Physique Quantique

Université
Pierre et Marie Curie

L'ÉQUATION DE DIRAC

Alain COMTET

Notes de cours : année universitaire 2004/2005

Contents

1 Equations d'onde relativiste

1.1 Groupes de Lorentz et de Poincaré

Le **principe de relativité**, qu'il convient de bien distinguer des théories de la relativité, est l'affirmation que les lois de la nature prennent la même forme dans tous les référentiels inertiels. En d'autres termes, il est impossible par une expérience **locale** de distinguer 2 référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Ce principe remonte à Galilée. Il en donne une description plaisante dans son ouvrage célèbre "dialogue sur les deux grands systèmes du monde, celui de Copernic et celui de Ptolémée" publié à Florence en 1632.

> "Installez-vous avec un ami dans le plus grand local clos que vous puissiez trouver sur un grand navire, et essayez de vous procurer des mouches, des papillons et d'autres petits animaux volants du même genre. Prenez aussi un grand vase plein d'eau et contenant des petits poissons. Installez aussi un vase placé en bas et au col étroit. Le navire étant au repos, observez attentivement la manière dont ces animaux volants vont de tous les côtés du local avec la même vitesse. Quant aux poissons, vous les verrez dans leurs déplacements nager indifféremment vers n'importe quelle partie du vase... Les gouttes qui tombent entreront toutes dans le vase inférieur... Vous constaterez que tous ces phénomènes se produiront de la même façon si vous faites mouvoir le navire, quelle que soit sa vitesse. Pourvu que le mouvement soit uniforme, sans variation dans un sens ou dans l'autre, vous n'observerez pas le moindre changement dans tous les phénomènes que vous avez observés quand le navire était au repos. Ajoutons que rien de ce qui se passe en vous-même ne pourra vous donner la certitude que le navire est immobile ou qu'il marche."

Le principe de relativité ne devient opératoire que si on le complète par les lois de transformation des variables dynamiques (champs électriques et magnétique par exemple) et des coordonnées.

En utilisant les propriétés d'homogénéité et d'isotropie de l'espace-temps on montre qu'il n'existe essentiellement que deux relativités décrites respectivement par les groupes de Galilée et de Poincaré.

Relativité galiléenne

Elle est caractérisée par les lois de transformation

$$\begin{cases} t' &= t + t_0 \\ x'_i &= R_{ij} x_j + V_{it} + a_i \end{cases}$$

où R_{ij} est une matrice orthogonale et V_i représente les 3 composantes du vecteur vitesse. Ces transformations forment un groupe à 10 paramètres qui laisse invariant les lois de la dynamique newtonienne.

Les équations de Maxwell qui rendent compte des phénomènes électriques et magnétiques ne sont pas invariantes sous le groupe de Galilée. Ainsi, contrairement à ce que stipule le principe de relativité, il devrait être possible de mettre en évidence un référentiel absolu. Cette possibilité a été infirmée par une série d'expériences (ex. : Michelson Morley). On a ainsi été conduit à abandonner la relativité galiléenne au profit de la relativité restreinte.

Relativité restreinte

Un observateur lié à un référentiel inertiel décrit un événement (par exemple l'émission d'un photon dans la désintégration $\pi^0 \to \gamma\gamma$) par ses coordonnées d'espace temps $(t, \vec{x})$. Considérons 2 événements successifs $t_1\vec{x}_1; t_2\vec{x}_2$ (l'émission du photon et sa détection dans un compteur). On définit l'intervalle entre ces événements

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$$

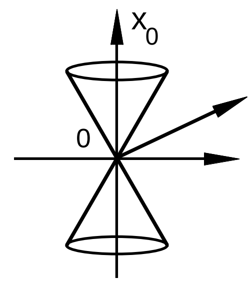
Le fait d'expérience que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels se traduit par le fait que l'intervalle $(\Delta s)^2$ est un invariant (ici nul). Il est le même dans tous les référentiels.

On notera $x^\mu = (ct, \vec{x})$ un point de l'espace de Minkowski M. L'expression du $(\Delta s)^2$ nous invite à munir cet espace de la métrique

$$g_{\mu\nu} = diag\ (1, -1, -1, -1)$$

de sorte que $(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu}(x_2^\mu - x_1^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)$. On définit trois types d'intervalles selon le signe de $(\Delta s)^2$

$(\Delta s)^2 > 0$	intervalle de genre temps
$(\Delta s)^2 < 0$	espace
$(\Delta s)^2 = 0$	lumière



▷ *Exercice : montrer que les 2 événements ; émission d'une particule et détection de celle-ci dans un compteur sont séparés par un intervalle de genre temps (ou lumière).*

◁

La relativité restreinte postule que les lois de transformationo entre référentiels inertiels s'écrivent sous la forme

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1}$$

où Λ^μ_ν est une matrice 4x4 constante. En exprimant l'invariance de l'intervalle entre deux événements on obtient la contrainte

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\nu \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$$

Le groupe des transformations linéaires satisfaisant cette contrainte est appelé groupe de Poincaré.

Covariance

Les grandeurs physiques qui décrivent l'état d'un système ne sont en général pas les mêmes pour différents observateurs. Il existe des quantités scalaires, dont la valeur est indépendante du choix d'un référentiel particulier. Il existe aussi d'autres quantités qui se transforment comme des covariants sous le groupe de transformation.

Considérons un changement de référentiel défini par la transformation générale de coordonnées

$$x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x^0, \vec{x})$$

- un scalaire est une fonction ϕ définie sur M invariante sous cette transformation

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

- les composantes *contravariantes* v^μ d'un vecteur se transforment comme les coordonnées

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu$$

- les composantes *contravariantes* d'un tenseur de rang 2 se transforment selon

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta}$$

- les composantes *covariantes* d'un tenseur de rang 2 se transforment selon

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} F_{\alpha\beta}$$

On définit $g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu}$.

On a donc $g_{\mu\nu}.g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\alpha$. Les composantes covariantes et contravariantes sont reliées par le tenseur métrique

$$x_\mu = g_{\mu\alpha} x^\alpha \qquad x^\mu = g^{\mu\alpha} x_\alpha$$
$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

Les règles de différentiation implicite

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}$$

nous montrent que l'opération de dérivation exige que $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ se transforme comme un vecteur *covariant* qu'on notera $\partial_\mu \phi$.

Revenant à l'espace de Minkowski, on a donc en posant $x^\mu = (x^0, \vec{x})$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right); \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla} \right)$$

La quadridivergence d'un quadrivecteur est le scalaire

$$\partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla}.\vec{A}$$

L'opérateur d'Alembertien est

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta$$

Définition

Le groupe de Poincaré $\mathcal{P}$ est le groupe des transformations linéaires

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

qui conservent le produit scalaire

$$(x_2 - x_1)^2 = g_{\mu\nu}(x_2 - x_1)^{\mu}(x_2 - x_1)^{\nu} = g^{\mu\nu}(x_2 - x_1)_{\mu}(x_2 - x_1)_{\nu}$$

Introduisant les composantes covariantes on a

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho} + a^{\mu} = \Lambda^{\mu\rho} x_{\rho} + a^{\mu}$$

d'où

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\rho}\Lambda^{\nu\sigma}(x_2 - x_1)_{\rho}(x_2 - x_1)_{\sigma} = g^{\rho\sigma}(x_2 - x_1)_{\rho}(x_2 - x_1)_{\sigma}$$

par conséquent

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\rho}\Lambda^{\nu\sigma} = g^{\rho\sigma}$$

ou encore en terme de matrices

$$\Lambda^{\mu\rho} g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu\sigma} = g^{\rho\sigma}$$

$$(\tilde{\Lambda})^{\rho\mu} g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu\sigma} = g^{\rho\sigma}$$

soit

$$\boxed{\tilde{\Lambda} g \Lambda = g}$$

autre terminologie Poincaré = Lorentz inhomogène.

Si nous notons $\{a, \Lambda\}$ la transformation élémentaire, la loi de groupe s'écrit

$$\{a, \Lambda\}\{a', \Lambda'\} = \{a + \Lambda a', \Lambda\Lambda'\}$$

- les translations $\{a, 1\}$ forment un sous-groupe de $\mathcal{P}$ appelé groupe des translations, il dépend de 4 paramètres réels.

- les transformations $\{0, \Lambda\}$ forment un autre sous-groupe appelé groupe de Lorentz $\mathcal{L}$. Montrons qu'il dépend de 6 paramètres réels. Une transformation infinitésimale est caractérisée par

$$\Lambda^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}$$

La contrainte précédente nous donne

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(g^{\mu\rho} + \omega^{\mu\rho})(g^{\nu\sigma} + \omega^{\nu\sigma}) &= g^{\rho\sigma} \\
g_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g_{\mu\nu}g^{\mu\rho}\omega^{\nu\sigma} + g_{\mu\nu}\omega^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} &= g^{\rho\sigma} \\
\delta^{\rho}_{\nu}g^{\nu\sigma} + \delta^{\rho}_{\nu}\omega^{\nu\sigma} + \delta^{\sigma}_{\mu}\omega^{\mu\rho} &= g^{\rho\sigma} \\
g^{\rho\sigma} + \omega^{\rho\sigma} + \omega^{\sigma\rho} &= g^{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

soit

$$\omega^{\rho\sigma} + \omega^{\sigma\rho} = 0$$

ω est donc une matrice réelle antisymétrique 4×4.

$\longrightarrow$ 6 paramètres

- le groupe de Poincaré est donc le produit semi direct du groupe des translations par le groupe de Lorentz, c'est un groupe à 10 paramètres. Afin de le caractériser plus précisément considérons la contrainte $\tilde{\Lambda} g \Lambda = g$. Il vient

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \det \Lambda = \pm 1$$

De plus la composante 00 de cette contrainte donne

$$\begin{aligned}
g^{00} = &\ \Lambda^{\mu 0} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu 0} \\
g^{00} = &\ (\Lambda^{00})^2 - (\Lambda^{i0})^2 = +1
\end{aligned}$$

donc

$$\Lambda^{00} = \pm\sqrt{1 + (\Lambda^{i0})^2}$$

soit

$$\Lambda^{00} \leq -1$$

ou

$$\Lambda^{00} \geq +1$$

Ainsi toute matrice Λ appartient à l'une des 4 nappes définies par

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \quad \det \Lambda = +1 \quad \Lambda_0^0 \geq 1$$

seule cette nappe est un sous groupe (elle contient l'identité I)

$$\mathcal{L}_+^\downarrow \quad \det \Lambda = +1 \quad \Lambda_0^0 \leq -1$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow \quad \det \Lambda = -1 \quad \Lambda_0^0 \geq +1$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow \quad \det \Lambda = -1 \quad \Lambda_0^0 \leq -1$$

les transformations $\Lambda_0^0 > 0$ sont dites orthochrones

les transformations $\det \Lambda = +1$ sont dites propres

les transformations $\det \Lambda = -1$ sont dites impropres

L'existence de 4 nappes disjointes traduit le fait qu'il s'agit d'un groupe non connexe.

$\triangleright$ *Exemple de transformation impropre, la parité P est définie par* $\triangleleft$

$$\begin{cases} t' = t, \\ \vec{x}' = -\vec{x} \end{cases}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu} \in \mathcal{L}_-^\uparrow$$

Le renversement du sens du temps T, $t' = -t$, $\vec{x}' = \vec{x}$.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = -g^{\mu\nu} \in \mathcal{L}_-^\downarrow$$

Définition : on appelle groupe de Poincaré restreint $\mathcal{P}_+^\uparrow$ le produit semi direct du groupe de Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$ par le groupe des translations.

On obtient toutes les transformations de $\mathcal{P}$ en adjoignant à $\mathcal{P}_+^\uparrow$ les opérations discrètes P et T.

Algèbre de Lie du groupe de Lorentz : Considérons une transformation infinitésimale de Lorentz

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$$

A tout élément $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ associons la transformation $\mathcal{T}_\wedge$ agissant sur les fonctions $f(x)$

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{T}_\wedge} (\mathcal{T}_\wedge f)(x) = f(\Lambda^{-1} x)$$

Il est aisé de montrer que les $\mathcal{T}_\wedge$ forment une représentation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. En effet,

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_\wedge \mathcal{T}_{\wedge'} f)(x) = \mathcal{T}_{\wedge'} f(\Lambda^{-1} x) &= f(\Lambda'^{-1} \Lambda^{-1} x) \\ &= f((\Lambda \Lambda')^{-1} x) \\ &= (\mathcal{T}_{\wedge\wedge'} f)(x) \end{aligned}$$

Les générateurs de cette représentation sont définis par

$$(\mathcal{T}_\wedge f)(x) = (1 - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}) f(x)$$

où ici les $J_{\mu\nu}$ sont des opérateurs différentiels. Pour une transformation infinitésimale

$$\begin{aligned} (1 - \tfrac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}) f = f(\Lambda^{-1} x) &= f(x^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu) \\ &= f(x) - \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu f \end{aligned}$$

Par comparaison il vient

$$\boxed{J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)}$$

Ces opérateurs différentiels satisfont aux relations de commutation

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - i g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - i g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + i g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho}$$

Ces relations qui définissent l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz seront les mêmes dans n'importe quelle autre représentation.

Posant $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk}$ et $K_i = J_{oi}$ on obtient

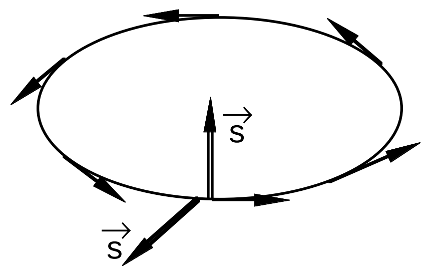
$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \quad i\epsilon_{ijk}J_k \quad (1) \\ [K_i, K_j] &= -\, i\epsilon_{ijk}J_k \quad (2) \\ [J_i, K_j] &= +\, i\epsilon_{ijk}K_k \quad (3) \end{aligned}$$

L'équation (1) exprime que le groupe des rotations est un sous groupe de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

$[J_1, K_1] = 0$ exprime qu'une rotation effectuée autour de la direction de la vitesse d'une transformation de Lorentz ne modifie pas cette transformation.

L'équation (3) exprime que K_1, K_2, K_3 se transforment par rotation comme les composantes d'un vecteur (opérateur tensoriel d'ordre 1)

L'équation (2) exprime que deux transformations de Lorentz pures Λ_i et Λ_j le long des axes i et j engendrent une rotation lorsqu'on effectue l'opération $\Lambda_i\Lambda_j\Lambda_i^{-1}\Lambda_j^{-1}$. Ce résultat est à l'origine du phénomène dit "précession de Thomas" selon lequel une succession de transformations de Lorentz pures appliquées à une particule à spin peuvent ramener l'impulsion à sa valeur initiale alors que le spin a tourné.



Introduisons

$$M_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$$
$$N_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$$

on obtient

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= i\epsilon_{ijk}M_k \\ [N_i, N_j] &= i\epsilon_{ijk}N_k \\ [M_i, N_j] &= 0 \end{aligned}$$

Cette algèbre de Lie est identique à celle du groupe $SU(2) \times SU(2)$. Partant des représentations irréductibles de dimension finie de $SU(2)$ on peut donc en principe construire des représentations de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Celles-ci seront caractérisées par 2 nombres quantiques j_1, j_2 tels que

$$\begin{aligned} \vec{M}^2 = & \; j_1(j_1+1) \\ \vec{N}^2 = & \; j_2(j_2+1) \end{aligned}$$

De telles représentations de dimension finie ne sont pas unitaires, en effet, $U = e^{i(\alpha_i J_i + \beta_i K_i)}$ $= e^{iM_i(\alpha_i - i\beta_i) + iN_i(\alpha_i + i\beta_i)}$. Même si les générateurs M, N sont hermitiens <u>U n'est pas unitaire</u> à cause des coefficients $\pm i\beta_i$. Ceci est en accord avec le fait que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ est non compact. On démontre en effet qu'il n'existe pas de représentations unitaires de dimension finie d'un groupe non compact.

Le <u>groupe complet</u> de Lorentz s'obtient en adjoignant à $\mathcal{L}_+^\uparrow$ l'inversion d'espace. Sous une telle opération $x_i \rightarrow -x_i$ par conséquent

$$\begin{aligned} J_{ij} \rightarrow & \; J_{ij} \\ J_{oi} \rightarrow & \; -J_{oi} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{lcl} K_i \rightarrow -K_i & \text{ou encore} & M_i \rightarrow N_i \\ J_i \rightarrow J_i & & N_i \rightarrow M_i \end{array}$$

les 2 Casimirs $\vec{M}^2$ et $\vec{N}^2$ sont donc échangés, par conséquent $j_1 \rightarrow j_2$

$$(j_1, j_2) \underset{P}{\longrightarrow} (j_2, j_1)$$

En particulier on voit que la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ n'est en fait pas une représentation du <u>groupe complet</u>. La représentation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est irréductible, elle est associée à des 4-vecteurs $A_\mu(x)$. Nous montrerons plus loin que la représentation $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ de dimension 4 est associée aux <u>spineurs de Dirac</u>.

