

# Dynamique non-linéaire appliquée au chaos et à son contrôle

Paul Manneville

▶ **To cite this version:**

Paul Manneville. Dynamique non-linéaire appliquée au chaos et à son contrôle. 2006. cel-00092962

**HAL Id: cel-00092962**
**https://cel.hal.science/cel-00092962**

Submitted on 12 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DEA de Mécanique

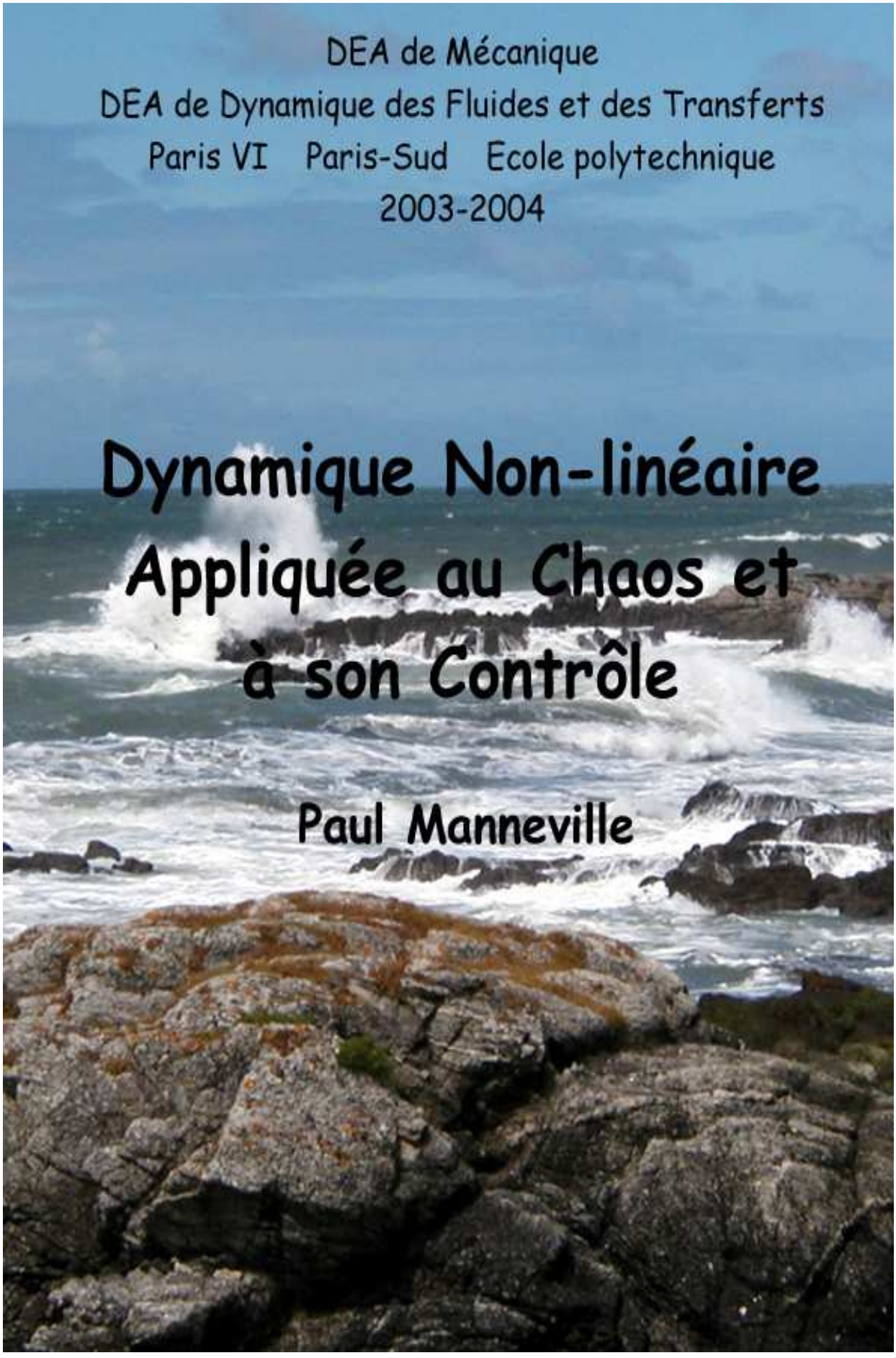
DEA de Dynamique des Fluides et des Transferts

Paris VI  Paris-Sud  Ecole polytechnique

2003-2004

# Dynamique Non-linéaire Appliquée au Chaos et à son Contrôle

Paul Manneville



Couverture: Sur la côte sauvage de la presqu'ile du Croisic (44), la mer est encore forte après le passage d'une dépression. © P. Manneville, 2002.

# Avant propos

Les notes qui suivent constituent une brève introduction aux concepts et techniques de la dynamique non-linéaire, en vue de leur application au contrôle du chaos, sujet qui a reçu un grand développement tout au long des années 90.

Le chapitre 1, destiné à fixer le cadre, se contente de donner quelques définitions préliminaires indispensables. Le chapitre 2 résume l'étude de la stabilité de régimes permanents simples (stationnaires ou périodiques), décrit plusieurs scénarios de transition vers les comportements temporels complexes qualifiés de *chaotiques* qui peuvent se développer quand on "tire" le système considéré loin de l'équilibre, puis donne quelques éléments aidant à leur compréhension (aspect statistiques et fractals). On retrouvera l'esprit de ces deux premiers chapitres dans dans la première partie de [8] dont la seconde traite des systèmes distribués dans l'espace. Le lien entre les aspects mathématiques simplement évoqués ici et l'origine physique des problèmes est exposé assez en détail dans [9]. Ici, nous nous limitons à une approche informelle, limitée à une introduction des principales idées développées de façon plus détaillée dans [10] dont la consultation pourra toujours être complétée par celle d'ouvrages mathématiquement plus rigoureux [1–6]. Détails et références originales sur le chaos pourront être trouvées dans de nombreuses sources, des monographies [7, 11], des articles de revue [12], ou des collections d'articles [13–15].

