

Relativité générale avancée

Bernard Linet

▶ **To cite this version:**

Bernard Linet. Relativité générale avancée. DEA. 2006. cel-00092974

HAL Id: cel-00092974
https://cel.hal.science/cel-00092974

Submitted on 12 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

D E A de Physique Théorique - Paris VI, Paris VII, Paris XI, ENS, X

Année 2004-2005

Notes de cours de
RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Bernard LINET

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique
CNRS/UMR 6083, Université François Rabelais
Parc de Grandmont 37200 TOURS

linet@phys.univ-tours.fr

Table des matières

1 Observateurs, espaces-temps et lois de la dynamique **5**
- 1.1 Généralités . . . 5
- 1.2 Observateurs . . . 6
- 1.3 Espace-temps galiléen . . . 8
- 1.4 Lois newtoniennes de la dynamique . . . 9
- 1.5 Espace-temps minkowskien . . . 10
- 1.6 Lois relativistes de la dynamique . . . 16

2 Théorie de Newton de la gravitation **19**
- 2.1 Loi d'attraction gravitationnelle et principe d'équivalence faible . . . 19
- 2.2 Vérifications expérimentales du principe d'équivalence faible . . . 21
- 2.3 Equation de Schrödinger et principe d'équivalence faible . . . 23
- 2.4 Equations newtoniennes du mouvement d'un fluide . . . 25
- 2.5 Décalage des fréquences dans un champ de gravitation . . . 26

3 Eléments de calcul tensoriel en espace affine **29**
- 3.1 Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel . . . 29
- 3.2 Produit scalaire dans un espace vectoriel . . . 32
- 3.3 Espace affine et espace affine métrique . . . 33
- 3.4 Systèmes de coordonnées curvilignes . . . 36

4 Eléments de géométrie différentielle d'une variété **41**
- 4.1 Variété différentiable . . . 41
- 4.2 Champ de vecteurs et de tenseurs . . . 44
- 4.3 Métrique et élément de volume induit . . . 46
- 4.4 Dérivée de Lie et vecteur de Killing . . . 48
- 4.5 Connexion linéaire, torsion et tenseur de courbure . . . 50
- 4.6 Connexion riemannienne et tenseur de Riemann . . . 52

5 Théories métriques de la gravitation **55**
- 5.1 Origines . . . 55
- 5.2 Espace-temps einsteinien et principe de covariance . . . 57
- 5.3 Observateur en chute libre et principe d'équivalence d'Einstein . . . 59

5.4 Comparaison entre les temps des observateurs 62
5.5 Couplage de l'électromagnétisme à la gravitation 65
5.6 Couplage d'un milieu matériel à la gravitation 66
5.7 Formalisme lagrangien dans le cas d'un champ classique 68

6 Théorie d'Einstein de la gravitation ou relativité générale 71
6.1 Equations d'Einstein de la gravitation 71
6.2 Formalisme lagrangien du champ gravitationnel 73
6.3 Caractère hyperbolique des équations d'Einstein 75
6.4 Approximation newtonienne de la théorie d'Einstein 76
6.5 Métrique extérieure post-newtonienne d'un corps massif 77
6.6 Avance du périhélie de Mercure 78
6.7 Déviation de la lumière et mirage gravitationnel 80

7 Corps massif et trou de ver statiques et à symétrie sphérique 83
7.1 Métrique statique et à symétrie sphérique 83
7.2 Corps massif à symétrie sphérique 84
7.3 Métrique statique de Schwarzschild 87
7.4 Trou de ver statique et à symétrie sphérique 89

8 Effondrement gravitationnel et trou noir à symétrie sphérique 91
8.1 Observateur en chute libre dans la métrique de Schwarzschild 91
8.2 Effondrement gravitationnel d'une boule de fluide à pression nulle 93
8.3 Trou noir de Schwarzschild 96
8.4 Extension maximale de Kruskal 97

9 Généralités sur les trous noirs 101
9.1 Diagramme de Carter-Penrose 101
9.2 Propriétés générales des trous noirs 104
9.3 Trou noir stationnaire de Kerr 107
9.4 Processus d'extraction d'énergie 110

10 Théorie linéarisée de la relativité générale 113
10.1 Champ gravitationnel à l'approximation linéaire 113
10.2 Equations d'Einstein linéarisées 114
10.3 Solution retardée des équations d'Einstein linéarisées 116
10.4 Onde plane gravitationnelle dans le vide 119

11 Rayonnement gravitationnel et observations 121
11.1 Pseudo-tenseur énergie-impulsion gravitationnelle 121
11.2 Energie gravitationnelle rayonnée 125
11.3 Exemple d'un corps rigide en rotation 127
11.4 Force de réaction de rayonnement gravitationnel 128
11.5 Pulsar binaire PSR 1913+16 130

11.6 Principes de détection d'une onde plane gravitationnelle 132

12 Espaces-temps de la cosmologie **136**
12.1 Le problème cosmologique 136
12.2 Observateurs fondamentaux et métriques cosmologiques 138
12.3 Effet Hubble du décalage vers le rouge 141
12.4 Relation entre luminosité apparente et luminosité absolue 143
12.5 Modèles cosmologiques et évolution de l'Univers 145
12.6 Horizon des particules et densité critique 149
12.7 Inflation et espace-temps de de Sitter 151

A Compléments de géométrie et de relativité générale **157**
A.1 Algèbre extérieure et différentiation extérieure 157
A.2 1-forme de connexion 159
A.3 Equation de Dirac en espace-temps courbe 160
A.4 Courbure extrinsèque d'une hypersurface 163
A.5 Conditions de raccordement vide-matière 165
A.6 Formalisme hamiltonien du vide 166

Chapitre 1

Observateurs, espaces-temps et lois de la dynamique

1.1 Généralités

Nous n'allons pas tenter une formulation axiomatique de la notion de temps et d'espace mais simplement introduire du vocabulaire. Nous avons une intuition première de la notion d'instant et de lieu. Par suite, nous pouvons considérer le mot événement : c'est ce qui peut survenir en un lieu et à un instant. Le meilleur exemple est celui de la collision de deux particules, mais bien sûr il s'agit d'un concept abstrait qui ne nécessite pas un phénomène physique réel.

L'espace-temps est la réunion de tous les événements possibles. Il s'agit donc d'un ensemble de points. Tout le travail du physicien consiste à mettre sur celui-ci une structure mathématique. Puisque nous adoptons une description continue de l'espace-temps, nous devons le munir d'une topologie. Nous restreignons la topologie de l'espace-temps à être localement homéomorphe à $\mathbb{R}^4$, définissant une variété topologique. La dimension quatre est une hypothèse physique très forte. Il pourrait exister des dimensions supplémentaires qui ne seraient pas immédiatement perceptibles à notre échelle actuelle d'observation [1].

Nous pourrions directement postuler la structure géométrique de l'espace-temps et les lois physiques qui régissent les phénomènes dans cet espace-temps. Ce serait la cohérence et les conséquences expérimentalement vérifiées qui en assureraient la justification. Nous préférons dégager des concepts, comme celui d'observateur. Nous pensons qu'il est important de comprendre comment celui-ci est plongé dans l'espace-temps. Nous retrouverons ce concept dans les diverses conceptions d'espaces-temps qui ont été successivement proposées au cours de l'histoire de la physique pour décrire la réalité physique.

[1] 10^{-18} m dans le cadre de la théorie standard des particules élémentaires mais cette échelle pouvant être bien supérieure pour l'interaction gravitationnelle faute d'expériences au-dessous de 10^{-4} m.

1.2 Observateurs

L'espace-temps sert d'arène aux mouvements des corps matériels. Ils sont bien souvent idéalisés par la notion de particules ponctuelles. Le mouvement d'une particule ponctuelle est décrit comme une succession continue d'événements par une courbe, c'est-à-dire une application continue de $\mathbb{R}$ dans la variété topologique, que nous appelons une ligne d'univers.

Nous assimilons le mouvement d'un observateur à celui d'une particule ponctuelle ; il est décrit par une ligne d'univers $\mathcal{O}$ dans l'espace-temps. Mais un observateur a d'autres attributs, tirés de l'expérience usuelle d'observation, car il a conçu des appareils de mesure pour explorer son environnement. Pour satisfaire notre perception intuitive et à l'aide de concepts qu'il faut considérer comme provisoires, nous disons.

1. Il possède une horloge. C'est un système physique conduisant à un phénomène prétendu cyclique. La différence de temps entre deux événements de sa ligne d'univers est un multiple de la période, choisie comme unité, d'un phénomène cyclique. Après un choix arbitraire d'origine, l'horloge donne le temps t de l'observateur. C'est jusqu'à présent un fait d'expérience que tous les phénomènes cycliques, classiques ou quantiques, donnent le même temps t.
2. Il dispose d'une règle graduée dans son voisinage immédiat. Nous admettons qu'au cours du temps il peut la déplacer sans contrainte. Si deux événements peuvent être reliés par l'intermédiaire de cette règle alors ils sont dits simultanés pour cet observateur.

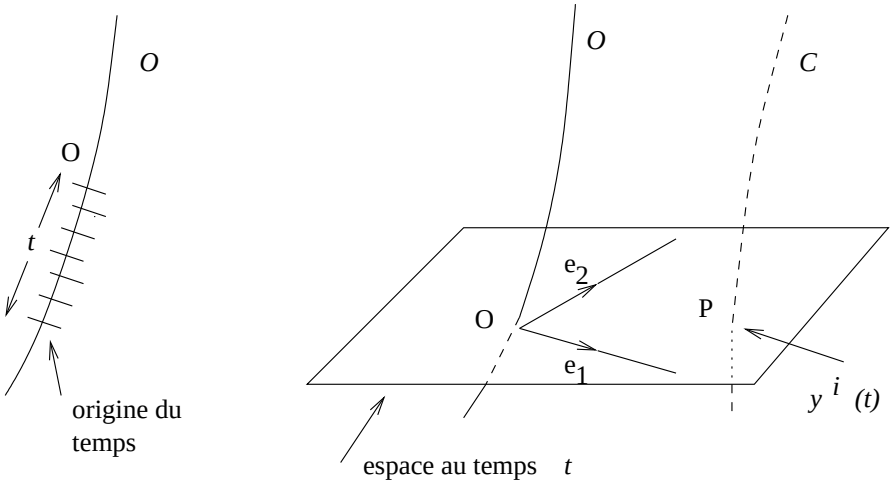
L'ensemble de tous les événements simultanés avec un point de la ligne d'univers au temps t est appelé l'espace au temps t de l'observateur. Nous postulons en conséquence que chaque espace au temps t de l'observateur, défini dans son voisinage immédiat, est notre espace usuel, c'est-à-dire est un petit ouvert de l'espace euclidien à trois dimensions. Evidemment, la règle graduée garde au cours du temps la même longueur pour la métrique euclidienne de chaque espace. L'espace est ainsi une construction destinée à aider l'observateur dans sa représentation spatio-temporelle de son environnement immédiat.

Pour repérer un événement dans l'espace-temps, nous insistons sur le fait que l'observateur doit se donner un repère dans chaque espace euclidien. En chaque point de la ligne d'univers $\mathcal{O}$, nous choisissons un trièdre e_i $(i = 1, 2, 3)$ de vecteurs orthonormés. Soit O le point de la ligne d'univers en t et P un point de l'espace au temps t de l'observateur. Il est repéré par les trois coordonnées cartésiennes y^i $(i = 1, 2, 3)$ définies par le repère (O,e_i) de l'espace euclidien [2]

$$OP = \sum_{i=1}^{3} y^i e_i \quad \text{soit} \quad OP = y^i e_i.$$

Les coordonnées y^i sont justement mesurées par la règle graduée le long de la droite tangente à chaque vecteur de la base e_i de l'espace euclidien. Compte tenu des propriétés

[2] Nous utilisons la convention d'Einstein pour la sommation des indices répétés.



supposées de l'observateur, les coordonnées y^i doivent être beaucoup plus petites qu'une certaine longueur ℓ

$$|y^i| \ll \ell$$

dont la valeur numérique dépendra de la situation physique considérée.

En fait, par cette hypothèse, nous avons d'emblée admis que cette description du plongement de l'observateur dans l'espace-temps n'est pas rigoureusement exacte. Elle est d'autant meilleure que le voisinage est petit, à la limite infinitésimal. L'extension spatiale de l'horloge et de la règle graduée doit être beaucoup plus petite que la longueur ℓ pour satisfaire les propriétés requises de cette description. Il en sera de même pour les autres appareils de mesure, par exemple un théodolite pour mesurer un angle par rapport au trièdre e_i.

L'observateur, muni du temps t et d'un trièdre e_i, repère ainsi autour de lui un événement de l'espace-temps par t et y^i. Nous sommes donc passés subrepticement du temps t de l'horloge à une coordonnée temporelle t. Les coordonnées y^i, mesurées avec la règle graduée, sont spatiales. Cela correspond à notre façon usuelle de penser un référentiel. Dans les coordonnées (t, y^i), l'observateur $\mathcal{O}$ décrit la ligne d'univers $\mathcal{C}$ d'une particule ponctuelle par l'équation $y^i(t)$. Nous pouvons définir une vitesse relative et une accélération relative

$$v^i = \frac{dy^i}{dt} \quad \text{et} \quad a^i = \frac{d^2y^i}{dt^2}.$$

Il reste un point essentiel. Quand deux observateurs peuvent repérer un événement de l'espace-temps respectivement par (t, y^i) et $(t', y^{i'})$ à l'aide d'horloges et de règles graduées identiques, quelle est la relation entre ces différentes coordonnées ? Pour répondre il faut connaître la structure géométrique de l'espace-temps et savoir comment l'observateur, avec ses appareils de mesure, y est plongé.

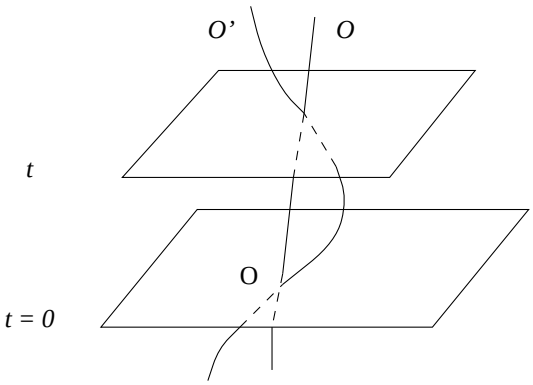
1.3 Espace-temps galiléen

La géométrie de l'espace-temps galiléen est celle d'un espace affine à quatre dimensions muni d'une famille de sous-espaces affines à trois dimensions parallèles entre eux et ayant en outre une géométrie d'espace euclidien. Nous avons donc une application T de l'espace-temps galiléen dans $\mathbb{R}$ qui paramétrise cette famille de sous-espaces.

Voyons comment l'observateur est plongé dans l'espace-temps galiléen.

1. Le temps t de l'horloge de l'observateur coïncide, à une constante additive près, avec T modulo un choix d'unité de temps. La direction du futur est dans le sens croissant de T [3].
2. L'espace au temps t de l'observateur coïncide avec l'espace euclidien de la famille de sous-espaces pour $T = t$.

Nous constatons que le temps est absolu. La simultanéité des événements est la même pour tous les observateurs : qu'un événement soit avant ou après un autre ne dépend pas de l'observateur. Si deux observateurs de ligne d'univers $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ prennent la même origine du temps en O alors leur horloge indiquera le même temps quand leurs lignes d'univers se recouperont.



En tout temps t, un repère de l'espace euclidien est formé du point O de la ligne d'univers $\mathcal{O}$ au temps t et du trièdre orthonormé e_i. En conséquence, un observateur peut repérer tous les événements de l'espace-temps galiléen : un événement se trouve dans un espace du feuilletage correspondant au temps t et dans lequel il est repéré par les coordonnées cartésiennes (y^i) relatives au trièdre e_i. Il n'y a pas lieu d'introduire une longueur ℓ.

Nous pouvons maintenant savoir dans l'espace-temps galiléen comment deux observateurs respectivement de lignes d'univers $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ et de trièdres e_i et $e_{i'}$ repèrent un même événement par les coordonnées (t, y^i) et $(t', y^{i'})$. D'après nos hypothèses, nous avons

$$t' = t + d^0$$

[3] Nous pouvons choisir une autre paramétrisation $T' = aT + b$ avec $a > 0$.

où d^0 est une constante que nous prenons nulle et les trièdres e_i et $e_{i'}$ sont reliés par une rotation de l'espace vectoriel euclidien $R_i^{j'}(t)$ dépendant du temps

$$e_i = \sum_{j'=1}^{3} R_i^{j'}(t) e_{j'} \quad \text{soit} \quad e_i = R_i^{j'}(t) e_{j'}.$$

En désignant par $d^{i'}(t)$ les coordonnées cartésiennes du point O pour l'observateur $\mathcal{O}'$ au cours du temps, nous obtenons

$$y^{i'} = R_j^{i'}(t) y^j + d^{i'}(t).$$

Cependant, des phénomènes physiques spécifiques apparaissent pour certains observateurs que nous appellerons accélérés, mais accélérés par rapport à quoi ? La réponse est fournie par l'existence d'une classe privilégiée d'observateurs, dits inertiels dans l'étude des lois de la dynamique. Nous les caractérisons de la façon suivante.

1. Leur ligne d'univers est une droite de l'espace-temps galiléen, non incluse dans l'espace. Aucune n'est privilégiée par rapport à la famillle des sous-espaces euclidiens.
2. Chaque vecteur e_i du trièdre se transporte par parallélisme le long de la ligne d'univers dans l'espace-temps galiléen. Les e_i sont orthonormés dans chaque espace euclidien. Nous pouvons dire qu'ils conservent une direction d'espace fixe au cours du temps.

Les coordonnées (y^i) associées à l'observateur inertiel $\mathcal{O}$ sont appelées galiléennes. La ligne d'univers d'un autre observateur inertiel $\mathcal{O}'$ a pour équation en fonction du temps

$$x^i(t) = v^i t + x_0^i$$

où x_0^i et v^i sont des constantes. La vitesse relative de $\mathcal{O}'$ par rapport à $\mathcal{O}$ est v^i. Nous n'avons pas besoin d'un observateur inertiel privilégié, présent néanmoins dans la pensée de Newton, par rapport auquel nous saurions si nous sommes animés d'une vitesse. En revanche, nous pouvons maintenant définir un observateur accéléré et en rotation par rapport aux observateurs inertiels.

La relation entre les coordonnées (t, y^i) et $(t', y^{i'})$ de ces deux observateurs inertiels $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ est un cas particulier de la formule générale précédemment établie qui prend le nom de transformation de Galilée

$$t' = t \quad \text{et} \quad y^{i'} = R_j^{i'} \left(y^j - v^j t - y_0^j \right)$$

où $R_i^{j'}$ est une rotation constante de l'espace vectoriel euclidien telle que $e_i = R_i^{j'} e_{j'}$.

1.4 Lois newtoniennes de la dynamique

C'est par rapport à la classe privilégiée des observateurs inertiels de l'espace-temps galiléen que les lois newtoniennes de la dynamique sont formulées.

1. La première loi stipule qu'une particule ponctuelle soumise à aucune force est en mouvement de translation uniforme pour un observateur inertiel. C'est le principe d'inertie qui caractérise justement les observateurs inertiels. Une autre façon de le dire est que sa ligne d'univers est une droite dans l'espace-temps galiléen.
2. La deuxième loi est la loi fondamentale de la dynamique pour une particule ponctuelle de masse inerte m soumise à un champ de forces extérieures $f^i(x^j)$

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i(x^j(t)).$$

Nous exigeons qu'il n'y ait pas d'observateurs privilégiés. Par conséquent, la loi fondamentale de la dynamique doit être invariante de forme pour tous les observateurs inertiels. Ainsi la force se transforme suivant la loi

$$f^{i'}(x^{k'}) = R^{i'}_j f^j(x^l(x^{k'}, t))$$

où $x^l(x^{k'}, t)$ est l'inverse de la transformation de Galilée. C'est le principe de relativité galiléenne. En fait, celui-ci doit être vrai pour toutes les lois de la physique.

3. La troisième loi est celle de l'action et de la réaction dans un système de particules ponctuelles en interaction. Si un corps a exerce une force $f^i_{(ab)}$ sur un corps b alors la force $f^i_{(ba)}$ exercée par le corps b sur le corps a est telle que $f^i_{(ba)} = -f^i_{(ab)}$.

Il existe de nombreuses expériences qui montrent que les conséquences de ces lois newtoniennes sont mises en défaut. Cela touche la géométrie de l'espace-temps galiléen car il n'y a en réalité pas de temps absolu pour les observateurs. Une évidence directe provient des expériences sur le temps de vie des muons effectuées dans les années quarante dans les rayons cosmiques et plus récemment dans les accélérateurs de particules.

1.5 Espace-temps minkowskien

L'espace-temps minkowskien est un espace affine à quatre dimensions dont l'espace vectoriel réel associé est muni d'un produit scalaire lorentzien η ; cela signifie qu'il existe une base e_a $(a = 0, 1, 2, 3)$ de l'espace vectoriel telle que

$$\eta(e_a, e_b) = \eta_{ab} \quad \text{avec} \quad \eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1).$$

Cette base constitue la tétrade lorentzienne. Soit X un vecteur, nous écrivons

$$X = \sum_{a=0}^{3} X^a e_a \quad \text{soit} \quad X = X^a e_a.$$

où X^a sont les composantes de X dans cette base. La norme de X au carré est donnée par

$$\eta(X, X) = \sum_{a=0}^{3}\sum_{b=0}^{3} \eta_{ab} X^a X^b \quad \text{soit} \quad \eta(X, X) = \eta_{ab} X^a X^b.$$

Pour un vecteur X, nous avons les définitions suivantes

$$\begin{array}{ll} \eta(X,X) < 0 & X \text{ orienté dans le temps} \\ \eta(X,X) = 0 & X \text{ isotrope} \\ \eta(X,X) > 0 & X \text{ orienté dans l'espace.} \end{array}$$

Une courbe quelconque de l'espace-temps minkowskien est décrite par une équation $x^\mu(\tau)$ où τ est un paramètre. Le vecteur-dérivée à la courbe est $dx^\mu/d\tau$. Le signe de la norme du vecteur-dérivée est indépendant du choix du paramétrage. Nous notons

$$\begin{array}{ll} dx^\mu/d\tau \text{ toujours orienté dans le temps} & \text{courbe } x^\mu(\tau) \text{ du genre temps} \\ dx^\mu/d\tau \text{ toujours isotrope} & \text{courbe } x^\mu(\tau) \text{ du genre lumière} \\ dx^\mu d\tau \text{ toujours orienté dans l'espace} & \text{courbe } x^\mu(\tau) \text{ du genre espace.} \end{array}$$

Un repère de l'espace-temps minkowskien est constitué d'une origine O et d'une tétrade lorentzienne e_a. Un événement M est repéré par les quatre coordonnées x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) grâce à la relation en espace affine

$$OM = x^0 e_0 + x^i e_i.$$

Les coordonnées (x^μ) sont appelées minkowskiennes.

Nous avons la notion de distance minkowskienne entre deux points M_1 et M_2 de l'espace-temps minkowskien, définie au carré par

$$s^2(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = \eta(M_1M_2, M_1M_2).$$

Dans un repère, les coordonnées minkowskiennes de M_1 et M_2 sont respectivement x_1^μ et x_2^μ et nous avons l'expression en coordonnées de la distance minkowskienne

$$s^2(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = \eta_{\mu\nu}(x_1^\mu - x_2^\mu)(x_1^\nu - x_2^\nu).$$

Nous appelons $\eta_{\mu\nu}$ la métrique minkowskienne. Nous notons ds^2 le carré de la distance minkowskienne entre deux points infiniment voisins de coordonnées x^μ et $x^\mu + dx^\mu$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Il faut faire attention que $s^2(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$ peut être nul, négatif ou positif. Soit un point M, l'ensemble des points à une distance minkowskienne nulle de M est appelé le cône de lumière issu de M, noté C_M.

Nous allons définir une orientation temporelle. Nous décidons que pour un repère (O, e_a), le demi-cône qui contient e_0 est le demi-cône futur C_M^+. L'autre demi-cône est le demi-cône passé C_M^-. Tout vecteur X orienté dans le temps sera dit soit dirigé vers le futur si $X^0 > 0$, c'est-à-dire $\eta(X, e_0) < 0$, soit dirigé vers le passé dans le cas contraire.

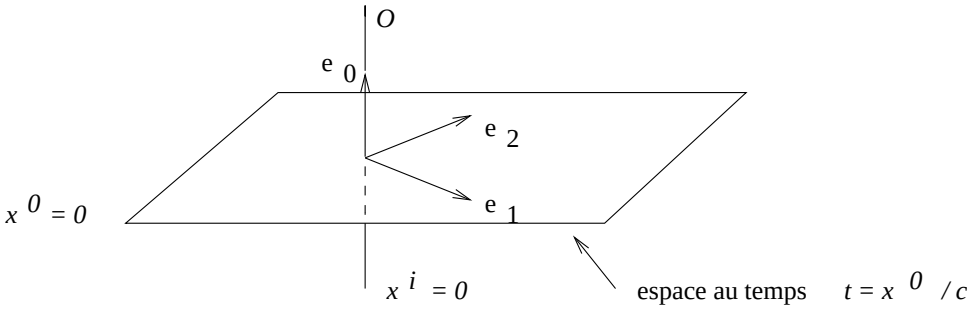
Nous postulons que la ligne d'univers d'une particule ponctuelle est une courbe du genre temps. Nous remarquons que nous pouvons paramétrer la courbe à l'aide d'un paramètre s tel que le vecteur-dérivée dx^μ/ds soit de norme -1 et dirigé vers le futur

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{dx^0}{ds} > 0,$$

s étant défini à une constante additive près [4]. Nous appelons ce vecteur-dérivée à la ligne d'univers la quadri-vitesse de la particule ponctuelle, souvent dénotée u^μ.

Nous allons tout de suite introduire une classe privilégiée d'observateurs, dits inertiels, de l'espace-temps minkowskien. Considérons un repère (O, e_a) avec e_0 dirigé vers le futur. Nous définissons le plongement de l'observateur $\mathcal{O}$ associé à ce repère de la façon suivante.

1. Sa ligne d'univers est la droite du genre temps d'équation $x^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. La quadri-vitesse coïncide avec e_0 et le paramètre s correspond à x^0. Nous admettons que le temps t de l'horloge de cet observateur est
$$t = \frac{1}{c} x^0 \quad \text{soit aussi} \quad t = \frac{s}{c}$$
où c est une constante universelle [5] qui s'interprétera ultérieurement comme la vitesse de la lumière.
2. L'espace au temps t de l'observateur est l'espace euclidien défini par $x^0 = ct$. Il est orthogonal à la ligne d'univers. Le trièdre e_i de l'observateur inertiel coïncide avec celui défini par les e_i de la tétrade lorentzienne le long de la droite d'équation $x^i = 0$. Chaque vecteur e_i se transporte donc par parallélisme le long de la ligne d'univers.



L'observateur inertiel peut repérer tous les événements de l'espace-temps minkowskien grâce aux coordonnées minkowskiennes (x^μ) dans lesquelles x^0 est c fois le temps t de l'observateur et les x^i coïncident avec les coordonnées galiléennes y^i de l'observateur.

Un autre observateur inertiel $\mathcal{O}'$, implicitement avec des horloges et des règles graduées identiques, est caractérisé par un repère (O',$e_{a'}$) avec la condition $e_{0'}$ dirigé vers le futur. Les coordonnées minkowskiennes associées sont $(x^{\mu'})$. La relation entre les coordonnées (x^μ) et $(x^{\mu'})$ d'un même événement est donnée par la transformation de Poincaré
$$x^{\mu'} = L^{\mu'}_{\nu} x^\nu + D^\mu \quad \text{avec} \quad L^{0'}_0 > 0$$
où D^μ sont les coordonnées du point O pour l'observateur primé et où $L^{b'}_a$ sont les transformations de Lorentz, dites orthochrones, satisfaisant
$$e_a = L^{b'}_a e_{b'}$$

[4] Nous attirons l'attention sur le télescopage de signe avec la distance minkowskienne infinitésimale $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

[5] $c = 2,997\,924\,58 \times 10^8$ m . s^{-1}. Il s'agit d'une valeur exacte qui sert à dériver l'unité de longueur de l'unité de temps depuis 1983.

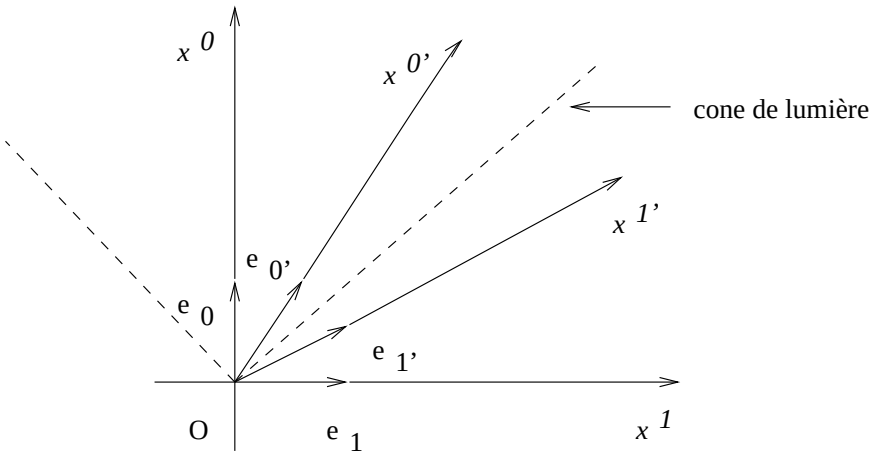
qui conservent la métrique minkowskienne $\eta_{\rho\sigma} = L^{\mu'}_{\rho} L^{\nu'}_{\sigma} \eta_{\mu'\nu'}$ avec $\eta_{\rho'\sigma'} = \eta_{\rho\sigma}$. En ajoutant que les transformations conservent l'orientation des tétrades e_a et $e_{a'}$, c'est-à-dire $\det L^{\mu'}_{\nu} = 1$, nous obtenons les transformations propres orthochrones du groupe de Lorentz, notées $\mathrm{L}_0(4)$ ou bien $\mathrm{L}^{\uparrow}_{+}(4)$. Il s'agit du sous-groupe connexe à l'identité du groupe de Lorentz complet $\mathrm{L}(4)$.

La forme générale des transformations peut être obtenue. Nous nous contentons de donner la transformation spéciale de Lorentz

$$x^{0'} = \frac{x^0 - wx^1}{\sqrt{1-w^2}} \quad x^{1'} = \frac{x^1 - wx^0}{\sqrt{1-w^2}} \quad x^{2'} = x^2 \quad x^{3'} = x^3$$

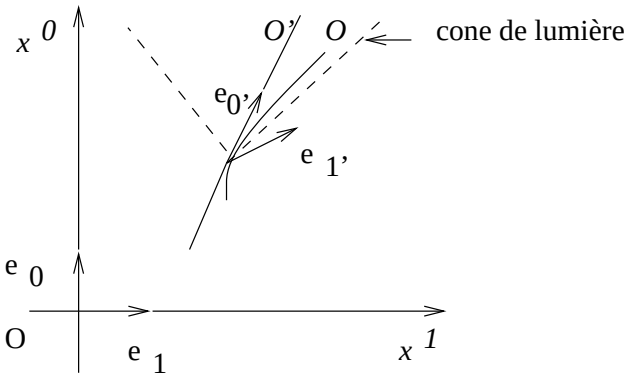
où w est une constante plus petite que un en valeur absolue. L'équation de la ligne d'univers de l'observateur $\mathcal{O}'$ est $x^{1'} = 0$ soit $x^1(x^0) = wx^0$. Ceci donne la vitesse relative par rapport à l'observateur $\mathcal{O}$ qui a pour expression $v^1 = cw$. Ainsi, la vitesse relative entre deux observateurs inertiels $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ est toujours plus petite que c. Si $v^1/c \ll 1$ et $v^1 x^1/c \ll x^0$ alors nous retrouvons la transformation spéciale de Galilée.

Nous avons le diagamme de Minkowski de l'espace-temps minkowskien, réduit à deux dimensions sur le schéma ci-dessous, pour les deux observateurs inertiels de lignes d'univers $x^1 = 0$ et $x^{1'} = 0$.



Nous constatons que le feuilletage d'espaces euclidiens, parallèles entre eux, dépend du choix de l'observateur inertiel. Ainsi qu'un événement soit avant ou après un autre dépend de l'observateur. En revanche, si un événement M_1 est dans le demi-cône futur issu d'un événement M_2 alors tous les observateurs repèrent M_1 après M_2. C'est la notion de causalité valable pour tout observateur.

Un observateur quelconque, dit accéléré, est décrit dans l'espace-temps minkowskien par une ligne d'univers du genre temps. En chaque point de la ligne d'univers de l'observateur quelconque, nous pouvons trouver un certain observateur inertiel tangent qui coïncide instantanément, c'est-à-dire tel que $e^{\mu}_{0'} = u^{\mu}$ où u^{μ} est la quadri-vitesse de l'observateur accéléré avec $u^0 > 0$. Cela suggère que nous fassions les hypothèses suivantes pour définir le temps et l'espace de cet observateur.

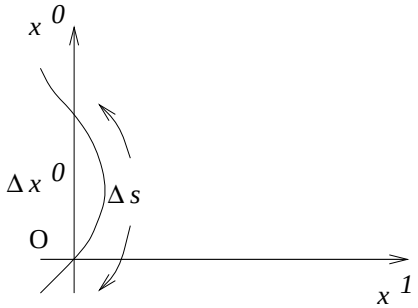


Tout d'abord, le temps t donné par l'horloge de l'observateur accéléré s'exprime à l'aide du paramètre s de la ligne d'univers par

$$t = \frac{s}{c}.$$

Ainsi l'horloge ne devrait pas être affectée par son accélération tout au moins à la précision actuelle des horloges. Le paramètre s est appelé le temps propre [6].

Si deux observateurs, dont un est par exemple inertiel, prennent la même origine O du temps pour leur horloge alors, quand ils se recoupent, l'horloge de l'observateur non inertiel indiquera une durée plus petite que celle de l'observateur inertiel. Sur le diagramme d'espace-temps de Minkowski, nous avons contrairement aux apparences $\triangle s < \triangle x^0$. C'est le paradoxe des jumeaux ou le voyageur de Langevin. Un jumeau parti en voyage est au retour plus jeune que celui resté inertiel. Pour le prouver nous allons montrer que le temps



propre s est extremum pour la droite. Nous considérons une courbe du genre temps $x^\mu(\tau)$. La différence de temps propre $\triangle s$ entre les deux événements caractérisés par τ_i et τ_f a pour expression

$$\triangle s = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau,$$

indépendante du choix du paramètre τ. En prenant comme paramètre la coordonnée x^0 de

[6] Il y a un abus de vocabulaire car il faut diviser par c.

l'observateur inertiel, nous obtenons

$$\triangle s = \int_{x_i^0}^{x_f^0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dx^0 \quad \text{car} \quad \frac{dx^i}{dx^0} = \frac{v^i}{c} \quad \text{et donc} \quad \triangle s < \triangle x^0.$$

Revenons à l'espace de l'observateur accéléré. Par analogie avec l'observateur inertiel, nous souhaiterions que l'espace de cet observateur, qui est un espace euclidien, soit orthogonal à la quadri-vitesse en tout point de la ligne d'univers. Cependant, ces espaces ne sont pas parallèles entre eux et ils vont se couper. Nous aurons nécessairement une limitation de l'espace. Certes, nous pouvons introduire un trièdre orthonormé e_i qui soit dans ces espaces et définir les coordonnées (y^i) associées mais la question est de savoir si elles ont une interprétation physique. La difficulté vient du fait que nous ne pouvons plus mesurer avec une règle graduée car il n'existe pas de mouvement rigide quelconque en espace-temps minkowskien comme l'a montré Born en 1909, modulo une définition d'un mouvement rigide. Nous n'allons pas donner la démonstration de cela. Il faut souligner que la situation est radicalement différente de celle qui prévaut dans l'espace-temps galiléen où l'on déplace librement un corps solide servant de référentiel. Néanmoins, nous pouvons admettre que les coordonnées (y^i) prendront leur sens usuel pour un référentiel dans la limite

$$| y^i | \ll \ell \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{c^2}{| a^i |}$$

où ℓ est la seule longueur disponible pour un observateur d'accélération relative a^i [7].

Nous allons prendre l'exemple de l'observateur uniformément accéléré sans rotation d'accélération relative $(a, 0, 0)$. Dans le plan $x^2 = x^3 = 0$, sa ligne d'univers a pour équation

$$x^0(s) = \frac{c^2}{a} \sinh \frac{as}{c^2} \quad , \quad x^1(s) = \frac{c^2}{a} \cosh \frac{as}{c^2}$$

et la quadri-vitesse u^μ a pour composantes

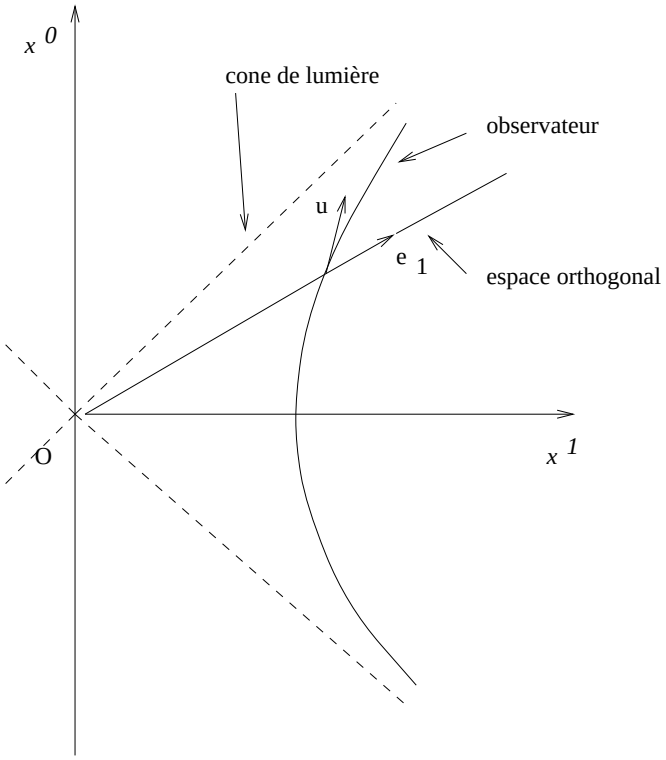
$$u^0 = \cosh \frac{as}{c^2} \quad , \quad u^1 = \sinh \frac{as}{c^2}.$$

Nous choisissons comme vecteur e_1 du trièdre le vecteur de composantes

$$e_1^0 = \sinh \frac{as}{c^2} \quad , \quad e_1^1 = \cosh \frac{as}{c^2}.$$

La quadri-accélération $a^\mu = du^\mu/ds$, orthogonale à u^μ, a pour composantes $(a/c^2, 0, 0)$ dans le trièdre e_i puisque $a^\mu = (a/c^2)e_1^\mu$. Dans le plan $x^2 = x^3 = 0$, l'espace en un point de la ligne d'univers est la demi-droite passant par ce point et ayant pour origine O. Il est clair sur le diagramme de Minkowski que cet observateur ne peut pas repérer tous les événements de l'espace-temps minkowskien. Nous sommes cependant ici dans un cas particulier car il s'agit d'un mouvement rigide uniformément accéléré.

[7] Nous avons de la marge puisque $\ell \approx 10^{16}$ m pour une accélération de 10 m . s^{-2}.



1.6 Lois relativistes de la dynamique

La première loi de la dynamique dit qu'une particule ponctuelle soumise à aucune force est en mouvement de translation uniforme pour tous les observateurs inertiels, autrement dit sa ligne d'univers est une droite du genre temps dans l'espace-temps minkowskien.

En général, la description de l'interaction pour un système de particules ponctuelles ne se fait efficacement que dans le cadre d'une théorie classique des champs. Dans le cas présent, nous allons simplement considérer une particule ponctuelle de masse inerte m dans un champ de forces extérieures. La loi relativiste de la dynamique est formulée pour un observateur inertiel, c'est-à-dire dans un système de coordonnées minkowskiennes (x^μ). Soit un champ de quadri-forces extérieures $F^\mu(x^\lambda)$, nous avons la loi relativiste de la dynamique

$$m\frac{du^\mu}{ds} = F^\mu(x^\lambda(s)) \quad \text{avec} \quad \eta_{\mu\nu}u^\mu F^\nu = 0$$

où $x^\mu(s)$ est la ligne d'univers de la particule avec s le temps propre et u^μ la quadri-vitesse. La condition algébrique est nécessaire pour assurer la compatibilité car

$$\frac{d}{ds}\left(\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right) = 0 \quad \text{soit} \quad m\eta_{\mu\nu}u^\mu\frac{du^\nu}{ds} = 0.$$

Le vecteur énergie-impulsion p^μ de la particule, ou quadri-impulsion, est définie par

$$p^\mu = mcu^\mu.$$

La loi relativiste de la dynamique aura la même forme pour tous les observateurs inertiels si le champ de quadri-forces est bien un champ de vecteurs de l'espace-temps minkowskien, c'est-à-dire si par changement de coordonnées minkowskiennes on a

$$F^{\mu'}(x^{\rho'}) = L^{\mu'}_{\nu} F^{\nu}(x^{\sigma}(x^{\rho'})).$$

Naturellement la condition algébrique est encore vérifiée $\eta_{\mu'\nu'} u^{\mu'} F^{\nu'} = 0$. Il n'y a pas d'observateurs inertiels privilégiés. C'est le principe de relativité. En fait, ceci est vrai pour toutes les lois de la physique, éventuellement en se limitant aux transformations de Lorentz propres $\mathrm{L}_0(4)$.

La lumière a un statut particulier dans l'espace-temps minkowskien. L'invariance relativiste des équations de Maxwell implique que la constante c est la vitesse de la lumière. Comme une conséquence de ces équations, le vecteur de propagation k^μ de la lumière est isotrope. Ses composantes sont constantes pour un observateur inertiel. La ligne d'univers d'un photon, considéré comme une particule ponctuelle de masse nulle, est une droite du genre lumière. Il en résulte que la vitesse relative de la lumière est c pour tous les observateurs inertiels. En effet, en prenant la direction croissante x^1, nous avons

$$x^0(\lambda) = k^0\lambda \quad (k^0 > 0) \qquad x^1(\lambda) = k^1\lambda \quad \text{mais} \quad k^0 = k^1 \quad \text{donc} \quad x^1(x^0) = x^0.$$

En coordonnées minkowskiennes (x^μ), nous représentons une onde plane monochromatique par la fonction complexe

$$\mathcal{A}(x^\nu) = a_0 \exp(-i\eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu)$$

où k^μ est le vecteur de propagation qui est isotrope $\eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$. Nous prenons $k^0 > 0$. Le point important est que la phase de l'onde est une fonction de l'espace-temps minkowskien. Nous pouvons définir la fréquence $\nu[u]$ mesurée par un observateur inertiel de quadri-vitesse u^μ par l'expression

$$\nu[u] = -\frac{c}{2\pi} \eta_{\mu\nu} u^\mu k^\nu,$$

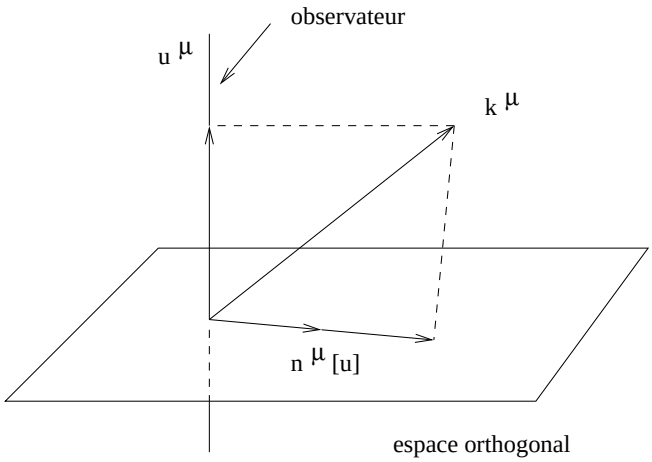
en faisant attention que $\eta_{\mu\nu} u^\mu k^\nu < 0$, qui est valable dans tout système de coordonnées minkowskiennes. Nous pouvons également introduire la direction de propagation $n^\mu[u]$ de l'onde plane relative à l'observateur inertiel u^μ par l'expression

$$n^\mu[u] = \frac{1}{(-\eta_{\rho\sigma} k^\rho u^\sigma)} \left(k^\mu + \eta_{\rho\sigma} k^\rho u^\sigma u^\mu\right)$$

qui satisfait $\eta_{\alpha\beta} n^\alpha[u] n^\beta[u] = 1$ et $\eta_{\alpha\beta} n^\alpha[u] u^\beta = 0$. C'est un vecteur orienté dans l'espace, pouvant donc s'exprimer dans le trièdre e_i ; nous avons $n^\mu = n^i e^\mu_i$.

L'interprétation géométrique de ces quantités dans l'espace-temps minkowskien est claire. Elle correspond à la décomposition du vecteur k^μ sur u^μ et sur le sous-espace orthogonal à u^μ qui est l'espace de l'observateur. La façon dont ces quantités dépendent de u^μ à l'observation et à l'émission conduit aux formules de l'effet Doppler relativiste et de l'aberration. En particulier, nous avons la formule du décalage des fréquences

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\eta_{\mu\nu} k^\mu u^\nu_e}{\eta_{\mu\nu} k^\mu u^\nu_o}.$$



L'expression adoptée de $\mathcal{A}$ fixe k^μ. Cependant dans la pratique, le vecteur de propagation de la lumière n'est donné qu'à une constante multiplicative près. Bien entendu, cela n'affecte pas l'effet Doppler relativiste ν_e/ν_o.

Pour un observateur accéléré de quadri-vitesse u^μ, nous aurons les mêmes expressions de la fréquence $\nu[u]$ et de la direction de propagation $n^\mu[u]$ dans l'espace de l'observateur, avec tout de même la restriction toute théorique $\nu[u] \gg \mid a^i \mid /c$ puisque pour faire une mesure de fréquence il faut une certaine extension temporelle. Une autre façon de le dire est que l'on ne peut plus considérer un observateur inertiel coïncidant instantanément durant le temps de la mesure de la fréquence avec l'observateur accéléré.

Cette géométrie de l'espace-temps minkowskien est tout à fait satisfaisante pour décrire la physique tant que les effets gravitationnels ne sont pas pris en ligne de compte.

Chapitre 2

Théorie de Newton de la gravitation

2.1 Loi d'attraction gravitationnelle et principe d'équivalence faible

Dans l'espace-temps galiléen, nous avons formulé l'équation fondamentale de la dynamique pour des observateurs inertiels. Pour une particule ponctuelle a de masse inerte m_a dont la ligne d'univers est définie par $x_a^i(t)$, nous avons

$$m_a \frac{d^2 x_a^i}{dt^2} = f^i(x_a^k(t))$$

pour un champ de forces extérieures f^i qui se transforme comme un vecteur sous une transformation de Galilée.

La loi d'attraction gravitationnelle, publiée par Newton en 1687 dans les *Principia*, stipule que la force f^i exercée sur cette particule a par un ensemble de particules est donnée par

$$f^i = m_{ga}^{(\mathrm{p})} g^i$$

où $m_{ga}^{(\mathrm{p})}$ est la masse grave passive de la particule a et où g^i est le champ gravitationnel des autres particules. Dans le cas d'une seule autre particule ponctuelle b de masse grave active $m_{gb}^{(\mathrm{a})}$, g^i a pour expression

$$g^i(x^k) = -G m_{gb}^{(\mathrm{a})} \frac{(x^k - x_b^k)}{|\, x^i - x_b^i \,|^3}$$

où G est une constante de couplage gravitationnel. Nous notons que cette loi est invariante de forme sous une transformation de Galilée. Nous introduisons le potentiel newtonien de gravitation du corps b

$$U(x^k) = G m_{gb}^{(\mathrm{a})} \frac{1}{|\, x^i - x_b^i \,|}.$$

L'énergie potentielle d'interaction pour la particule a est $V_a = -m_{ga}^{(p)} U$.

Cependant en vertu de l'égalité de l'action et de la réaction, nous voyons immédiatement que $m_{ga}^{(\mathrm{p})} m_{gb}^{(\mathrm{a})} = m_{gb}^{(\mathrm{p})} m_{ga}^{(\mathrm{a})}$. Nous posons le rapport des masses graves actives et passives égale à un et il existe seulement les masses graves m_{ga} et m_{gb}. Ce choix fixe la valeur numérique de la constante de Newton. Celle-ci est déterminée par des expériences en laboratoire dans lesquelles la force gravitationnelle entre deux boules est mesurée. Ce fut réalisé la première fois par Cavendish en 1798. Elle est trouvée avec une faible précision numérique [1] et pour une plage de distance entre les deux masses peu étendue. Dans le système solaire, seuls les produits Gm où m est la masse du corps céleste sont connus avec une très grande précision.

Revenons à l'équation de la dynamique d'une particule ponctuelle écrite sous la forme

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = m_{\mathrm{g}} g^i.$$

Elle peut s'appliquer dans le cas où g^i est pratiquement constant, par exemple à la surface de la Terre. Or il y a un fait expérimental reconnu par Galilée, popularisé avec l'expérience mythique de la tour de Pise, que tous les corps chutent de la même façon indépendamment de leur masse et de leur composition interne. Cela prouve que

$$m = m_{\mathrm{g}}.$$

Ceci est tout à fait remarquable puisque m et m_{g} sont des concepts complètement différents. C'est ce qu'on appelle le principe d'universalité de la chute libre. Il permet d'écrire l'équation du mouvement d'une particule dans un champ de gravitation g^i sous la forme

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = g^i.$$

C'est un état de fait en théorie de Newton de la gravitation mais il est raisonnable de penser que ceci est un fait crucial.

Considérons maintenant un observateur sans rotation et d'accélération constante a^i qui a pour équation $x^i(t) = a^i t^2/2$ pour des valeurs initiales adéquates. Il n'est pas difficile de voir qu'un événement repéré par (t, y^i) est repéré par les coordonnées $(t', y^{i'})$ de l'observateur accéléré suivant la formule

$$t' = t \quad \text{et} \quad y^{i'} = y^i - \frac{1}{2} a^i t^2.$$

Une particule libre d'équation $y^i(t) = v^i t + y_0^i$ est décrite par l'observateur accéléré par la courbe $y^{i'}(t)$ qui vérifie l'équation suivante

$$\frac{d^2 y^{i'}}{dt^2} = -a^i.$$

Cette équation du mouvement est à rapprocher de celle d'une particule dans un champ de gravitation g^i pratiquement constant. En conséquence, nous ne pouvons pas savoir

[1] $G \simeq 6,673 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\,.\,\mathrm{kg}^{-1}\,.\,\mathrm{s}^{-2}$.

localement si nous sommes un observateur inertiel observant une particule subissant l'action d'un champ gravitationnel uniforme g^i ou bien si nous sommes un observateur sans rotation mais accéléré, d'accélération $a^i = -g^i$, observant une particule libre. Cette formulation s'appelle alors le principe d'équivalence faible.

De façon équivalente, c'est la célèbre histoire de l'ascenseur en chute libre dans le champ gravitationnel de la Terre, réellement vécue à l'intérieur d'un avion mis en chute libre en coupant ses moteurs quelques dizaines de secondes. En effet, pour un observateur accéléré l'équation du mouvement d'une particule libre est

$$\frac{d^2 y^{i'}}{dt^2} = -a^i + g^i$$

pour une pesanteur constante g^i. Or $-a^i + g^i = 0$ dans le référentiel en chute libre c'est pourquoi le mouvement d'une particule est rectiligne et uniforme dans ce référentiel bien qu'il soit accéléré du point de vue d'un observateur inertiel. On dit qu'il est localement inertiel. En réalité deux particules en chute libre se rapprochent car ceci n'est valable que si l'on néglige $\partial_{ij} U$, c'est-à-dire les effets de marée.

2.2 Vérifications expérimentales du principe d'équivalence faible

La première vérification expérimentale de l'égalité de la masse inerte et de la masse grave a été faite par Galilée vers 1610 avec des plans inclinés puis à l'aide du pendule. Si L désigne la longueur du pendule, la période T des petites oscillation est donnée par

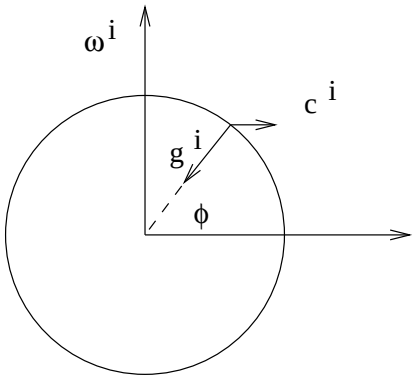
$$T = 2\pi \left(\frac{m}{m_{\mathrm{g}}}\right)^{1/2} \left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}$$

où g est l'accélération de la pesanteur [2]. L'observation montre que celle-ci est indépendante du rapport m/m_{g}. Newton reprendra cette expérience. La précision estimée serait de 10^{-3}.

Cependant des résultats plus précis peuvent être obtenus à l'aide d'une balance de torsion suivant une idée due à Eötvös à la fin du 19 ème siècle. Les expériences récentes basées sur ce principe ont des précisions allant jusqu'à 10^{-12}. Vu l'importance de cette expérience, nous allons détailler quelque peu le principe de l'expérience.

Soient deux masses a et b situées aux extrémités A et B du fléau d'une balance de torsion qui est relié en O au fil de torsion, lui-même fixé au bâti. Les masses des corps a et b sont supposées très voisines. Le bâti de la balance de torsion est fixé dans le référentiel lié à la surface de la Terre. Il est donc en rotation par rapport au référentiel géocentrique supposé inertiel. Il y a donc une accélération centrifuge c^i de norme $|\, c^i \,| = R\omega^2 \cos\phi$ et l'accélération g^i dû au champ gravitationnel de la Terre.

[2] $g \simeq 9,8 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-2}$.



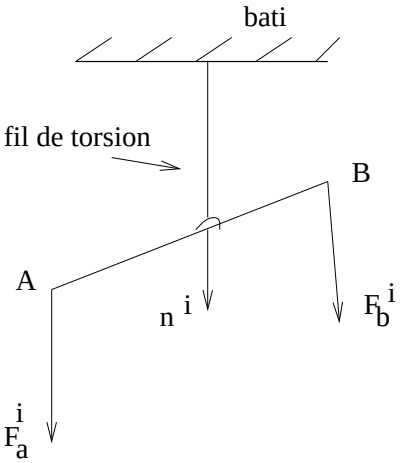
Les masses subissent respectivement les forces suivantes

$$F_a^i = m_{ga} g^i + m_a c^i \quad \text{et} \quad F_b^i = m_{gb} g^i + m_b c^i$$

où m_{ga} et m_{gb} sont les masses graves et m_a et m_b les masses inertes. Désignons par n^i le vecteur unitaire en O donnant la direction du fil et posons

$$T^i = T n^i \quad \text{et} \quad C^i = C n^i$$

où T^i est la tension exercée par le fléau sur le fil et C^i le couple exercé par le fléau sur le fil.



A l'équilibre, nous avons [3]

$$F_a^i + F_b^i = T^i \quad \text{et} \quad \epsilon_{ijk} (\mathrm{OA})^j F_a^k + \epsilon_{ijk} (\mathrm{OB})^j F_b^k = C_i$$

Il faut déterminer C. Pour cela nous calculons $C_i T^i$, soit $C_i T^i = \epsilon_{ijk} (\mathrm{AB})^i F_a^j F_b^k$, et par suite

$$C = \frac{1}{\mid F_a^i + F_b^i \mid} \epsilon_{ijk} (\mathrm{AB})^i F_a^j F_b^k = \frac{m_{ga} m_b - m_a m_{gb}}{\mid F_a^i + F_b^i \mid} \epsilon_{ijk} (\mathrm{AB})^i g^j c^k.$$

[3] $\epsilon_{ijk} = 1$ si i, j, k permutation paire de 1,2,3 et $\epsilon_{ijk} = -1$ si i, j, k permutation impaire de 1,2,3 et $\epsilon_{ijk} = 0$ si deux indices sont identiques.

Nous voyons que le couple C mesure directement la non-colinéarité des forces F_a^i et F_b^i. C'est justement le cas si $m_{ga}/m_a \neq m_{gb}/m_b$. En tournant le bâti de 180°, on échange les masses a et b et par conséquent $C \rightsquigarrow -C$. Si $C \neq 0$ il résulte alors une déviation du fléau.

Notons que les expériences les plus récentes sont considérées dans le champ gravitationnel du Soleil. C'est après 12 heures que les masses a et b sont interverties grâce à la rotation de la Terre. Le principe d'équivalence faible semble ainsi remarquablement vérifié [4]. Dans le futur, il est prévu des expériences satellitaires : MICROSCOPE (MICROSatellite à Compensation de trainée pour l'Observation du Principe d'Equivalence) et STEP (*Satellite Test of the Equivalence Principle*). Deux corps massifs libres à l'intérieur du satellite sont en orbite autour de la Terre. On espère respectivement une précision de l'ordre de 10^{-15} et 10^{-17}.

2.3 Equation de Schrödinger et principe d'équivalence faible

Pour un observateur inertiel dans l'espace-temps galiléen, l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde Ψ décrivant une particule ponctuelle de masse inerte m soumise à une énergie potentielle d'interaction V a pour expression

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi + V\Psi$$

où $\hbar$ est la constante de Planck [5].

Prenons une particule libre et voyons quelle sera la description de celle-ci par un autre observateur inertiel qui est défini par une transformation spéciale de Galilée de vitesse v dans la direction x. Nous trouvons

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\Psi.$$

L'équation de Schrödinger aura la même forme si nous changeons la fonction d'onde par un terme de phase

$$\Psi' = \Psi \exp -\frac{i}{\hbar}\left(mvx' + \frac{1}{2}mv^2t'\right).$$

[4] Il faut tout de même signaler qu'il y a quelques années certaines expériences ont suggéré l'existence d'une cinquième force, donc pas nécessairement gravitationnelle, qui contribuerait de la façon suivante à l'énergie potentielle d'interaction $V = -\frac{G_\infty m_a m_b}{r}\left(1 + \alpha_{ab}\exp -\frac{r}{\lambda}\right)$ où G_∞ est la valeur de la constante de Newton à l'infini, λ une portée intermédiaire de l'ordre de 100 m à 1 km et α_{ab} serait un coefficient dépendant de la composition des corps a et b, $|\alpha_{ab}| < 10^{-4}$. L'origine de cette force viendrait du couplage avec le nombre de baryons ou hypercharge dépendant donc de la différence des rapports B/μ, nombre de baryons sur la masse en unité atomique. A cause de ce couplage, des corps massifs de différentes compositions ne tomberaient pas de la même façon.

[5] $\hbar \simeq 1,054\,573 \times 10^{-34}$ J.s.

Ainsi la fonction d'onde n'est pas un scalaire sous une transformation de Galilée. Heureusement seule la norme est mesurable puisque c'est la densité de présence de la particule.

Nous allons nous poser maintenant la même question mais pour l'observateur accéléré, d'accélération constante a^1 dans la direction x, et sans rotation. Nous trouvons

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t'} - a^1 t'\frac{\partial}{\partial x'}\right)\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\Psi.$$

L'équation de Schrödinger pour l'observateur accéléré prend une forme simple si l'on effectue le changement de phase

$$\Psi' = \Psi \exp -\frac{i}{\hbar}ma^1\left(x't' + \frac{1}{6}a^1 t'^3\right)$$

conduisant alors à l'équation

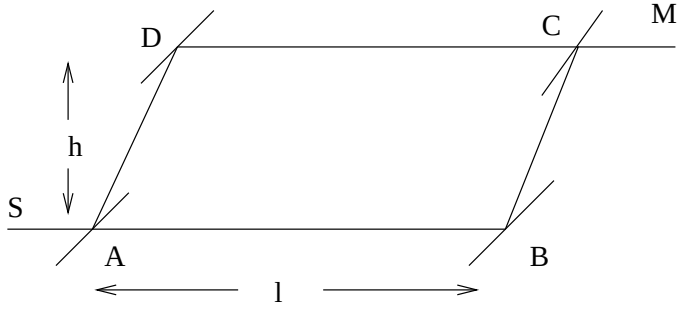
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\Psi' = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\Psi' + ma^1 x'\Psi'.$$

Nous pouvons maintenant revenir au principe d'équivalence faible. L'équation de Schrödinger pour une particule de masse inerte m dans un champ de gravitation uniforme g^1 dans la direction x correspond à l'énergie potentielle $V = -m_{\rm g}g^1 x$ où $m_{\rm g}$ est la masse grave, soit [6]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi - m_{\rm g}g^1 x\Psi.$$

Nous avons donc l'analogue quantique du principe d'équivalence faible : si $m = m_{\rm g}$ nous aurons une description équivalente, à une transformation unitaire près, en prenant $a^1 = -g^1$. Nous notons que nous n'avons pas le principe d'universalité de la chute libre d'une particule quantique. En tout cas, un observateur en chute libre sera localement inertiel dans le cadre quantique.