<u>Système physique relativiste</u> : nous dirons qu'un système physique est relativiste s'il admet le groupe de Poincaré restreint $\mathcal{P}_+^\uparrow$ comme groupe de symétrie.

• Tous les systèmes physiques à l'exception de ceux qui relèvent de la relativité générale semblent admettre cette loi de symétrie.

• Pour certains systèmes la symétrie s'étend au groupe de Poincaré complet, c'est notamment le cas de ceux qui n'ont que des interactions fortes ou électromagnétiques.

Par conséquent, à tout état $|\psi >$ et à toute transformation du groupe de Poincaré $\{a, \Lambda\}$ correspond un état $|\psi_{a\Lambda} >$ tel que les probabilités de transition sont invariantes.

$$| < \psi|\chi > |^2 = | < \psi_{a\Lambda}|\chi_{a\Lambda} > |^2$$

Le théorème de Wigner implique qu'il existe un opérateur $U(a, \Lambda)$ défini à une phase près tel que

$$|\psi_{a\Lambda} >= U(a, \Lambda)|\psi >$$

Dans le cas du groupe de Poincaré restreint, la connexité du groupe implique que ces opérateurs sont unitaires. Ils constituent une représentation du groupe de Poincaré à une phase près

$$U(a_1, \Lambda_1)U(a_2, \Lambda_2) = \pm U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2)$$

Conséquence du théorème de Wigner : L'espace de Hilbert qui décrit un système relativiste quantique est un espace de représentation unitaire du groupe de recouvrement universel du groupe de Poincaré restreint qui est le groupe $SL(2, C)$ inhomogène. Rappelons que $SL(2, C)$ est défini comme le groupe des matrices complexes A unimodulaires à 2 dimensions ($\det A = +1$). Dans le paragraphe suivant nous montrons que la relation

$$x'_0 + \vec{\sigma}\vec{x}' = A(x_0 + \vec{\sigma}\vec{x})A^+$$

définit effectivement un homomorphisme de $SL(2, C)$ dans $\mathcal{L}_+^\uparrow$ de noyau Z_2 puisque $\pm A$ conduisent à la même transformation de Lorentz

Homomorphisme de $SL(2, C)$ sur $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$\mathcal{L}_+^\uparrow$ est un groupe connexe, mais il n'est pas simplement connexe. Son groupe de recouvrement universel est $SL(2, C)$, le groupe des matrices A complexes unimodulaires à 2 dimensions.

$$\boxed{\det A = +1}$$

A tout quadrivecteur x^μ on associe la matrice 2×2 notée $\underset{\sim}{x}$ telle que

$$\underset{\sim}{x} = x_0 + \vec{\sigma}\vec{x} = x^\mu \sigma_\mu \ ,$$

Théorème : il existe un homomorphisme du groupe $SL(2, C)$ sur le groupe de Lorentz. $\mathcal{L}_+^\uparrow$ défini par

$$\pm A \rightarrow \Lambda(A)$$

$$x' = \Lambda(A)x$$

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}A^+$$

démonstration : puisque A est unimodulaire.

$$\det \underset{\sim}{x}' = |\det A|^2 \det \underset{\sim}{x} = \det \underset{\sim}{x}$$

or

$$\det \underset{\sim}{x} = x_\mu x^\mu = x^2$$

donc

$$x^{2\prime} = x^2$$

La transformation linéaire $x \rightarrow x'$ conserve les longueurs relativistes. C'est donc une transformation de Lorentz. Calculons les éléments de matrice $\Lambda(A)^\mu{}_\nu$.

$$x'^\mu \sigma_\mu = A x^\rho \sigma_\rho A^+ = A \sigma_\rho A^+ x^\rho = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho \sigma_\mu$$

On a donc

$$\Lambda^\mu{}_\rho \sigma_\mu = A \sigma_\rho A^+$$

$$\Lambda^\mu{}_\rho \sigma_\mu \sigma_\nu = A \sigma_\rho A^+ \sigma_\nu$$

Prenons la trace en utilisant

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\ \text{Trace}\ \sigma_\mu\sigma_\nu &= \delta_{\mu\nu} \\
\tfrac{1}{2}\Lambda^\mu{}_\rho\ \text{Trace}\ \sigma_\mu\sigma_\nu &= \tfrac{1}{2}\ \text{Trace}\ A\sigma_\rho A^+\sigma_\nu \\
\Lambda^\nu{}_\rho &= \tfrac{1}{2}\ \text{Trace}\ A\sigma_\rho A^+\sigma_\nu
\end{aligned}$$

Montrons que les éléments de matrice sont réels.

$$(\Lambda^\nu{}_\rho)^* = \Lambda^\nu{}_\rho$$

$$(\Lambda^\nu_\rho)^* = \frac{1}{2}\ \text{Tr}\ (A\sigma_\rho A^+\sigma_\nu)^+ = \frac{1}{2}\ \text{Tr}\ \sigma_\nu A\sigma_\rho A^+ = \frac{1}{2}\ \text{Tr}\ A\ \sigma_\rho\ A^+\sigma_\mu = \Lambda^\nu_\rho$$

La transformation est orthochrone, en effet

$$\Lambda^0{}_0 = \frac{1}{2}\ \text{Trace}\ A\sigma_0 A^+\sigma_0 = \frac{1}{2}\ \text{Trace}\ AA^+ > 0$$

On peut enfin montrer que $\det A = +1$. Par conséquent $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

On remarque que A et $-A$ correspondent à la même transformation de Lorentz.

▷ *Exercice On peut contruire un second homomorphisme de* $SL(2,C)$ *sur* $\mathcal{L}_+^\uparrow$ *en considérant* $\widetilde{x} = x^0 - \vec{\sigma}\vec{x}$

1) Montrer que la transformation

$$\widetilde{x} \to \widetilde{x}' = B\widetilde{x}B^+ \qquad \textit{où} \qquad B \in SL(2,C)$$

définit encore une transformation de Lorentz

2) Vérifier qu'en posant $B = (A^+)^{-1}$ *on décrit la même transformation de Lorentz que celle définie par* $\underset{\sim}{x} \to \underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}A^+$

◁

<u>Représentations spinorielles de $\mathcal{L}_+^\uparrow$</u>

Le résultat précédent implique que les matrices A engendrent une représentation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ que nous nous proposons d'identifier. Partant d'une transformation proche de l'identité

$$A = 1 + \epsilon_0 + \vec{\epsilon}\vec{\sigma} + 0(\epsilon^2)$$

où ϵ_0, $\vec{\epsilon} \in C$.

$$\det A = 1 \Longrightarrow \epsilon_0 = 0$$

Toute matrice de $SL(2,C)$ proche de l'identité peut donc s'écrire

$$A = 1 + \vec{\epsilon}\vec{\sigma} = 1 + \frac{1}{2}(\vec{n} - i\vec{m})\vec{\sigma} \qquad (1)$$

Afin d'identifier la représentation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ qui lui est associée nous poserons

$$A = 1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \qquad (2)$$

les paramètres infinitésimaux $\omega^{\mu\nu}$ sont définis par

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu = \Lambda^{\mu\nu} x_\nu \qquad (3)$$

$$x'^0 + \vec{\sigma}\vec{x}' = (1 + \vec{\epsilon}\vec{\sigma})(x^0 + \vec{\sigma}\vec{x})(1 + \bar{\vec{\epsilon}}\vec{\sigma})$$

on trouve après identification

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 + \vec{n}\vec{x} \\ \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{n}x^0 + \vec{m} \wedge \vec{x} \end{aligned}$$

Comparant avec l'équation (3) il vient

$$\begin{aligned} \omega^{oi} &= -n^i \\ \omega^{ij} &= \epsilon_{ijk} m^k \end{aligned}$$

Or

$$A = 1 - i\omega^{oi} J_{oi} - \frac{i}{2}\omega^{ij} J_{ij}$$

Comparons à présent avec l'équation (1) on trouve

$$J_{oi} = -i\frac{\sigma_i}{2} \quad J_{ij} = \epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$$

par conséquent

$$K_i = -\frac{i\sigma_i}{2}, J_i = \frac{\sigma_i}{2}$$

ou encore

$$\begin{cases} M_i = \frac{\sigma_i}{2} & \text{représentation } (\frac{1}{2}, 0) \\ N_i = 0 & \end{cases}$$

La représentation dans laquelle $M_i = 0, N_i = \frac{\sigma_i}{2}$ est la représentation $(0, \frac{1}{2})$

1.2 Construction des représentations spinorielles

1) La représentation $(\frac{1}{2},0)$ est définie par $M_i = \frac{\sigma_i}{2},\ N_i = 0$ soit $K_i = -\frac{i\sigma_i}{2},\ J_i = \frac{\sigma_i}{2}$.

A ces générateurs infinitésimaux est associée la matrice

$$A = \exp i\frac{\sigma_i}{2}(\alpha_i - i\beta_i) \in SL(2,C)$$

Paramétrisant α_i et β_i sous la forme $\vec{\alpha} = \theta\vec{n}$ et $\vec{\beta} = \phi\vec{m}$ où $\vec{m},\ \vec{n}$ sont des vecteurs normés on montre que la transformation $(\vec{\alpha}, \vec{\beta} = \vec{0})$ définit une rotation autour de l'axe $\vec{n}$ d'angle θ.

$$\begin{cases} x_0' = x_0 \\ \vec{x}' = \vec{x}\cos\theta - \vec{n} \wedge \vec{x}\sin\theta + (1-\cos\theta)\vec{n}(\vec{n}\vec{x}) \end{cases}$$

De même la transformation $(\vec{\alpha} = 0, \vec{\beta})$ définit une transformation spéciale de Lorentz le long de l'axe $\vec{m}$.

$$\begin{cases} x_0' = x_0\cosh\phi + \vec{m}\vec{x}\sinh\phi \\ \vec{x}' = \vec{x} + x_0\vec{m}\sinh\phi + \vec{m}(\vec{m}\vec{x})(\cosh\phi - 1) \end{cases}$$

2) La représentation $(0,\frac{1}{2})$ est définie par $M_i = 0,\ N_i = \frac{\sigma_i}{2}$ soit $K_i = \frac{i\sigma_i}{2},\ J_i = \frac{\sigma_i}{2}$

La matrice de $SL(2,C)$ associée s'écrit

$$B = \exp i\frac{\sigma_i}{2}(\alpha_i + i\beta_i)$$

On vérifie que $B = (A^+)^{-1}$.

On dispose ainsi de 2 représentations du groupe de Lorentz. Ces 2 représentations sont inéquivalentes.

Preuve : Supposons les représentations équivalentes, alors $\forall A, \exists S \in SL(2,C)$ telle que $(A^+)^{-1} = SAS^{-1} \Rightarrow \text{Trace}A = \text{Trace}(A^+)^{-1}$. Il suffit de montrer que cette condition est violée pour certaines transformations de $SL(2,C)$ par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Conséquences : On est ainsi conduit à introduire 2 types de spineurs notés ξ et η se transformant respectivement selon

$$\xi \xrightarrow{\Lambda} \xi' = A\xi$$
$$\eta \xrightarrow{\Lambda} \eta' = (A^+)^{-1}\eta$$

Chaque spineur se transforme de façon irréductible sous le groupe de Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$. En revanche sous la parité nous avons vu que les représentations $(j,0)$ et $(0,j)$ doivent être échangées par conséquent

$$\xi \xrightarrow{P} \eta$$
$$\eta \xrightarrow{P} \xi$$

Par conséquent, pour représenter le groupe de Lorentz complet il n'est pas suffisant de travailler avec un seul type de spineur. On est amené à introduire des spineurs à 4 composantes appelés spineurs de Dirac et notés

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Ils se transforment selon

$$\psi \xrightarrow{\Lambda} \psi' = S(\Lambda)\psi \quad \text{si} \quad \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$$

où

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^+)^{-1} \end{pmatrix}$$

Sous une opération de parité on a

$$\psi \xrightarrow{P} \psi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi$$

Equation de Dirac

Considérons une particule de masse m au repos. Elle est caractérisée par le vecteur $\hat{p}^\mu = (m, \vec{0})$. La transformation de Lorentz spéciale qui amène le vecteur $(m,0)$ sur le vecteur $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ a pour image dans $SL(2,C)$

$$A = \exp \frac{\vec{\sigma}\vec{n}}{2}\phi \quad \text{où} \quad \vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\bar{p}|} \quad \text{et} \quad \cosh\phi = \frac{p_0}{m}$$

Le spineur au repos $(\xi(0), \eta(0))$ est transformé dans le spineur

$$\xi(p) = A\xi(0) = \frac{p_0+m+\vec{\sigma}\vec{p}}{\sqrt{2m}\sqrt{p_0+m}}\ \xi(0)$$
$$\eta(p) = (A^+)^{-1}\eta(0) = \frac{p_0+m-\vec{\sigma}\vec{p}}{\sqrt{2m}\sqrt{p_0+m}}\ \eta(0)$$

La distinction entre spineurs $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$ n'a de sens que pour des états d'impulsion non nulle. Ce sont en effet les boosts de Lorentz qui permettent de distinguer ces 2 types de spineurs. Pour un état au repos il est par conséquent légitime de poser $\xi(0) = \eta(0)$. Ceci entraîne que les spineurs $\xi(p)$ et $\eta(p)$ ne sont pas indépendants. Ils vérifient les relations suivantes

$$(p_0 + \vec{\sigma}\vec{p})\eta(p) = m\xi(p)$$
$$(p_0 - \vec{\sigma}\vec{p})\xi(p) = m\eta(p)$$

ou encore sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \vec{\sigma}\vec{p} \\ p_0 - \vec{\sigma}\vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(p) \\ \eta(p) \end{pmatrix} = 0$$

Par conséquent le spineur de Dirac $\psi(p) = \binom{\xi(p)}{\eta(p)}$ vérifie l'équation $(\gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i - m)\psi(p) = 0$ où

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi l'équation de Dirac $(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(p) = 0$. Elle traduit l'existence de relations linéaires entre les spineurs ξ et η.

On vérifie que les matrices γ^μ satisfont aux relations d'anticommutation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

$\triangleright$ *Exercice*

1) vérifier que

$$\gamma^\mu x_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{x} \\ \tilde{x} & 0 \end{pmatrix}$$

2) Construire la matrice $S(\Lambda)$ telle que

$$S(\Lambda)\gamma^\rho S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu {\Lambda_\mu}^\rho$$

Cette matrice nous servira plus loin dans la discussion de la covariance relativiste.

$\triangleleft$

<u>Algèbre de Lie de $\mathcal{P}_+^\uparrow$:</u>

Utilisons la loi de groupe définie plus haut. Une transformation infinitésimale sera associée à l'opérateur

$$U(a,\Lambda) = 1 + ia_\mu P^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$$

où les opérateurs P^μ et $J^{\mu\nu}$ sont les générateurs de la représentation. En utilisant la loi de groupe définie plus haut.

$$U(a_1,\Lambda_1)U(a_2,\Lambda_2) = \pm U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2)$$

On obtient les relations de commutation

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[P_\mu, J_{\lambda\sigma}] &= i(g_{\mu\sigma}P_\lambda - g_{\mu\lambda}P_\sigma) \\
[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= ig_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}
\end{aligned}$$

Un système physique sera dit élémentaire s'il se transforme selon une représentation irréductible du groupe de Poincaré. Nous montrerons ultérieurement que ces représentations sont caractérisées par deux nombres quantiques, la masse m et le spin s. L'étude des équations relativistes peut être abordée dans ce cadre. Dans les paragraphes qui suivent nous allons suivre un autre chemin en replacant cette étude dans une perspective historique.

1.3 Equation de Klein-Gordon

En mécanique quantique non relativiste on peut établir l'équation de Schrödinger en s'appuyant sur la règle de correspondance

$$\begin{aligned}
E &\to i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t} \\
\vec{p} &\to -i\hbar\vec{\nabla}
\end{aligned}$$

la relation énergie impulsion $E = \frac{1}{2m}\vec{p'}^2$ donne $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\bar{x},t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$, équation de Schrödinger pour une particule libre. On peut vérifier que cette équation est bien invariante de forme sous les transformations de Galilée $\vec{x'} = \vec{x} + \vec{v}t, t' = t$ à condition que la fonction d'onde se transforme selon une représentation projective du groupe de Galilée

$$\psi'(\vec{x'},t') = \exp\left(im\frac{\vec{v}^2}{2}t + m\vec{v}\vec{x}\right)\ \psi(\vec{x},t)$$

En mécanique relativiste on définit le 4-vecteur énergie-impulsion : $p^\mu = (\frac{E}{c},\vec{p})$

On a $p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$ donc

$$E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$$

La règle de correspondance conduirait à l'équation

$$\begin{aligned} i\hbar\tfrac{\partial\psi}{\partial t} &= \sqrt{-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4}\psi \\ &= mc^2(1 - \tfrac{\hbar^2}{2m^2c^2}\Delta + \ldots)\psi \end{aligned}$$

équation non locale où la symétrie $(t,\vec{x})$ est complètement masquée.

On renonce donc à travailler avec une équation du 1er ordre.