Le chapitre 3 est le véritable noyau du cours, à savoir l'application de la théorie des systèmes dynamiques au contrôle du chaos. Après une brève discussion de l'approche empirique reposant sur la mesure d'observables [18, 19], je discute d'une forme élémentaire de contrôle, l'asservissement d'un système à une autre ("synchronisation"), puis j'examine deux techniques maintenant standard de contrôle non-linéaire [23, 24]. Pour mémoire, un appendice rappelle quelques éléments classiques de contrôle linéaire. Sur certains de ses aspects le cours rejoint la présentation donnée dans [28] et dans d'autres livres plus difficiles d'accès [29–31]. On trouvera les développements récents relatifs au contrôle du chaos regroupés (malheureusement de façon peu synthétique) au sein d'un livre récent [32].

Palaiseau, Décembre 2003

Paul Manneville
manneville@ladhyx.polytechnique.fr

# Notations

Les points des espaces que nous considérerons (souvent des éléments d'espaces vectoriels du type $\mathbb{R}^n$) seront notés à l'iade de lettres majuscules grasses, e.g. $\mathbf{X}$ (au besoin, les points de l'espace physique seront désignés par $\mathbf{x}$). Pour les opérateurs agissant dans ces espaces, sauf exception, nous utiliserons des lettres calligraphiques grasses, e.g. $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Pour une fonction à valeur vectorielle $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, nous écrirons par exemple $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})$. S'il s'agit d'un opérateur linéaire $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, nous noterons plutôt $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{X}$. En général, nous ne distinguerons pas l'opérateur de la matrice qui le représente dans une base donnée, $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ pourra donc tout aussi bien désigner l'opérateur que la matrice d'éléments $l_{jj'}$. Les conventions de MatLab, utilisées à l'occasion, seront introduites en temps utile (note 1, p. 35).

Dans le domaine du contrôle, l'unité imaginaire est le plus souvent notée $j$ selon la convention des électriciens. Ici, comme en mathématiques, nous lui attribuerons la lettre $i$ que nous nous abstiendrons donc d'utiliser pour désigner un nombre entier ("integer") quelconque. Le conjugué d'un nombre complexe $z$ sera noté $z^*$.

# Sommaire

**Avant-propos** **i**

**Notations** **ii**

**Sommaire** **iii**

**1 Éléments de théorie des systèmes dynamiques** **1**
1.1 Définitions et propriétés élémentaires . . . . . 1
1.2 Notions de dynamique qualitative . . . . . 4
1.3 Dynamique effective . . . . . 12

**2 De l'ordre au chaos** **16**
2.1 Bifurcations de régimes réguliers . . . . . 16
2.2 Émergence de comportements complexes . . . . . 25
2.3 Théorie du chaos . . . . . 28

**3 Dynamique non-linéaire appliquée** **33**
3.1 Approche empirique . . . . . 34
3.2 Synchronisation de systèmes dynamiques . . . . . 37
3.3 La méthode du feed-back retardé . . . . . 42
3.4 La méthode OGY . . . . . 48
3.5 Appendice: Contrôle linéaire dans l'espace des états . . . . . 50

**Bibliographie** **58**

**Index** **60**

# Chapitre 1

# Éléments de théorie des systèmes dynamiques

## 1.1 Définitions et propriétés élémentaires

### 1.1.1 Espace des phases et degrés de liberté

La dynamique non linéaire traite des aspects généraux de l'évolution de systèmes physiques que l'on suppose bien décrits par des modèles mathématiques mettant en jeu un ensemble complet de *variables d'état* $\{X_j; j = 1, 2, \ldots, d\}$, coordonnées de points $\mathbf{X}$ appartenant à un *espace des états* $\mathbb{X}$ de dimension $d$. Par un léger abus de langage ces variables sont appelées *degrés de liberté* et $\mathbb{X}$ l'*espace des phases* du système.

La dynamique *à temps continu* d'un système de dimension finie $d$ s'exprime le plus souvent sous forme d'un *problème aux valeurs initiales* pour un système d'équations différentielles du premier ordre

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t)\,, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0\,, \tag{1.1.1}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{X}$ et $\mathbf{X}_0$ la condition initiale.

On observera que la dimension $d$ est égale au nombre de composantes de la condition initiale, une fois le système ramené au premier ordre. Ainsi, en mécanique newtonienne pour un système de particules en mouvement $\{m_n, \mathbf{x}_n\}$ soumises à des forces $\mathbf{f}_n$ on a naturellement

$$m_n \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{x}_n = \mathbf{f}_n\,.$$

Dans cette formulation, le système est du second ordre en temps et, pour initialiser l'évolution, il faut préciser les positions $\mathbf{x}_n(t_0)$ et les vitesses $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}_n(t_0)$ des particules. Or, en formulation hamiltonienne, un degré de liberté est une paire formée d'une coordonnée généralisée $q_n$ et de son moment conjugué $p_n$. L'espace des phases est donc le produit de l'espace de configuration et de l'espace des moments. Le système, gouverné par les équations de Hamilton

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_n = \partial\mathcal{H}/\partial p_n\,, \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_n = -\partial\mathcal{H}/\partial q_n\,, \tag{1.1.2}$$

se trouve automatiquement ramené au premier ordre, de sorte que l'initialisation suppose la donnée des $\{q_n(t_0), p_n(t_0)\}$. L'abus de langage évoqué plus haut vient de ce que, hors du contexte hamiltonien, on a tendance appeler sans précaution particulière "degré de liberté" toute variable participant à la caractérisation de l'état du système mais cela est sans grand risque de confusion quant à la dimension de l'espace des phases.

Le problème (1.1.1) est bien posé (une solution unique existe sur un intervalle ouvert entourant $t_0$) moyennant des conditions peu restrictives, *e.g.* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (continu à dérivées partielles premières continues). Quand la solution partant d'une condition initiale arbitraire existe pour tout temps, on dit que l'intégration de (1.1.1) définit un *flot*, *i.e.* une application inversible de $\mathbb{X}$ sur lui-même dépendant du paramètre continu $t$ (le temps). Pour cela il suffit que $\mathbb{X}$ soit compact, en pratique une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^{d_\mathrm{P}}$, où $d_\mathrm{P} \geq d$ est la dimension d'un espace sur $\mathbb{R}$ dans lequel on peut "plonger" $\mathbb{X}$.