Pour essayer de le vérifier expérimentalement, il faut disposer d'une expérience quantique dans un champ de gravitation uniforme, en l'occurence celui de la Terre. C'est possible avec l'interférométrie à neutrons et l'expérience a été faite en 1975. Une source émet des



[6] On a récemment observé des états liés de cette équation de Schrödinger en faisant rebondir des neutrons sur un plan horizontal

neutrons lents à une vitesse v. Il y a quatre cristaux qui réfléchissent partiellement le faisceau de neutrons. La partie SAB est horizontale ainsi que DCM mais à une hauteur h. Il y a deux chemins possibles qui se terminent par une superposition quantique en M. Il s'agit donc bien d'un phénomène d'interférence quantique en présence d'un champ de gravitation.

Nous pouvons faire la théorie de l'expérience dans le cadre de la théorie quasi-classique de l'équation de Schrödinger

$$\Psi \propto \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar} + \frac{i}{\hbar}\int^x p(x)dx\right) \quad \text{avec} \quad p(x) = \sqrt{2m(E-V(x))}$$

où m est la masse du neutron [7]. Ainsi, les variations de phase sur les parties horizontales sont respectivement

$$\delta_{\mathrm{SAB}}\phi = \frac{l}{\hbar}\sqrt{2mE} \quad \text{et} \quad \delta_{\mathrm{DCM}}\phi = \frac{l}{\hbar}\sqrt{2m(E-mgh)}.$$

avec l'énergie potentielle prise nulle sur AB [8]. Les parties AD et BC sont symétriques et donnent la même phase. Par conséquent, le déphasage des deux chemins en M est $\delta\phi = \delta_{\mathrm{SAB}}\phi - \delta_{\mathrm{DCM}}\phi$. En développant en g, nous obtenons l'expression approchée

$$\delta\phi \approx \frac{mglh\sqrt{2mE}}{2\hbar E} \quad \text{soit} \quad \delta\phi \approx mglh\frac{1}{\hbar v}.$$

Ainsi le nombre de neutrons comptés en M résultant de l'interférence va dépendre de la valeur de $\delta\phi$. Il est aisé de modifier h en faisant tourner l'interféromètre autour de l'axe AB faisant apparaître des maximums et des minimums. Ceci permet de déterminer g au centième près. L'expérience a été faite en référentiel accéléré.

2.4 Equations newtoniennes du mouvement d'un fluide

Il sera utile de connaître dans la suite les équations de la théorie de Newton de la gravitation dans le cas d'un fluide défini par la densité volumique de masse ρ, le champ de vitesses v^i et la pression p. Le potentiel de gravitation U satisfait l'équation de Poisson

$$\triangle U = -4\pi G\rho$$

et les équations du mouvement du fluide sont

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho v^i\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k v^i) = \rho\frac{\partial}{\partial x^i}U - \frac{\partial}{\partial x^i}p$$

[7] $m \simeq 1,7 \times 10^{-27}$ kg.

[8] La source produit des neutrons lents de longueur d'onde $\lambda_{\mathrm{SAB}} \simeq 1,4$ Å.

dans lesquelles le principe d'équivalence faible a été admis. Il faut bien sûr ajouter une équation d'état $\rho(p)$.

Le problème de deux corps étendus a et b est celui de deux boules de fluide. La masse de chaque corps est

$$m_a = \int \rho_a d^3x$$

qui est bien sûr constante. Le centre de masse a^i du corps a est défini par la relation

$$\int \rho_a (x^i - a^i) d^3x = 0 \quad \text{soit} \quad m_a a^i = \int \rho_a x^i d^3x.$$

En dérivant par rapport au temps, nous en déduisons que

$$m_a \dot{a}^i = \int \rho v_a^i d^3x \quad \text{et} \quad m_a \ddot{a}^i = \int \rho_a \left(\frac{\partial}{\partial x^i} U_a + \frac{\partial}{\partial x^i} U_b \right) d^3x$$

grâce à la disparition des termes en divergence puisque la pression est nulle au bord du corps.

Si le rayon des deux corps étendus est beaucoup plus petit que la distance les séparant alors nous pouvons supposer que les boules de fluide restent pratiquement à symétrie sphérique. Ainsi, ρ_a et U_a ne dépendent des coordonnées $y^i = x^i - a^i$ que par $y^i y^i$ et en conséquence

$$\int \rho_a \frac{\partial}{\partial y^i} U_a d^3y = 0.$$

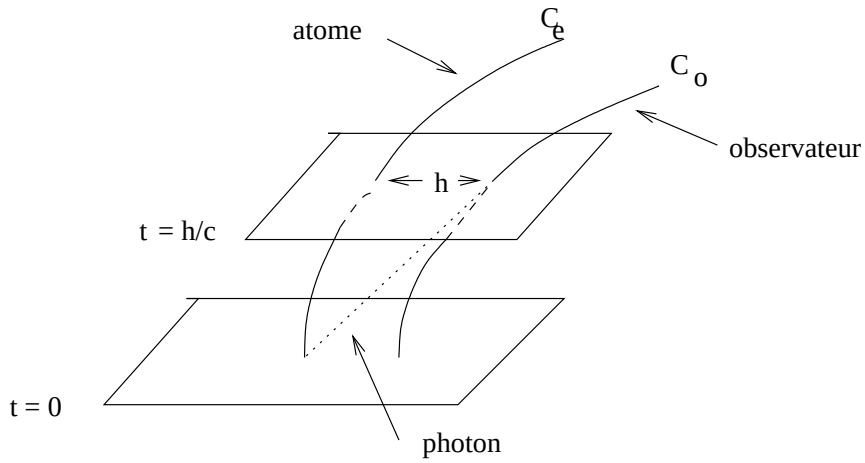
Le gradient de U_b étant pratiquement constant sur l'étendue du corps a, nous avons

$$m_a \ddot{a}^i = m_a \frac{\partial}{\partial x^i} U_b \Big|_{x^i = a^i}.$$

Puisqu'en dehors du corps b : $\triangle U_b = -4\pi G m_b \delta^{(3)}(x - b(t))$, les équations du mouvement des centres de masse des boules de fluide coïncident avec les équations newtoniennes du mouvement de deux particules ponctuelles.

2.5 Décalage des fréquences dans un champ de gravitation

Nous avons vu que dans un champ gravitationnel uniforme les lois de la physique galiléenne, classiques et quantiques, s'appliquaient dans le référentiel en chute libre considéré comme localement inertiel. Qu'en est-il pour les lois relativistes ? L'exemple caractéristique est bien sûr celui de la lumière et plus particulièrement de l'émission de photons à des fréquences bien précises par les atomes. Pour simplifier, nous restons dans le cadre galiléen en privilégiant provisoirement un référentiel. Examinons les deux cas suivants.



1. Dans un référentiel accéléré d'accélération a^1, nous avons un atome fixe, émettant à une fréquence ν_e, et un observateur fixe à une distance h. Analysons dans le référentiel galiléen. Sous l'hypothèse $a^1 h/c^2 \ll 1$, le photon émis arrive après un temps de vol d'environ h/c et la vitesse de l'observateur à cette arrivée est $v_o \approx a^1(h/c)$. Dans l'effet Doppler classique intervient la vitesse de la source par rapport à l'observateur, dans le cas présent $-a^1 h/c$ et celui-ci observe donc une fréquence ν_o donnée par

$$\nu_o \approx \nu_e \left(1 - \frac{a^1 h}{c^2}\right).$$

2. Dans un référentiel inertiel où existe un champ de gravitation uniforme g^1, nous considèrons un atome fixe et un observateur fixe à une altitude h. On ne voit aucune interaction entre l'onde électromagnétique et le champ de gravitation et par conséquent il ne devrait pas apparaître de différence de fréquences.

Dès 1907 puis en 1911, Einstein a été convaincu qu'en vertu de l'expérience de pensée précédente on devrait observer un décalage des fréquences dans un champ de gravitation uniforme suivant la formule

$$\nu_o \approx \nu_e \left(1 + \frac{g^1 h}{c^2}\right) ,$$

obtenue en prenant $g^1 = -a^1$. Ainsi, dans le champ gravitationnel terrestre avec l'accélération de la pesanteur g, $g^1 = -g$, nous obtenons

$$\frac{\nu_o - \nu_e}{\nu_e} = \frac{\triangle \nu}{\nu} \approx -\frac{gh}{c^2}$$

pour une dénivellation h.

Dans les années soixante, l'expérience en laboratoire terrestre a été faite à l'aide de l'effet Mössbauer par Pound et Rebka. Sur une dénivellation de 22,5 m ils trouvent à peu près la valeur théorique de $2,5 \times 10^{-15}$. Notons que l'expérience en référentiel accéléré a été réellement faite.

Plus généralement dans un potentiel newtonien de gravitation U, on devrait avoir la formule de décalage des fréquences

$$\nu_o \approx \nu_e \left(1 - \frac{U(x_e^i)}{c^2} + \frac{U(x_o^i)}{c^2}\right)$$

pour un émetteur fixe en x_e^i et un observateur fixe en x_o^i. En effet, $U(x) = g^1 x^1$ dans le cas uniforme avec $h = x_o^1 - x_e^1$. Pour la longueur d'onde $\lambda = c/2\pi\nu$, on obtient un décalage vers le rouge pour un atome situé près d'un corps massif et observé à l'infini. Il est intéressant de remarquer qu'un tel décalage des raies dans le spectre solaire [9] avait semble-t-il été observé à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle. Cependant on n'avait pas réalisé que c'était un résultat de physique fondamentale et on avait invoqué par exemple l'effet de la pression de l'atmosphère solaire. Ce phénomène a été ensuite observé dans les spectres stellaires, par exemple pour les naines blanches à partir de 1925. L'expérience confirmant cette formule, comment peut-on expliquer ce phénomène dans un champ de gravitation ? Nous le verrons plus tard mais ceci est un point crucial.

De façon phénoménologique, nous pouvons interpréter ce résultat en disant que dans un champ de gravitation U la lumière se propage dans un milieu d'indice variable $n \approx 1+U/c^2$, supposé indépendant du temps, lui donnant une vitesse c/n. En effet les fréquences sont alors telles que $\nu_e/n_e = \nu_o/n_o$. Dans un milieu d'indice variable n la trajectoire de la lumière est donnée par l'équation

$$\frac{d}{d\lambda}\left(n\frac{dx^i}{d\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}n \quad \text{soit approximativement} \quad \frac{d^2x^i}{d\lambda^2} \approx \frac{\partial}{\partial x^i}n(x^k(\lambda))$$

qui n'est rien d'autre que l'équation du mouvement d'une particule dans le champ de gravitation pour un paramètre $\lambda = ct$. Ainsi, comme une conséquence raisonnable du décalage des fréquences, la lumière doit être défléchie par un corps massif. Pour un corps à symétrie sphérique de masse m on trouve l'angle de déflexion $\triangle_N = 2Gm/c^2p$ où p est le paramètre d'impact. Pour un rayon lumineux passant près du Soleil, on obtiendrait $\triangle_N \simeq 0'',87$. Ce comportement de la lumière est un concept provisoire sur lequel nous reviendrons.

[9] A la surface du Soleil $U(x_e)/c^2 = Gm_\odot/c^2R_\odot \simeq 2,122 \times 10^{-6}$.

Chapitre 3

Eléments de calcul tensoriel en espace affine

3.1 Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On appelle base de E la donnée de n vecteurs e_i $(i = 1, \ldots, n)$ $(e_{i\leftarrow \mathrm{BAS}})$ telle que tout vecteur X de E puisse s'exprimer d'une manière unique par une combinaison linéaire des n vecteurs e_i

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i e_i.$$

On appelle X^i les composantes du vecteur X dans la base e_i $(X^{i\leftarrow \mathrm{HAUT}})$. Nous utilisons la convention d'Einstein pour la sommation des indices répétés, l'un en haut et l'autre en bas, suivant la formule

$$X = X^i e_i \quad \left(X = X^{i\leftarrow \mathrm{HAUT}} e_{i\leftarrow \mathrm{BAS}}\right).$$

Un point important est celui du changement de base. Soit une autre base que nous notons $e_{i'}$ $(i' = 1, \ldots, n)$ suivant une convention utile d'écriture avec les indices primés, le même vecteur X a les composantes

$$X = X^{i'} e_{i'}$$

avec la convention des indices primés. On a la formule de changement de base

$$e_{i'} = a^j_{i'} e_j$$

où $a^j_{i'}$ sont les éléments de la matrice de changement de base, avec $\det a^j_{i'} \neq 0$, les indices primés étant en bas et les indices non primés en haut. Il y a évidemment sommation sur les indices non primés. Les éléments de la matrice inverse sont notés $a^{j'}_i$ avec la même lettre

mais de façon conventionnelle les indices primés sont en haut et les indices non primés en bas, on a

$$e_i = a_i^{j'} e_{j'}.$$

Les matrices $a_{i'}^{j}$ et $a_i^{j'}$ satisfont donc par définition

$$a_m^{j'} a_{i'}^{m} = \delta_{i'}^{j'} \quad \text{et} \quad a_i^{m'} a_{m'}^{j} = \delta_i^j$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker

$$\delta_i^j = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad \delta_i^j = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Cependant avec nos conventions nous n'avons pas vraiment besoin de savoir quelles sont les lignes et les colonnes de ces matrices. Soient $X^{i'}$ les composantes d'un vecteur X dans la base $e_{i'}$, elles sont reliées à X^i par

$$X^{i'} = a_j^{i'} X^j \quad \text{et} \quad X^i = a_{j'}^{i} X^{j'}.$$

L'ensemble de ces conventions : indices en haut, en bas, primés, non primés va nous permettre de faire du calcul tensoriel sans réfléchir.

On appelle forme linéaire sur E une application ψ de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\psi(X+Y) = \psi(X) + \psi(Y) \quad \text{et} \quad \psi(\alpha X) = \alpha \psi(X) \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On appelle E^* l'ensemble des formes linéaires sur E qui possède une structure d'espace vectoriel. A toute base e_i de E, on définit une base de E^*, notée avec la même lettre mais avec les indices i en haut, e^i $(i = 1, \ldots, n)$ $(e^{i \leftarrow \mathrm{HAUT}})$ définie par

$$e^i(X) = X^i$$

où X^i sont les composantes de X dans la base e_i. On a $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Ainsi une forme ω s'écrit dans E^* sous la forme

$$\psi = \psi_i e^i \quad \text{avec} \quad \psi_i = \psi(e_i).$$

Les ω_i sont appelés les composantes de ω $(\omega_{i \leftarrow \mathrm{BAS}})$. Une autre base $e_{i'}$ de E conduit à une autre base $e^{i'}$ de E^*. Connaissant le changement de base dans E on en déduit dans E^*

$$e^{i'} = a_j^{i'} e^j \quad \text{et} \quad e^i = a_{j'}^{i} e^{j'}$$

et la transformation des composantes d'une forme

$$\omega_{i'} = a_{i'}^{j} \omega_j \quad \text{et} \quad \omega_i = a_i^{j'} \omega_{j'}.$$

Un vecteur X est une forme linéaire sur E^* et on a

$$X(e^i) = X^i.$$

On définit le produit tensoriel de deux vecteurs X et Y, noté $X \otimes Y$, comme étant la forme bilinéaire sur E^* définie par

$$X \otimes Y(\psi, \phi) = \psi(X)\phi(Y).$$

Soit e_i une base de E. On peut former les n^2 éléments $e_i \otimes e_j$. On voit immédiatement que $X \otimes Y = X^i Y^j e_i \otimes e_j$.

On appelle $\bigotimes^2 \mathrm{E}$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E^* que nous appelons tenseur deux fois contravariant. Il peut être muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension n^2 avec comme base $e_i \otimes e_j$. Par conséquent, un tenseur deux fois contravariant T s'écrit

$$T = T^{ij} e_i \otimes e_j \quad \text{avec} \quad T^{ij} = T(e^i, e^j).$$

où les T^{ij} sont les composantes du tenseur T. Pour le produit tensoriel $T = X \otimes Y$, on obtient $T^{ij} = X^i Y^j$. Un point essentiel est celui de changement de base. Les composantes du tenseur se transforment de la façon suivante

$$T^{i'j'} = a^{i'}_m a^{j'}_n T^{mn} \quad \text{et} \quad T^{ij} = a^i_{m'} a^j_{n'} T^{m'n'}.$$

On définit le produit tensoriel de E^* par lui-même : c'est l'ensemble des formes bilinéaires sur E, noté $\bigotimes_2 \mathrm{E}$, que nous appelons tenseur deux fois covariant. Il peut être muni d'une structure d'espace vectoriel dont une base est constituée des n^2 éléments $e^i \otimes e^j$. Ainsi un tenseur deux fois covariant ω s'écrit

$$\omega = \omega_{ij} e^i \otimes e^j \quad \text{avec} \quad \omega_{ij} = \omega(e_i, e_j).$$

Les ω_{ij} sont les composantes du tenseur ω. Dans un changement de base, on a

$$\omega_{i'j'} = a^m_{i'} a^n_{j'} \omega_{mn} \quad \text{et} \quad \omega_{ij} = a^{m'}_i a^{n'}_j \omega_{m'n'}.$$

Le produit tensoriel de E q fois par lui-même, noté $\bigotimes^q \mathrm{E}$, est l'ensemble des formes q-linéaire sur E^*. Les éléments sont appelés les tenseurs q fois contravariants. Une base de $\bigotimes^q \mathrm{E}$ est formée des n^q tenseurs $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q}$, dont les indices sont des lettres avec des indices. Cela permet une écriture générale sans préciser la dimension n. Ainsi pour un tenseur q fois contravariant, on a

$$T = T^{i_1 \cdots i_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q}$$

et dans un changement de base

$$T^{i'_1 \cdots i'_q} = a^{i'_1}_{j_1} \cdots a^{i'_q}_{j_q} T^{j_1 \cdots j_q}.$$

De façon analogue, le produit tensoriel de E^* p fois par lui-même est noté $\bigotimes_p \mathrm{E}$. Ses éléments sont des tenseurs p fois covariants. On a donc

$$\omega = \omega_{j_1 \cdots j_p} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p}$$

avec la loi de transformation

$$\omega_{j'_1\cdots j'_p} = a^{i_1}_{j'_1}\cdots a^{i_p}_{j'_p}\omega_{i_1\cdots i_p}.$$

On peut aussi former des produits tensoriels mixtes : q fois contravariants et p fois covariants de composantes

$$T = T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}.$$

Le symbole de Kronecker δ^i_j en est un exemple. Il faut signaler que l'ordre des indices est très important. Dès à présent, bien que ce ne soit pas indispensable pour l'instant, nous prenons l'habitude de bien décaler les indices en haut et en bas. Nous remarquons que les tenseurs peuvent être notés avec la même lettre du moment qu'ils ont des nombres d'indices différents.

On appelle tenseur symétrique un tenseur tel que $T^{ij} = T^{ji}$ ou bien $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. On appelle tenseur antisymétrique un tenseur tel que $T^{ij} = -T^{ji}$ ou bien $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Tout tenseur T^{ij} peut être décomposé comme la somme d'un tenseur symétrique $(T^{ij} + T^{ji})/2$ et d'un tenseur antisymétrique $(T^{ij} - T^{ji})/2$. Un tenseur p fois covariant complètement antisymétrique est appelé une p-forme.

Pour des tenseurs mixtes on peut former le produit contracté en sommant sur un indice en haut et un indice en bas, par exemple $T^{i_1\cdots k\cdots i_q}{}_{j_1\cdots k\cdots j_p}$, ce qui donne un tenseur $q-1$ fois contravariant et $p-1$ fois covariant. Un cas particulier est la trace T d'un tenseur $T_i{}^j$ donnée par $T = T_i{}^i$. De même, on obtient les composantes d'un vecteur en posant $T^{ij}\omega_j$ ou un scalaire en posant $X^i\omega_i$. Nous notons que la contraction d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique est nulle.

3.2 Produit scalaire dans un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire g sur E qui est :

1. symétrique $g(X,Y) = g(Y,X)$,
2. non dégénérée $(\forall X \quad g(X,Y) = 0) \Rightarrow Y = 0$.

Ainsi le produit scalaire est un tenseur deux fois covariant dont les composantes g_{ij} dans une base e_i de E sont données par

$$g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

C'est un tenseur symétrique $g_{ij} = g_{ji}$. De plus, comme le système d'équations $g_{ij}Y^j = 0$ doit donner $Y^j = 0$ il faut que $\det g_{ij} \neq 0$.

On dit que deux vecteurs X et Y sont orthogonaux si $g(X,Y) = 0$, soit en composantes $g_{ij}X^iY^j = 0$. Il existe toujours une base e_i de E telle que

$$g(e_i, e_j) = 0 \text{ pour } i \neq j \quad \text{et} \quad g(e_i, e_i) = \pm 1 \quad i = 1, \ldots, n.$$

Cette base e_i est dite orthonormée bien que les $g(e_i, e_i)$ puissent être négatifs. La collection des ± 1 formée par $(g(e_1, e_1), \ldots, g(e_n, e_n))$ est une propriété intrinsèque du produit scalaire considéré. Elle sera la même pour toutes les autres bases orthonormées : c'est la signature du produit scalaire. Quand la signature est $(+\cdots+)$, on note $g_{ij} = \delta_{ij}$ et on parle de produit scalaire euclidien. Pour $(-+\cdots+)$, on note $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$ et on parle de produit scalaire lorentzien. Si le produit scalaire est euclidien il définit une norme dans E. S'il n'est pas euclidien alors il existe des vecteurs X tels que $g(X, X) = 0$ qui sont dits isotropes.

Considéré comme les éléments d'une matrice, g_{ij} admet une matrice inverse puisque $\det g_{ij} \neq 0$. Elle est notée g^{ij} et elle vérifie

$$g_{im} g^{mj} = \delta_i^j.$$

Les g^{ij} constituent les composantes d'un tenseur deux fois contravariant.

Le produit scalaire permet d'identifier de façon canonique E et E*. Un vecteur X étant donné, on peut définir une forme linéaire sur E, provisoirement notée ω, par $\omega(Y) = g(X, Y)$. Dans la base e^i, les composantes de ω sont $\omega_i = \omega(e_i) = g_{ij} X^j$. Par convention, on donne le même nom au vecteur X et à la forme ω. Par conséquent, on écrit

$$X_i = g_{ij} X^j \quad \text{et} \quad X^i = g^{ij} X_j.$$

Grâce au produit scalaire, on a les composantes contravariantes X^i et les composantes covariantes X_i d'un même objet mathématique X. Cela s'étend naturellement aux tenseurs q fois contravariants et p fois covariants. Nous pouvons monter ou descendre les indices à l'aide du produit scalaire g_{ij}.

3.3 Espace affine et espace affine métrique

Soit un ensemble $\mathcal{E}$ de points dans lequel à tout couple de points A et B pris dans cet ordre, on fait correspondre un vecteur noté AB d'un espace vectoriel réel à n dimensions E, la correspondance jouissant des propriétés suivantes :

1. $AB = -BA$ et $AB = AC + CB$,
2. O étant un point arbitraire de $\mathcal{E}$, à tout vecteur x de E il correspond un point unique M de $\mathcal{E}$ tel que $OM = x$.

On appelle $\mathcal{E}$ espace affine à n dimensions. Un repère (O,e_i) de $\mathcal{E}$ est la donnée d'un point O et d'une base e_i de E. Le point O est l'origine du repère. Soit un point M de $\mathcal{E}$ on appelle coordonnées de M par rapport au repère (O,e_i) les composantes x^i du vecteur OM

$$OM = x^i e_i.$$

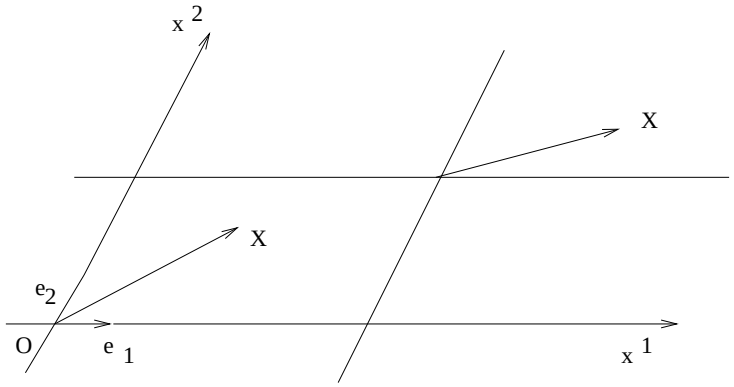
Il existe une correspondance biunivoque entre les nombres x^i et les points de $\mathcal{E}$. Les composantes x^i forment un système de coordonnées de l'espace affine que nous appelons rectilignes. La topologie de l'espace affine est celle de $\mathbb{R}^n$.

Un point important est celui du changement de repère. Soient deux repères (O,e_i) et (O',$e_{i'}$), les coordonnées d'un point de $\mathcal{E}$ suivant les deux repères sont reliées par

$$x^{i'} = a^{i'}_j x^j + d^{i'}$$

où $a^{i'}_j$ est le changement de base dans E, c'est-à-dire $e_{i'} = a^j_{i'} e_j$ et les constantes $d^{i'}$ sont les coordonnées du point O dans le repère (O',$e_{i'}$).

On peut définir des champs de vecteurs dans $\mathcal{E}$. Chaque e_i du repère définit un champ



de vecteurs dans l'espace affine qui est noté dorénavant ∂_i. Un champ de vecteurs X s'écrit $X = X^i(x^k)\partial_i$. Quand on adopte un autre repère $(\mathrm{O}', e_{i'})$, les lois de transformations sont les suivantes

$$\partial_{i'} = a^j_{i'}\partial_j \quad \text{et} \quad X^{i'} = a^{i'}_j X^j.$$

On peut ensuite définir n champs de formes dans $\mathcal{E}$, notées dx^i au lieu de e^i, canoniquement associées aux champs de vecteurs ∂_i par $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$ en tout point. Un champ de formes ω dans $\mathcal{E}$, ou simplement une forme ω, s'écrit $\omega = \omega_i(x^k)dx^i$. La notation dx^i désigne aussi un accroissement infinitésimal de la coordonnée x^i. Cette ambiguïté de notation est faite exprès et se révèle bien pratique. Par exemple, la forme $\partial_i f dx^i$ [1] où f est une fonction est noté df. Elle représente aussi l'accroissement infinitésimal de la fonction f entre les points x^k et $x^k + dx^k$.

On définit des champs de tenseurs q fois contravariants et p fois covariants sur $\mathcal{E}$ de composantes $T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}(x^k)$ sur $\mathcal{E}$ dans la base $\partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_q} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots dx^{j_p}$ avec la loi de transformation

$$T^{i'_1\cdots i'_q}{}_{j'_1\cdots j'_p}(x^{k'}) = a^{i'_1}_{m_1} \cdots a^{i'_q}_{m_q} a^{n_1}_{j'_1} \cdots a^{n_p}_{j'_p} T^{m_1\cdots m_q}{}_{n_1\cdots n_p}(x^k).$$

Soit un repère (O, e_i) de $\mathcal{E}$. Une application de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}$ fait correspondre à t un point M, soit M(t). Il en résulte une application de I dans E en posant $x = OM$, soit $x(t)$. Le vecteur $dx(t)/dt$ définit le vecteur-dérivée de M(t) car il est indépendant du choix de O. Quand une seule coordonnée x^i varie, on obtient une courbe dans $\mathcal{E}$ appelée une

[1] Pour alléger l'écriture, nous adoptons les notations $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $\partial_{ij} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$, ...

courbe-coordonnée. Ce sont des droites de $\mathcal{E}$. Le vecteur-dérivée de la courbe-coordonnée x^i pour le paramètre x^i est ∂_i en tout point de la courbe.

Dans un espace affine $\mathcal{E}$ muni des coordonnées rectilignes (x^i), il existe la notion de connexion plate. Soit X un champ de vecteurs. Comment passe-t-on de la valeur $X(x)$ du champ de vecteurs au point x^i à la valeur $X(x+dx)$ au point infiniment voisin $x^i + dx^i$? Si l'on pose $X(x+dx) = X(x) + dX$ alors on a évidemment

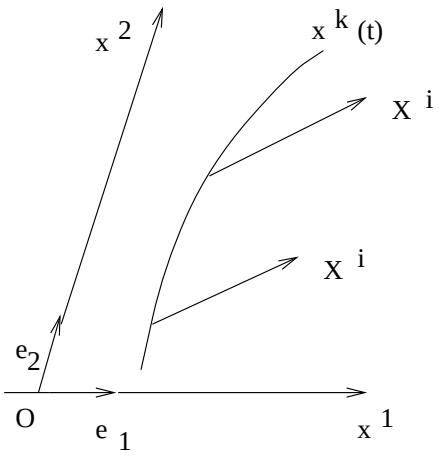
$$(dX)^i = \partial_j X^i dx^j.$$

Ainsi, on obtient directement $(dX)^i$ en fonction des dx^j. La connexion est donc triviale et elle est dite plate. Quand on fait un changement de repère, les $\partial_j X^i$ sont les composantes d'un champ de tenseurs une fois contravariants et une fois covariants.

Cette connexion plate définit la notion de transport par parallélisme d'un vecteur X le long d'une courbe $x^i(t)$ en demandant que $(dX)^i = 0$ entre deux points x^i et $x^i + dx^i$ de la courbe, c'est-à-dire $\partial_j X^i dx^j = 0$ avec $dx^j = \dot{x}^j dt$. Par suite, on a $\dot{x}^j \partial_j X^i = 0$ et il est donc déterminé par l'équation

$$\frac{d}{dt} X^i(t) = 0.$$

Par conséquent les X^i sont des constantes. Notons que les ∂_i se transportent par parallélisme le long des courbes-coordonnées des coordonnées rectilignes.



Un espace affine devient un espace affine métrique quand on introduit un produit scalaire g sur E. Tout d'abord, il définit une distance $\sigma(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$ entre deux points M_1 et M_2 de $\mathcal{E}$ par

$$\sigma^2(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = g(M_1M_2, M_1M_2).$$

Dans un repère (O,e_i), les composantes de OM_1 et OM_2 sont respectivement x_1^i et x_2^i et on a la formule

$$\sigma^2(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = g_{ij}(x_1^i - x_2^i)(x_1^j - x_2^j)$$

où les g_{ij} sont les constantes $g(e_i, e_j)$ dans le repère considéré. Le champ de tenseurs deux fois covariants g défini par les composantes

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

s'appelle la métrique de $\mathcal{E}$. Remarquons que le carré de la distance infinitésimale entre deux points infiniment voisins a pour expression

$$d\sigma^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Nous remarquons l'analogie avec la forme tensorielle.

Une base orthonormée de E définit un repère orthonormé de $\mathcal{E}$. Quand la signature est $(+\cdots+)$, on a la métrique euclidienne $g_{ij} = \delta_{ij}$. L'espace affine métrique est l'espace euclidien, les coordonnées associées étant appelées les coordonnées cartésiennes. Quand la signature est $(-+\cdots+)$, on a la métrique minkowskienne $g_{ij} = \eta_{ij}$. L'espace affine métrique est l'espace minkowskien, les coordonnées associées étant appelées minkowskiennes.

En résumé, un espace affine métrique $\mathcal{E}$ possède deux caractéristiques fondamentales : une connexion plate et une métrique, dite plate. Cependant, la connexion n'est pas indépendante de la métrique puisque le transport par parallélisme de deux vecteurs X et Y le long d'une courbe conserve le produit scalaire des deux vecteurs. On a

$$\frac{d}{dt}\left(g_{ij} X^i Y^j\right) = 0$$

puisque les g_{ij} sont des constantes.

3.4 Systèmes de coordonnées curvilignes

Soit un espace affine $\mathcal{E}$ muni d'un repère (O,e_i) avec ses coordonnées rectilignes (x^i). Supposons qu'on exprime les coordonnées x^i en fonction des variables $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ dans un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}$

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) \quad \text{soit} \quad x^i = x^i(x^{j'})$$

avec nos conventions sur les indices primés. Si dans $\mathcal{O}$ la matrice jacobienne

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}(x^{k'}) \quad \text{satisfait} \quad \det \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}(x^{k'}) \neq 0$$

alors il existe des fonctions réciproques

$$x^{j'} = x^{j'}(x^1, \ldots, x^n) \quad \text{soit} \quad x^{j'} = x^{j'}(x^i)$$

dont la matrice jacobienne est l'inverse de la précédente. On dit que dans l'ouvert $\mathcal{O}$ l'espace affine est rapporté au système de coordonnées curvilignes $(x^{j'})$.

Un exemple est celui des coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans l'espace affine à trois dimensions ; elles sont définies par

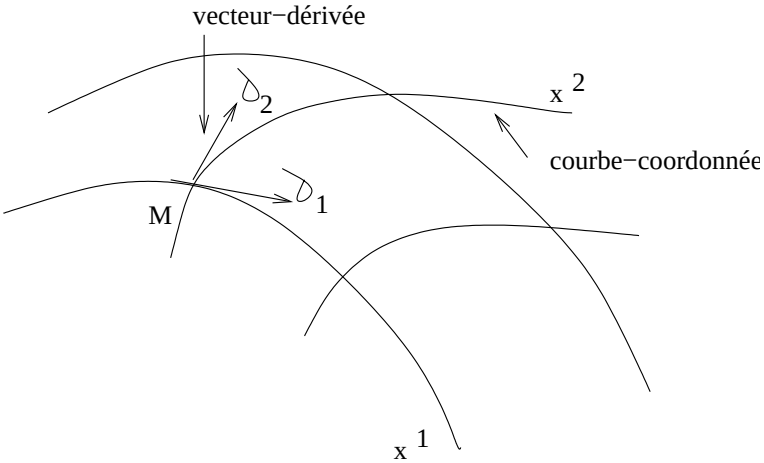
$$x^1 = r \sin\theta \cos\varphi \quad , \quad x^2 = r \sin\theta \sin\varphi \quad \text{et} \quad x^3 = r \cos\theta.$$

La matrice jacobienne de ce changement de coordonnées est

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant $r^2\sin\theta$ est différent de zéro dans l'espace affine moins l'axe Ox^3 qui est donc l'ouvert $\mathcal{O}$ de définition des coordonnées sphériques (r,θ,φ).

Quand une seule coordonnée $x^{j'}$, pour un j' fixé, d'un point M varie, on obtient une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}$: la courbe-coordonnée. Le vecteur-dérivée à cette courbe paramétrisée par $x^{j'}$ est noté $\partial_{j'}$. Il est différent en chaque point de la courbe.



En chaque point M de $\mathcal{E}$, on associe au système de coordonnées curvilignes un repère naturel constitué d'une origine M et de la base naturelle formée des vecteurs $\partial_{i'}$ $(i' = 1,\ldots,n)$ en ce point. Un point voisin de M, noté M+dM, sera repéré par des $dx^{j'}$. On pose

$$dM = dx^{j'}\partial_{j'}.$$

Ainsi les quantités $dx^{j'}$ sont les composantes contravariantes du vecteur dM dans la base naturelle $\partial_{j'}$ au point M. La relation entre le repère (O,∂_i) et le repère naturel (M,$\partial_{i'}$) est donnée par

$$\partial_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}(x^{k'})\partial_j \quad \text{et} \quad dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}(x^k)dx^j.$$

Dans l'exemple des coordonnées sphériques, on trouve

$$\partial_r = \sin\theta\cos\varphi\partial_1 + \sin\theta\sin\varphi\partial_2 + \cos\theta\partial_3\ ,$$

$$\partial_\theta = r\cos\theta\cos\varphi\partial_1 + r\cos\theta\sin\varphi\partial_2 - r\sin\theta\partial_3\ ,$$

$$\partial_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi\partial_1 + r\sin\theta\cos\varphi\partial_2\ .$$

Soient les composantes $T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}(x^k)$ d'un champ de tenseurs T dans un repère (O,e_i) de $\mathcal{E}$. Nous pouvons obtenir les composantes en coordonnées curvilignes de ce champ de tenseurs T par

$$T^{i'_1\cdots i'_q}{}_{j'_1\cdots j'_p}(x^{k'}) = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_q}}{\partial x^{l_q}}\frac{\partial x^{n_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{n_p}}{\partial x^{j'_p}}T^{l_1\cdots l_q}{}_{n_1\cdots n_p}(x^k).$$

Voyons comment se présente la connexion plate en coordonnées curvilignes. Soit un champ de vecteurs X de $\mathcal{E}$. Dans l'ouvert $\mathcal{O}$ des coordonnées curvilignes $(x^{i'})$, il s'écrit

$$X(x') = X^{j'}(x')\partial_{j'}.$$

L'accroissement dX entre deux points infiniment voisins $x^{i'}$ et $x^{i'} + dx^{i'}$ est

$$dX = \partial_{j'}X^{i'}dx^{j'}\partial_{i'} + X^{i'}d\partial_{i'}.$$

avec un $d\partial_{i'}$ puisque maintenant le repère naturel $\partial_{i'}$ change d'un point à un autre. En vertu de l'expression de $\partial_{i'}$ sur la base ∂_i, on a

$$d\partial_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{l'}}\left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\right)dx^{l'}\partial_m.$$

Réexprimant $d\partial_{i'}$ dans le repère naturel, on obtient

$$d\partial_{j'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}}\right)dx^{i'}\partial_{k'}.$$

On définit les symboles de Christoffel

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}}\right)$$

qui sont symétriques : $\Gamma^{k'}_{m'n'} = \Gamma^{k'}_{n'm'}$. Ainsi, la connexion plate de l'espace affine s'écrit en coordonnées curvilignes

$$dX = \left(\partial_{j'}X^{k'} + \Gamma^{k'}_{j'i'}X^{i'}\right)dx^{j'}\partial_{k'}.$$

On définit la dérivée covariante du champ de vecteurs X par la formule

$$\nabla_{k'}X^{i'} = \partial_{k'}X^{i'} + \Gamma^{i'}_{k'j'}X^{j'}$$

qui donne un champ de tenseurs une fois covariants et une fois contravariants. On a donc

$$\nabla_{k'}X^{i'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^n}\partial_m X^n.$$

Elle permet d'écrire l'accroissement dX sous la forme

$$dX = \nabla_{i'}X^{j'}dx^{i'}\partial_{j'}$$

qui est valable dans n'importe quelles coordonnées curvilignes.

Le transport par parallélisme d'un vecteur $X^{i'}$ le long d'une courbe $x^{i'}(t)$ est défini par $dX = 0$, c'est-à-dire en coordonnées curvilignes

$$\frac{d}{dt}X^{i'}(t) + \Gamma^{i'}_{m'n'}(x(t))\dot{x}^{m'}(t)X^{n'}(t) = 0.$$

Par abus de notation, on écrit souvent $\dot{x}^{k'}\nabla_{k'}X^{i'} = 0$.

On définit la dérivée covariante d'un champ de formes par

$$\nabla_{k'}\omega_{i'} = \partial_{k'}\omega_{i'} - \Gamma^{j'}_{k'i'}\omega_{j'}$$

qui est un champ de tenseurs deux fois covariants de façon à ce qu'on ait [2]

$$\partial_{i'}(X^{k'}\omega_{k'}) = \nabla_{i'}X^{k'}\omega_{k'} + X^{k'}\nabla_{i'}\omega_{k'}.$$

L'extension aux champs de tenseurs mixtes est directe

$$\begin{aligned}\nabla_m T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} = \;& \partial_m T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} + \Gamma^{i_1}_{mi}T^{ii_2\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} + \cdots + \Gamma^{i_q}_{mi}T^{i_1\cdots i_{q-1}i}{}_{j_1\cdots j_p} \\ & -\Gamma^{j}_{mj_1}T^{i_1\cdots i_q}{}_{jj_2\cdots j_p} - \cdots - \Gamma^{j}_{mj_p}T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_{p-1}j}\end{aligned}$$

où nous avons supprimé les primes pour alléger l'écriture. Ceci assure la loi de dérivation, par exemple

$$\nabla_i\left(T^{mn}\omega_p\right) = \nabla_i T^{mn}\omega_p + T^{mn}\nabla_i\omega_p.$$

Un espace affine métrique possède en outre une métrique g qui est un champ de tenseurs deux fois covariants de composantes g_{ij} en coordonnées rectilignes. En coordonnées curvilignes $(x^{i'})$, les composantes ont pour expression

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}}g_{mn}$$

et elles dépendent maintenant des coordonnées $x^{i'}$. Dans l'exemple des coordonnées sphériques, les composantes non nulles de la métrique sont

$$g_{rr} = 1 \quad , \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad \text{et} \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta.$$

La distance $\sigma(\mathrm{M}, \mathrm{M}+\mathrm{dM})$ entre deux points infiniment voisins M et M+dM est donnée simplement par

$$d\sigma^2 = g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'}.$$

Dans l'exemple des coordonnées sphériques, on a

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

[2] Pour une fonction f, on a $\nabla_{i'}f = \partial_{i'}f$.

Nous avons déjà observé que la connexion plate et la métrique ne sont pas indépendantes. On a les identités fondamentales

$$\nabla_{k'} g_{m'n'} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_{k'} g^{i'j'} = 0$$

qui sont évidentes puisque $\nabla_{k'} g_{m'n'}$ est un champ de tenseurs dont on sait qu'il est nul en coordonnées rectilignes.

Les symboles de Christoffel s'expriment à l'aide de la matrice jacobienne et de ses dérivées. Cependant, on peut obtenir une expression plus pratique de ceux-ci. Posons $[i'j'l'] = \Gamma^{k'}_{i'j'} g_{k'l'}$ qui est symétrique en i' et j'. La dérivée covariante de la métrique est nulle et elle s'écrit sous la forme

$$\partial_{k'} g_{m'n'} - [k'm'n'] - [k'n'm'] = 0.$$

Réécrivons cette expression en faisant une permutation circulaire

$$\partial_{m'} g_{n'k'} - [m'n'k'] - [m'k'n'] = 0 \quad \text{et} \quad -\partial_{n'} g_{k'm'} + [n'k'm'] + [n'm'k'] = 0.$$

En additionnant les trois identités, on détermine les $[k'm'n']$ en fonction des $\partial_{k'} g_{m'n'}$ grâce à la symétrie des $[i'j'l']$ en i' et j'. Par suite, l'expression des symboles de Christoffel est

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{1}{2} g^{k'l'} \left(\partial_{i'} g_{j'l'} + \partial_{j'} g_{l'i'} - \partial_{l'} g_{i'j'} \right).$$

Par cette formule fondamentale, on trouve tout de suite les symboles de Christoffel non nuls en coordonnées sphériques

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r \sin^2\theta \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta.$$

On monte et on descend les indices des champs de tenseurs avec $g_{i'j'}$ et son inverse $g^{i'j'}$. Puisque la dérivée covariante de la métrique est nulle, on a

$$\nabla_{i'} X_{j'} = g_{j'k'} \nabla_{i'} X^{k'} \quad \text{et} \quad \nabla_{i'} X^{j'} = g^{j'k'} \nabla_{i'} X_{k'}.$$

Nous pouvons donc jouer de façon covariante avec les indices.

Chapitre 4

Eléments de géométrie différentielle d'une variété

4.1 Variété différentiable

Une variété topologique $\mathcal{V}$ de dimension n est un espace topologique séparé (ou de Hausdoff) dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, par exemple le cercle S^1, la sphère S^2, le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$. Cela signife qu'il existe une famille d'ouverts, recouvrant la variété, homéomorphes à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un couple $(\mathcal{O}, \varphi)$ de cette famille est appelé une carte. Dans l'ouvert $\mathcal{O}$, un point M de $\mathcal{V}$ est caractérisé par $(x^1, \ldots, x^n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Les (x^i) $(i = 1, \ldots, n)$ sont les coordonnées du point M dans la carte $\mathcal{O}$; ils définissent un système de coordonnées.

Soient deux couples $(\mathcal{O}, \varphi)$ et $(\mathcal{O}', \varphi')$ tels que $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \neq \emptyset$ alors $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est un homéomorphisme d'ouverts de $\mathbb{R}^n$. L'application continue $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ de $\varphi(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}')$ dans $\varphi'(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}')$ induit la formule de changement de système de coordonnées

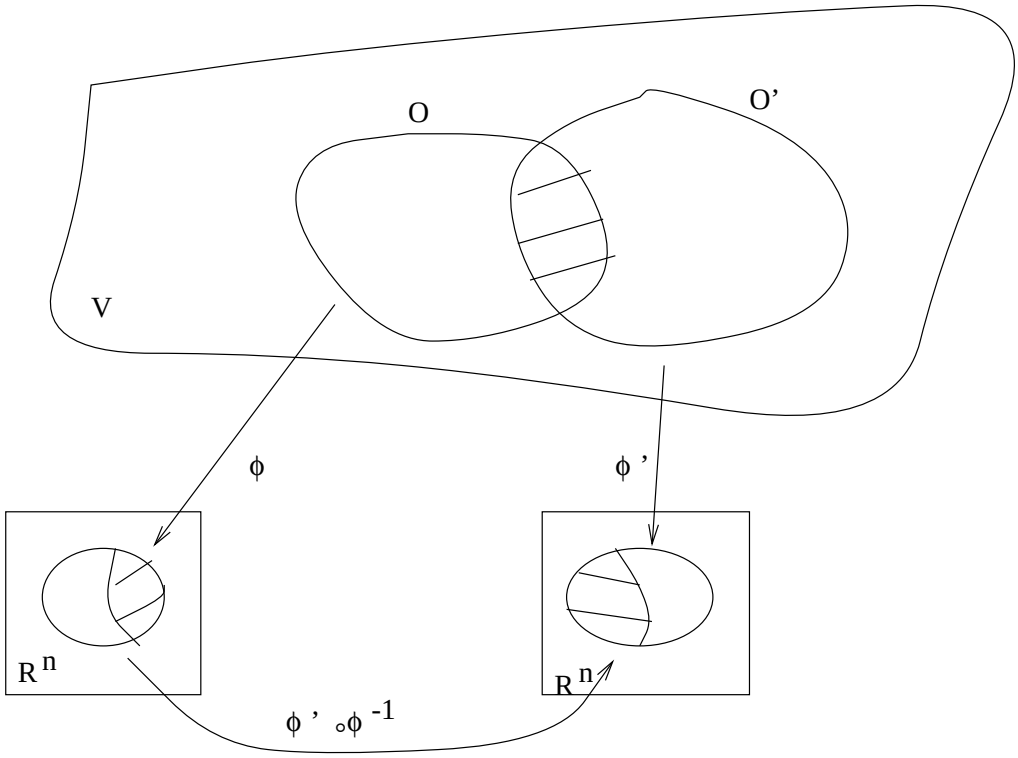
$$x^{i'} = \varphi' \circ \varphi^{-1}(x^j) \quad \text{soit} \quad x^{i'}(x^j)$$

dans laquelle la convention des indices primés est reprise.

L'ensemble des cartes qui recouvrent la variété topologique constitue un atlas. Pour des raisons techniques on suppose que la variété topologique est paracompacte, c'est-à-dire que pour tout point il existe un voisinage de celui-ci qui a une intersection non vide avec un nombre fini d'ouverts de l'atlas.

Une variété différentiable $\mathcal{V}$ est une variété topologique possédant un atlas avec des cartes $\{(\mathcal{O}, \varphi), (\mathcal{O}', \varphi'), \ldots\}$ tel que les applications $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ sont des difféomorphismes entre les deux images de $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ dans les deux $\mathbb{R}^n$. On peut prendre des difféomorphismes C^∞ ou bien se limiter à C^k $k \geq 1$. Cela signifie que les formules de changement de système de coordonnées $x^{i'}(x^j)$ et $x^j(x^{i'})$ sont des applications différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ inversibles, c'est-à-dire que la matrice jacobienne satisfait

$$\det \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}(x^k) \neq 0.$$



Un espace affine est une variété différentiable avec une seule carte munie des coordonnées rectilignes (x^i). Des coordonnées curvilignes $(x^{i'})$ dans un ouvert $\mathcal{O}$ de définition constituent une carte de l'espace affine.

En général il faut un atlas avec plusieurs cartes pour décrire une variété. Pour la sphère S^2 il faut au moins deux cartes puisqu'elle est compacte et ne peut donc être homéomorphe à un ouvert. Prenons l'exemple de la projection stéréographique. On a deux cartes $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ excluant soit le pôle Nord $(0,0,1)$ soit le pôle Sud $(0,0,-1)$ en coordonnées cartésiennes (z^1, z^2, z^3). Dans les deux cartes considérées, on a les coordonnées

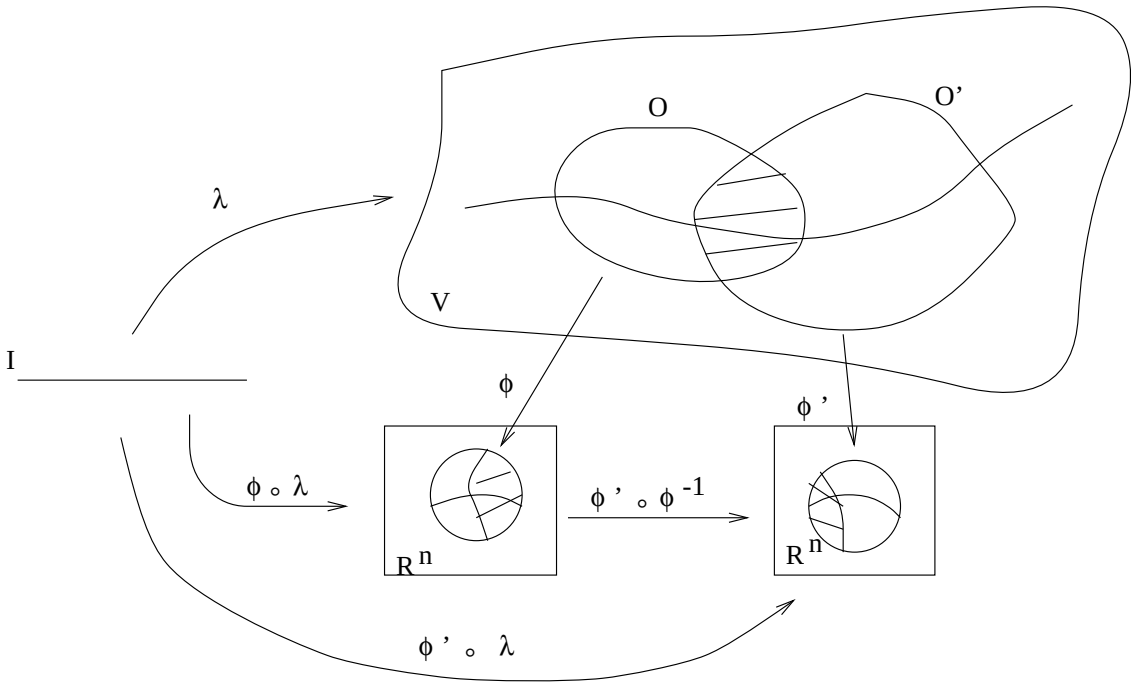
$$x^1 = \frac{z^1}{1-z^3} \quad x^2 = \frac{z^2}{1-z^3} \quad \text{et} \quad x^{1'} = \frac{z^1}{1+z^3} \quad x^{2'} = \frac{z^2}{1+z^3}.$$

L'application de changement de carte est définie dans $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ par

$$x^1 = \frac{x^{1'}}{(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2} \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{x^{2'}}{(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2}$$

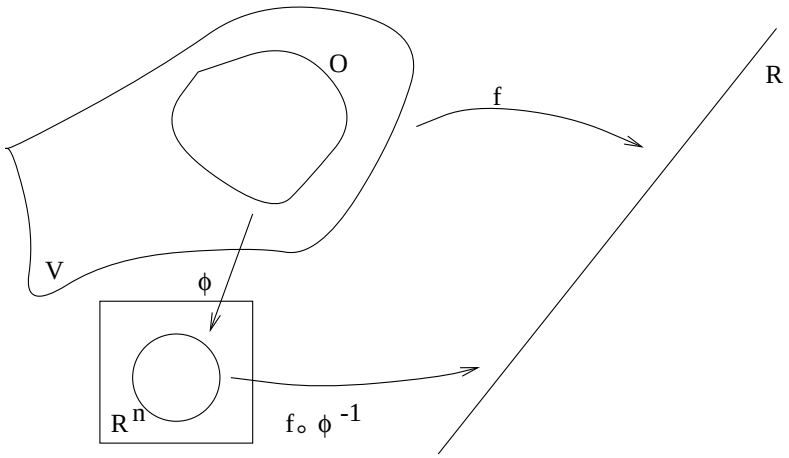
dont la matrice jacobienne a un déterminant différent de zéro. Cependant de façon usuelle, on adopte les coordonnées (θ, φ) du système de coordonnées sphériques pour décrire S^2 comme s'il n'y avait qu'une carte bien qu'elles ne soient pas valables en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Soit $\mathcal{V}$ une variété différentiable. Une application λ de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathcal{V}$ est dite différentiable si dans chaque ouvert d'un atlas $\varphi \circ \lambda$ est une application différentiable de I dans $\mathbb{R}^n$. L'image de I dans $\mathcal{V}$ est une courbe dans $\mathcal{V}$. L'expression en coordonnées $x^i(t)$ est



différente dans chaque système de coordonnées mais s'obtient par changement de système de coordonnées.

Une fonction f de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}$ est dite différentiable si $f \circ \varphi^{-1}$ est une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $C^\infty(\mathcal{V})$ l'ensemble des fonctions réelles différentiables.



Une hypersurface Σ de $\mathcal{V}$ est l'ensemble des points x de $\mathcal{V}$ définis par

$$f(x^1, \ldots, x^n) = 0$$

où $f \in C^\infty(\mathcal{V})$ avec la condition que dans chaque carte $f \circ \varphi^{-1}$ ait un gradient, noté $\partial_i f$,

non nul en tout point de Σ

$$\partial_i f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1}) \neq 0.$$

L'hypersurface Σ est une variété différentiable de dimension $n-1$.

4.2 Champ de vecteurs et de tenseurs

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs X définit une dérivation sur les fonctions f en posant $X(f) = X^i \partial_i f$ dans un système de coordonnées curvilignes. Ceci justifie la notation $X = X^i \partial_i$ où le champ de vecteurs ∂_i vérifie $\partial_i(f) = \partial_i f$.

Dans une variété différentiable $\mathcal{V}$, soit l'ensemble des dérivations sur les fonctions en un point x, noté $\{X_x\}$. On a $X_x : C^\infty(\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ avec les propriétés de dérivation

$$X_x(\alpha f + \beta g) = \alpha X_x(f) + \beta X_x(g) \quad , \ \alpha \ , \ \beta \in \mathbb{R} \ ,$$

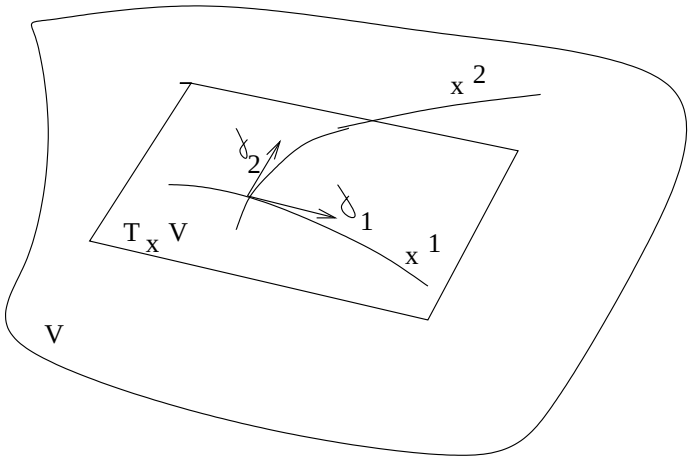
$$X_x(fg) = f(x) X_x(g) + g(x) X_x(f) \ .$$

Il suffit de connaître les fonctions f au voisinage de x. On appelle $X_x(f)$ la dérivée de f dans la direction X au point x. L'ensemble des vecteurs tangents en x a une structure d'espace vectoriel réel de dimension n que l'on note $\mathrm{T}_x\mathcal{V}$.

Dans une carte de système de coordonnées (x^i), nous définissons n vecteurs tangents en x, notés $\partial_{i\,x}$, par l'application suivante

$$\forall f \quad \partial_{i\,x}(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})\Big|_x \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Les vecteurs $\partial_{i\,x}$ sont les vecteurs-dérivées aux courbes-coordonnées de la carte considérée. On peut montrer que les n vecteurs $\partial_{i\,x}$ forment une base de $\mathrm{T}_x\mathcal{V}$. Dans une autre carte



de coordonnées $(x^{i'})$, on définit les vecteurs tangents en x de la même façon $\partial_{i'\,x'}$. Dans l'intersection des ouverts, on a

$$\partial_{i'\,x'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}(x') \partial_{j\,x}.$$

La réunion de tous les $\mathrm{T}_x\mathcal{V}$ est noté $\mathrm{T}\mathcal{V}$. On appelle champ de vecteurs une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathrm{T}\mathcal{V}$ qui est différentiable, c'est-à-dire que $X_x(f)$ est une fonction différentiable pour toute fonction f. Dans une carte, les ∂_i définis en tout point x par $\partial_{i\,x}$ sont des champs de vecteurs différentiables. Ils constituent la base naturelle associée aux coordonnées (x^i). Un champ de vecteurs Y peut s'écrire dans la carte du système de coordonnées (x^i) sous la forme

$$Y = Y^i(x)\partial_i$$

où les Y^i sont les composantes de Y dans cette base ; ce sont des fonctions différentiables dans l'ouvert de la carte. On peut préciser la classe de différentiabilité C^{k-1} dans une variété différentiable C^k avec $k \geq 2$.

Pour un champ de vecteurs Y donné, la loi de transformation dans l'intersection de deux ouverts est

$$Y^{i'}(x'(x)) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}(x)Y^j(x).$$

Dans la pratique, on se donne souvent un champ de vecteurs par ses composantes dans chaque carte d'un atlas en s'assurant de la compatibilité par changement de cartes.

Une base quelconque des champs de vecteurs est formée de n champs de vecteurs $e_{\underline{i}}$, $(\underline{i} = 1, \ldots, n)$ tels qu'en chaque point x ils forment une base de l'espace tangent

$$Y = Y^{\underline{i}} e_{\underline{i}}.$$

Nous soulignons l'indice ($e_{\underline{i}\leftarrow\text{SOULIGNÉ}}$) de façon à ne pas confondre avec la base naturelle ∂_i. En général on ne peut pas trouver de coordonnées dans lesquelles les $e_{\underline{i}}$ puissent constituer une base naturelle.

En chaque point x^i d'une carte, on peut définir une base dx^i_x de $(T_x\mathcal{V})^*$ associée de façon canonique à $\partial_{i\,x}$ en posant

$$dx^i_x(Y_x) = Y^i(x) \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n$$

où Y^i sont les composantes de Y. Par changement de carte, on a la loi de transformation

$$dx^{i'}_{x'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}(x)dx^j_x.$$

On peut définir les formes différentiables. Dans une carte, une base est constituée des dx^i définies en tout point à l'aide des dx^i_x. Toute forme différentiable ω s'écrit dans une carte

$$\omega = \omega_i(x)dx^i$$

où les composantes ω_i sont des fonctions différentiables. On a la loi de transformation dans l'intersection de deux ouverts

$$\omega_{i'}(x') = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}(x')\omega_j(x(x'))$$

On peut aussi introduire des champs de tenseurs q fois contravariants et p fois covariants

$$T = T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}(x^k)\partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_q} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_p}.$$

Un tenseur p fois covariant complètement antisymétrique, avec par conséquent $p \leq n$, est appelé une p-forme différentiable.