La règle de correspondance nous donne

$$p^\mu = (\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}) = i\hbar\partial^\mu$$

D' où l'équation issue de la relation de dispersion $p^\mu p_\mu = m^2c^2$

$$[-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu - m^2c^2]\psi = 0$$

soit encore

$$\boxed{[\partial^\mu\partial_\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\psi(x) = 0}$$

Montrons que cette équation est covariante sous une transformation de Lorentz et que $\psi(x)$ se transforme comme un scalaire.

Sous une transformation de Lorentz

$$x' = \Lambda x$$

montrons que $\psi'(x') = \psi(x)$ satisfait l'équation primée

$$[\partial'^{\mu}\partial'_{\mu} + m^2c^2/\hbar^2]\psi' = 0$$

Pour celà, partons de $[\partial^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\psi = 0$

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\frac{dx'^{\nu}}{dx^{\mu}}$$

or $x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}x^{\mu}$

donc $\partial_{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\partial'_{\nu}$

$$\partial^{\mu} = g^{\mu\rho}\partial_{\rho} = g^{\mu\rho}\Lambda^{\sigma}{}_{\rho}\partial'_{\sigma}$$

Donc

$$\begin{aligned}\partial^{\mu}\partial_{\mu} &= g^{\mu\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\rho}\partial'_{\sigma}\partial'_{\nu} \\ &= g^{\nu\sigma}\partial'_{\sigma}\partial'_{\nu} = \partial'^{\sigma}\partial'_{\sigma}\end{aligned}$$

Ce qui nous conduit finalement à l'équation

$$\boxed{[\partial'_{\mu}\partial'^{\mu} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\psi'(x') = 0}$$

On a obtenu une équation du second ordre, dont les solutions de type onde plane $\psi = e^{-i\frac{px}{\hbar}}$ donnent $p^2 = m^2c^2$ soit

$$p_0 = \pm\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

solutions d'énergie positive et négative ; on peut dans le cas libre sélectionner les solutions d'énergie positive, cette séparation n'est en général pas possible *en présence d'un champ* *extérieur*. Par ailleurs l'équation obtenue n'admet pas d'interprétation probabiliste. En effet,

$$\psi^* \tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \psi\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^* = \tfrac{\partial}{\partial t}[\psi * \tfrac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\tfrac{\partial}{\partial t}\psi^*]$$
$$\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^* = \vec{\nabla}[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*]$$

Posons

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t})$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)$$

comme conséquence des équations du mouvement on obtient $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$

mais ρ n'est pas positif :par exemple pour une onde plane

$$\psi = Ae^{-ipx/\hbar} \qquad \rho = \frac{p^0}{mc}|A|^2$$

on a donc signe (ρ) = signe (E). Signalons cependant qu'il est possible de donner un sens physique à ρ en l'identifiant non pas à une densité de probabilité mais à une densité de charge électrique. Le fait que ρ soit positif (négatif) pour les solutions à énergie positive (négative) suggère de réinterpréter les solutions à énergie négative comme des antiparticules portant une charge électrique opposée à celle des particules (solutions à énergie positive).

1.4 Equation de Dirac

Perspective historique : l'idée de Dirac est de travailler avec une équation du 1er ordre dont le carré redonne l'équation de Klein-Gordon. Elle se rattache au problème mathématique suivant : écrire le carré d'une forme quadratique, par exemple

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

comme le carré d'une forme linéaire

$$(\beta ct + \alpha^1 x + \alpha^2 x + \alpha^3 z)^2$$

La solution ne peut manifestement être trouvée qu'en prenant α, β dans une algèbre non commutative. Cette idée développée dans les travaux de Lipschitz et Clifford (1878) a fait suite aux travaux de Hamilton et Cayley.
[voir : Dieudonné, abrégé d'Histoire des mathématiques (Hermann) tome 1 p.108, Elie Cartan, Leçons sur la théorie des spineurs (Hermann 1938).]

On pose

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3}\alpha^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar}\beta\psi \tag{1}$$

$\vec{\alpha}$, β ne peuvent être des nombres car l'équation ne serait pas covariante sous les rotations.

On considère $\vec{\alpha}, \beta$ comme des matrices $N \times N$

– **1)** on exige que cette équation conduise à la relation d'impulsion énergie

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

associée à l'équation du second ordre

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4)\psi$$

ou encore

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (\Delta - \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi$$

– **2)** L'équation (1) doit admettre une interprétation probabiliste

– **3)** Elle doit être covariante sous le groupe de Lorentz.

Itérons (1)

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t})\psi = \sum_{k=1}^{3}(\alpha^k\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar}\beta)(-\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t})$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad &= \textstyle\sum_{k=1}^{3}(\alpha^k\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar}\beta)\sum_{\ell=1}^{3}(\alpha^\ell\frac{\partial}{\partial x^\ell} + \frac{imc}{\hbar}\beta)\psi \\ &= \textstyle\sum_{k,\ell}\frac{1}{2}(\alpha^k\alpha^\ell + \alpha^\ell\alpha^k)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^\ell} \\ &\textstyle -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\beta^2\psi + \frac{imc}{\hbar}\sum_k(\beta\alpha^k + \alpha^k\beta)\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\alpha^k\alpha^\ell + \alpha^\ell\alpha^k &= 2\delta^{k\ell}1 \\
\beta\alpha^k + \alpha^k\beta &= 0 \\
\beta^2 = \alpha^k\alpha^k &= 1
\end{aligned}$$

a) Ecrivons maintenant l'équation (1) sous forme hamiltonienne

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

avec

$$H = -ic\hbar\alpha^k\frac{\partial}{\partial x^k} + mc^2\beta$$

l'hermiticité de $H \longrightarrow \alpha_k, \beta$ hermitien

b) Montrons que Trace $\alpha_k =$ Trace $\beta = 0$

Preuve

$$1)\ \alpha^i = -\beta\alpha^i\beta$$

$$\text{Trace } \alpha^i = -\text{Trace } \beta\alpha^i\beta = -\text{Trace } \beta^2\alpha^i = -\text{Trace } \alpha^i \longrightarrow \text{Trace } \alpha^i = 0$$

$$2)\ \beta\alpha^i = -\alpha^i\beta$$

multiplions par α^i *sans sommation* sur i

$$\begin{aligned}
\beta\alpha^i\alpha^i &= -\alpha^i\beta\alpha^i \\
\beta &= -\alpha^i\beta\alpha^i
\end{aligned}$$

$$\text{Trace } \beta = -\text{Trace } \alpha^i\beta\alpha^i = -\text{Trace } {\alpha^i}^2\beta = -\text{Trace } \beta \longrightarrow \text{Trace } \beta = 0$$

c) Montrons que les matrices α, β sont de dimension paire. Les relations $\alpha^i\alpha^i = \beta^2 = 1 \rightarrow$ valeurs propres de α et $\beta = \pm 1$. D'après le résultat précédent, il y aura autant de valeurs propres $+1$ que -1 donc

$$\dim\ \alpha = \dim\ \beta = 2n$$

$n = 1$ pas de solution (base de matrices hermitiques $\vec{\sigma}, 1$).

$n = 2$, dim $\alpha = 4$, une solution possible est

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Equation de continuité, interprétation probabiliste

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + mc^2 \beta \psi \tag{2}$$

s'écrit sous forme hamiltonienne

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

avec

$$H = -i\hbar c \vec{\alpha} \vec{\nabla} + mc^2 \beta$$

Prenons l'adjoint de (2)

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} = i\hbar c \vec{\nabla} \psi^+ \vec{\alpha} + mc^2 \psi^+ \beta$$

Il vient

$$\begin{aligned} i\hbar \tfrac{\partial}{\partial t}(\psi^+ \psi) &= i\hbar \tfrac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi + i\hbar \psi^+ \tfrac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= -i\hbar c \vec{\nabla} (\psi^+ \vec{\alpha} \psi) \end{aligned}$$

de la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{ div } \vec{j} = 0$$

avec

$$\rho = \psi^+ \psi > 0 \qquad \vec{j} = c \psi^+ \vec{\alpha} \psi$$

1.5 Limite non relativiste - Etude du couplage avec un champ électromagnétique

Considérons le lagrangien non relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v}$$

Ecrivons l'impulsion $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$

Le hamiltonien est

$$H = \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L} = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2$$

Laissons nous guider par ces considérations classiques. On effectue la substitution minimale

$$p^\mu \to p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$$

où $A^\mu = (A^0, \vec{A})$

$$\begin{array}{rcl} \frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} & \to & \frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}A^0 \\ -i\hbar\vec{\nabla} & \to & -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A} \end{array}$$

L'équation de Dirac devient

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - eA^0)\psi = c\alpha^k(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{e}{c}A^k)\psi + mc^2\beta\psi$$

Ou encore

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = H\psi$$

avec

$$H = c\vec{\alpha}(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}) + mc^2\beta + eA^0$$

Travaillons dans la représentation où

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 + eA^0 & c\vec{\sigma}(\vec{p} - \frac{e}{c}\bar{A}) \\ c\vec{\sigma}(\vec{p} - \frac{e}{c}\bar{A}) & -mc^2 + eA^0 \end{pmatrix}$$

posons

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\ ,$$

Introduisons des spineurs à 2 composantes φ, χ

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= c\vec{\sigma}\vec{\pi}\chi + (mc^2 + eA^0)\varphi \\
i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} &= c\vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi + (-mc^2 + eA^0)\chi
\end{aligned}
$$

Supposant $A^0, \vec{A}$ statiques, nous pouvons rechercher des solutions stationnaires

$$
\varphi = \tilde{\varphi}e^{-iEt/\hbar} \qquad \chi = \tilde{\chi}e^{-iEt/\hbar}
$$

avec $E = mc^2 + \varepsilon$.

La 2ème équation devient

$$
\varepsilon\tilde{\chi} = c\vec{\sigma}\vec{\pi}\tilde{\varphi} + (-2mc^2 + eA^0)\tilde{\chi}
$$

Dans la limite non relativiste $\varepsilon \ll mc^2$ nous pouvons négliger ε et eA^0 devant l'énergie de masse $2mc^2$

$$
\tilde{\chi} = \frac{1}{2mc}\vec{\sigma}\bar{\pi}\tilde{\varphi}
$$

La première équation s'écrit

$$
E\tilde{\varphi} = c(\vec{\sigma}\vec{\pi})\tilde{\chi} + (mc^2 + eA^0)\tilde{\varphi}
$$

soit

$$
(E - mc^2)\tilde{\varphi} = [\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 + eA^0]\tilde{\varphi}
$$

Considérons un champ magnétique dans la jauge $A_0 = 0$ $\vec{A} \neq 0$

$$
\epsilon\tilde{\varphi} = \frac{1}{2m}(\vec{\pi}^2 + i\vec{\sigma}\vec{\pi} \wedge \bar{\pi})\tilde{\varphi}
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{\pi} \wedge \vec{\pi})^i &= \epsilon_{ijk}(p^j - \tfrac{e}{c}A^j)(p^k - \tfrac{e}{c}A^k) \\
&= -\tfrac{e}{c}\epsilon_{ijk}(p^jA^k + A^jp^k) \\
&= -\tfrac{e}{c}\epsilon_{ijk}p^jA^k - \tfrac{e}{c}\epsilon_{ikj}A^kp^j \\
&= -\tfrac{e}{c}\epsilon_{ijk}[p^j, A^k] = -\tfrac{e\hbar}{ic}\epsilon_{ijk}\partial_jA^k \\
&= -\tfrac{e\hbar}{ic}B^i
\end{aligned}
$$

On arrive ainsi à l'équation de Pauli

$$
\epsilon\tilde{\varphi} = (\frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\vec{B})\tilde{\varphi}
$$

Cas particulier : Champ magnétique constant

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$$

$$\frac{1}{2m}\vec{\pi}^2 = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 = \frac{1}{2m}(\vec{p}^2 - \frac{e}{c}(\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p})) + O(e^2)$$

négligeons les termes diamagnétiques en e^2

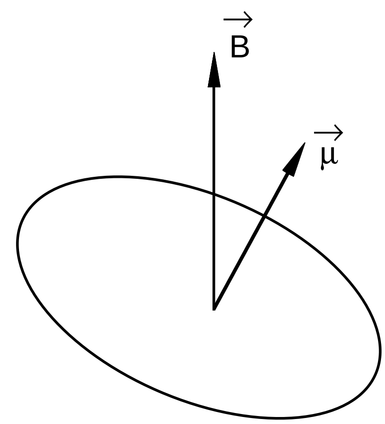
$$\begin{aligned}\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p} &= [\vec{p}, \vec{A}] + 2\vec{A}\vec{p} \\ &= 0 + (\vec{B} \wedge \vec{r})\vec{p} \\ &= (\vec{B}, \vec{r}, \vec{p}) = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{B}) \\ &= \vec{L}\vec{B}\end{aligned}$$

$$\varepsilon\tilde{\varphi} = \frac{\vec{p}^2}{2m}\tilde{\varphi} - \frac{e}{2mc}\vec{L}\vec{B}\tilde{\varphi} - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\vec{B}\tilde{\varphi}$$

<u>Interprétation du terme</u> $-\dfrac{e\vec{L}\vec{B}}{2mc}$

Considérons le couplage d'une boucle de courant avec un champ magnétique

$$i = \frac{|e|}{T} = \frac{|e|}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{|e|v}{2\pi r}$$



moment magnétique

$$\mu = iS = \pi r^2 \frac{e|v|}{2\pi r} = \frac{|e|}{2m}mrv = \frac{|e|}{2m}L$$

algébriquement on a

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m}\vec{L}$$

le hamiltonien d'interaction est de la forme

$$H = -\frac{\vec{\mu}\vec{B}}{c} = \frac{-e}{2mc}\vec{L}.\vec{B}$$

Il décrit le couplage entre le champ magnétique extérieur et le moment magnétique de l'atome engendré par la rotation de l'électron sur son orbite.

Interprétation du terme $-\dfrac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\vec{B}$: on admet que l'électron porte en outre un moment magnétique intrinsèque $\vec{\mu} = \dfrac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}$, en terme de l'opérateur de spin $\vec{S} = \hbar\frac{\vec{\sigma}}{2}$ on a $\vec{\mu} = \frac{e}{m}\vec{S}$, de la forme $\vec{\mu} = g\frac{e}{2m}\vec{S}$ où g est le rapport gyromagnétique. La théorie de Dirac prédit $g = 2$.

Les corrections radiatives calculées dans le cadre de l'électrodynamique quantique donnent

$$g = 2(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + C_1(\frac{\alpha}{\pi})^2 + C_2(\frac{\alpha}{\pi})^3)$$

Les constantes C_1 et C_2 font intervenir des corrections radiatives venant non seulement de l'electrodynamique mais aussi aux interactions faibles et fortes. Ces corrections dependent des masses des particules et par consequent de la nature des leptons (electron, muon, tau).

Remarque : pour des particules composées qui sont des états liés $q\bar{q}$ ou qqq le rapport gyromagnétique n'est évidemment pas donné par la théorie de Dirac

g (neutron) =-3,83

g (proton) = 5,59

2 Formulation covariante de l'équation de Dirac

2.1 Ecriture covariante de l'équation de Dirac

Partons de l'équation

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar c\alpha^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + mc^2\beta\psi$$

divisons par c

$$\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar\alpha^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + mc\beta\psi$$

posons $ct = x^0$

$$\begin{aligned} i\hbar\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x^0} + \alpha^k\tfrac{\partial\psi}{\partial x^k}\right) - mc\beta\psi &= 0 \\ i\hbar\left(\partial_0\psi + \alpha^k\partial_k\psi\right) - mc\beta\psi &= 0 \end{aligned}$$

multiplions par β à gauche

$$i\hbar\left(\beta\partial_0\psi + \beta\alpha^k\partial_k\psi\right) - mc\psi = 0$$

il est commode de poser

$$\gamma^0 = \beta$$

$$\gamma^k = \beta\alpha^k$$

$$i\hbar\left(\gamma^0\partial_0\psi + \gamma^k\partial_k\psi\right) - mc\psi = 0$$

avec ces définitions

$$\gamma^0 = \gamma^{+0} \quad \gamma^{k+} = \alpha^{k+}\beta^+ = \alpha^k\beta = -\gamma^k$$

$(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^k)^2 = -1$, les matrices γ^μ ainsi définies satisfont les relations d'anticommutation

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}1}$$

L'équation de Dirac s'écrit maintenant

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0$$

ou encore

$$\boxed{\left(-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

attention aux signes !

$$\gamma^\mu\partial_\mu = (\frac{1}{c}\gamma^0\partial^t + \vec{\gamma}\vec{\nabla})$$

L'équation conjuguée s'écrit

$$i\partial_\mu\psi^+(\gamma^\mu)^+ + \frac{mc}{\hbar}\psi^+ = 0$$

or $\gamma^{\mu^+} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ d'où

$$i\partial_\mu\psi^+\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 + \frac{mc}{\hbar}\psi^+ = 0$$

qu'il est commode de réécrire en terme du spineur adjoint $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$, en multipliant à droite par γ^0

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi} = 0$$

$$\boxed{i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi} = 0}$$

On introduit parfois la notation due à Feynman (slash)

$$\not{a} = a_\mu\gamma^\mu = a_0\gamma^0 + a_i\gamma^i = a^0\gamma^0 - \vec{a}\vec{\gamma}$$

avec cette notation l'équation de Dirac s'écrit

$$-i\not{\partial}\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$$

on a la propriété

$$\not{a}^2 = a_\mu\gamma^\mu a_\nu\gamma^\nu = \frac{1}{2}a_\mu a_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = a_\mu a_\nu g^{\mu\nu}$$

$$\not{a}^2 = a^2 1$$

Remarque

On introduit fréquemment

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu = (\gamma^0, -\vec{\gamma})$$

l'équation de Dirac peut encore s'écrire

$$-i\gamma_\mu \partial^\mu \psi + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$$

Ecrivons la forme covariante de l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 \quad \text{avec} \quad \rho = \psi^+\psi \quad \vec{j} = c\psi^+\vec{\alpha}\psi$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi) + \vec{\nabla}(\psi^+\vec{\alpha}\psi) &= 0\\ \tfrac{\partial}{\partial x^0}(\psi^+\psi) + \tfrac{\partial}{\partial x^k}(\psi^+\alpha^k\psi) &= 0\end{aligned}$$

on a en posant $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0 =$ spineur adjoint.