### 1.1.2 Systèmes autonomes et systèmes forcés

Lorsque $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ ne dépend pas explicitement du temps, on dit que l'on a affaire à un système *autonome*. Sinon le système est *forcé*. Un système forcé peut être formellement rendu autonome au prix d'une augmentation de sa dimension. En effet, définissant l'espace des phases étendu $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \times \mathbb{R}$, soit $\mathbf{Y} = \{\mathbf{X}, U\}$, et le champ de vecteurs $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{Y}) = \{\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, U), 1\}$, *i.e.* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U = 1$, on peut écrire (1.1.1) sous la forme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{Y})$. L'espace $\mathbb{Y}$ est de dimension $d+1$ et, pour définir complètement une trajectoire dans cet espace, il faut donc bien spécifier en $t_0$ la valeur d'une quantité supplémentaire, la variable $U$.

**Stroboscopie et systèmes à temps discret.** Considérons le cas particulier du forçage périodique où $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t+T) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t)$ pour tout $t$. Il est alors commode de réaliser une analyse stroboscopique de la dynamique (figure 1.1). Celle-ci consiste en une intégration de l'évolution sur des intervalles consécutifs de durée $T$. Posant $t_k = t_0 + kT$ on obtient

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t)dt\,,$$

qui définit une *application* de l'espace $\mathbb{X}$ sur lui même. On a ainsi transformé le système dynamique différentiel (à temps continu) en une *itération*. On parle alors de système *à temps discret*. C'est un cas particulier d'*application au temps* $\tau$ où l'intégration, faite sur un intervalle de temps arbitraire $\tau$ au contraire de la stroboscopie, n'a pas de propriétés remarquables.

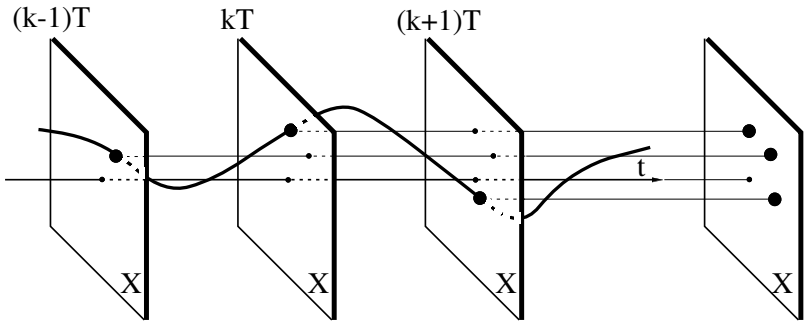



*Figure 1.1 : Stroboscopie réduisant un système dynamique forcé périodiquement à une itération sur* $\mathbb{X}$ *(échantillonnage modulo* $T$ *des états dans l'espace des phases étendu* $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$*).*

De façon générale un système à temps discret s'exprime sous forme d'une *équation aux différences* (ici d'emblée supposée autonome)

$$\mathbf{X}_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{X}_k)\,. \tag{1.1.3}$$

De tels systèmes interviennent fréquemment, soit comme résultant d'un processus analogue à l'analyse stroboscopique que nous introduirons plus loin (section de Poincaré), soit directement en tant que modèles simplifiés de processus non linéaires. Si leur implémentation numérique est le plus souvent triviale, la compréhension de leur riche dynamique est une étape indispensable de l'étude des systèmes dynamiques à temps continu.

**Remarque.** Au delà du point de vue formel exprimé au début de cette section, il peut arriver que le forçage puisse s'interpréter comme résultant d'un couplage unidirectionnel (sans rétroaction) du système considéré d'état $\mathbf{X}$, à un système extérieur d'état $\mathbf{X}_\mathrm{e}$, soit $\tilde{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X}, \mathbf{X}_\mathrm{e}\} \in \tilde{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \times \mathbb{X}_\mathrm{e}$, tel que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_\mathrm{e})\,, \tag{1.1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_\mathrm{e} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_\mathrm{e}(\mathbf{X}_\mathrm{e})\,. \tag{1.1.5}$$

Ainsi, un système forcé périodiquement à la période $T$, $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t+T) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t)$ peut, artificiellement, être mis sous la forme (1.1.4,1.1.5) où (1.1.5) est un oscillateur non linéaire en régime stationnaire. On peut par

exemple introduire une variable $Z = Y_1 + iY_2$, gouvernée par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z = (1 + i\omega - |Z|^2)Z$ qui, après élimination du transitoire, a pour solution générale $Z = \exp[i(\omega t + \phi)]$ (voir plus loin, § 2.1.2), puis écrire $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t)$ sous la forme $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, \arg(Z)/\omega)$, avec $\arg(Z) = \mathrm{Arccos}\left(Y_1/(Y_1^2 + Y_2^2)^{1/2}\right)$ et la condition initiale $Y_1 = 1$, $Y_2 = 0$ en $t = 0$ (*i.e.* phase $\phi = 0$). Cette démarche est assez immédiate dans le cas du forçage (mono)périodique. Dans le cas d'un forçage plus complexe, multi-périodique (contenant un assez grand nombre de fréquences et de phases spécifiques associées), ou pire encore chaotique, il devient physiquement plus raisonnable et pratiquement plus économique d'expliciter le système à l'origine du forçage, ou du moins d'en utiliser un modèle dynamique convenablement initialisé. Nous reviendrons sur cette question à la fin du cours, §3.2.

Le bruit extrinsèque qui transforme (1.1.1) en un modèle de type Langevin est un cas extrême où l'identification (1.1.4,1.1.5) n'est pas pertinente, le système extérieur disposant d'une infinité de degrés de liberté cachés dont il est préférable de représenter l'effet par processus stochastique. Dans la suite nous développerons la théorie dans le cas des systèmes strictement déterministes, quitte à réexaminer les effets du bruit dans les applications.