4.3 Métrique et élément de volume induit

On appelle métrique d'une variété différentiable $\mathcal{V}$ un champ de tenseurs g deux fois covariants, symétriques et non dégénérés. Dans une carte (x^i), on a

$$g = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j \quad \text{avec} \quad g_{ij} = g_{ji} \quad \text{et} \quad \det g_{ij} \neq 0.$$

En chaque point x de $\mathcal{V}$, il fournit un produit scalaire de l'espace vectoriel tangent $T_x\mathcal{V}$

$$g(X_x, Y_x) = g_{ij}(x)X^i(x)Y^j(x).$$

De plus, il permet d'identifier de façon canonique les champs de vecteurs et les formes ; on a en composantes

$$Y_i = g_{ij}Y^j \quad \text{et} \quad Y^i = g^{ij}Y_j$$

où g^{ij} est la matrice inverse de g_{ij} en tout point, définie par

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k.$$

Les g^{ij} sont les composantes d'un champ de tenseurs deux fois contravariants.

Il existe au moins localement n champs de vecteurs $e_{\underline{i}}$ qui constituent une base orthonormée de l'espace tangent en chaque point, c'est-à-dire

$$g_{ij}e^i_{\underline{m}}e^j_{\underline{n}} = g_{\underline{m}\,\underline{n}} \quad \text{avec} \quad g_{\underline{m}\,\underline{n}} = +1 \text{ ou } -1.$$

Le nombre des $+$ et des $-$ formé par $g(e_{\underline{1}}, e_{\underline{1}}), \ldots, g(e_{\underline{n}}, e_{\underline{n}})$ est la signature de la métrique. Elle sera la même pour toutes les bases orthonormées et ceci en tout point [1]. Quand $g_{\underline{m}\,\underline{n}} = \delta_{mn}$, on parle de métrique riemannienne et quand $g_{\underline{m}\,\underline{n}} = \eta_{mn}$ de métrique lorentzienne. Les $e_{\underline{i}}$ constituent une base orthonormée. On remarque que

$$g^{ij} = e^i_{\underline{m}}e^j_{\underline{n}}g^{\underline{m}\,\underline{n}} \quad \text{soit} \quad g_{ij} = e_{\underline{m}i}e_{\underline{n}j}g^{\underline{m}\,\underline{n}}.$$

Par exemple pour la sphère S^2, les composantes de la métrique en coordonnées (θ, φ) sont $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta$ et $g_{\theta\varphi} = 0$. Une base orthonormée dont les vecteurs sont colinéaires à ceux du repère naturel est $e^\theta_{\underline{\theta}} = 1$, $e^\varphi_{\underline{\theta}} = 0$ et $e^\theta_{\underline{\varphi}} = 0$, $e^\varphi_{\underline{\varphi}} = 1/\sin\theta$.

Considérons une hypersurface Σ de $\mathcal{V}$ définie par l'équation $f(x) = 0$. Le vecteur normal est le gradient $\partial_i f$. On note

$\partial_i f$ toujours orienté dans le temps	hypersurface $f = 0$ du genre espace
$\partial_i f$ toujours isotrope	hypersurface $f = 0$ du genre lumière
$\partial_i f$ toujours orienté dans l'espace	hypersurface $f = 0$ du genre temps.

[1] Le signe du déterminant de la métrique est le produit des $g_{\underline{m}\,\underline{n}}$.

Dans le cas où d'une hypersurface Σ du genre espace ou du genre temps [2], nous définissons par convention le vecteur normal unitaire à Σ par

$$n_i = \frac{\pm\partial_i f}{\sqrt{\pm g^{ij}\partial_i f \partial_j f}}$$

qui satisfait bien sûr $g_{ij}n^i n^j = \pm 1$. On peut induire sur Σ une métrique h en posant

$$X, Y \in T\Sigma \quad h(X,Y) = g(X,Y).$$

Si l'hypersurface Σ est définie par les équations $x^i(y^a)$ avec $a = 1, \ldots, n-1$ alors les (y^a) constituent un système de coordonnées de Σ. Les composantes de la métrique h dans les coordonnées (y^a) sont

$$h\left(\frac{\partial}{\partial y^a}, \frac{\partial}{\partial y^b}\right) = g\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\partial_i, \frac{\partial x^j}{\partial y^b}\partial_j\right) \quad \text{soit} \quad h_{ab} = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\frac{\partial x^j}{\partial y^b} g_{ij}.$$

La métrique g de $\mathcal{V}$ permet de définir une mesure sur $\mathcal{V}$, c'est-à-dire un élément de volume dV pour l'intégration des fonctions. Il faut considérer une variété orientable pour laquelle il existe un atlas tel que chaque changement de système de coordonnées ait une matrice jacobienne de déterminant positif. Cependant, nous nous limitons à une seule carte pour simplifier l'exposé. Dans l'ouvert $\mathcal{O}$ de cette carte, l'élément de volume dV induit par la métrique est

$$dV = \sqrt{|\,g\,|}dx^1 \ldots dx^n$$

où g est le déterminant de la métrique g_{ij}. L'intégration d'une fonction f dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{O}$ est l'intégrale usuelle

$$\int_{\mathcal{U}} f(x^1, \ldots, x^n) dV$$

dont la valeur est indépendante du choix des coordonnées pourvu que la matrice jacobienne du changement de coordonnées ait un déterminant positif. Ceci résulte de la loi de transformation du déterminant g de la métrique

$$g' = \left(\det \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right)^2 g.$$

Soit un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$ délimité par un bord $\partial\mathcal{U}$ qui est une hypersurface de $\mathcal{V}$. Si cette hypersurface admet un vecteur normal unitaire n_i, au moins par morceaux, alors la métrique g induit une métrique h sur chaque morceau de $\partial\mathcal{U}$. On note dS l'élément de volume de $\partial\mathcal{U}$ induit par la métrique h. N'ayant pas fait une théorie de l'intégration, nous formulons le théorème de Stokes sous la forme du théorème de Gauss

$$\int_{\partial\mathcal{U}} X^i n_i dS = \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{\sqrt{|\,g\,|}}\partial_i\left(\sqrt{|\,g\,|}X^i\right) dV.$$

[2] Quand le vecteur normal est isotrope celui-ci est tangent à l'hypersurface Σ du genre lumière.

En réalité, l'existence d'une métrique est inutile pour formuler le théorème de Stokes.

Dans une variété orientable, on peut introduire un tenseur complètement antisymétrique η en composantes covariantes ou contravariantes, appelé forme élément de volume

$$\eta_{i_1\cdots i_n} = \sqrt{|\,g\,|}\epsilon_{i_1\cdots i_n} \quad \text{et} \quad \eta^{i_1\cdots i_n} = \frac{\sqrt{|\,g\,|}}{g}\epsilon^{i_1\cdots i_n}$$

où $\epsilon^{i_1\cdots i_n}$ et $\epsilon_{i_1\cdots i_n}$ sont les symboles de Levi-Civita, qui valent 1 si $i_1 \ldots i_n$ est une permutation paire de $1 \ldots n$, -1 si $i_1 \ldots i_n$ est une permutation impaire de $1 \ldots n$ et 0 pour deux indices identiques. On fera attention au changement de signe en métrique lorentzienne. Que ce soit un tenseur résulte de l'identité

$$\det a_i^j = \epsilon^{j_1\cdots j_n} a^1_{j_1} \cdots a^n_{j_n} = \epsilon_{i_1\cdots i_n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}.$$

Il permet de définir la dualité entre une p-forme et une $(n-p)$-forme

$$\overset{*}{\omega}_{i_1\ldots i_{n-p}} = \frac{1}{p!}\eta_{i_1\ldots i_{n-p}i_{n-p+1}\ldots i_n}\omega^{i_{n-p+1}\ldots i_n}.$$

Nous notons l'identité [3]

$$\partial_k \sqrt{|\,g\,|} = \frac{1}{2}\sqrt{|\,g\,|}g^{mn}\partial_k g_{mn}.$$

4.4 Dérivée de Lie et vecteur de Killing

Soit X un champ de vecteurs de $\mathcal{V}$ et x un point de $\mathcal{V}$. Considérons la solution du système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt}x^i(t) = X^i(x^k(t)) \quad \text{avec} \quad x^i(0) = x^i.$$

Au moins localement la solution fournit une application x_t de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, $x^i(t) = x^i_t(x)$, telle que

$$\forall x \quad x_{t_1} \circ x_{t_2}(x) = x_{t_1+t_2}(x) \quad x_t^{-1}(x) = x_{-t}(x) \quad x_0(x) = x.$$

On dit que x_t est un groupe local de transformations à un paramètre. Cela constitue les lignes de courant du champ de vecteurs X dans $\mathcal{V}$. On parle aussi de flot associé au champ de vecteurs.

On définit tout d'abord la dérivée de Lie d'une fonction f. On compare simplement la valeur de $f(x_t(x))$ et $f(x)$. On pose donc

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[f(x_t(x)) - f(x)\right] \quad \text{soit} \quad \mathcal{L}_X f = X^i\partial_i f.$$

[3]Elle résulte de la propriété suivante pour une matrice M : $\delta \ln\det M = \ln\det(1 + M^{-1}\delta M)$ donc $\delta \ln\det M \to Tr(M^{-1}\delta M)$ quand $\delta M \to 0$.

L'application x_t induit un isomorphisme des espaces tangents $\mathrm{T}_x\mathcal{V}$ et $\mathrm{T}_{x_t(x)}\mathcal{V}$ [4]. Pour un champ de vecteurs Y, on a les formules

$$((x_t)^*Y)^i(x_t) \equiv \frac{\partial x_t^i}{\partial x^j} Y^j(x) \quad \text{et} \quad ((x_t)_*Y)^i(x) \equiv \frac{\partial x_{-t}^i}{\partial x^j} Y^j(x_t).$$

Pour définir la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs Y, on compare encore la valeur du champ de vecteurs en $x_t(x)$ mais puisque la base naturelle a elle aussi changée, il faut ramener cette valeur en x. C'est pourquoi on utilise l'application $(x_t)_*$. On pose donc

$$(\mathcal{L}_X Y)^i(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[((x_t)_*Y)^i(x) - Y^i(x) \right].$$

Le calcul de $(x_t)_*$ se fait en remarquant que $x_{-t}^i = x^i - tX^i + O(t^2)$. On obtient alors

$$\left.\frac{\partial x_{-t}^i}{\partial x^j}\right|_{t=0} = \delta_j^i \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_{-t}^i}{\partial x^j}\right|_{t=0} = -\frac{\partial}{\partial x^j} X^i(x).$$

Puisque $Y^i(x_t) = Y^j(x) + tX^k\partial_k Y^j(x) + O(t^2)$, les composantes de la dérivée de Lie sont

$$(\mathcal{L}_X Y)^j = X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j.$$

La dérivée de Lie d'un champ de vecteurs coïncide avec le crochet de deux vecteurs, $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$. Cet opérateur est linéaire en X et satisfait les propriétés

$$\mathcal{L}_X(Y_1 + Y_2) = \mathcal{L}_X Y_1 + \mathcal{L}_X Y_2 \quad \mathcal{L}_X(fY) = X(f)Y + f\mathcal{L}_X Y \ ,$$

$$\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y Z - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X Z = \mathcal{L}_{[X,Y]} Z \ .$$

Pour une forme ω, l'application x_t induit l'isomorphisme

$$((x_t)_*\omega)_i(x) = \frac{\partial x_t^j}{\partial x^i}\omega_j(x_t).$$

Ainsi, la dérivée de Lie d'une forme ω par rapport à X est définie par

$$(\mathcal{L}_X\omega)_j(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[((x_t)_*\omega)_j(x) - \omega_j(x) \right].$$

Ce qui donne en composantes

$$(\mathcal{L}_X\omega)_j = X^i\partial_i\omega_j + \omega_i\partial_j X^i.$$

De façon générale pour un tenseur q fois contravariant et p fois covariant, on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T)^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} = \ & X^i\partial_i T^{i_1\ldots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} - T^{ii_2\cdots i_q}{}_{j_1-\cdots j_p}\partial_i X^{i_1} \cdots - T^{i_1\cdots i_{q-1}i}{}_{j_1\cdots j_p}\partial_i X^{i_q} \\ & + T^{i_1\cdots i_q}{}_{jj_2\cdots j_p}\partial_{j_1} X^j + \cdots + T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_{p-1}j}\partial_{j_p} X^j.\end{aligned}$$

[4] De façon générale, pour une application I de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$ on définit une fonction I_*f de $\mathcal{V}$ à partir d'une fonction f de $\mathcal{W}$ par $I_*f(x) = f(I(x))$. Considérant un champ de vecteurs Y de $\mathcal{V}$, on défnit alors un champ de vecteurs I^*Y sur $\mathcal{W}$ par $I^*Y(f) = Y(I_*f)$ pour toute fonction f de $\mathcal{W}$.

La dérivée de Lie permet de définir de façon indépendante du système de coordonnées des propriétés d'invariance. On peut toujours trouver un système adapté de coordonnées tel que la coordonnée x^n coïncide avec le flot associé à X, c'est-à-dire dans lequel $X^i = \delta^i_n$. On a alors

$$x^n_t = x^n + t + O(t^2) \quad \text{et} \quad x^i_t = x^i \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Si pour un tenseur T on a $\mathcal{L}_X T = 0$ alors les composantes $T^{i_1 \cdots i_q}_{\quad j_1 \cdots j_p}$ dans ces coordonnées adaptées sont indépendantes de x^n. C'est l'invariance par translation.

On appelle vecteur de Killing un champ de vecteurs X tel que la dérivée de Lie de la métrique soit nulle

$$\mathcal{L}_X g = 0.$$

Le flot associé à X constitue un groupe d'isométries à un paramètre. Il indique une propriété de symétrie de la métrique. Quand il y a p vecteurs de Killing cela signifie qu'il y a un groupe d'isométries à p paramètres qui opère sur $\mathcal{V}$, les vecteurs de Killing formant une algèbre de Lie pour le crochet. Les orbites sont les ensembles des points de $\mathcal{V}$ se transformant par l'action du groupe d'isométries.

Le groupes des rotations dans l'espace euclidien est un groupe d'isométries. Les orbites sont les sphères. Il en résulte que dans le cas de la sphère S^2, il y a trois vecteurs de Killing dont les composantes en coordonnées sphériques (θ, φ) sont

$$\xi_1\ (-\sin\varphi, -\cos\varphi\cot\theta) \quad , \quad \xi_2\ (\cos\varphi, -\sin\varphi\cot\theta) \quad \text{et} \quad \xi_3\ (0, 1)$$

qui satisfont les relations de commutation : $[\xi_1, \xi_2] = -\xi_3$, $[\xi_2, \xi_3] = -\xi_1$ et $[\xi_3, \xi_1] = -\xi_2$ [5]. On a un groupe d'isométries à trois paramètres.

4.5 Connexion linéaire, torsion et tenseur de courbure

Une connexion linéaire sur une variété différentiable $\mathcal{V}$ est une application qui à deux champs de vecteurs X et Y fait correspondre un champ de vecteurs

$$X\ ,\ Y \to D_X Y$$

telle que $D_X Y$ est linéaire en X et satisfait pour Y la condition

$$D_X(fY) = X(f)Y + f D_X Y.$$

On définit une propriété géométrique de la variété différentiable en postulant que l'accroissement dY d'un champ de vecteurs Y quand on passe de x à $x + dx$ dans un système de coordonnées (x^i) est donné par

$$dY = D_{\partial_i} Y dx^i.$$

[5] Les $-i\xi_a$ coïncident avec les générateurs J_x, J_y, J_z de l'algèbre de Lie du groupe des rotations.

Cela généralise le résultat en espace affine avec la connexion plate ; en effet en coordonnées curvilignes (x^i), la connexion ∇ est définie par

$$(\nabla_X Y)^i = X^j \nabla_j Y^i.$$

Cependant pour une connexion linéaire quelconque, il n'existe pas un système de coordonnées pour lequel on ait $(dY)^j = \partial_i Y^j dx^i$ dans un ouvert. Ainsi la connexion est une donnée de la géométrie d'une variété.

Dans la base naturelle ∂_i, la connexion D s'exprime sous la forme

$$D_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$$

caractérisée par les symboles de connexion Γ^k_{ij} [6]. Dans la pratique, on se donne dans chaque carte d'un atlas des fonctions Γ^k_{ij} en s'assurant de la compatibilité par le changement de carte qui a la forme

$$\Gamma^{l'}_{m'n'} = \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{n'}}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^p}\frac{\partial}{\partial x^{m'}}\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{n'}}\right).$$

On peut alors définir la dérivée covariante de X, qui est un champ de tenseurs une fois covariants et une fois contravariants, par

$$D_i X^k = \partial_i X^k + \Gamma^k_{ij} X^j.$$

La connexion permet de définir le transport par parallélisme d'un vecteur X le long d'une courbe $x^i(t)$ de $\mathcal{V}$ par la formule

$$\frac{d}{dt}X^k(t) + \Gamma^k_{ij}(x(t))\dot{x}^i(t)X^j(t) = 0.$$

Par abus de notation, on écrit souvent $\dot{x}^k D_k X^i = 0$. On dit qu'une courbe $x^i(t)$ est autoparallèle s'il existe un paramètrage $x^i(s)$ pour lequel le vecteur-dérivée $\dot{x}^i$ se transporte par parallélisme le long de la courbe $x^i(s)$.

On peut introduire la dérivée covariante d'une forme par

$$D_i\omega_j = \partial_i\omega_j - \Gamma^k_{ij}\omega_k$$

qui assure que

$$\partial_i(X^k\omega_k) = D_i X^k \omega_k + X^k D_i\omega_k.$$

La dérivée covariante s'étend aux tenseurs q fois contravariants et p fois covariants

$$\begin{aligned} D_m T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} = \;& \partial_m T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} + \Gamma^{i_1}_{mi} T^{i i_2\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} + \cdots + \Gamma^{i_q}_{mi} T^{i_1\cdots i_{q-1} i}{}_{j_1\cdots j_p} \\ & - \Gamma^j_{mj_1} T^{i_1\cdots i_q}{}_{j j_2\cdots j_p} - \cdots - \Gamma^j_{mj_q} T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_{p-1} j}. \end{aligned}$$

Elle fournit une dérivation sur les tenseurs.

Soit une connexion linéaire D, on peut lui associer deux champs de tenseurs.

[6] Dans une base constituée de n champs de vecteurs $e_{\underline{a}}$, nous obtenons le formalisme de Cartan en définissant les 1-formes $\omega^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ par la formule $D_X e_{\underline{a}} = \omega^{\underline{b}}_{\underline{a}}(X) e_{\underline{b}}$ qui s'expriment en composantes $\omega_i{}^{\underline{b}}_{\underline{a}} dx^i$ dans un système de coordonnées (x^i).

1. La torsion est définie par

$$T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y].$$

Nous vérifions que $T(fX,Y) = fD_X Y - fD_Y X - Y(f)X - [fX,Y] = fT(X,Y)$. Par suite, il s'agit d'un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant. Dans la base naturelle ∂_i, la torsion a pour composantes

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$$

puisque $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Elle est antisymétrique en i et j.

2. Le tenseur de courbure est défini par

$$R(X,Y,Z) = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z.$$

On peut montrer de même qu'il s'agit d'un tenseur une fois contravariant et trois fois covariant. Dans la base naturelle ∂_i, le tenseur de courbure a les composantes

$$R^l_{kij} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}.$$

Il est manifestement antisymétrique en i et j.

4.6 Connexion riemannienne et tenseur de Riemann

Nous allons uniquement considérer la géométrie d'une variété différentiable définie par la donnée d'une métrique g et de sa connexion riemannienne [7], notée désormais ∇. Celle-ci est une connexion linéaire sans torsion qui conserve le produit scalaire défini par la métrique g [8], en formule

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0,$$
$$Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Cela signifie que le produit scalaire de deux vecteurs se transportant par parallélisme le long d'une courbe reste constant. On avait les mêmes propriétés pour la connexion plate en espace affine métrique. Cependant, le transport par parallélisme d'un vecteur entre deux points par deux chemins différents ne conduit plus au même vecteur final.

Une courbe auto-parallèle $x^i(s)$ s'appelle alors une géodésique, le vecteur-dérivée $\dot{x}^i$ satisfaisant $\dot{x}^k \nabla_k \dot{x}^i = 0$ et le paramètre s s'appellant le paramètre affine. Le vecteur-dérivée $\dot{x}^i$ conserve une norme constante le long de la géodésique $x^i(s)$.

[7] Elle est aussi appelée connexion de Levi-Civita.

[8] L'appellation connexion métrique est réservée à celles qui conservent le produit scalaire tout en ayant une torsion.

Ces deux postulats permettent de déterminer de façon unique une connexion linéaire en fonction de la métrique. Les symboles de connexion sont alors appelés les symboles de Christoffel. Dans un système de coordonnées, les deux conditions s'écrivent

$$T^k_{ij} = 0 \quad \text{soit} \quad \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} = 0,$$

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad \text{soit} \quad \partial_k g_{ij} - \Gamma^m_{ki} g_{mj} - \Gamma^m_{kj} g_{im} = 0.$$

Elles conduisent à l'expression

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right).$$

C'est bien sûr la même expression en fonction des composantes de la métrique que dans le cas de l'espace affine métrique en coordonnées curvilignes. Comme en coordonnées curvilignes, on monte et on descend les indices des champs de tenseurs avec g_{ij} et g^{ij} dans les expressions tensorielles qui contiennent des dérivée covariantes

$$\nabla_i X_j = g_{jk} \nabla_i X^k \quad \text{et} \quad \nabla_i X^j = g^{jk} \nabla_i X_k.$$

Le tenseur de courbure pour la connexion riemannienne est alors appelé tenseur de Riemann. On parle d'espace courbe. Naturellement, le tenseur de Riemann est identiquement nul en espace affine métrique puisqu'il est nul calculé en coordonnées rectilignes et on dit que l'espace est plat. Mais la réciproque n'est pas vraie. Lorsque le tenseur de Riemann est nul on dit que l'espace est localement plat. Un exemple est le cylindre $S^1 \times I\!R$ que l'on munit aisément d'une métrique euclidienne $ds^2 = dz^2 + d\varphi^2$ avec $0 \leq \varphi < 2\pi$ mais dont la topologie est globalement différente de $I\!R^2$.

Le tenseur de Riemann possède des propriétés spécifiques. En plus de la propriété d'antisymétrie valable pour tout tenseur de courbure

$$R_{lkij} = -R_{lkji},$$

il possède d'autres symétries. On démontre tout d'abord que

$$R_{klij} = -R_{lkij} \quad \text{et} \quad R_{klij} = R_{ijkl}$$

puis la première identité de Bianchi

$$R^k_{lij} + R^k_{ijl} + R^k_{jli} = 0.$$

Le tenseur de Riemann possède donc $n^2(n^2-1)/12$ composantes indépendantes. Enfin, on peut démontrer la deuxième identité de Bianchi

$$\nabla_m R^k_{lij} + \nabla_i R^k_{ljm} + \nabla_j R^k_{lmi} = 0.$$

Le tenseur de Riemann permet de calculer la commutation des dérivées covariantes [9]. En effet, par application des formules de dérivation covariante, nous avons

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) X^k = R^k_{mij} X^m.$$

[9] Pour une fonction f, on a $\nabla_j \partial_i f = \nabla_i \partial_j f$.

Ceci s'étend bien entendu aux tenseurs

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)X^{i_1\cdots i_q} = R^{i_1}_{\ mij}X^{mi_2\cdots i_q} + \cdots + R^{i_q}_{\ mij}X^{i_1\cdots i_{q-1}m}.$$

La contraction des indices du tenseur de Riemann fournit de nouveaux tenseurs.

1. Le tenseur de Ricci $R_{lm} = R^k_{\ lkm}$ qui est un tenseur symétrique possédant $n(n+1)/2$ composantes indépendantes.
2. La courbure scalaire $R = R^i_{\ i}$ qui est une fonction.

La deuxième identité de Bianchi contractée sur k et m donne

$$\nabla_m R^m_{\ lij} - \nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} = 0$$

puis une deuxième contraction sur l et j donne une identité pour le tenseur de Ricci

$$\nabla_i R^i_{\ j} - \frac{1}{2}\partial_j R = 0.$$

Dans le cas d'une connexion riemannienne nous notons la formule

$$\Gamma^m_{mk} = \frac{1}{\sqrt{|\,g\,|}}\partial_k\sqrt{|\,g\,|}$$

qui conduit aux expressions utiles suivantes

$$\nabla_i X^i = \frac{1}{\sqrt{|\,g\,|}}\partial_i\left(\sqrt{|\,g\,|}X^i\right),$$

$$\nabla_i T^{ij} = \frac{1}{\sqrt{|\,g\,|}}\partial_i\left(\sqrt{|\,g\,|}T^{ij}\right) + \Gamma^j_{mn}T^{mn},$$

la dernière se simplifiant encore davantage si le tenseur T^{ij} est un tenseur antisymétrique car alors nous avons $\Gamma^j_{mn}T^{mn} = 0$.

Nous ajoutons également sans démonstration les identités

$$\nabla_i\eta^{i_1\cdots i_n} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_i\eta_{i_1\cdots i_n} = 0,$$

$$\mathcal{L}_X g_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.$$

Chapitre 5

Théories métriques de la gravitation

5.1 Origines

La théorie de Newton de la gravitation présente des difficultés conceptuelles comme celle de l'action à distance. Une modification du champ gravitationnel est transmise instantanément dans tout l'espace-temps galiléen. Cependant, elle semblait remarquablement confirmée, en particulier dans le cadre de la mécanique céleste, à une exception notable près puisque Le Verrier au milieu du $19^{\text{ème}}$ siècle avait trouvé une avance systématique du périhélie de Mercure actuellement estimée à 43 secondes d'arc par siècle. En réalité, c'est la différence entre deux grands nombres : l'avance observée et celle calculée dans le cadre newtonien de la théorie du système solaire [1].

De toute façon à partir de 1905, l'espace-temps galiléen devait être rejeté à la lumière de la relativité restreinte car l'équation fondamentale de la dynamique et la loi d'attraction gravitationnelle sont invariantes sous une transformation de Galilée. Il faut nécessairement établir une théorie relativiste de la gravitation.

Il semble facile de construire une théorie de la gravitation dans l'espace-temps minkowskien qui soit invariante de forme sous une transformation de Poincaré. On imagine tout de suite que l'équation du mouvement d'une masse ponctuelle de ligne d'univers $x^\mu(s)$, où s est le temps propre, devrait ressembler à

$$\frac{d}{ds}u^\mu = (\eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Phi \quad \text{avec} \quad \Box\Phi = -\sum_b 4\pi G m_b \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(4)}(x^\lambda - x_b^\lambda(s))ds,$$

la source étant donnée par les autres masses de ligne d'univers $x_b^\mu(s)$. Nous notons que la condition algébrique sur la force est vérifiée. L'application, que nous ne ferons pas, au problème des deux corps conduit à un retard systématique du périhélie dans le cas de Mercure, contraire à l'observation. On a essayé bien d'autres choses qui ont toutes échoué.

[1] Il existe actuellement une controverse analogue sur les sondes *Pioneer 10/11* qui présentent aux confins du système solaire une accélération anormale de 10^{-10} m . s^{-2} dirigée vers le Soleil.

En réalité, il faut réfléchir à des éléments fondamentaux qui nous sont suggérés par des faits expérimentaux actuellement bien établis.

1. En relativité restreinte, la masse inerte d'un corps est la somme des masses des particules qui le composent plus l'énergie cinétique et l'énergie interne d'interaction[2]. Pourtant la masse grave doit être égale à la masse inerte en vertu du principe d'équivalence faible. Cela montre que ce n'est pas une propriété spécifique des masses des particules mais que toutes les formes d'énergie doivent satisfaire ce principe. L'idée est qu'il faut trouver un principe de couplage universel de tous les champs physiques à la gravitation. Le champ de gravitation est donc différent des autres champs connus.
2. S'il est possible d'écrire les lois de la gravitation dans l'espace-temps minkowskien, comment garder le cône de lumière minkowskien et la causalité associée alors que la gravitation influence la trajectoire des rayons lumineux ? Quel intérêt physique alors de garder une distance minkowskienne inobservable ?
3. Quelle est l'origine du décalage des fréquences dans un champ de gravitation ? C'est historiquement le point crucial dans la pensée d'Einstein.

Nous reprenons ce dernier point sous la forme d'une expérience de comparaison entre les temps donnés par deux horloges situées en x_o^i et x_e^i dans un potentiel newtonien statique U. Puisqu'une fréquence est l'inverse d'un temps, la formule du décalage des fréquences suggère que les deux périodes de temps $\triangle s_o$ et $\triangle s_e$ sont reliées par

$$\triangle s_o \approx \triangle s_e \left(1 + \frac{U(x_e^i)}{c^2} - \frac{U(x_o^i)}{c^2}\right).$$

Nous soulignons que l'on suppose que les horloges ne sont pas affectées par le champ de gravitation et que c'est la comparaison entre ces deux horloges, à l'aide par exemple de tops, qui conduit à la formule suggérée. Ainsi, il semble que la période $\triangle s_0$ mesurée par l'horloge de chaque observateur en x_0^i s'exprime par

$$\triangle s_0 \approx \left(1 - \frac{U(x_0^i)}{c^2}\right) \triangle x^0$$

en fonction d'une période $\triangle x^0$ indépendante de la position x_0^i. Nous avons donc le paramètre x^0 et les coordonnées x^i. L'idée d'Einstein est que cette formule doit s'interpréter comme la manifestation d'une propriété géométrique de l'espace-temps. Naturellement il n'y a pas de preuve dans ce domaine si ce n'est éventuellement un manque d'imagination. On postule que $\triangle s_0$ est la longueur de la courbe $x_0^i = \text{const.}$ pour un intervalle $\triangle x^0$ du paramètre x^0. Ainsi, il doit exister une métrique sur l'espace-temps qui donne la distance entre deux événements infiniment voisins suivant la formule

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2U(x^i)}{c^2}\right)(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

[2]La masse inerte d'un noyau de fer est un pour cent de moins que la somme de ses constituants : protons et neutrons.

où x^0 est une coordonnée temporelle, $x^0 = ct$, et les x^i jouent le rôle de coordonnées galiléennes. Par commodité de langage, nous appellerons cette métrique la métrique newtonienne, en supposant que le potentiel newtonien U s'annule à l'infini spatial.

Le cône de lumière de cette métrique newtonienne semble conduire dans les coordonnées (x^0, x^i) à la vitesse de la lumière déjà rencontrée c/n mais cela est une idée erronée. Nous insistons sur le fait que la coordonnée x^0 n'est pas mesurable par une horloge, excepté à l'infini spatial où le potentiel newtonien s'annule. On appelle t le temps-coordonnée.

Dans le cas du référentiel géocentrique, on définit un temps-coordonnée t^* par la formule $t^* = (1 - U_0/c^2)t$ où U_0 est le potentiel constant du géoïde. Alors, t^* coïncide avec le temps TAI (Temps Atomique International) qui est fourni en l'occurence par une horloge sur le géoïde. On a $ds^2 \approx -(1 - 2U/c^2 + 2U_0/c^2)dt_{TAI}^2$ en $x^i = \text{const}$.

Une fois admise l'idée d'une métrique pour l'espace-temps, on ne peut se limiter à la métrique newtonienne car il faut adopter un cadre géométrique général. En tout cas, il faut nécessairement abandonner l'espace-temps minkowskien pour décrire la réalité physique en présence d'un champ de gravitation. Seul le champ de gravitation uniforme $U = g^i x^i$ est réalisable en espace-temps minkowskien par le changement de coordonnées curvilignes correspondant à un référentiel uniformément accéléré d'accélération $a^i = -g^i$.

5.2 Espace-temps einsteinien et principe de covariance

Nous admettons que les effets de la gravitation sur les phénomènes physiques résultent uniquement de la structure géométrique de l'espace-temps. Nous ne faisons pas directement intervenir d'éventuels autres champs gravitationnels, comme un champ scalaire. Notons que nous sous-entendons toujours une description continue de la matière. Cette origine explique le caractère universel de l'interaction gravitationnelle. Il n'y a pas de matière et de champs physiques, incluant la lumière, qui puissent échapper au couplage avec la gravitation.

En conséquence, nous postulons que la géométrie de l'espace-temps einsteinien est une géométrie lorentzienne caractérisée par une métrique g de signature $(- + ++)$ [3] et la connexion riemannienne ∇ associée à la métrique g. Il existe un atlas qui recouvre la variété différentiable à l'aide de systèmes de coordonnées (x^μ) mais nous soulignons qu'il s'agit d'une description purement mathématique car les coordonnées (x^μ) n'ont aucune signification physique. Nous y plongerons un observateur avec ses appareils de mesure.

L'espace-temps einsteinien décrit un véritable champ de gravitation si le tenseur de Riemann est non nul. Nous notons que les effets inertiels peuvent s'interpréter dans des coordonnées curvilignes de l'espace-temps minkowskien. C'est le cas du champ de gravitation uniforme obtenu en considérant l'observateur uniformément accéléré que nous avons déjà introduit.

Pour qu'il n'y ait pas de systèmes privilégiés de coordonnées, il faut que les champs physiques soient des champs de tenseurs et que les lois physiques s'écrivent de façon tensorielle

[3] A quatre dimensions, il suffit de vérifier que le déterminant de la métrique est négatif.

dans n'importe quels systèmes de coordonnées, éventuellement limités à ceux de matrice jacobienne de déterminant positif nécessitant que l'espace-temps soit orientable. C'est le principe de covariance. Pour un champ de tenseurs T, nous aurons à titre d'exemple des équations covariantes

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_{\mu'} T^{\mu'\nu'} = 0.$$

Dans une première approche, nous considérons que la métrique g est donnée comme le serait un champ extérieur. Nous ne savons pas pour l'instant ce qui la détermine. Les effets gravitationnels sur les phénomènes physiques sont déterminés par l'intermédiaire de la métrique g sans tenir compte d'une éventuelle rétroaction. Par exemple, on parle d'une particule massive d'épreuve quand son propre champ gravitationnel est négligeable.

Nous allons nous restreindre à ce qu'on appelle les théories métriques de la gravitation dans lesquelles le mouvement d'une particule massive et la propagation de la lumière sont décrits par des géodésiques de la métrique donnée. Naturellement, ceci devra résulter du choix du couplage de la matière à la gravitation sur lequel nous reviendrons.

1. Une particule massive d'épreuve a toujours une ligne d'univers du genre temps pour la métrique g.
2. Une particule massive d'épreuve en chute libre suit une géodésique du genre temps de la métrique g. Nous choisissons le paramètre affine s de la géodésique $x^\mu(s)$ de telle sorte que le vecteur-dérivée dx^μ/ds soit de norme -1. Il est défini à une constante additive près. Ecrivons explicitement l'équation de la géodésique du genre temps

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad \text{avec} \quad g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = -1,$$

   la métrique $g_{\mu\nu}$ et les symboles de Christoffel étant évalués sur la courbe. Nous appelons dx^μ/ds la quadri-vitesse u^μ de la particule. On note souvent l'équation de la géodésique $u^\sigma\nabla_\sigma u^\mu = 0$ avec $u^\mu u_\mu = -1$.
3. La lumière suit une géodésique du genre lumière de la métrique g. Si λ est le paramètre affine, défini à une constante multiplicative près et une constante additive près, l'équation de la géodésique du genre lumière est

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad \text{avec} \quad g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0,$$

   la métrique $g_{\mu\nu}$ et les symboles de Christoffel étant évalués sur la courbe. Le vecteur de propagation k^μ de la lumière est proportionnel à $dx^\mu/d\lambda$ par un facteur constant. On note souvent $k^\sigma\nabla_\sigma k^\mu = 0$ avec $k^\mu k_\mu = 0$.

Ainsi, dans un espace-temps de métrique g, la trajectoire d'une particule massive chutant librement est indépendante de sa masse inerte et de sa constitution interne. La géométrisation de la gravitation incorpore automatiquement l'universalité de la chute libre. Dans le cas de la métrique newtonienne, la quadri-vitesse u^μ s'exprime en composantes $(u^0, u^0v^i/c)$ où v^i est la vitesse relative au temps-coordonnée x^0/c. Pour une particule en

mouvement lent, nous avons $u^0 \approx 1$ et $\Gamma^i_{00} \approx -\partial_i U/c^2$. En ne conservant que les termes en $1/c^2$, nous retrouvons l'équation newtonienne du mouvement

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} \approx 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} - \partial_i U \approx 0.$$

En revanche, il n'est pas cohérent de considérer le mouvement de particules relativistes ou la propagation de la lumière dans la métrique newtonienne. Nous verrons plus tard la métrique qu'il faut utiliser.

Il n'est pas certain que toutes les géométries lorentziennes possibles déterminent des espaces-temps einsteiniens physiquement acceptables. Nous souhaitons qu'ils satisfassent les propriétés globales suivantes.

1. L'espace-temps est connexe mais de toute façon nous n'aurions pas d'information sur les autres domaines.
2. L'espace-temps est orientable car cela peut être nécessaire dans la description de certaines interactions dans la théorie des particules élémentaires.
3. L'espace-temps est temporellement orientable, c'est-à-dire que de façon continue sur tout l'espace-temps on peut définir la notion de demi-cône futur ou passé issu d'un point. Ainsi la notion de courbe du genre temps et dirigée vers le futur est bien définie.
4. Il n'existe pas de courbes du genre temps qui soient fermées, ou repassant infiniment près, qui permettraient ainsi de revenir dans le passé. C'est la condition chronologique.
5. Nous verrons d'autres conditions globales sur l'espace-temps. Citons l'existence globale de quatre champs de vecteurs $e^\mu_{\underline{a}}$ linéairement indépendants, par exemple une tétrade lorentzienne permettant de définir des champs de spineurs.

5.3 Observateur en chute libre et principe d'équivalence d'Einstein

Comment se fait le couplage des lois physiques dans l'espace-temps einsteinien ? Nous pourrions le postuler purement et simplement. Cependant pour mieux comprendre, nous préférons passer par l'intermédiaire de l'observateur en chute libre bien qu'il ne faille pas oublier qu'une théorie physique est toujours postulée et justifiée *a posteriori* par ses conséquences.

Voyons comment un observateur est plongé dans l'espace-temps einsteinien. Il est de façon générale caractérisé par sa ligne d'univers $\mathcal{C}$, le temps t de son horloge et la donnée de son trièdre $e_{\underline{i}}$ ($\underline{i} = 1, 2, 3$). Dans le cas d'un observateur en chute libre, sa ligne d'univers est une géodésique du genre temps si nous l'assimilons à une particule massive d'épreuve dans le cadre des théories métriques de la gravitation. Son équation est $x^\mu(s)$, paramétrée

par le paramètre affine s tel que la quadri-vitesse u^μ soit de norme -1. Nous postulons les points suivants.

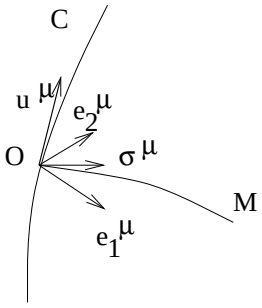
1. Le temps t de l'horloge de l'observateur est donné par $t = s/c$ et on appelle s le temps propre. Ainsi l'horloge ne serait pas affectée par le champ de gravitation.
2. Pour un observateur sans rotation, nous choisissons un trièdre de vecteurs orthonormés $e_{\underline{i}}$ formant son espace
   (a) se transportant par parallélisme le long de la géodésique
   $$\frac{de^\mu_{\underline{i}}}{ds} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} u^\rho e^\sigma_{\underline{i}} = 0 \quad \text{soit} \quad u^\nu \nabla_\nu e^\mu_{\underline{i}} = 0 \quad (\underline{i} = 1, 2, 3)$$
   (b) orthogonaux à u^μ.

Ce dernier point est compatible dans le cas d'une connexion riemannienne puisque tous ces vecteurs se transportent par parallélisme le long de la ligne d'univers. Ceci va trouver sa justification après coup mais ce sont les hypothèses faites pour un observateur inertiel dans l'espace-temps minkowskien. Les vecteurs u^μ et $e^\mu_{\underline{i}}$ forment une tétrade lorentzienne en tout point de la ligne d'univers.

Nous allons maintenant voir comment un événement M de l'espace-temps einsteinien peut être repéré par l'observateur en chute libre sans rotation. Il existe au moins localement une géodésique unique du genre espace qui joint M à un point O de la ligne d'univers $\mathcal{C}$ de l'observateur de façon orthogonale. Soit s la valeur du temps propre en O. Le vecteur tangent σ^μ en O de cette géodésique de norme 1 s'écrit

$$\sigma^\mu = n^{\underline{i}} e^\mu_{\underline{i}} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{3} n^{\underline{i}} n^{\underline{i}} = 1.$$

L'événement M peut ainsi être repéré, au moins dans un voisinage de $\mathcal{C}$, par les coordonnées



(y^0, y^i) dites de Fermi

$$y^0 = s \quad \text{et} \quad y^i = \sigma n^{\underline{i}}$$

où σ est la longueur de la géodésique entre O et M. La courbe $y^i = 0$ est la ligne d'univers $\mathcal{C}$ de l'observateur. Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial y^0}\Big|_{\mathcal{C}} = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{\mathcal{C}} = e_{\underline{i}}.$$

Les courbes-coordonnées y^i sont tangentes aux $e_{\underline{i}}$ qui constituent le trièdre de l'observateur.

Quelle est la forme de la métrique de l'espace-temps einsteinien dans ce nouveau système de coordonnées ? Par construction, nous avons $g_{\alpha\beta} \mid_{\mathcal{C}} = \eta_{\alpha\beta}$. En utilisant le caractère géodésique des courbes-coordonnées y^i, nous obtenons $\Gamma^\mu_{ij} = 0$. Que u^μ soit une géodésique conduit à $\Gamma^\mu_{00} \mid_{\mathcal{C}} = 0$. Enfin, le transport par parallélisme des $e_{\underline{i}}$ donne $\Gamma^\mu_{0i} \mid_{\mathcal{C}} = 0$. Finalement, nous obtenons $\Gamma^\mu_{\rho\sigma} \mid_{\mathcal{C}} = 0$. Par conséquent, l'expression de la métrique dans le système de coordonnées de Fermi est

$$ds^2 = -(dy^0)^2 + (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + O(\mid y^i \mid^2).$$

Il existe certainement des termes en $\mid y^i \mid^2$ puisque les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$ déterminent le tenseur de Riemann dont la nullité ne dépend pas du choix du système de coordonnées.

Nous avons déjà dit que le temps t de l'horloge de cet observateur est y^0/c. Nous pouvons maintenant interpréter physiquement les coordonnées y^i tout au moins dans un voisinage infinitésimal de la ligne d'univers $y^i = 0$. L'interprétation se fait dans le voisinage $\mid y^i \mid \ll \ell$ où ℓ est la longueur caractéristique donnée en ordre de grandeur par

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{\mid R_{\mu\nu\rho\sigma} \mid}}.$$

Les coordonnées y^i sont considérées comme les coordonnées galiléennes mesurées à l'aide d'une règle graduée dans l'espace au temps t de l'observateur défini par $y^0 = \text{const}$. Ceci est évidemment approché puisqu'il n'existe pas de mouvement rigide d'un corps solide qui pourrait servir de référentiel. L'extension spatiale des appareils de mesure, y compris l'horloge, devra être beaucoup plus petite que ℓ, à la limite infinitésimale. Les mesures sont alors considérées comme effectuées sur la ligne d'univers $y^i = 0$.

Pour établir le couplage de toutes les lois physiques dans l'espace-temps einsteinien suivant l'idée du couplage universel, nous invoquons le principe d'équivalence d'Einstein. Dans un voisinage infinitésimal autour de $y^i = 0$, toutes les lois de la physique, écrites en coordonnées (y^μ), ont la même forme que dans les coordonnées minkowskiennes (x^μ) de l'espace-temps minkowskien. Par exemple pour un champ scalaire Φ sans masse, l'équation de Klein-Gordon s'écrit dans le voisinage $\mid y^i \mid \ll \ell$ sous la forme approchée

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial (y^0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y^3)^2} \right) \Phi \approx 0.$$

Tout se passe comme si cet observateur était un observateur localement inertiel dans un voisinage $\mid y^i \mid \ll \ell$. Cela est vécu par les astronautes dans les satellites. Ainsi, la vitesse de la lumière relative à cet observateur est c.

Aucune expérience locale ne pourra distinguer, en n'importe quel point de l'espace-temps einsteinien, deux observateurs en chute libre sans rotation. Ainsi, le principe d'équivalence d'Einstein généralise le principe d'équivalence faible, qui s'appliquait à la physique newtonienne pour les observateurs en chute libre, aux lois physiques relativistes.

Il en résulte qu'en vertu du principe de covariance, nous pouvons induire du principe d'équivalence d'Einstein l'expression tensorielle des lois de la physique en espace-temps einsteinien [4].

1. Nous gardons le caractère tensoriel des champs de la théorie physique en espace-temps minkowskien sans les coupler à de nouveaux champs.
2. Nous remplaçant dans l'expression des lois physiques relativistes $\eta_{\mu\nu}$ par $g_{\mu\nu}$ et ∂_μ par ∇_μ en gardant les mêmes valeurs numériques pour les constantes physiques [5].

Dans le cas du champ scalaire sans masse Φ, nous pouvons poser l'équation covariante de Klein-Gordon

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\partial_\beta\Phi = 0$$

qui redonne bien l'équation de Klein-Gordon usuelle dans toutes les coordonnées de Fermi (y^μ) avec $\mid y^i \mid \ll \ell$. Cependant ces principes ne conduisent pas à une seule possibilité puisque nous pouvons également poser

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\partial_\beta\Phi - \xi R\Phi = 0$$

où R est la courbure scalaire et ξ une constante physique sans dimension. La raison en est que le tenseur de Riemann est négligé dans la formulation du principe d'équivalence d'Einstein comme nous avions auparavant négligé $\partial_{ij}U$ dans celle du principe d'équivalence faible. C'est en fait un guide modeste pour établir le couplage à la gravitation.

5.4 Comparaison entre les temps des observateurs

Pour un observateur quelconque, nous paramétrisons sa ligne d'univers du genre temps $x^\mu(s)$ par un paramètre s tel que le vecteur-dérivée dx^μ/ds soit de norme -1 et définisse ainsi la quadri-vitesse u^μ de l'observateur. En chaque point il peut coïncider instantanément avec un observateur en chute libre, c'est pourquoi nous faisons l'hypothèse physique que le temps t de l'horloge de l'observateur est s/c. On appelle s le temps propre.

Nous allons tout d'abord démontrer que le temps propre d'un observateur est localement extremum pour l'observateur en chute libre. Soit $x^\mu(\tau)$ une courbe du genre temps pour un paramètre τ quelconque. Nous avons l'expression du temps propre s

$$s = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}d\tau$$

[4] On pourrait aussi obtenir l'équation covariante de Dirac pour un champ de spineurs.

[5] Pour la constante de structure fine α, $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$, des contraintes observationnelles terrestres conduiraient à $|\dot{\alpha}/\alpha| < 10^{-16}\,\mathrm{an}^{-1}$. Il faut tout de même signaler que des mesures récentes en astrophysique suggéreraient que la constante α ait été très légèrement plus petite dans un passé lointain.

entre les points caractérisés par τ_i et τ_f. Pour une courbe infiniment voisine $x^\mu(\tau)+\delta x^\mu(\tau)$ avec $\delta x^\mu(\tau_i)=\delta x^\mu(\tau_f)=0$, nous obtenons

$$\delta s = -\int_{\tau_i}^{\tau_f} \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu}\delta x^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) + g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\delta x^\nu\right] \frac{d\tau}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}}.$$

La nullité de δs pour tout δx^ν donne

$$\frac{1}{2\sqrt{-g_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}}}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{-g_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}}}g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) = 0.$$

En adoptant le temps propre s à la place de τ, l'équation précédente devient

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds}\right) - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

qui est une autre façon d'écrire l'équation de la géodésique $u^\alpha\nabla_\alpha u_\beta = 0$ [6].

Quand nous considérons deux observateurs, la comparaison des lectures de leur horloge respective se fait essentiellement par deux méthodes : soit le transport d'une horloge vers l'autre, soit l'utilisation de signaux électromagnétiques entre elles. Nous allons faire l'étude pour la métrique newtonienne.

Pour la métrique newtonienne, nous notons l'expression du temps propre exprimé à l'aide du temps-coordonnée $t = x^0/c$

$$s \approx c\int_{t_i}^{t_f}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{U}{c^2}\right)dt.$$

Cette formule a été vérifiée à l'aide de transport d'horloges sur Terre [7].

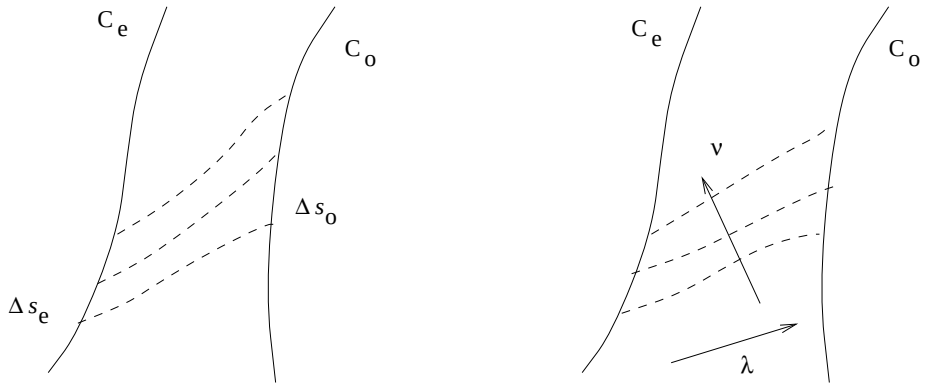
Quand la comparaison entre deux horloges se fait à l'aide de tops définis par un signal se propageant sur une géodésique du genre lumière, l'analyse est plus complexe. Nous considérons un émetteur de ligne d'univers $\mathcal{C}_e$ qui émet un photon de façon périodique de période de temps propre $\triangle s_e$. Deux photons émis successivement suivent des géodésiques du genre lumière. Ils sont détectés par un observateur de ligne d'univers $\mathcal{C}_o$ à un intervalle de temps propre $\triangle s_o$. En général $\triangle s_o \neq \triangle s_e$, c'est l'effet Doppler général.

Dans l'espace-temps einsteinien de métrique g, il suffit de déterminer les géodésiques du genre lumière pour en déduire la relation entre $\triangle s_o$ et $\triangle s_e$. Cependant sous l'hypothèse que $\triangle s_o$ et $\triangle s_e$ sont beaucoup plus petits que la variation typique de l'espace-temps au voisinage des lignes d'univers, nous pouvons obtenir une formule plus compacte.

Pour faire ceci, nous introduisons une famille de courbes $x^\mu(\lambda,\nu)$ telle que chaque courbe $\nu = \text{const.}$ soit une géodésique du genre lumière qui parte de $\mathcal{C}_e$ pour aboutir à

[6] On a $du_\beta/ds - \Gamma^\tau_{\alpha\beta}u^\alpha u_\tau = 0$ soit $du_\beta/ds - (\partial_\alpha g_{\beta\tau} + \partial_\beta g_{\tau\alpha} - \partial_\tau g_{\alpha\beta})u^\alpha u^\tau/2 = 0$ qui se simplifie pour donner la formule.

[7] Il faut en réalité tenir compte de la rotation de la Terre (effet Sagnac).



$\mathcal{C}_o$. Le paramètre λ est le paramètre affine de chaque géodésique du genre lumière. Nous définissons

$$k^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \quad \text{et} \quad V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \nu} \quad \text{satisfaisant} \quad g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0 \quad \text{et} \quad k^\rho \nabla_\rho k^\mu = 0.$$

Nous voyons que $k^\rho \nabla_\rho V^\mu = V^\rho \nabla_\rho k^\mu$ puisque les dérivées secondes de $x^\mu(\lambda, \nu)$ commutent. Nous pouvons maintenant calculer $k^\rho \nabla_\rho (V^\mu k_\mu) = k_\mu k^\rho \nabla_\rho V^\mu = k_\mu V^\rho \nabla_\rho k^\mu = 0$. Par conséquent, nous avons la formule générale

$$V^\mu k_\mu \mid_{P_e} = V^\mu k_\mu \mid_{P_o} .$$

Les quadri-vitesses u_e^μ et u_o^μ ont pour expression $u_e^\mu = V^\mu \mid_{\mathcal{C}_e} d\nu/ds$ et $u_o^\mu = V^\mu \mid_{\mathcal{C}_o} d\nu/ds$. A l'aide des accroissements infinitésimaux, nous obtenons $u_e^\mu k_\mu ds_e = u_o^\mu k_\mu ds_o$, c'est-à-dire

$$\frac{\triangle s_o}{\triangle s_e} = \frac{u_e^\mu k_\mu \mid_e}{u_o^\mu k_\mu \mid_o}.$$

Nous insistons sur le fait qu'il faut connaître la propagation de k^μ dans l'espace-temps einsteinien pour pouvoir utiliser cette formule de l'effet Doppler général, valable dans n'importe quel système de coordonnées.

Dans la métrique newtonienne, nous avons pour des vitesses non relativistes

$$u^i = u^0 \frac{v^i}{c} \quad \text{et} \quad u^0 \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{U}{c^2}.$$

Jusqu'à l'ordre $1/c^2$, il est inutile de connaître réellement le vecteur de propagation k_μ. Nous avons $k_0 \approx$ const. et $k_i \approx$ const. avec $k_0^2 - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \approx 0$. Nous en déduisons qu'un observateur au repos à l'infini observe un effet Doppler général

$$\triangle s_o \approx \triangle s_e \left(1 + \frac{v_e^i}{c} n^i + \frac{1}{2}\frac{v_e^2}{c^2} + \frac{U_e}{c^2}\right)$$

où v_e^i est la vitesse de l'émetteur, $v_e \ll c$, et n^i la direction unitaire de visée en posant $k^i = k_0 n^i$ où $k_0 < 0$. Si θ est l'angle que fait la direction du mouvement de la source avec la direction d'observation on a $v_e^i n^i = -v_e \cos\theta$.

Les formules que nous venons d'établir sur la comparaison des temps des horloges sont usuellement utilisées, en particulier dans le système de navigation GPS (*Global Positioning System*) pour avoir une précision suffisante.

5.5 Couplage de l'électromagnétisme à la gravitation

En espace-temps minkowskien, le champ électromagnétique est décrit par un tenseur antisymétrique $F^{\mu\nu}$, c'est-à-dire une 2-forme $F_{\mu\nu}$. Dans les coordonnées minkowskiennes (x^μ) d'un observateur inertiel, les composantes $F^{\mu\nu}$ représentent le champ électrique E^i et le champ magnétique B^k pour cet observateur [8]. Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{et} \quad \partial_\tau F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\tau} + \partial_\sigma F_{\tau\rho} = 0 \quad \text{avec} \quad F_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu}F^{\mu\nu}$$

où j^ν est la densité de courant électromagnétique représentant la densité de charge ρ et la densité de courant électrique J^i [9]. Il est identiquement conservé $\partial_\nu j^\nu = 0$.

Dans l'espace-temps einsteinien, en vertu du principe de covariance, nous gardons pour décrire le champ électromagnétique un tenseur antisymétrique $F^{\mu\nu}$. L'application du principe d'équivalence d'Einstein suggère les équations covariantes de Maxwell

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{et} \quad \nabla_\tau F_{\rho\sigma} + \nabla_\rho F_{\sigma\tau} + \nabla_\sigma F_{\tau\rho} = 0 \quad \text{avec} \quad F_{\rho\sigma} = g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}F^{\mu\nu}.$$

On vérifie que $\nabla_\nu j^\nu = 0$. En fait, le deuxième groupe des équations ne dépend pas de la connexion [10]. Ainsi, les équations covariantes de Maxwell admettent une forme simplifiée

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}j^\nu \quad \text{et} \quad \partial_\tau F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\tau} + \partial_\sigma F_{\tau\rho} = 0.$$

avec la loi de conservation $\partial_\nu(\sqrt{-g}j^\nu) = 0$. En vertu du théorème de Stokes, il existe une charge électrique totale $Q = \int_{x^0=\text{const.}} j^0\sqrt{-g}d^3x$ qui est constante pour une distribution de charge et de courant spatialement bornée.

Au moins localement, on démontre qu'il existe des champs de vecteurs A^μ tels que $F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho$ [11]. Dans la jauge de Lorentz $\nabla_\mu A^\mu = 0$, le potentiel électromagnétique A^μ satisfait l'équation

$$g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma A^\mu + R^\mu_\nu A^\nu = j^\mu.$$

Le terme en tenseur de Ricci est absolument nécessaire si nous voulons la conservation de la densité de courant électromagnétique. Cela confirme l'ambiguïté dans l'application du principe d'équivalence d'Einstein.

La lumière n'est rien d'autre qu'une onde électromagnétique se propageant à hautes fréquences. Nous supposons que le potentiel électromagnétique A^μ s'écrit en notation complexe de la façon suivante

$$\mathcal{A}^\mu = \left(a_0^\mu + \frac{c}{\omega}a_1^\mu + \cdots\right)\exp -i\omega\Theta/c$$

où $\Theta(x^\nu)$ est la phase réelle avec en facteur le paramètre ω et $a_0^\mu(x^\nu) + \cdots$ l'amplitude complexe de l'onde lentement variable. Nous supposons que la longueur d'onde de l'onde

[8] $F^{0i} = E^i$ et $F_{ij} = c\epsilon_{ijk}B^k$.

[9] $j^0 = \rho/\epsilon_0$ et $j^i = c\mu_0 J^i$ avec $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$.

[10] Il s'agit de la différentielle extérieure dF.

[11] Nous pouvons aussi écrire $F = dA$ ou bien $F_{\rho\sigma} = \nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\sigma A_\rho$ et $F^{\rho\sigma} = \nabla^\rho A^\sigma - \nabla^\sigma A^\rho$.

électromagnétique est beaucoup plus petite que la longueur caractéristique de variation de la métrique. Cela revient à faire $\omega \to \infty$ dans les équations de Maxwell. La condition de Lorentz donne à l'ordre ω

$$a_0^\mu \partial_\mu \Theta = 0$$

et l'équation déterminant A^μ donne à l'ordre ω^2

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\Theta\partial_\nu\Theta = 0.$$

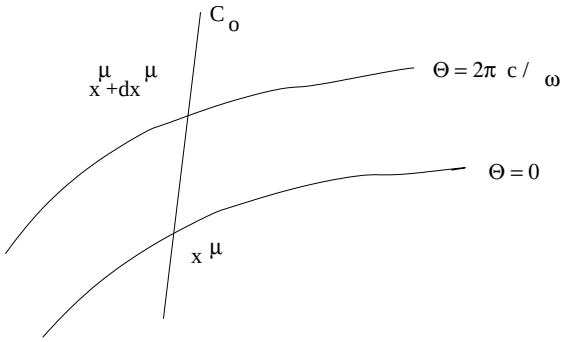
Les hypersurfaces $\Theta = \text{const.}$ définissent les hypersurfaces caractéristiques de la propagation. Le champ de vecteurs normal à ces hypersurfaces est

$$k^\mu = \frac{\omega}{c} g^{\mu\nu}\partial_\nu\Theta.$$

Il est isotrope. Les hypersurfaces caractéristiques sont donc du genre lumière. Le vecteur k^μ est le vecteur de propagation de l'onde électromagnétique. Il définit un flot dans l'espace-temps qui constitue les trajectoires de la lumière. Démontrons que ces courbes sont des géodésiques du genre lumière en calculant $k^\rho\nabla_\rho k_\mu$; nous avons

$$k^\rho\nabla_\rho k_\mu = \frac{\omega}{c}\left(k^\rho\partial_{\rho\mu}\Theta - \Gamma^\sigma_{\rho\mu}k^\rho\partial_\sigma\Theta\right) = k^\rho\nabla_\mu k_\rho = \frac{1}{2}\nabla_\mu(k^\rho k_\rho) = 0.$$

Ceci est cohérent avec notre exigence initiale que la lumière suit une géodésique du genre lumière de la métrique de l'espace-temps einsteinien.