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^0\psi &= \psi^+\psi\\ \bar{\psi}\gamma^k\psi &= \psi^+\gamma^0\gamma^k\psi = \psi^+\beta.\beta\alpha^k\psi = \psi^+\alpha^k\psi\end{aligned}$$

d'où l'équation de continuité

$$\partial_0(\bar{\psi}\gamma^0\psi) + \partial_k(\bar{\psi}\gamma^k\psi) = 0$$

$$\boxed{\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0}$$

Elle exprime que le courant $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ est conservé

$\triangleright$ *Exercice : montrer que l'équation de Dirac dans un champ électromagnétique extérieur s'écrit*

$\triangleleft$

$$-i\gamma_\mu(\partial^\mu + \frac{ieA^\mu}{\hbar c})\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$$

montrer que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ est conservé.

Propriétés des matrices de Dirac, considérons les 16 matrices

$$\begin{aligned}
\Gamma^s &= 1 \\
\Gamma^v_\mu &= \gamma_\mu \\
\Gamma^t_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \sigma_{\mu\nu} \\
\Gamma^p &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5 \\
\Gamma^a_\mu &= \gamma_5\gamma_\mu
\end{aligned}$$

En utilisant les relations d'anticommutation on peut montrer que ces 16 matrices sont linéairement indépendantes. On s'appuie sur les propriétés suivantes

1) $\forall\ \Gamma^n\ (\Gamma^n)^2 = \pm 1$ en particulier $(\gamma^5)^2 = +1$

2) pour tout $n \neq s$, il existe m tel que $\Gamma^n\Gamma^m = -\Gamma^m\Gamma^n$. La preuve consiste à exhiber l'élément Γ^m correspondant

$$\begin{aligned}
\{\gamma_\mu, \gamma_5\} &= 0 \\
\{\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu\} &= 0 \\
\{\gamma^5, \gamma^0\} &= 0 \\
\{\gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5\} &= 0
\end{aligned}$$

Il s' ensuit que la trace de Γ^n est nulle si $n \neq s$. En effet

$$\begin{aligned}
\pm \text{ Trace } \Gamma^n = \text{ Trace } \Gamma^n(\Gamma^m)^2 &= \text{ Trace } \Gamma^n\Gamma^m\Gamma^m \\
&= - \text{ Trace } \Gamma^m\Gamma^n\Gamma^m \\
&= - \text{ Trace } \Gamma^n(\Gamma^m)^2 = 0
\end{aligned}$$

3) Etant donnés Γ^a, Γ^b $a \neq b$, il existe $\Gamma^n \neq \Gamma^s$ tels que $\Gamma^a\Gamma^b = \Gamma^n$ (preuve par inspection)

Supposons que $\sum a_n\Gamma^n = 0$ multiplions par $\Gamma^m \neq \Gamma^s$ et prenons la trace

$$\begin{aligned}
&\text{Trace } (\Sigma a_n\Gamma^n\Gamma^m) && = \Sigma a_n \text{ Trace } \Gamma^n\Gamma^m \\
&\text{d'après 3} && = \textstyle\sum_{n\neq m} a_n \text{ Trace } \Gamma^p + a_m \text{ Trace } (\Gamma^m)^2 \\
& && = \pm 4a_m = 0 \rightarrow a_m = 0
\end{aligned}$$

pour extraire a_s prenons la trace de $\Sigma a_n \Gamma^n = 0$.

$$a_s \text{ Trace } \Gamma^s + \sum_{n \neq s} a_n \text{ Trace } \Gamma^n = 0$$

d'où $4a_s = 0 \to a_s = 0$.

Ceci établit l'indépendance linéaire des 16 matrices Γ. Réciproquement, sachant qu'il y a 16 matrices indépendantes, il n'est pas possible de les réaliser par des matrices de dimension plus petite que 4×4.

Théorème

1) Etant donnés 2 ensembles de matrices unitaires γ^μ satisfaisant les relations

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Il existe une matrice S unitaire telle que

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$$

2) Toute matrice commutant avec l'ensemble des 4 matrices γ^μ est un multiple de l'identité.

<u>Remarque</u> : $\gamma_\mu^+ = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \to$ les γ_μ sont unitaires, en effet

$$\gamma_\mu^+ \gamma_\mu = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\mu \quad \begin{array}{ll} \mu = 0 & \gamma_0^+ \gamma_0 = 1 \\ \mu = i & \gamma_0 \gamma_i \gamma_0 \gamma_i = -\gamma_0^2 \gamma_i^2 = +1 \end{array}$$

<u>Représentation de Dirac</u>

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{oi} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

Représentation chirale

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{oi} = i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

Généralisation : algèbre de Clifford : Soit E un espace euclidien réel de dimension paire $n = 2\nu$ rapporté à un repère orthonormé $\{e_\alpha\}$. Désignons par $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur métrique. Soit d'autre part S un espace vectoriel complexe de dimension 2^ν. A chaque vecteur e_α de base on associe un opérateur linéaire γ_α sur S vérifiant la relation

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} 1$$

Considérons l'ensemble des opérateurs

$$1, \gamma_\alpha, \ldots, \gamma_{\alpha_1}\gamma_{\alpha_2} \ldots \gamma_{\alpha p} \ldots (0 \leq p \leq n)$$

où $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$.

On démontre que cet ensemble constitue une base de l'espace vectoriel complexe de tous les opérateurs linéaires sur S. Cet espace admet une structure naturelle d'algébre (par le produit des opérateurs linéaires) qui considéré comme algèbre abstraite définit l'algèbre de Clifford $\Gamma(E)$

– le théorème 1 s'étend sans difficulté à ce cas

– cette construction s'étend aussi au cas où E est une variété Riemanienne (voir N.D. Birell and P.C.W. Davies, quantum fields in curved space p.81)

2.2 Discussion de la covariance relativiste

La physique décrite par une équation relativiste, en particulier par l'équation de Dirac doit être indépendante du référentiel choisi. Par conséquent, il doit exister une prescription pour relier les fonctions d'onde entre 2 référentiels.

Nous allons montrer que sous une transformation de Lorentz

$$x' = \Lambda x$$

l'équation de Dirac est invariante de forme (covariante) si

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

où $S(\Lambda)$ est une matrice 4×4 agissant sur les composantes de ψ.

L'invariance de forme est l'affirmation que dans le nouveau référentiel $\psi'(x')$ obéit à l'équation

$$(-i\gamma^\mu \partial'_\mu + \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$$

où $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$.

Partons de

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$$

et utilisons

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$$

Il vient

$$(-i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu + \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$$

ou encore

$$(-i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu + \frac{mc}{\hbar})S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

Multiplions par $S(\Lambda)$ à gauche

$$(-iS(\Lambda)\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu S^{-1}(\Lambda) + \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$$

or $S(\Lambda)$ ne dépend pas de x^μ mais seulement de la transformation de Lorentz, d'où

$$(-iS\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}\partial'_\nu + \frac{mc}{\hbar})\psi'(x') = 0$$

Par conséquent l'équation sera invariante de forme si $S\gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} = \gamma^\nu$ ou encore en multipliant par S à droite et S^{-1} à gauche

$$\boxed{S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu \qquad (3)}$$

Une condition supplémentaire que doit satisfaire $S(\Lambda)$ vient du fait que les éléments de matrice $\Lambda^\nu{}_\mu$ sont réels, par conséquent en prenant l'adjoint de (1) on obtient

$$S^+\gamma^{\nu+}(S^{-1})^+ = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^{\mu+}$$

or $\gamma^{\mu+} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, donc

$$\begin{aligned} S^+\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0(S^{-1})^+ &= \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \\ \gamma^0S^+\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0(S^{-1})^+\gamma^0 &= \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu = S^{-1}\gamma^\nu S \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S\gamma^0S^+\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0(S^{-1})^+\gamma^0S^{-1} &= \gamma^\nu \\ (S\gamma^0S^+\gamma^0)\gamma^\nu(S\gamma^0S^+\gamma^0)^{-1} &= \gamma^\nu \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$.

Par conséquent $S\gamma^0S^+\gamma^0 = b1$,soit

$$S\gamma^0S^+ = b\gamma^0 \tag{4}$$

γ^0 et $S\gamma^0S^+$ étant hermitiens *b est donc réel*

Fixons la normalisation de S en exigeant que det $S = +1$, il vient d'après (4)

$$1 = b^4$$

or b réel donc $b^2 = +1 \rightarrow b = \pm 1$. Pour fixer le signe de b considérons S^+S or (4) $\rightarrow$ $\gamma^0S^+ = bS^{-1}\gamma^0 \rightarrow S^+ = b\gamma^0S^{-1}\gamma^0$ donc $S^+S = b\gamma^0\Lambda^0{}_\mu\gamma^\mu = b\gamma^0(\Lambda^0{}_0\gamma^0 + \Lambda^0{}_i\gamma^i)$. Prenons la trace

$$\text{Trace}S^+S = \text{ Trace}(\gamma^0)^2\,.b\Lambda^0{}_0 = 4b\Lambda^0{}_0$$

S^+S est définie positive donc Trace $S^+S > 0$

$$\rightarrow b\Lambda^0{}_0 > 0$$

Pour une transformation de Lorentz orthochrone on a donc $b = +1$
Dans le cas antiorthochrone on a $b = -1$

Examinons le cas $b = 1$, on a donc $S^+ = \gamma^0S^{-1}\gamma^0$. Considérons les propriétés de transformation du courant

$$\begin{aligned} j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \longrightarrow j'^\mu(x') &= \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') \\ &= \psi^{+\prime}(x')\gamma^0\gamma^\mu\psi'(x') \end{aligned}$$

or $\psi'(x') = S\psi(x)$, $\psi^{+\prime}(x') = \psi^+(x)S^+$ d'où

$$j'^\mu(x') = \psi^+(x)S^+\gamma^0\gamma^\mu S\psi(x)$$

En utilisant $S^+\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$ il vient

$$j'^\mu(x') = \psi^+(x)\gamma^0 S^{-1}\gamma^\mu S\psi(x)$$

$$j'^\mu(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)$$

Le courant se transforme bien comme un vecteur sous $\mathcal{L}_+^\uparrow$

2.3 Construction de $S(\Lambda)$

Considèrons une transformation infinitésimale

$$x'^\mu = \Lambda^{\mu\nu}x_\nu = (g^{\mu\nu} + \epsilon\omega^{\mu\nu})x_\nu$$

la contrainte $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ s'écrit

$$\tilde{\Lambda}g\Lambda = g$$

ou encore

$$(\tilde{\Lambda})^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}\Lambda^{\sigma\nu} = g^{\mu\nu}$$

soit

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\rho\mu}g_{\rho\sigma}\Lambda^{\sigma\nu} &= g^{\mu\nu} \\
(g^{\rho\mu} + \epsilon\omega^{\rho\mu})g_{\rho\sigma}(g^{\sigma\nu} + \epsilon\omega^{\sigma\nu}) &= g^{\mu\nu} \\
(\delta^\mu_\sigma + \epsilon\omega^\mu{}_\sigma)(g^{\sigma\nu} + \epsilon\omega^{\sigma\nu}) &= g^{\mu\nu} \\
g^{\mu\nu} + \epsilon\omega^{\mu\nu} + \epsilon\omega^{\nu\mu} + 0(\epsilon^2) &= g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0}$$

Posons $S(\Lambda) = 1 + \epsilon T$, d'où $S^{-1}(\Lambda) = 1 - \epsilon T$ l'équation (3) donne

$$\begin{aligned}
(1 - \epsilon T)\gamma^\rho(1 + \epsilon T) &= \Lambda^\rho{}_\sigma\gamma^\sigma = \Lambda^{\rho\sigma}\gamma_\sigma \\
&= (g^{\rho\sigma} + \epsilon\omega^{\rho\sigma})\gamma_\sigma = \gamma^\rho + \epsilon\omega^{\rho\sigma}\gamma_\sigma
\end{aligned}$$

$$\gamma^\rho - \epsilon[T, \gamma^\rho] = \gamma^\rho + \epsilon\omega^{\rho\sigma}\gamma_\sigma$$

d'où la condition que doit satisfaire T

$$[T, \gamma^\rho] = -\omega^{\rho\sigma}\gamma_\sigma$$

Supposons qu'il existe 2 solutions T_1, T_2 telles que

$$[T_1, \gamma^\rho] = [T_2, \gamma^\rho] = -\omega^{\rho\sigma}\gamma_\sigma$$

alors

$$[T_1 - T_2, \gamma^\rho] = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 = c1 \quad \text{en vertu du théorème précédent}$$

or det $S = 1 \Rightarrow$ Trace $T = 0$.

Il y a donc unicité de la solution. Par inspection on obtient

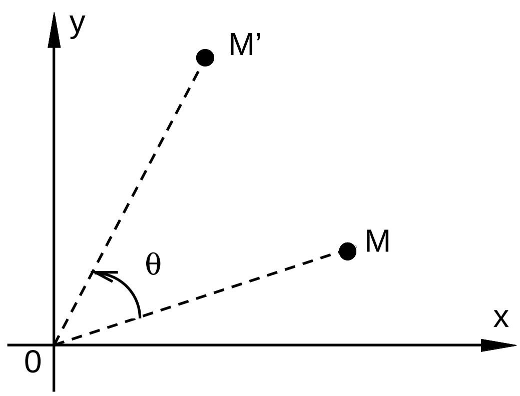
$$T = \frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho)$$

$$S(\Lambda) = 1 + \frac{\epsilon}{8}\omega^{\rho\sigma}[\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho] = 1 - \frac{i\epsilon}{4}\omega^{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}$$

Exemple :

a) Rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{n}$.

Prenons le point de vue selon lequel on fait tourner le systeme, les axes restant fixes. Considérons une rotation active d'angle θ autour de Oz



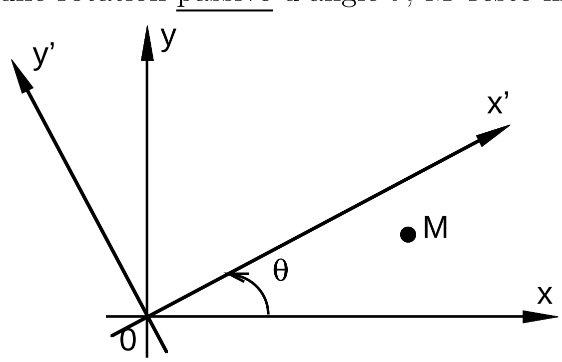
$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

ou encore pour une rotation infinitésimale d'angle θ autour de l'axe $\vec{n}$

$$x'^i = x^i + \theta\epsilon^{ikj}n^k x^j$$

Pour une rotation passive d'angle θ, M reste fixe, les axes tournent.



