



## Dynamique critique

Mabrouk Benhamou

► **To cite this version:**

Mabrouk Benhamou. Dynamique critique. DEA. Conférence Intenationale sur les Phénomènes non Linéaires, Maroc, 2007. <cel-00136023>

**HAL Id: cel-00136023**

**<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00136023>**

Submitted on 15 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **DYNAMIQUE CRITIQUE**

*Mabrouk Benhamou*

Laboratoire de Physique des Polymères et Phénomènes Critiques

Faculté des Sciences Ben M'sik, B.P. 9755, Casablanca, Maroc

(Année académique 2006 - 2007)

## Résumé

Le but est de faire un tour d'horizon concernant la dynamique des systèmes critiques (ceux qui présentent une transition de phase de second ordre). Plus exactement, on part d'une température initiale et l'on refroidit le système jusqu'à une température finale, très proche de la température critique. Entre les deux températures, le paramètre d'ordre relaxe d'une valeur initiale à une valeur finale. C'est cette cinétique qui nous intéresse ici. Pour l'étudier, le point de départ est la fameuse équation de Langevin, qui est satisfaite par le paramètre d'ordre dépendant de l'espace et du temps. Nous examinons d'abord le problème par application de la théorie de champ moyen, ensuite par le Groupe de Renormalisation.

# Chapitre 1

## Phénomènes critiques.

Dans ce chapitre, nous passons en revue les fondements des phénomènes critiques. Plus exactement, l'attention sera portée sur les comportements et exposants critiques.

### 1.1 Définition des systèmes critiques.

Un système est dit *critique* si ses propriétés à grande échelle ne dépendent que d'un petit nombre de paramètres macroscopiques, et si cette dépendance présente un caractère universel.

A titre d'exemples, je peux citer les transitions de phase *thermales* de second ordre, les longs polymères en solution, les mélanges critiques de liquides simples ou de polymères, les agrégats de particules, les transitions *géométriques* (transitions sol-gel, percolation), et certains systèmes dynamiques.

La caractéristique commune des systèmes critiques est que leurs propriétés spatiales ne dépendent que d'une *seule* longueur, qui est la longueur de corrélation  $\xi_t$  (taille des domaines). En plus, au voisinage de la température critique  $T \rightarrow T_c$ , la longueur de corrélation diverge. La divergence de  $\xi_t$  à  $T = T_c$  signifie que le système critique devient *invariant d'échelle*.

Historiquement, trois grandes périodes ont marqué le développement des phénomènes

critiques.

La première et la plus longue période fut l'élaboration de la *théorie du champ moyen* (TCM) par van der Waals, dans le but de décrire la transition liquide-gaz classique [1]. Par la suite, la TCM a été étendue par Weiss (champ moléculaire), pour décrire la transition paramagnétique-ferromagnétique [1, 2]. Aussi, cette même TCM a été étendue (avec succès) par Bardeen, Cooper et Schrieffer (théorie BCS) [2], pour étudier la supraconductivité conventionnelle. Mais, les expériences et les simulations ont montré que, généralement, la TCM est quantitativement incorrecte.

L'esprit de la TCM consiste à remplacer les interactions subies par un constituant de la part de ses semblables par un champ moyen. Si cette approche n'est pas souvent correcte, c'est parce qu'elle sous-estime les fortes fluctuations du paramètre d'ordre au voisinage de la température de transition.

La deuxième période, autour de 1968, a été inaugurée par L. Kadanoff [3 – 5], qui a repris les défauts de la TCM et émis deux hypothèses fondamentales, à savoir l'invariance d'échelle et l'universalité. La première hypothèse signifie qu'au point critique, le système devient invariant d'échelle ( $\xi_t \rightarrow \infty$ ). L'universalité stipule que bien que des systèmes soient physiquement différents, ils se comportent de la même manière.

La troisième et la plus importante période, qui a commencé en 1971, fut marquée par une série de brillants papiers par K. Wilson [6, 7], un physicien issu de la Physique des Particules. Ce dernier a repris les idées de Kadanoff et les a converti en des calculs réels du comportement critique, et ceci par application du *Groupe de Renormalisation* (GR).