### 1.1.3 Systèmes dynamiques conservatifs vs. dissipatifs

Les problèmes (1.1.1) et (1.1.3) font référence aux trajectoires issues de conditions initiales particulières. Considérons, ce qui est physiquement plus significatif, des ensembles de trajectoires issues de domaines de volume[1] fini dans l'espace des phases. Dans le cas d'un système à temps discret, on montre aisément (figure 1.2) que le transformé par $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ d'un pavé infinitésimal $\boldsymbol{\delta X}$ pris au voisinage d'un point $\mathbf{X}$ donné voit son volume donné par $\delta\mathcal{V}' = |\det(\boldsymbol{\partial\mathcal{G}})|\,\delta\mathcal{V}$, où $\boldsymbol{\partial\mathcal{G}}$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{\mathcal{G}}$, d'éléments $g_{nm} = \partial\mathcal{G}_n/\partial X_m$ calculée en $\mathbf{X}$ et où $\det(\boldsymbol{\partial\mathcal{G}})$ dénote son déterminant, le jacobien. Localement le système est *contractant* ou *dilatant* selon que $|\det(\boldsymbol{\partial\mathcal{G}})|$ est plus petit ou plus grand que 1. Il est dit *conservatif* si $|\det(\boldsymbol{\partial\mathcal{G}})| = 1$ partout.

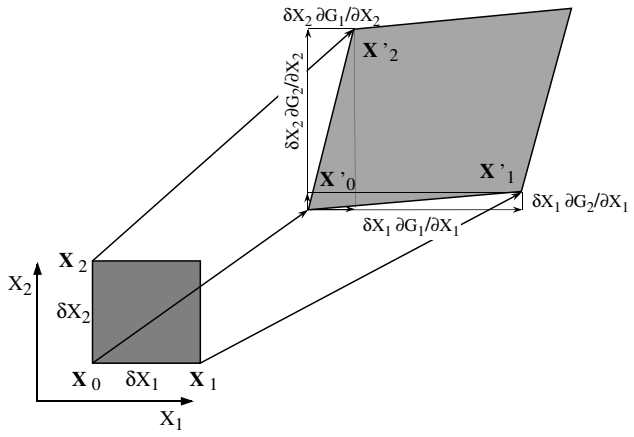



*Figure 1.2 : Transformation d'un pavé infinitésimal par $\boldsymbol{\mathcal{G}}$.*

Passant à un système à temps continu (1.1.1) et prenant pour application $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ la transformation au temps $\tau$ avec $\tau = \delta t$, intervalle de temps infinitésimal, considérant la limite $\delta t \to 0$ on montre facilement que l'évolution des volumes dans l'espace des phases au voisinage d'un point $\mathbf{X}$ est donné par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\mathcal{V}(\mathbf{X}) = [\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})]\delta\mathcal{V}(\mathbf{X})$, où $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}) \equiv \sum_m \partial_{X_m}\mathcal{F}_m$ est la divergence du champ de vecteur calculée au point courant de l'espace des phases. Un tel système est dès lors localement contractant ou dilatant selon que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})$ est négatif ou positif. On vérifie immédiatement à partir de (1.1.2) qu'un système hamiltonien est conservatif ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}) \equiv 0$). Ce caractère conservatif est alors associé à l'invariance par renversement du temps. Les systèmes ne satisfaisant pas à cette propriété sont qualifiés de *dissipatifs*.

[1] Volume ≡ mesure de Lebesgue (construite sur des pavés, *i.e.* des produits d'intervalles).

### 1.1.4 Flots de gradients et systèmes plus généraux

Restons avec les systèmes à temps continu et considérons tout d'abord le cas un système autonome à une seule variable réelle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = \mathcal{F}(X)$. On peut le récrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = -\partial\mathcal{G}/\partial X, \tag{1.1.6}$$

où $\mathcal{G}(X) = -\int \mathcal{F}(X)\,dX$ est une primitive de $\mathcal{F}$. Il s'en suit immédiatement que $\mathcal{G}$ décroît au cours du temps $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{G} = (\partial\mathcal{G}/\partial X)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = -\big(\mathcal{F}(X)\big)^2 \leq 0\right]$. L'évolution du système se ramène donc à la relaxation vers des états indépendants du temps correspondant à des minima locaux du potentiel $\mathcal{G}$. Dans l'espace des phases, ces états sont à prendre parmi les *points fixes* du champ de vecteur $\mathcal{F}$, vérifiant $\mathcal{F}(X_\mathrm{f}) \equiv 0$ (les autres points fixes sont des maxima locaux du potentiel ou des points d'inflexion à tangente horizontale).

En dimension $d$, partant de la donnée d'un potentiel $\mathcal{G}(X_1, \ldots, X_d)$, l'extension de (1.1.6) s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_n = -\partial\mathcal{G}/\partial X_n\,, \quad j = 1, \ldots, d\,. \tag{1.1.7}$$

Par construction, le champ de vecteurs est donc partout *perpendiculaire* aux courbes de niveau du potentiel (cf. figure 1.3, gauche) et décrit une évolution irréversible vers les minima locaux de $\mathcal{G}$. De tels systèmes, appelés *systèmes gradients* ou *flots de gradient*, sont au cœur de la *théorie des catastrophes* évoquée plus loin, p. 19. Réciproquement, pour pouvoir faire dériver un système $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})$ d'un potentiel $\mathcal{G}$, il faut que les composantes de son champ de vecteurs vérifient $\partial\mathcal{F}_n/\partial X_m = \partial\mathcal{F}_m/\partial X_n$ ce qui découle de l'identité de Schwarz pour le potentiel $\mathcal{G}$ supposé soit $\partial^2\mathcal{G}/\partial X_m\partial X_n = \partial^2\mathcal{G}/\partial X_n\partial X_m$. Dans le cas général, les composantes du champ de vecteurs ne vérifient pas ces conditions et l'on peut s'attendre à une dynamique plus riche qu'une "simple" relaxation vers un minimum local de $\mathcal{G}$. Ceci est notamment le cas des systèmes mécaniques pour lesquels l'évolution préserve l'énergie totale de sorte que le champ de vecteurs donné par les équations de Hamilton est partout *tangent* aux surfaces d'iso-énergie et qui sont typiquement le siège de mouvements oscillants (cf. figure 1.3, droite) ou plus complexes.