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

ou encore pour une rotation quelconque

$$x'^i = x^i - \theta\epsilon^{ikj}n^k x^j$$

Comparant avec la formule générale

$$x'^\mu = (g^{\mu\nu} + \epsilon\omega^{\mu\nu})x_\nu = x^\mu + \epsilon\omega^{\mu\nu}x_\nu$$

Il vient

$$x'^i = x^i + \epsilon\omega^{ij}x_j = x^i - \epsilon\omega^{ij}x^j$$

en comparant on obtient

$$\epsilon = \theta \qquad \omega^{ij} = \epsilon^{ikj}n^k$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} S(R) &= 1 - \tfrac{i\epsilon}{4}\omega^{ij}\sigma_{ij} = 1 - \tfrac{i\theta}{4}\epsilon^{ikj}n^k\sigma_{ij} \\ &= 1 + \tfrac{i\theta}{4}\epsilon^{ijk}n^k\sigma_{ij} \end{aligned}$$

Or

$$\sigma_{ij} = \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j] = \begin{bmatrix} \epsilon^{ij\ell}\sigma^\ell & 0 \\ 0 & \epsilon^{ij\ell}\sigma^\ell \end{bmatrix}$$

Par conséquent

$$S(R) = 1 + \frac{i\theta}{2}\begin{bmatrix} \vec{\sigma}\vec{n} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\vec{n} \end{bmatrix}$$

Pour une rotation finie autour de l'axe $\vec{n}$

$$\boxed{S(R) = \begin{bmatrix} \exp i\theta\frac{\vec{\sigma}\vec{n}}{2} & 0 \\ 0 & \exp i\theta\frac{\vec{\sigma}\vec{n}}{2} \end{bmatrix}}$$

Le spineur de Dirac transformé s'écrit donc $\psi'(\vec{r}') = S(R)\psi(\vec{r})$ avec $\vec{r}' = R\vec{r}$ ou encore

$$\psi'(\vec{r}) = S(R)\psi(R^{-1}\vec{r})$$

Il est commode d'introduire la matrice

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\psi'(\vec{r}) = \exp i\theta\frac{\vec{\Sigma}\vec{n}}{2}\psi(R^{-1}\vec{r})$$

Pour identifier l'opérateur de spin nous pouvons considérer une transformation infinitésimale

$$\begin{aligned}
R^{-1}\vec{r} &= \vec{r} + \theta\vec{n}\wedge\vec{r} \\
\psi'(\vec{r}) &= (1 + i\theta\tfrac{\vec{\Sigma}\vec{n}}{2})(\psi(\vec{r}) + \theta\vec{n}\wedge\vec{r}.\vec{\nabla}\psi) \\
&= \psi(r) + i\theta(\tfrac{\vec{\Sigma}\vec{n}}{2} - i(\vec{n}\wedge\vec{r})\vec{\nabla})\psi \\
&= \psi(\vec{r}) + \tfrac{i\theta}{\hbar}[\hbar\tfrac{\vec{\Sigma}\vec{n}}{2} + (\vec{n},\vec{r},\vec{p})]\psi \\
&= \psi(\vec{r}) + \tfrac{i\theta}{\hbar}\vec{n}[\hbar\tfrac{\vec{\Sigma}}{2} + \vec{L}]\psi
\end{aligned}$$

Cette formule fait apparaître l'opérateur de moment cinétique total

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$$

ce qui suggère d'interpréter $\vec{L}$ comme un moment angulaire orbital et $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} = \vec{S}$ comme un terme de spin. Les relations de commutation

$$[S^i, S^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}S^k$$

et la relation

$$\vec{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4}1 = \hbar^2 s(s+1)1$$

avec $s = 1/2$ nous invitent à considérer que le spineur de Dirac décrit une particule de spin 1/2. A ce stade cette interprétation n'est pas entièrement satisfaisante, en effet $\vec{L}$ et $\vec{S}$ ne sont pas séparemment constantes du mouvement. On a

$$[H, \vec{J}] = 0 \text{ où } \quad H = c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2$$

mais

$$[H, \vec{L}] \neq 0$$

Par ailleurs pour pouvoir identifier $\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p}$ à un opérateur de moment cinétique orbital il faudrait que $\vec{r}$ puisse être identifié à un opérateur de position. La relation

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = i[H,\vec{r}] \text{ donne } \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = c\vec{\alpha}$$

dont les valeurs propres sont $\pm c$

Par ailleurs les composantes de la vitesse $[\frac{dx_i}{dt}, \frac{dx_j}{dt}] \neq 0$, donc $\frac{dx_i}{dt}$ ne peut pas être identifié à l'opérateur de vitesse $\frac{\vec{p}}{m}$.

Pour définir un bon opérateur de position, il faut passer dans la représentation de Foldy-Wouthuysen (voir Bjorken-Drell).

Conclusion provisoire : un spineur de Dirac se transforme sous une rotation comme une particule de spin 1/2 mais il n'est pas légitime d'identifier $\hbar\vec{\Sigma}/2$ à un opérateur de spin. Une définition précise du spin sera donnée ultérieurement.

Notons que l'opérateur $\dfrac{\hbar}{2}\dfrac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{p}$ commute avec H (trivial dans la représentation $\{\vec{p}\}$). On verra plus loin que cet objet est l'opérateur d'hélicité, "projection du spin sur l'impulsion."

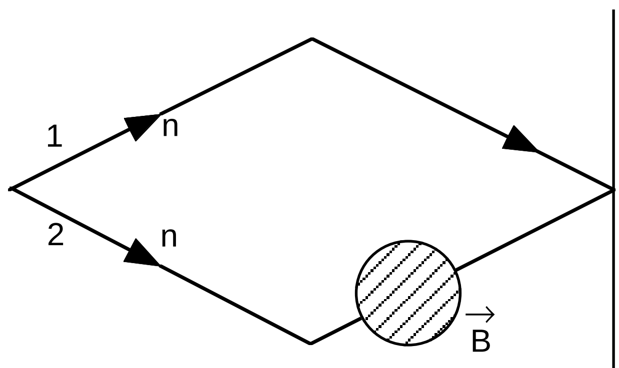
Rotations des fermions sous $\theta = 2\pi$

Pour une rotation d'angle 2π autour de l'axe Oz on obtient

$$\exp i\theta\frac{\vec{\sigma}\vec{n}}{2} = \exp i\pi\sigma_z = -1$$

par conséquent la fonction d'onde change de signe sous une telle rotation. Pour un électron isolé un tel changement de signe ne peut pas être mis en évidence

On peut en revanche mettre en évidence cet effet dans une expérience d'interférences



Le principe consiste à séparer un faisceau de neutrons en 2 parties. Le faisceau **2** traverse un champ magnétique $\vec{B}$. Au niveau classique (et aussi au niveau quantique !) il y a précession du spin dans le champ. On peut ajuster le temps de passage pour que $\theta = 2\pi$. En effet $\theta = \dfrac{geBt}{2mc}$ est l'angle dont a tourné le spin dans le champ $\vec{B}$

Article :"Verification of coherent spinor rotation of fermions", H. Rauch et *al.*, *Physics Letters* **54A** n°6, p. 425 (1975).

b) Considérons une transformation spéciale de Lorentz. Le long de l'axe Ox

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

posons $\beta = \tanh\epsilon$, il vient

$$x'^0 = x^0\cosh\epsilon - x^1\sinh\epsilon$$

$$x'^1 = x^1\cosh\epsilon - x^0\sinh\epsilon$$

Pour une transformation infinitésimale

$$x'^0 = x^0 - \epsilon x^1$$

$$x'^1 = x^1 - \epsilon x^0$$

Comparant avec $x'^0 = x^0 + \epsilon\omega^{01}x_1 = x^0 - \epsilon\omega^{01}x^1$, il vient $\omega^{01} = 1$ d'où

$$\begin{aligned} S(\Lambda) = 1 - \tfrac{i\epsilon}{4}(\omega^{01}\sigma_{01} + \omega^{10}\sigma_{10}) \quad &= 1 - \tfrac{i\epsilon}{2}\sigma_{01} \\ &= 1 - \tfrac{\epsilon}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour une transformation finie

$$\boxed{S(\Lambda) = \exp -\frac{i\epsilon}{2}\sigma_{01}}$$

ou encore

$$\boxed{S(\Lambda) = \cosh\frac{\epsilon}{2} - \alpha_1 \sinh\frac{\epsilon}{2}}$$

avec $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$. On note que $S(\Lambda)$ n'est pas unitaire.

<u>Généralisation</u> : une transformation de Lorentz le long de l'axe $\vec{n}$ sera définie par

$$S(\Lambda) = \cosh\frac{\epsilon}{2} - \vec{\alpha}\vec{n}\sinh\frac{\epsilon}{2}$$

Il lui correspond la transformation de coordonnées.

$$x'^0 = x^0\cosh\epsilon - \vec{n}\vec{x}\sinh\epsilon$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - x_0\vec{n}\sinh\epsilon + \vec{n}(\vec{n}\vec{x})(\cosh\epsilon - 1)$$

▷ *Exercice : montrer que la transformation de Lorentz le long de l'axe $\vec{n}$ est le produit d'une rotation par une transformation de Lorentz le long de l'axe 1 par une rotation inverse.*

◁

$$\Lambda_{\vec{n}} = R\Lambda_1 R^{-1}$$

c) Réflexion d'espace.

$$\vec{x}' = -\vec{x} \quad t' = t \Rightarrow \Lambda^0{}_0 = 1 \quad \Lambda^i{}_i = -1$$

$$\Lambda \in \mathcal{L}_-^\uparrow$$

$$S^{-1}\gamma^\nu S = \Lambda^\nu{}_\rho \gamma^\rho$$

S doit donc satisfaire les 2 équations

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^0 S &= \gamma^0 \\ S^{-1}\gamma^i S &= -\gamma^i \end{aligned}$$

dont la solution est $S = e^{i\varphi}\gamma^0$

$$\psi'(\vec{x}', t') = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(\vec{x}, t)$$

$$\boxed{\psi'(\vec{x}, t) = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(-\vec{x}, t)}$$

Remarque : Pour faire apparaître la structure $SL(2, C)$ de ces transformations, il est préférable de travailler dans la représentation chirale, on obtient

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\epsilon}{2}\vec{\sigma}\vec{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\epsilon}{2}\vec{\sigma}\vec{n}} \end{pmatrix}$$

$$S(R) = \begin{pmatrix} e^{i\theta\dfrac{\vec{\sigma}\vec{n}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta\dfrac{\vec{\sigma}\vec{n}}{2}} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note que les spineurs se transforment de façon <u>réductible</u> sous les rotations et sous les transformations de Lorentz. Ce n'est que sous les transformations de parité qu'ils se mélangent entre eux. Pour représenter le groupe de Lorentz complet il est donc nécessaire de travailler avec des spineurs de Dirac à 4 composantes. Notons toutefois que la représentation obtenue n'est pas unitaire.

2.4 Lois de transformation de quantités bilinéaires sous $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Nous avons montré au paragraphe 2.2 que $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se transforme comme un quadrivecteur. L'objet de ce paragaphe est de généraliser cette étude à des formes bilinéaires quelconques. On s'intéresse à des transformations orthochrones donc $b = +1$, donc $S^+\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$.

Par conséquent $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ se transforme selon

$$\bar{\psi}' = \psi'^+\gamma^0 = \psi^+ S^+\gamma^0 = \psi^+\gamma^0 S^{-1} = \bar{\psi}S^{-1}$$

d'où

1) $\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$ scalaire

2)

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' &= \bar{\psi}S^{-1}\sigma_{\mu\nu}S\psi \\
&= \bar{\psi}S^{-1}\tfrac{i}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu]S\psi \\
&= \tfrac{i}{2}\bar{\psi}S^{-1}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]S\psi \\
&= \tfrac{i}{2}[\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S.S^{-1}\gamma^\nu S\psi \\
&-\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\nu SS^{-1}\gamma^\mu S\psi] \\
&= \tfrac{i}{2}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma[\bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^\sigma\psi - \bar{\psi}\gamma^\sigma\gamma^\rho\psi] \\
&= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}\sigma^{\rho\sigma}\psi
\end{aligned}$$

se transforme comme un tenseur de rang 2 (cf $\vec{E}$, $\vec{B}$)

3) $\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi'$ se transforme comme un vecteur

4) $\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^5 S\psi$

$$\begin{aligned}
\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\tfrac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \\
S^{-1}\gamma^5 S &= -\tfrac{i}{4!}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\quad\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= -\tfrac{i}{4!}(\det\Lambda)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta
\end{aligned}$$

$$S^{-1}\gamma^5 S = (\det\Lambda)\gamma^5$$

donc $\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = (\det\Lambda)\bar{\psi}\gamma^5\psi$ est un pseudoscalaire

5)

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' &= \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^5 S\psi \\
&= \Lambda^\mu{}_\rho\bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^5\psi.\det\Lambda
\end{aligned}$$

est un pseudovecteur.

3 L'équation de Dirac

3.1 Construction des solutions ondes planes

Cherchons des solutions de l'équation

$$-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + mc\psi = 0 \quad \text{(on a posé } \hbar = 1)$$

de type onde plane

$$\psi(x) = e^{-ipx}\psi(p)$$

Il vient

$$(-\not{p} + mc)\psi(p) = 0$$

Il existe une solution à ce système d'équations linéaires homogènes si et seulement si

$$\det(\not{p} - mc) = (p^2 - m^2c^2)^2 = 0$$

donc $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$, d'où le spectre $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$. Le spectre d'énergie $E = p_0 c \in]-\infty, -mc^2[\cup]mc^2, +\infty[$ contient donc à la fois des solutions d'énergie positive et négative. Dans la représentation de Dirac, on obtient

$$\begin{pmatrix} p^0 - mc & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -p^0 - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

Soit

$$\begin{aligned} (p^0 - mc)\psi^1 &= \vec{\sigma}\vec{p}\psi^2 \\ \vec{\sigma}\vec{p}\psi_1 &= (p^0 + mc)\psi_2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \tfrac{\vec{\sigma}\vec{p}\psi_1}{p^0 + mc} \\ \psi(p) &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}\psi_1}{p^0 + mc} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est la solution générale, ψ_1 étant un spineur quelconque.

Exprimons le scalaire de Lorentz

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\psi(x) &= \bar{\psi}(p)\psi(p) \\ &= \psi_1^+\psi_1[1 - \frac{\vec{p}^2}{(p^0 + mc)^2}] \end{aligned}$$

Les solutions d'énergie positive $p^0 = +\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2c^2}$ seront normalisées par $\bar{\psi}_+(p)\psi_+(p) = +1$, d'où

$$\psi_+(p) = \sqrt{\frac{p^0+mc}{2mc}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}\varphi}{p^0+mc} \end{pmatrix}$$

avec $\varphi^+\varphi = +1$.
Les solutions d'énergie négative $p^0 = -\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2c^2}$, seront normalisées selon $\overline{\psi}_-(p)\psi_-(p) = -1$ d'où

$$\psi_-(p) = \sqrt{\frac{-p^0+mc}{2mc}} \begin{pmatrix} \dfrac{-\vec{\sigma}\vec{p}\chi}{-p^0+mc} \\ \chi \end{pmatrix} \text{ avec } \chi^+\chi = 1\ .$$

On pose par convention

$$\begin{aligned} u(p) &\equiv \psi_+(p_0,\vec{p}) = \sqrt{\tfrac{p^0+mc}{2mc}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}\varphi}{p^0+mc} \end{pmatrix} \\ v(p) &\equiv \psi_-(-p_0,-\vec{p}) = \\ &= \sqrt{\tfrac{p^0+mc}{2mc}} \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}\chi}{p^0+mc} \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{où maintenant} \quad p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2c^2}\ . \end{aligned}$$

Avec ces conventions $p^0 = +\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2c^2}$ dans ces 2 formules. On a donc les solutions d'énergie positive

$$\psi_+(x) = e^{-ipx}\psi_+(p) = e^{-ipx}u(p)$$

Et les solutions d'énergie négative

$$\psi_-(x) = e^{ipx}v(p)$$

avec les normalisations invariantes de Lorentz

$$\bar{u}(p)u(p) = -\bar{v}(p)v(p) = 1$$

Remarque importante

Nous aurions pu construire ces solutions en partant des solutions au repos définies par

$$-i\gamma^0\partial_0\psi + mc\psi = 0 \quad \text{où} \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\psi_+(x,1) = e^{-imc^2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-imc^2t}u(0,1)$$

$$\psi_+(x,-1) = e^{-imc^2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-imc^2t}u(0,-1)$$

$$\psi_-(x,1) = e^{imc^2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{imc^2t}v(0,1)$$

$$\psi_-(x,-1) = e^{imc^2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{imc^2t}v(0,-1)$$

Nous avons indicé les spineurs $u(p,\sigma)$ où p caractérise l'impulsion et σ un nombre quantique auxiliaire dont la signification apparaîtra plus tard.