Quelques années plus tard, P.-G. de Gennes [8] remarqua qu'on pouvait étendre les idées du GR à un autre domaine différent, qui est la physique des polymères. Il montra qu'un long polymère en solution est équivalent à un système magnétique critique, dans la limite où le nombre de composantes de son aimantation,  $n$ , tend vers zéro. C'est la fameuse limite  $n \rightarrow 0$ . Dans cette même limite, la fonction de partition du polymère est la transformée de Laplace inverse de la fonction de corrélation, où le

degré de polymérisation,  $N$ , de la chaîne et l'écart à la température critique,  $T - T_c$ , sont les variables conjuguées de Laplace. J. des Cloizeaux [9] étendit l'équivalence de de Gennes aux solutions concentrées de polymères. Ainsi, une solution concentrée est équivalente à un système magnétique critique sous champ, dans la limite  $n \rightarrow 0$ , où le champ magnétique est l'analogie de la fugacité.

À la même époque, le physicien russe Polyakov [10] remarqua qu'en dimension 2, les fonctions de corrélation sont invariantes sous les transformations conformes. Ce sont des transformations qui conservent les angles. Par ailleurs, le Groupe Conforme à deux dimensions est isomorphe au groupe des fonctions analytiques. C'est cette richesse qui est derrière la détermination *exacte* des exposants critiques en cette dimension [9, 11].

Les idées du GR ont été étendues, par la suite, à d'autres systèmes, comme les membranes.

Dans cet article de revue, je décris les fondements de la dynamique critique. Plus précisément, je m'intéresse à la cinétique d'un système critique quelconque, lorsque sa température est diminuée d'une valeur initiale  $T_i$  à une valeur finale  $T_f$ , très proche du point critique. Dans l'intervalle de temps qui sépare les deux états d'équilibre, le paramètre d'ordre et les autres quantités physiques (facteur de structure...) relaxent, et je m'intéresse donc au temps (ou taux) de relaxation. L'analyse se fera d'abord dans le cadre de la TCM, ensuite, par utilisation du GR. Pour cela, l'équation de base sera l'équation de Langevin, car les systèmes considérés ici sont purement dissipatifs (paramètre d'ordre non conservé).

## 1.2 Comportements et exposants critiques.

Pour définir ces exposants, je commence par les polymères en solutions. Pour ces polymères, le premier exposant rencontré est l'exposant critique de gonflement  $\nu$ , qui définit le comportement du rayon de giration. Celui-ci peut être mesuré dans une expérience de diffusion de rayons X [8, 9]. L'on a la loi d'échelle [8, 9], dans la

limite  $N \rightarrow \infty$ ,

$$R_G \sim \sigma N^\nu, \quad (1.1)$$

où  $\sigma$  est la taille du monomère et  $\nu$  l'exposant critique du gonflement. Ce dernier est universel, en ce sens qu'il ne dépend que de la dimension de l'espace  $d$ . Le second exposant rencontré est l'exposant de configuration,  $\gamma$ , qui définit le nombre de configurations

$$Z(N) \sim \mu^N N^{\gamma-1}. \quad (1.2)$$

Aussi, le nouveau exposant  $\gamma$  ne dépend que de la dimension euclidienne  $d$ . Il faut noter que pour les polymères en solution, on rencontre d'autres exposants, mais ils dépendent tous des exposants indépendants  $\gamma$  et  $\nu$ .

Pour étudier les transitions de phase thermales, l'on a besoin d'introduire un paramètre d'ordre, noté  $\varphi$ . Il peut être l'aimantation,  $M$ , pour les transitions magnétiques, la différence de compositions,  $\Phi_A - \Phi_B$ , pour les mélanges de liquides simples ou de polymères, ou la différence de densités,  $\rho_L - \rho_G$ , pour la transition liquide-gaz. Le paramètre dépend, généralement, de deux variables d'état, notées  $t = T - T_c$  et  $H$ . La première variable est l'écart à la température critique. Pour les substances magnétiques,  $H$  est le champ magnétique extérieur, la différence des potentiels chimiques  $\delta\mu = \mu_A - \mu_B$ , pour les mélanges de liquides, où l'écart de la pression à sa valeur critique  $\delta p = p - p_c$ , pour la transition liquide-gaz.