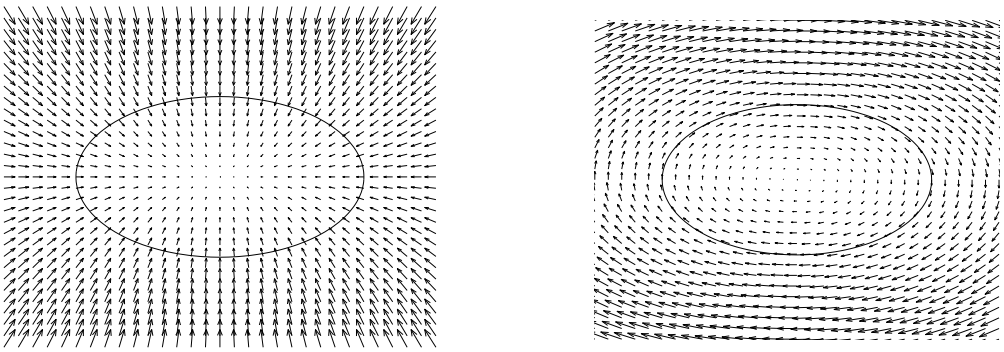


*Figure 1.3 : À Gauche: champ de vecteurs du système potentiel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_n = s_nX_n$, $s_n < 0$ vérifiant (1.1.7) avec $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\left(s_1X_1^2 + s_2X_2^2\right)$. À droite: champ de vecteurs associé à l'oscillateur $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_1 = X_2$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_2 = -X_1$.*

## 1.2 Notions de dynamique qualitative

### 1.2.1 Portrait de phase

Une *orbite* est le lieu géométrique des points d'une trajectoire obtenu par élimination du temps considéré comme un paramètre. Le *portrait de phase* d'un système est la représentation collective d'un ensemble d'orbites mettant en évidence les caractéristiques globales et *qualitatives* de la dynamique.

**Ensembles limites et attracteurs.** Nous sommes plus particulièrement intéressés par les *régimes permanents* plus ou moins complexes qui s'établissent après extinction des *transitoires*. Dans l'espace des phases,

la notion de *régime permanent* est associée à celles de *point non errant* et d'*ensemble limite*. Un point est non errant si toute trajectoire initialisée dans son voisinage revient indéfiniment dans ce voisinage. Un ensemble limite est un ensemble de points non errants à la limite $t \to \infty$, soit $+\infty$ (futur), soit $-\infty$ (passé).

L'exemple le plus simple d'ensemble limite est le *point fixe* déjà évoqué, qui correspond à un régime permanent indépendant du temps. Dans l'espace des phases, un régime périodique est représenté par une courbe fermée appelée *cycle limite*, parcourue en un temps fini $T$. Nous aurons l'occasion de rencontrer d'autres exemples plus compliqués, associés à des régimes réguliers (multi-périodiques) ou irréguliers (chaotiques).

Pour qu'un régime permanent soit observable, il faut que l'ensemble limite qui le représente dans l'espace des phases soit *stable*, c'est à dire qu'il résiste aux perturbations, à supposer qu'on ait réussi à l'atteindre partant de conditions initiales suffisamment bien choisies. Avant de passer à un point de vue analytique (§ 1.2.2) restons pour l'instant au niveau topologique.

Définissant l'*entrant* (resp. le *sortant*) d'un ensemble limite comme l'ensemble des conditions initiales des trajectoires qui s'accumulent sur lui quand $t \to +\infty$ (resp. $t \to -\infty$) on observe alors que le régime permanent considéré est atteignable si l'ensemble limite correspondant est "attractif," c'est à dire si son entrant a un certain volume (*i.e.* n'est pas de mesure de Lebesgue nulle). Si de plus il est tout entier à l'intérieur de son entrant (autrement dit, si son sortant est vide), il est stable car toute trajectoire initialisée dans son voisinage ne s'en écarte pas. C'est, par définition, un *attracteur*. L'entrant d'un attracteur est appelé son *bassin d'attraction*. D'après ce qui précède, il est de mesure non nulle; en termes physiques, la probabilité de trouver des conditions initiales qui y mènent est strictement positive.

L'existence d'un attracteur rend compte d'une certaine perte de mémoire des conditions initiales et du fait que tous les états du système sur l'attracteur sont alors équivalents à la limite des temps longs. Le sens de ces assertions est assez évident lorsque le régime asymptotique est indépendant du temps ou en dépend de façon régulière, périodique ou multi-périodique. Il demandera à être précisé dans le cas plus complexe des régimes apériodiques qui seront qualifiés de chaotiques.

**Stabilité structurelle et bifurcations.** La *structure* d'un système dynamique dépend usuellement d'un ensemble de *paramètres de contrôle* $\mathbf{r} = \{r_0, r_1, \ldots\}$, *i.e.* $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}; \mathbf{r})$. La théorie des *bifurcations* est consacrée à l'étude des changements du portrait de phase avec $\mathbf{r}$. Un système dynamique avec $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ sera dit *robuste* ou *structurellement stable* si son comportement qualitatif ne change pas au voisinage de $\mathbf{r}_0$ dans l'espace des paramètres de contrôle.

Un système subit une bifurcation si le nombre ou/et la nature de ses ensembles limites change lorsqu'on varie un (ou plusieurs) paramètre(s) de contrôle. Le portrait de phase du système change alors qualitativement. Une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle. Le nombre de paramètres qu'il est nécessaire de varier pour retrouver une situation structurellement stable partant d'une situation structurellement instable est appelé la *codimension* du problème.[2]

### 1.2.2 Différents concepts de stabilité

**Stabilité globale.** En toute généralité, notons tout d'abord que l'étude de la stabilité d'une solution particulière $\mathbf{X}^{(0)}$ se ramène à un problème au valeurs initiales pour une perturbation arbitraire $\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \mathbf{X}^{(0)}$ gouvernée par un système dynamique

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}' = \boldsymbol{\mathcal{F}}\left(\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{X}'\right) - \boldsymbol{\mathcal{F}}\left(\mathbf{X}^{(0)}\right) = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\mathbf{X}^{(0)}}(\mathbf{X}')\,, \tag{1.2.8}$$

dépendant implicitement de $\mathbf{X}^{(0)}$ mais admettant par construction la solution $\mathbf{X}' \equiv 0$.

La solution particulière considérée est souvent appelée *état de base*, spécialement lorsqu'elle vérifie de façon évidente les équations primitives du problème étudié (exemple: le solution purement conductive des équations de Boussinesq en convection).

[2] Dans la suite, pour alléger les notations l'indication explicite de la dépendance aux paramètres de contrôle sera omise quand elle ne sera pas indispensable.