Effectuons un changement de référentiel amenant le vecteur $(mc,\vec{0})$ sur le vecteur $(p_0,\vec{p})$. La transformation de Lorentz

$$x'^0 = x^0\cosh\epsilon - \vec{n}\vec{x}\sinh\epsilon$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - x_0 \vec{n} \sinh\epsilon + \vec{n}(\vec{n}\vec{x})(\cosh\epsilon - 1)$$

définie par

$$\cosh\epsilon = \frac{p_0}{mc} \;, \vec{n} = -\frac{\vec{p}}{|p|} \qquad \epsilon > 0$$

amène le vecteur $(mc, \vec{0})$ sur le vecteur $(p_0, \vec{p})$. Notons que cette transformation de Lorentz est obtenue en prenant $\vec{n} = -\frac{\vec{p}}{|p|}$, en effet dans l'interprétation passive, pour donner une impulsion $\vec{p}$ à la particule il faut effectuer une transformation de Lorentz opposée à $\vec{p}$ (le nouveau référentiel est animé d'une vitesse $\vec{v} = -\frac{\vec{p}c}{p_0}$).
On obtient

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

or $(\Lambda^{-1}x)_0 = x_0 \cosh\epsilon + \vec{n}\vec{x} \sinh\epsilon = \frac{x_0 p_0 - \vec{x}\vec{p}}{mc}$ donc $(mc^2)t$ devient $p^\mu x_\mu$.

$$\begin{aligned}
\psi'_+(x,\sigma) &= \left(\cosh\tfrac{\epsilon}{2} - \vec{\alpha}\vec{n}\sinh\tfrac{\epsilon}{2}\right) u(0,\sigma)e^{-ipx} \\
&= \left(\cosh\tfrac{\epsilon}{2} + \vec{\alpha}\tfrac{\vec{p}}{|p|}\sinh\tfrac{\epsilon}{2}\right) u(0,\sigma)e^{-ipx} \\
&= \tfrac{p_0 + mc + \vec{\alpha}\vec{p}}{\sqrt{2mc(mc+p_0)}} u(0,\sigma)e^{-ipx} \\
\psi'_+(x,\sigma) &= u(p,\sigma)e^{-ipx}
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\psi'_-(x,\sigma) &= \left(\cosh\tfrac{\epsilon}{2} + \vec{\alpha}\tfrac{\vec{p}}{|p|}\sinh\tfrac{\epsilon}{2}\right) v(0,\sigma)e^{ipx} \\
&= v(p,\sigma)e^{ipx}
\end{aligned}$$

Relations d'orthogonalité : dans le référentiel au repos on a

$$\bar{u}(0,\sigma)u(0,\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'}$$
$$\bar{v}(0,\sigma)v(0,\sigma') = -\delta_{\sigma\sigma'}$$
$$\bar{u}(0,\sigma)v(0,\sigma') = 0 \;.$$

Ces relations étant invariantes (scalaires de Lorentz)

$$\boxed{\bar{u}(p,\sigma)u(p,\sigma') = -\bar{v}(p,\sigma)v(p,\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'}}$$

3.2 Opérateurs de projection

D'après les résultats précédents

$$\Lambda_+(p) = \sum_{\sigma=1,-1} u(p,\sigma)\bar{u}(p,\sigma)$$

projette sur les solutions d'énergie positive

$$\Lambda_+(p)u(p,\sigma) = u(p,\sigma)$$
$$\Lambda_+(p)v(p,\sigma) = 0$$

Pour le calculer utilisons

$$u(p,\sigma) = S\ u(0,\sigma)$$
$$\bar{u}(p,\sigma) = u^+(0,\sigma)S^+\gamma_0$$

Donc

$$\begin{aligned}\Lambda_+(p) &= S\sum_{\sigma=1}^{2} u(0,\sigma)u^+(0,\sigma)S^+\gamma_0 \\ &= S\left(\frac{1+\gamma_0}{2}\right)S^+\gamma_0\end{aligned}$$

Utilisons $S^+ = \gamma_0 S^{-1}\gamma_0$

$$\begin{aligned}\Lambda_+(p) &= \tfrac{1}{2}\left[S\gamma_0 S^{-1}\gamma_0\gamma_0 + S\gamma_0\gamma_0 S^{-1}\gamma_0^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[S\gamma_0 S^{-1} + 1\right]\end{aligned}$$

La transformation de Lorentz construite ci-dessus correspond à $\Lambda^0{}_0 = \cosh\epsilon$, $\Lambda^0 i = \frac{p^i}{mc}$ donc $S^{-1}\gamma^0 S = \Lambda^0{}_\mu\gamma^\mu = \cosh\epsilon\gamma^0 + \frac{\vec{\gamma}\vec{p}}{mc}$ d'où

$$\Lambda_+(p) = \frac{1}{2}[1+\gamma_0\cosh\epsilon - \frac{\vec{\gamma}.\vec{p}}{mc}] = \frac{1}{2mc}[mc+\gamma p]$$

$$\boxed{\Lambda_+(p) = \frac{\not{p}+mc}{2mc}}$$

De même $\Lambda_-(p) = -\sum_{\sigma=\pm1} v(p,\sigma)\bar{v}(p,\sigma)$ projette sur les solutions d'énergie négative

$$\begin{aligned}\Lambda_-(p)v(p,\sigma) &= v(p,\sigma) \\ \Lambda_-(p)u(p,\sigma) &= 0 \\ \Lambda_-(p) &= -S\textstyle\sum_0 v(0,\sigma)v^+(0,\sigma)S^+\gamma_0 \\ &= -S(\tfrac{1-\gamma_0}{2})S^+\gamma_0\end{aligned}$$

On trouve après un calcul similaire

$$\boxed{\Lambda_-(p) = \frac{-\not p + mc}{2mc}}$$

3.3 Quadrivecteur de Pauli Lubanski

Considérons une transformation infinitésimale de $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$$\Lambda_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu} + \epsilon\ \omega_{\mu\nu}]$$

qui laisse invariant le quadrivecteur impulsion p_μ. L'ensemble de ces transformations constitue un sous groupe de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ appelé petit groupe du vecteur p. On a

$$p_\mu = [g_{\mu\nu} + \epsilon\omega_{\mu\nu}]p^\nu$$

donc $\omega_{\mu\nu}p^\nu = 0$. La solution générale est (en réalité seule la partie $\perp$ p contribue $\Rightarrow$ 3 paramètres) $\omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k^\rho p^\sigma$ où k est un 4 vecteur <u>arbitraire</u>. Une représentation du groupe de Lorentz est caractérisée par

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i\epsilon}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$$

où les opérateurs $J^{\mu\nu}$ sont les générateurs du groupe. Dans la représentation $(\frac{1}{2}\frac{1}{2})$ de Dirac on a

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

A une transformation du petit groupe correspond donc l'opérateur

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= 1 - \tfrac{i\epsilon}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k^\rho p^\sigma J^{\mu\nu} \\ &= 1 + i\epsilon W_\rho k^\rho \end{aligned}$$

où

$$\boxed{W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}p^\sigma}$$

est l'opérateur de polarisation de Pauli Lubanski. Par construction on a $W.p = 0$ donc W appartient à l'hyperplan orthogonal à p. On peut donc décomposer W sur une tétrade : ensemble de 4 vecteurs $(\frac{p}{mc}, n_i(p))$ tels que

$$p.n_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$n_i^2 = -1$$

$$W_\mu = mc\sum_{i=1}^{3} S_i(p)n^i_\mu(p)$$

les 3 opérateurs

$$S_i = -\frac{1}{mc}Wn_i(p) = \frac{1}{2mc}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}p^\sigma n_i^\mu$$

vérifient les relations de commutation

$$[S_i(p), S_j(p)] = i\epsilon_{ijk}S_k(p)$$

Le petit groupe du vecteur p (du genre temps $p^2 = m^2$) est donc isomorphe au groupe $SU(2)$ *C'est le groupe des rotations dans l'hyperplan orthogonal à p.*

Dans la représentation de Dirac

$$\begin{aligned} S_i(p) &= \tfrac{i}{8mc}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[\gamma^\nu, \gamma^\rho]p^\sigma n_i^\mu \\ &= -\tfrac{i}{4mc}\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}\gamma^\nu\gamma^\rho p^\sigma n_i^\mu \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\rho\gamma^\sigma = -i\gamma^5[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

il vient

$$S_i(p) = -\frac{\gamma^5}{4mc}[\not{p}, \not{n}_i]$$

or $\not{p}\not{n} + \not{p}\not{n} = 2n.p = 0$ donc

$$S_i(p) = -\frac{\gamma^5}{2mc}\not{p}\not{n}_i = \frac{\gamma^5}{2mc}\not{n}_i\not{p}$$

Agissant sur un spineur $u(p)$ tel que $\not{p}u = mcu$, la restriction de $S_i(p)$ aux solutions d'énergie positive s'écrit

$$\boxed{S_i^+(p) = \frac{1}{2}\gamma^5 \not{n}_i(p)}$$

Les solutions d'énergie négative satisfont

$$\not{p}v = -mcv$$

par conséquent

$$S_i^-(p) = -\frac{\gamma^5}{2}\not{n}_i(p)$$

La construction d'états de spin donné est donc équivalente à la recherche des états propres de $\vec{S}^2 = \frac{3}{4}1$ et $S_3^\pm(p) = \pm\frac{1}{2}\gamma_5\not{n}_3(p)$ où le quadrivecteur $n_3^\nu(p)$ se déduit du vecteur $(0, \vec{s})$ par la transformation de Lorentz qui amène $(mc, \vec{0})$ sur le vecteur p^μ. Nous verrons au paragraphe suivant qu'il existe une tétrade particulière appelée *tétrade d'hélicité*, définie par $n_3(p) = (\frac{|\vec{p}|}{mc}, \frac{p^0}{mc}\frac{\vec{p}}{|p|})$ telle que $S_3(p) = \frac{1}{2}\frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|p|}$ = opérateur d'hélicité.

Conclusion : En mécanique quantique relativiste on définit le spin d'un système en le rapportant à un système d'axes lié au vecteur p^μ. On ne peut donc pas, comme en mécanique quantique non relativiste définir des états $|\vec{p}, \sigma >= |\vec{p} > |\sigma >$. L'espace des états n'est pas un produit direct.

3.4 Etude du spin et de l'hélicité

Plaçons nous dans un référentiel où la particule est au repos. Elle est caractérisée par le quadrivecteur énergie-impulsion

$$\hat{p} = (mc, \vec{0})$$

Dans ce référentiel, nous prenons pour axe de quantification le vecteur $\hat{n}_3 = \hat{s} = (0, \vec{s})$, où $\vec{s}^2 = 1$.

Dans ce référentiel on a $\hat{p}.\hat{s} = 0$. L'opérateur de spin s'écrit pour les solutions d'énergie positive

$$S_3^+(\hat{p}) = \frac{1}{2}\gamma^5 \hat{\not{s}}$$

Il s'écrit explicitement

$$S_3^+(\hat{p}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{s} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma}\vec{s} \end{pmatrix}$$

On est donc ramené à construire un spineur à 2 composantes $\varphi(\sigma)$ qui diagonalise $\vec{\sigma}\vec{s}$.

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{s}\varphi(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma\varphi(\sigma)$$

Dans le cours sur le groupe des rotations, nous avons montré que

$$\varphi(1) = U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \\ \sin\theta/2 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(-1) = U\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta/2 & e^{-i\varphi} \\ \cos\theta/2 & \end{pmatrix}$$

est une solution où $U \in SU(2)$ est l'élément de $SU(2)$ qui induit la rotation amenant le vecteur $\vec{k}$ sur le vecteur $\vec{s}$. Par conséquent, le spineur de Dirac

$$u(\hat{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} \varphi(\sigma) \\ 0 \end{pmatrix}$$

satisfait $S_3^+(\hat{p})u(\hat{p}, \sigma) = \frac{1}{2}\sigma u(\hat{p}, \sigma)$. Pour construire des états d'impulsion quelconque p considérons la transformation de Lorentz spéciale $\Lambda(p)$ qui amène le vecteur $\hat{p} = (mc, 0)$ sur le vecteur $p = (p_0, \vec{p})$. Elle s'écrit explicitement $x' = \Lambda x$ où

$$\begin{cases} x'_0 &= x^0 \cosh\epsilon + \dfrac{\vec{p}.\vec{x}}{|\vec{p}|}\sinh\epsilon \\ \vec{x}' &= \vec{x} + x_0\dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\sinh\epsilon + \dfrac{\vec{p}(\vec{p}\vec{x})}{\vec{p}^2}(\cosh\epsilon - 1) \end{cases}$$

où $\cosh\epsilon = \frac{p^0}{mc}$ et $\sinh\epsilon = \frac{|\vec{p}|}{mc}$.

Cette transformation $\Lambda(p)$ amène le vecteur $\hat{s} = (0, \vec{s})$ sur le vecteur $n^\mu = (n^0, \vec{n})$

$$\begin{cases} n^0 &= \dfrac{\vec{p}\vec{s}\sinh\epsilon}{|\vec{p}|} = \dfrac{\vec{p}\vec{s}}{mc} \\ \vec{n} &= \vec{s} + \dfrac{\vec{p}(\vec{p}\vec{s})}{\vec{p}^2}(\cosh\epsilon - 1) = \vec{s} + \dfrac{\vec{p}(\vec{p}\vec{s})}{mc(mc + p_0)} \end{cases}$$

Le quadrivecteur n ainsi construit satisfait

$$n^\mu p_\mu = \hat{s}^\mu \hat{p}_\mu = 0$$

Il nous permet de donner une caractérisation relativiste des états de spin d'impulsion quelconque. Le spineur de Dirac

$$\begin{pmatrix} \varphi(\sigma) \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\varphi(\sigma)}{p_0+mc} \end{pmatrix} \sqrt{\frac{p_0+mc}{2mc}} = u(p,\sigma)$$

Satisfait $\frac{1}{2}\gamma_5 \not{n} u(p,\sigma) = \frac{\sigma}{2} u(p,\sigma)$.

▷ *Exercice : en partant de $\vec{\sigma}\vec{s}\varphi(\sigma) = \sigma\varphi(\sigma)$ montrer que*

◁

$$\frac{1}{2}\gamma_5 \not{n} u(p,\sigma) = \frac{\sigma}{2} u(p,\sigma)$$

Pour les solutions d'énergie négative on vérifie que

$$v(p,\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\chi(\sigma)}{p_0+mc} \\ \chi(\sigma) \end{pmatrix} \sqrt{\frac{p_0+mc}{2mc}}$$

satisfait $-\frac{1}{2}\gamma_5 \not{n} v(p,\sigma) = \frac{1}{2}\sigma v(p,\sigma)$ si $\vec{\sigma}\vec{s}\chi(\sigma) = \sigma\chi(\sigma)$

Hélicité : Choisissons pour axe de quantification le vecteur $\vec{s} = \frac{\vec{p}}{|p|}$. Il vient

$$\begin{aligned} n^0 &= \frac{\vec{p}^2}{mc|\vec{p}|} = \frac{|\vec{p}|}{mc} \\ \vec{n} &= \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} + \frac{\vec{p}|\vec{p}|}{mc(mc+p_0)} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\frac{[m^2c^2 + mcp_0 + p_0^2 - m^2c^2]}{mc(mc+p_0)} \\ \vec{n} &= \frac{\vec{p}p_0}{|\vec{p}|mc} \end{aligned}$$

Par construction $n^\mu = (n^0, \vec{n}) = (\frac{|\vec{p}|}{mc}, \frac{\vec{p}p_0}{|\vec{p}|mc})$ satisfait $pn = 0$, $n^2 = -1$.

Un calcul élémentaire montre que

$$\gamma^5 \not{n}\not{p} = \frac{mc}{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \bar{\sigma}\vec{p} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}\vec{p} \end{pmatrix}$$

Donc

$$S_3(p) = \frac{\gamma^5 \not{n}\not{p}}{2mc} = \frac{1}{2|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \bar{\sigma}\vec{p} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}\vec{p} \end{pmatrix} = \frac{1}{2|\vec{p}|}\vec{\Sigma}\vec{p}$$

n'est autre que l'opérateur d'hélicité introduit au paragraphe précédent.

On vérifie que $[H, S_3(p)] = 0$, on peut donc rechercher des spineurs qui diagonalisent H et qui ont une hélicité donnée.

Dans la limite de masse nulle $m \to 0$, $p^0 \to |\vec{p}|$ donc

$$n \to \left(\frac{|\vec{p}|}{mc}, \frac{\vec{p}}{mc}\right) = \frac{1}{mc}(p^0, \vec{p}) = \frac{p}{mc}$$

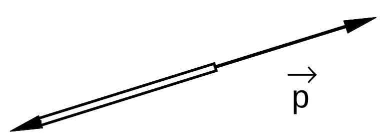
Donc $\gamma^5 \not{n}\not{p} = \gamma^5 \frac{\not{p}^2}{mc} = \gamma^5 mc$

Par conséquent

$$\boxed{S_3(p) = \frac{1}{2}\gamma^5}$$

▷ *Exemple : neutrino* $\quad \frac{1}{2}\gamma^5 \psi_\nu(p) = -\frac{1}{2}\psi_\nu(p)$

◁



Dans la théorie actuelle des interactions faibles les couplages sont de la forme $\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5)\psi_\nu$ donc seule la partie gauche du champ du neutrino est effectivement couplée aux autres champs.

Remarque sur les particules de masse nulle

Dans la représentation chirale des matrices γ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = U\gamma_D^0 U^{-1}$$
$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = U\gamma_D^i U^{-1}$$

où

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

l'équation d'onde s'écrit $(\gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i)\psi = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\vec{\nabla} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}\vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

soit encore

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} = \vec{\sigma}\vec{\nabla}\chi$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\vec{\sigma}\vec{\nabla}\varphi$$

1) – l'équation *se découple* en 2 équations pour des spineurs à 2 composantes appelés spineurs de Weyl.

2) – Ces 2 équations sont invariantes sous $\mathcal{L}_+^\uparrow$, leur seul défaut est de ne pas être *invariantes sous la parité* en effet sous une transformation de parité

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \gamma_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi \\ -\varphi \end{pmatrix}$$

Dans cette transformation, les spineurs se mélangent entre eux. En d'autres termes une théorie de spineurs de masse nulle à 2 composantes viole forcément la parité.

3) – On remarque que $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc

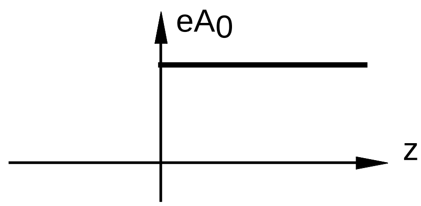
$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{est un état d'hélicité positive}$$

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{est un état d'hélicité négative}$$

3.5 Paradoxe de Klein

On s'intéresse aux solutions de l'équation de Dirac dans un champ électromagnétique extérieur.