Pour les transitions de phase thermales, le premier exposant rencontré est l'exposant critique  $\beta$  [1, 3 – 5], qui régit le comportement du paramètre d'ordre au voisinage de la transition, à  $H = 0$ ,

$$\varphi \sim \begin{cases} 0, & T > T_c, \\ A_0 (T_c - T)^{\beta_t}, & T \leq T_c. \end{cases} \quad (1.3)$$

Lorsqu'on est exactement à la température critique ( $T = T_c$ ), mais le champ  $H$  est faible, le paramètre d'ordre se comporte comme [1, 3 – 5]

$$M \sim \pm A_1 |H|^{1/\delta_t}. \quad (1.4)$$

Ce comportement définit l'exposant critique  $\delta_t$ .

L'exposant critique  $\gamma_t$  définit le comportement de la susceptibilité (ou compressibilité isotherme)  $\chi = (\partial M / \partial H)_{H=0}$ . L'on a [1, 3 – 5]

$$\chi \sim \begin{cases} \chi_+ (T - T_c)^{-\gamma_t} , & T > T_c , \\ \chi_- (T_c - T)^{-\gamma_t} , & T \leq T_c . \end{cases} \quad (1.5)$$

Au voisinage de la transition, la chaleur spécifique  $C$  se comporte comme [1, 3 – 5]

$$C \sim \begin{cases} A_+ + B_+ (T - T_c)^{-\alpha_t} , & T > T_c , \\ A_- + B_- (T_c - T)^{-\alpha_t} , & T \leq T_c . \end{cases} \quad (1.6)$$

Ceci définit l'exposant critique  $\alpha_t$ .

Les deux exposants critiques restants définissent le comportement de la fonction de corrélation

$$G(r) = \langle \varphi(0) \varphi(\mathbf{r}) \rangle - \langle \varphi(0) \rangle \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle . \quad (1.7)$$

Cette fonction mesure l'effet sur le paramètre d'ordre à l'origine, suite à sa fluctuation au point situé à la distance  $r$ . A grande distance, la fonction de corrélation décroît avec la distance d'une manière exponentielle [1, 3 – 5]

$$G(r) \sim e^{-r/\xi_t} , \quad r > \xi_t , \quad (1.8)$$

où  $\xi_t$  est la longueur de corrélation [1, 3 – 5]

$$\xi_t \sim \begin{cases} \xi_+ (T - T_c)^{-\nu_t} , & T > T_c , \\ \xi_- (T_c - T)^{-\nu_t} , & T \leq T_c . \end{cases} \quad (1.9)$$

La longueur de corrélation diverge donc à la transition, avec l'exposant critique  $\nu_t$ . Le dernier exposant critique est l'exposant  $\eta_t$  [1, 3 – 5], qui caractérise le comportement de la fonction de corrélation à petite distance, en comparaison avec la longueur de corrélation,

$$G(r) \sim r^{2-d-\eta_t} , \quad a < r < \xi_t , \quad (1.10)$$



où  $a$  est une certaine échelle atomique.

Comme les quantités physiques définies par ces exposants critiques sont reliées entre elles, alors les exposants critiques ne sont pas indépendants les uns des autres et satisfont alors les relations [1, 3 – 5]

$$\alpha_t + 2\beta_t + \gamma_t = 2, \quad \alpha_t + (\delta_t + 1)\beta_t = 2, \quad (1.11)$$

$$\gamma_t = \nu_t(2 - \eta_t), \quad \alpha_t = 2 - \nu_t d. \quad (1.12)$$

Ces exposants sont universels et ne dépendent pas des détails particuliers du problème. En champ moyen, ils prennent les valeurs [1, 3 – 5] :  $\alpha_t = 0$ ,  $\beta_t = 1/2$ ,  $\nu_t = 1/2$ ,  $\gamma_t = 1$ ,  $\delta_t = 3$ . En dimension 2, ces exposants sont connus exactement [9 – 11]. Mais à trois dimensions, on les calcule d’une manière approchée, par application du GR ou par des calculs sur machine [1, 3 – 5]. Enfin, je rappelle que la dimension critique du système est  $d_c = 4$ . Cette dimension délimite le domaine en dimension où la TCM est applicable ( $d > d_c$ ).