Les crêtes successives déterminées par la famille des hypersurfaces $\Theta = \text{const.}$ sont séparées de $2\pi c/\omega$ avec ω grand. Pour un observateur de ligne d'univers u^μ, l'intervalle de temps propre $\triangle s$ entre deux crêtes est donné par $\partial_\mu\Theta u^\mu\triangle s = 2\pi c/\omega$. Cela confirme la définition de la fréquence pour cet observateur, $\nu = 1/\triangle s$, comme proportionnelle à $k_\mu u^\mu$ et nous retrouvons immédiatement la formule de l'effet Doppler général.

5.6 Couplage d'un milieu matériel à la gravitation

Nous admettons que la caractérisation essentielle d'un milieu matériel dans l'espace-temps minkowskien est le tenseur énergie-impulsion symétrique $T^{\mu\nu}$ dont les composantes en coordonnées minkowskiennes (x^μ) ont la signification physique suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} T^{00} & T^{0j} \\ \hline T^{i0} & T^{ij} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l|l} \text{Densité} & (\text{Flux} \\ \text{d'énergie} & \text{d'énergie})/c \\ \hline c(\text{Densité} & \text{Flux} \\ \text{de quantité} & \text{de quantité} \\ \text{de mouvement)} & \text{de mouvement} \end{array}\right).$$

Posant $x^0 = ct$, les lois de conservation de l'énergie $\partial_t T^{00} + c\partial_j T^{0j} = 0$ et de la quantité de mouvement, ou impulsion, $\partial_t T^{i0} + c\partial_j T^{ij} = 0$ s'écrivent de façon quadri-dimensionnelle

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

On dit que le tenseur énergie-impulsion est conservé.

Usuellement, il existe un champ de vecteurs propres u^μ orientés dans le temps tel que

$$T^\mu_\nu u^\nu = -\rho c^2 u^\mu \quad \text{avec} \quad \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$$

où ρ est la densité volumique de masse du milieu matériel et la quadri-vitesse u^μ représente la vitesse du flux d'énergie, en utilisant l'équivalence masse-énergie. En absence de flux de chaleur, la densité de masse ρ s'exprime sous la forme

$$\rho = r\left(1 + \frac{e}{c^2}\right) \quad \text{avec} \quad \partial_\mu(ru^\mu) = 0$$

où e est l'énergie interne spécifique, c'est-à-dire une densité d'énergie par unité de masse, et r la densité de masse associée à la densité du nombre de particules, conduisant à un courant de matière ru^μ conservé.

Nous pouvons alors décomposer T^μ_ν à l'aide du tenseur des pressions θ^μ_ν

$$T^\mu_\nu = \rho c^2 u_\nu u^\mu + \theta^\mu_\nu \quad \text{avec} \quad \theta^\mu_\nu u^\nu = 0.$$

Nous supposons que le fluide est parfait. Le tenseur des pressions est isotrope dans toutes les directions orthogonales à u^μ et donc $\theta^\mu_\nu = p(\delta^\mu_\nu + u_\nu u^\mu)$ où p désigne la pression isotrope. Ainsi, le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait s'écrit

$$T^\mu_\nu = (\rho c^2 + p) u_\nu u^\mu + p\delta^\mu_\nu.$$

Les équations du mouvement du fluide parfait résultent de la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$ en se donnant une équation d'état $\rho(p)$.

Nous considérons maintenant un fluide parfait dans un espace-temps einsteinien. Il faut, d'après le principe de covariance, garder la forme tensorielle du tenseur énergie-impulsion du fluide parfait $T^\mu_\nu = (\rho c^2 + p) u^\mu u_\nu + p\delta^\mu_\nu$ avec $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ et, en vertu du principe d'équivalence d'Einstein, imposer la loi de conservation covariante

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0.$$

et de même $\nabla_\mu(ru^\mu) = 0$. On admet aussi que l'équation d'état $\rho(p)$ n'est pas affectée. Prenons la dérivée covariante de T^μ_ν

$$(\rho c^2 + p)u^\rho \nabla_\rho u_\nu + (\rho c^2 + p)\nabla_\rho u^\rho u_\nu + u^\rho \partial_\rho(\rho c^2 + p)u_\nu + \partial_\nu p = 0.$$

Contractant par u^ν, nous obtenons

$$\nabla_\nu(\rho u^\nu) = -\frac{p}{c^2}\nabla_\nu u^\nu$$

et en reportant nous déduisons les équations covariantes du mouvement

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\rho \nabla_\rho u_\nu = -\frac{1}{c^2}(\delta^\rho_\nu + u^\rho u_\nu)\partial_\rho p.$$

Il faudrait maintenant démontrer que le centre de masse d'une boule de fluide parfait d'épreuve suit une géodésique du genre temps de l'espace-temps einsteinien. Ceci est délicat et nous ne donnerons pas la démonstration [12].

Une autre démonstration délicate serait d'obtenir l'équation du mouvement de l'axe de rotation d'un gyroscope sphérique qui est caractérisé par un vecteur S^μ orienté dans l'espace, c'est-à-dire $S^\mu u_\mu = 0$ où u^μ désigne la quadri-vitesse du gyroscope. En chute libre, S^μ se transporte par parallélisme le long de la ligne d'univers du gyroscope, soit $u^\nu \nabla_\nu S^\mu = 0$. Pour un gyroscope accéléré, S^μ se transporte par Fermi-Walker le long de sa ligne d'univers, soit $u^\nu \nabla_\nu S^\mu = (u^\mu a_\nu - a^\mu u_\nu)S^\nu$ où $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$ est la quadri-accélération. Elle satisfait $a^\mu u_\mu = 0$. L'avantage de ce transport est qu'il conserve le produit scalaire de deux vecteurs. Il se réduit au transport par parallélisme pour une géodésique.

Or justement, un observateur est dit sans rotation si le trièdre orthonormé $e_{\underline{i}}$, orthogonal à u^μ, se transporte par Fermi-Walker le long de la ligne d'univers. La quadri-accélération peut donc s'écrire $a^\mu = a^{\underline{i}} e^\mu_{\underline{i}}$. Nous notons $a^i = c^2 a^{\underline{i}}$ qui s'interprète comme l'accélération de l'observateur. Un exemple est l'observateur au repos dans la métrique newtonienne de ligne d'univers $x^i = \text{const}$. Ainsi, l'axe de rotation du gyroscope matérialise un vecteur $e_{\underline{i}}$ du référentiel de l'observateur sans rotation. Dans le cas de l'espace-temps einsteinien, l'axe de rotation n'indique donc plus la direction d'une étoile lointaine fixe. Cela ouvre des perspectives de vérification expérimentale sur Terre et dans les satellites, justement en cours avec *Gravity Probe B*.

Le couplage d'un milieu matériel à la gravitation satisfaisant $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ est le point essentiel des théories métriques de la gravitation.

5.7 Formalisme lagrangien dans le cas d'un champ classique

[12] Si nous admettons la possibilité de particule ponctuelle d'épreuve de masse μ caractérisée par le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}(x) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} u^\mu u^\nu \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{(4)}(x, z(s))ds$ où $z^\mu(s)$ est la ligne d'univers, alors le caractère géodésique de u^μ se déduit immédiatement de la conservation covariante $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Dans l'espace-temps minkowskien, les champs classiques (scalaire, électromagnétique...) ont des équations de champ qui dérivent d'un lagrangien. Nous le notons de façon générique $L[\psi_M]$ contenant ψ_M et ses dérivées $\partial_\mu \psi_M$. Le lagrangien est un scalaire, c'est-à-dire d'une fonction. Dans l'espace-temps einsteinien, d'après le principe d'équivalence d'Einstein, on remplace $\eta_{\mu\nu}$ par $g_{\mu\nu}$ et $\partial_\mu \psi_m$ par $\nabla_\mu \psi_m$ dans l'expression du lagrangien, noté $L[\psi_M, g_{\mu\nu}]$, qui reste donc un scalaire. Cependant nous avons déjà noté l'ambiguïté due à des termes contenant le tenseur de Riemann qu'il serait possible d'ajouter.

Le principe de couplage minimal stipule qu'on n'ajoute pas de termes contenant le tenseur de Riemann ou ses dérivées dans l'expression du lagrangien. Par exemple, le champ électromagnétique est couplé minimalement en prenant

$$L[A_\mu, g_{\mu\nu}] = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

dans le vide. En revanche, on prend souvent pour le champ scalaire Φ de masse m le lagrangien

$$L[\Phi, g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} \Phi^2 - \frac{1}{2} \xi R \Phi^2$$

où R est la courbure scalaire. Ce couplage à la gravitation viole le principe de couplage minimal pour $\xi \neq 0$. Cela n'exclut pas qu'il soit intéressant à considérer [13].

L'action associée au lagrangien L est l'intégrale de la densité lagrangienne $\mathcal{L} = \sqrt{-g} L$ dans un domaine Ω de l'espace-temps einsteinien

$$S_M[\psi_M, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{c} \int_\Omega \sqrt{-g} L[\psi_M, g_{\mu\nu}] d^4x.$$

Elle est indépendante du choix du système de coordonnées. La variation de l'action S_M par rapport à ψ_M donne les équations de champs

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_M} = 0.$$

Pour la théorie du champ scalaire Φ, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Phi - \xi R \Phi = 0$$

qui correspond bien à l'équation covariante de Klein-Gordon.

La variation de l'action S_M par rapport à $g_{\mu\nu}$, ou par rapport à $g^{\mu\nu}$, définit le tenseur énergie-impulsion symétrique

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \quad \text{ou} \quad T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

suivant que l'on fait apparaître $g_{\mu\nu}$ ou $g^{\mu\nu}$ dans la densité lagrangienne, en faisant attention au signe puisque $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}$. Nous allons démontrer qu'il est conservé de façon covariante quand les équations de champs sont satisfaites.

[13] Pour $\xi = 1/6$, la théorie sans masse est invariante conforme, modulo un changement de Φ.

Quand nous avons étudié la dérivée de Lie, nous avions introduit un groupe de transformations à un paramètre $x_t^\mu(x^\nu)$ associé à tout champ de vecteurs X que l'on peut considérer comme un changement de coordonnées pour t fixé. Dans la limite où t est petit, nous avons un changement infinitésimal de coordonnées $x_t^\mu = x^\mu + tX^\mu(x^\nu) + O(t^2)$ soit $x^\mu = x_t^\mu - tX^\mu(x_t^\nu) + O(t^2)$. Effectuons ce changement de systèmes de coordonnées

$$g_{\mu_t\nu_t}(x_t) = g_{\mu\nu}(x) - t\frac{\partial X^\alpha}{\partial x_t^\mu}g_{\alpha\nu} - t\frac{\partial X^\beta}{\partial x_t^\nu}g_{\mu\beta}.$$

Cependant la variation de la métrique est définie par

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu_t\nu_t}(x_t) - g_{\mu\nu}(x_t).$$

Comme $g_{\mu\nu}(x_t) = g_{\mu\nu}(x) + tX^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu} + O(t^2)$, nous constatons que

$$\delta g_{\mu\nu} = -t\mathcal{L}_X g_{\mu\nu}.$$

Nous obtenons donc une variation de la métrique pour le lagrangien sous la condition que X^μ s'annule au bord de Ω. Pour ce type de variation, qui n'est qu'un simple changement de système de coordonnées, la variation totale de l'action est automatiquement nulle

$$\int_\Omega \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}d^4x + \int_\Omega \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi_M}\delta\psi_M d^4x = 0$$

où $\delta\psi_M$ résulte aussi de ce changement de coordonnées. Quand les équations de champs sont satisfaites nous en déduisons que

$$\int_\Omega \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}d^4x = 0.$$

Or $\delta g_{\mu\nu} = -t(\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu)$, c'est pourquoi par une intégration par partie à l'aide du théorème de Stokes avec $X|_{\partial\Omega} = 0$ nous obtenons

$$\int_\Omega \sqrt{-g}\nabla_\mu T^{\mu\nu}X_\nu d^4x = 0.$$

Puisque ceci est vrai pour tout champ de vecteurs X, nous en concluons que le tenseur énergie-impulsion est conservé de façon covariante $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

L'espace-temps einsteinien étant donné, les champs classiques peuvent être quantifiés. Il apparaît les phénomènes de polarisation du vide et de création de particules. Dans le cas du champ scalaire, la description quantique d'une seule particule par une onde n'est possible qu'à l'approximation quasi-classique où $\Phi \propto \exp iS/\hbar$ dans la limite $\hbar \to 0$. La phase $\phi = S/\hbar$ de l'onde est gouvernée par une équation eikonale analogue à celle de l'optique géométrique que nous avons établie. Nous obtenons

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}.$$

A l'aide de ette formule, nous pourrions refaire la théorie de l'expérience de l'interférométrie à neutrons dans la métrique newtonienne décrivant un champ de gravitation uniforme.

Chapitre 6

Théorie d'Einstein de la gravitation ou relativité générale

6.1 Equations d'Einstein de la gravitation

La difficulté conceptuelle est d'admettre que l'espace-temps est une variété différentiable munie d'une métrique lorentzienne g, la gravitation étant une manifestation de la structure géométrique de l'espace-temps. Le couplage universel des lois physiques à la gravitation se fait avec la métrique de telle sorte que le tenseur énergie-impulsion symétrique correspondant soit conservé de façon covariante. Dans un système de coordonnées (x^μ), nous avons

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

C'est le cadre des théories métriques de la gravitation. Si nous supposons qu'il n'y a pas d'autres champs gravitationnels que la métrique alors les équations de la gravitation que doivent satisfaire les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique s'introduisent assez naturellement.

En théorie de Newton de la gravitation, le potentiel de gravitation U est déterminé par la densité volumique de masse ρ suivant l'équation de Poisson

$$\triangle U = -4\pi G\rho$$

où G est la constante de Newton de la gravitation. Les idées simples suivantes conduisent aux équations d'Einstein de la gravitation.

1. Les équations de la gravitation devront être tensorielles. On peut les écrire dans n'importe quel système de coordonnées ; c'est le principe de covariance déjà invoqué. Pour déterminer les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique, il faut une source de même nature tensorielle. Le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ qui contient la densité de masse ρ semble tout indiqué.
2. Il est raisonnable d'exiger que les équations de champ gravitationnel soient des équations aux dérivées partielles du second ordre de façon à généraliser les équations de Poisson de la théorie de Newton de la gravitation.

Puisque $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, il faut par conséquent trouver un tenseur géométrique deux fois covariant, dépendant uniquement de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées jusqu'au second ordre, qui satisfasse cette loi de conservation. On démontre qu'en dimension quatre les deux seuls possibles sont

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu}.$$

Le tenseur $G_{\mu\nu}$ s'appelle le tenseur d'Einstein. Ainsi, nous sommes amenés à poser les équations de la gravitation

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

qui dépendent *a priori* de deux constantes physiques χ et Λ, χ étant la constante de couplage gravitationnel de dimension $\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^2\mathrm{M}^{-1}$ et Λ la constante cosmologique de dimension L^{-2}. Ces équations relient la géométrie de l'espace-temps et la distribution énergétique de la matière. Elles sont non linéaires et elles déterminent localement les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique dans un certain système de coordonnées (x^μ). Elles nécessitent un choix de conditions aux limites. Des propriétés topologiques globales de l'espace-temps devront être imposées en supplément tout en devant être compatibles avec la métrique localement déterminée.

En dehors de la matière, $T_{\mu\nu} = 0$, les solutions des équations de champ gravitationnel s'appellent les solutions du vide. Si nous souhaitons retrouver comme solution particulière du vide l'espace-temps minkowskien nous devons prendre $\Lambda = 0$ [1] puisque le tenseur d'Einstein est nul pour la métrique minkowskienne $\eta_{\mu\nu}$. Ce choix permet de demander que la métrique asymptotique d'une distribution matérielle spatialement bornée, loin de toute autre matière, soit la métrique minkowskienne. C'est pourquoi, hors du champ cosmologique, nous adoptons les équations d'Einstein de la gravitation

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

proposées en 1915. La valeur numérique de χ sera fixée ultérieurement par comparaison avec les équations newtoniennes du mouvement dans leur domaine de validité. Nous anticipons sur la suite en prenant

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

Il faut bien comprendre que $T_{\mu\nu}$ n'est pas donné *a priori* indépendamment de la métrique $g_{\mu\nu}$ puisqu'il y a une loi de conservation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ qui dépend de la métrique. Résoudre les équations d'Einstein de la gravitation signifie déterminer simultanément $g_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ dont on ne postule que la forme d'un fluide parfait par exemple. Ainsi, dans le cas auto-gravitant, les équations du mouvement des corps seront une conséquence des équations d'Einstein de la gravitation.

Nous allons faire une digression sur les systèmes d'unités. A partir des constantes physiques fondamentales c, G et $\hbar$, on peut former une masse de Planck m_P, une longueur de

[1] Des contraintes observationnelles conduiraient à $|\Lambda| < 10^{-52}\ \mathrm{m}^{-2}$.

Planck ℓ_P et un temps de Planck t_P [2]

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad , \quad \ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad \text{et} \quad t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}.$$

On considère souvent soit les unités géométriques pour lesquelles $c = 1$ et $G = 1$ soit les unités quantiques $c = 1$ et $\hbar = 1$ et alors $G = 1/m_P^2$. Enfin, on peut choisir les unités de Planck avec $c = 1$, $G = 1$ et $\hbar = 1$.

Il est communément admis que la théorie d'Einstein de la gravitation n'est plus valable à des distances de l'ordre de ℓ_P, pour des temps de l'ordre de t_P ou pour des énergies d'interaction de l'ordre de $E_P = m_P c^2$ [3] puisqu'il faudrait pour décrire ces domaines une théorie quantique de la gravitation.

6.2 Formalisme lagrangien du champ gravitationnel

La source des équations d'Einstein de la gravitation est le tenseur énergie-impulsion symétrique du milieu matériel. En général, il s'agit d'une description phénoménologique. Cependant, quand la matière est constituée de champs classiques ψ_M les équations de champs et le tenseur énergie-impulsion correspondant peuvent être déduits du lagrangien $L[\psi_M, g_{\mu\nu}]$ établi dans le cadre de la théorie métrique de la gravitation.

L'action totale du champ gravitationnel et du champ ψ_M est la somme de l'action purement gravitationnelle $S_g[g_{\mu\nu}]$ et de l'action de la matière couplée à la gravitation $S_M[\psi_M, g_{\mu\nu}]$, soit

$$S[\psi_M, g_{\mu\nu}] = S_g[g_{\mu\nu}] + S_M[\psi_M, g_{\mu\nu}].$$

L'action $S_g[g_{\mu\nu}]$ doit être l'intégrale d'une densité lagrangienne dans un domaine Ω de l'espace-temps einsteinien. Celle qui conduit aux équations d'Einstein de la gravitation a été donnée par Hilbert en 1915

$$S_g[g_{\mu\nu}] = \frac{c^3}{16\pi G} \int_\Omega \sqrt{-g} R d^4x.$$

La variation de l'action par rapport à $g_{\mu\nu}$ est obtenue pour une variation $\delta g_{\mu\nu}$ qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$ de Ω ainsi que ses dérivées premières.

Nous effectuons la variation de l'action gravitationnelle $S_g[g_{\mu\nu}]$

$$\delta S_g[g_{\mu\nu}] = \frac{c^3}{16\pi G} \int_\Omega \delta(\sqrt{-g} R) d^4x.$$

Pour évaluer $\delta(\sqrt{-g}R)$ nous avons besoin des variations suivantes :

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \delta R = g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

[2] $m_P \simeq 2,2 \times 10^{-8}$ kg, $\ell_P \simeq 1,6 \times 10^{-35}$ m et $t_P \simeq 5,4 \times 10^{-44}$ s.

[3] $E_P \simeq 2 \times 10^9$ J soit $E_P \simeq 10^{19}$ GeV.

Le calcul de $\delta R_{\mu\nu}$ nécessite la détermination de la variation des symboles de Christoffel. Nous trouvons le tenseur suivant

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu})$$

Ensuite les tenseurs de Riemann et de Ricci s'expriment sous la forme

$$\delta R^{\sigma}_{\rho\mu\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} \quad \text{et} \quad \delta R_{\mu\rho} = -\nabla_\mu \delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho} + \nabla_\sigma \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}.$$

En reportant dans l'expression de $\delta S_g[g_{\mu\nu}]$, nous obtenons

$$\delta S_g[g_{\mu\nu}] = \frac{c^3}{16\pi G}\left[\int_\Omega \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^4x - \right.$$

$$\left.\int_\Omega \sqrt{-g}\left(g^{\mu\rho}\nabla_\mu \delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho} - g^{\mu\rho}\nabla_\sigma \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\right)d^4x\right].$$

Cependant les deux derniers termes de δS_g s'écrivent

$$\int_\Omega \sqrt{-g}\nabla_\mu\left(g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho} - g^{\sigma\rho}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\right)d^4x = \int_\Omega \partial_\mu\left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\right)\right]d^4x$$

et par le théorème de Stokes ces termes se transforment en intégrale de surface sur le bord $\partial\Omega$. Or les $\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ sont nuls au bord c'est pourquoi

$$\delta S_g[g_{\mu\nu}] = \frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x.$$

La variation par rapport à $\delta g_{\mu\nu}$ de l'action $S_M(\psi_M, g_{\mu\nu})$ des champs classiques donne le tenseur énergie-impulsion symétrique $T_{\mu\nu}$

$$\delta_g S_M[\psi_M, g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2c}\int_\Omega \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x$$

qui vérifie nécessairement $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. En conclusion, la variation de l'action totale par rapport à la métrique donne bien les équations d'Einstein de la gravitation.

Puisque la densité lagrangienne $\sqrt{-g}R$ contient des dérivées secondes de la métrique on peut s'étonner qu'elle conduise à des équations de champ gravitationnel du second ordre. La raison en est que celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\lambda\mu}\left(-\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha}\right) + \partial_\alpha\left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\alpha\tau}\Gamma^{\rho}_{\rho\tau}\right)\right]$$

où la partie en divergence, qui contient les dérivées secondes de la métrique, ne contribue pas à l'action gravitationnelle. La partie restante n'est pas un scalaire.

6.3 Caractère hyperbolique des équations d'Einstein

Les équations d'Einstein du vide $R_{\mu\nu} = 0$ sont des équations aux dérivées partielles pour $g_{\mu\nu}$ qui se présentent sous la forme

$$-g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma}\partial_\nu\Gamma^\sigma + g_{\nu\sigma}\partial_\mu\Gamma^\sigma + \mathcal{F}_{\mu\nu}(g_{\rho\tau}, \partial_\lambda g_{\rho\tau}) = 0 \quad \text{avec} \quad \Gamma^\sigma = g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}.$$

Dans ces équations, les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$ n'apparaissent pas comme exprimables en fonction de la métrique et de ses dérivées premières. Cela est normal puisqu'il y a un arbitraire du système de coordonnées. Nous allons donc choisir une classe de systèmes de coordonnées pour lesquels $\Gamma^\sigma = 0$, au moins localement. On dit que les coordonnées sont harmoniques puisque l'on vérifie pour chaque fonction x^μ que

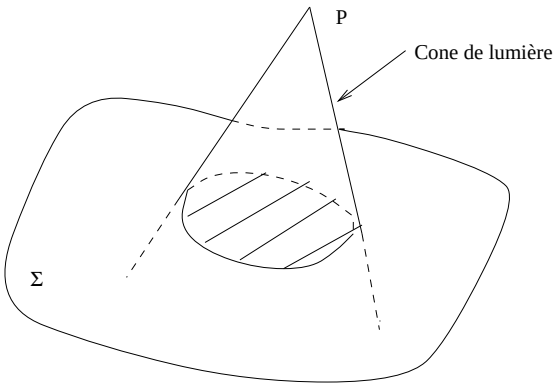
$$g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma x^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\left(\sqrt{-g}g^{\rho\sigma}\partial_\sigma x^\mu\right) = 0.$$

Cela donne une caractérisation des coordonnées harmoniques : $\partial_\rho\left(\sqrt{-g}g^{\rho\sigma}\right) = 0$.

Maintenant le problème de Cauchy se pose directement avec une équation aux dérivées partielles hyperbolique pour chaque composante $g_{\mu\nu}$

$$-g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu}(g_{\rho\tau}, \partial_\lambda g_{\rho\tau}) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\rho\left(\sqrt{-g}g^{\rho\tau}\right) = 0.$$

Les données de Cauchy $g_{\mu\nu}$ et $\partial_0 g_{\mu\nu}$ sur une hypersurface Σ du genre espace d'équation $x^0 = 0$ doivent satisfaire les conditions d'harmonicité sur Σ. Cela fait quatre contraintes. On peut établir un résultat de causalité relatif au cône de lumière de l'espace-temps : la valeur de la métrique en P ne dépend que des données de Cauchy contenues dans l'intersection de Σ avec le demi-cône passé issu du point P.



Si l'on veut que le futur et le passé soit prédit ou rétroprédit à partir des données de Cauchy alors il faut et il suffit que l'espace-temps einteinien soit une variété différentiable globalement hyperbolique, c'est-à-dire qu'il existe au moins un feuilletage d'hypersurfaces Σ_t du genre espace tel que les lignes d'univers non du genre espace issues de tout point de l'espace-temps coupent Σ_t. L'espace-temps a nécessairement la topologie $\mathbb{R} \times \Sigma$ où Σ est une variété de dimension trois.

6.4 Approximation newtonienne de la théorie d'Einstein

Le domaine de validité de la théorie de Newton de la gravitation est limité.

1. La vitesse typique v^i du milieu matériel est petite devant c, $\mid v^i \mid /c \ll 1$, puisque l'équation fondamentale de la dynamique n'est plus valable aux vitesses relativistes.
2. Le champ de gravitation engendré par le milieu matériel est faible puisqu'en général l'énergie potentielle est du même ordre de grandeur que l'énergie cinétique pour des mouvements bornés. Si U est le potentiel newtonien s'annulant à l'infini alors nous avons
$$\frac{v^2}{c^2} \approx \frac{1}{c^2} U.$$

Nous considérons une distribution spatialement bornée de fluide parfait [4] de tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$. Nous demandons que la métrique soit asymptotiquement minkowskienne à l'infini spatial. C'est pourquoi il existe une classe de systèmes de coordonnées (x^μ) telle que

$$g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} \quad \text{quand} \quad |x^i| \to \infty.$$

Nous adoptons comme variables dynamiques du fluide parfait ρ, p et v^i où v^i est défini par $u^i = u^0 v^i/c$, v^i étant la vitesse relative au temps-coordonnée $t = x^0/c$. Nous avons $(u^0)^2(g_{00} + 2g_{0i}v^i/c + g_{ij}v^i v^j/c^2) = -1$.

Nous souhaitons faire un développement des composantes $g_{\mu\nu}$ et $T^{\mu\nu}$ dans ces coordonnées en fonction du paramètre sans dimension ϵ d'ordre de grandeur

$$\epsilon = \frac{v^2}{c^2}.$$

Il est cohérent avec la suite de supposer g_{0i} au moins $O(\epsilon^{1/2})$ et ainsi nous avons $u^0 = 1 + O(\epsilon)$. Par conséquent, nous obtenons

$$T^{00} = \rho c^2 \left(1 + O(\epsilon)\right) \quad , \quad T^{0i} = \rho c^2 \frac{v^i}{c} \left(1 + O(\epsilon)\right) \quad \text{et} \quad T^{ij} = \rho v^i v^j + p\delta^{ij} + O(\epsilon).$$

En reportant cette source dans le second membre des équations d'Einstein, nous voyons que les composantes de la métrique admettent le développement

$$g_{00} = -1 + O(\epsilon) \quad , \quad g_{0i} = O(\epsilon^{3/2}) \quad \text{et} \quad g_{ij} = \delta_{ij} + O(\epsilon)$$

dans un système de coordonnées qui est fixé à des corrections près d'ordre ϵ.

Les équations du mouvement pour les variables dynamiques ρ, p et v^i à l'ordre ϵ s'obtiennent à l'aide de l'équation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Pour $\nu = i$, nous avons

$$\partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} + \Gamma^\mu_{\mu\tau} T^{\tau i} + \Gamma^i_{\mu\tau} T^{\mu\tau} = 0 \quad \text{soit} \quad \partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} + \Gamma^i_{00} T^{00} = O(\epsilon).$$

[4] Nous ne pouvons pas prendre directement des particules ponctuelles.

Compte tenu des ordres de grandeur en ϵ, il suffit de connaître Γ^i_{00} à l'ordre ϵ. Aussi, nous posons

$$g_{00} = -1 + 2U_{(1)00} + O(\epsilon^2)$$

et donc $\Gamma^i_{00} = -\partial_i U_{(1)00} + O(\epsilon^2)$. Nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{c^2}\left(\partial_t(\rho v^i) + \partial_k(\rho v^k v^i) + \partial_i p\right) - \rho\partial_i U_{(1)00} = O(\epsilon^2).$$

D'autre part, l'équation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ pour $\nu = 0$ conduit à $\partial_t\rho + \partial_i(\rho v^i) = O(\epsilon)$.

La composante R_{00} du tenseur de Ricci a le développement suivant :

$$R_{00} = \partial_i\Gamma^i_{00} + O(\epsilon^2) \quad \text{soit} \quad R_{00} = -\triangle U_{(1)00} + O(\epsilon^2).$$

et par les équations d'Einstein de la gravitation [5], nous obtenons

$$\triangle U_{(1)00} = -\frac{\chi c^2}{2}\rho.$$

Par cette équation nous pouvons identifier $U_{(1)00}$ avec U/c^2 et ceci conduit à la relation $\chi = 8\pi G/c^4$ que nous avions déjà donnée par anticipation. En outre, nous retrouvons bien les équations newtoniennes du mouvement.

En conclusion, nous retrouvons la théorie de Newton pour un fluide à l'aide de la métrique newtonienne, que nous avions déjà introduite, dans laquelle les coordonnées (x^i) jouent le rôle de coordonnées galiléennes. Nous pouvons ensuite passer aux équations du mouvement du centre de masse de corps. Nous notons que le principe d'équivalence faible est automatiquement incorporé. En fait, toute théorie métrique de la gravitation doit redonner cette approximation.

6.5 Métrique extérieure post-newtonienne d'un corps massif

En principe, la méthode d'approximation précédente permettrait de déterminer les termes en ϵ plus élevés que ceux de la métrique newtonienne. Les équations du mouvement pour ρ, p et v^i à l'ordre ϵ^2, dites post-newtoniennes ou 1 PN, s'obtiendraient à l'aide de la conservation covariante à cet ordre du tenseur énergie-impulsion. Cela est compliqué et nous allons seulement considérer la métrique post-newtonienne décrivant un corps massif statique et à symétrie sphérique.

Soit un corps massif de rayon R et de masse m. La métrique newtonienne décrivant l'espace-temps extérieur de ce corps est

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

[5] Nous avons $R_{\mu\nu} = \chi\left(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T/2\right)$ où T est la trace de $T_{\mu\nu}$.

où (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques associées à (x^i). Le domaine de validité est

$$r > R \quad \text{avec} \quad \frac{2GM}{c^2 R} \ll 1$$

pour que la métrique décrive un champ gravitationnel faible.

Considérons en général une métrique statique et à symétrie sphérique. On peut montrer qu'il existe un système de coordonnées (x^μ) tel que la métrique ait la forme isotropique $ds^2 = g_{00}(r)(dx^0)^2 + g_{rr}(r)[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]$ avec $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. Nous développons maintenant les composantes g_{00} et g_{rr} en fonction de ϵ au-delà de l'ordre newtonien. Raisonnablement, nous devons avoir pour la métrique post-newtonienne

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + 2\beta \frac{G^2 m^2}{c^4 r^2}\right)(dx^0)^2 + \left(1 + 2\gamma \frac{Gm}{c^2 r}\right)\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right)$$

où β et γ sont deux paramètres sans dimension. Le paramètre γ est en facteur d'un terme linéaire en G tandis que le paramètre β caractérise un terme quadratique en G.

Dans le cas de la théorie d'Einstein de la gravitation, la métrique post-newtonienne doit satisfaire les équations du vide à l'ordre suivant $R_{00} = O(\epsilon^3)$, $R_{0i} = 0$ et $R_{ij} = O(\epsilon^2)$ qui déterminent les paramètres β et γ, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$.

Il est important de noter que dans une autre théorie métrique de la gravitation que celle d'Einstein, il n'y a pas de raison pour que les paramètres β et γ valent un, c'est-à-dire pour que le tenseur de Ricci soit nul dans le vide. Tester la relativité générale en champ gravitationnel faible, par exemple celui du Soleil, signifie évaluer β et γ par des expériences. Nous allons évoquer dans la suite deux tests classiques auxquels il faudrait ajouter l'effet Shapiro plus récent, qui est la mesure du temps que met la lumière pour faire un aller et retour dans le système solaire. On trouve par ces observations que β vaut 1 à 10^{-3} près et que γ vaut 1 presqu'à 10^{-5} près.

6.6 Avance du périhélie de Mercure

Dans le système de deux corps Soleil-Mercure, la masse du Soleil étant beaucoup plus grande que celle de Mercure, nous pouvons considérer que Mercure est une particule massive d'épreuve dans le champ gravitationnel du Soleil. En négligeant la rotation et le moment quadrupolaire du Soleil, la métrique décrivant l'espace-temps extérieur est statique et à symétrie sphérique. Mercure suit une géodésique du genre temps. Pour trouver des effets non newtoniens, nous prenons la métrique post-newtonienne.

Soit $x^\mu(s)$ la géodésique du genre temps et dirigée vers le futur, de quadri-vitesse u^μ de norme -1 avec $u^0 > 0$. Nous écrivons l'équation de la géodésique sous la forme simplifiée

$$\frac{d}{ds} u_\mu = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad \text{avec} \quad u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu.$$

Ecrivons $(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ en coordonnées sphériques. Puisque la métrique post-newtonienne ne dépend ni de x^0 et ni de φ, les composantes

covariantes u_0 et u_φ sont des constantes du mouvement. D'autre part, la géodésique du genre temps reste dans un plan de symétrie que nous prenons être $\theta = \pi/2$ et par conséquent $u^\theta = 0$.

L'interprétation de ces constantes d'intégration se fait à l'aide du vecteur énergie-impulsion de la particule $p^\mu = \mu c u^\mu$ où μ est la masse de la particule. L'énergie totale de la particule est $-cp_0$ et ainsi l'énergie du mouvement E de la particule est donnée par $\mu c^2 + E = -\mu c^2 u_0$. Le moment cinétique par rapport à l'axe Oz de la particule est p_φ soit $L = \mu c u_\varphi$. Dans la suite du calcul nous prenons la masse unité $\mu = 1$.

Nous calculons u^0 et u^φ à partir des u_0 et u_φ et nous les reportons dans la condition $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ pour obtenir

$$\frac{(1+E/c^2)^2}{g_{00}} + g_{rr}(u^r)^2 + \frac{L^2}{c^2 g_{\varphi\varphi}} = -1.$$

Posant $u = 1/r$ et en utilisant la formule $u^r = u^\varphi dr/d\varphi$ soit $u^r = (L/cg_{\varphi\varphi})(dr/d\varphi)$, nous obtenons

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{c^2 g_{rr}(u)}{L^2} - \frac{c^2(1+E/c^2)^2}{L^2}\frac{g_{rr}(u)}{g_{00}(u)} - u^2.$$

Dans le cas de la métrique post-newtonienne, nous ne gardons dans le développement que les termes en $1/c^2$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \approx \frac{2E}{L^2} + \frac{2Gm}{L^2}u - u^2 + \frac{1}{c^2}\left[\frac{E^2}{L^2} + \frac{4(1+\gamma)EGm}{L^2}u + 2(2-\beta+2\gamma)\frac{G^2m^2}{L^2}u^2\right].$$

En réalité il aurait fallu le terme en $1/c^4$ dans g_{rr} mais finalement il se serait éliminé dans l'équation déterminant $u(\varphi)$.

La solution newtonienne est une ellipse de demi-grand axe a et d'excentricité e donnée par la solution

$$u_N(\varphi) = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi) \quad \text{avec} \quad p = a(1-e^2).$$

A l'appoximation newtonienne, les constantes E et L sont reliées à p et e, en particulier $p = L^2/Gm$.

Nous cherchons la solution approchée en $1/c^2$ de l'équation déterminant $du/d\varphi$ sous la forme

$$u(\varphi) = \frac{1}{p'}\left(1 + e'\cos[(1+\epsilon)\varphi]\right).$$

Il est toujours possible en ajustant les trois paramètres p', e' et ϵ de satisfaire un polynôme du second degré en cos. Pour annuler le coefficient en $\cos^2$ on doit avoir

$$\epsilon = -(2-\beta+2\gamma)\frac{G^2m^2}{L^2c^2}.$$

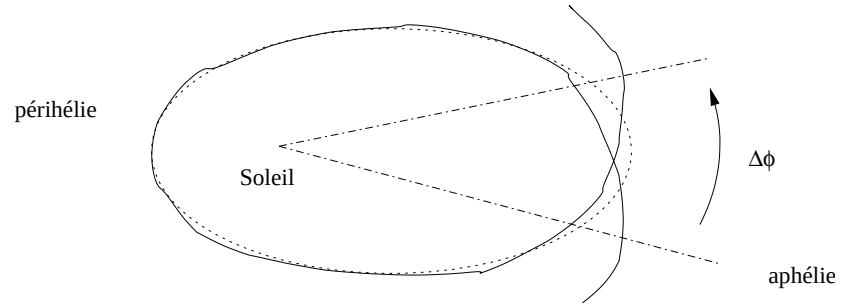
Compte tenu de l'expression de L à l'approximation newtonienne, nous obtenons

$$\epsilon = -(2-\beta+2\gamma)\frac{Gm}{c^2 p}.$$

Ainsi Mercure revient à son rayon minimum non pas après 2π mais après $2\pi/(1+\epsilon)$: c'est l'avance du périhélie $\triangle\varphi$. Nous trouvons par révolution

$$\triangle\varphi = 2\pi(2-\beta+2\gamma)\frac{Gm}{c^2 a(1-e^2)}.$$

Dans le cas de la relativité générale $\beta = 1$ et $\gamma = 1$. En divisant par la période de révolution T de Mercure, on trouve une précession de 43 secondes d'arc par siècle. [6]. Cela est remarquablement en accord avec l'observation à condition qu'on ne se trompe pas en négligeant le moment quadrupolaire du Soleil.



Nous insistons sur le fait que cette avance du périhélie est une quantité observable indépendante du choix du système de coordonnées adopté pour la déterminer. Toutefois, seule l'expression en G est déterminée par des quantités observables en théorie newtonienne. La trajectoire s'exprime de façon différente suivant le système de coordonnées utilisé.

6.7 Déviation de la lumière et mirage gravitationnel

Quand on étudie un mouvement qui n'est plus comme précédemment lent, en particulier la lumière, il faut renoncer à un développement en $1/c$ de la métrique. Toutes les composantes de la métrique doivent être connues au même ordre, en fait en puissance de G. Fort heureusement à l'approximation linéaire en G, la métrique post-newtonienne donne la métrique désirée

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{00} = \frac{2U}{c^2} \text{ et } h_{ij} = \frac{2\gamma U}{c^2}\delta_{ij}$$

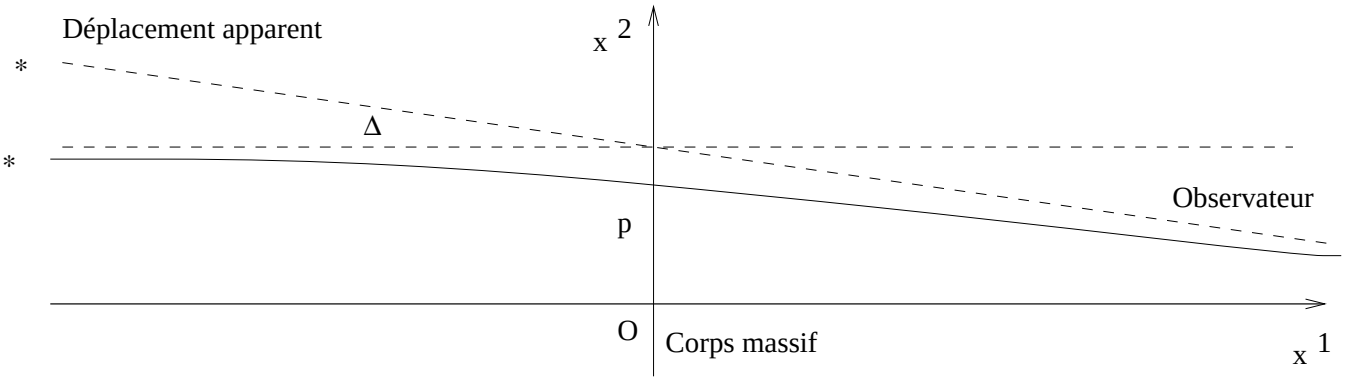
où seul le paramètre γ intervient. La déviation des rayons lumineux par le Soleil relève de l'étude des géodésiques du genre lumière de cette métrique linéarisée.

Soit $x^\mu(\lambda)$ la géodésique du genre lumière de vecteur-dérivée k^μ pour un paramètre affine λ. L'équation de la géodésique s'écrit sous la forme simplifiée

$$\frac{d}{d\lambda}k_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta.$$

[6] Pour la masse du Soleil on a $Gm_\odot/c^2 \simeq 1,475 \times 10^3$ m
et les paramètes de Mercure sont $a = 5,546 \times 10^{10}$ m, $e = 0,205\,6$ et $P = 0,24$ ans.

Nous considérons une perturbation de la trajectoire $x_0^\mu(\lambda)$ de l'espace-temps minkowskien dont le vecteur de propagation k_0^μ a pour composantes $(1,1,0,0)$. Le vecteur de propagation k^μ est une perturbation sous la forme $k_\mu = k_{0\mu} + \delta k_\mu$. La perturbation δk_μ satisfait donc



l'équation suivante

$$\frac{d}{d\lambda}\delta k_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\alpha\beta} k_0^\alpha k_0^\beta$$

qui s'intègre sous la forme

$$\delta k_\mu \mid_{\lambda=+\infty} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\mu h_{\alpha\beta}(x_0(\lambda)) k_0^\alpha k_0^\beta d\lambda$$

avec la condition que δk_μ est nul à $\lambda = -\infty$. La déviation $\triangle$ pour une trajectoire de paramètre d'impact $x^2 = p$ est égale à δk_2 à $\lambda = \infty$. Explicitons dans notre cas

$$\triangle = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [\partial_2 h_{00}(x_0(\lambda)) + \partial_2 h_{11}(x_0(\lambda))] d\lambda.$$

Puisque $r = \sqrt{p^2 + \lambda^2}$, l'intégrale devient

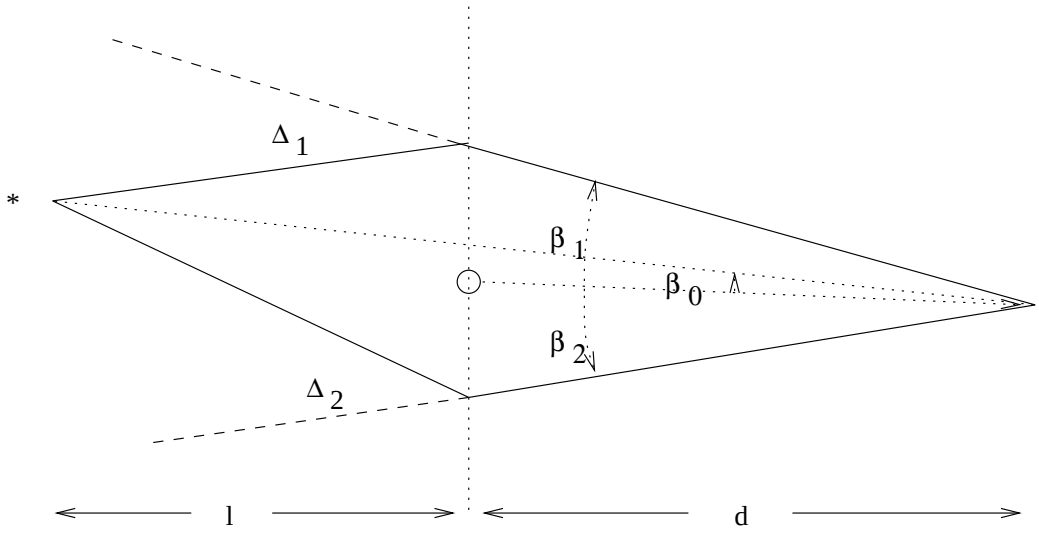
$$\triangle = -\frac{(1+\gamma)Gm}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p}{(p^2+\lambda^2)^{3/2}} d\lambda.$$

La déviation du rayon lumineux est obtenue par intégration

$$\triangle = -\frac{2(1+\gamma)Gm}{c^2 p}.$$

En relativité générale $\gamma = 1$ et on trouve une déviation $\triangle \simeq 1",75$ pour un paramètre d'impact proche du rayon du Soleil. Cela a été vérifié par Eddington dès 1919 lors d'une éclipse totale de Soleil. Nous remarquons que cette valeur est deux fois la déviation $\triangle_N$ suggérée dans le cadre de la théorie newtonienne. C'est le terme en γ qui double en théorie métrique de la gravitation l'effet attendu par des considérations newtoniennes.

Ce phénomène de déviation des rayons lumineux conduit à la possiblité de mirages gravitationnels, par exemple dans le cas d'un quasar par une galaxie. Il y a formation de



deux images. Pour chaque trajectoire 1 et 2 de la lumière, nous notons $\triangle_1$ et $\triangle_2$ les angles de déviation. A cette approximation, la géométrie dans le plan des rayons lumineux donne

$$\triangle_1 \approx (\beta_1 - \beta_0)\frac{l+d}{l} \quad \text{et} \quad \triangle_2 \approx (\beta_2 - \beta_0)\frac{l+d}{l}.$$

Vu l'expression de la déviation $\triangle$ pour $\gamma = 1$, nous avons à résoudre l'équation suivante pour trouver β

$$\frac{4Gm}{c^2 d\beta} \approx (\beta - \beta_0)\frac{l+d}{l}.$$

Posant

$$\triangle_0 = \frac{4Gm}{c^2}\frac{l}{d(l+d)},$$

nous obtenons les deux solutions

$$\beta_1 \approx \frac{1}{2}\beta_0 + \sqrt{(\beta_0/2)^2 + \triangle_0} \quad \text{et} \quad \beta_2 \approx \frac{1}{2}\beta_0 - \sqrt{(\beta_0/2)^2 + \triangle_0}.$$

Ceci a bien été observé en astrophysique à partir des années soixante-dix. Si l'alignement est parfait on obtient alors l'anneau d'Einstein. Une étude plus approfondie de la propagation de la lumière montre que l'intensité des deux images est différente.

Actuellement, cet effet de mirage gravitationnel ne sert plus à vérifier la relativité générale mais il est utilisé pour obtenir des informations en astrophysique. Ainsi récemment on a détecté des objets invisibles, puisqu'ils ne rayonnent pas, qui composeraient la matière sombre du halo galactique et qu'on appelle des naines brunes. De même, on peut évaluer la distribution matérielle qui sert de déflecteur lors d'un mirage gravitationnel par l'étude des images multiples qui sont formées.

Chapitre 7

Corps massif et trou de ver statiques et à symétrie sphérique

7.1 Métrique statique et à symétrie sphérique

Nous souhaitons déterminer la métrique intérieure et la métrique extérieure de l'espace-temps décrivant un corps massif sphérique. Il faut définir pour cela les notions de métrique stationnaire, de métrique statique et de métrique à symétrie sphérique.

On appelle espace-temps stationnaire un espace-temps dont la métrique g admet un vecteur de Killing ξ orienté dans le temps, soit

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0.$$

Le flot associé à ξ définit une coordonnée x^0. Cela signifie qu'il existe un système de coordonnées adaptées (x^μ) dans lequel les composantes du vecteur de Killing sont

$$\xi^\alpha = (1,0,0,0) \quad \text{soit} \quad \xi = \partial_0.$$

La condition de stationnarité devient $\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0$ dans ces coordonnées.

On dit qu'un espace-temps stationnaire est statique si le flot associé à ξ est orthogonal aux hypersurfaces $x^0 = \text{const}$, c'est-à-dire si ξ est colinéaire au vecteur normal à ces hypersurfaces. Le système de coordonnées est alors choisi de telle sorte que la métrique s'écrive

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ij}dx^i dx^j$$

où g_{00} et g_{ij} ne dépendent que de x^k, avec $g_{00} < 0$ et g_{ij} une métrique riemannienne. Les termes g_{0i} sont nuls. Ainsi, il existe des coordonnées telles que la métrique soit invariante par $x^0 \rightsquigarrow -x^0$.

Sur la sphère à deux dimensions, nous connaissons les trois vecteurs de Killing qui forment une algèbre de Lie pour le crochet de vecteurs. C'est un groupe d'isométries à trois paramètres qui opère sur la sphère. On appelle métrique à symétrie sphérique une

métrique qui, dans un certain système de coordonnées $(x^0, x^1, \theta, \varphi)$, admet les trois vecteurs de Killing ξ_a $(a = 1, 2, 3)$ de composantes

$$\xi_1\ (0, 0, -\sin\varphi, -\cos\varphi\cot\theta) \quad , \quad \xi_2\ (0, 0, \cos\varphi, -\sin\varphi\cot\theta) \quad \text{et} \quad \xi_3\ (0, 0, 0, 1).$$

Ils satisfont les mêmes relations de commutation que les vecteurs de Killing de la sphère S^2. Les composantes de la métrique satisfont $\mathcal{L}_{\xi_a} g_{\alpha\beta} = 0$ par hypothèse. On démontre, ici nous vérifions, que la forme générale de la métrique est

$$ds^2 = -\mathrm{e}^{\nu}(dx^0)^2 - 2\mathrm{e}^{\sigma}dx^0dx^1 + \mathrm{e}^{\lambda}(dx^1)^2 + \mathrm{e}^{\mu}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

où ν, σ, λ et μ sont des fonctions arbitraires de x^0 et x^1. Sur cette forme il est toujours loisible de faire un changement de système de coordonnées pour éliminer la composante g_{01} par exemple. Ce genre d'analyse est locale et il est toujours plus difficile de voir si l'on recouvre bien tout l'espace-temps avec le nouveau système de coordonnées.

Si nous exigeons à la fois la staticité et la symétrie sphérique, alors il existe un système de coordonnées $(x^0, R, \theta, \varphi)$, avec $-\infty < R < \infty$, dans lequel la métrique s'écrit

$$ds^2 = g_{00}(R)(dx^0)^2 + g_{RR}(R)dR^2 + g_{\theta\theta}(R)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

avec $g_{00} < 0$, $g_{RR} > 0$ et $g_{\theta\theta} > 0$. Nous remarquons que les surfaces à deux dimensions $x^0 =$ const. et $R =$ const. sont des sphères décrites en coordonnées (θ, φ). La métrique induite sur celle-ci est

$$dS^2 = g_{\theta\theta}(R)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

L'aire de ces sphères est $4\pi g_{\theta\theta}(R)$ paramétrée par R.

Si nous voulons des sphères emboîtées les unes dans les autres quand leur aire augmente, pour avoir une topologie raisonnable de l'espace-temps, alors nous devons demander que $g_{\theta\theta}(R)$ soit une fonction croissante de R. Nous pouvons alors effectuer le changement de coordonnée radiale $r(R)$ donné par

$$r(R) = \sqrt{g_{\theta\theta}(R)} \quad \text{avec} \quad r \geq 0$$

qui est bien défini puisque $dr/dR > 0$ sous notre hypothèse. Dans les coordonnées $(x^0, r, \theta, \varphi)$, la métrique a alors l'expression suivante

$$ds^2 = g_{00}(r)(dx^0)^2 + g_{rr}(r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad \text{avec} \quad g_{rr} = g_{RR}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2.$$

7.2 Corps massif à symétrie sphérique

Pour simplifier, nous supposons que la matière constituant le corps massif est un fluide parfait de tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$ avec une équation d'état $\rho(p)$. La métrique statique et à symétrie sphérique décrivant l'espace-temps engendré par

ce corps massif devra être régulière partout. Dans les coordonnées $(x^0, r, \theta, \varphi)$, cela impose que le centre de la boule est en $r = 0$ pour que les coordonnées (r, θ, φ), avec $r \geq 0$, aient bien le sens de sphères $r = \text{const.}$ emboîtées.

Ecrivons tout d'abord les équations d'Einstein pour la métrique intérieure. La quadrivitesse u^μ du fluide a nécessairement la forme

$$u^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}, 0, 0, 0 \right).$$

Par suite, les composantes des équations d'Einstein sont

$$G_0^0 = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 g_{rr}} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{1}{g_{rr}} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho,$$

$$G_r^r = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 g_{rr}} + \frac{1}{r g_{rr} g_{00}} \frac{d}{dr} g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} p,$$

$$G_\theta^\theta = G_\varphi^\varphi = \cdots = \frac{8\pi G}{c^4} p.$$

Il sera inutile de connaître explicitement les composantes G_θ^θ et G_φ^φ.

Définissant la fonction $m(r)$ par

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \dfrac{2Gm(r)}{c^2 r}},$$

nous récrivons la première composante des équations d'Einstein sous la forme

$$\frac{d}{dr} m = 4\pi \rho r^2.$$

La métrique sera régulière en $r = 0$ si $m(0) = 0$. Pour satisfaire la condition $g_{rr} > 0$, la solution devra vérifier $r \geq 2Gm(r)/c^2$. De la deuxième composante des équations d'Einstein, nous tirons la relation

$$\frac{1}{g_{00}} \frac{d}{dr} g_{00} = \left(\frac{2Gm(r)}{c^2 r^2} + \frac{8\pi G p r}{c^4} \right) \frac{1}{1 - \dfrac{2Gm(r)}{c^2 r}}.$$

Nous pourrions utiliser les dernières composantes des équations d'Einstein mais les composantes du tenseur d'Einstein ne sont pas indépendantes et nous préférons considérer une équation qui résulte directement de la loi de conservation covariante $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, soit

$$\partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\tau\mu}^\mu T_\nu^\tau - \Gamma_{\nu\tau}^\mu T_\mu^\tau = 0.$$

Sachant que $\Gamma_{r0}^0 = g^{00} \partial_r g_{00}/2$, nous déduisons de cette loi pour $\nu = r$ l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dr} p + \frac{1}{2 g_{00}} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{d}{dr} g_{00} = 0.$$

En combinant avec la précédente, nous obtenons l'équation de l'équilibre hydrostatique

$$\frac{d}{dr}p = -\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{Gm(r) + 4\pi G r^3 p/c^2}{r\left(r - \dfrac{2Gm(r)}{c^2}\right)}$$

qui redonne l'équation newtonienne en négligeant les termes en $1/c^2$.

Avec une équation d'état $\rho(p)$ nous obtenons deux équations différentielles couplées du premier ordre pour $p(r)$ et $m(r)$. Nous avons déjà la condition $m(0) = 0$ mais il en faut une autre pour obtenir une solution. Au-delà du rayon r_0 du corps massif, nous avons une métrique du vide. Il est clair que la pression doit être continue à la traversée de r_0 et donc nous avons $p(r_0) = 0$. La détermination des $p(r)$ et $m(r)$ se fait en exigeant que la pression $p(r)$ s'annule pour un certain rayon r_0 qui sera alors le rayon du corps massif.

Nous remarquons que g_{00} n'est déterminé qu'à une constante multiplicative près. Ceci est normal puisque la forme adoptée de la métrique ne fixe pas complètement les coordonnées car il reste la possiblilité de changer la coordonnée x^0 par un facteur multiplicatif.

Nous verrons que l'on peut interpréter $m(r_0)$ comme la masse m du corps massif

$$m = 4\pi \int_0^{r_0} \rho(r) r^2 dr.$$

Cependant, si on se donne *a priori* la valeur de m pour une équation d'état donnée, il n'existe pas toujours une solution avec un certain r_0. Il apparaît ainsi la notion de masse limite au-dessus de laquelle il ne peut plus exister de solutions statiques.

On sait que ce sont les réactions nucléaires qui maintiennent les étoiles en équilibre gravitationnel car on n'a pas un simple fluide. Elles produisent de l'énergie sous forme de radiation à hautes températures. Le combustible nucléaire épuisé, l'étoile s'effondre. Si, éventuellement après éjection de matière par explosion, la masse de l'étoile est inférieure à 2 ou 3 masses solaires, l'étoile devenue froide trouvera une nouvelle position d'équilibre comme naine blanche ou étoile à neutrons. En revanche si la masse dépasse cette limite, il y aura effondrement gravitationnel sans que rien ne semble pouvoir l'arrêter.

Examinons un cas académique. Au lieu de prendre une équation d'état, nous imposons que la densité volumique de masse du corps soit une constante ρ_0. Nous pouvons alors intégrer notre système d'équations différentielles

$$m(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \quad , \quad 0 \le r < r_0 \quad \text{et alors} \quad m = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r_0^3,$$

$$p(r) = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - 2Gm/c^2 r_0} - \sqrt{1 - 8\pi G\rho_0 r^2/3c^2}}{\sqrt{1 - 8\pi G\rho_0 r^2/3c^2} - 3\sqrt{1 - 2Gm/c^2 r_0}},$$

avec la condition $p(r_0) = 0$. La pression au centre $p(0)$ devient infinie quand $r_0 = 9Gm/4c^2$. Par conséquent, si une solution avec $\rho = \rho_0$ existe alors son rayon satisfera $r_0 \ge 9Gm/4c^2$. Une autre façon de le dire est que pour ρ_0 donné il y a une masse $m_{\max}$ au-dessus de laquelle il ne peut exister de solution, $m_{\max} = 4c^3/9G\sqrt{3G\pi\rho_0}$.

Revenons maintenant à la métrique extérieure pour $r > r_0$, son expression est un cas particulier de la métrique intérieure avec $m(r) = m$. Il faut satisfaire la condition $2Gm/c^2 r_0 < 1$. Les composantes de la métrique extérieure s'écrivent

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \dfrac{2Gm}{c^2 r}} \quad \text{et} \quad g_{00} = -C^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) \quad \text{avec} \quad C = \text{const.}$$

Pour une étoile à neutrons de l'ordre d'une masse solaire, on trouve un rayon r_0 d'environ 10 km, soit $2Gm/c^2 r_0 \approx 0,3$. Ceci montre que le champ gravitationnel engendré ne peut pas être décrit à l'approximation newtonienne dans laquelle $Gm/c^2 r_0 \ll 1$.

Si ρ présente une discontinuité en $r = r_0$ alors il faut s'assurer du raccordement de la métrique intérieure et de la métrique extérieure sur l'hypersurface $r = r_0$. La métrique est continue par construction et par conséquent les métriques induites sont les mêmes. Nous pouvons vérifier que les courbures extrinsèques de l'hypersurface $r = r_0$ coïncident. La condition de continuité exigée de certaines composantes du tenseur énergie-impulsion en $r = r_0$ est satisfaite puisque la pression p s'annule en $r = r_0$.

Il faut remarquer que cette détermination ne demande pas de conditions asymptotiques pour la métrique extérieure. En fait la solution est bien asymptotiquement minkowskienne quand $r \to \infty$. L'arbitraire de la constante C permet de prendre x^0 comme étant la coordonnée minkowskienne à l'infini. Cela vient du théorème d'unicité de Birkhoff qui démontre qu'une solution du vide à symétrie sphérique est nécessairement statique.

7.3 Métrique statique de Schwarzschild

La solution statique et à symétrie sphérique des équations d'Einstein du vide est caractérisée par un paramètre m. Nous l'appelons la métrique statique de Schwarzschild. Elle s'écrit

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)(dx^0)^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{2Gm}{c^2 r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

dans les coordonnées $(x^0, r, \theta, \varphi)$ définies pour $r > 2Gm/c^2$. Elle a été trouvée dès 1916 dans un autre système de coordonnées. Cette métrique de Schwarzschild décrit l'espace-temps extérieur de tout corps massif à symétrie sphérique. Vraisemblablement, le domaine de validité est $m \gg m_P$ avec la condition $r \gg l_P$.