On considère une marche de potentiel le long de l'axe Oz.



On envoie des électrons vers la région $z > 0$. L'onde incidente est donc de la forme

$$\psi_i = Ae^{-ip_0x_0+ipz}u_1(p) \quad \text{avec } u_1(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{p_0+mc} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elle décrit des électrons polarisés polarisés selon Oz d'impulsion $p > 0$. Il apparaît une onde réfléchie

$$\psi_r = Be^{-ip_0x_0-ipz}u_2(p) \quad \text{avec } u_2(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p}{p_0+mc} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et une onde transmise pour $z > 0$

$$\psi_t = Ce^{-ip_0x_0+ip'z}u_3(p) \quad \text{avec} \quad u_3(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p'}{p_0-\frac{eA^0}{c}+mc} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que ces 3 spineurs satisfont l'équation. [montrer en exercice qu'il n'y a pas de renversement de spin]

$$[-i\gamma_\mu(\partial^\mu + ie\frac{A^\mu}{c}) + mc]\psi = 0$$

avec

$$p_0^2 - p^2 = m^2c^2$$
$$(p_0 - \tfrac{eA_0}{c})^2 - p'^2 = m^2c^2$$

Ecrivons la continuité de la fonction d'onde en $z = 0$.

$$\begin{cases} A + B = C \\ \frac{p}{p_0+mc}(A - B) = \frac{Cp'}{p_0 - \frac{eA_0}{c} + mc} \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{C}{2}(1 + r)$$
$$B = \frac{C}{2}(1 - r)$$

avec

$$r = \frac{p'}{p}\frac{p_0 + mc}{p_0 - \frac{eA_0}{c} + mc}$$

Calculons les courants dans chaque région

$$\vec{j} = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$$

$$j_i = \bar{\psi}\gamma^3\psi = \tfrac{2p|A|^2}{p_0+mc}$$

$$j_r = \tfrac{2p|B|^2}{p_0+mc}$$

$$j_t = \tfrac{2p'|C|^2}{p_0 - \frac{eA_0}{c} + mc}$$

D'où l'expression du coefficient de transmission

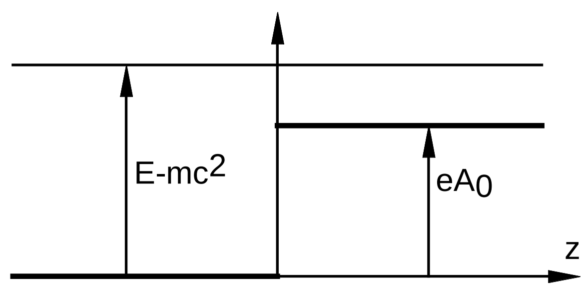
$$T = \frac{j_t}{j_i} = \frac{4r}{(1 + r)^2}$$

et de réflexion

$$R = \frac{j_r}{j_i} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}$$

Discussion

1) $eA^0 < E - mc^2$, l'énergie cinétique de la particule étant supérieure à la hauteur de la barrière, il y a transmission partielle



2) $E - mc^2 < eA_0 < E + mc^2$

$$p' = \sqrt{(p_0 - \frac{eA_0}{c})^2 - m^2c^2} = \sqrt{\frac{(E - eA_0)^2 - m^2c^4}{c^2}}$$

est imaginaire. La particule ne pénètre donc pas à droite de la barrière, onde évanescente: réflexion totale.

3) $E + mc^2 < eA_0$, redevient réel, d'où une solution oscillatoire dans la région $z > 0$.

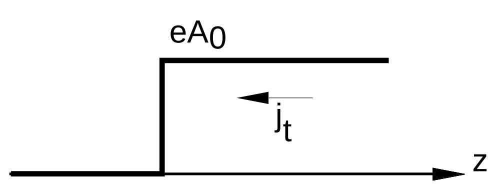
en effet $\left[p' = \sqrt{\left(\underbrace{p_0 - \frac{eA_0}{c}}_{<0} - mc\right)\left(\underbrace{p_0 - \frac{eA_0}{c}}_{<0} + mc\right)} > 0 \right.$

mais

$r < 0$

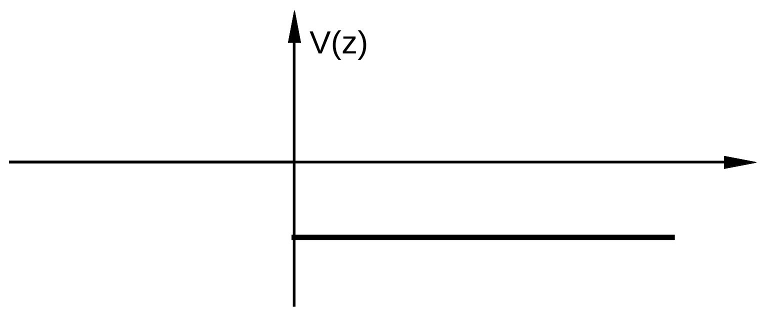
donc $R > 1$ et $T < 0 \Rightarrow$ impossibilité de localiser un électron dans la région droite.

On a un courant de particules j_t allant vers la gauche

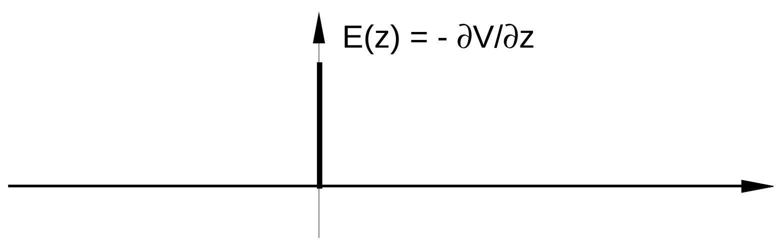


Interprétation

Anticipant la discussion du paragraphe suivant dans laquelle nous allons réinterpréter les solutions d'énergie négative, montrons qu'il est possible de comprendre ces résultats paradoxaux en admettant qu'il y a création de paires. L'introduction d'un champ fort $\underline{eA_0 > 2mc^2}$ permet en effet d'effectuer des transitions des états d'énergie négative $E < -mc^2$ aux états d'énergie positive. Puisque $e < 0$ le potentiel vu par l'électron est



d'où un champ électrique infini localisé en $z = 0$.



ce champ électrique <u>repousse vers $z < 0$</u> les électrons créés et repousse vers la droite les positrons créés. On comprend donc que $R > 1$ puisqu'il a un flux supplémentaire d'électrons allant vers $z < 0$.

Les positrons créés ont une impulsion $p_z > 0$, ceci équivaut à des électrons d'impulsion $p_z < 0$, d'où $j_z < 0$ pour $z > 0$.

3.6 Etats d'énergie négative

Discussion du paradoxe de Klein.

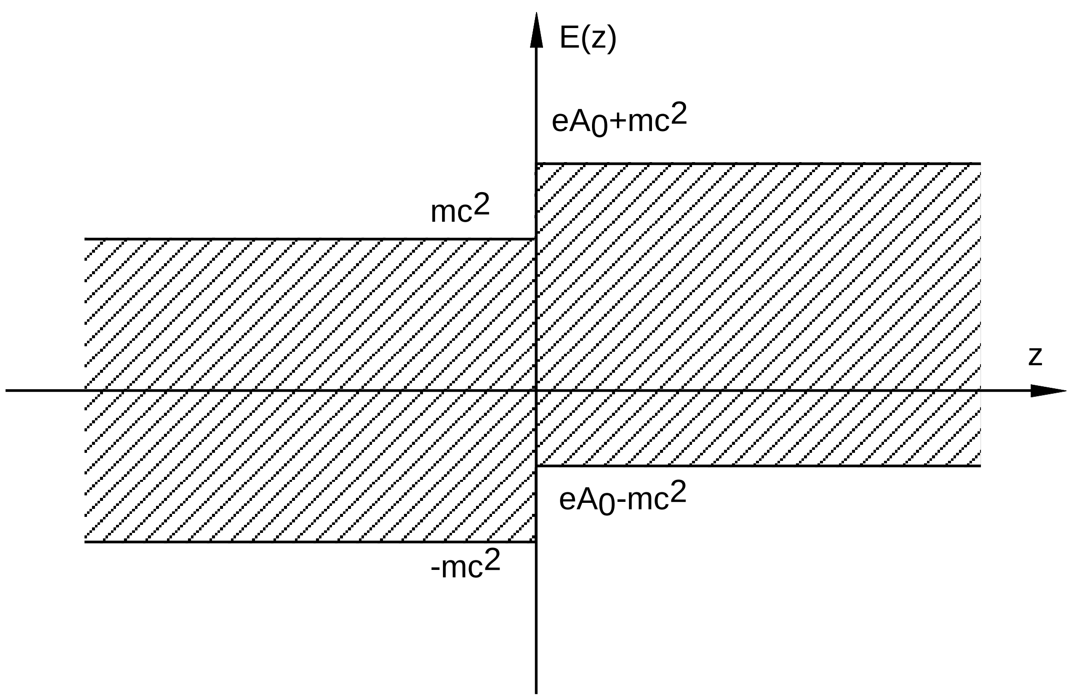
- Les états accessibles dans la région $z < 0$ sont donnés par la relation

$$p_0 = \pm\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad \text{ou encore} \quad E = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

• Les états accessibles dans la région $z > 0$ s'écrivent

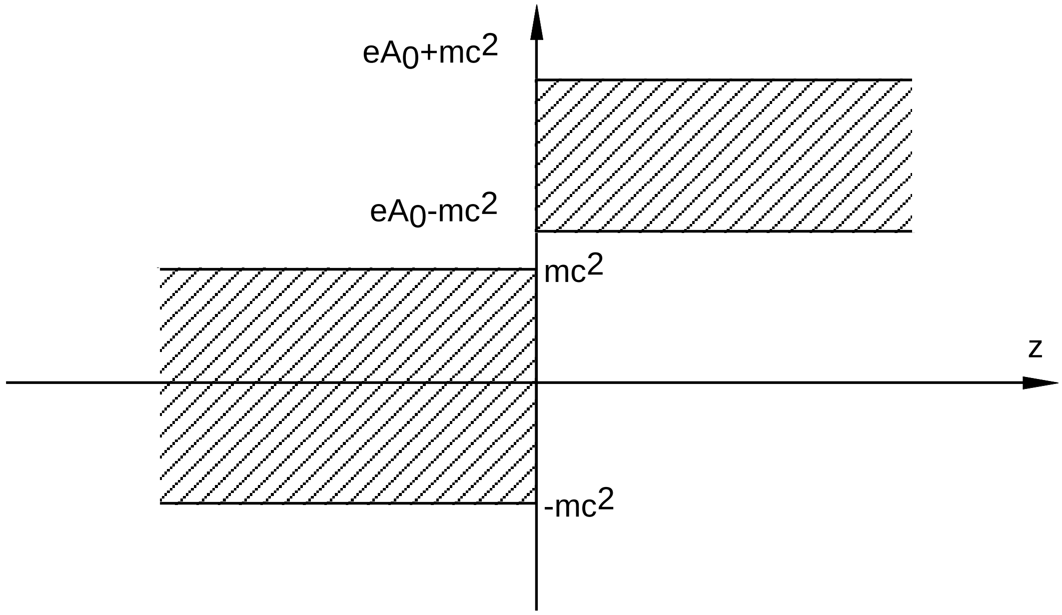
$$p_0 = \frac{eA_0}{c} \pm \sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad \text{soit} \quad E = eA_0 \pm \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

On a donc le schéma suivant ($E(z)$ est l'énergie **classiquement** accessible).



où nous avons hachuré les états non accessibles.

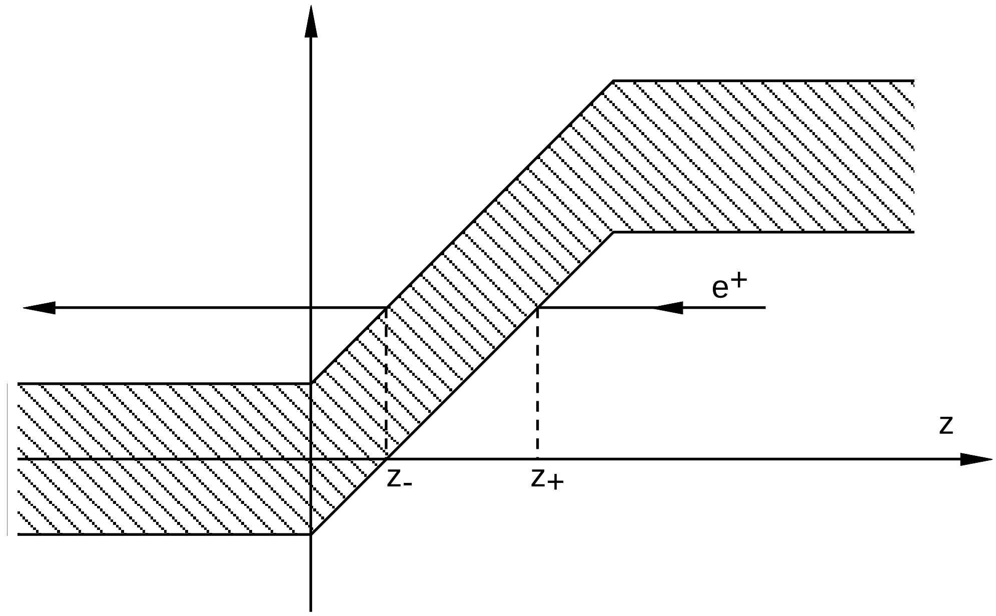
Si le potentiel est trop grand, il n'y aura plus de recouvrement.



Pour donner un sens physique à ce problème, il est préférable de considérer un potentiel dépourvu de singularité, sans discontinuité à l'origine, par exemple.

$$\begin{cases} A_0 = 0 & z < 0 & \text{décrit un champ électrique} \\ A_0 = -\mathcal{E} z & 0 < z < z_0 & \text{constant dans la région} \\ A_0 = -\mathcal{E} z_0 & z > z_0 & 0 < z < z_0 \end{cases}$$

Un électron venant de la région $z > 0$ peut transiter par effet tunnel dans la région $z < 0$.



On sait en effet qu'il existe des solutions oscillatoires pour $z > z_+$, et pour $z < z_-$. Dans la région hachurée ne peuvent exister que des ondes évanescentes. Un électron venant de droite traverse cette barrière de potentiel par effet tunnel. Dans l'état final on observera

- un électron à gauche

- une lacune à droite

Cette lacune se comporte comme un positron. On peut ainsi **réinterpréter** cet effet tunnel comme la création d'une paire e^+e^-. Ce processus nécessite la présence d'un champ suffisamment fort pour que

$$eA_0 - mc^2 = +|e|\mathcal{E}z_0 - mc^2 > mc^2$$

d'où

$$\mathcal{E} > \frac{2mc^2}{ez_0}$$

On peut estimer la probabilité de transition W par un argument semi-classique de traversée de barrière de potentiel. On obtient

$$W \sim \exp -\frac{2}{\hbar}\int_{z_-}^{z_+} |p'|dz \sim \exp -\frac{m^2\pi}{e\mathcal{E}\hbar}$$

Schwinger obtient pour la probabilité de création de paires par unité de volume et de temps

$$W = \frac{\alpha\mathcal{E}^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\exp -\frac{n\pi m^2}{e\mathcal{E}\hbar}$$

Remarques

1) une lacune créée dans la mer des états d'énergie négative est stable si on considère les particules comme libres et indépendantes. La transition
lacune $\Longrightarrow$ lacune $+\hbar\omega$, n'est pas permise cinématiquement. Pas plus que n'est permise la transition $e^- \to e^-\gamma$ dans le vide. En effet :

$$p^2 = (p' + p_\gamma)^2 = p^{'}p_\gamma + p_\gamma^2 + 2p'p_\gamma$$
$$\text{donc } p'p_\gamma = 0 \text{ ce qui est impossible}$$

En revanche e^-+ cible $\to e^-+$ cible $+\gamma$ est permise, la cible sert à absorber une partie de l'impulsion.

2) Les difficultés inhérentes au paradoxe de Klein tiennent au fait qu'il n'y a pas de séparation absolue entre modes de fréquence positive et modes de fréquence négative. La théorie des champs fournit un cadre théorique clair pour comprendre ces effets et les reinterpréter. On les retrouve dans toute théorie des champs couplée a un champ extérieur

$$\begin{cases} -\text{champ electromagnétique.} \\ -\text{champ de gravitation} \end{cases}$$

plusieurs effets physiques en résultent : en particulier le rayonnement des trous noirs. (voir Birell-Davis, Quantum field in curved space).

3) Résumé

Par conséquent dans la théorie des trous l'état

$$\begin{aligned} \psi_-(x) &= v(p)e^{+ipx} \quad \text{tel que} \\ H\psi_- &= -\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}\psi_- \\ \vec{P}\psi_- &= -\vec{p}\psi_- \end{aligned}$$

a une énergie négative et une impulsion $-\vec{p}$.