A présent, je vais rappeler la définition des classes d’universalité. Je note d’abord que les exposants critiques ne dépendent que de la dimension d’espace  $d$  et de la symétrie du paramètre d’ordre. Cette symétrie peut être décrite à l’aide du nombre de composantes  $n$  du paramètre d’ordre. Les nombres  $\binom{n}{d}$  définissent alors les classes d’universalité. On met, dans une même classe, tous les systèmes qui possèdent les mêmes exposants critiques. La classe avec  $n = 0$  contient uniquement les polymères en solution [8, 9]. La classe avec  $n = 1$  [1, 3 – 5] englobe les systèmes magnétiques de type Ising, la séparation de phase des liquides et la transition liquide-gaz au point critique. La classe avec  $n = 2$  [1, 3 – 5] contient la transition- $\lambda$  d’hélium et les systèmes magnétiques de type  $XY$ . La classe  $n = \infty$  [1, 3 – 5] contient seulement les systèmes magnétiques pouvant être décrits par le modèle sphérique. Enfin, la valeur pathologique  $n = -1$  correspond à des système idéaux [1, 3 – 5, 9].

# Bibliographie

- [1] H.E. Stanley, *Introduction To Phase Transitions And Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [2] C. Kittel, *Introduction To Solid State Physics*, Wiley International, 2004.
- [3] D. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, McGraw-Hill, New-York, 1978.
- [4] C. Itzykson, J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory : 1 and 2*, Cambridge University Press, 1989.
- [5] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [6] K. Wilson, *Renormalization Group and Critical Phenomena I*, Phys. Rev. B **4**, 3183 (1971).
- [7] K. Wilson, *Renormalization Group and Critical Phenomena II*, Phys. Rev. B **4**, 31843205 (1971).
- [8] P.-G. de Gennes, *Scaling Concept in Polymer Physics*, Cornell University Press, 1979.
- [9] J. des Cloizeaux, G. Jannink, *Polymers in Solution*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

# Chapitre 2

## Dynamique critique.

Le but de ce chapitre est l'étude de la dynamique critique, d'abord par la théorie de champ moyen, ensuite, par le Groupe de Renormalisation (GR).

### 2.1 Equation de Langevin.

Je rappelle que les systèmes thermodynamiques hors équilibre peuvent être décrits à l'aide de deux méthodes équivalentes. L'une est basée sur l'utilisation de l'équation de Smoluchowski, et l'autre sur l'équation de Langevin. La première est une conséquence directe des principes de la Thermodynamique des phénomènes irréversibles. Alors que la seconde est une équation phénoménologique, qui modélise toute une classe de processus stochastiques. L'équation de Smoluchowski décrit les phénomènes de diffusion dans l'espace des phases. L'équation de Langevin décrit ces mêmes phénomènes dans l'espace direct.

Pour introduire l'équation de Langevin qui m'intéresse ici, je considère une particule en suspension dans un liquide. En plus, l'on suppose que cette particule subit l'action d'un potentiel extérieur,  $U(\vec{r})$ , où  $\vec{r} \in \mathbf{R}^d$  est sa position. L'équation de Langevin est la suivante [1]

$$\zeta \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{\nabla}U + \vec{f}(t) , \quad (2.1)$$

où  $\zeta$  est le coefficient de friction,  $-\zeta d\vec{r}/dt$  la force de friction,  $-\vec{\nabla}U$  la force dérivative, et  $\vec{f}(t)$  une force aléatoire (*bruit*). Cette dernière est supposée distribuée selon une loi gaussienne

$$\langle \vec{f}(t) \rangle = \vec{0} , \quad (2.2)$$

$$\langle \vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t') \rangle = 2d\zeta k_B T \delta(t - t') . \quad (2.3)$$

Pour  $U = 0$ , la solution de l'équation de Langevin est triviale

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t') + \frac{1}{\zeta} \int_0^t dt'' f(t'') . \quad (2.4)$$

Donc, les premier et second moments de la distance bout-à-bout sont

$$\langle \vec{r}(t) - \vec{r}(t') \rangle = \vec{0} , \quad (2.5)$$

$$\langle [\vec{r}(t) - \vec{r}(t')]^2 \rangle = \frac{2d}{\zeta} k_B T |t - t'| = 2d.D |t - t'| , \quad (2.6)$$

$$D = \frac{k_B T}{\zeta} . \quad (2.7)$$

Ici,  $D$  étant le coefficient de diffusion. La fonction de distribution bout-à-bout est alors

$$P(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = [4\pi D |t - t'|]^{-d/2} \exp \left\{ -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{4D |t - t'|} \right\} . \quad (2.8)$$

qui représente la probabilité de trouver la particule à la position  $\vec{x}$ , à l'instant  $t$ , sachant qu'elle occupait la position  $\vec{x}'$ , à l'instant  $t'$ .