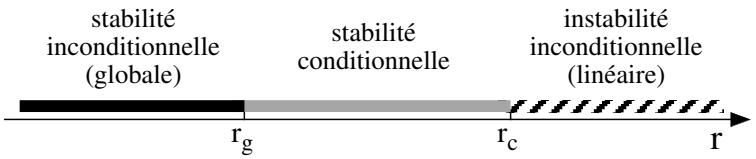



*Figure 1.4 : Stabilité de l'état de base fonction d'un paramètre de contrôle, e.g. le nombre de Reynolds en mécanique des fluides.*

L'instabilité de l'état de base peut dépendre de la forme et de l'amplitude de la perturbation initiale. Dans l'espace des paramètres de contrôle on distingue alors (figure 1.4)

- une région de stabilité inconditionnelle: en dessous d'une valeur particulière $r_{\rm g}$ appelée seuil de *stabilité globale*, l'état de base, unique, résiste à toute perturbation (pour les systèmes macroscopiques c'est ce qui ce passe en général assez près de l'équilibre thermodynamique);
- une région d'instabilité inconditionnelle au delà d'une valeur critique $r_{\rm c}$ appelée seuil d'*instabilité linéaire*, où l'état de base ne peut persister du fait du développement de certaines perturbations d'amplitude infinitésimales inévitables;
- entre les deux, une région de *stabilité conditionnelle* dans laquelle le sort des perturbations dépend explicitement de leur forme et de leur amplitude, l'espace des phases étant alors divisé en différents bassins d'attraction correspondant à plusieurs attracteurs, voir plus loin l'exemple de la figure 1.8.

La détermination de la région de stabilité inconditionnelle repose sur une méthode appelée *méthode directe de Lyapunov* dont nous présentons ici une version restreinte et formelle suffisant à nos besoins (pour une version plus complète, voir [30] chap. 1). Nous nous limitons au cas d'un système autonome et d'une solution stationnaire (point fixe) supposée ramenée à l'origine de l'espace des phases. De façon générale, la méthode repose sur la définition d'une fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ définie positive, c'est à dire vérifiant

$$\mathcal{M}(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\mathbf{X} \neq \mathbf{0}) > 0$$

avec en outre

$$g_1(\|\mathbf{X}\|) < \mathcal{M}(\mathbf{X})\,,$$

où $g_1$ est une *fonction de jauge* définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$g_1(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 < g_1(u) \leq g_1(v) \quad \text{pour} \quad 0 < u < v$$

(avec des mots: $\mathcal{M}$ est minorée par une fonction non décroissante de $\|\mathbf{X}\|$).

On montre alors

- que la *stabilité au sens de Lyapunov* est acquise si la dérivée de $\mathcal{M}$ le long d'une trajectoire du système dynamique est négative semi-définie, *i.e.*

$$\tfrac{\rm d}{{\rm d}t}\mathcal{M}(\mathbf{X}(t)) \leq 0\,,$$

- que cette stabilité est *uniforme* si en outre

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}) \leq g_2(\|\mathbf{X}\|)\,,$$

où $g_2$ est une seconde fonction de jauge,

- que l'on a stabilité *asymptotique* (les trajectoires rejoignent effectivement l'état de base au fil du temps) si la dérivée de $\mathcal{M}$ est définie négative, *i.e.*

$$\tfrac{\rm d}{{\rm d}t}\mathcal{M}(\mathbf{X}(t)) \leq -g_3(\|\mathbf{X}\|)\,,$$

où $g_3$ est une troisième fonction de jauge,

- enfin la stabilité est *globale* si

$$g_1(u \to \infty) \to \infty\,.$$

L'élégance de cette présentation formelle cache cependant la difficulté qu'il y a à déterminer la fonctionnelle $\mathcal{M}$ et les jauges sur lesquelles reposent ces résultats de stabilité (théorèmes de Lyapunov). Nous y reviendrons dans l'annexe du chapitre 3, p. 54 relative au cas linéaire dans le contexte du contrôle.

À l'opposé, la région d'*instabilité inconditionnelle* est déterminée par une analyse locale reposant sur l'étude de la dynamique des perturbations infinitésimales. C'est celle que l'on est en principe capable de pousser le plus loin.

**Stabilité locale.** Introduisant un paramètre formel de développement $\mathbf{X}' \mapsto \epsilon\mathbf{X}'$ dans (1.2.8) on obtient

$$\epsilon \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}' = \epsilon\boldsymbol{\partial\mathcal{F}}^{(0)}\mathbf{X}' + \epsilon^2\boldsymbol{\mathcal{N}}_2(\mathbf{X}',\mathbf{X}') + \dots ,$$

où $\boldsymbol{\partial\mathcal{F}}^{(0)}$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ calculée en $\mathbf{X}^{(0)}$, $\boldsymbol{\mathcal{N}}_2$ représente les termes formellement quadratiques, etc. Ne gardant alors que les termes du premier ordre on génère un problème linéaire (dynamique tangente). La propriété essentielle du problème

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}' = \boldsymbol{\partial\mathcal{F}}^{(0)}\mathbf{X}' \equiv \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{X}' \tag{1.2.9}$$

est de permettre une analyse de l'évolution d'une perturbation quelconque $\mathbf{X}'$ par *superposition* de composantes élémentaires obtenues par la décomposition sur une base propre de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, soit $\mathbf{X}' = \sum_m \widetilde{X}_m\widehat{\mathbf{X}}_m$.

Lorsque l'état de base est indépendant du temps, $\boldsymbol{\partial\mathcal{F}}^{(0)}$ est une matrice constante et le problème linéarisé un problème différentiel linéaire à coefficients constants dont l'étude est "élémentaire." Sinon, $\boldsymbol{\partial\mathcal{F}}^{(0)}$ dépend du temps. Dans le cas particulier d'un état de base périodique, on aboutit à un problème différentiel linéaire à coefficients périodiques que l'on analyse par la théorie de Floquet, voir ci-dessous. Cette approche se généralisera ensuite aux états de base chaotiques et servira à les caractériser.