En étudiant les trajectoires des géodésiques du genre temps et de celles du genre lumière dans la métrique statique de Schwarzschild, nous retrouverions en première approximation les tests classiques de l'avance du périhélie de Mercure et de la déviation des rayons lumineux par le Soleil. Cependant l'analyse complète des géodésiques montre que les trajectoires peuvent être très complexes et donc fort éloignées des trajectoires newtoniennes. Il existe ainsi une trajectoire circulaire de la lumière en $r = 3Gm/c^2$ mais qui est instable.

Pour comparer avec la métrique post-newtonienne, nous effectuons le changement de coordonnée radiale $\overline{r}(r)$

$$\overline{r} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{Gm}{c^2} + \sqrt{r\left(r - \frac{2Gm}{c^2}\right)}\right)$$

qui met la métrique statique de Schwarzschild sous la forme isotropique

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - \dfrac{Gm}{2c^2\overline{r}}}{1 + \dfrac{Gm}{2c^2\overline{r}}}\right)^2 (dx^0)^2 + \left(1 + \frac{Gm}{2c^2\overline{r}}\right)^4 (d\overline{r}^2 + \overline{r}^2 d\theta^2 + \overline{r}^2 \sin^2\theta d\varphi^2),$$

définie pour $\overline{r} > Gm/2c^2$. Le développement en $Gm/c^2\overline{r}$ conduit à la métrique post-newtonienne avec $\beta = 1$ et $\gamma = 1$. Cela justifie d'interpréter le paramètre m comme la masse totale du corps massif. Nous en profitons pour encore rappeler que les coordonnées r ou $\overline{r}$ n'ont pas de signification physique.

Nous allons maintenant examiner le décalage des fréquences en champ gravitationnel fort. Il faut tout d'abord définir un observateur statique dans la métrique statique de Schwarzschild. C'est un observateur dont la quadri-vitesse u^μ est colinéaire au vecteur de Killing orienté dans le temps ξ. Elle a donc pour composantes

$$u^0 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1/2} \quad \text{et} \quad u^i = 0.$$

Sa ligne d'univers est $r = r_0$ avec $r_0 > 2Gm/c^2$, $\theta = \theta_0$ et $\varphi = \varphi_0$. Il est sans rotation pour le trièdre $e_{\underline{i}}$ de composantes non nulles

$$e^r_{\underline{1}} = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r_0}\right)^{1/2}, \quad e^\theta_{\underline{2}} = \frac{1}{r_0} \quad \text{et} \quad e^\varphi_{\underline{3}} = \frac{1}{r_0 \sin\theta_0}.$$

La quadri-accélération $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$ a pour composantes dans ce trièdre

$$a^{\underline{1}} = \frac{Gm}{c^2 r_0^2}\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r_0}\right)^{-1/2}, \quad a^{\underline{2}} = 0 \quad \text{et} \quad a^{\underline{3}} = 0$$

donnant l'accélération $a^i = c^2 a^{\underline{i}}$ qui correspond à l'accélération de la pesanteur. Nous constatons que l'accélération a^1 tend vers l'infini quand $r_0 \to 2Gm/c^2$. Il faut donc des forces non gravitationnelles de plus en plus grandes pour maintenir fixe l'observateur statique.

Considérons le décalage vers le rouge des raies spectrales d'un atome en r_e de quadri-vitesse u^μ_e et un observateur statique en r_o de quadri-vitesse u^μ_o. D'après la formule de l'effet Doppler général, nous avons

$$\frac{\nu_o}{\nu_e} = \frac{u^\mu_o k_\mu \mid_o}{u^\mu_e k_\mu \mid_e}$$

où k^μ est le vecteur de propagation de la lumière. Il satisfait l'équation des géodésiques du genre lumière pour un paramètre affine λ que nous écrivons sous la forme simplifiée

$$\frac{d}{d\lambda}k_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}k^\rho k^\sigma.$$

Puisque la métrique ne dépend pas de x^0 nous avons $k_0 = \text{const.}$, qui n'est rien d'autre que $k_\mu\xi^\mu$ où ξ désigne le vecteur de Killing orienté dans le temps [1]. La formule se simplifie et nous avons en champ gravitationnel fort, statique et à symétrie sphérique, la formule

$$\frac{\nu_o}{\nu_e} = \frac{u_o^0}{u_e^0} \quad \text{soit} \quad \frac{\nu_o}{\nu_e} = \left(\frac{1-\dfrac{2Gm}{c^2 r_e}}{1-\dfrac{2Gm}{c^2 r_o}}\right)^{1/2}.$$

Cette formule généralise celle du décalage des fréquences dans le champ gravitationnel faible, décrit par la métrique newtonienne, que nous avions précédemment établie.

Nous remarquons que lorsque la position de l'atome r_e approche $2Gm/c^2$ le décalage vers le rouge devient infini. Ceci est une propriété intrinsèque de l'hypersurface $r = 2Gm/c^2$ de la métrique statique de Schwarzschild.

7.4 Trou de ver statique et à symétrie sphérique

Si nous renonçons à l'hypothèse des sphères emboîtées, alors nous pouvons trouver un autre type de solution statique et à symétrie sphérique des équations d'Einstein, appelée trou de ver [2]. La métrique en coordonnées $(x^0, R, \theta, \varphi)$ peut toujours s'écrire sous la forme

$$ds^2 = g_{00}(l)(dx^0)^2 + dl^2 + r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

dans un nouveau système de coordonnées $(x^0, l, \theta, \varphi)$ avec $-\infty < l < \infty$. La métrique précédente du corps massif peut être mise sous cette forme avec l variant de zéro à l'infini grâce au changement de coordonnée radiale

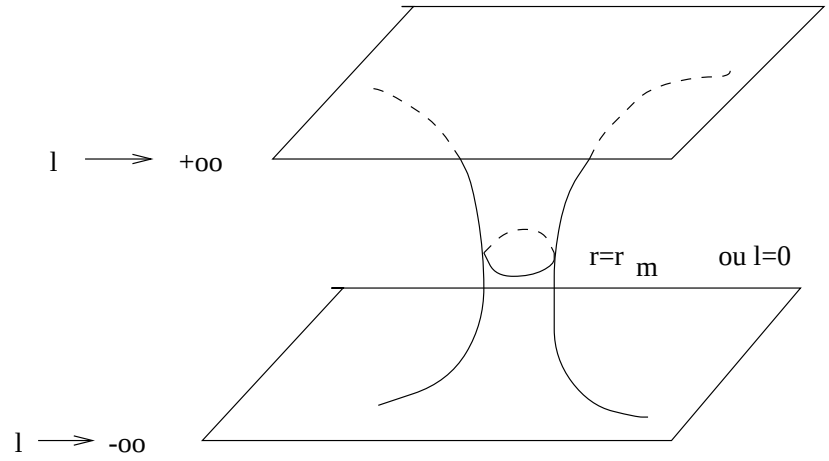
$$l(r) = \int_0^r \sqrt{g_{rr}(r')}dr'.$$

En revanche nous obtenons un nouveau type de solution en supposant que la fonction $r(l)$ atteint un minimum r_m, $r_m \geq 0$, pour une valeur de l que l'on peut choisir nulle ; l'exemple le plus simple est $ds^2 = -(dx^0)^2 + dl^2 + (r_m^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.

Nous considérons pour simplifier les solutions telles que $g_{00}(l) = g_{00}(-l)$ et $r(l) = r(-l)$ et qui sont asymptotiquement minkowskiennes pour $l \to \pm\infty$.

[1] En effet, nous avons $k^\rho\nabla_\rho(k_\mu\xi^\mu) = \xi^\mu k^\rho\nabla_\rho k_\mu + k^\rho k^\mu\nabla_\rho\xi_\mu = \xi^\mu k^\rho\nabla_\rho k_\mu + \frac{1}{2}k^\rho k^\mu\mathcal{L}_\xi g_{\rho\mu} = 0$.

[2] *wormhole* en anglais.



Nous pouvons faire l'étude avec la coordonnée r mais alors seule une moitié de l'espace-temps est recouvert. En particulier, nous avons

$$m(r) = -\frac{4\pi}{c^2}\int_{r_m}^{r} T_0^0(r')dr' + \frac{r_m}{2G}.$$

En combinant les deux équations d'Einstein pour la métrique intérieure, nous obtenons

$$\frac{g_{00}}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{g_{00}g_{rr}}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_0^0 - T_r^r\right).$$

Puisque $dr/dl = 0$ en $r = r_m$ nous avons que $g_{rr} \to \infty$ quand $r \to r_m$. Ainsi la fonction $1/g_{00}g_{rr}$ est négative et s'annule en $r = r_m$ sous l'hypothèse que g_{00} est fini en $r = r_m$. C'est pourquoi pour un certain $\tilde{r}$ nous avons

$$\text{si } r \in [r_m, \tilde{r}] \quad \text{alors} \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{g_{00}g_{rr}}\right) \leq 0.$$

Il résulte alors de l'équation précédente que $T_0^0 - T_r^r \geq 0$ pour $r \in [r_m, \tilde{r}]$.

Dans un espace-temps décrivant un trou de ver il n'y a pas de difficulté pour passer d'une région asymptotiquement minkowskienne à une autre. Cependant le prix à payer est l'introduction d'une matière exotique n'ayant pas une densité d'énergie positive pour tout observateur, c'est-à-dire telle qu'on n'ait pas

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0 \quad \forall u^\mu \quad \text{tel que} \quad u^\mu u_\mu = -1.$$

On le vérifie sur notre résultat à l'aide d'un peu d'algèbre. Cette propriété de la matière, appelée la condition d'énergie faible, exclut donc les trous de ver.

Chapitre 8

Effondrement gravitationnel et trou noir à symétrie sphérique

8.1 Observateur en chute libre dans la métrique de Schwarzschild

Nous rappelons l'expression de la métrique statique de Schwarzschild qui est la solution des équations d'Einstein du vide à symétrie sphérique

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)(dx^0)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\varphi^2)$$

dans le système de coordonnées $(x^0, r, \theta, \varphi)$ avec $r > r_S$ et $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. La constante r_S est appelée le rayon de Schwarzschild et elle est reliée à la masse m du corps massif qui engendre le champ gravitationnel par $r_S = 2Gm/c^2$ quand bien sûr la métrique de Schwarzschild peut être raccordée à une métrique intérieure.

Nous considérons un observateur en chute libre radiale venant de l'infini sans vitesse initiale. Sa trajectoire est une géodésique du genre temps que nous paramétrons à l'aide du temps propre τ de la façon suivante

$$x^0(\tau) \quad , \quad r(\tau) \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

conduisant à la quadri-vitesse u^μ de composantes

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} \quad , \quad u^r = \frac{dr}{d\tau} \quad , \quad u^\theta = 0 \quad \text{et} \quad u^\varphi = 0.$$

Puisque la métrique ne dépend pas de x^0, la composante u_0 est constante. Pour une particule sans vitesse initiale à l'infini, nous avons $u_0 = -1$ et par suite $u^0 = -g^{00}$, soit

$u^0 = -1/g_{00}$. Nous avons donc l'équation

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{1}{1 - \dfrac{r_S}{r(\tau)}}.$$

Il est inutile de vouloir poser les composantes de l'équation géodésique. Sachant que $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$, nous en déduisons immédiatement l'équation

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{r_S}{r(\tau)}.$$

Avec la condition qu'à $\tau \to -\infty$ on ait $r \to \infty$, nous trouvons aisément la solution générale de cette équation qui dépend d'une constante d'intégration τ_0

$$r(\tau) = \left(\frac{9}{4}r_S\right)^{1/3}(\tau_0 - \tau)^{2/3}$$

avec la restriction $r(\tau) > r_S$ dans la métrique statique de Schwarzschild. La constante τ_0 n'a pas de signification physique puisque le temps propre est défini à une constante additive près. Ensuite, nous obtenons par intégration l'expression de $x^0(\tau)$

$$x^0(\tau) = \tau - 3a(\tau_0 - \tau)^{1/3} - \frac{3}{2}a^{3/2}\ln\left[\frac{(\tau_0 - \tau)^{1/3} - \sqrt{a}}{(\tau_0 - \tau)^{1/3} + \sqrt{a}}\right] + x_0^0 \quad \text{avec} \quad a = \frac{r_S}{(\frac{9}{4}r_S)^{1/3}}$$

Que constatons-nous ? L'observateur atteint le rayon r_S en un temps propre fini τ_S, défini par $a = (\tau_0 - \tau_S)^{2/3}$. Naturellement, quand $\tau \to \tau_S$, le temps-coordonnée $x^0(\tau)$ tend vers l'infini mais c'est le temps τ de l'horloge de l'observateur qui est physiquement observable.

Nous considérons maintenant que l'observateur en chute libre est sans rotation. Le trièdre $e^\mu_{\underline{i}}$ de l'observateur a les composantes

$$e^\mu_{\underline{1}}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{r_S}{r}}\left(\frac{r_S}{r}\right)^{1/2}, 1, 0, 0\right) \quad , \quad e^\mu_{\underline{2}}\left(0, 0, \frac{1}{r}, 0\right) \quad \text{et} \quad e^\mu_{\underline{3}}\left(0, 0, 0, \frac{1}{r\sin\theta}\right).$$

Nous formons une tétrade lorentzienne $e^\mu_{\underline{a}}$ avec u^μ et les e^μ_i le long de la ligne d'univers. Les composantes tétradiques du tenseur de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}e^\mu_{\underline{a}}e^\nu_{\underline{b}}e^\rho_{\underline{c}}e^\sigma_{\underline{d}}$ sont toutes en r_S/r^3, par exemple $R_{\underline{0}\underline{1}\underline{0}\underline{1}} = -r_S/r^3$. Ainsi cet observateur, arrivant en $r = r_S$ en un temps fini de son horloge, ne ressent rien de particulier puisque les composantes tétradiques du tenseur de Riemann sont régulières. Il peut toujours décrire l'espace-temps dans son voisinage immédiat grâce aux coordonnées de Fermi. Par conséquent, il semble qu'il puisse continuer son voyage après être arrivé en $r = r_S$.

Cet argument nous donne à penser que les irrégularités des composantes de la métrique en $r = r_S$ sont dues au choix du système de coordonnées $(x^0, r, \theta, \varphi)$. Celui-ci ne décrit qu'un ouvert de l'espace-temps attendu. L'espace-temps doit pouvoir être prolongé au-delà de $r = r_S$. Historiquement, cette idée a eu du mal à émerger car il fallait avoir compris la notion de variété différentiable qui ne privilégie aucun système de coordonnées.

A partir des expressions obtenues pour les géodésiques radiales, nous définissons les coordonnées $(\tau, \chi, \theta, \varphi)$ par

$$r(\tau, \chi) = \frac{r_S}{a}(\chi - \tau)^{2/3}$$

$$x^0(\tau, \chi) = \tau - 3a(\chi - \tau)^{1/3} - \frac{3}{2}a^{3/2} \ln \left[\frac{(\chi - \tau)^{1/3} - \sqrt{a}}{(\chi - \tau)^{1/3} + \sqrt{a}} \right]$$

définies pour $\chi - \tau > a^{3/2}$ correspondant à $r > r_S$. Ce changement de coordonnées permet d'écrire la métrique statique de Schwarzschild sous la forme due à Lemaître en 1933

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{a}{(\chi - \tau)^{2/3}} d\chi^2 + \left(\frac{r_S}{a}\right)^2 (\chi - \tau)^{4/3}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Nous constatons que les composantes de la métrique ne sont plus singulières en $\chi - \tau = a^{3/2}$. Par conséquent, cette métrique ainsi obtenue est encore une solution du vide pour $\chi - \tau < a^{3/2}$. A quelle source gravitationnelle peut-elle correspondre ?

8.2 Effondrement gravitationnel d'une boule de fluide à pression nulle

Puisqu'il ne peut exister de solution intérieure statique raccordable à la métrique de Schwarzschild pour $r_0 < r_S$, nous considérons une boule de fluide en effondrement gravitationnel. Nous prenons une boule de fluide à pression nulle possédant la symétrie sphérique. On suppose le fluide homogène. Elle va s'effondrer suivant un scénario étudié dès 1939 par Oppenheimer et Snyder. La métrique extérieure est nécessairement la métrique de Schwarzschild. Le mouvement de chaque point de la surface de la boule est une géodésique radiale de la métrique de Schwarzschild. Nous nous limitons au cas où la vitesse à l'infini est nulle. Dans les coordonnées $(\tau, \chi, \theta, \varphi)$, son histoire est décrite par une hypersurface d'équation $\chi = \chi_0$. Cependant par le choix d'une constante additive pour τ, nous pouvons pour simplifier prendre $\chi_0 = r_S/a$. Nous décrivons l'espace-temps complet à l'aide d'une métrique extérieure et d'une métrique intérieure.

1. La métrique extérieure pour $\chi > \chi_0$, déjà introduite, s'écrit

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{r_S}{\chi_0(\chi - \tau)^{2/3}} d\chi^2 + \chi_0^2(\chi - \tau)^{4/3}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{avec} \quad \chi_0 = \left(\frac{9}{4} r_S\right)^{1/3}.$$

   Le tenseur de Riemann de cette métrique a une singularité en $\tau = \chi$. Nous limitons donc la variation des coordonnées par $\tau < \chi$.

2. La métrique intérieure pour $0 \leq \chi \leq \chi_0$ s'écrit

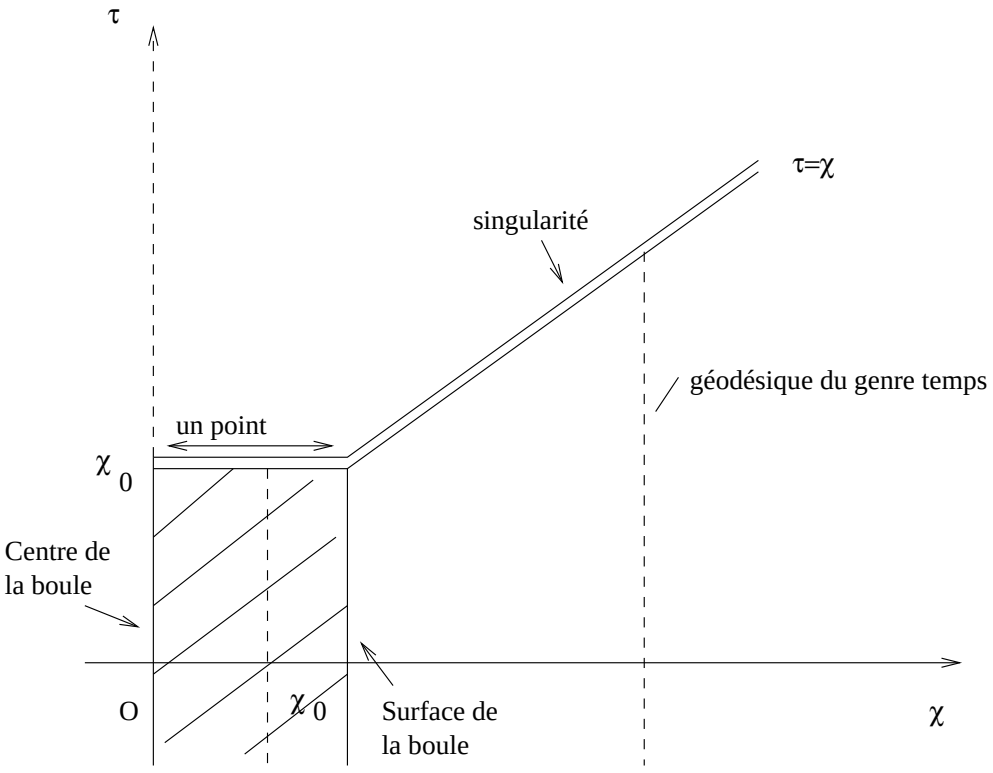
$$ds^2 = -d\tau^2 + (\chi_0 - \tau)^{4/3} \left[d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] .$$

Cette dernière décrit un fluide sans pression de densité de masse ρ donnée par

$$\frac{8\pi G}{c^2} \rho = \frac{4}{3(\chi_0 - \tau)^2}$$

et de composantes de la quadri-vitesse $u^\mu = \delta^\mu_0$. Le tenseur de Riemann de la métrique est singulier en $\tau = \chi_0$. Nous limitons donc la variation des coordonnées par $\tau < \chi_0$. Nous remarquons que $\tau = \chi_0$ est en un point pour la métrique induite sur les hypersurfaces $\tau =$ const. puisque l'aire des sphères $\chi = \chi_0$, $4\pi\chi_0^2(\chi_0 - \tau)^{4/3}$, devient nulle pour cette valeur.

Les composantes de la métrique sont continues en $\chi = \chi_0$ mais ne sont pas différentiables. Cependant, on peut vérifier que les courbures extrinsèques coïncident en $\chi = \chi_0$.



Nous avons donc trouvé une solution des équations d'Einstein et nous allons examiner les propriétés globales de l'espace-temps correspondant. La métrique extérieure est la métrique de Schwarzschild prolongée en-dessous de $\chi - \tau = (r_S/\chi_0)^{3/2}$ jusqu'en $\chi - \tau = 0$. Evidemment dans cette partie de l'espace-temps extérieure la métrique n'est plus statique. Les lignes d'univers $\chi =$ const., $\chi > \chi_0$, sont des géodésiques de temps propre τ. Elles atteignent la singularité de l'espace-temps extérieure en un temps propre fini.

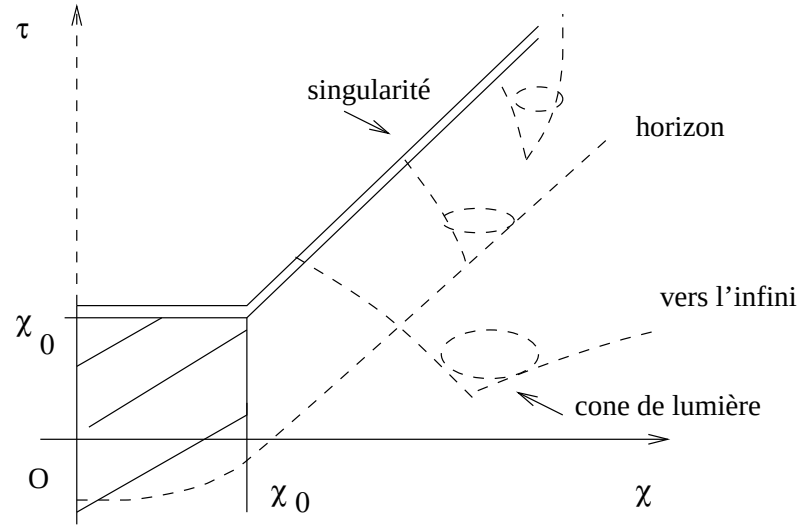
Examinons maintenant les géodésiques radiales du genre lumière paramétrées par λ. Elles satisfont l'équation

$$-\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r_S}{\chi_0(\chi-\tau)^{2/3}}\left(\frac{d\chi}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

Nous nous intéressons à la trajectoire $\tau(\chi)$ qui est obtenue par l'équation

$$\frac{d\tau}{d\chi} = \pm\left(\frac{r_S}{\chi_0}\right)^{1/2}\frac{1}{(\chi-\tau)^{1/3}}.$$

Les signes $\pm$ correspondent respectivement aux rayons lumineux sortants et entrants. Il y



a une solution particulière pour l'équation avec le signe + qui est

$$\chi = \tau + \left(\frac{r_S}{\chi_0}\right)^{3/2}.$$

L'analyse des solutions montre que les rayons sortants avec $\chi-\tau > (r_S/\chi_0)^{3/2}$ sont tels que $d\tau/d\chi < 1$ et ils atteignent l'infini. Dans le cas contraire, les rayons tombent en revanche vers la singularité puisque $d\tau/d\chi > 1$. Les rayons entrants quant à eux arrivent toujours jusqu'à la singularité. Il en sera de même pour les trajectoires non radiales de la lumière.

Cela nous conduit à étudier les hypersurfaces $\chi - \tau = \text{const}$. Le vecteur normal n_μ a pour composantes $(-1, 1, 0, 0)$; sa norme est

$$n^\mu n_\mu = -1 + \frac{\chi_0}{r_S}(\chi-\tau)^{2/3}.$$

Cette expression nous permet d'insister sur le fait que l'hypersurface $\chi-\tau = 0$ est du genre espace et que l'espace-temps s'arrête là puisque le tenseur de Riemann devient singulier.

Nous voyons que l'hypersurface $\chi - \tau = (r_S/\chi_0)^{3/2}$ est du genre lumière. Le vecteur n^μ est dans cette hypersurface et il est alors le vecteur de propagation de la lumière pour la solution particulière. Cette hypersurface, qui sépare une région de l'espace-temps qui n'est pas visible pour un observateur à l'infini, est appelée un horizon des événements ou simplement un horizon. Dans l'espace-temps statique de Schwarzschild elle correspond à $r = r_S$, lui donnant une interprétation nouvelle. Mais ceci ne peut être vu que dans des coordonnées où les composantes de la métrique sont régulières à l'horizon.

8.3 Trou noir de Schwarzschild

Nous allons maintenant décrire la métrique extérieure encore dans un autre système de coordonnées. Conservant θ et φ, nous définissons v et r en fonction de τ et χ par

$$\tau = v - r + 2\sqrt{rr_S} - 2r_S \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r_S}),$$

$$\chi = v - r + 2\sqrt{rr_S} - 2r_S \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r_S}) + \frac{2r^{3/2}}{3\sqrt{r_S}}$$

Nous vérifions que r est la coordonnée radiale de Schwarzschild. Il est bien défini pour $\tau < \chi$. Il conduit après un long calcul à l'expression suivante de la métrique

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dv^2 + 2drdv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

régulière pour $r > 0$ [1], la singularité $\chi - \tau = 0$ correspondant à $r = 0$. L'horizon est l'hypersurface du genre lumière d'équation $r = r_S$. Nous notons que les courbes $v = \text{const.}$ sont des géodésiques radiales entrantes du genre lumière.

Dans l'ouvert de l'espace-temps extérieur défini par $r > r_S$, nous savons déjà qu'il s'agit de la métrique statique de Schwarzschild. Il suffit de faire le changement de coordonnée

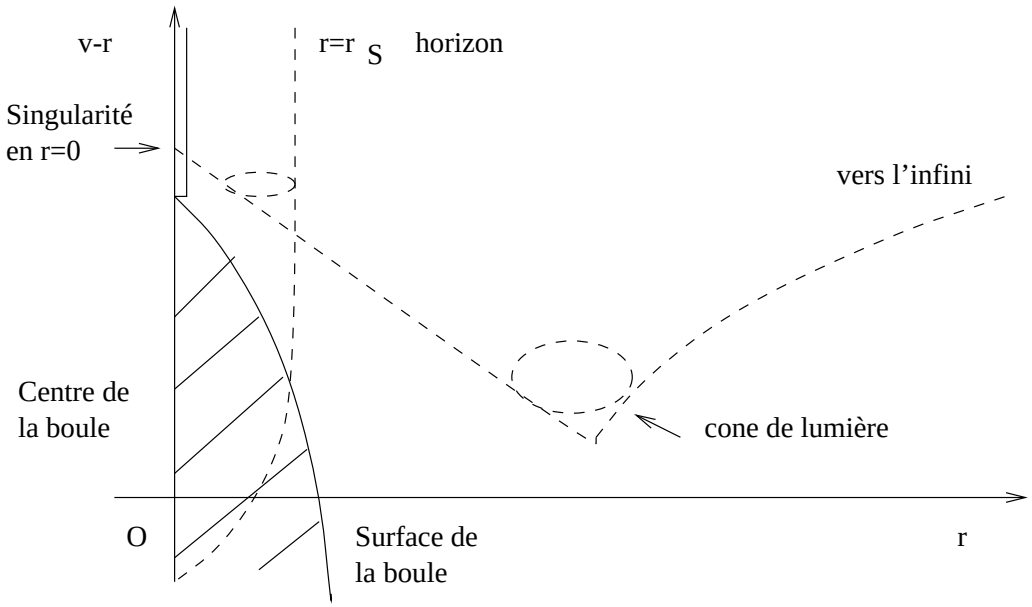
$$x^0 = v - r - r_S \ln(r - r_S) \quad \text{pour} \quad r > r_S,$$

qui exprime simplement la coordonnée v en fonction de x^0 et r.

Nous venons donc de construire une solution complète des équations d'Einstein qui représente l'effondrement gravitationnel d'une boule de fluide à pression nulle. Cet espace-temps admet un horizon, un horizon futur, au-delà duquel un observateur à l'infini ne peut plus voir la surface du corps en effondrement. C'est une définition générale pour tout espace-temps et son existence est une propriété globale de celui-ci. C'est ce qu'on appelle un trou noir [2]. Cependant un observateur à la surface de ce corps pourra traverser l'horizon sans encombre et survivre jusqu'à la singularité du tenseur de Riemann.

[1] En dépit du fait que la composante g_{vv} s'annule en $r = r_S$.

[2] *black hole* en anglais, mot introduit en 1968.



De façon à comprendre, nous indiquons sans preuve l'expression de la luminosité l de l'effondrement gravitationnel pour un observateur statique à l'infini

$$l \propto \exp\left(-\frac{2x^0}{3\sqrt{3}r_S}\right).$$

Pour l'observateur à l'infini il y a bien un trou noir, en principe asymptotiquement dans son temps x^0, mais en fait très rapidement [3].

8.4 Extension maximale de Kruskal

On dit qu'un espace-temps a une extension maximale si chaque géodésique est définie pour toutes les valeurs du paramètre affine excepté si elle se termine sur une singularité du tenseur de Riemann.

L'espace-temps statique de Schwarzschild doit être étendu puisque les géodésiques du genre temps arrivent, comme nous venons de le voir, en un temps propre fini à l'horizon $r = r_S$. En revanche, l'espace-temps décrivant une boule de poussière en effondrement gravitationnel ne peut plus être étendu puisque les géodésiques radiales aboutissent à une singularité du tenseur de Riemann.

Nous allons montrer comment on peut étendre analytiquement un espace-temps, en l'occurrence celui de Schwarzschild. Nous introduisons le temps retardé u et le temps avancé v de la métrique statique de Schwarzschild par

$$u = x^0 - r - r_S \ln(r - r_S) \quad \text{et} \quad v = x^0 + r + r_S \ln(r - r_S).$$

[3] Pour un trou noir d'une masse solaire $r_S/c \simeq 10^{-5}$ s.

Les courbes $u = \text{const.}$ sont les géodésiques radiales sortantes du genre lumière. Ces coordoonnées permettent d'écrire la métrique sous la forme

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) du dv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

dans laquelle r est défini par $v - u = 2r + 2r_S \ln(r - r_S)$ tel que $r > r_S$. Introduisons maintenant les coordonnées U et V par

$$U = -\exp\left(-\frac{u}{2r_S}\right) \quad \text{et} \quad V = \exp\left(\frac{v}{2r_S}\right)$$

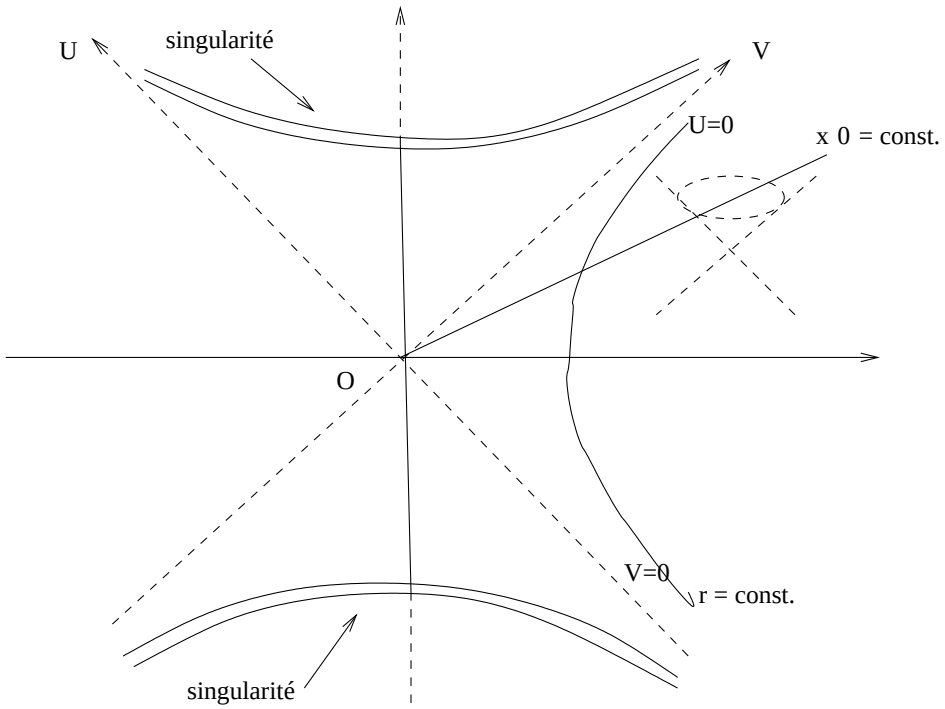
dont le domaine de variation est $U < 0$ et $V > 0$. La métrique devient

$$ds^2 = -\frac{4r_S^2}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_S}\right) dU dV + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

avec r fonction implicite de UV.

Nous constatons que les composantes de la métrique sont régulières en $r = r_S$. Nous prolongeons donc le domaine de variation de U et de V à $U > 0$ et $V < 0$ en gardant la même forme fonctionnelle en U et V des composantes. Elle sera encore une solution des équations d'Einstein du vide.

Nous avons obtenu l'extension maximale de Kruskal. Les trajectoires radiales des rayons



lumineux sont les droites à 45° définies par $U = \text{const}$ ou $V = \text{const}$. La singularité du

tenseur de Riemann est en $r(UV) = 0$ qui est constitué de deux hyperboloïdes du genre espace. Nous voyons que $U = 0$ ou $V = 0$ correspondent à $r(UV) = r_S$. La topologie de l'espace-temps de Kruskal est $\mathbb{R}^2 \times S^2$.

Maintenant, les différents ouverts de l'extension maximale de Kruskal admettent les interprétations suivantes.

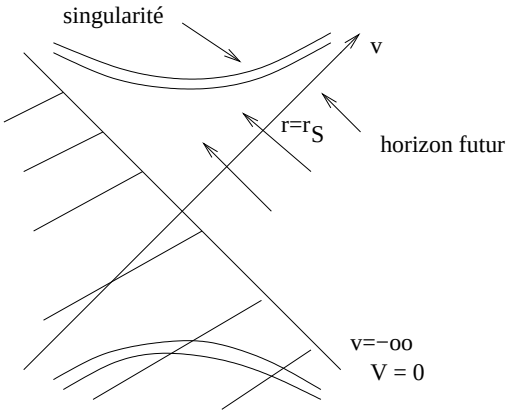
1. L'ouvert $V > 0$ dans lequel en posant

$$V = \exp\left(\frac{v}{2r_S}\right),$$

nous obtenons la métrique

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

que nous avons déjà rencontrée. Nous rappelons que $-\infty < v < \infty$ et $r > 0$. La matière et la lumière ne peuvent pénétrer qu'à travers l'hypersurface $U = 0$ correspondant à $r = r_S$. Cette hypersurface du genre lumière est l'horizon futur. On parle de trou noir. C'est le cas de l'espace-temps extérieur de la boule de fluide en effondrement gravitationnel.



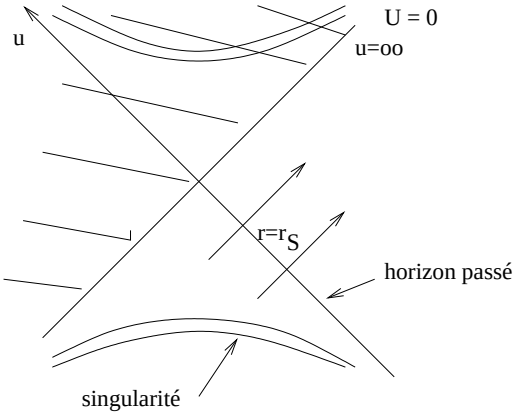
2. L'ouvert $U < 0$ dans lequel en posant

$$U = -\exp\left(-\frac{u}{2r_S}\right),$$

nous obtenons la métrique

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

La matière et la lumière ne peuvent sortir que de l'hypersurface du genre lumière $V = 0$. Il y a un horizon passé. On parle de trou blanc.



3. L'ouvert $U < 0$ et $V > 0$ qui coïncide avec l'espace-temps statique de Schwarzschild par les formules que nous avons déjà indiquées. Le vecteur de Killing ∂_0 qui est orienté dans le temps dans cet ouvert, précédemment noté ξ, devient isotrope sur les horizons futur et passé. Il s'annule sur la sphère définie par $U = 0$ et $V = 0$.
4. L'ouvert $U > 0$ et $V < 0$ qui est encore l'espace-temps statique de Schwarzschild.

Jusqu'à preuve du contraire cette extension maximale de Kruskal n'a pas de signification physique. Quand on parle de trou noir, on pense à la formation d'un horizon futur par effondrement gravitationnel.

Au voisinage de la singularité du tenseur de Riemann, la théorie classique de la gravitation d'Einstein n'est certainement plus valable mais ceci ne devrait pas avoir d'influence sur l'existence de l'horizon.

En ce qui concerne l'observation d'un trou noir, il n'y a que des candidats en astrophysique. On se contente souvent de dire qu'il aurait un objet de petite taille avec une masse supérieure aux masses d'équilibre statique. Il est difficile d'observer des phénomènes physiques spécifiques de la présence d'un horizon. On peut penser pour en voir aux disques d'accrétion qui devraient se former autour d'un trou noir.

On envisage des trous noirs supermassifs de 10^6 à 10^{10} masses solaires dans des noyaux de galaxies. On envisage également des trous noirs de 7 à 20 masses solaires formant un système binaire avec une étoile. L'opinion générale est qu'on en a déjà observé. C'est le cas des sources X binaires dont un candidat célèbre est depuis 1972 Cygnus X-1 avec un objet compact d'environ 7 masses solaires. Beaucoup plus récemment, la découverte d'une étoile en orbite proche du centre de notre galaxie a permis d'évaluer une masse de $2,6 \times 10^6\ m_\odot$ au centre de notre galaxie.

Leur importance en astrophysique peut être considérable. Ils peuvent avoir une très grande masse par accrétion de matière. Ils engendrent ainsi un champ gravitationnel fort et par suite ils peuvent provoquer de grands dégagements d'énergie dans leur voisinage.

Chapitre 9

Généralités sur les trous noirs

9.1 Diagramme de Carter-Penrose

Le diagramme de Carter-Penrose a été introduit pour clarifier ce qu'on entend par "infini" d'un espace-temps einsteinien. Nous remarquons tout d'abord que la structure causale pour la métrique $g_{\mu\nu}$: cône de lumière, orientation dans le temps et direction vers le futur n'est pas affectée par l'introduction d'un facteur conforme pour la métrique

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2(x) ds^2 \quad \text{avec} \quad \Omega \neq 0,$$

conduisant à une métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$ qui bien sûr n'est pas physique. Nous allons choisir Ω de telle sorte que l'infini devienne une frontière régulière pour la métrique conforme.

Tout d'abord, examinons l'espace-temps minkowskien. Avec le temps retardé $u = x^0 - r$ et le temps avancé $v = x^0 + r$, la métrique minkowskienne s'écrit

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v-u)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

puisque $r = (v-u)/2$. Effectuons le changement de coordonnées

$$u = \tan\tilde{U} \quad \text{et} \quad v = \tan\tilde{V} \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \tilde{U} < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < \tilde{V} < \frac{\pi}{2}$$

où $\tilde{V} \geq \tilde{U}$ puisque $r \geq 0$. A l'aide de la formule $\tan\tilde{V} - \tan\tilde{U} = \sin(\tilde{V}-\tilde{U})/\cos\tilde{V}\cos\tilde{U}$, la métrique prend la forme

$$ds^2 = \frac{1}{(2\cos\tilde{U}\cos\tilde{V})^2}\left[-4d\tilde{U}d\tilde{V} + \sin^2(\tilde{V}-\tilde{U})\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right].$$

L'infini correspond bien à des coordonnées $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ finies et cela est suffisant pour dessiner le diagramme de Carter-Penrose. Cependant, cela est insuffisant pour une étude mathématique car les composantes de la métrique sont irrégulières en ces points. L'introduction du facteur $\Omega = 2\cos\tilde{U}\cos\tilde{V}$ conduit à une métrique conforme régulière en ces points

$$d\tilde{s}^2 = -4d\tilde{U}d\tilde{V} + \sin^2(\tilde{V}-\tilde{U})\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

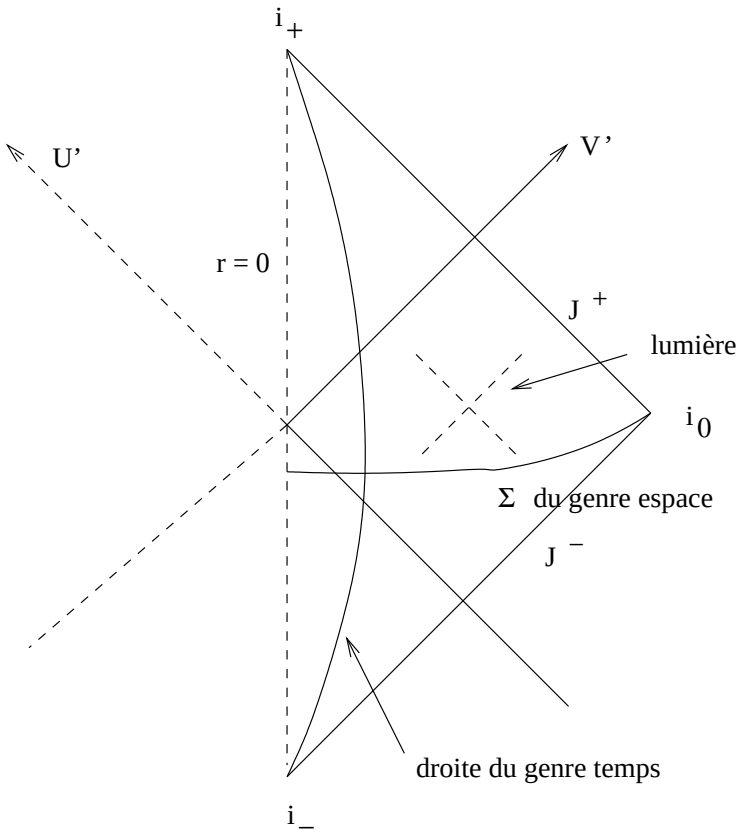
que nous considérons comme celle de la variété différentiable $\mathbb{R}\times S^3$ [1] dans laquelle l'espace-temps minkowskien est un ouvert. La frontière définit alors l'infini de l'espace-temps minkowskien. Nous avons tout d'abord les hypersurfaces $\mathcal{J}^{\pm}$ [2] :

1. L'infini isotrope passé $\mathcal{J}^-$

$$\tilde{U} = -\frac{\pi}{2} \quad |\tilde{V}| \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow r \to \infty \quad v \text{ fini},$$

2. L'infini isotrope futur $\mathcal{J}^+$

$$|\tilde{U}| \neq \frac{\pi}{2} \quad \tilde{V} = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad r \to \infty \quad u \text{ fini}.$$



Nous remarquons que les hypersurfaces $\mathcal{J}^{\pm}$ ont pour équation $\Omega = 0$ dans la métrique conforme. Le vecteur normal $\partial_\mu\Omega$ vérifie $\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega = 0$. Ainsi $\mathcal{J}^{\pm}$ sont des hypersurfaces du genre lumière. Dans le diagramme de Carter-Penrose, la lumière se propage suivant des droites à 45° [3]. La partie $\mathcal{J}^-$ permet d'étudier le rayonnement entrant, caractérisé par des

[1] Avec le changement de coordonnées $\eta = \tilde{V} + \tilde{U}$ et $\chi = \tilde{V} - \tilde{U}$, on a $d\tilde{s}^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ avec $-\pi < \eta < \pi$ et $0 \leq \chi < \pi$.

[2] La lettre $\mathcal{J}$ dénote *script I* et se prononce *scri* en anglais.

[3] Attention, un rayon entrant devient un rayon sortant en traversant $r = 0$.

fonctions de (v, θ, φ) et la partie $\mathcal{J}^+$ le rayonnement sortant, caractérisé par des fonctions de (u, θ, φ).

Nous avons également :

1. l'infini spatial i_0
$$\tilde{U} = -\frac{\pi}{2} \quad \tilde{V} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow r \to \infty \quad x^0 \text{ fini},$$
2. l'infini passé ou futur $i_\pm$
$$\tilde{U} = \pm\frac{\pi}{2} \quad \tilde{V} = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x^0 \to \pm\infty \quad r \text{ fini}.$$

Passons maintenant à l'espace-temps statique de Schwarzschild. A l'aide du temps retardé u et du temps avancé v déjà introduits, la métrique s'écrit

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) du dv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

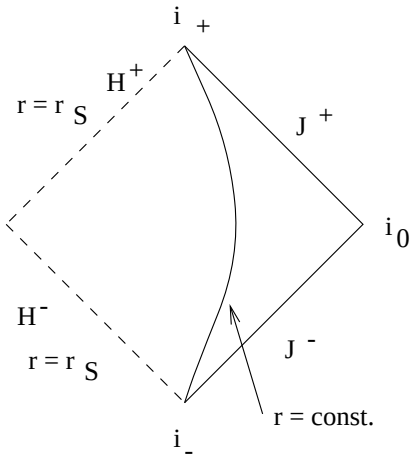
avec $r(u, v)$. Effectuons le changement de coordonnées $u = \tan\tilde{U}$ et $v = \tan\tilde{V}$. La métrique s'écrit

$$ds^2 = \frac{1}{(2\cos\tilde{U}\cos\tilde{V})^2}\left[-4\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d\tilde{U}d\tilde{V} + 4r^2\cos^2\tilde{U}\cos^2\tilde{V}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right].$$

Nous adoptons le facteur conforme $\Omega = 2\cos\tilde{U}\cos\tilde{V}$ et nous avons alors comme métrique conforme

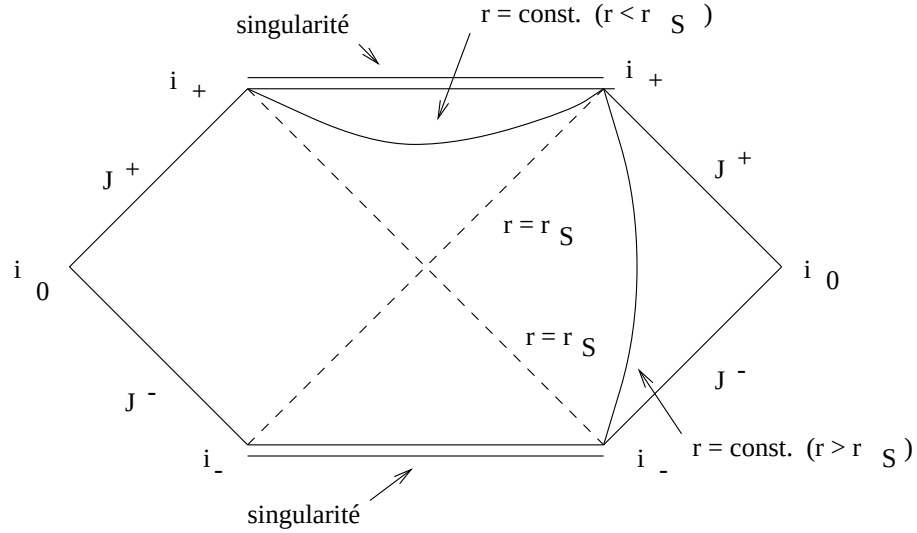
$$d\tilde{s}^2 = -4\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d\tilde{U}d\tilde{V} + \frac{r^2\sin^2(\tilde{V} - \tilde{U})}{[r + r_S\ln(r - r_S)]^2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Dans le diagramme de Carter-Penrose, les infinis i_0 et $\mathcal{J}^\pm$ se présentent exactement de la



même façon que dans l'espace-temps minkowskien. L'hypersurface $r = 0$, où le tenseur de Riemann est singulier, rencontre i_+ et i_- qui sont donc des points singuliers dans ce cas.

Les rayonnements entrants en $\mathcal{J}^-$ et sortants en $\mathcal{J}^+$ sont respectivement caractérisés par des fonctions de (v, θ, φ) et de (u, θ, φ). Les coordonnées u et v prennent toutes les valeurs et nous devons ajouter l'horizon futur $\mathcal{H}^+$ par $\tilde{U} = \pi/2$ et l'horizon passé $\mathcal{H}^-$ par $\tilde{V} = -\pi/2$. Nous pouvons aussi obtenir le diagramme de Carter-Penrose de l'effondrement gravitationnel d'une boule de fluide. Par ailleurs, nous obtenons le diagramme de Carter-Penrose de l'espace-temps de Kruskal en prenant $U = \tan \tilde{U}$ et $V = \tan \tilde{V}$.



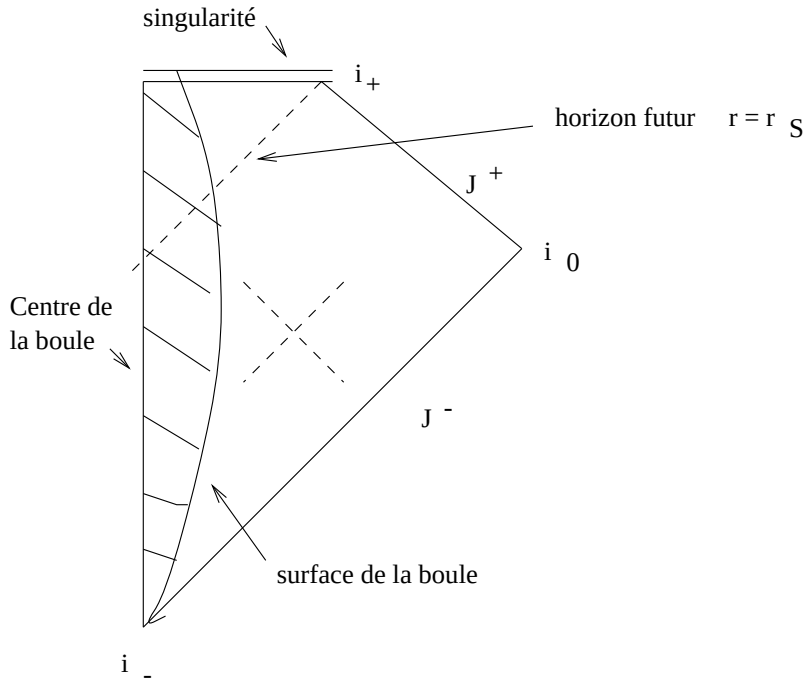
La caractérisation asymptotique de l'espace-temps de Schwarzschild que nous venons d'exhiber est postulée être celle d'un espace-temps einsteinien décrivant une distribution matérielle spatialement bornée. Soit $\mathcal{V}$ l'espace-temps muni de la métrique $g_{\mu\nu}$. Sans rigueur mathématique, nous disons qu'un espace-temps est asymptotiquement minkowskien à l'infini isotrope s'il existe une variété différentiable $\tilde{\mathcal{V}}$ munie d'une métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$ telle que $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\tilde{\mathcal{V}}$ avec frontière $\mathcal{J}$ avec les conditions suivantes

1. Il existe une fonction Ω sur $\tilde{\mathcal{V}}$ telle que $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ et $\Omega = 0$ sur $\mathcal{J}$ avec $\partial_\mu \Omega \neq 0$ sur $\mathcal{J}$.
2. La métrique $g_{\mu\nu}$ est une solution du vide dans le voisinage de $\mathcal{J}$.
3. Les géodésiques du genre lumière aboutissant à $\mathcal{J}$ ont un paramètre affine non borné.

On démontre que $\mathcal{J}$ est constitué de deux hypersurfaces du genre lumière de $\tilde{\mathcal{V}}$, $\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega = 0$ sur $\mathcal{J}$, chacune ayant la topologie $\mathbb{R} \times S^2$. Ce sont $\mathcal{J}^+$ et $\mathcal{J}^-$.

En général, les géodésiques du genre lumière finissent en $\mathcal{J}^+$ ou commencent en $\mathcal{J}^-$. Cependant dans l'espace-temps décrivant l'effondrement gravitationnel d'une boule de fluide nous avons vu que certaines géodésiques du genre lumière n'atteignent pas $\mathcal{J}^+$.

9.2 Propriétés générales des trous noirs



On appelle horizon futur $\mathcal{H}^+$ d'un espace-temps asymptotiquement minkowskien à l'infini isotrope l'hypersurface du genre lumière qui est la frontière du domaine d'où aucune géodésique du genre lumière n'aboutit à $\mathcal{J}^+$. C'est la frontière du trou noir. Montrer qu'un espace-temps asymptotiquement minkowskien possède un horizon est difficile car c'est une propriété géométrique globale de celui-ci.

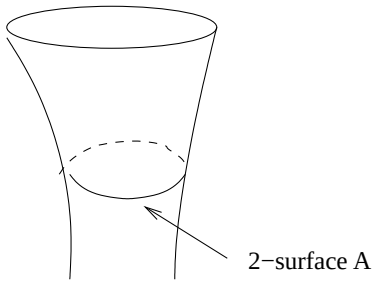
Ni la lumière, ni la matière ne peuvent sortir à travers l'horizon futur. Les phénomènes physiques à l'extérieur de l'horizon sont causalement déconnectés de l'intérieur. Les conditions aux limites à l'horizon sont choisies pour assurer la régularité des phénomènes physiques à l'horizon. Localement, un observateur ne peut pas savoir qu'il y a un horizon.

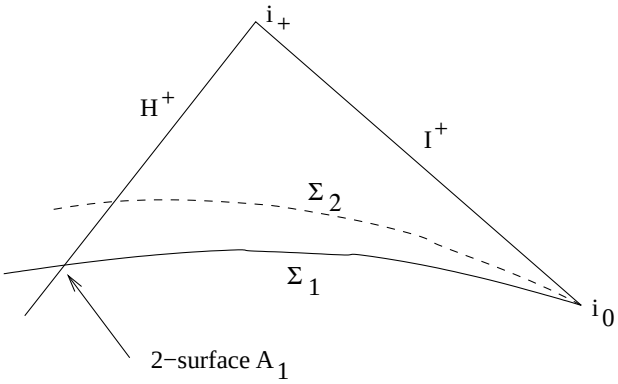
Dans le cas de l'espace-temps de Schwarzschild, nous remarquons que la singularité du tenseur de Riemann est située à l'intérieur de l'horizon. Cependant une singularité d'un espace-temps n'a aucune raison *a priori* d'être à l'intérieur d'un horizon mais une singularité nue serait bien osée du point de vue physique. Aussi on a conjecturé ce qu'on appelle l'hypothèse de censure cosmique : toute singularité sera à l'intérieur d'un horizon.

Il existe quelques grands théorèmes généraux sur les trous noirs.

Tout d'abord définissons la surface d'un trou noir. Soit Σ une hypersurface du genre espace. L'intersection de l'horizon futur $\mathcal{H}^+$ avec Σ est une 2-surface compacte A ou bien éventuellement est constituée de plusieurs 2-surfaces compactes. La métrique induite sur celles-ci par la métrique de l'espace-temps est riemannienne. Nous pouvons évaluer leur aire $\mathcal{A}$ relative à Σ. Pour le trou noir de Schwarzschild décrit dans les coordonnées (v, r, θ, φ), nous pouvons par exemple prendre l'hypersurface du genre espace $v - r = \text{const.}$ mais ceci n'a pas d'importance. Nous trouvons $\mathcal{A} = 4\pi r_S^2$. Ce sont les surfaces du trou noir qui permettent de représenter l'évolution de l'horizon du trou noir comme l'histoire de ces

2-surfaces.

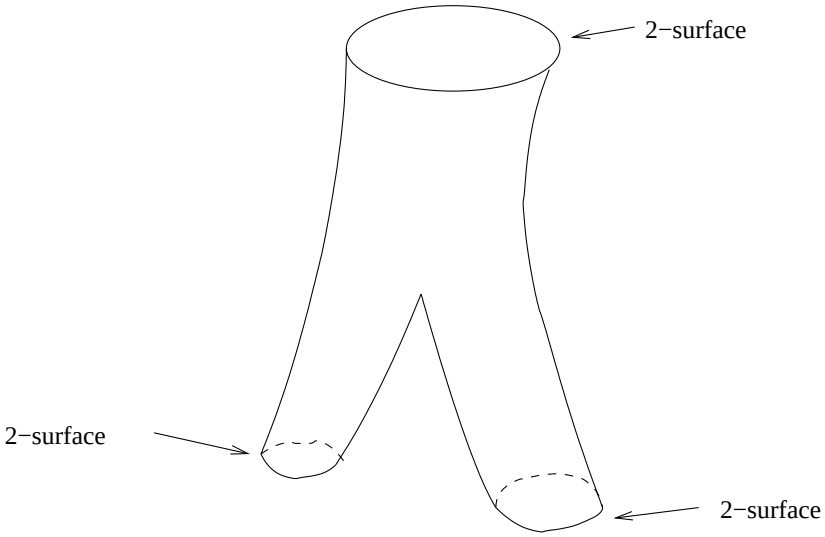




Soit Σ_1 et Σ_2 deux hypersurfaces du genre espace avec Σ_2 dans le futur de Σ_1. En exigeant que la matière présente dans l'espace-temps satisfasse la condition d'énergie faible, et sous diverses hypothèses, on démontre que

$$\mathcal{A}_2 \geq \mathcal{A}_1.$$

On dit que l'aire d'un trou noir ne peut pas décroître au cours du temps. Il peut y avoir coalescence de deux trous noirs mais un trou noir ne peut pas bifurquer.



En nous limitant au plus simple, considérons un trou noir du vide avec un vecteur de Killing ξ asymptotiquement orienté dans le temps à l'infini spatial avec la normalisation $\xi^\alpha \xi_\alpha \to -1$. Ce trou noir est dit stationnaire avec un horizon futur $\mathcal{H}^+$. On démontre qu'il existe un vecteur de Killing k qui devient un vecteur normal isotrope de $\mathcal{H}^+$. On dit que $\mathcal{H}^+$ est un horizon de Killing. Dans ce cas stationnaire, il existe bien sûr l'horizon $\mathcal{H}^-$ qui possède les mêmes propriétés.

Si le trou noir est statique alors on a

$$k = \xi$$

avec ξ toujours orienté dans le temps. Sous cette hypothèse ceci prouve l'unicité du trou noir de Schwarzschild paramétrisé par un paramètre m. Si le trou noir n'est pas statique alors il existe un vecteur de Killing ζ orienté dans l'espace assurant que le trou noir est à symétrie axiale ; dans des coordonnées adaptées, on a $\zeta = \partial_\varphi$ avec $0 \leq \varphi < 2\pi$. De plus, on montre que

$$k = \xi + \Omega_H \zeta$$

où Ω_H est une constante. Ce théorème d'unicité montre que le trou noir stationnaire du vide est celui de Kerr que nous allons étudier dans la suite. Il est remarquable qu'il ne dépende que de deux paramètres m et a.

Puisque k est un vecteur de Killing, nous en déduisons immédiatement

$$k^\rho \nabla_\rho k_\mu = -\frac{1}{2} \partial_\mu \left(k^\rho k_\rho \right).$$

Regardons cette relation sur l'horizon $\mathcal{H}^+$. Le vecteur isotrope k est dans l'hypersurface $\mathcal{H}^+$ puisqu'il est proportionnel au vecteur normal isotrope n à $\mathcal{H}^+$. Dans $\mathcal{H}^+$ nous pouvons calculer $k^\rho \nabla_\rho k_\mu \mid_{\mathcal{H}^+}$ mais est-il un vecteur de $\mathcal{H}^+$? Il faut remarquer que $k^\rho k_\rho$ étant constant sur $\mathcal{H}^+$, nous avons $t^\mu \partial_\mu (k^\rho k_\rho) \mid_{\mathcal{H}^+} = 0$ pour tout vecteur tangent t^μ à $\mathcal{H}^+$. Cela implique que $\partial_\mu (k^\rho k_\rho) \mid_{\mathcal{H}^+}$ est proportionnel à n_μ. Par conséquent, nous avons

$$k^\nu \nabla_\nu k^\mu = \frac{\kappa}{c^2} k^\mu \quad \text{sur } \mathcal{H}^+$$

où κ s'appelle la gravité de l'horizon $\mathcal{H}^+$ [4]. Il est remarquable que la gravité de l'horizon κ soit une constante sur $\mathcal{H}^+$; nous l'admettrons.