Enfin, je note, que pour une particule brownienne dans un potentiel harmonique, on sait résoudre exactement l'équation de Langevin, mais cette même équation reste insoluble dans le cas général.

## 2.2 Dynamique critique par la théorie de champ moyen.

### 2.2.1 Paramètre d'ordre à l'équilibre.

Le point de départ est l'énergie libre de Landau,  $\mathcal{F}$ , définie par [1 – 4]

$$\mathcal{F}[\varphi] = \frac{a}{2}\varphi^2 + \frac{u}{4}\varphi^4, \quad a = \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (2.9)$$

Ici,  $\varphi$  est le paramètre d'ordre,  $T$  la température absolue,  $T_c$  la température critique, et  $u$  la constante de couplage.

Le paramètre d'ordre à l'équilibre,  $\bar{\varphi}$ , est celui qui minimise cette énergie libre, c'est-à-dire

$$\left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} \right|_{\bar{\varphi}} = 0. \quad (2.10)$$

L'on trouve

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} 0, & T > T_c, \\ \sqrt{-\frac{a}{u}} \sim \sqrt{T_c - T}, & T \leq T_c. \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Facteur de structure.

Le facteur de structure,  $S(q)$ , est directement proportionnel à l'intensité diffusée, dans une expérience de diffusion de lumière, de rayons X ou de neutrons. Ici,  $q = (4\pi/\lambda) \sin(\theta/2)$  est le module du vecteur d'onde de transfert  $\vec{q}$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde incidente et  $\theta$  l'angle de diffusion.

Pour calculer le facteur de structure, on part de l'énergie libre d'Ornstein-Zernike [1 – 3]

$$\frac{\mathcal{F}[\varphi]}{k_B T} = \int d\vec{r} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{u}{4} \varphi^4 - J \right] (\vec{r}), \quad (2.12)$$

où  $J(\vec{r})$  est une source auxiliaire, qui va servir pour calculer la fonction de corrélation

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \langle \varphi(\vec{r}) \varphi(\vec{r}') \rangle - \langle \varphi(\vec{r}) \rangle \langle \varphi(\vec{r}') \rangle = \left. \frac{\delta \varphi(\vec{r})}{\delta J(\vec{r}')} \right|_{J=0}. \quad (2.13)$$

La minimisation de l'énergie libre (2.12) donne

$$-\Delta\varphi + a\varphi + u\varphi^3 = J , \quad (2.14)$$

Par dérivation fonctionnelle par rapport à la source, l'on trouve

$$(-\Delta_r + \xi_t^{-2}) G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') , \quad (2.15)$$

avec  $\xi_t$  la longueur de corrélation, telle que

$$\xi_t = (a + 3u\bar{\varphi})^{-1/2} \sim |T - T_c|^{-\nu_t^0} , \quad \nu_t^0 = \frac{1}{2} . \quad (2.16)$$

Par passage à l'espace de Fourier, l'équation (2.15) donne le facteur de structure

$$S(q) = \int d\vec{r} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} G(\vec{r}) = \frac{1}{q^2 + \xi_t^{-2}} . \quad (2.17)$$

La susceptibilité est alors

$$\chi \sim S(\vec{q} = \vec{0}) \sim |T - T_c|^{-\gamma_t^0} , \quad \gamma_t^0 = 1 . \quad (2.18)$$

Au point critique ( $\xi_t \rightarrow \infty$ ), le facteur de structure se comporte comme

$$S(q) \sim q^{2-\eta_t} , \quad \eta_t^0 = 0 . \quad (2.17a)$$

### 2.2.3 Dynamique critique.

On part d'une température initiale  $T_i$ , où le paramètre d'ordre est  $\varphi_i$ , et on change cette température jusqu'à une température finale  $T_f$  très proche de  $T_f$ . L'on désigne par  $\varphi_f$  le paramètre d'ordre final. On est intéressé par la relaxation du paramètre d'ordre de sa valeur initiale  $\varphi_i$  à sa valeur finale  $\varphi_f$ . Le temps nécessaire pour le passage  $\varphi_i \rightarrow \varphi_f$  est le "temps de relaxation", noté  $\tau$ .