### 1.2.3 Stabilité linéaire

◇ Considérons pour l'instant le cas le plus simple d'un état de base *indépendant du temps*. Les solutions du problème à coefficients constants (1.2.9) sont cherchées donc sous la forme $\mathbf{X}'(t) = \widetilde{X}(0)\exp(st)\widehat{\mathbf{X}}$, ce qui définit un problème aux valeurs propres

$$s\widehat{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}\widehat{\mathbf{X}}\,.$$

Le problème n'étant, en général, pas autoadjoint, il faut s'attendre à un spectre de valeurs propres *a priori* complexes: $s_m = \sigma_m - i\omega_m$. Dans la décomposition, $\mathbf{X}' = \sum_m \widetilde{X}_m\widehat{\mathbf{X}}_m$, $\widetilde{X}_m$ est alors l'*amplitude* du *mode propre* $\widehat{\mathbf{X}}_m$, vecteur propre associé à la valeur propre $s_m$.

Écrivant[3] $\widetilde{X}_m(t) = \widetilde{X}_m(0)\exp[(\sigma_m - i\omega_m)t]$ on observe que la partie réelle $\sigma_m$ correspond au *taux de croissance* de la perturbation. Donc:

- $\sigma_m < 0$: la perturbation décroît, le mode $\widehat{\mathbf{X}}_m$ est *stable*;
- $\sigma_m > 0$: la perturbation est amplifiée, le mode est *instable*;
- $\sigma_m = 0$: la perturbation ne croît ni ne décroît, le mode est *neutre* ou *marginal*.

La partie imaginaire $\omega_m$ décrit le comportement temporel des amplitudes des modes abstraction faite de la tendance déterminée par $\sigma_m$:

- $\omega_m \neq 0$: on parle de mode *oscillant*;
- $\omega_m = 0$: on a affaire à un mode *stationnaire*.

Les modes propres s'ordonnent par valeur décroissante de leur taux de croissance: $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots$. L'état de base considéré est instable dès qu'un mode (au moins) est instable, figure 1.5 (gauche). En toute généralité, les valeurs propres sont fonctions des paramètres de contrôle. Une bifurcation se produit lorsque les propriétés de stabilité du point fixe changent. Les cas les plus simples (de codimension 1) correspondent au franchissement de l'axe imaginaire par un mode réel ou une paire de modes complexes conjugués, correspondant respectivement aux cas (1) et $(2, 2^*)$ illustrés sur la partie gauche de la figure 1.5.

[3] Ceci correspond au cas d'une valeur propre non dégénérée, voir plus loin celui d'une valeur propre multiple sur un exemple en dimension 2.

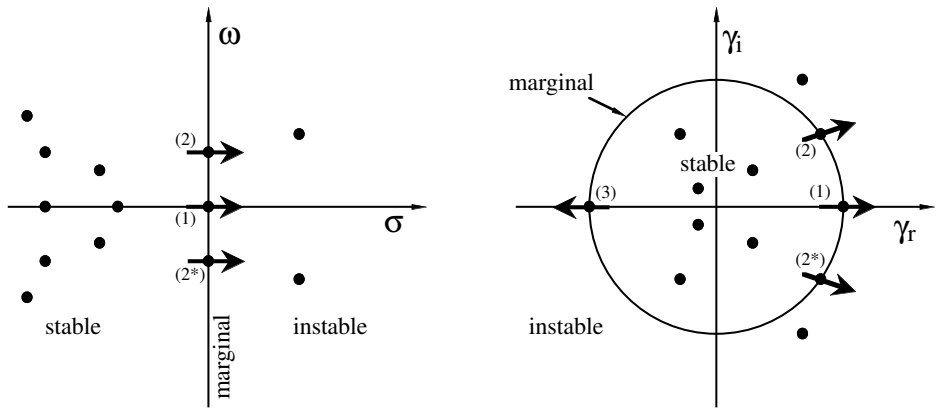



*Figure 1.5 : À gauche: spectre de l'opérateur linéarisé $\boldsymbol{\mathcal{L}} \equiv \boldsymbol{\partial \mathcal{F}}^{(0)}$ autour d'un état de base stationnaire d'un système à temps continu. À droite: cas d'un système à temps discret (opérateur $\boldsymbol{\Gamma} \equiv \boldsymbol{\partial \mathcal{G}}^{(0)}$). Les flèches indiquent les trajectoires des valeurs propres en cas de bifurcation.*

◇ Considérons maintenant le cas d'un état de base *périodique*. Le problème différentiel linéaire (1.2.9) est alors à coefficients périodiques. Pour déterminer l'évolution des trajectoires au voisinage de cet état de base, il faut faire abstraction d'une dépendance périodique triviale due au forçage à la période $T$ de l'état de base et ne considérer que la tendance à l'écartement ou au rapprochement, c'est la *théorie de Floquet*. Les solutions de ce système forcé sont donc cherchées sous la forme $\mathbf{X}'(t) = \widetilde{X}(0)\exp(s\,t)\widehat{\mathbf{X}}(t)$ où $\widehat{\mathbf{X}}(t)$ est périodique de période $T$, soit $\widehat{\mathbf{X}}(t+T) = \widehat{\mathbf{X}}(t)$. La résolution du problème

$$s\widehat{\mathbf{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{L}}(t)\widehat{\mathbf{X}}(t)\,.$$

conduit encore à un spectre de valeurs propres $s_m = \sigma_m - i\omega_m$, appelées *exposants de Floquet*. Pour déterminer la stabilité de l'état de base vis à vis du mode $m$, il faut maintenant calculer le facteur d'amplification complexe sur une période $T$, le *multiplicateur de Floquet*, soit $\gamma_m = \exp(s_m T)$. Son module, $\exp(\sigma_m T)$, est supérieur ou inférieur à 1 selon que $\sigma_m$ est positif ou négatif. Le facteur $\exp(-i\omega_m T)$, en général complexe, introduit une composante rotatoire supplémentaire. L'interprétation de ces facteurs est plus facile si l'on raisonne en termes de l'itération résultant d'une stroboscopie du mouvement (figure 1.1).