Nous avons examiné un cas bien particulier celui de l'effondrement gravitationnel exactement à symétrie sphérique qui forme un trou noir de Schwarzschild comme état final. Existe-t-il d'autres solutions avec un horizon des équations d'Einstein du vide ? Certainement beaucoup mais on peut se demander vers quel état final évolue un effondrement gravitationnel non sphérique avec rotation. Il semble que l'état final soit un trou noir stationnaire. D'après les théorèmes précédents, il s'agit du trou noir de Kerr uniquement caractérisé par une masse et un moment cinétique. Ceci peut être résumé par un aphorisme de Wheeler : *a black hole has no hair*. Evidemment il faut démontrer la stabilité d'un tel effondrement car une petite perturbation ne doit pas s'amplifier et conduire à une fragmentation du corps.

9.3 Trou noir stationnaire de Kerr

[4] *Surface gravity of* $\mathcal{H}^+$ en anglais.

Il n'existe qu'un trou noir stationnaire du vide : celui de Kerr, découvert en 1963 dans un autre contexte. Dans le système de coordonnées (t, r, θ, φ), la métrique a pour expression

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 - \frac{4amr \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\varphi + \sin^2\theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 mr \sin^2\theta}{\Sigma}\right) d\varphi^2$$

où

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad \text{et} \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

qui est bien une métrique lorentzienne puisque son déterminant $-\Sigma^2 \sin^2\theta$ est négatif [5]. Elle est caractérisée par les deux paramètres m et a qui s'interprètent respectivement comme la masse et le moment cinétique par unité de masse $a = J/m$, dans les unités géométriques $c = 1$ et $G = 1$ [6]. La métrique statique de Schwarzschild s'obtient en posant $a = 0$. Le tenseur de Riemann est nul pour $m = 0$.

Considérons les hypersurfaces $r = \text{const}$. Elles ont pour vecteur normal n_μ de composantes $(0, 1, 0, 0)$ dont la norme au carré est g^{rr}. Vu l'expression de la métrique : $g^{rr} = \Delta/\Sigma$. Ainsi, ces hypersurfaces seront du genre lumière à un zéro de Δ. Les racines de Δ existent si et seulement si $m^2 - a^2 \geq 0$. Dans ce cas, nous trouvons les deux racines

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}.$$

Cependant, les composantes de la métrique de Kerr dans ce système de coordonnées ne sont pas régulières en $r = r_\pm$.

Pour pouvoir dire que l'hypersurface $r = r_+$ est un horizon il faut démontrer que l'espace-temps est régulier au voisinage de cette hypersurface. Pour cela, nous effectuons le changement de coordonnées

$$v = t + \int^r \frac{r'^2 + a^2}{\Delta(r')} dr' \quad \text{et} \quad \chi = \varphi + a \int^r \frac{1}{\Delta(r')} dr',$$

valable pour $r > r_+$. Nous obtenons alors la métrique dans les coordonnées (v, r, θ, χ)

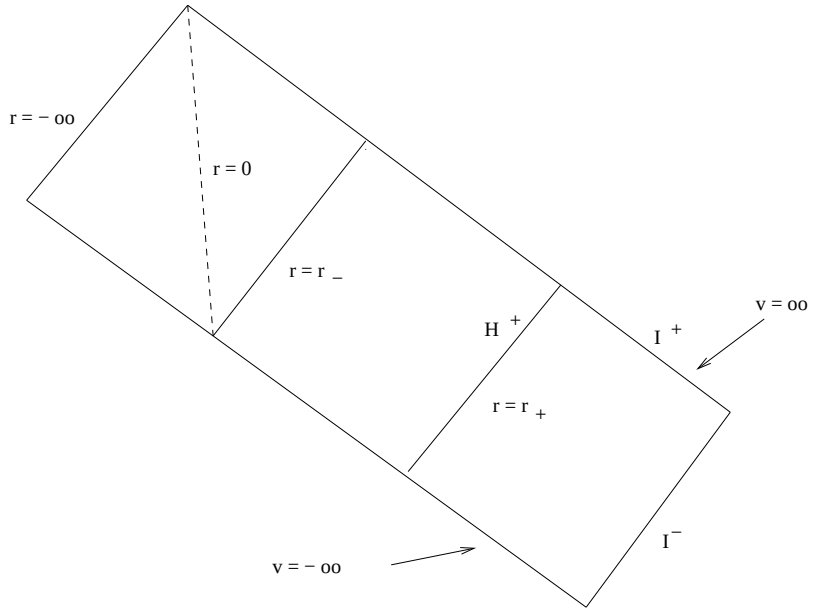
$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} dv^2 + 2dvdr - \frac{4mar \sin^2\theta}{\Sigma} dv d\chi - 2a \sin^2\theta d\chi dr$$
$$+ \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \sin^2\theta d\chi^2 + \Sigma d\theta^2.$$

Nous constatons que les composantes de cette métrique sont régulières en $r = r_+$. Cette métrique ainsi obtenue est encore une solution du vide pour $r < r_+$. Nous avons toujours $g^{rr} = \Delta/\Sigma$. L'hypersurface $r = r_+$ est un horizon futur $\mathcal{H}^+$ dans la carte (v, r, θ, χ). Ainsi, la métrique de Kerr, avec $m \geq |a|$, est un trou noir avec un horizon extérieur en $r = r_+$.

Revenons à la métrique de Kerr exprimée en coordonnées (v, r, θ, χ). Elle est régulière pour $-\infty < r < \infty$ excepté aux points $r = 0$ et $\theta = \pi/2$. Ces points forment un anneau où le tenseur de Riemann devient infini.

[5] Attention qu'avec cette notation $g_{t\varphi} = -2amr \sin^2\theta/\Sigma$.

[6] Nous justifierons ultérieurement cette interprétation.

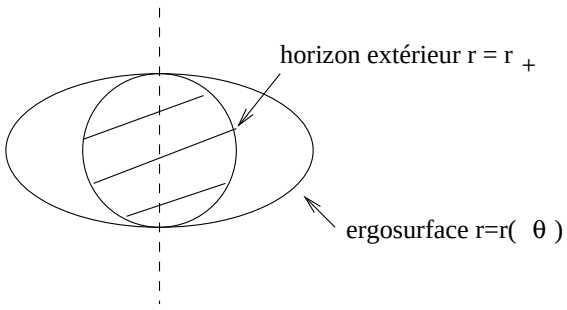


Nous ne ferons pas une analyse aussi complète que dans le cas de la métrique de Schwarzschild car une solution décrivant l'effondrement gravitationnel d'un corps fluide avec rotation n'est pas explicitement connue. En tout état de cause, nous ne nous préoccupons pas de savoir ce qui se passe après la formation de l'horizon extérieur $\mathcal{H}^+$. D'autre part, l'extension maximale de type Kruskal de la métrique de Kerr est très complexe.

Examinons les vecteurs de Killing de la métrique de Kerr pour $r > r_+$. Nous voyons que celle-ci possède deux vecteurs de Killing ∂_t et ∂_φ que nous notons ξ et ζ. Le vecteur ζ a pour norme au carré $g_{\varphi\varphi}$ qui est toujours positive. Il est donc toujours orienté dans l'espace avec une orbite fermée. En revanche, le vecteur ξ a pour norme au carré g_{tt} qui change de signe sur une hypersurface d'équation

$$r(\theta) = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

qu'on appelle l'ergosurface. Elle est du genre temps. Elle limite le domaine de stationnarité par rapport à l'infini. Ensuite jusqu'à l'horizon extérieur $r = r_+$ qui est une hypersurface du genre lumière, il y a l'ergorégion.



D'après les généralités sur les trous noirs stationnaires, le vecteur de Killing k isotrope sur l'horizon $\mathcal{H}^+$ ne peut être qu'une combinaison de ξ et ζ. Vérifions que k a l'expression

suivante

$$k = \xi + \Omega_H \zeta \quad \text{avec} \quad \Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}.$$

Dans le système de coordonnées régulier à l'horizon (v, r, θ, χ), notons tout d'abord que $\xi = \partial_v$ et $\zeta = \partial_\chi$ et ainsi que les composantes de k^μ sont $(1, 0, 0, \Omega_H)$. En $r = r_+$, les composantes k_μ sont $(0, k_r, 0, 0)$. Il en résulte que la norme de k est nulle sur l'horizon $\mathcal{H}^+$.

D'autre part, nous pouvons calculer la gravité de l'horizon extérieur

$$\kappa = \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2})}.$$

9.4 Processus d'extraction d'énergie

Le trou noir de Kerr permet des processus physiques inhabituels. Considérons une particule ponctuelle d'épreuve de masse μ avec la condition $\mu \ll m$. Sa quadri-vitesse u^μ est un vecteur orienté dans le temps et dirigé vers le futur. Son vecteur énergie-impulsion est alors $p^\mu = \mu u^\mu$. L'énergie, incluant l'énergie de masse, relative à un observateur de quadri-vitesse $\mathcal{O}^\mu$ dirigée vers le futur est définie par $E[\mathcal{O}] = -p_\alpha \mathcal{O}^\alpha$. Elle est positive. Pour un observateur stationaire à l'infini, elle est donnée par

$$E = -p_\alpha \xi^\alpha.$$

Cette particule chute dans le trou noir de Kerr et E est une constante du mouvement. Supposons que dans l'ergorégion, cette particule se désintègre en deux particules : l'une tombe dans le trou noir avec une énergie-impulsion p_1^α, et l'autre repart à l'infini avec une énergie-impulsion p_2^α. D'après la conservation de l'énergie-impulsion, nous avons

$$E = -p_{1\alpha}\xi^\alpha - p_{2\alpha}\xi^\alpha \quad \text{avec} \quad E_1 = -p_{1\alpha}\xi^\alpha \quad \text{et} \quad E_2 = -p_{2\alpha}\xi^\alpha.$$

Or dans l'ergorégion nous avons vu que ξ n'est plus orienté dans le temps, c'est pourquoi il se peut que dans certains cas on puisse choisir $p_{1\alpha}\xi^\alpha$ négatif. Cette particule entrant dans le trou noir a alors une quantité E_1 négative et celle allant à l'infini a une quantité E_2 plus grande que E. Ainsi, en envoyant une particule d'énergie E, nous pouvons éventuellement récupérer une particule avec une énergie E_2 plus grande que E. En principe, on peut extraire de l'énergie d'un trou noir suivant cette idée due à Penrose.

Bien sûr l'énergie extraite a pour origine une perte de masse du trou noir. Pour la particule entrant dans l'horizon, nous avons toujours $p_{1\alpha}k^\alpha < 0$ puisque p_1^α et k^α sont tous les deux dirigés vers le futur. Vu l'expression de k, nous en déduisons l'inégalité

$$-E_1 + \Omega_H L_1 < 0 \quad \text{avec} \quad L_1 = p_{1\alpha}\zeta^\alpha$$

où L_1 est le moment cinétique de la particule par rapport à l'axe Oz. Par ce procédé, on extrait aussi du moment cinétique du trou noir. Quand une particule entre dans l'horizon

$\mathcal{H}^+$, nous allons faire l'hypothèse qu'il y a un accroissement δm de la masse du trou noir et un accroissement δJ du moment cinétique donnés par $\delta m = E_1$ et $\delta J = L_1$. Exprimant Ω_H en fonction de m et de J par $J = ma$, nous obtenons

$$-\delta m + \frac{J\delta J}{2m(m^2 + \sqrt{m^4 - J^2}} < 0.$$

Dans un processus d'extraction d'énergie, ou non d'ailleurs, la variation de la masse m et du moment cinétique J du trou noir se fait de telle sorte que cette inégalité soit vérifiée.

On appelle masse irréductible m_{irr} la quantité définie par

$$m_{irr}^2 = \frac{1}{2}\left(m^2 + \sqrt{m^4 - J^2}\right)$$

et notre inégalité durant ce processus se traduit par

$$\delta m_{irr} > 0.$$

Ce qui a été vu dans ce cas très particulier, nous allons maintenant considérer qu'il s'agit d'une loi générale lors de la transformation des paramètres du trou noir de Kerr durant un processus physique : $\delta m_{irr} \geq 0$. Ainsi, l'énergie totale que l'on peut extraire par un processus physique qui fait diminuer la masse m est $m - m_{irr}$. Nous notons que dans le cas du trou noir de Schwarzschild $m = m_{irr}$ et qu'il n'y a pas d'extraction d'énergie possible.

La surface du trou noir de Kerr se définit naturellement. Il suffit par exemple de prendre l'intersection avec les hypersurfaces du genre espace $v - r = \text{const.}$ dans le système de coordonnées dans lequel les composantes de la métrique sont régulières. La métrique riemannienne induite sur cette surface est

$$dS_+^2 = (r_+^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + \frac{r_+^2 + a^2)^2}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta d\varphi^2.$$

L'aire de la surface du trou noir est donc

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r_+^2 + a^2)\sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 16\pi m_{irr}^2.$$

Nous préférons pour exprimer les résultats précédents employer l'aire $\mathcal{A}$ du trou noir au lieu de m_{irr}. Nous trouvons qu'ils peuvent être récrits sous la forme

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi}d\mathcal{A} + \Omega_H dJ \quad \text{et} \quad d\mathcal{A} \geq 0.$$

Ces formules s'appellent dans le cas général les lois de la mécanique des trous noirs. Elles donnent l'évolution infinitésimale possible entre deux trous noirs de Kerr due à un processus physique dans lequel la matière satisfait la condition d'énergie faible.

En fait, une interprétation thermodynamique est possible, suggérée par la formule classique $dU = TdS + dW$. On interprète ces formules comme la première et la deuxième loi

de la thermodynamique en identifiant m avec l'énergie interne U, κ avec la température T et $\mathcal{A}$ avec l'entropie S_{bh} suivant les formules

$$U = mc^2 \quad , \quad T = \frac{\hbar}{2\pi k_B c}\kappa \quad \text{et} \quad S_{bh} = \frac{k_B c^3}{4G\hbar}\mathcal{A} \quad \left(\text{ou} \quad \frac{S_{bh}}{k_B} = \frac{1}{4}\frac{\mathcal{A}}{\ell_P^2}\right)$$

où k_B est la constante de Boltzmann [7], en rétablissant les unités [8]. Cependant le facteur $1/4$ dans ces formules est fixé par la prédiction, due à Hawking en 1974 dans le cadre de la théorie quantique des champs dans un trou noir, du rayonnement de corps noir à la température T du trou noir. Il n'a bien sûr pas été observé. Le trou noir est à l'équilibre thermodynamique avec le rayonnement thermique à la température T.

En présence de matière avec une entropie S, la situation est plus complexe mais on postule la seconde loi généralisée de la thermodynamique : $S_{bh} + S$ jamais décroissant. Notons que par le rayonnement de Hawking il y a évaporation du trou noir avec $d\mathcal{A} \leq 0$ mais sans contradiction avec la thermodynamique car la diminution de l'entropie du trou noir est compensée par l'accroissement d'entropie du rayonnement thermique à l'extérieur [9].

[7] $k_B \simeq 1,38 \times 10^{-23}$ J . K^{-1}.

[8] Pour le trou noir de Schwarzschild, on a $T = \dfrac{\hbar c^3}{8\pi k_B G m}$ et pour m une masse solaire on trouve une température très faible $T \simeq 6 \times 10^{-8}$ K et une entropie très grande $S_{bh}/k_B \simeq 10^{77}$.

[9] La décroissance de $\mathcal{A}$ est quantique et par conséquent elle ne contredit pas les théorèmes de géométrie sur les trous noirs.

Chapitre 10

Théorie linéarisée de la relativité générale

10.1 Champ gravitationnel à l'approximation linéaire

Nous avons insisté sur le fait qu'il fallait déterminer simultanément la métrique $g_{\mu\nu}$ et le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ pour résoudre les équations d'Einstein puisque nous avons la loi de conservation covariante $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nous décrivions par cette méthode un milieu matériel auto-gravitant spatialement borné dont l'espace-temps einsteinien est asymptotiquement minkowskien. Nous avions mis en œuvre cette méthode pour trouver l'approximation newtonienne de la théorie d'Einstein. En langage newtonien, nous dirions que les forces gravitationnelles sont du même ordre de grandeur que les autres forces agissant sur le milieu.

Cependant, il existe des situations physiques où les forces gravitationnelles sont beaucoup plus faibles que les autres forces dues aux tensions dans le milieu, par exemple un solide en rotation. Dans ce cas, les équations du mouvement du milieu matériel ne sont pas affectées par le champ gravitationnel engendré par celui-ci. Elles se réduisent donc aux équations minkowskiennes du mouvement, caractérisées par $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ en coordonnées minkowskiennes.

Compte tenu des équations d'Einstein, la métrique engendrée sera une perturbation linéaire en G de la métrique minkowskienne. Cela signifie qu'il existe une classe de coordonnées privilégiées (x^μ), appelées quasi-minkowskiennes, telle que les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique diffèrent peu de la métrique minkowskienne. Nous posons

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \, .$$

Nous pouvons considérer les $h_{\mu\nu}$ comme les potentiels de gravitation dans un espace-temps minkowskien dans lequel $T^{\mu\nu}$ satisfait $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Cependant, cela ne veut pas dire qu'un observateur pourra adopter une interprétation physique en terme d'espace-temps minkowskien. Celle-ci devra se faire en revenant à la conception d'une métrique $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ d'un espace-temps einsteinien.

Le système de coordonnées quasi-minkowskiennes (x^μ) étant donné, le changement de système de coordonnées

$$x^{\nu'} = L^{\nu'}_{\mu} x^\mu + D^{\nu'} \quad \text{avec} \quad \eta_{\mu\nu} = L^{\rho'}_{\mu} L^{\sigma'}_{\nu} \eta_{\rho'\sigma'}$$

pourra être interprété comme une transformation de Poincaré du point de vue des coordonnées quasi-minkowskiennes. Par ce changement de coordonnées, la métrique devient

$$g_{\rho'\sigma'} = \eta_{\rho'\sigma'} + h_{\rho'\sigma'} \quad \text{avec} \quad h_{\rho'\sigma'} = L^{\mu}_{\rho'} L^{\nu}_{\sigma'} h_{\mu\nu}.$$

Nous voyons que les $h_{\mu\nu}$ constituent les composantes d'un champ de tenseurs symétriques pour ce type de transformation de Poincaré.

D'autre part, nous pouvons faire un changement de système de coordonnées proche de l'unité en posant

$$x^{\mu'} = \delta^{\mu'}_{\nu} x^\nu + \eta^{\mu'}(x^\nu) \quad \text{soit} \quad x^\mu = \delta^{\mu}_{\nu'}[x^{\nu'} - \eta^{\nu'}(x^{\nu'})] \quad \text{avec} \quad \eta^\mu(x^{\nu'}) = \eta^{\mu'}(x^\nu)$$

où les η^μ sont quatre fonctions arbitraires du même ordre de grandeur que les $h_{\mu\nu}$. Dans ce nouveau système de coordonnées quasi-minkowskiennes, la métrique s'écrit

$$h_{\mu'\nu'}(x^{\sigma'}) = h_{\mu\nu}(x^\sigma) - \partial_{\mu'}\eta_{\nu'} - \partial_{\nu'}\eta_{\mu'} \quad \text{avec} \quad \eta_{\mu'} = \eta_{\mu'\nu}\eta^\nu.$$

Mais à l'approximation linéaire en $h_{\mu\nu}$, nous pouvons dans cette formule prendre toutes les quantités au point x^σ. Par analogie avec l'électromagnétisme, oubliant qu'il s'agit d'un changement de système de coordonnées, nous l'interprétons comme une transformation de jauge au même point

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \eta_\nu - \partial_\nu \eta_\mu.$$

L'expression linéarisée du tenseur de Riemann, considéré maintenant comme un tenseur du point de vue des coordonnées quasi-minkowskiennes, est

$$R^{lin}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\rho\nu} h_{\mu\sigma} - \partial_{\rho\mu} h_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma\nu} h_{\mu\rho} + \partial_{\sigma\mu} h_{\nu\rho}\right).$$

On peut vérifier qu'elle est indépendante de la transformation de jauge η^μ.

Puisque $h_{\mu\nu}$ est un tenseur du point de vue des coordonnées minkowskiennes, nous pouvons monter et descendre les indices avec la métrique minkowskienne $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$. Nous vérifions que

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O\left((|\, h_{\mu\nu}\,|)^2\right),$$

en faisant attention au signe. On définit la trace $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$.

10.2 Equations d'Einstein linéarisées

Compte tenu de l'expression linéarisée du tenseur de Ricci, les équations d'Einstein linéarisées s'écrivent

$$R^{lin}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\Box h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\rho}h^{\rho}_{\nu} - \partial_{\nu\rho}h^{\rho}_{\mu} + \partial_{\mu\nu}h) = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T)$$

dans des coordonnées quasi-minkowskiennes. Nous vérifions directement sur cette expression que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Ces équations sont invariantes de jauge.

Nous allons profiter de l'invariance de jauge pour simplifier l'expression linéarisée du tenseur de Ricci. Nous choisissons une jauge pour laquelle

$$\partial_\rho(h^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu}h) = 0.$$

Elle s'appelle la jauge harmonique. Puisque $\sqrt{-g} = 1 + h/2 + O((\mid h_{\mu\nu} \mid)^2)$, elle est la linéarisation de la condition $\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0$ définissant les coordonnées harmoniques. Il faut noter que cette jauge ne fixe pas uniquement le système de coordonnées puisque nous pouvons encore faire une transformation de jauge avec des fonctions η_μ satisfaisant $\Box\eta_\mu = 0$.

Par conséquent, les équations d'Einstein linéarisées sont équivalentes au système

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T) \quad \text{et} \quad \partial_\rho(h^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu}h) = 0.$$

Une façon commode de les écrire est d'introduire les quantités

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h.$$

Les équations d'Einstein linéarisées sont alors équivalentes au système d'équations

$$\Box\gamma^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \partial_\rho\gamma^{\rho\mu} = 0.$$

Les $h_{\mu\nu}$ s'obtiennent ensuite par la formule

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma = \eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}.$$

Le vecteur énergie-impulsion de la distribution matérielle spatialement bornée est

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int T^{0\mu}d^3x.$$

P^μ est un vecteur constant puisque $\partial_0 T^{0\mu} + \partial_i T^{i\mu} = 0$. Par une transformation de Lorentz, nous pouvons choisir des coordonnées minkowskiennes telles que $P^i = 0$. La composante cP^0 est l'énergie mc^2. Le centre de masse du milieu matériel $a^i(x^0)$ est défini par l'intégrale

$$\int T^{00}(x^i - a^i(x^0))d^3x = 0.$$

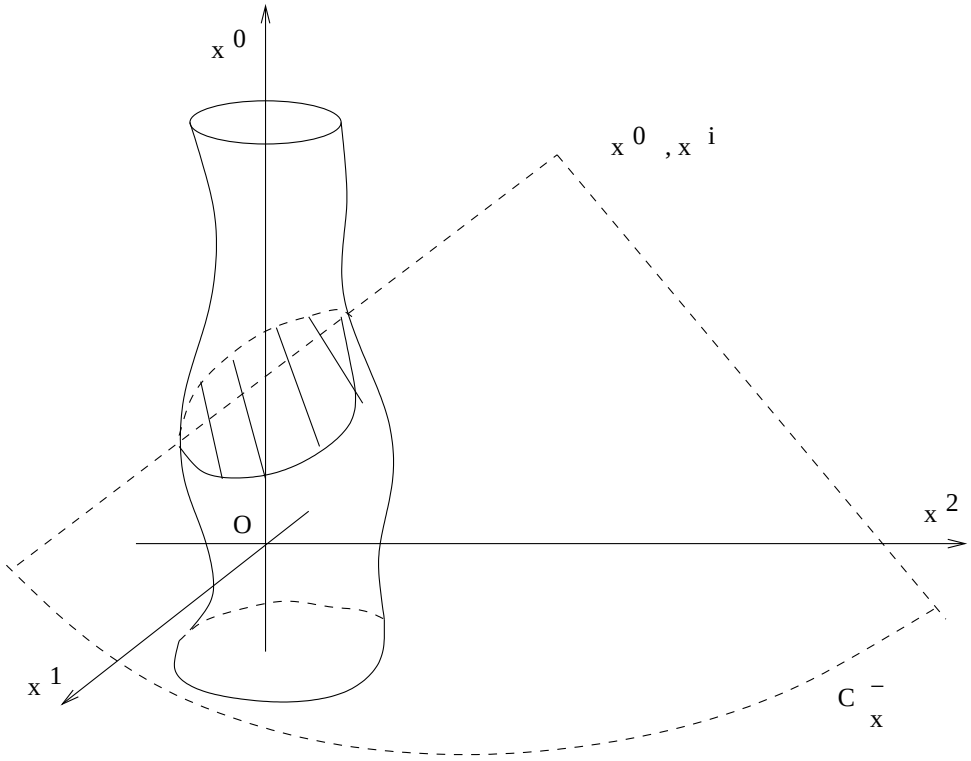
Nous voyons immédiatement que a^i est un vecteur constant car $P^i = 0$. En spécifiant encore les coordonnées minkowskiennes par une translation, nous pouvons prendre $a^i = 0$. Ainsi, nous avons trouvé un système de coordonnées minkowskiennes tel que le support spatial de la distribution matérielle reste borné autour de la ligne $x^i = 0$.

10.3 Solution retardée des équations d'Einstein linéarisées

Pour des raisons de causalité, nous adoptons la solution retardée du dalembertien pour résoudre les équations d'Einstein linéarisées. Sous forme intégrale, nous avons

$$\gamma^{\mu\nu}(x^0, x^i) = \frac{4G}{c^4} \int_{C_x^-} \frac{1}{R} T^{\mu\nu}(x^0 - R, X^i) d^3X \quad \text{avec} \quad R^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i - X^i)(x^i - X^i)$$

où C_x^- est le demi-cône de lumière passé issu du point (x^0, x^i). Pour un point (x^0, x^i) donné, l'intégration se fait sur l'intersection du demi-cône C_x^- et du tube d'univers spatialement borné de la distribution matérielle. Ceci la rend très difficile.



La solution retardée $\gamma^{\mu\nu}$ vérifiera automatiquement la condition de jauge harmonique puisque le tenseur énergie-impulsion est conservé. Ainsi, le système d'équations de la théorie linéarisée de la relativité générale sera satisfait.

Posant $r^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2$, nous avons le développement en $1/r$ suivant

$$R = r - \sum_{i=1}^{3} \xi^i X^i + O(\frac{1}{r}) \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\xi^i X^i}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

avec ξ^i le vecteur radial de norme 1 de composantes

$$\xi^i = \frac{x^i}{r}.$$

Dans le cas stationnaire, le tenseur énergie-impulsion ne dépend pas du temps x^0 et nous obtenons immédiatement le développement en $1/r$ de la solution retardée

$$\gamma^{\mu\nu}(x^i) = \frac{4G}{c^4 r}\int T^{\mu\nu}(X^i)d^3X + \frac{4G\xi^i}{c^4 r^2}\int T^{\mu\nu}(X^k)X^i d^3X + O(\frac{1}{r^3}).$$

Nous exprimons les intégrales dans le système de coordonnées où $P^i = 0$ et $a^i = 0$. En plus de la masse m déjà introduite, il apparaît le moment cinétique J^{ij} de la distribution matérielle défini par

$$J^{ij} = \frac{1}{c}\int \left(X^i T^{0j}(X^k) - X^j T^{0i}(X^k)\right) d^3X$$

qui est constant en vertu de la loi de conservation de $T^{\mu\nu}$. Nous obtenons alors

$$\gamma^{00}(x^i) = \frac{4Gm}{c^2 r} + O(\frac{1}{r^3}) \quad , \quad \gamma^{0i}(x^i) = -\sum_{i=1}^{3}\frac{2G\xi^j J^{ij}}{c^3 r^2} + O(\frac{1}{r^3}) \quad \text{et} \quad \gamma^{ij}(x^i) = O(\frac{1}{r^2}).$$

Cela conduit au dévelopement en $1/r$ des potentiels de gravitation

$$h_{00} = \frac{2Gm}{c^2 r} + O(\frac{1}{r^3}) \quad , \quad h_{0i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{2G\xi^j J^{ij}}{c^3 r^2} + O(\frac{1}{r^3}) \quad \text{et} \quad h_{ij} = \frac{2Gm}{c^2 r}\delta_{ij} + O(\frac{1}{r^2}).$$

Cette métrique est dite de Lense-Thirring. Nous retrouvons les termes linéaires en G de la métrique post-newtonienne pour un corps massif [1]. Cependant, nous avons en plus les composantes h_{0i} linéaires en G. Elle apparaît pour un corps massif en rotation et elle s'exprime à l'aide du moment cinétique usuel J^k par $J^{ij} = \epsilon^{ijk}J^k$. Elle est la linéarisation de la métrique de Kerr [2]. Il serait souhaitable de tester l'existence d'un tel potentiel de gravitation. Cela semble possible avec la mission satellitaire *Gravity Probe B*.

Lorsque le milieu matériel dépend du temps, l'étude des équations d'Einstein linéarisées permet de déterminer le terme asymptotique en $1/r$ des potentiels de gravitation. Loin de la distribution matérielle, nous avons

$$\gamma^{\mu\nu}(x^0, x^i) = \frac{4G}{c^4 r}\int_{C_x^-} T^{\mu\nu}(x^0 - R, X^i)d^3X + O(\frac{1}{r^2}).$$

Seules des méthodes numériques permettent d'évaluer l'intégrale retardée. Nous allons faire l'hypothèse que le milieu matériel varie lentement au cours du temps. Pour un mouvement

[1] Cela est compatible grâce à l'ordre de grandeur $\partial_\mu T^{\mu\nu} = O(G)$.

[2] Nous notons que $x^1dx^2dx^0 - x^2dx^1dx^0 = r^2\sin^2\theta d\varphi dx^0$; cela justifie pour le trou noir de Kerr que ma s'interprète comme GJ^3/c^3 où J^3 est la composante non nulle du moment cinétique sur Oz.

quasi-périodique de période $\mathcal{T}$, nous supposons que $a \ll c\mathcal{T}$ où a est la longueur typique du support spatial du milieu matériel. Nous notons que

$$x^0 - R = u + \sum_{i=1}^{3} \xi^i X^i + O(\frac{1}{r})$$

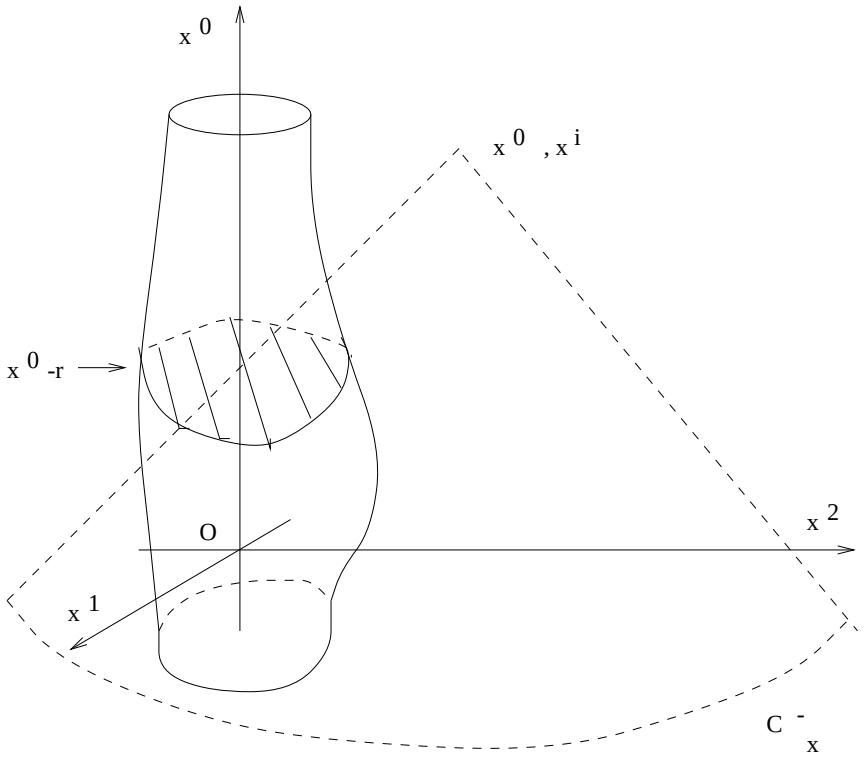
où u est le temps retardé $x^0 - r$. Cela nous permet de développer $T^{\mu\nu}$ en série de Taylor

$$T^{\mu\nu}(x^0 - R, X^i) = T^{\mu\nu}(u, X^i) + \partial_0 T^{\mu\nu}(u, X^k)\xi^i X^i + \frac{1}{2}\partial_{00} T^{\mu\nu}(u, X^k)(\xi^i X^i)^2 + \cdots + O(\frac{1}{r})$$

puisque $|\xi^i X^i| \ll c\mathcal{T}$. En reportant dans la solution retardée en $1/r$, nous obtenons

$$\gamma^{\mu\nu}(x^0, x^i) = \frac{4G}{c^4 r}\left(\int T^{\mu\nu}(u, X^i)d^3X + \xi^i \frac{d}{du}\int T^{\mu\nu}(u, X^k)X^i d^3X + \right.$$
$$\left. \xi^i\xi^j \frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}\int T^{\mu\nu}(u, X^k)X^i X^j d^3X\right) + O(\frac{1}{r}).$$

Les intégrales sont calculables car l'expression des $T^{\mu\nu}$ est prise à $X^0 = $ const. ayant la valeur u.



Nous considérons un milieu matériel usuel tel que

$$\frac{T^{0i}}{T^{00}} \approx \epsilon^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{T^{ij}}{T^{00}} \approx \epsilon$$

où ϵ est le paramètre déjà introduit, $\epsilon = v^2/c^2$. Compte tenu de la loi de conservation de $T^{\mu\nu}$, toutes les intégrales dominantes en $1/c$ se ramènent alors à cette intégrale

$$Q^{ij}(X^0) = \frac{1}{c^2}\int T^{00}(X^0, X^k)X^iX^jd^3X$$

qui est le moment quadrupolaire de masse puisque T^{00}/c^2 est la densité de masse ρ sous l'hypothèse d'un mouvement lent du milieu matériel. En particulier, nous avons l'identité

$$T^{ik} = \partial_s\left(\frac{1}{2}x^iT^{ks} + \frac{1}{2}x^kT^{is} + \frac{1}{2}x^ix^kT^{0s}\right) + \frac{1}{2}x^ix^k\partial_{00}T^{00}.$$

Après calcul, nous obtenons finalement les termes dominants en $1/c$ dans la partie en $1/r$ de la solution retardée

$$\gamma^{00}(x^0, x^i) = \frac{4Gm}{c^2r} + \frac{2G}{c^2r}\frac{d^2}{du^2}Q^{ij}(u)\xi^i\xi^j + \cdots,$$

$$\gamma^{0i}(x^0, x^i) = \frac{2G}{c^2r}\frac{d^2}{du^2}Q^{ij}(u)\xi^j + \cdots,$$

$$\gamma^{ij}(x^0, x^i) = \frac{2G}{c^2r}\frac{d^2}{du^2}Q^{ij}(u) + \cdots.$$

Ces expressions satisfont la condition de jauge harmonique à l'ordre requis en $1/r$.

Les potentiels de gravitation sont bien sûr des fonctions du type $f(u, \theta, \varphi)/r$ quand $r \to \infty$ puisque ξ^i s'expriment à l'aide de θ et φ. Cela est caractéristique d'un rayonnement sortant à $\mathcal{J}^+$ de l'espace-temps minkowskien. Nous avons donc un rayonnement quadrupolaire dominant quand le mouvement du milieu matériel est lent.

10.4 Onde plane gravitationnelle dans le vide

Dans un système de coordonnées (x^μ) quasi-minkowskiennes, les équations d'Einstein linéarisées du vide sont simplement

$$\Box\gamma^{\mu\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\mu\gamma^{\mu\nu} = 0$$

dans la jauge harmonique. Toute solution du dalembertien est une superposition d'ondes planes de la forme

$$\gamma^{\mu\nu}(u) \quad \text{avec} \quad u = -\eta_{\alpha\beta}k^\alpha x^\beta$$

où k^μ est le vecteur de propagation isotrope de composantes $(1, k^i)$. Puisque $\partial_\mu\gamma^{\alpha\beta} = -k_\mu\gamma^{\alpha\beta}$, la condition de jauge harmonique s'écrit

$$k_\mu\gamma^{\mu\nu} = 0.$$

On peut voir que le tenseur de Riemann linéarisé satisfait les conditions algébriques

$$R^{lin}_{\mu\nu\rho\sigma}k^\sigma = 0 \quad \text{et} \quad R^{lin}_{\mu\nu\rho\sigma}k_\tau + R^{lin}_{\mu\nu\sigma\tau}k_\rho + R^{lin}_{\mu\nu\tau\rho}k_\sigma = 0$$

qui caractérisent le rayonnement gravitationnel comme dans le cas électromagnétique. Il existe une solution du vide des équations d'Einstein, appelée onde plane gravitationnelle, dont la linéarisation conduit à cette solution linéarisée.

Nous allons montrer que l'on peut choisir une jauge harmonique telle que les nouveaux potentiels de gravitation $h^{TT}_{\mu\nu}$ vérifient

$$h^{TT}_{00} = 0 \quad \text{et} \quad h^{TT}_{0i} = 0.$$

C'est ce qu'on appelle la jauge transverse et sans trace. Cela correspondrait à des coordonnées normales de Gauss. Il faut pour cela effectuer le changement de système de coordonnées caractérisé par les fonctions η^μ données par

$$\eta_0(x^\mu) = \frac{1}{2}\int^u h_{00}(u')du' \quad \text{et} \quad \eta_i(x^\mu) = \frac{1}{2}k^i\int^u h_{00}(u')du' + \int^u h_{0i}(u')du'.$$

Les nouvelles coordonnées sont bien harmoniques puisque on passe d'une jauge harmonique à une autre si $\Box\eta_\mu = 0$. Compte tenu de la condition de jauge harmonique, nous avons $h^{TT} = 0$ et $k^i h^{TT}_{ij} = 0$. Nous constatons que la métrique restante h^{TT}_{ij} n'a que deux composantes indépendantes qui sont des fonctions de u. Il y a deux degrés de liberté.

Dans le cadre de la théorie des champs, un tel champ de tenseurs symétriques décrit un champ de spin 2 sans masse. Si l'on croit que l'on doit quantifier ce champ ayant pour origine la métrique de l'espace-temps comme en espace-temps minkowskien, alors la particule quantique correspondante est le graviton.

Dans un système de coordonnées tel que la direction de propagation k^i coïncide avec l'axe Ox^3, composantes non nulles h^{TT}_{ij} sont

$$h^{TT}_{11}(x^0 - x^3) = -h^{TT}_{22}(x^0 - x^3) \quad \text{et} \quad h^{TT}_{12}(x^0 - x^3).$$

Il n'y a que des composantes transverses à la direction de propagation. En introduisant deux vecteurs a^i et b^i orthonormés entre eux et orthogonaux à la direction de propagation k^i, nous pouvons écrire

$$h^{TT}_{ij}(x^0 - k^i x^i) = h_+(x^0 - k^i x^i)(a_i a_j - b_i b_j) + h_\times(x^0 - k^i x^i)(a_i b_j + a_j b_i).$$

Les fonctions h_+ et $h_\times$ définissent les deux polarisations.

La métrique asymptotique de l'espace-temps décrivant un milieu matériel spatialement borné s'approxime par une onde plane gravitationnelle dans un petit voisinage d'un observateur à l'infini. Le vecteur de propagation k^μ est le vecteur normal au cône de lumière de composantes $(1, \xi^i)$. Dans la jauge transverse et sans trace , on montre que l'onde plane gravitationnelle h^{TT}_{ij} ne dépend que du quadrupôle de masse sans trace.

Chapitre 11

Rayonnement gravitationnel et observations

11.1 Pseudo-tenseur énergie-impulsion gravitationnelle

Les équations d'Einstein constituent un système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles qui conduit par conséquent à des phénomènes de propagation. Nous souhaiterions parler de flux d'énergie gravitationnelle. Cependant pour ce faire, il faudrait définir la notion de densité d'énergie gravitationnelle. Or en un point de l'espace-temps einsteinien, on peut toujours annuler les symboles de Christoffel par le choix d'un système de coordonnées, par exemple les coordonnées de Fermi, et par suite faire disparaître en ce point les effets gravitationnels. C'est pourquoi il n'y a pas de localisation de l'énergie gravitationnelle. Il y a bien sûr la loi de conservation covariante $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ mais elle ne conduit à aucune quantité conservée. Seule éventuellement une énergie-impulsion totale de la matière et du champ gravitationnel pourra être définie.

Pour les raisons que nous venons d'indiquer, il n'existe pas une définition covariante d'un tenseur énergie-impulsion totale. Cependant, l'énergie-impulsion totale pourra être définie à partir d'un pseudo-tenseur énergie-impulsion gravitationnelle. Il en existe plusieurs, en particulier celui d'Einstein [1]. Nous allons suivre la méthode de Landau et Lifchitz.

L'expression du tenseur de Ricci se présente sous la forme

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta} \left(\partial_{\rho\beta} g_{\alpha\sigma} + \partial_{\alpha\sigma} g_{\rho\beta} - \partial_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\beta} g_{\rho\sigma} \right) + \cdots$$

où $\cdots$ désigne des termes contenant des dérivées premières de la métrique. Compte tenu des identités

$$\partial_{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} + \cdots \quad \text{et} \quad \partial_{\rho\sigma}(-g) = (-g) g^{\mu\nu} \partial_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} + \cdots ,$$

[1] Il est obtenu comme tenseur énergie-impulsion canonique τ_μ^ν à partir de la densité lagrangienne non scalaire ne contenant que la métrique et ses dérivées premières.

le tenseur d'Einstein peut s'écrire sous la forme

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2(-g)}\partial_{\rho\sigma}\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\right] + \cdots .$$

Nous définissons un superpotentiel de Freud

$$h^{\mu\nu\rho} = \frac{c^4}{16\pi G}\partial_\sigma\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\right].$$

Les équations d'Einstein s'écrivent alors

$$(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \partial_\rho h^{\mu\nu\rho}$$

où la quantité $t^{\mu\nu}$ regroupe les termes contenant les dérivées premières de la métrique. Puisque $h^{\mu\nu\rho}$ est antisymétrique en ν et ρ, nous obtenons la loi de conservation

$$\partial_\nu\left[(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\right] = 0.$$

Les $t^{\mu\nu}$ définissent un pseudo-tenseur énergie-impulsion gravitationnelle. Il est symétrique et quadratique dans les dérivées premières de la métrique. Il a pour expression explicite

$$\begin{aligned}
t^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G}\Big[&\left(2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\gamma\delta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} - \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}\Gamma^\delta_{\beta\delta}\right)\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\\
&+g^{\mu\alpha}g^{\beta\gamma}\left(\Gamma^\nu_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} + \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\Gamma^\delta_{\alpha\delta} - \Gamma^\nu_{\gamma\delta}\Gamma^\delta_{\alpha\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\gamma\delta}\right)\\
&+g^{\nu\alpha}g^{\beta\gamma}\left(\Gamma^\mu_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\delta_{\alpha\delta} - \Gamma^\mu_{\gamma\delta}\Gamma^\delta_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\gamma\delta}\right) + g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\left(\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\Gamma^\nu_{\beta\delta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\gamma\delta}\right)\Big].
\end{aligned}$$

Nous insistons que $t^{\mu\nu}$ n'est pas un tenseur à moins de se limiter à des changements de coordonnées $x^{\alpha'} = L^{\alpha'}_\beta x^\beta + D^{\alpha'}$ où $L^{\alpha'}_\beta$ et $D^{\alpha'}$ sont des constantes.

Dans l'étude des distributions matérielles spatialement bornées, il faut utiliser le tenseur énergie-impulsion gravitationnelle dans des systèmes de coordonnées (x^μ) asymptotiquement minkowskiennes. Nous commençons par le cas stationnaire où l'énergie-impulsion totale de la matière et du champ gravitationnel est définie par l'intégrale

$$P^\mu_T = \frac{1}{c}\int_{x^0=\text{ const.}} (-g)(T^{\mu 0} + t^{\mu 0})d^3x,$$

définition stisfaisante compte tenu des propriétés asymptotiques d'une métrique stationnaire. Pour une métrique statique décrivant un corps massif, nous avons

$$P^\mu_T = \frac{1}{c}\int_{x^0=\text{ const.}} \partial_i h^{\mu 0 i} d^3x.$$

Or, par le théorème de Stokes, l'intégrale est égale à une intégrale sur la sphère $r = \text{const.}$, c'est pourquoi nous obtenons l'énergie-impulsion totale sous la forme

$$P^\mu_T = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{c}\int_{S^2} h^{\mu 0 i}\frac{x^i}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Pour la métrique de Schwarzschild de masse m, nous obtenons $P^0_T = mc$ et $P^i_T = 0$. En conséquence, le paramètre mc^2 est l'énergie de la matière augmentée de celle du champ gravitationnel.

Lorsque la distribution matérielle est en mouvement, il faut préciser la structure asymptotique de l'espace-temps à $\mathcal{J}^+$. Sa définition mathématique relève de l'étude de la métrique conforme apparue dans notre introduction au diagramme de Carter-Penrose. On se donne de façon générale un feuilletage d'hypersurfaces du genre lumière tel que ces hypersurfaces du genre lumière deviennent asymptotiquement les demi-cônes futurs de l'espace-temps minkowskien. On note $u = \text{const.}$ ces hypersurfaces et ξ^μ le vecteur normal isotrope. Le champ de vecteurs ξ^μ est nécessairement géodésique et le paramètre affine du flot ξ^μ croissant vers l'infini est appelé r. A la limite r tendant vers l'infini, on prend le facteur conforme $\Omega = 1/r$ et on définit ainsi $\mathcal{J}^+$. Le paramètre r joue le rôle de distance au centre de la distribution matérielle. L'espace-temps peut être repéré par les coordonnées (u, r, θ, φ) où θ et φ sont les coordonnées des 2-surfaces $u = \text{const.}$ et $r = \text{const.}$ On prend pour composantes $\xi_\mu = (-1, 0, 0, 0)$. Sous ces hypothèses, on a nécessairement

$$g^{uu} = 0 \quad , \quad g^{ur} = -1 \quad \text{et} \quad g^{u\theta} = g^{u\varphi} = 0.$$

Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, cela correspond bien aux coordonnées (u, r, θ, φ) déjà considérées. Nous vérifions que le vecteur ξ^μ a pour composantes $(0, 1, 0, 0)$ et que r est bien le paramètre affine croissant à l'infini.

En absence de rayonnement gravitationnel venant de $\mathcal{J}^-$, c'est bien le cas si le champ gravitationnel est initialement stationnaire, l'hypothèse asymptotique est que les composantes de la métrique sont développables en puissance de $1/r$ en $\mathcal{J}^+$, c'est-à-dire pour u, θ et φ fixés. On a la forme asymptotique générale

$$g^{rr} = 1 - \frac{2U^0(u,\theta,\varphi)}{r} + O(1/r^2) \ , \ g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} + O(1/r^3) \ , \ g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} + O(1/r^3) \ ,$$

$$g^{r\theta} = O(1/r) \ , \ g^{r\varphi} = O(1/r) \text{ et } g^{\theta\varphi} = O(1/r^3).$$

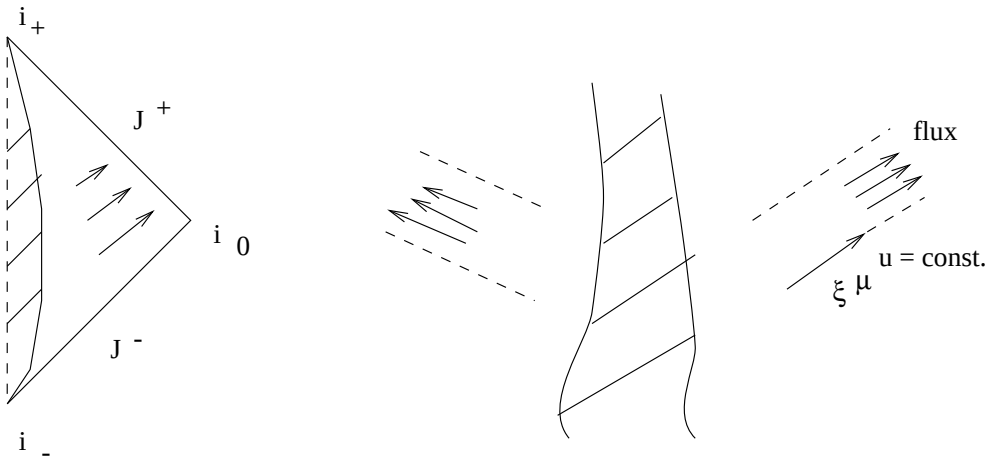
L'analyse des composantes du tenseur de Riemann se fait dans une tétrade isotrope complexe $(\xi^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu)$, construite à l'aide du vecteur ξ^μ déjà introduit, telle que $\xi^\mu n_\mu = 1$ et $m^\mu \overline{m}_\mu = -1$. La métrique est donc

$$g^{\mu\nu} = \xi^\mu n^\nu + n^\mu \xi^\nu - \overline{m}^\mu m^\nu - m^\mu \overline{m}^\nu.$$

Le tenseur de Riemann du vide est alors caractérisé par cinq composantes tétradiques complexes Ψ_A $(A = 0, \ldots, 4)$; en particulier $\Psi_4 = -R_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\sigma$. En $\mathcal{J}^+$, il a la forme asymptotique

$$\Psi_4 \sim \frac{f(u,\theta,\varphi)}{r} \quad \text{quand} \quad r \to \infty$$

où f est une fonction complexe. Ensuite Ψ_3 est en $1/r^2$ et ainsi de suite. Ainsi, Ψ_4 est la composante tétradique du tenseur de Riemann qui domine à $\mathcal{J}^+$. Elle caractérise le rayonnement gravitationnel sortant à $\mathcal{J}^+$. On préfère poser $f = -\ddot{\overline{\sigma}}^0$ où σ^0 s'appelle la fonction



information puisqu'elle caractérise l'évolution dynamique du champ gravitationnel. Tout le problème est de savoir la déterminer pour la distribution matérielle considérée.

A partir des coordonnées (u, r, θ, φ), nous introduisons des coordonnées (x^μ) qui sont asymptotiquement minkowskiennes. Dans ces coordonnées, le vecteur normal ξ^μ a pour composantes $(1, x^i/r)$ quand $r \to \infty$. Toutes les composantes de la métrique en coordonnées (x^μ) asymptotiquement minkowskiennes peuvent être développées en $1/r$. Cela permet de déterminer le développement en $1/r$ du pseudo-tenseur $t^{\mu\nu}$. Nous donnons simplement le résultat

$$t^{\mu\nu} \sim \frac{Q^2(u,\theta,\varphi)}{r^2}\xi^\mu\xi^\nu \quad \text{quand} \quad r \to \infty$$

où la quantité Q^2 s'exprime à l'aide de la fonction information

$$Q^2 = \frac{c^4}{4\pi G}\dot{\sigma}^0\dot{\overline{\sigma}}^0.$$

Nous rappelons que justement σ^0 caractérise la partie asymptotique en $1/r$ du tenseur de Riemann.

Cela justifie que le flux d'énergie-impulsion gravitationnelle à travers la sphère à l'infini par unité de temps retardé, calculé au temps retardé u, soit donné par

$$\int_{S^2} Q^2(u,\theta,\varphi)\xi^\mu \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Nous pouvons bien dire qu'il y a rayonnement gravitationnel sortant à l'infini $\mathcal{J}^+$.

Grâce aux équations d'Einstein du vide, nous avons asymptotiquement

$$\frac{d}{du}\left[\int_{S^2} U^0(u,\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi - \frac{1}{2}\frac{d}{du}\int_{S^2} |\sigma^0(u,\theta,\varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi\right] = -\int_{S^2} \dot{\sigma}^0\dot{\overline{\sigma}}^0 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Pour avoir une vue claire, il faut supposer que le système a évolué entre deux états stationnaires. En réalité, l'état final stationnaire n'est nécessairement atteint qu'asymptotiquement dans le temps. Alors, la formule que nous avons établie donne la différence entre

l'énergie-impulsion totale initiale et finale

$$\left(P_T^0\right)_f - \left(P_T^0\right)_i = -\frac{1}{c}\int_{u_i}^{u_f} du \int_{S^2} Q^2(u,\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

puisque dans le cas stationaire $U^0 = Gm/c^2$. Ainsi, l'énergie totale est passée de m_i à m_f avec $m_f < m_i$.

En dehors de ce cas, il faut un coup de pouce heuristique mais bien naturel. Si l'on négligeait le flux d'énergie-impulsion gravitationnelle, alors le mouvement du système serait stationnaire, disons périodique. L'énergie-impulsion P_T^μ de ce système serait conservée. Cependant, la perte d'énergie-impulsion gravitationnelle à l'infini se traduit par une perte identique de P_T^μ au cours du temps x^0. Nous l'écrivons comme une équation de bilan

$$\frac{d}{dx^0}P_T^\mu = -\frac{1}{c}\int_{S^2} Q^2(x^0,\theta,\varphi)\xi^\mu \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Ce raisonnement est valable si la perte d'énergie par période due au rayonnement gravitationnel est très petite par rapport à l'énergie totale du système définie au cours de ces périodes. Le caractère manifestement positif de Q^2 montre qu'il y a toujours perte d'énergie par rayonnement gravitationnel.

11.2 Energie gravitationnelle rayonnée

Dans le cadre de la théorie linéarisée de la relativité générale, nous rappelons que la métrique asymptotique engendrée par une source matérielle spatialement bornée se calcule à partir de l'expression suivante

$$\gamma^{\mu\nu}(x^0,x^i) = \frac{4G}{c^4 r}\int_{C_x^-} T^{\mu\nu}(x^0 - R, X^i)d^3X + O(\frac{1}{r^2}).$$

Nous pourrions déterminer la fonction information σ^0 à cette approximation et appliquer la formule générale donnée sans démonstration. Nous préférons reprendre le calcul. Posant

$$\Omega^{\mu\nu}(x^0,x^i) = \int_{C_x^-} \partial_0 T^{\mu\nu}(x^0 - R, X^i)d^3X,$$

nous vérifions que

$$\partial_\rho \gamma^{\mu\nu} = -\frac{4G}{c^4}\Omega^{\mu\nu}\xi_\rho + O(\frac{1}{r^2})$$

puisque $\partial_i R = \xi_i + O(1/r)$. Or la condition de jauge harmonique est satisfaite et par conséquent $\Omega^{\mu\nu}\xi_\mu = 0$ asymptotiquement. Compte tenu de cette propriété et que $\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 0$, l'expression asymptotique du pseudo-tenseur énergie-impulsion gravitationnelle $t^{\mu\nu}$ se

simplifie considérablement à l'approximation linéaire. On obtient le terme en $1/r^2$, dont la forme générale a déjà été donnée, avec le facteur

$$Q^2 = \frac{G}{2\pi c^4}\left(\eta_{\rho\alpha}\eta_{\sigma\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\alpha\beta}\right)\Omega^{\rho\sigma}\Omega^{\alpha\beta}.$$

En théorie linéarisée, on peut calculer la perte d'énergie gravitationnelle pour le mouvement donné d'une distribution matérielle.

En vertu des hypothèses de la théorie linéarisée, l'énergie-impulsion totale P_T^μ du système stationnaire se réduit à l'énergie-impulsion de la matière P^μ. Comme dans le cas général, ce flux d'énergie-impulsion gravitationnelle conduit à une équation de bilan

$$\frac{d}{dt}P^\mu = -\int_{S^2} Q^2(ct,\theta,\varphi)\xi^\mu \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Dans le cas d'un mouvement lent, $\Omega^{\mu\nu}$ a été déterminé en fonction du moment quadrupolaire de masse Q^{ij}. L'équation de bilan s'écrit alors

$$c\frac{d}{dt}P^0 = -\frac{G}{5c^5}\left(\frac{d^3}{dt^3}Q^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\frac{d^3}{dt^3}Q^{mm}\right)\left(\frac{d^3}{dt^3}Q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{d^3}{dt^3}Q_{mm}\right),$$
$$\frac{d}{dt}P^i = 0,$$

en fonction du quadrupôle de masse sans trace $Q^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}Q^{mm}$. Cette formule a été établie par Einstein en 1918.

Nous allons également donner l'expression du flux d'énergie gravitationnelle I d'une onde plane gravitationnelle monochromatique de direction de propagation l'axe Ox^3. Il est donné par ct^{03} où $t^{\mu\nu}$ est le pseudo-tenseur énergie-impulsion. Dans un certain système de coordonnées, la métrique a les composantes non nulles suivantes

$$h_{11} = -h_{22} = f_+ \sin[\omega_g(x^0 - x^3)/c + \phi_+] \quad h_{12} = f_\times \sin[\omega_g(x^0 - x^3)/c + \phi_\times]$$

et alors on trouve

$$I = \frac{c^3}{16\pi G}\omega_g^2\left(f_+^2\cos^2[\omega_g(x^0 - x^3)/c + \phi_+] + f_\times^2\cos^2[\omega_g(x^0 - x^3)/c + \phi_\times]\right).$$

Nous rappelons qu'à l'approximation linéaire le mouvement du milieu matériel est considéré comme donné. Le rayonnement d'une telle antenne en laboratoire ne peut être que très faible en raison de la petitesse du facteur numérique G/c^5 [2]. En revanche il existe dans le domaine astrophysique des phénomènes émettant des rayonnements gravitationnels intenses. Ce sont les rotations des pulsars, qui sont des étoiles à neutrons, et les explosions non à symétrie sphérique de supernovæ. Dans ce dernier cas, la puissance émise pourrait être importante durant une brève durée.

[2] $c^5/G \simeq 3,63 \times 10^{52}$ watts.

Qu'en est-il pour un système auto-gravitant ? D'après la définition du pseudo-tenseur énergie-impulsion gravitationnelle, les équations d'Einstein se présentent sous la forme

$$\partial_{\rho\sigma}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] = \frac{16\pi G}{c^4}(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}).$$

Nous nous plaçons dans un système de coordonnées harmoniques défini par $\partial_\sigma(\sqrt{-g}g^{\sigma\rho}) = 0$. En posant

$$\sqrt{-g}g^{\rho\sigma} = \eta^{\rho\sigma} - \lambda^{\rho\sigma} \quad \text{avec} \quad \partial_\sigma\lambda^{\sigma\rho} = 0,$$

nous obtenons

$$\Box\lambda^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) + \lambda^{\rho\sigma}\partial_{\rho\sigma}\lambda^{\mu\nu} - \partial_\sigma\lambda^{\mu\rho}\partial_\rho\lambda^{\nu\sigma}$$

où $\Box$ est l'opérateur dalembertien usuel. En principe, il faut chercher à résoudre simultanément $\lambda^{\mu\nu}$ et $T^{\mu\nu}$ par un développement en puissance de G en imposant les conditions de rayonnement sortant à $\mathcal{J}^+$. Au premier ordre en G, nous retrouvons évidemment la théorie linéarisée de la relativité générale en posant $\lambda^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}$.