Si cet état n'est pas occupé, il apparaîtra comme un état d'énergie positive $E = +\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$

et d'impulsion $\vec{p}$

et de charge $+e$

c'est-à-dire comme une **antiparticule**, reste à montrer de façon plus satisfaisante le dernier point. C'est l'objet du paragraphe suivant que d'exhiber la relation générale entre les solutions de charge $+e$ et celles de charge $-e$.

3.7 Réinterprétation des solutions d'énergie négative

Nous venons de voir que l'existence de solutions d'énergie négative soulève certaines difficultés qui nécessitent une réinterprétation physique de ces solutions.

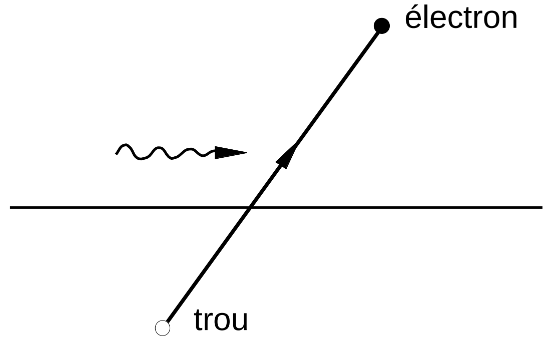
Dans le contexte de la physique atomique, ces difficultés sont tout à fait sérieuses. Considérons en effet le couplage d'un électron à un champ extérieur (par exemple au champ Coulombien). On peut montrer que le spectre d'énergie reste essentiellement de même nature que dans le cas libre. En particulier, il n'y a pas d'état fondamental. Les transitions vers des états d'énergie plus basse n'étant pas prohibées, les orbites atomiques ne seront pas stables !

Pour lever cette difficulté Dirac postule que **tous les états d'énergie négative sont occupés** par des électrons. L'état fondamental est donc décrit par un déterminant de Slater infini. (pour assurer l'antisymétrie des fonctions d'onde). Chaque état individuel à une particule étant occupé (principe d'exclusion), on est ainsi assuré qu'il ne peut apparaître de transition d'états d'énergie positive vers des états d'énergie négative. Bien entendu cet état fondamental a une énergie totale et une charge totale infinie. Il semble toutefois raisonnable d'admettre que seules les variations d'énergie et de charge relativement à cet état fondamental sont mesurables.

Quelles sont les prédictions de cette théorie ?

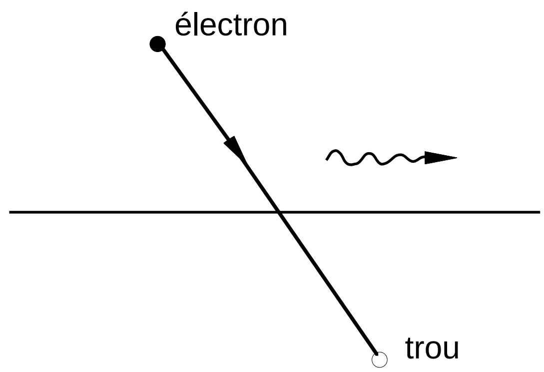
1) Un état d'énergie négative peut absorber un rayonnement électromagnétique et ainsi être excité vers un état d'énergie positive si $\hbar\omega > 2mc^2$

$\gamma \to e^+e^-$



Il y a ainsi création d'un trou d'énergie $-E$ et de charge $-|e|$. On observera donc dans l'état final un électron de charge $-|e|$ et une lacune de charge $|e|$ et d'énergie E. On peut interpréter cette lacune comme un positron de charge $+|e|$ et d'énergie E. Il y a donc **création d'une paire** e^+e^- à partir d'un champ de rayonnement.

2) Un trou (une lacune) dans la mer des états d'énergie négative peut être occupé par un électron venant d'un état d'énergie positive. Cet électron va céder de l'énergie qui apparaîtra sous forme de rayonnement.



e^-+ trou $\rightarrow$ rayonnement

qu'on interprète en $e^+e^- \rightarrow \gamma$ (processus d'annihilation) (exemple : annihilation positronium $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$; $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$).

3) Polarisation du vide : un électron test d'énergie $+|E|$ et de charge $-|e|$ polarise le vide (repousse les autres électrons de la mer).

Cette théorie des trous conduit par conséquent à une description en termes de particules et antiparticules. Cette nouvelle formulation est en fait une théorie à plusieurs particules qui ne peut être entièrement décrite en terme de fonctions d'onde à 1 particule (il faut prendre en compte le déterminant infini de Slater). Nous verrons plus loin que la quantification du champ de Dirac fournit une approche beaucoup plus satisfaisante dans laquelle la dissymétrie apparente entre trous et particules est levée,

3.8 Conjugaison de charge

Dans la discussion précédente nous avons vu qu'un trou d'énergie négative $-E$ et de charge $-|e|$ doit être interprété comme un état d'énergie $+E$ positive de charge $|e|$.

Plus généralement, il doit donc exister une correspondance entre les solutions de charge $-e$ de

$$(i\not\nabla - e\not A - m)\psi = 0 \tag{5}$$

et les solutions ψ_c de charge $+e$ de

$$(i\not\nabla + e\not A - m)\psi_c = 0 \tag{6}$$

Préliminaires algébriques

Pour préciser cette correspondance considérons les matrices transposées $\tilde{\gamma}^\mu$, elles satisfont

$\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Pour un jeu de matrices $\{\gamma\}$ unitaires, le théorème 1 (paragraphe 2.1) nous assure qu'il existe une matrice B unitaire telle que

$$\tilde{\gamma}^\mu = B^{-1}\gamma^\mu B \ .$$

Prenons le transposé, il vient

$$\gamma^\mu = \tilde{B}\tilde{\gamma}^\mu\tilde{B}^{-1} = \tilde{B}B^{-1}\gamma^\mu B\tilde{B}^{-1}$$

ou encore

$$\gamma^\mu\tilde{B}B^{-1} = \tilde{B}B^{-1}\gamma^\mu$$

$$[\gamma^\mu \ , \tilde{B}B^{-1}] = 0$$

donc $\tilde{B}B^{-1} = a1$

soit $\tilde{B} = aB \Rightarrow \tilde{\tilde{B}} = a\tilde{B}$, c.a.d. $B = a\tilde{B}$

soit $B = a(aB) \Rightarrow \ a^2 = 1$ donc $a = \pm 1$. Examinons les deux cas $\tilde{B} = \pm B$

1er Cas : $B = -\tilde{B}$

$$\gamma^\mu B = BB^{-1}\gamma^\mu B = B\tilde{\gamma}^\mu = -\tilde{B}\tilde{\gamma}^\mu = -(\widetilde{\gamma^\mu B})$$

donc B et $\gamma^\mu B$ antisymétriques. De même

$$\begin{aligned}
\gamma^5 B = BB^{-1}\gamma^5 B \ &= BB^{-1}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 B \\
&= iBB^{-1}\gamma^0 BB^{-1}\gamma^1 BB^{-1}\gamma^2 BB^{-1}\gamma^3 B \\
&= iB\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3 \\
&= iB(\gamma^3\widetilde{\gamma^2\gamma^1}\gamma^0) \\
&= iB(\gamma^0\widetilde{\gamma^1\gamma^2}\gamma^3) = B\tilde{\gamma}^5 \\
&= -\tilde{B}\tilde{\gamma}^5 = -(\widetilde{\gamma^5 B})
\end{aligned}$$

donc les 6 matrices $B, \gamma^\mu B, \gamma^5 B$ sont antisymétriques, de même on peut montrer que les 10 matrices $B\gamma^5\gamma^\mu$, $B\sigma^{\mu\nu}$ sont symétriques.

2ème Cas $B = \tilde{B}$

On obtient

6 matrices $B, \gamma^\mu B, \gamma^5 B$ symétriques

10 matrices $B\gamma^5\gamma^\mu$, $B\sigma^{\mu\nu}$ antisymétriques

Or il n'existe (pour des matrices 4×4) que $4(4-1)/2 = 6$ matrices antisymétriques donc

$$B = -\tilde{B}$$

On introduit

$$C \equiv -\gamma_5 B$$

C unitaire car

$$CC^+ = -\gamma_5 BB^+(-\gamma_5^+) = \gamma_5^2 = 1$$

Considérons

$$C^{-1} = -B^{-1}\gamma_5^{-1} = -B^{-1}\gamma_5$$

$$\begin{aligned} C^{-1}\gamma^\mu C &= -B^{-1}\gamma_5\gamma^\mu(-\gamma_5 B) = B^{-1}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5 B \\ &= -B^{-1}\gamma^\mu B = -\tilde{\gamma}^\mu \end{aligned}$$

$$\boxed{C^{-1}\gamma^\mu C = -\tilde{\gamma}^\mu \quad (7)}$$

Considérons l'équation

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0$$

ainsi que son adjointe ($\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$)

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu + m\bar{\psi} = 0$$

Prenons la transposée

$$i\tilde{\gamma}^\mu\partial_\mu\tilde{\bar{\psi}} + e\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\bar{\psi}}A_\mu + m\tilde{\bar{\psi}} = 0$$

d'après (7) il vient

$$-iC^{-1}\gamma^\mu C\partial_\mu\tilde{\bar{\psi}} - eC^{-1}\gamma^\mu C\tilde{\bar{\psi}}A_\mu + m\tilde{\bar{\psi}} = 0$$

Soit

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\not{A} - m)C\tilde{\bar{\psi}} = 0 \tag{8}$$

Comparant les équations (6) et (8) il vient

$$\boxed{\psi_c = C\tilde{\bar{\psi}}}$$

L'opération de conjugaison de charge U_c est donc telle que $U_c\psi = \psi_c = C\tilde{\bar{\psi}}$ est donc réalisée en terme d'un opérateur U_c antiunitaire.

Construction explicite : dans la représentation de Dirac.

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on vérifie que $C = i\gamma^2\gamma^0$ donc

$$\psi_c = i\gamma^2\gamma^0(\widetilde{\psi^+\gamma_0}) = i\gamma^2\psi*$$

En particulier si $\psi = u(p)e^{-ipx} \Rightarrow \psi_c = u_c(p)e^{ipx}$ avec

$$u(p)_c = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} u(p)* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} u(p)*$$

rappelons (cours sur les rotations) que $\hat{C} = i\sigma_2$ satisfait

$$\hat{C}\sigma *_i \hat{C}^{-1} = -\sigma_i$$

Il vient

$$u(p)_c = \begin{pmatrix} 0 & \hat{C} \\ -\hat{C} & 0 \end{pmatrix} u(p)* = \begin{pmatrix} 0 & \hat{C} \\ -\hat{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^* \\ \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})*\varphi*}{p_0+mc} \end{pmatrix} \sqrt{\frac{p_0+mc}{2mc}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hat{C}(\vec{\sigma}\vec{p})*\varphi*}{p_0+mc} \\ -\hat{C}\varphi^* \end{pmatrix} \sqrt{\frac{p_0+mc}{2mc}} = \begin{pmatrix} \frac{-\hat{C}(\vec{\sigma}\vec{p})*\hat{C}^{-1}\chi*}{p_0+mc} \\ \chi \end{pmatrix} \sqrt{\frac{p_0+mc}{2mc}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\chi}{p_0+mc} \\ \chi \end{pmatrix} \sqrt{\frac{p_0+mc}{2mc}} = v(p)$$

Résultat qui permet effectivement d'interpréter $v(p)$ comme la fonction d'onde d'une particule de charge $+|e|$ d'un positron $\psi_c = v(p)e^{ipx}$.Le lien précis entre solutions d'énergie négative et antiparticules sera discuté dans le cours de théorie des champs.

Calcul d'éléments de matrice

Application à la désintégration du pion.

Les probabilités de transition, ou sections efficaces font apparaître le module carré $|M|^2$ de l'amplitude

$$M = \bar{u}(p',\sigma')\Gamma u(p,\sigma)$$

Montrons comment calculer $\sum_{\sigma'} MM*$ qui caractérise un processus dans lequel on ne mesure pas le spin de l'état final

$$M = u^*_\alpha(p')(\gamma^0)_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}u_\gamma(p)$$

$$\begin{aligned} M^* &= u_\alpha(p')(\gamma^{0^*})_{\alpha\beta}\Gamma^*_{\beta\gamma}u^*_\gamma(p) \quad \text{or } u* = \bar{u}\gamma_0 \\ &= u_\alpha(p')(\gamma^{0^+})_{\beta\alpha}\Gamma^+_{\gamma\beta}\bar{u}_\delta(p)(\gamma_0)_{\delta\gamma} \\ &= u_\alpha(p')(\gamma^0)_{\beta\alpha}\Gamma^+_{\gamma\beta}(\gamma_0)_{\delta\gamma}\bar{u}_\delta(p) \\ M^* &= \bar{u}_\delta(p)(\gamma^0\Gamma^+\gamma_0)_{\delta\alpha}u_\alpha(p') \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\sigma'} |M|^2 &= \sum_{\sigma'} M^*M = \sum_{\sigma'} \bar{u}(p,\sigma)\gamma_0\Gamma^+\gamma_0 u(p',\sigma')\bar{u}(p',\sigma')\Gamma u(p,\sigma) \\ &= \bar{u}(p,\sigma)\gamma_0\Gamma^+\gamma_0 \left(\frac{\not{p}'+m}{2m}\right)\Gamma u(p,\sigma) \end{aligned}$$

Si l'état (σ, p) n'est pas polarisé nous devons aussi moyenner sur le spin σ

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}|M|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\sigma}\bar{u}_\alpha(p,\sigma)T_{\alpha\beta}u_\beta(p,\sigma)$$

où $T = \gamma_0\Gamma^+\gamma_0(\frac{\not{p}'+m}{2m})\Gamma$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\sigma\sigma'}|M|^2 &= \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}\sum_{\sigma}u_\beta(p,\sigma)\bar{u}_\alpha(p,\sigma)\\
&= \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\beta\alpha}\\
&= \frac{1}{2}\ \text{Trace}\ T\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)
\end{aligned}$$

D'où la formule générale

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}|M|^2 = \frac{1}{2}\text{Trace}\ \bar{\Gamma}\left(\frac{\not{p}'+m}{2m}\right)\Gamma\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)$$

dans laquelle on a définit $\bar{\Gamma} = \gamma_0\Gamma^+\gamma_0$.

Le calcul explicite utilise les propriétés suivantes.

1) la trace d'un nombre impair de matrice γ est nulle.

$$\begin{aligned}
\text{Trace}\ \not{a}_1\ldots\not{a}_n &= \text{Trace}\ \not{a}_1\ldots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5\\
&= \text{Trace}\ \gamma_5\not{a}_1\ldots\not{a}_n\gamma_5 \quad \text{cyclicité}
\end{aligned}$$

amenant γ_5 sur la droite, on obtient un facteur $(-1)^n$

$$\begin{aligned}
\text{Trace}\ \not{a}_1\ldots\not{a}_n &= (-1)^n\ \text{Trace}\ \not{a}_1\ldots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5\\
&= (-1)^n\text{Trace}\ \not{a}_1\ldots\not{a}_n
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\text{Trace}\ \not{a}_1\ldots\not{a}_{2n+1} = 0$$

2)

$$\begin{aligned}
\text{Trace}\ 1 &= 4\\
\text{Trace}\ \not{a}\not{b} &= \tfrac{1}{2}\text{Trace}\ \not{a}\not{b}+\not{b}\not{a}\\
&= ab\text{Trace}\ 1 = 4ab\ .
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\text{Trace } \not{a}_1 \ldots \not{a}_n \; &= a_1 a_2 \text{ Trace } \not{a}_3 \ldots \not{a}_n \\ &-a_1 a_3 \text{Trace } \not{a}_2 \not{a}_4 \ldots \not{a}_n + ... \\ &+a_1 a_n \text{Trace } \not{a}_2 \ldots \not{a}_{n-1}\end{aligned}$$

Démonstration

Utilisons

$$\not{a}_1 \not{a}_2 = - \not{a}_2 \not{a}_1 + 2 a_1 a_2$$

$$\begin{aligned}\text{Trace } \not{a}_1 \cdots \not{a}_n = \; & 2a_1 a_2 \text{ Trace } \not{a}_3 \cdots \not{a}_n \\ & - \text{ Trace } \not{a}_2 \not{a}_1 \cdots \not{a}_n\end{aligned}$$

continuons à déplacer $\not{a}_1$

$$\begin{aligned}\text{Trace } \not{a}_1 \cdots \not{a}_n = \; & 2a_1 a_2 \text{ Trace } \not{a}_3 \cdots \not{a}_n \\ & \cdots \quad + \quad \cdots \\ & +2a_1 a_n \text{ Trace } \not{a}_2 \not{a}_3 \cdots \not{a}_{n-1} \\ & -\text{Trace } \not{a}_2 \not{a}_3 \cdots \not{a}_n \not{a}_1\end{aligned}$$

Cyclicité $\rightarrow$ on ramène a_1 à gauche, on retrouve ainsi le 1er membre. CQFD

Pour les autres propriétés voir Bjorken et Drell

$$\begin{aligned}&\text{Trace } \gamma_5 = 0 \\ &\text{Trace } \gamma_5 \not{a} \not{b} = 0 \\ &\text{Trace } \gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} = 4i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma\end{aligned}$$