Pour étudier la cinétique, je part de l'équation de Langevin [1]

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Gamma \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi} , \quad (2.19)$$

avec  $\Gamma$  une constante positive et l'énergie libre  $\mathcal{F}[\varphi]$ , relation (2.21). Ecrivons la décomposition

$$\varphi = \bar{\varphi} + \delta\varphi , \quad (2.20)$$

Ici,  $\delta\varphi$  représente de la fluctuation du paramètre d'ordre autour de sa valeur à l'équilibre  $\bar{\varphi}$ . L'on obtient alors l'équation de Langevin linéarisée

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = -\sigma \left. \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \varphi} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} \delta\varphi , \quad (2.21)$$

La solution de cette équation linéaire est

$$\delta\varphi(t) = Ae^{-t/\tau} , \quad (2.22)$$

où  $A$  est une certaine amplitude, et  $\tau$  le temps de relaxation, qui est donné par

$$\tau^{-1} = a + 3u\bar{\varphi}^2 , \quad (2.23)$$

Donc, le temps de relaxation diverge à la transition, c'est-à-dire

$$\tau \sim |T - T_c|^{-y_0} , \quad y_0 = 1 . \quad (2.24)$$

Ce comportement peut être réécrite en terme de la longueur de corrélation  $\xi_t$

$$\tau \sim \xi_t^{z_0} , \quad z_0 = 2y_0 = 2 . \quad (2.25)$$

La quantité  $z_0$  représente l'exposant dynamique [1].

Je note que la divergence du temps de relaxation est une signature d'une transition de phase.

Maintenant, je vais réexaminer le phénomène de relaxation, en tenant compte des fluctuations spatiales. Dans ce cas, la cinétique sera décrite en terme du "taux de relaxation".

Pour cela, je part de l'énergie libre d'Ornstein-Zernike suivante

$$\mathcal{F}[\varphi] = \int d\vec{r} \left[ \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{u}{4} \varphi^4 \right] (\vec{r}) . \quad (2.26)$$

Sa minimisation donne l'équation du paramètre d'ordre

$$-\Delta\varphi + a\varphi + u\varphi^3 = 0 , \quad (2.27)$$

En utilisant la décomposition (2.20), l'on obtient l'équation de la fluctuation

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = -\Gamma [-\Delta + a + 3u\bar{\varphi}^2] \delta\varphi . \quad (2.28)$$

Cette équation se réécrit dans l'espace réciproque comme

$$\delta\varphi_q(t) = \delta\varphi_q(0) e^{-t/\tau_q} , \quad (2.29)$$

où le *taux de relaxation*  $\tau_q$  est donné par

$$\tau_q^{-1} = \Gamma q^2 + a + 3u\bar{\varphi}^2 . \quad (2.30)$$

Cette relation suggère que le mode critique  $\tau_0 = \tau_q(q=0)$  diverge à la transition.

Il reste à déterminer le facteur de structure dynamique,  $S(q, t)$ , qui est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation dynamique, solution de l'équation différentielle

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma \Delta_r + a + 3u\bar{\varphi}^2 \right] G(\vec{r} - \vec{r}', t) = \Gamma \delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (2.31)$$

D'où l'équation du facteur de structure dynamique

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \tau_q^{-1} \right] S(q, t) = \Gamma , \quad (2.32)$$

dont la solution est

$$S(q, t) = S_f(q) + [S_i(q) - S_f(q)] e^{-t/\tau_q} . \quad (2.33)$$

Ici,  $S_i(q)$  et  $S_f(q)$  sont respectivement les facteurs de structure initial et final. Le facteur de structure dynamique dépend alors de trois échelles de longueur, qui sont la longueur d'onde  $q^{-1}$ , la longueur de corrélation  $\xi_t$ , et l'échelle de temps  $L = \Gamma^{1/2} \sqrt{t}$ . Cette dernière est la taille des domaines à l'instant  $t$ .