Considérons un système auto-gravitant animé de vitesses petites devant c et dont le champ gravitationnel est faible. Nous pouvons récrire les équations sous la forme $\Box\lambda^{\mu\nu} = -16\pi G\tau^{\mu\nu}/c^4$ avec $\partial_\mu\tau^{\mu\nu} = 0$. Formellement, nous pouvons refaire les calculs de l'approximation linéaire sur la perte d'énergie dans le cas d'un mouvement lent. En réalité, ce n'est pas possible car $\tau^{\mu\nu}$ n'est pas spatialement borné. Nous obtiendrions par ce raisonnement heuristique la formule de perte d'énergie totale avec le quadrupôle calculé sur τ^{00}. Mais la matière domine et par conséquent τ^{00} se réduit à T^{00} puis à ρ. Ainsi, la formule quadrupolaire d'Einstein s'appliquerait également aux systèmes auto-gravitants en mouvement lent. En fait, une démonstration rigoureuse au-delà du cadre de la théorie linéarisée existe.

Dans le domaine astrophysique, un exemple d'application de cette formule est le système de deux corps qui émet du rayonnement gravitationnel. Nous reviendrons sur le cas du pulsar binaire PSR 1913+16.

11.3 Exemple d'un corps rigide en rotation

Un corps rigide en rotation est un exemple d'une distribution matérielle émettant du rayonnement gravitationnel. Le moment quadrupolaire de masse Q^{ij} de ce système est déterminé par le tenseur moment d'inertie du corps rigide. Ce dernier est calculé dans des coordonnées $x^{i'}$ fixes par rapport au corps

$$I^{i'j'} = \int \rho(x^{i'})x^{i'}x^{j'}d^3x'$$

où ρ est la densité de masse du corps. Pour simplifier nous supposons que $I^{i'j'}$ est diagonal et d'autre part que la rotation a lieu suivant l'axe Ox^3 avec une vitesse angulaire ω. Le

changement de système de coordonnées est

$$x^1 = x^{1'}\cos\frac{\omega}{c}x^0 - x^{2'}\sin\frac{\omega}{c}x^0 \quad , \quad x^2 = x^{1'}\sin\frac{\omega}{c}x^0 + x^{2'}\cos\frac{\omega}{c}x^0 \quad \text{et} \quad x^3 = x^{3'}.$$

Le calcul du moment quadrupolaire donne

$$Q^{11} = \frac{1}{2}\left(I^{11}+I^{22}\right) + \frac{1}{2}\left(I^{11}-I^{22}\right)\cos\frac{2\omega}{c}x^0 \ , \quad Q^{12} = \frac{1}{2}\left(I^{11}-I^{22}\right)\sin\frac{2\omega}{c}x^0 \ ,$$
$$Q^{22} = \frac{1}{2}\left(I^{11}+I^{22}\right) - \frac{1}{2}\left(I^{11}-I^{22}\right)\cos\frac{2\omega}{c}x^0 \ , \quad Q^{12} = Q^{23} = 0 \text{ et } \quad Q^{33} = I^{33}.$$

Dans notre cas, l'énergie cP^0 du milieu matériel est la somme de l'énergie de masse, qui est constante, et de l'énergie E de la distribution matérielle. Par conséquent, la formule de variation d'énergie du corps rigide en rotation à l'approximation quadrupolaire est donnée par

$$\frac{d}{dt}E = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}I^2e^2\omega^6$$

où nous avons posé $I = I^{11} + I^{22}$ et $e = (I^{11} - I^{22})/I$.

L'énergie E se réduit à l'énergie cinétique du corps rigide qui s'exprime sous la forme

$$E = \frac{1}{2}\int \rho v^2 d^3x = \frac{1}{2}\omega^2 \int \rho\left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)d^3x = \frac{1}{2}\omega^2 I.$$

Le seul paramètre du système susceptible de varier est la vitesse angulaire du corps rigide. Nous en déduisons la variation de la vitesse angulaire due à la perte d'énergie cinétique

$$\frac{d}{dt}\omega = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}Ie^2\omega^5.$$

Ainsi, par suite de l'émission de rayonnement gravitationnel, la vitesse angulaire du corps rigide diminue avec le temps jusqu'à zéro qui est la situation non radiative.

11.4 Force de réaction de rayonnement gravitationnel

Par quel mécanisme le milieu matériel perd-il de l'énergie ? Il faut déterminer la force de réaction de rayonnement gravitationnel. Cela nécessite de connaître le champ gravitationnel radiatif dans le support spatial de la distribution matérielle. Cela est relativement aisé dans la théorie linéarisée de la relativité générale. En effet, dans le cas d'un mouvement lent, la solution retardée s'obtient pour $|x^i| \ll c\mathcal{T}$ comme un développement en $1/c$

$$\gamma^{\mu\nu}(t,x^i) = \frac{4G}{c^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!c^n}\frac{d^n}{dt^n}\int T^{\mu\nu}(t,X^k)R^{n-1}d^3X$$

avec la notation $R^2 = \sum_{n=1}^{3}(x^i - X^i)(x^i - X^i)$. La partie radiative est constituée des puissances impaires de $1/c$ car elles changent de signe dans le cas de la solution avancée. Le

tenseur énergie-impulsion est lui aussi développé en puissances de $1/c$. Ces développements en $1/c$ sont valables sur l'extension spatiale a de la source, $a \ll c\mathcal{T}$. Il en résulte que les équations du mouvement $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ contiennent les termes perturbatifs induits par la partie radiative dominante de la métrique $\gamma^{\mu\nu}$. On obtient

$$\rho\left(\partial_t v^i + v^j \partial_j v^i\right) + \partial_i p = {}^5\delta f^i$$

où ${}^5\delta f^i$ est la force de réaction de rayonnement gravitationnel en $1/c^5$.

Le travail de la force de réaction le long de la trajectoire non perturbée n'est pas une différentielle totale et conduit à une variation d'énergie E de la distribution matérielle

$$\frac{d}{dt}E = \int v^k \, {}^5\delta f^k d^3x.$$

On en déduit après un long calcul une expression de la forme

$$\frac{d}{dt}E = -\frac{G}{5c^5}\frac{d^3}{dt^3}Q^{ij}\frac{d^3}{dt^3}Q^{ij} + \frac{G}{15c^5}\left(\frac{d^3}{dt^3}Q^{mm}\right)^2 + \frac{d}{dt}\Big(\cdots\Big).$$

Ainsi, nous retrouvons la formule d'Einstein pour le rayonnement gravitationnel soit entre deux états stationnaires soit en faisant la moyenne sur une période dans le cas d'un mouvement périodique. Dans le cadre de la théorie linéarisée de la relativité générale, nous avons la preuve rigoureuse qu'une distribution matérielle perd de l'énergie et que cette perte correspond à l'énergie gravitationnelle rayonnée à l'infini.

Qu'en est-il pour un système auto-gravitant ? En principe nous ne pouvons pas appliquer les formules de la théorie linéarisée. La détermination de la force de réaction pour un système auto-gravitant en mouvement lent, dont on suppose que l'énergie cinétique est du même ordre de grandeur que l'énergie potentielle, nécessite de considérer les approximations quadratiques et cubiques en G des équations d'Einstein.

Le problème des deux corps étendus a et b, restant pratiquement à symétrie sphérique quand leur rayon est beaucoup plus petit que la distance les séparant, se ramène à l'étude des centres de masse a^i et b^i puisque la structure interne des corps n'intervient pas à cette approximation. On peut donc considérer qu'il s'agit du problème de deux corps ponctuels de masses m_a et m_b. Les équations du mouvement peuvent s'écrire jusqu'à l'ordre $1/c^5$

$$m_a \ddot{a}^i = -\frac{Gm_b(a^i - b^i)}{r_{ab}^3} + f_{1\,\mathrm{PN}}^i + f_{2\,\mathrm{PN}}^i - \frac{2G}{5c^5}a^j\left(\frac{d^5}{dt^5}Q^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\frac{d^5}{dt^5}Q^{mm}\right)$$

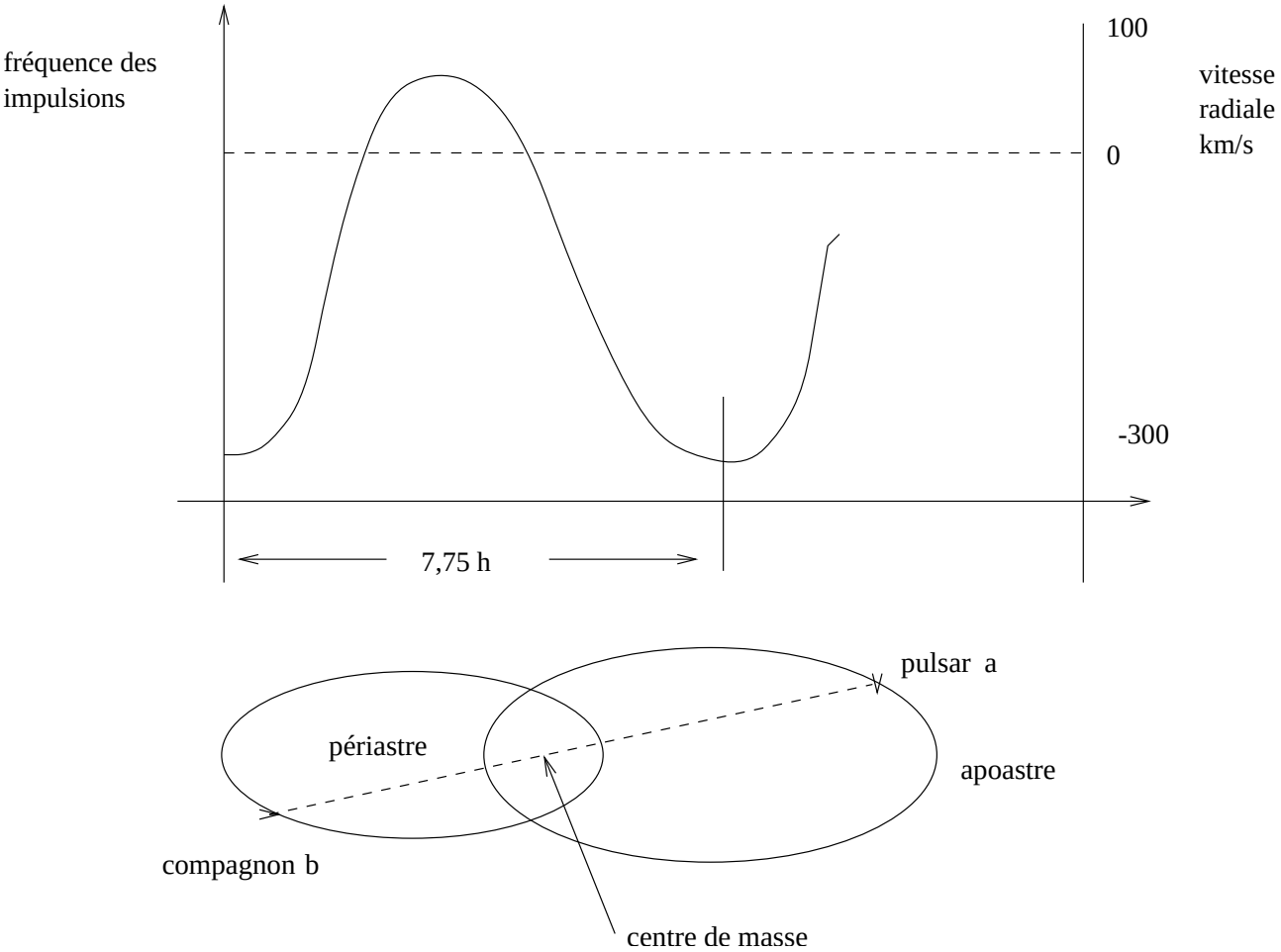
où $Q^{ij} = m_a a^i a^j + m_b b^i b^j$, dans un système de coordonnées bien choisi que nous ne préciserons pas. La force en $1/c^5$ est la force de réaction de rayonnement gravitationnel. Elle est un facteur correctif en $\epsilon^{5/2}$ de la force newtonienne, dite force en 2.5 PN. Il n'y a pas de force de réaction en 1.5 PN car il n'existe pas de rayonnement gravitationnel dipolaire.

Nous avons donc un mouvement newtonien de deux corps perturbé par une force en $1/c^5$. La variation des paramètres de l'orbite newtonienne relève des méthodes de la mécanique céleste. En tout cas le travail de cette force donne la variation de l'énergie newtonienne du système suivant une formule et celle-ci coïncide avec la formule quadrupolaire d'Einstein.

11.5 Pulsar binaire PSR 1913+16

Il est remarquable qu'il existe dans l'Univers un système de deux corps dans lequel on a pu mettre en évidence cette perte d'énergie due au rayonnement gravitationnel. Un pulsar est une étoile à neutrons qui tourne sur elle-même en émettant un faisceau d'ondes radios très directif tel un phare. Il constitue une horloge. En 1974 Hulse et Taylor ont découvert un pulsar dont la période d'arrivée des impulsions dépendait du temps d'une façon périodique avec une période de 7h 45 min [3].

Hulse et Taylor interprétèrent ceci comme un effet Doppler pour l'horloge que définit le pulsar. Ce pulsar PSR 1913+16 fait donc partie d'un système de deux corps dont on ne voit pas le compagnon ni en optique ni en radio.



L'effet Doppler classique

$$\left(\frac{T_o}{T_e}\right)_{Class} = 1 + \frac{v_a^i n^i}{c}$$

[3]Ils ont obtenu le prix Nobel de physique en 1993 pour cette découverte.

permet de déterminer la période de révolution P, l'excentricité e, la position du périastre ω et la fonction de masse $f_a = (m_b \sin i)^3/(m_a + m_b)^2$ où i est l'angle du plan de l'orbite et du plan du ciel. Ainsi tous les paramètres de l'orbite newtonienne ne sont pas connus. Deux informations supplémentaires sont obtenues d'une part de l'analyse des corrections relativistes de l'effet Doppler général

$$\frac{T_o}{T_e} \approx 1 + \frac{v_a^i n^i}{c} + \frac{1}{2}\frac{v_a^2}{c^2} + \frac{Gm_b}{c^2 r_{ab}}$$

et d'autre part de l'avance du périastre par révolution, calculé à partir des équations post-newtoniennes du mouvement,

$$\triangle\omega = \frac{6\pi G(m_a + m_b)}{a(1-e^2)c^2}$$

où a est le demi-grand axe de l'orbite relative, donnant une avance de 4^o par an. On connaît alors tous les paramètres du système newtonien des deux corps comme leur séparation, d'environ un million de kilomètres, et la masse du pulsar et celle de son compagnon, de l'ordre de 1,4 masse solaire.

Sur une longue période de temps, Hulse et Taylor ont observé que la période de révolution P de ce système diminuait au cours du temps

$$\dot{P} \simeq -2,4 \times 10^{-12}.$$

Puisque ce système de deux corps semble propre, c'est-à-dire sans force perturbatrice de freinage, la seule hypothèse possible est que cette diminution résulte du rayonnement gravitationnel du système. Avec la formule quadrupolaire d'Einstein, nous pouvons calculer le moment quadrupolaire Q^{ij} pour le mouvement newtonien des deux corps ponctuels et ainsi déterminer la perte d'énergie totale

$$c\frac{d}{dt}P_T^0 = -\frac{32G^4}{5c^5}\frac{m_a^2 m_b^2(m_a+m_b)}{a^5}\frac{1}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)$$

avec $cP_T^0 = m_a c^2 + m_b c^2 + E$ où E est l'énergie newtonienne du système

$$E = -\frac{Gm_a m_b}{2a}.$$

La seule quantité susceptible de varier est le demi-grand axe a par la formule

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{2a}{Gm_a m_b}\frac{dE}{dt}.$$

Or la période de révolution P est reliée à a par la troisième loi de Kepler

$$P = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_a+m_b)}},$$

et ainsi nous obtenons la variation de période en fonction des paramètres newtoniens du système binaire. Or on connaît tous les paramètres par l'analyse précédente, c'est pourquoi l'accord parfait de l'observation avec la prédiction de la formule théorique est une confirmation éclatante de la relativité générale.

11.6 Principes de détection d'une onde plane gravitationnelle

La métrique dans un petit voisinage de l'espace-temps, loin d'une distribution matérielle qui rayonne gravitationnellement, peut être approximée par celle d'une onde plane gravitationnelle. Il y a d'autres champs gravitationnels comme le champ statique mais ils n'ont pas la même caractéristique que celui de l'onde gravitationnelle.

Etant donné un observateur en chute libre par rapport à l'onde gravitationnelle, on peut toujours trouver un système de coordonnées (x^μ) où $x^i = 0$ est l'équation de la ligne d'univers de l'observateur dans lequel la métrique de l'onde plane gravitationnelle est exprimée dans la jauge transverse sans trace. On prend

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}(k_\mu x^\mu))dx^i dx^j \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{3} h_{ii} = 0$$

où k^μ est isotrope $\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$. En fait toutes les courbes x^i =const. sont des géodésiques du genre temps.

Soit $e_{\underline{i}}$ le trièdre de l'observateur en chute libre sans rotation. Les vecteurs $e_{\underline{i}}$ se transportent par parallélisme le long de la courbe géodésique $x^i = 0$. On va pouvoir associer les coordonnées de Fermi (y^0, y^i) avec $|\, y^i \,| \ll \ell$ pour décrire l'espace-temps au voisinage de la ligne d'univers. A quoi correspond dans ce problème la longueur ℓ ? C'est bien entendu la longueur d'onde λ_g de l'onde gravitationnelle.

Dans le voisinage de la ligne d'univers, nous effectuons le changement de coordonnées à l'approximation linéaire

$$y^0 = x^0 + \frac{1}{4}h'_{ij}(x^0)x^i x^j \quad , \quad y^i = x^i + \frac{1}{2}h_{ij}(x^0)x^j \quad \text{avec} \quad |\, x^i \,| \ll \lambda_g.$$

Il conduit à la nouvelle expression de la métrique à l'approximation linéaire

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{2}h''_{ij}(y^0)y^i y^j\right)(dy^0)^2 + \delta_{ij}dy^i dy^j \quad \text{avec} \quad |\, y^i \,| \ll \ell.$$

L'observateur va considérer les coordonnées de Fermi (y^i) comme des coordonnées galiléennes pour une métrique newtonienne. Par l'étude d'une géodésique du genre temps, il verra une force newtonienne $mh''_{ij}(y^0)y^j/2$ sur une particule ponctuelle de masse m située en y^i. Il constate que tout se passe comme s'il y avait un potentiel newtonien de marée

$$U_W = \frac{1}{4}h''_{ij}(y^0)y^i y^j.$$

Il s'agit d'un effet du tenseur de Riemann puisque $R_{0i0j} = h''_{ij}(y^0)/2$ en $y^i = 0$.

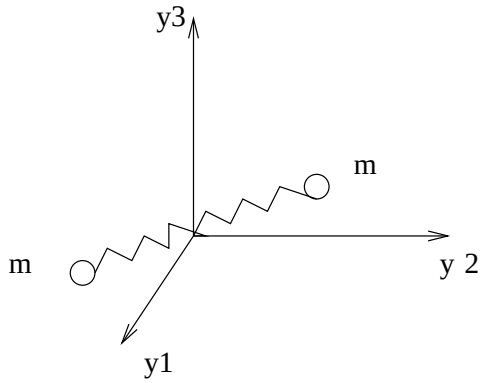
Le détecteur d'onde gravitationnelle le plus ancien est celui de Weber qui date des années soixante-dix. Un cylindre élastique suspendu, d'environ une tonne, peut entrer en

résonance à environ 1 660 Hz avec une onde gravitationnelle dont la longueur d'onde est effectivement beaucoup plus grande que les dimensions du détecteur. D'autres expériences de ce type sont actuellement en cours mais aucune détection sûre n'a été faite. On pense pouvoir détecter des ondes d'amplitude $h \simeq 10^{-18}$.

Pour décrire cette expérience, il faudrait mettre en œuvre une théorie relativiste de l'élasticité qui serait valable bien sûr dans n'importe quel système de coordonnées. Cependant un raisonnement heuristique avec deux masses de masse m reliées par un ressort de coefficient k décrit le comportement de la barre élastique. Dans les coordonnées de Fermi (y^i), l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à ce système donne

$$\ddot{z}^i + \frac{2k}{m} z^i = \frac{1}{2} h''_{ij}(y^0) z^j$$

où z^i dénote la séparation entre les deux masses, sans tenir compte du facteur d'amortissement ou facteur de qualité. L'effet est maximum si la fréquence de l'onde gravitationnelle coïncide avec la fréquence de résonance $\sqrt{2k/m}$.

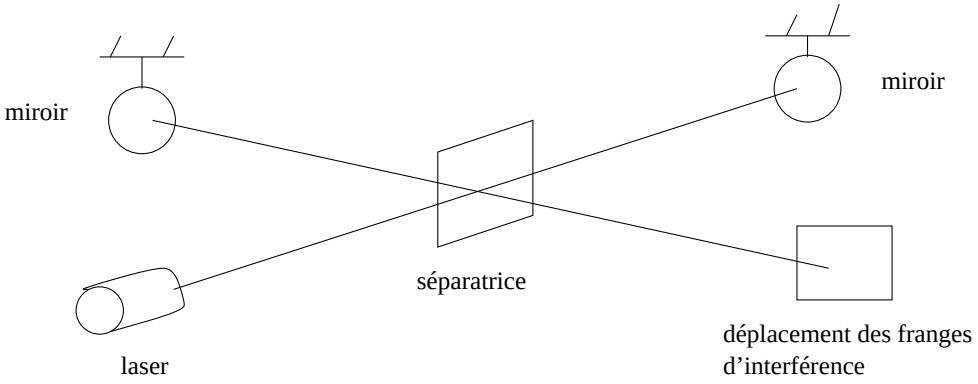


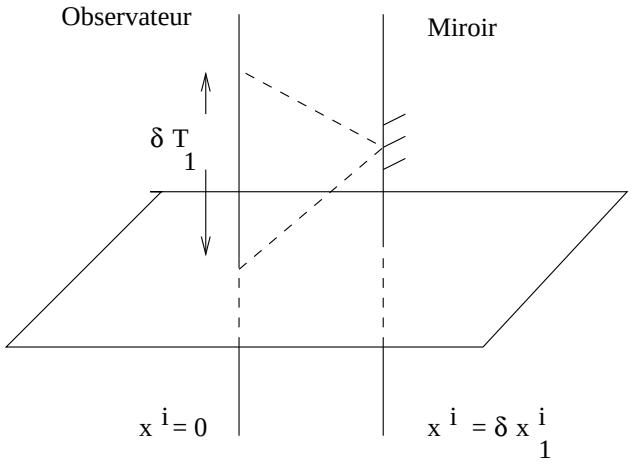
Actuellement des détecteurs d'onde gravitationnelle basés sur l'interférométrie optique avec des bras de 3 km sont en construction : LIGO (*Laser Interferometer Gravitational wave Observatory*) aux Etats-Unis et VIRGO (du nom de l'amas de la Vierge) en Italie dans une coopération franco-italienne. Leur avantage est qu'ils peuvent détecter dans une large bande de fréquences au-delà de 10 Hz pour cause de bruits sismiques et jusqu'à 10^4 Hz. Notons qu'il existe un projet d'interférométrie entre satellites dans l'espace, LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), qui pourrait détecter à basse fréquence de 10^{-4} Hz à 1 Hz.

Faisons une théorie élémentaire de la détection interférométrique d'une onde gravitationnelle. Considérons un observateur et un miroir tous les deux en chute libre dans une onde gravitationnelle. L'observateur envoie de la lumière qui se réfléchit sur le miroir pour être observée après un temps de l'observateur δT_1. L'analyse est plus simple dans les coordonnées (x^μ) initialement introduites dans lesquelles l'observateur est en $x^i = 0$. Le miroir se trouve en $x^i = \delta x^i_1$.

Le temps mis pour l'observateur δT_1 a l'expression approchée

$$c\delta T_1 = 2\sqrt{(\delta_{ij} + h_{ij}(x^0))\delta x^i_1 \delta x^i_1}.$$


miroir
miroir
séparatrice
laser
déplacement des franges
d'interférence


Observateur
Miroir
δ T 1
x i = 0
x i = δ x i 1

Soit L_0 la distance spatiale entre l'observateur et le miroir en absence d'onde gravitationnelle. En introduisant le vecteur unitaire $n_1^i = \delta x_1^i / L_0$ qui donne la direction du miroir, nous obtenons

$$\delta T_1 = \frac{2L_0}{c}\left(1 + \frac{1}{2}h_{ij}(x^0)n_1^i n_1^j\right).$$

Le principe de l'expérience repose sur l'interférométrie en ajoutant un parcours avec un second miroir. L'onde gravitationnelle n'a pas le même effet dans des directions d'angle $\pi/2$. Ainsi, on compare $\delta T_1 - \delta T_2$ au cours du temps à l'aide du déphasage induit $\triangle\phi = \omega(\delta T_1 - \delta T_2)$ où ω est la pulsation de la lumière. L'objectif est de mesurer des h de l'ordre de 10^{-21} voire de 10^{-22} par ce moyen.

Il existe une source sûre de rayonnement gravitationnel : le pulsar binaire PSR 1913+16. Situé à environ 15 000 années-lumière, l'amplitude de l'onde gravitationnelle sur Terre n'est pas absolument négligeable mais sa fréquence est beaucoup trop faible pour être détectée. Cependant, il existe d'autres systèmes binaires qui évoluent sous l'action de la force de réaction de rayonnement gravitationnel. Les deux corps suivent des orbites de plus en plus proches qui deviennent circulaires. Ils tournent donc de plus en plus vite jusqu'à 100 Hz puis en 3 secondes jusqu'à 1 000 Hz avant la collision finale. C'est ce qu'on appelle la coalescence des binaires. Le rayonnement gravitationnel est très intense durant ces dernières minutes et il serait détectable par les interféromètres. Le problème est de connaître le nombre probable de tels événements par an dans notre amas de galaxies et dans les amas proches.

Chapitre 12

Espaces-temps de la cosmologie

12.1 Le problème cosmologique

Jusqu'à présent nous avions considéré des distributions matérielles spatialement bornées. La métrique de l'espace-temps était déterminée par les équations d'Einstein, ayant pour source cette distribution matérielle, en ajoutant les conditions aux limites du diagramme de Carter-Penrose assurant ainsi que l'espace-temps est asymptotiquement minkowskien.

Quand on décrit l'Univers, il est raisonnable d'admettre que la matière occupe tout l'espace sinon il y aurait un espace-temps minkowskien, celui asymptotique, qui semblerait préexister à la distribution matérielle. L'idée est que l'espace-temps décrivant l'Univers et la matière sont intimement liés. Ce qui ne veut pas dire que celui-ci est complètement déterminé par la matière.

Le problème cosmologique consiste à déterminer l'espace-temps décrivant l'Univers dans son ensemble. Vu la complexité des phénomènes physiques s'y déroulant, il est clair qu'il faut faire une idéalisation. On déterminera une structure globale de l'espace-temps de la cosmologie, caractérisée par une métrique $g_{\mu\nu}$, qui ne sera vérifée qu'à une échelle suffisamment grande. Localement, à petites échelles, il y aura beaucoup d'irrégularités.

On part du principe que l'on peut schématiser le milieu matériel constituant l'Univers par un fluide continu de tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Nous considérons un fluide parfait

$$T^{\alpha\beta} = (\rho c^2 + p)u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad u^\alpha u_\alpha = -1$$

où ρ est la densité de masse, p la pression et u^α la quadri-vitesse du fluide. Dans l'Univers actuel, les particules de ce gaz sont aux dimensions de l'Univers : ce sont les galaxies, voire les amas de galaxies et on peut estimer que la pression de la matière visible est négligeable, soit $p = 0$. Néanmoins, on estime que la plus grande partie de la distribution matérielle de l'Univers n'est pas visible. En revanche dans l'Univers primordial, nous verrons que la température T est très élevée et il n'y a plus que des particules élémentaires. La notion de gaz a ainsi changé. Les particules massives de masse m sont ultra-relativistes quand

$mc^2 \ll k_B T$ et tout se passe comme si on avait un gaz de particules sans masse. La pression p_r est alors donnée par $\rho_r c^2/3$. De plus, la densité de masse ρ_r est proportionnelle à $(a/2)(N_b + \frac{7}{8}N_f)T^4$ où N_b et N_f sont respectivement les nombres de degrés de liberté de spin pour l'ensemble des bosons et des fermions ultra-relativistes à la température T, a désignant la constante de Stefan [1]. Cependant ces fluides ultra-relativistes peuvent coexister à des températures différentes s'ils n'ont pas d'interaction.

Il existe de toute façon des particules sans masse comme le photon avec $N_b = 2$. Ainsi le gaz de photons du rayonnement de corps noir à la température T a pour tenseur énergie-impulsion

$$T_\gamma^{\alpha\beta} = \frac{4}{3} a T^4 u^\alpha u^\beta + \frac{1}{3} a T^4 g^{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad u^\alpha u_\alpha = -1.$$

Quelles sont les observations cruciales sur l'Univers que fait actuellement un observateur terrestre ? En réalité, ces observations sont ramenées à un observateur fictif animé d'un certain mouvement par rapport à l'observateur terrestre.

1. Il voit la même distribution matérielle à une échelle suffisamment grande dans toutes les directions. Cette échelle n'est pas facile à évaluer mais serait au moins de l'ordre de 200 Mpc [2]. Il trouve donc que l'Univers est isotrope autour de lui.

2. Il observe un décalage vers le rouge des spectres des galaxies et autres objets comme les quasars apparamment proportionnel à leur distance d

$$z \equiv \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1 \approx H_0 \times \frac{d}{c} \quad (z > 0)$$

où H_0 est la constante de Hubble, introduite en 1927, en notation astrophysique

$$H_0 = 100\, h \,\mathrm{km\,.\,s^{-1}\,.\,Mpc^{-1}} \quad \text{soit} \quad H_0^{-1} = 9,78 \times 10^9 \,\frac{1}{h} \text{ années.}$$

Ces unités ont pour origine l'interprétation en terme de vitesse de fuite des galaxies dans le cadre de l'effet Doppler classique. La valeur de H_0 n'est pas bien connue car il est difficile d'évaluer d. On trouve actuellement l'intervalle $0,6 < h < 0,7$.

3. Il observe un rayonnement électromagnétique de fond avec un spectre de corps noir à une température de 2,726 K, découvert en 1965. Le rayonnement est isotrope à 10^{-5} près, une fois éliminé son mouvement par rapport à ce un gaz de photons dont nous avons donné le tenseur énergie-impulsion $T_\gamma^{\alpha\beta}$. Nous baignons dans ce qu'on appelle le fond diffus cosmologique [3]. Cependant avec le satellite COBE (*COsmic Background Explorer*), on voit des anisotropies. Pour analyser des corrélations, on mesure la différence de température du fond diffus cosmologique entre deux directions faisant un angle donné puis on fait la moyenne dans le ciel.

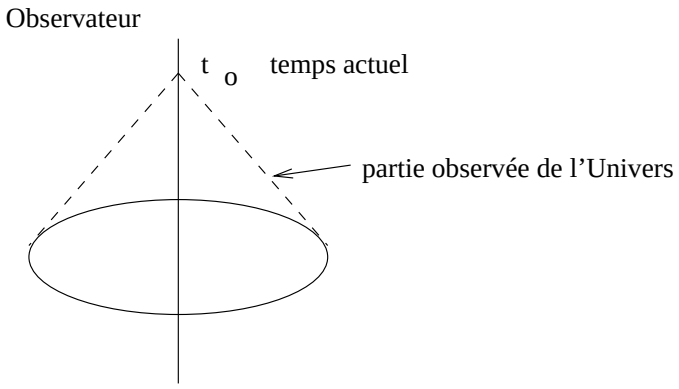
[1] $a = \pi^2 k_B^4/15c^3\hbar^3$ et $a \simeq 7,564\,1 \times 10^{-16}$ J . m^{-3} . K^{-4}.
[2] 1 pc $\simeq 3 \times 10^{16}$ m soit 1 pc $\simeq 3$ a.l.
[3] *Cosmic Microwave Background* en anglais, CMB.

4. Il essaye d'évaluer la densité moyenne de masse ρ_0 de l'Univers actuel. Ce n'est pas simple car toute la matière n'est pas visible. Cependant il constate que ρ_0 est au moins mille fois plus grand que la densité de masse du fond diffus cosmologique $\rho_\gamma = aT^4/c^2$, $\rho_\gamma \simeq 7 \times 10^{-31}$ kg . m^{-3}. Il peut aussi évaluer dans l'Univers actuel l'abondance relative des éléments chimiques légers (H, D, He, ...).
5. Il détermine l'âge des structures les plus anciennes afin d'obtenir l'âge minimun de l'Univers qui serait au moins de dix milliards d'années mais sans doute plus.

Pour construire les espaces-temps de la cosmologie, il faudra ajouter à ces éléments observationnels plusieurs hypothèses cosmologiques.

12.2 Observateurs fondamentaux et métriques cosmologiques

D'après les données observationnelles, il existe un observateur qui voit l'Univers isotrope au temps actuel t_o.



Il faut bien réaliser que cet observateur ne voit l'Univers sur le cône passé que durant un très petit intervalle de temps par rapport à l'âge de l'Univers.

Nous allons faire deux hypothèses invérifiables en elles-mêmes mais la cohérence et les conséquences du modèle que l'on peut alors construire en assurent la justification.

1. Première hypothèse cosmologique.

   Il n'y a aucune raison pour que le temps actuel t_o d'observation de l'isotropie soit privilégié. Ainsi l'observateur, dit observateur fondamental, verrait l'Univers isotrope en tout temps de sa ligne d'Univers.

   Cela signifie que l'espace-temps est à symétrie sphérique autour de chaque point de la ligne d'univers de l'observateur fondamental. Dans le système de coordonnées $(x^0, r, \theta, \varphi)$ tel que $r = 0$ décrit l'observateur, la métrique de l'Univers peut s'écrire

$$ds^2 = -\mathrm{e}^{\nu(x^0,r)}(dx^0)^2 + \mathrm{e}^{\lambda(x^0,r)}dr^2 + \mathrm{e}^{\mu(x^0,r)}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Celle-ci doit être régulière en $r = 0$. Passons en coordonnées cartésiennes (x^i) associées à (r, θ, φ). La composante g_{00} ne change pas. Calculons $\partial_i \nu = \partial_r \nu \partial_i r = \partial_r \nu x^i / r$. Dans la limite $r \to 0$, nous avons une expression bien définie si $\partial_r \nu = 0$. Regardons maintenant la ligne d'univers de l'observateur fondamental en $r = 0$ dont la quadrivitesse u^μ a les composantes $(\mathrm{e}^{-\nu/2}, 0, 0, 0)$. Puisque le symbole de Christoffel Γ^r_{00} s'annule en $r = 0$, nous vérifions que l'observateur fondamental suit une géodésique du genre temps.

2. Deuxième hypothèse cosmologique.

   Il n'y a aucune raison pour que la position de l'observateur fondamental soit privilégiée. Ainsi il existe un flot de lignes d'univers d'observateurs fondamentaux dans tout l'Univers.

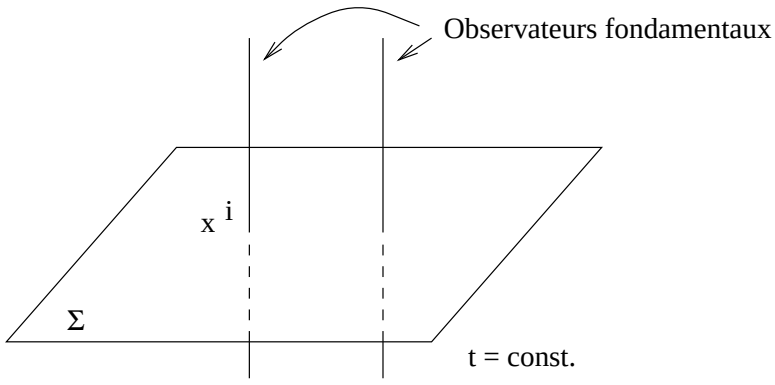
   On peut toujours supposer qu'il existe localement un système de coordonnées normales de Gauss (t, x^i) tel que la métrique s'écrive

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij}(t, x^k) dx^i dx^j$$

   dans laquelle les lignes d'univers $x^i = \text{const.}$ sont des géodésiques qui s'identifient aux observateurs fondamentaux. Puisque ceci est vrai globalement, l'espace-temps est le produit $\mathbb{R} \times \Sigma$ où Σ est une hypersurface du genre espace d'équation $t = \text{const.}$ On appelle t le temps cosmologique. La métrique induite sur chaque Σ est

$$d\sigma^2 = g_{ij}(t, x^k) dx^i dx^j.$$

   Cependant, nous avons de plus l'information capitale que chaque observateur $x^i = \text{const.}$ voit l'Univers isotrope.



Exploitons les deux hypothèses cosmologiques. Pour t fixé, la métrique g_{ij} de Σ est à symétrie sphérique par rappport à tous les points x^i. Cela signifie que le tenseur de Riemann ne présente pas de direction privilégiée. La seule façon d'écrire un tel tenseur est la suivante

$$R_{ijkl} = K(g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il}).$$

Par suite $R_{jl} = 2Kg_{jl}$ et $R = 6K$ et la conservation du tenseur d'Einstein $R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$ montre que K est une constante. On dit qu'on a un espace à courbure constante. Ces espaces ont le nombre maximun de symétries puisqu'ils possèdent six vecteurs de Killing.

Déterminons les métriques de ces espaces sous la forme

$$d\sigma^2 = \mathrm{e}^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

pour un choix de coordonnée radiale r. La métrique est à symétrie sphérique par rapport au point $r = 0$ qui a été choisi arbitrairement. La condition d'espace à courbure constante se traduit par les conditions

$$\frac{d\lambda}{dr}\mathrm{e}^{-\lambda} = 2Kr \quad \text{et} \quad \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) = Kr^2$$

qui conduisent à la métrique

$$d\sigma^2 = \frac{1}{(1 - Kr^2)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

C'est une détermination dans une carte ; il n'est pas exclu qu'on puisse l'étendre.

Il y a trois types d'espaces à courbure constante suivant le signe de K. On pose

$$K = \frac{k}{R^2} \quad \text{avec} \quad k = -1, 0, 1$$

où R est une constante ayant la dimension d'une longueur.

1. Espace à courbure négative $k = -1$

   Effectuons le changement de coordonnée $\dfrac{r}{R} = \sinh\chi$ avec $0 \leq \chi < \infty$, en notant que χ est sans dimension ; la métrique devient

   $$d\sigma^2 = R^2\left[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right].$$

   On obtient l'espace hyperbolique H^3. Il est dit ouvert car son volume est infini.

2. Espace à courbure nulle $k = 0$
   C'est l'espace euclidien à trois dimensions.

3. Espace à courbure positive $k = 1$

   Nous effectuons le changement de coordonnée $\dfrac{r}{R} = \sin\chi$ avec $0 \leq \chi < \pi/2$ mettant la métrique sous la forme

   $$d\sigma^2 = R^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right].$$

   Cependant l'intervalle de variation de χ peut être pris jusqu'à π assurant une extension de cet espace. On obtient alors la sphère S^3 qui est un espace fermé.

En réalité, la description mathématique est plus complexe car nous avons implicitement supposé que la topologie de l'espace est simplement connexe, c'est-à-dire que tout lacet est homotope à un point. Par exemple dans le cas euclidien, nous pouvons former un tore T^3 par identification des faces d'un cube. Le tore est localement euclidien mais la topologie globale est complètement différente. Pour éliminer ces topologies, on peut invoquer un argument de simplicité [4] mais finalement c'est l'observation qui doit trancher.

Revenons à l'espace-temps décrivant l'Univers. La quantité R constante sur chaque Σ va dépendre du temps t. Dans le système de coordonnées $(t, \chi, \theta, \varphi)$, la métrique cosmologique a la forme générale

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left[d\chi^2 + \sigma_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

$$\text{avec} \quad \sigma_k(\chi) = \begin{cases} \sinh\chi & k = -1 \quad 0 \leq \chi < \infty \\ \chi & k = 0 \quad 0 \leq \chi < \infty \\ \sin\chi & k = 1 \quad 0 \leq \chi < \pi \end{cases}$$

dans laquelle chaque hypersurface $t = \text{const.}$ est un espace à courbure $k/R^2(t)$. On dit que l'espace-temps cosmologique est homogène et isotrope. Chaque ligne d'univers $\chi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ et $\varphi = \text{const.}$ est celle d'un observateur fondamental. Bien sûr le choix $\chi = 0$ est arbitraire. Il reste une seule fonction $R(t)$ à déterminer qu'on appelle la fonction d'échelle. Le nom générique de ces espaces-temps est celui de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

L'Univers contient un fluide parfait qui est aussi homogène et isotrope. On comprend aisément qu'il ne soit pas en mouvement par rapport au flot des lignes d'univers des observateurs fondamentaux. Par suite, la quadri-vitesse du fluide u^μ a pour composantes $(1, 0, 0, 0)$ et ρ et p sont des fonctions de t.

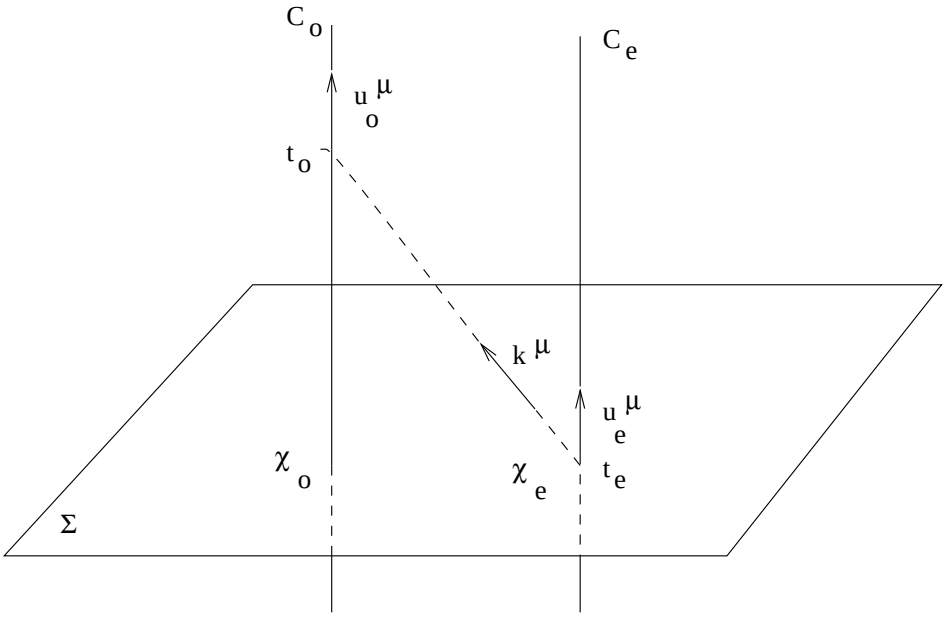
Nous aurions pu envisager une troisième hypothèse cosmologique, idée première d'Einstein en 1917. Il n'y a aucune raison pour que l'Univers soit différent au cours du temps [5]. Cela signifie que la métrique cosmologique doit être statique et la fonction $R(t)$ être une constante R_0. Nous verrons que l'observation élimine cette possibilité.

12.3 Effet Hubble du décalage vers le rouge

Il faut vérifier que ces métriques cosmologiques expliquent la loi de Hubble dans le cadre des théories métriques de la gravitation. Il faudrait tenir compte du mouvement de la galaxie émettrice, ou d'un autre objet, et de celui de l'observateur terrestre par rapport aux lignes de courant du fluide cosmologique. Pour simplifier nous prenons pour l'émission une ligne de courant $\chi = \chi_e$, $\theta = \theta_e$ et $\varphi = \varphi_e$, de quadri-vitesse $u_e^\mu = \delta_0^\mu$. Sans perte de généralité, nous choisissons pour le récepteur la ligne de courant $\chi_o = 0$, de quadri-vitesse $u_o^\mu = \delta_0^\mu$.

[4] En 1917, de Sitter pensait que l'espace Σ le plus simple pour $k = 1$ est l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^3$.

[5] Il voulait aussi que les hypersurfaces $t = \text{const.}$ soient fermées, $k = 1$, et cela impose $\Lambda > 0$ en théorie d'Einstein de la gravitation.



La lumière joignant l'émission et la réception suit une géodésique du genre lumière de vecteur de propagation k^μ pour un paramètre affine λ. Les fréquences d'émission, d'observation et le décalage vers le rouge sont respectivement

$$\nu_e \propto g_{\mu\nu} k^\mu u_e^\nu \quad , \quad \nu_o \propto g_{\mu\nu} k^\mu u_o^\nu \quad \text{et} \quad z = \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1.$$

A cause de la symétrie sphérique autour de $\chi_o = 0$, la trajectoire de la lumière est radiale en $\theta = \theta_e$ et $\varphi = \varphi_e$. La géodésique a pour équation paramétrique $t(\lambda)$ et $\chi(\lambda)$ et le vecteur-dérivée satisfait

$$-c^2 (k^t)^2 + R^2(t(\lambda)(k^\chi)^2 = 0.$$

Pour calculer les fréquences il suffit de connaître la composante k^t. L'équation de la géodésique peut s'écrire

$$\frac{dk_t}{d\lambda} = \frac{1}{2} \partial_t g_{\chi\chi} (k^\chi)^2.$$

On préfère déterminer k_t en fonction de t. Aussi on pose

$$k^t \frac{dk_t}{dt} = c^2 \frac{1}{R} \frac{d}{dt} R (k^t)^2 \quad \text{avec} \quad k_t = -c^2 k^t$$

qui permet de conclure que la valeur de la composante k^t en t est $[R(t)]^{-1}$ à un facteur constant près. Par conséquent, le rapport des fréquences est

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{k_e^t}{k_o^t} \quad \text{et ainsi} \quad 1 + z = \frac{R(t_o)}{R(t_e)}.$$

L'observation montre que les galaxies et les objets lointains ont des raies spectrales décalées vers le rouge, c'est-à-dire $z > 0$. Par conséquent, nous avons $R(t_e) < R(t_o)$ et

l'Univers est en expansion. Par conséquent la loi de Hubble exclut le modèle statique d'Einstein. Les quasars observés les plus lointains ont $z \approx 5$.

Si on connaissait le facteur d'échelle $R(t)$ on aurait un moyen de repérer les galaxies. Cependant dans un voisinage de l'observateur fondamental, il est clair qu'en première approximation la "distance" d à laquelle se trouve la galaxie émettrice est $c(t_o - t_e)$. Dans ce cas nous obtenons la formule simple

$$z \approx \frac{1}{R}\frac{d}{dt}R\Big|_{t=t_o}(t_o - t_e) \quad \text{soit} \quad z \approx H_0 \times \frac{d}{c}$$

où H_0 est la constante de Hubble

$$H_0 = \frac{1}{R(t_o)}\frac{d}{dt}R(t_o).$$

12.4 Relation entre luminosité apparente et luminosité absolue

Un des buts de la cosmologie est de déterminer par l'observation l'allure de la fonction d'échelle $R(t)$. On l'obtient en trouvant des relations entre des observables d'objets lointains. Nous allons prendre l'exemple de la relation qui existe entre la luminosité apparente et le décalage vers le rouge pour une luminosité absolue donnée [6]. On peut en déduire une définition de la distance de cet objet mais il doit être clair qu'il s'agit d'une convention servant de support à notre imagination.

Nous avons déjà étudié l'optique géométrique en théorie métrique de la gravitation. Pour une onde électromagnétique représentée par $\mathcal{A}^\mu$ dans la jauge de Lorentz, nous avons montré que le vecteur de propagation k^μ est géodésique et que $a_0^\mu k_\mu = 0$. On appelle $a = (a_0^\mu \overline{a}_{0\mu})^{1/2}$ l'amplidude de l'onde. On vérifie que l'ordre en ω de l'équation déterminant le potentiel électromagnétique A^μ conduit à

$$\nabla_\mu \left(a^2 k^\mu\right) = 0$$

qui est équivalent à la loi de conservation du nombre de photons à l'approximation de l'optique géométrique. Compte tenu de l'expression du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique, le tenseur énergie-impulsion de l'onde est

$$T^{\mu\nu} \propto a^2 k^\mu k^\nu$$

qui satisfait $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ à cette approximation.

Considérons un observateur $\mathcal{C}$ de quadri-vitesse u^μ. La densité d'énergie électromagnétique pour cet observateur est $T^{\mu\nu}u_\mu u_\nu$. Pour une onde il observera un flux d'énergie dans

[6] On utilise en fait les magnitudes apparentes et absolues des objets.

la direction de propagation $n^\mu[u]$ de l'onde égal à la densité d'énergie. Par conséquent, nous appelons luminosité apparente de la source lumineuse pour cet observateur la quantité

$$l[u] = -cT^{\mu\nu}u_\mu n_\nu[u].$$

Plaçons nous dans l'espace-temps cosmologique. L'objet, supposé ponctuel, est en $\chi_e = 0$ et il émet des ondes sphériques. Les géodésiques radiales du genre lumière ont un vecteur tangent

$$k^\mu(t,\chi,\theta,\varphi) = \left(\frac{R(t_e)}{cR(t)}, \frac{R(t_e)}{R^2(t)}, 0, 0\right)$$

où t_e est le temps d'émission. Il est proportionnel à un facteur constant au vecteur de propagation. La direction de propagation est $n_\mu[u] = (0, R(t), 0, 0)$. Par conséquent la luminosité apparente de l'objet vue par un observateur en $\chi = \chi_o$ au temps t_o est

$$l_o \propto a^2 \frac{R^2(t_e)}{R^2(t_o)}.$$

L'amplitude a au cours du temps de l'onde sphérique s'obtient par intégration de l'équation vérifiée par a^2k^μ ; on trouve

$$a^2\sigma_k^2(\chi)R^2(t) = C$$

où C est une constante pour l'instant arbitraire. Pour un observateur u_e^ν à la position de la source, nous intégrons le flux d'énergie sur une sphère de rayon infinitésimal dans son espace. Nous appelons donc luminosité absolue la quantité

$$L_e = -\lim_{\chi\to 0} c \int_{S^2} T^{\nu\mu}u_{e\nu}n_\mu[u_e]R^2(t_e)\sigma_k^2(\chi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

et par suite $L_e \propto 4\pi C$. Nous obtenons ainsi la relation entre la luminosité apparente et la luminosité absolue

$$l_o = \frac{R^2(t_e)L_e}{4\pi R^4(t_o)\sigma_k^2(\chi_o)}.$$

On définit par convention la distance-luminosité $d_L(z)$ par $l_o = L_e/4\pi d_L^2(z)$ qui généralise la relation en espace-temps minkowskien. La connaissance de $d_L(z)$ est équivalente à celle de $R(t)$.

A partir de la définition de z on obtient immédiatement le développement suivant

$$z = H_0(t_o - t_e) + (1 + \frac{1}{2}q_0)H_0^2(t_o - t_e)^2 + \cdots$$

où q_0 est le paramètre de décélération défini par

$$q_0 = -\frac{1}{R(t_o)H_0^2}\frac{d^2}{dt^2}R\Big|_{t=t_o}.$$

En inversant, on détermine $t_o - t_e$ en fonction de z

$$t_o - t_e = \frac{1}{H_0} z \left(1 - (1 + \frac{1}{2} q_0) z + \cdots \right).$$

Il reste à calculer χ_o par l'équation de la géodésique du genre lumière

$$\chi_o = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} = \frac{c(t_o - t_e)}{R(t_o)} \left(1 + \frac{1}{2} H_0 (t_o - t_e) + \cdots \right).$$

Puisque $\sigma_k(\chi) = \chi + O(\chi^3)$, nous avons finalement la relation approchée

$$l_o = \frac{L_e H_0^2}{4\pi c^2 z^2} \left[1 + (-1 + q_0) z + \cdots \right].$$

L'observation de l_o et de z des objets dont on suppose connaître L_e, ce qui est un problème difficile en astrophysique, permet de déterminer les paramètres cosmologiques H_0 et q_0. Bien sûr pour de petites valeurs de z on retrouve la loi de Hubble $d_L(z) \approx cz/H_0$.

12.5 Modèles cosmologiques et évolution de l'Univers

Grâce simplement aux deux hypothèses cosmologiques, la forme de la métrique de l'espace-temps décrivant l'Univers a été déterminée sans utiliser les équations de la gravitation. Celles-ci devraient nous donner des informations supplémentaires. Ecrivons les équations d'Einstein avec constante cosmologique Λ puisque même petite elle peut avoir une grande influence sur l'évolution de l'Univers

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique qui sert à schématiser la distribution matérielle. Introduisant la forme de la métrique dans ces équations, nous obtenons que la forme du tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique est celle d'un fluide parfait de densité de masse ρ et de pression p dans lequel la quadri-vitesse u^μ a les composantes δ_0^μ. La densité de masse ρ et la pression p sont données par

$$\frac{3}{c^2 R^2} \left(kc^2 + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right) - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho,$$

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{2}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{kc^2}{R^2} \right) + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} p.$$

Si on admet une équation d'état $\rho(p)$ alors on pourra déterminer la fonction d'échelle $R(t)$ dans les cas $k = -1, 0, 1$ pour chaque valeur de la constante cosmologique Λ.

Nous notons que la loi de conservation $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ s'écrit

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = 0.$$

On en déduit que si la pression est nulle alors $\rho \propto 1/R^3$ au cours du temps. En revanche pour un gaz de particules ultra-relativistes ou bien de particules sans masse on obtient $\rho_r \propto 1/R_r^4$ au cours du temps.

Récrivons la première équation d'Einstein à l'aide de notations spécifiques. En effet, une fois connue la constante de Hubble H_0, on définit la densité critique ρ_C

$$\rho_C = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 2 \times 10^{-26}\, h^2 \text{ kg}\,.\,\text{m}^{-3}.$$

On introduit les paramètres sans dimension

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_C}$$

où ρ_0 est la densité de masse actuelle au temps t_o et

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}.$$

On obtient alors

$$\Omega_\Lambda + \Omega_0 = 1 + \frac{kc^2}{R^2(t_o)H_0^2}.$$

Un des problèmes en cosmologie est de savoir évaluer Ω_0. Aux dernières nouvelles, il serait en gros la somme des contributions suivantes :

$$\Omega_0 \approx \begin{cases} 0,01 & \text{d'après la matière visible} \\ 0,1 & \text{avec en plus la matière sombre baryonique} \\ 0,3 & \text{avec en plus les formes non baryoniques de la matière sombre} \end{cases}$$

Ainsi, la plus grande part de la matière n'est pas visible. Il y a beaucoup de matière sombre. Les neutrinos massifs font partie des formes non baryoniques de la matière mais bien d'autres spéculations issues de la théorie des particules élémentaires sont possibles. Si l'on souhaite que $\Omega_\Lambda + \Omega_0 = 1$ pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons, alors il existe une constante cosmologique avec $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ [7].

La deuxième équation d'Einstein fournit des informations supplémentaires

$$2q_0 + 2\Omega_\Lambda = \Omega_0 + \frac{8\pi G p_0}{c^2 H_0^2}$$

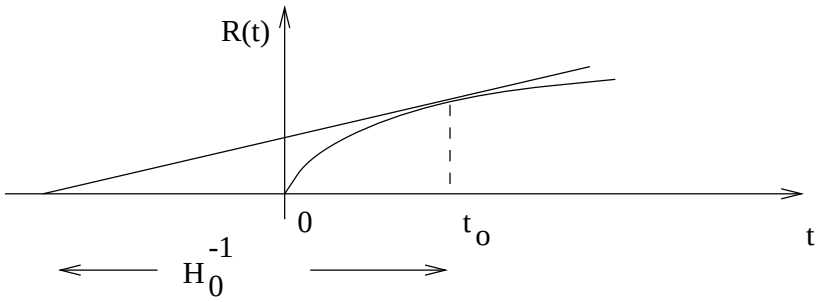
[7] On a $\Lambda = 8\pi G\Omega_\Lambda \rho_C/c^2$ dont la valeur numérique donne la borne supérieure sur Λ précédemment donnée, $\Lambda \approx 10^{-122}\, \ell_P^{-2}$.

si l'on a une détermination de q_0 par l'observation des décalages vers le rouge. Un cas favorable serait $p_0 = 0$. Cependant, on peut imaginer que la matière ait une pression négative si le tenseur énergie-impulsion est celui de champs cosmiques.

Dérivons une autre relation en formant $\rho c^2 + 3p$ à partir des équations d'Einstein

$$\frac{3}{c^2}\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dt^2} = \Lambda - \frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 + 3p).$$

L'hypothèse physique sur la matière usuelle que $\rho c^2 + 3p > 0$ [8] conduit dans le cas $\Lambda = 0$ au fait que la dérivée seconde de R est négative, $\ddot{R}(t) < 0$. Il en résulte que si $\dot{R}(t_o) > 0$ au temps actuel t_o comme le montre l'observation alors $R(t)$ s'est annulé dans le passé en un temps que l'on prend pour origine. Nous notons que t_o est alors toujours plus petit que $1/H_0$. En $t = 0$, le tenseur de Riemann est singulier et l'espace-temps ne peut pas être prolongé au-delà. La densité de masse ρ devient également infinie. C'est ce qu'on appelle le *big bang* qui semble inévitable dans le cadre de la relativité générale avec $\Lambda = 0$. Cependant



cet argument n'est pas décisif puisque l'on pense actuellement que $\Lambda \neq 0$.

L'espace-temps cosmologique définissant par lui-même le temps t dire qu'il n'existe pas avant $t = 0$ n'a pas vraiment de sens. De toute façon la gravitation quantique doit intervenir avant le temps de Planck t_P et on évite ainsi, au moins du point de vue classique, de se poser la question : qu'est-ce qui se passe avant ?

Sous ces hypothèses, l'Univers est ultérieurement en expansion et l'expansion est en décélération. Cependant en présence d'une constante cosmologique ou d'un champ cosmique l'Univers pourrait être en accélération comme semble-t-il observé vers $z = 1$.

Si dans l'Univers la pression p est nulle alors nous pouvons explicitement déterminer le facteur d'échelle $R(t)$ en supposant la constante cosmologique nulle. L'équation différentielle à résoudre est

$$\frac{2}{R}\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2} = 0 \quad \text{avec} \quad k = -1, 0, 1.$$

dont on sait déterminer la solution générale.

[8] C'est une conséquence de la condition d'énergie forte $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)u^\mu u^\nu \geq 0$ pour tout u^μ tel que $u^\mu u_\mu = -1$.

1. Dans le cas $k = -1$, on trouve une expression implicite de $R(t)$

$$R(\psi) = a_0(\cosh\psi - 1) \quad \text{et} \quad t(\psi) = a_0(\sinh\psi - \psi).$$

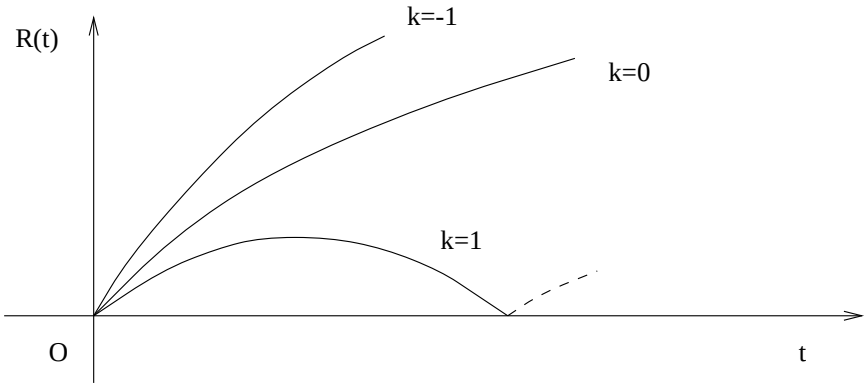
2. Dans le cas $k = 0$, on trouve explicitement

$$R(t) = a_0 t^{2/3}$$

qui définit l'espace-temps d'Einstein-de Sitter. Nous l'avons déjà rencontré dans l'étude de l'effondrement gravitationnel d'une boule de fluide sans pression.

