = 0$$

En déduire que A admet 4 valeurs propres distinctes.

12. On prend $\phi = 0$. Montrer que A admet les 4 valeurs propres $\lambda = 1, -1, \mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$. Déterminer les vecteurs propres v_1 et v_2 associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$, respectivement. Calculer le produit scalaire $v_1 \cdot v_2$ des vecteurs v_1 et v_2.

Bibliographie

- **partie calcul matriciel**

→ N'importe quel livre d'algèbre linéaire et de calcul matriciel.

→ J. Grifone, **Algèbre linéaire**, CEPADUES-Éditions, Toulouse (1990).

→ F. Rotella et P. Borne, **Théorie et pratique du calcul matriciel** (collection méthodes et pratiques de l'ingénieur), Éditions Technip, Paris (1995) [livre très complet mais d'un niveau élevé].

- **partie suites et séries**

→ P. Thuillier et J.-C. Belloc, **Mathématiques**, Masson, Paris (1984).

→ P. Thuillier, **Cours de mathématiques supérieures**, Dunod, Paris (1997).

- **partie séries de Fourier, transformées de Laplace et de Fourier, équations différentielles**

→ M. Kibler, **Éléments de mathématiques pour la physique et la chimie, avec 230 exemples et 230 exercices et problèmes**, Éditions scientifiques GB, Paris (2001).