Il est bien connu que la TCM est quantitativement incorrecte, car elle sous-estime les fortes fluctuations du paramètre au voisinage de la température de transition. Pour aller au delà de cette approche, et afin d'obtenir un comportement critique correct, il est nécessaire de faire usage du GR. C'est précisément l'objectif de la section suivante.



## 2.3 Dynamique critique par le GR.

Comment avant, le point de départ est l'équation de Langevin satisfaite par le paramètre d'ordre [1]

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sigma \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi(\vec{r}, t)} + \nu(\vec{r}, t) , \quad (2.34)$$

où  $\mathcal{F}[\varphi]$  est l'énergie libre (2.26). Ici, la notation  $\delta/\delta\varphi(\vec{r}, t)$  signifie la dérivation fonctionnelle. Dans l'équation précédente,  $\nu(\vec{r}, t)$  désigne un bruit, supposé distribué selon une distribution gaussienne

$$\langle \nu(\vec{r}, t) \rangle = 0 , \quad (2.35)$$

$$\langle \nu(\vec{r}, t) \nu(\vec{r}', t') \rangle = \Gamma \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') . \quad (2.36)$$

Pour l'étude de la cinétique par application du GR, je ne vais pas entrer dans les détails, mais je dessine simplement la stratégie :

1. On commence par écrire l'action effective, qui est la suivante [1]

$$\mathcal{H}_{eff}[\varphi] = \frac{1}{4\Gamma} \int d\vec{r} dt \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \Gamma^2 \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} \right)^2 \right] (\vec{r}, t) . \quad (2.37)$$

2. Ensuite, le comptage de puissances montre qu'à  $d = 4$  (*dimension critique*), l'on assiste à des divergences à courtes distances. Pour régulariser la théorie, on choisit la régularisation dimensionnelle [5 – 7], avec le régulateur  $\epsilon = 4 - d$ .

3. Le pas suivant consiste à renormaliser la théorie, c'est-à-dire passer des paramètres et champ nus aux paramètres et champ renormalisés [1]

$$\sigma \rightarrow \sigma_R , \quad a \rightarrow a_R , \quad u \rightarrow u_R , \quad \varphi \rightarrow \varphi_R . \quad (2.38)$$

A la criticalité, la constante de couplage renormalisée  $u$  tend vers une valeur fixe  $u^*$ , celle qui annule la fonction de Wilson.

4. Pour avoir de l'information sur le facteur de structure dynamique  $S(q, t)$ , on écrit une équation du GR. Sa résolution donne le comportement critique de  $S(q, t)$ . En particulier, on montre que la loi d'échelle pour le temps de relaxation [5]

$$\tau \sim \xi^z , \quad z = \frac{4 - \eta_t}{2\nu_t + 1} . \quad (2.39)$$

Ici,  $v_t$  et  $\eta_t$  sont les exposants critiques standard des systèmes magnétiques de type Ising [1 – 4]. A trois dimensions, l'exposant dynamique  $z$  prend la valeur  $z = 1.7562 \pm 0.0027$ . Mais en dimension 2, il prend la valeur exacte  $z = 5/4$ .

## 2.4 Quelques remarques.

Je rappelle que l'objectif de cette article de revue est de faire un tour d'horizon concernant l'étude de la dynamique critique des systèmes possédant un point critique (théorie  $\varphi^4$ ), et ceci par application du GR. Cette analyse s'étend sans difficulté au cas des systèmes présentant un point tricritique (théorie  $\varphi^6$ ).

Elle s'étend également au cas des systèmes critiques possédant plusieurs paramètres d'ordre. C'est le cas, par exemple, des systèmes ferrimagnétiques. D'un point de vue magnétique, ces les ferrimagnétiques se présentent comme deux sous-réseaux imbriqués, d'aimantations antiparallèles différentes  $(\varphi, \psi)$ .

Aussi, une analyse similaire pourrait s'appliquer à d'autres phénomènes, comme ceux liés à la croissance des surfaces ou à la réaction / diffusion.

# Bibliographie

- [1] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [2] H.E. Stanley, *Introduction To Phase Transitions And Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [3] D. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, McGraw-Hill, New-York, 1978.
- [4] C. Itzykson, J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory : 1 and 2*, Cambridge University Press, 1989.