3. Dans le cas $k = 1$, on trouve une expression implicite de $R(t)$

$$R(\psi) = a_0(1 - \cos\psi) \quad \text{et} \quad t(\psi) = a_0(\psi - \sin\psi).$$



Naturellement lorsque $t \to 0$ nous retrouvons le *big bang*. Cependant l'Univers primordial ne peut pas être schématisé par un fluide sans pression. Après le *big bang*, nous voyons que ces modèles cosmologiques entrent dans une phase d'expansion puisque le facteur d'échelle croît avec le temps. Cependant l'évolution future de l'Univers dépend du signe de k. Pour $k = -1$ et $k = 0$, il y a une expansion infinie. En revanche pour $k = 1$, le facteur d'échelle va de nouveau tendre vers 0. Ce serait le *big crunch*. On pourrait imaginer un éternel recommencement de l'Univers. Dans le cas général l'analyse de l'allure de $R(t)$ dépend de la valeur de la constante cosmologique.

Pour reconstituer l'histoire de l'Univers primordial la théorie des interactions fondamentales est essentielle, en particulier l'hypothétique théorie de la grande unification GUT *(Grand Unified Theory)* à 10^{15} GeV. Vu les très grandes énergies en jeu, on estime que le tenseur énergie-impulsion est celui d'un gaz de particules ultra-relativistes à la température T. Quand $k = 0$ et $\Lambda = 0$, les équations d'Einstein s'intègrent pour donner

$$R_r(t) = b_r t^{1/2}$$

qui est également le comportement asymptotique pour $t \to 0$ dans les cas $k = \pm 1$. De plus, puisque $\rho_r \propto T^4$ et $\rho_r \propto 1/R_r^4$, nous avons

$$TR_r = \text{ constante.}$$

Ainsi on parle souvent de *big bang* chaud puisque la température augmente quand on remonte dans le passé.

Nous n'allons pas étudier l'évolution de l'Univers primordial quand celui-ci se refroidit. Nous signalons simplement la nucléosynthèse primordiale aux alentours de 10^9 K, quelques minutes après le *big bang*, durant laquelle se constituent les noyaux d'atomes légers.

Une étape très importante de l'évolution de l'Univers se situe à environ 3 000 K quand son âge est de l'ordre de 300 000 ans. Un peu avant ce temps les photons et le gaz de noyaux et d'électrons sont à l'équilibre thermodynamique. Les énergies en jeu diminuant il y a recombinaison : les noyaux et les électrons forment des atomes, essentiellement de l'hydrogène et de l'hélium. Les photons peuvent alors se propager librement. Il y a découplage entre le rayonnement, gardant un spectre de corps noir, et la matière. C'est l'hypersurface de dernière diffusion à $t = t_d$ correspondant à $z \approx 1\,000$. Après ce temps, on peut considérer que le tenseur énergie-impulsion de la matière proprement dite et celui du rayonnement de corps noir sont séparément conservés. Ainsi, la loi de conservation s'applique à ρ_γ et p_γ pour le facteur d'échelle $R(t)$ et donc ρ_γ décroît plus rapidement que ρ. Par conséquent, ρ_γ et p_γ ne contribuent presque plus au $T_{\mu\nu}$ source des équations d'Einstein et le facteur d'échelle $R(t)$ est déterminé par la matière dans l'Univers actuel. On dit que l'Univers est dominé par la matière. Le fond diffus cosmologique observé est ce gaz de photons qui conserve un spectre de corps noir mais dont la température $T \propto 1/R$ en vertu de la loi de conservation de ρ_γ et p_γ exprimée en fonction de T. Elle diminue donc au cours de l'évolution de l'Univers.

L'observation du fond diffus cosmologique est considérée comme la preuve éclatante que l'Univers a été plus chaud dans le passé que de nos jours.

12.6 Horizon des particules et densité critique

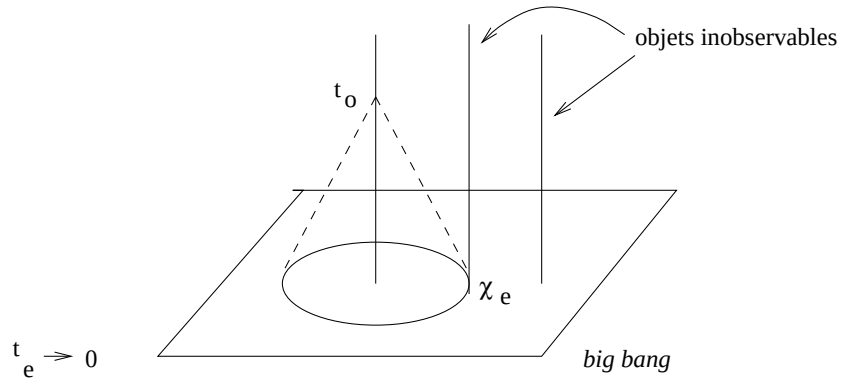
Nous avons étudié la propagation de la lumière dans l'espace-temps cosmologique. Pour un observateur en $\chi_o = 0$ observant au temps t_o, la lumière a été issue du point (t_e, χ_e) vérifiant

$$\chi_e = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{R(t)}.$$

Si cette intégrale converge quand $t_e \to 0$, l'instant du *big bang*, alors il y a un horizon des particules. Les objets au-delà de la valeur limite χ_e sont inobservables.

En réalité la lumière ne peut se propager qu'après le temps t_d définissant l'hypersurface de dernière diffusion. Les photons du fond diffus cosmologique que l'on détecte ont été émis en ce temps t_d à une certaine position $(\chi_e, \theta_e, \varphi_e)$. Pour voir bien clairement ce point, nous définissons la coordonnée sans dimension η en fonction de t par

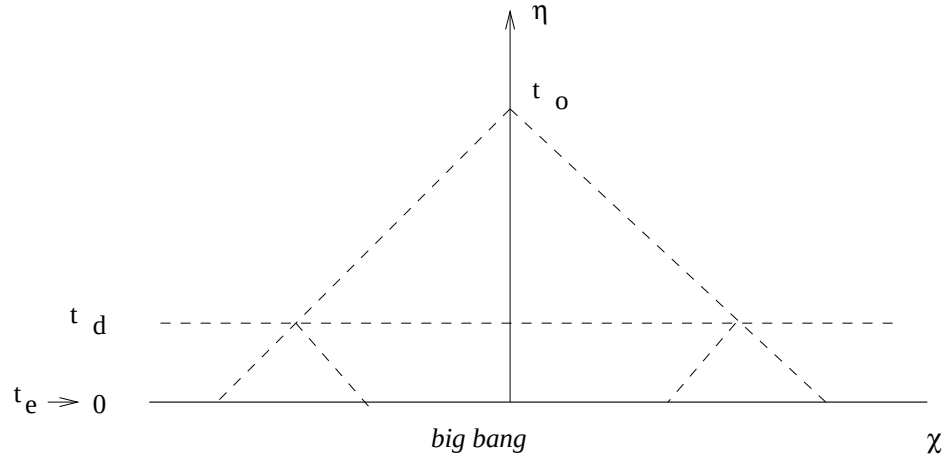
$$\eta = c \int^{t} \frac{dt'}{R(t')}$$



qui permet d'écrire la métrique de l'espace-temps cosmologique sous la forme

$$ds^2 = R^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sigma_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right].$$

Dans ces coordonnées, les trajectoires radiales de la lumière, $\theta = \theta_e$ et $\varphi = \varphi_e$ sont représentées par les droites à 45°. Nous avons représenté sur le diagramme les directions opposées d'observation.



Puisque dans l'Univers primordial on a $R_r(t) \propto t^{1/2}$ l'intégrale converge quand $t \to 0$ et ainsi le *big bang* est en un temps η fini que l'on peut prendre comme origine. On trouve $R_r(\eta) \propto \eta$.

Pour simplifier, nous supposons que le facteur d'échelle est $at^{2/3}$ pour $t < t_d$ et $bt^{1/2}$ pour $t > t_d$ avec la condition de continuité $at_d^{2/3} = bt_d^{1/2}$. Nous introduisons

$$\eta_m = \frac{c}{a}\int_{t_d}^{t_o}\frac{dt}{t^{2/3}} = \frac{3c}{a}\left(t_o^{1/3} - t_d^{1/3}\right) \quad \text{et} \quad \eta_r = \frac{c}{b}\int_0^{t_d}\frac{dt}{t^{1/2}} = \frac{2c}{b}t_d^{1/2}$$

qui donnent l'horizon des particules soit de t_o soit du *big bang* $t = 0$ sur l'hypersurface de dernière diffusion. Une simple manipulation montre que

$$\frac{\eta_m}{\eta_r} \approx \frac{3}{2}\left(\frac{t_o}{t_d}\right)^{1/3} \simeq 100.$$

Par conséquent, des régions de l'hypersurface de dernière diffusion sont causalement déconnectées depuis le *big bang*. Il se pose alors la question : comment expliquer que ce rayonnement apparaisse actuellement isotrope puisqu'il n'a pas eu de passé commun ? Bien sûr, on peut dire que l'Univers s'est créé parfaitement homogène et isotrope et comme une conséquence que le fond diffus cosmologique est aussi homogène et isotrope.

Une autre question a suscité l'intérêt : comment se fait-il que la densité de l'Univers soit voisine de la densité critique ρ_C ? En effet introduisons les fonctions suivantes

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}\dot{R}(t) \quad \text{et} \quad \Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_C(t)} \quad \text{avec} \quad \rho_C(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}.$$

De la première équation d'Einstein, avec $\Lambda = 0$ pour simplifier, nous obtenons

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{R^2(t)H^2(t)}.$$

Suivant que l'Univers est dominé par la matière ou la radiation nous avons respectivement

$$\Omega(t) - 1 \propto t^{2/3} \quad \text{ou} \quad \Omega(t) - 1 \propto t$$

Par conséquent à titre d'exemple, la comparaison pour $t = 10^{-34}$ s et pour le temps actuel t_o, environ 3×10^{17} s, donne

$$|\,\Omega(t = 10^{-34}\text{ s}) - 1\,| \approx 10^{-50} \times |\,\Omega_0 - 1\,|\,.$$

Ainsi l'Univers se serait créé quand $t \to 0$ avec $\Omega(t)$ excessivement voisin de un pour obtenir le Ω_0 actuel.

12.7 Inflation et espace-temps de de Sitter

Pour évacuer ces problèmes, on a récemment proposé que l'Univers puisse avoir eu une phase inflatoire. Pour des raisons quantiques à 10^{14} GeV, l'Univers à la fin de la grande unification, environ à 10^{-34} s, aurait eu un tenseur énergie-impulsion de type fluide parfait avec $p \approx -\rho c^2$ durant 10^{-32} s (tout ceci à des facteurs 10 près).

Prenons la peine d'exposer un modèle-jouet de théorie des champs qui conduit à l'inflation. On suppose qu'il y a un champ scalaire réel ϕ de lagrangien

$$L[\phi, g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi).$$

En variant par rapport à la métrique nous déterminons le tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right).$$

Dans le cas particulier de la métrique cosmologique, le champ scalaire ne dépend que du temps. Nous trouvons alors que les composantes du tenseur énergie-impulsion sont

$$T_t^t = -\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad \text{et} \quad T_j^i = \delta_j^i \left(\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right).$$

Pour $k = 0$ les équations d'Einstein se réduisent à

$$\frac{3}{R^2}\dot{R}^2 = 8\pi G \left(\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right)$$

et l'équation du champ scalaire est

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{R}\dot{R}\dot{\phi} + c^2 \frac{dV}{d\phi} = 0.$$

On voit bien que si l'énergie cinétique du champ est négligeable devant l'énergie potentielle alors on a bien un tenseur énergie-impulsion de la forme d'un fluide parfait avec $\rho c^2 \approx -p$. C'est ce qu'on appelle le régime de roulement lent. Tout se passe comme s'il y avait une constante cosmologique $\Lambda_{eff} \approx 8\pi G V(0)/c^2$. Au cours du temps elle varie lentement car dans cette situation $V(\phi) \approx V(0)$. Toutefois, elle disparaît quand le champ ϕ atteint son minimum en $V = 0$.

Contentons nous de résoudre les équations d'Einstein dans le cas $k = 0$ pour Λ_{eff}. Nous trouvons aisément que le facteur d'échelle a pour expression

$$R_I(t) = a_I \exp H_I t \quad \text{avec} \quad H_I = c\sqrt{\frac{\Lambda_{eff}}{3}}.$$

Ainsi l'expansion de l'Univers est en accélération puisque $\ddot{R}(t) > 0$ et même exponentiellement.

Compte tenu des valeurs numériques admises en inflation, on aurait *grosso modo* $H \simeq 10^{34}$ s^{-1} et $t_f - t_i \simeq 10^{-32}$ s et donc $H_I(t_f - t_i) \simeq 100$. Il en résulte un accroissement gigantesque du facteur d'échelle durant cette phase inflatoire

$$\frac{R_f}{R_i} = \exp H_I(t_f - t_i) \quad \text{soit} \quad \frac{R_f}{R_i} \simeq 10^{43}.$$

Examinons l'horizon des particules en f_f pour la valeur t_i. Elle est donnée par

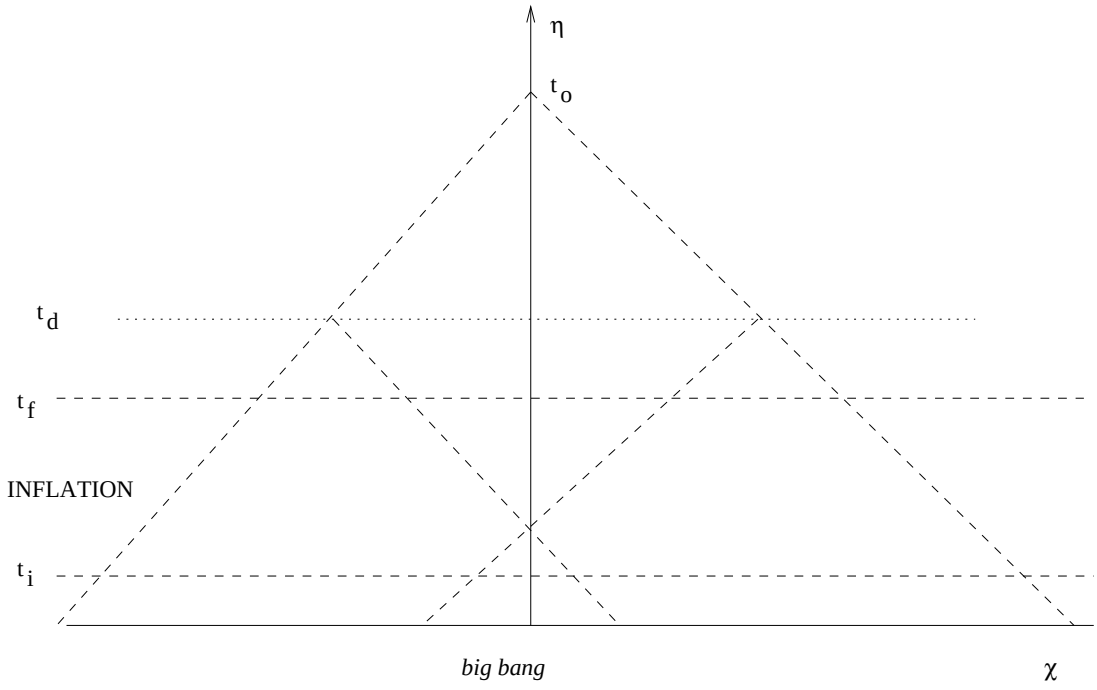
$$\eta_I = \frac{c}{a_I}\int_{t_i}^{t_f} \exp(-H_I t)dt = \frac{c}{a_I H_I}\left(\exp(-H_I t_i) - \exp(-H_I t_f)\right)$$

De la même façon que précédemment, nous faisons un raccordement en $t = t_f$ en imposant $bt_f^{1/2} = a_I \exp H_I t_f$. Le calcul du rapport η_r/η_I montre qu'il devient excessivement petit. Il en résulte qu'il n'y a plus de problème d'horizon des particules.

Voyons la situation avec la coordonnée η. Durant la phase inflatoire le facteur d'échelle a pour expression

$$R_I(\eta) = -\frac{b_I}{\eta} \quad \text{avec} \quad -\infty < \eta < 0$$

Ainsi dans la représentation avec la coordonnée η de l'espace-temps cosmologique, l'inflation recule le *big bang* et nous voyons que les directions opposées d'observation ont alors une intersection causale.



Examinons maintenant le problème de la densité critique. Dans cette phase inflatoire avec $k = 0$, nous avons évidemment $\Omega(t) = 1$. Cependant, il se peut que l'Univers ne se soit pas créé avec $k = 0$. Il faut dans ce cas intégrer les équations d'Einstein durant la phase inflatoire avec $k = \pm 1$. Respectivement pour $k = 1$ et $k = -1$, nous trouvons

$$R_I^{(1)}(t) = \frac{c}{H_I} \cosh H_I(t - t_O) \quad \text{et} \quad R_I^{(-1)}(t) = \frac{c}{H_I} \sinh H_I(t - t_O).$$

Nous pouvons alors déterminer explicitement $\Omega(t)$. Entre le début et la fin de la phase inflatoire, nous trouvons *grosso modo*

$$\Omega_i \approx 10^{86} \Omega_f.$$

Ainsi même si Ω_i n'est pas voisin de un, nous aurons Ω_f tellement voisin de un que l'on peut penser que de nos jours nous devrions effectivement avoir $\Omega_0 \simeq 1$.

Cette théorie de l'inflation a eu un succès considérable dans un schéma évidemment plus complexe que celui que nous venons d'exposer. La densité d'énergie de l'Univers actuel,

incluant la contribution de la constante cosmologique, devrait être égale à la densité critique. Une conséquence importante est que les fluctuations primordiales seraient produites par un mécanisme d'origine quantique. Elles conduiraient ensuite aux perturbations classiques de l'Univers qui donnent naissance aux grandes structures. Ces hypothèses seraient testables par l'étude des anisotropies du fond diffus cosmologique qui ont été récemment détectées par le satellite COBE et qui vont faire l'objet d'autres expériences satellitaires comme PLANCK.

Prenons la peine pour terminer de faire l'étude géométrique de l'espace-temps cosmologique de la phase inflatoire dont pour $k = 0$ nous rappelons la métrique

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \exp 2Ht \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

en posant $H = H_I$ et en absorbant a_I dans une redéfinition de la coordonnée t. Elle décrit localement un espace-temps à courbure constante positive puisqu'on vérifie que

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\Lambda_{eff}}{3}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}).$$

Nous effectuons le changement de coordonnées

$$t = T + \frac{1}{H}\ln\left(1 - \frac{H^2}{c^2}R^2\right) \quad \text{et} \quad r = \frac{R}{\sqrt{1 - \dfrac{H^2}{c^2}R^2}}\exp(-HT)$$

défini dans l'ouvert $0 \leq R < c^2/H^2$. La métrique prend alors la forme statique suivante

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{H^2}{c^2}R^2\right)dT^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{H^2}{c^2}R^2}dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Tout l'effet de l'expansion cosmologique venait du fait que nous privilégions les hypersurfaces $t(T, R) = \text{const.}$ de cet espace-temps.

Du point de vue géométrique, l'espace-temps à courbure constante positive s'appelle l'espace-temps de de Sitter [9]. Dans le système de coordonnées $(\overline{t}, \chi, \theta, \varphi)$ avec $0 \leq \chi < \pi$, la métrique de de Sitter s'écrit

$$ds^2 = -c^2 d\overline{t}^2 + \frac{c^2}{H^2}\cosh^2 H\overline{t}\left[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right].$$

Nous remarquons que la topologie est $\mathbb{R} \times S^3$ puisque les hypersurfaces $\overline{t} = \text{const.}$ sont des sphères S^3. Cet espace-temps a le nombre maximun de symétries puisqu'il possède dix vecteurs de Killing.

Le système de coordonnées (t, r, θ, φ), initialement introduit, ne recouvre que la moitié de l'espace-temps de de Sitter puisque nous avons le changement de coordonnées

$$r(\overline{t}, \chi) = \frac{\cosh H\overline{t}\sin\chi}{\cosh H\overline{t}\cos\chi + \sinh H\overline{t}},$$

[9] Le cas de la courbure constante négative définit l'espace-temps d'anti-de Sitter.

$$t(\bar{t},\chi) = \frac{1}{H}\ln\left(\cosh H\bar{t}\cos\chi + \sinh H\bar{t}\right)$$

dans l'ouvert de l'espace-temps de Sitter défini par $\cosh H\bar{t}\cos\chi + \sinh H\bar{t} > 0$. Nous notons que l'hypersurface correspondant à $t = -\infty$ est du genre lumière. Elle coïncide avec l'hypersurface $R = c/H$ dans les coordonnées (T, R, θ, φ). Ainsi, un observateur de ligne d'univers $R = 0$ ne peut pas voir au-delà de la surface $R = c/H$. Ceci est vrai pour tous les points de l'espace-temps de de Sitter. Il y a donc un horizon mais qui est dépendant du choix d'un observateur.

Usuellement, on représente l'espace-temps de de Sitter comme étant une hypersurface dans un espace minkowskien à cinq dimensions. Celle-ci a l'équation d'un hyperboloïde

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = \frac{c^2}{H^2}.$$

En fonction des paramètres $(\bar{t}, \chi, \theta, \varphi)$, son équation est

$$\frac{H}{c}X^0 = \sinh H\bar{t} \quad , \quad \frac{H}{c}X^1 = \cosh H\bar{t}\cos\chi \quad , \quad \frac{H}{c}X^2 = \cosh H\bar{t}\sin\chi\cos\theta \ ,$$

$$\frac{H}{c}X^3 = \cosh H\bar{t}\sinh\chi\sin\theta\sin\varphi \quad \text{et} \quad \frac{H}{c}X^4 = \cosh H\bar{t}\sinh\chi\sin\theta\cos\varphi.$$

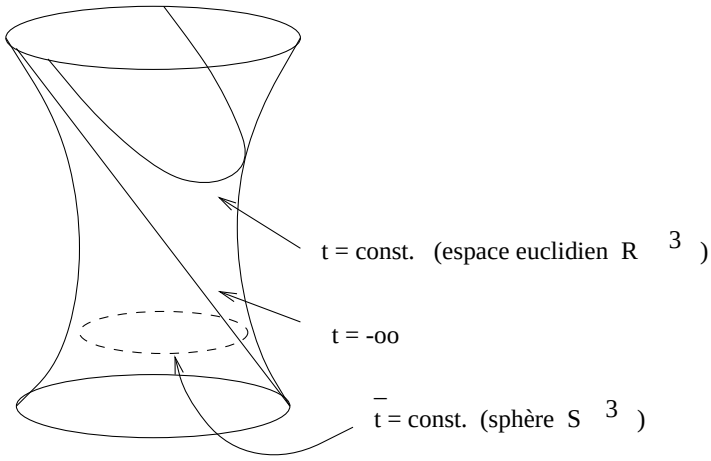
La métrique induite en coordonnées $(\bar{t}, \chi, \theta, \varphi)$, notées (x^μ), a pour expression

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB}\frac{\partial X^A}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^B}{\partial x^\nu} \quad (A, B = 0, \ldots, 4)$$

et elle est bien celle de de Sitter.

Dans cette représentation, nous voyons bien que le système de coordonnées (t, r, θ, φ) ne décrit qu'une moitié de l'espace-temps de de Sitter puisque

$$Ht = \ln\left(\frac{H}{c}(X^0 + X^1)\right) \quad \text{avec} \quad X^0 + X^1 > 0.$$


t = const. (espace euclidien R 3)
t = -oo
t = const. (sphère S 3)

Annexe A

Compléments de géométrie et de relativité générale

A.1 Algèbre extérieure et différentiation extérieure

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On appelle p-forme une forme p-linéaire alternée de E. C'est donc un tenseur p fois covariant complètement antisymétrique. L'ensemble des p-formes constitue un espace vectoriel $\bigwedge_p \mathrm{E}$. On note que $\bigwedge_0 \mathrm{E} = I\!R$.

Soient p 1-formes, c'est-à-dire des formes ϕ^1, ..., ϕ^p. On définit le produit extérieur de ces p formes comme étant la p-forme définie par sa valeur sur p vecteurs X_1, ..., X_p suivant la formule

$$\left(\phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^p\right)(X_1, \ldots, X_p) = \epsilon_{i_1,\ldots i_p} \phi^{i_1}(X_1) \cdots \phi^{i_p}(X_p)$$

où $\epsilon_{i_1 \ldots i_p}$ est le symbole de Levi-Civita.

Soit e^i une base de E*. A l'aide du produit extérieur, on construit une base de $\bigwedge_p \mathrm{E}$ formée de

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n.$$

La dimension de $\bigwedge_p \mathrm{E}$ est donc C_n^p. Ainsi, $p \leq n$ et la dimension de $\bigwedge_n \mathrm{E}$ est un. Une p-forme ω s'exprime dans cette base

$$\omega = \omega_{<i_1 \ldots i_p>} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$$

où les $\omega_{<i_1 \ldots i_p>}$ s'appellent les composantes strictes de ω. Il faut faire attention que les composantes strictes ne se transforment pas comme celles d'un tenseur.

Il est commode d'introduire une généralisation du symbole de Levi-Civita. On définit $\epsilon^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}$ comme valant 1 si $j_1 \ldots j_p$ est une permutation paire de $i_1 \ldots i_p$, -1 pour une permutation impaire et 0 autrement, en formule

$$\epsilon^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} = \det \begin{pmatrix} \delta^{j_1}_{i_1} & \ldots & \delta^{j_p}_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{j_1}_{i_p} & \ldots & \delta^{j_p}_{i_p} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

On note que $\epsilon_i^j = \delta_j^i$ et que $\epsilon_{i_1\dots i_p}^{1\dots p} = \epsilon_{i_1\dots i_p}$.

On peut alors récrire les éléments de la base sous la forme

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} = \epsilon_{j_1\dots j_p}^{i_1\dots i_p} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p}.$$

Par suite, en tant que tenseur p fois covariant, les composantes covariantes de ω sont

$$\omega_{i_1\dots i_p} = \epsilon_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_p} \omega_{<j_1\dots j_p>}.$$

Dans la pratique, on écrit

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1\dots i_p} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}.$$

On a la notion de produit extérieur d'une p-forme α de compsantes $\alpha_{i_1\dots i_p}$ et d'une q-forme β de composantes $\beta_{j_1\dots j_q}$. On définit la $p+q$-forme par la formule

$$(\alpha \wedge \beta)_{i_1\dots i_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} \epsilon_{i_1\dots\dots\dots i_{p+q}}^{j_1\dots j_p k_1\dots k_q} \alpha_{j_1\dots j_p} \beta_{k_1\dots k_q}.$$

On note l'identité

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

On peut bien sûr définir des champs de p-formes dans un espace affine et plus généralement sur une variété différentiable. Pour un système de coodonnées (x^i), la base canoniquement associée des formes est formée des dx^i. On rappelle qu'on écrit $e^{\underline{i}}$ pour une base quelconque des formes afin de bien les distinguer.

Soit une p-forme α qui s'écrit

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

La différentielle extérieure de α est une $(p+1)$-forme définie par

$$d\alpha = \frac{1}{p!} \partial_j \alpha_{i_1\dots i_p} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

que l'on récrit

$$d\alpha = \frac{1}{(p+1)!} \epsilon_{k_1\dots k_{p+1}}^{j i_1\dots i_p} \partial_j \alpha_{i_1\dots i_p} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{p+1}}.$$

Ainsi, les composantes de $d\alpha$ sont

$$(d\alpha)_{k_1\dots k_{p+1}} = \epsilon_{k_1\dots k_{p+1}}^{j i_1\dots i_p} \partial_j \alpha_{i_1\dots i_p}.$$

On note l'identité

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

Enfin, on a la propriété fondamentale

$$d^2\alpha = 0.$$

Réciproquement, si une p-forme β satisfait $d\beta = 0$ alors il existe au moins localement une $(p-1)$-forme α telle que $\beta = d\alpha$.

On a aussi la notion de p-formes à valeurs dans un espace vectoriel M. C'est un élément de $\mathrm{M} \otimes \bigwedge_p \mathrm{E}$. Soit ϵ_A une base de M, on a $\Phi = \epsilon_A \otimes \alpha^A$ où les α^A sont des p-formes. La différentielle extérieure de Φ est $d\Phi = \epsilon_A \otimes d\alpha^A$.

A.2 1-forme de connexion

Soit une variété différentiable munie d'une métrique g et soit une base orthonormée formée des champs de vecteurs $e_{\underline{a}}$ $(a = 1, \ldots, n)$. A titre d'exemple, on prend comme métrique $\eta_{\underline{a}\,\underline{b}}$ dans la base $e_{\underline{a}}$. Une base duale est constituée des 1-formes $e^{\underline{b}}$ définies par

$$e^{\underline{b}}_i = \eta^{\underline{b}\,\underline{a}} g_{ij} e^j_{\underline{a}}$$

dans un système de coordonnées (x^i). On remarque que les $e^{\underline{a}}$ s'interprètent comme des 1-formes à valeur vectorielle.

On considère une connexion métrique ∇, c'est-à-dire telle que la dérivée covariante de la métrique est nulle. On définit la 1-forme connexion $\omega^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ par sa valeur sur un vecteur X

$$\nabla_X e_{\underline{a}} = \omega^{\underline{b}}_{\underline{a}}(X) e_{\underline{b}}.$$

En coordonnées, cette formule devient

$$\nabla_i e^j_{\underline{a}} = \omega_{i\,\underline{a}}^{\;\;\underline{b}}\, e^j_{\underline{b}}.$$

En contractant par $e^{\underline{c}}_i$, on obtient

$$e^{\underline{b}}_j \nabla_i e^j_{\underline{a}} = \omega_{i\,\underline{a}}^{\;\;\underline{b}}.$$

Abaissant l'indice $\underline{b}$, la relation $e_{\underline{b}j}\nabla_i e^j_{\underline{a}} = -e^j_{\underline{a}}\nabla_i e_{\underline{b}j}$ montre que la 1-forme connexion métrique $\omega_{\underline{b}\,\underline{a}}$ est antisymétrique en $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Elle s'interprète alors comme une 1-forme à valeur dans l'espace vectoriel des matrices $\omega^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ ayant cette propriété d'antisymétrie qui constitue l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, le crochet étant le commutateur des matrices.

Il est possible de changer de base orthonormée par une transformation de Lorentz $e_{\underline{a}} = L^{\underline{m'}}_{\underline{a}}(x^i) e_{\underline{m'}}$. On trouve que la loi de transformation de la 1-forme connexion est

$$\omega_{i\,\underline{a}}^{\;\;\underline{b}} = L^{\underline{b}}_{\underline{n'}} L^{\underline{m'}}_{\underline{a}}\, \omega_{i\,\underline{m'}}^{\;\;\underline{n'}} + L^{\underline{b}}_{\underline{n'}} \partial_i L^{\underline{n'}}_{\underline{a}}.$$

On peut se limiter aux transformations de $\mathrm{L}_0(n)$.

Cependant, à partir de la 1-forme connexion, on peut construire une 2-forme $R^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ à valeur tensorielle en posant

$$R^{\underline{b}}_{\underline{a}} = d\omega^{\underline{b}}_{\underline{a}} + \omega^{\underline{b}}_{\underline{c}} \wedge \omega^{\underline{c}}_{\underline{a}}$$

comme on peut le vérifier à la main en effectuant une transformation de Lorentz,

$$R^{\underline{b}}_{\underline{a}} = L^{\underline{b}}_{\underline{n'}} L^{\underline{m'}}_{\underline{a}}\, R^{\underline{n'}}_{\underline{m'}}.$$

On l'appelle la 2-forme de courbure. En coordonnées (x^i), on a

$$R^{\underline{b}}_{\underline{a}} = \frac{1}{2} R^{\underline{b}}_{\underline{a}ij}\, dx^i \wedge dx^j.$$

On retrouve le tenseur de courbure sous la forme

$$R^{\underline{b}}_{\underline{a}ij} = \partial_i \omega_j{}^{\underline{b}}_{\underline{a}} - \partial_j \omega_i{}^{\underline{b}}_{\underline{a}} + \omega_i{}^{\underline{b}}_{\underline{c}} \omega_j{}^{\underline{c}}_{\underline{a}} - \omega_j{}^{\underline{b}}_{\underline{c}} \omega_i{}^{\underline{c}}_{\underline{a}}.$$

On remarque que le tenseur $R_{\underline{b}\underline{a}ij}$ est antisymétrique en $\underline{a}$ et $\underline{b}$ puisque la connexion est métrique. Les composantes du tenseur de courbure dans le repère naturel sont $R^k_{lij} = e^k_{\underline{b}} e^{\underline{a}}_l R^{\underline{b}}_{\underline{a}ij}$.

La différentielle extérieure d'une p-forme $\Phi^{\underline{b}\cdots}_{\underline{a}\cdots}$ à valeur tensorielle n'est pas une $(p+1)$-forme à valeur tensorielle, c'est pourquoi on a introduit la différentiation extérieure covariante, notée D, définie par

$$(D\Phi)^{\underline{a}\cdots}_{\underline{b}\cdots} = d\Phi^{\underline{a}\cdots}_{\underline{b}\cdots} + \omega^{\underline{a}}_{\underline{c}} \wedge \Phi^{\underline{c}\cdots}_{\underline{b}\cdots} + \cdots - \omega^{\underline{c}}_{\underline{b}} \wedge \Phi^{\underline{a}\cdots}_{\underline{c}\cdots} - \cdots$$

qui assure que $D\Phi^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ est une $(p+1)$-forme à valeur tensorielle. On note l'identité

$$\left(D^2\Phi\right)^{\underline{a}\cdots}_{\underline{b}\cdots} = R^{\underline{a}}_{\underline{c}} \wedge \Phi^{\underline{c}\cdots}_{\underline{b}\cdots} + \cdots - R^{\underline{c}}_{\underline{b}} \wedge \Phi^{\underline{a}\cdots}_{\underline{c}\cdots} - \cdots.$$

On définit alors la 2-forme de torsion $T^{\underline{a}}$ à valeur vectorielle par la formule

$$T^{\underline{a}} = De^{\underline{a}}.$$

En coordonnées (x^i), on a

$$T^{\underline{a}} = \frac{1}{2} T^{\underline{a}}_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

On retrouve le tenseur de torsion sous la forme

$$T^{\underline{a}}_{ij} = \partial_i e^{\underline{a}}_j - \partial_j e^{\underline{a}}_i + \omega_i{}^{\underline{a}}_{\underline{c}} e^{\underline{c}}_j - \omega_j{}^{\underline{a}}_{\underline{c}} e^{\underline{c}}_i.$$

conduisant dans le repère naturel aux composantes $T^k_{ij} = e^k_{\underline{a}} T^{\underline{a}}_{ij}$.

La 2-forme de torsion et la 2-forme de courbure constituent la géométrie fondamentale d'une 1-forme de connexion métrique. Ces deux 2-formes satisfont les deux identités de Bianchi

$$DT^{\underline{a}} = R^{\underline{a}}_{\underline{c}} \wedge e^{\underline{c}} \quad \text{et} \quad DR^{\underline{a}}_{\underline{b}} = 0$$

qui généralisent celles indiquées précédemment pour le tenseur de Riemann d'une connexion riemannienne, c'est-à-dire telle que la torsion $T^{\underline{a}}$ est nulle.

A.3 Equation de Dirac en espace-temps courbe

Il faut d'abord définir les champs de spineurs sur un espace-temps courbe $\mathcal{V}$ muni d'une métrique g. Dans un système de coordonnées (x^μ), nous aurons besoin des éléments γ^α d'une algèbre non commutative satisfaisant

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = -2g^{\alpha\beta} Id$$

où Id est l'unité de l'algèbre. Cette condition définit de fait en chaque point x de $\mathcal{V}$ l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}$ de l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathcal{V}$ caractérisée par l'existence d'une application $\gamma : \mathrm{T}_x\mathcal{V} \to \mathcal{C}$ satisfaisant

$$\gamma(X)\gamma(Y) + \gamma(Y)\gamma(X) = -2g(X,Y)Id.$$

Introduisons une tétrade lorentzienne $e_{\underline{a}}$. Nous posons $\gamma_{\underline{a}} = \gamma(e_{\underline{a}})$. Nous voyons que cela justifie de poser

$$\gamma^{\alpha} = e^{\alpha}_{\underline{a}}\gamma^{\underline{a}} \quad \text{avec} \quad \gamma^{\underline{a}} = \eta^{\underline{a}\,\underline{b}}\gamma_{\underline{b}}.$$

Il y a un isomorphisme non canonique entre l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}$ et l'algèbre des opérateurs linéaires sur un espace vectoriel complexe $\mathcal{S}$ de dimension 4. Dans une base de $\mathcal{S}$, les $\gamma^{\underline{a}}$ coïncident avec les matrices usuelles de Dirac.

Nous définissons maintenant le groupe de spin, noté Spin(4), qui est le groupe des opérateurs linéraires Λ sur $\mathcal{S}$ inversibles et de déterminant 1 tels que

$$\Lambda\gamma(e_{\underline{a}})\Lambda^{-1} = \gamma\left(\mathrm{L}(e_{\underline{a}})\right)$$

où L est un élément du groupe de Lorentz L(4). Nous pouvons *mutatis mutandis* définir $\mathrm{Spin}_0(4)$ pour $\mathrm{L}_0(4)$ qui est un groupe simplement connexe. Cela induit un homomorphisme surjectif $\mathcal{H} : \mathrm{Spin}(4) \to \mathrm{L}(4)$ qui a tout Λ fait correspondre une transformation de Lorentz L. Nous remarquons que le noyau de cet homomorphisme est Id et $-Id$.

Nous sommes en mesure de définir un spineur Ψ par la donnée de couples $(e_{\underline{a}}, \psi)$ où $e_{\underline{a}}$ est une tétrade lorentzienne et où ψ est un élément de $\mathcal{S}$, satisfaisant la relation d'équivalence

$$\psi' = \Lambda\psi \quad e_{\underline{a}'} = L^{\underline{b}}_{\underline{a}'}e_{\underline{b}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{L} = \mathcal{H}(\Lambda).$$

Dans une base de $\mathcal{S}$, ψ a les composantes spinorielles ψ^A avec $A = 1, 2, 3, 4$ et la relation d'équivalence s'écrit

$$\psi^{A'} = \Lambda^{A'}_{B}\psi^{B} \quad e_{\underline{a}'} = L^{\underline{b}}_{\underline{a}'}e_{\underline{b}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{L} = \mathcal{H}(\Lambda).$$

Il y a en réalité une indétermination puisque $(e_{\underline{a}}, \psi)$ et $(e_{\underline{a}}, -\psi)$ représentent le même spineur Ψ.

Nous disons que les composantes ψ^A définissent un spineur contravariant. Nous pouvons définir un spineur covariant comme la donnée d'un couple $(e_{\underline{a}}, \phi)$ où ϕ est un élément du dual de $\mathcal{S}$ dont les composantes ϕ_A se transforment suivant la loi

$$\phi_{A'} = \Lambda^{B}_{A'}\phi_{B} \quad e_{\underline{a}'} = L^{\underline{b}}_{\underline{a}'}e_{\underline{b}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{L} = \mathcal{H}(\Lambda),$$

où $\Lambda^{B}_{A'}$ est la matrice inverse de $\Lambda^{B'}_{A}$. Ainsi, les $\gamma^{\underline{a}}$ sont des spineurs une fois contravariants et une fois covariants.

L'adjonction de Dirac assure la correspondance entre les composantes spinorielles contravariantes et covariantes. Soit un spineur ψ, l'adjoint de Dirac est le spineur covariant, noté $\overline{\psi}$, exprimé en notation matricielle sous la forme $\psi^{\dagger}\gamma^{\underline{0}}$ où $\dagger$ désigne l'hermitique conjugué.

Nous obtenons des champs de spineurs sur l'espace-temps, tout au moins localement, en tenant compte de la dépendance des $e_{\underline{a}}$ et des ψ^A sur $\mathcal{V}$. Nous remarquons que $\overline{\psi}\psi$ est une fonction, $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ un champ de vecteurs, ...

Il faut maintenant introduire la notion de dérivée covariante d'un spineur ψ car $\partial_\mu\psi$ n'est pas un vecteur quand nous changeons les $e^{\underline{a}}$. Aussi, nous posons

$$\nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \Gamma_\mu\psi$$

où Γ_μ est une 1-forme à valeurs dans l'algèbre des matrices Λ qui devra correspondre à l'algèbre de Lie de Spin(4), isomorphe à celle de L(4). Nous devons avoir $\nabla_\mu(\Lambda\psi) = \Lambda\nabla_\mu\psi$. Notant Γ'_μ le transformé de Γ_μ, nous devons satisfaire

$$\Gamma_\mu = \Lambda^{-1}\Gamma'_\mu\Lambda + \Lambda^{-1}\partial_\mu\Lambda.$$

Cette loi de transformation est à rapprocher de celle de la 1-forme connexion métrique $\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}$ antisymétrique en $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Nous vérifions qu'une solution est [1]

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}\gamma^{\underline{a}}\gamma^{\underline{b}} \quad \text{soit} \quad \Gamma_\mu = -\frac{1}{8}\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}\left(\gamma^{\underline{a}}\gamma^{\underline{b}} - \gamma^{\underline{b}}\gamma^{\underline{a}}\right).$$

Ceci s'étend à la dérivée covariante d'un spineur covariant

$$\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi - \phi\Gamma_\mu.$$

Nous vérifions que γ^μ considéré comme un vecteur-spineur a une dérivée covariante nulle

$$\nabla_\rho\gamma^\mu = \omega_{\rho\,\underline{a}}^{\;\;\underline{m}}\gamma^{\underline{a}}e^\mu_{\underline{m}} + \frac{1}{4}\omega_{\rho\underline{a}\,\underline{b}}\gamma^{\underline{m}}\gamma^{\underline{a}}\gamma^{\underline{b}}e^\mu_{\underline{m}} - \frac{1}{4}\omega_{\rho\underline{a}\,\underline{b}}\gamma^{\underline{a}}\gamma^{\underline{b}}\gamma^{\underline{m}}e^\mu_{\underline{m}} = 0.$$

En conséquence pour la particule libre de spin $1/2$ et de masse m, nous posons l'équation covariante de Dirac dans un espace-temps courbe

$$i\hbar\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - mc\psi = 0.$$

L'équation covariante de Dirac dérive du lagrangien

$$L[e^\mu_{\underline{a}}, \omega_{\rho\underline{a}\,\underline{b}}, \psi] = \frac{i\hbar c}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right) - mc^2\overline{\psi}\psi.$$

D'après les principes généraux des théories métriques de la gravitation, le tenseur énergie-impulsion symétrique devrait s'obtenir par variation de $\mathcal{L}$ par rapport à $g_{\mu\nu}$ en prenant la connexion riemannienne pour $\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}$. Cela ne se présente pas simplement. Aussi, il est plus commode de faire séparément des variations par rapport à $e^\mu_{\underline{a}}$ et à $\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}$ pour une connexion métrique. Si l'on applique également ces variations au lagrangien gravitationnel R alors on n'obtient pas la relativité générale mais la théorie d'Einstein-Cartan de la gravitation dans laquelle la torsion est engendrée par la densité de spin de la matière.

[1] Attention le signe de cette expression dépend des conventions utilisées.

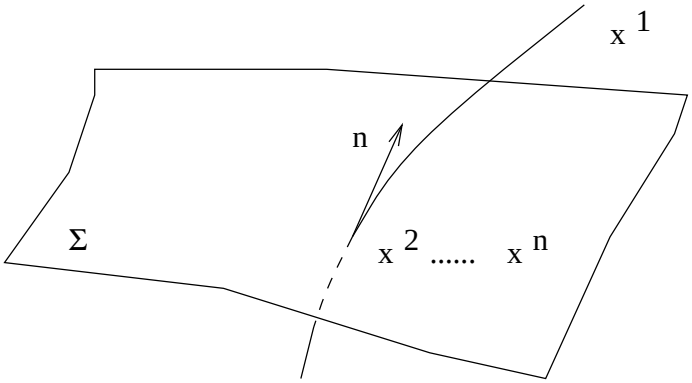
A.4 Courbure extrinsèque d'une hypersurface

Soit $\mathcal{V}$ une variété différentiable munie d'une métrique g et de la connexion riemannienne associée ∇. Considérons l'hypersurface Σ définie par $f(x) = 0$ avec la condition $\partial_i f \neq 0$.

Nous supposons que $\partial_i f$ est toujours orienté dans le temps ou bien toujours orienté dans l'espace. Le vecteur unitaire n normal à Σ est choisi par convention

$$n_i = \frac{\pm \partial_i f}{\sqrt{\pm g^{ij} \partial_i f \partial_j f}} \quad \text{avec} \quad g_{ij} n^i n^j = \pm 1.$$

Nous pouvons définir les coordonnées normales de Gauss relatives à Σ. Soit $x^2, \ldots, x^n$ un système de coordonnées de Σ. En chaque point de Σ, nous considérons la géodésique du genre temps, ou espace suivant le cas, issue de ce point et dont le vecteur-dérivée coïncide avec le vecteur normal n pour un paramètre affine x^1. Celui-ci définit une coordonnée x^1 choisie de telle sorte que l'équation de Σ soit $x^1 = 0$.



Nous avons ainsi construit des coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ de $\mathcal{V}$. Par construction les composantes de la métrique dans les coordonnées (x^i) sont telles que

$$g_{11} = \pm 1 \quad \text{et} \quad g_{i1} \mid_{x^1=0} = 0.$$

En utilisant le fait que les lignes-coordonnées $x^2, \ldots, x^n = \text{const.}$ sont des géodésiques, nous obtenons $\Gamma^i_{11} = 0$ et par suite $\partial_1 g_{i1} = 0$. Compte tenu du résultat précédent, la métrique s'écrit

$$ds^2 = \pm (dx^1)^2 + g_{ij}(x^1, x^k) dx^i dx^j \quad (i, j, k = 2, \ldots, n)$$

et les (x^i) sont appelées les coordonnées normales de Gauss.

Nous pouvons induire sur Σ les quantités géométriques suivantes.

1. Une métrique h définie par

$$X, Y \in \mathrm{T}_x \Sigma \quad h(X, Y) = g(X, Y).$$

C'est ce qu'on appelle quelquefois la première forme fondamentale de Σ. Dans les coordonnées normales de Gauss, nous obtenons simplement $h_{ij} = g_{ij} \mid_{x^1=0}$.

2. Une connexion ∇^Σ définie par la décomposition unique de la connexion

$$X, Y \in \mathrm{T}_x\Sigma \quad \nabla_X Y = \nabla^\Sigma_X Y + K(X,Y)\frac{n}{< n, n >}.$$

où $K(X,Y)$ est la courbure extrinsèque de Σ souvent appelée la seconde forme fondamentale de Σ. Dans les coordonnées normales de Gauss nous avons simplement

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\partial_1 g_{ij} \mid_{x^1=0} .$$

Nous démontrerons que ∇^Σ est la connexion métrique associée à h.

Parce que cela sera utile dans la suite, nous allons donner l'expression générale de K_{ij} pour une hypersurface Σ du genre espace. L'équation de Σ est notée maintenant $x^0 = 0$ et la métrique a la forme générale

$$ds^2 = -(N^2 - h_{ij}N^iN^j)(dx^0)^2 + 2h_{ij}N^i dx^0 dx^j + h_{ij}dx^i dx^j$$

à l'aide des fonctions N, N^i et h_{ij} de x^0 et de x^i. La métrique inverse est

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2} \quad , \quad g^{0i} = \frac{N^i}{N^2} \quad , \quad g^{ij} = h^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}$$

où h^{ij} est la matrice inverse de h_{ij}. Le vecteur normal à Σ, dirigé dans le sens croissant de x^0 comme nous l'avons défini, a pour composantes

$$n_0 = -N \quad , \quad n_i = 0 \quad \text{soit} \quad n^0 = \frac{1}{N} \quad , \quad n^i = -\frac{N^i}{N}.$$

La métrique induite sur Σ a pour composantes

$$h_{ij} = h_{ij} \mid_{x^0=0} .$$

La courbure extrinsèque a une expression plus compliquée. Ecrivons la décomposition relative au vecteur normal n

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k + N^m\Gamma^0_{ij}\partial_m + N\Gamma^0_{ij}n$$

puisque $\partial_0 = Nn + N^m\partial_m$. Par suite, nous avons $K_{ij} = -N\Gamma^0_{ij}$ qui s'exprime sous la forme

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}\left(\partial_0 h_{ij} - \nabla^{(h)}_i N_j - \nabla^{(h)}_j N_i\right)$$

où $\nabla^{(h)}$ est la connexion métrique associée à h. D'autre part, nous avons

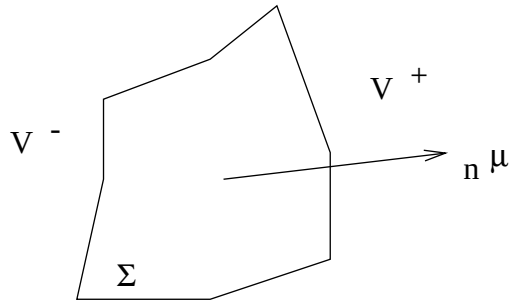
$$\Gamma^{\Sigma\,k}_{ij} = \Gamma^k_{ij} + N^k\Gamma^0_{ij}.$$

Après calcul nous voyons que $\Gamma^{\Sigma\,k}_{ij} = \Gamma^{(h)\,k}_{ij}$.

A.5 Conditions de raccordement vide-matière

Une distribution matérielle présente en général des discontinuités. Ainsi, à la surface d'un corps massif la densité volumique de masse ρ est discontinue. En théorie de Newton de la gravitation, l'étude de l'équation de Poisson montre que le potentiel newtonien U et ses dérivées premières sont continus mais en revanche les dérivées secondes sont discontinues. Dans la théorie d'Einstein, la condition de raccordement vide-matière est valable s'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes de la métrique et ses dérivées premières sont continues. Il n'est cependant pas toujours facile de le trouver explicitement.

Il est indispensable d'examiner ce problème d'un point de vue géométrique. Dans l'espace-temps $\mathcal{V}$, la séparation vide-matière est une hypersurface Σ du genre temps de vecteur normal unitaire n^μ dirigé vers l'extérieur, $n^\mu n_\mu = 1$. Une telle hypersurface Σ du



genre temps est l'histoire dans l'espace-temps d'une 2-surface, c'est-à-dire la surface du corps massif.

On désigne par $\mathcal{V}^+$ la partie extérieure et par $\mathcal{V}^-$ la partie intérieure. Il est possible d'associer à cette hypersurface Σ les coordonnées normales de Gauss (x^μ) telles que $x^1 = 0$ soit l'équation de Σ. On a respectivement les métriques induites $h_{ij}^\pm$ et les courbures extrinsèques $K_{ij}^\pm$. On peut vérifier que, suivant respectivement $\mathcal{V}^\pm$, les composantes des équations d'Einstein s'écrivent

$$G_1^1 = -\frac{1}{2}R^{(3)} + \frac{1}{2}(K^2 - K_{ij}K^{ij}) = \frac{8\pi G}{c^4}T_1^1,$$

$$G_i^1 = -(\nabla_m^{(3)}K_i^m - \partial_i K) = \frac{8\pi G}{c^4}T_i^1,$$

$$G_j^i = G_j^{(3)\,i} + \partial_1(K_j^i - \delta_j^i K) - KK_j^i + \frac{1}{2}\delta_j^i K^2 + \frac{1}{2}\delta_j^i K_{mn}K^{mn} = \frac{8\pi G}{c^4}T_j^i$$

où K est la trace de K_{ij}, $K = h^{ij}K_{ij}$. Le raccordement entre le vide et le milieu matériel est possible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de distribution de Dirac en $x^1 = 0$ dans les composantes du tenseur énergie-impulsion, si et seulement si les fonctions h_{ij} et K_{ij} sont continues en $x^1 = 0$. On exige donc les conditions de raccordement

$$h_{ij}^- = h_{ij}^+ \quad \text{et} \quad K_{ij}^- = K_{ij}^+.$$

Les composantes G^i_j sont discontinues en $x^1 = 0$ mais en revanche les composantes G^1_μ sont continues.

Dans des systèmes quelconques de coordonnées de $\mathcal{V}^-$ et $\mathcal{V}^+$, les composantes de la métrique $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées premières peuvent être discontinues sur Σ mais le critère intrinsèque de raccordement sera que les métriques induites sur Σ et les courbures extrinsèques de Σ relativement à $\mathcal{V}^-$ et $\mathcal{V}^+$ sont les mêmes. En conséquence, si au moins la métrique est continue, les combinaisons $T_{\mu\nu}n^\nu$ des composantes du tenseur énergie-impulsion seront continues à la traversée de Σ : $(T^+_{\mu\nu} - T^-_{\mu\nu})n^\mu = 0$.

A.6 Formalisme hamiltonien du vide

Le caractère hyperbolique des équations d'Einstein montre que les données de Cauchy $g_{\mu\nu}$ et $\partial_0 g_{\mu\nu}$ caractérisant la solution doivent être posées sur une hypersurface Σ du genre espace. Nous adoptons le système de coordonnées (x^μ) dans lequel la métrique s'exprime sous la forme

$$ds^2 = -(N^2 - h_{ij}N^iN^j)(dx^0)^2 + 2h_{ij}N^i dx^0 dx^j + h_{ij}dx^i dx^j$$

où l'équation de Σ est $x^0 = 0$. Il en résulte que *a priori* les variables du champ gravitationnel sont h_{ij}, $\partial_0 h_{ij}$, N, $\partial_0 N$, N^i et $\partial_0 N^i$. On appelle N le *lapse* et N^i le *shift* ; ils sont arbitraires. Le choix des coordonnées normales de Gauss correspond à $N = 1$ et $N^i = 0$.

L'espace-temps, ou seulement une partie, est feuilleté par les hypersurfaces Σ_t du genre espace définies par $x^0 = t$. La métrique induite sur les hypersurfaces Σ_t est h_{ij} et la courbure extrinsèque K_{ij} des hypersurfaces Σ_t a l'expression déjà introduite

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}\left(\partial_0 h_{ij} - \nabla^{(3)}_i N_j - \nabla^{(3)}_j N_i\right).$$

Un très long calcul montre que la courbure scalaire s'exprime sous la forme

$$R = R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} + K^2 - \frac{2}{N}\partial_0 K + \frac{2N^i}{N}\partial_i K - \frac{2}{N}\nabla^{(3)}_k(h^{kl}\partial_l N).$$

Il faut calculer maintenant la densité lagrangienne $\sqrt{-g}R$. Compte tenu que

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} \quad \text{avec} \quad h = \det h_{ij},$$

elle se met sous la forme

$$\sqrt{-g}R = N\sqrt{h}\left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} + K^2\right) - 2\partial_0\left(\sqrt{h}K\right) + 2K\partial_0\sqrt{h} + 2\partial_i\left(N^i\sqrt{h}K\right)$$
$$-2\partial_i\left(\sqrt{h}N^i\right)K - 2\partial_k\left(\sqrt{h}h^{kl}\partial_l N\right).$$

La trace K est

$$K = -\frac{h^{ij}}{2N}\partial_0 h_{ij} + \frac{1}{N}\nabla^{(3)}_i N^i$$

et permet de calculer $\partial_0\sqrt{h}$ par l'expression $\sqrt{h}h^{ij}\partial_0 h_{ij}/2$. Finalement, $\sqrt{-g}R$ devient

$$\sqrt{-g}R = N\sqrt{h}\left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} - K^2\right) - 2\partial_0\left(\sqrt{h}K\right) + 2\partial_i\left(\sqrt{h}N^iK\right) - 2\partial_k\left(\sqrt{h}h^{ik}\partial_i N\right).$$

Nous constatons que la densité lagrangienne $\sqrt{-g}R$ ne dépend que de h_{ij}, $\partial_0 h_{ij}$, N et N^i.

Nous ne nous posons pas de question à propos des conditions au bord et par suite nous éliminons les termes en divergence dans l'expression de l'action gravitationnelle $S_g[g_{\mu\nu}]$. Celle-ci se réduit à [2]

$$S_g[h_{ij}, \partial_0 h_{ij}, N, N^i] = \int dx^0 \int_{\Sigma_t} \left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} - K^2\right) N\sqrt{h}d^3x.$$

Le moment conjugué à $\partial_0 h_{ij}$ est

$$\pi^{ij} = \frac{\partial\sqrt{-g}R}{\partial\partial_0 h_{ij}} = -\sqrt{h}(K^{ij} - h^{ij}K).$$

Il n'y a pas de moment conjugué pour N et N^i. Nous posons donc la densité d'hamiltonien

$$\mathcal{H}_g = \pi^{ij}\partial_0 h_{ij} - \sqrt{-g}R$$

et l'hamiltonien

$$H_g = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_g d^3x.$$

Il faut maintenant exprimer $\mathcal{H}_g$ en fonction des variables conjuguées h_{ij} et π^{ij} et des quantités N et N^i. De la définition de π^{ij}, nous avons

$$\pi = 2\sqrt{h}K \quad \text{et donc} \quad \pi^{ij} - \frac{1}{2}h^{ij}\pi = -\sqrt{h}K^{ij}.$$

Compte tenu de l'expression de K_{ij}, nous obtenons

$$\partial_0 h_{ij} = \frac{2N}{\sqrt{h}}\pi_{ij} - \frac{N}{\sqrt{h}}h_{ij}\pi + \nabla^{(3)}_i N_j + \nabla^{(3)}_j N_i.$$

Quand on intègre $\pi^{ij}\partial_0 h_{ij}$ nous avons à considérer l'intégrale

$$2\int_{\Sigma_t} \pi^{ij}\nabla^{(3)}_i N_j d^3x = -2\int_{\Sigma_t}\left(\partial_i\pi^{ik} + \Gamma^{(3)\,k}_{ij}\pi^{ij}\right)N_k d^3x.$$

A une divergence près dans Σ_t que nous éliminons, il reste

$$H_g[h_{ij}, \pi^{ij}, N, N_i] = \int_{\Sigma_t}\left(N\mathcal{H} + N_i\mathcal{H}^i\right)d^3x$$

[2]Pour alléger l'écriture, nous omettons le facteur $c^3/16\pi G$.

avec

$$\mathcal{H} = -\sqrt{h}R^{(3)} + \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^i = -2\left(\partial_j\pi^{ij} + \Gamma^{(3)\,i}_{mn}\pi^{mn}\right).$$

$\mathcal{H}$ est une densité scalaire et $\mathcal{H}^i$ est $\sqrt{h}$ fois une dérivée covariante puisque π^{ij} est $\sqrt{h}$ fois un tenseur symétrique.

Nous voyons que N et N_i jouent le rôle de multiplicateurs de Lagrange. Nous avons donc les contraintes

$$\mathcal{H} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^i = 0$$

qui ne sont rien d'autre que les équations d'Einstein $G^0_\mu = 0$. La relation entre π^{ij} et h_{ij} est donnée par

$$\partial_0 h_{ij} = \frac{\delta\mathcal{H}_g}{\delta\pi^{ij}}$$

et les équations d'Einstein $R_{ij} = 0$ par

$$\partial_0\pi^{ij} = -\frac{\delta\mathcal{H}_g}{\delta h_{ij}}.$$

Nous avons également obtenu par ce moyen une description géométrique des données de Cauchy sur l'hypersurface du genre espace Σ : la métrique induite h_{ij} et la courbure extrinsèque K_{ij} qui doivent satisfaire les quatre contraintes $\mathcal{H} = 0$ et $\mathcal{H}^i = 0$. Ce système d'équations donne en outre un cadre pour effectuer l'intégration numérique des équations d'Einstein du vide.

En revanche si l'on pose le problème de Cauchy sur une hypersurface du genre lumière $x^0 = 0$ alors les dérivées secondes par rapport à x^0 des $g_{\mu\nu}$ ne sont pas déterminées puisque $g^{00} = 0$. Il existe donc une infinité de solutions se raccordant aux données de Cauchy. Ainsi, les hypersurfaces caractéristiques des équations d'Einstein du vide sont les hypersurfaces du genre lumière. Des discontinuités des dérivées secondes peuvent se produire à la traversée d'une hypersurface caractéristique qui constitue alors une onde de choc gravitationnelle.

A partir du formalisme hamiltonien, en incluant l'hamiltonien de la matière, on peut quantifier par la méthode canonique. On obtient alors l'équation de Wheeler-DeWitt avec cependant des difficultés conceptuelles d'interprétation quantique.