Examinons donc le cas d'un système dynamique à temps discret (1.1.3) et supposons connue une solution particulière *point fixe* de cette itération, toujours dénotée $\mathbf{X}^{(0)}$, soit $\mathbf{X}^{(0)} = \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{X}^{(0)})$. Le problème de stabilité linéaire s'écrit maintenant

$$\mathbf{X}'_{k+1} = \boldsymbol{\partial \mathcal{G}}^{(0)}\mathbf{X}'_k \equiv \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{X}'_k\,,$$

où $\boldsymbol{\partial \mathcal{G}}^{(0)}$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ calculée en $\mathbf{X}^{(0)}$. Il conduit au problème aux valeurs propres

$$\gamma\widehat{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Gamma}\widehat{\mathbf{X}}\,.$$

L'évolution de la perturbation dans la direction propre $m$ est alors donnée par

$$\widetilde{X}_{m,k+1} = \gamma_m \widetilde{X}_{m,k}\,.$$

Écrivant $\gamma_m = \rho_m \exp(2\pi i\alpha_m)$ on observe que les itérés du problème linéarisé s'écartent ou se rapprochent du point fixe selon que $\rho_m$ est plus grand ou plus petit que 1. L'état de base considéré est linéairement stable si le spectre de l'opérateur linéarisé est tout entier à l'intérieur du disque unité (figure 1.5, droite).

Considérant que (1.1.3) résulte de la stroboscopie d'un système forcé périodiquement, il est intéressant d'interpréter les différents cas qui se présentent sous l'angle de la stabilité de l'état de base périodique forcé. Les trois possibilités mentionnées sur la partie droite de la figure 1.5 sont les plus importantes. Il peut en effet s'agir d'une bifurcation *via* un mode correspondant à une valeur propre réelle avec $\alpha_m = 0$ ($\gamma_m = 1$)

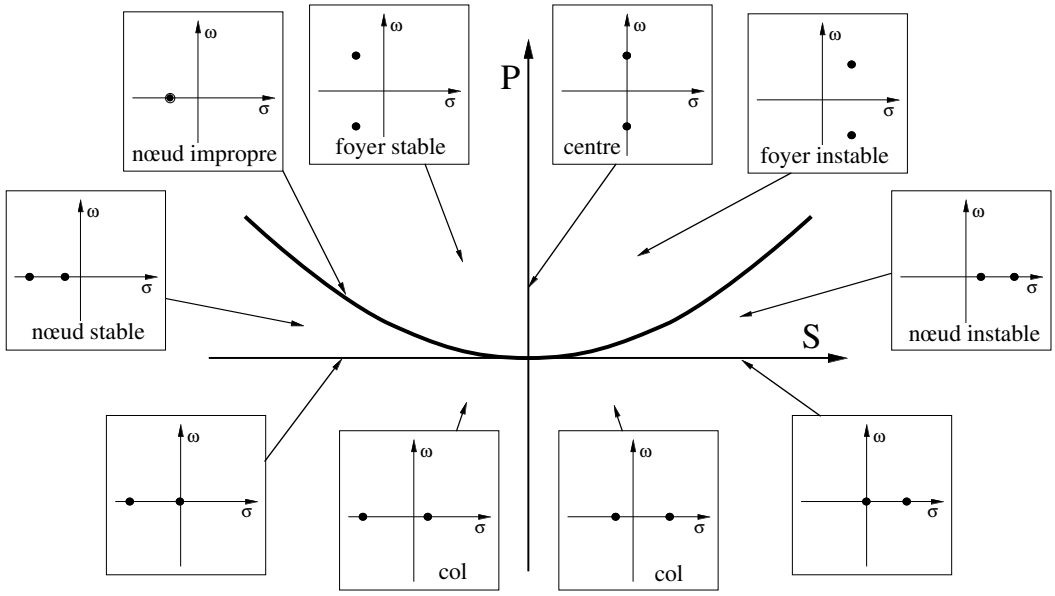



*Figure 1.6 : Nombre et nature des racines de l'équation (1.2.10) en fonction des valeurs de $S$ et $P$.*

cas (1), ou $\alpha_m = 1/2$, soit $\gamma_m = -1$, cas (3), ou encore de modes associés à une paire de valeurs propres complexes conjuguées, cas (2). Revenant au problème de la stabilité d'un cycle limite on note alors que le cas (1) correspond à un mode à la même période que le cycle, l'instabilité est dite "synchrone." Dans le cas (3), à la bifurcation ($\sigma_m = 0$) il vient $\gamma_m^2 = \exp(-2i\omega_m T) = 1$, de sorte qu'après 2 périodes, la perturbation est en phase avec le cycle limite: on a affaire à une instabilité sousharmonique avec doublement de période. Enfin dans le cas (2), l'évolution de la perturbation introduit une composante rotatoire supplémentaire à travers $\alpha_m = \omega_m T/2\pi$ qui peut être soit rationnel soit irrationnel. Quand $\alpha_m$ est de la forme $p/q$, avec $p$ et $q$ entiers ($0 < p < q$) l'évolution sur $q$ périodes ramène la perturbation en phase avec le cycle limite (instabilité sousharmonique d'ordre $q$), si non la période de la perturbation est incommensurable à celle du cycle limite.

### 1.2.4 Classification des points fixes

Retournons aux systèmes à temps continu. La dimension $d = 2$, dont l'étude concrète est laissée à titre d'exercice, nous permet d'introduire facilement l'essentiel de la terminologie. Partant de

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_1 &= l_{11} X_1 + l_{12} X_2 \,, \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_2 &= l_{21} X_1 + l_{22} X_2 \,, \end{aligned}$$

qui décrit l'évolution de la perturbation[4] et effectuant la substitution $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}\exp(st)$, on obtient facilement l'équation caractéristique donnant les valeurs propres

$$(l_{11} - s)(l_{22} - s) - l_{12} l_{21} = s^2 - (l_{11} + l_{22})s + l_{11} l_{22} - l_{12} l_{21} = s^2 - Ss + P = 0 \,, \tag{1.2.10}$$

où $S$ et $P$ représentent la somme et le produit des racines. Cette équation du second degré admet donc en toute généralité deux racines $s_{1,2}$, soit réelles (distinctes ou confondues), soit complexes conjuguées comme indiqué sur la figure 1.6 où l'on découvrira les termes consacrés.

Les portraits de phase dans l'espace tangent associés à ces situations sont illustrés sur la figure 1.7. Le cas des racines réelles distinctes est assez trivial. Dans la base propre il vient $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_n = s_n X_n$, $j = 1, 2$ ce qui conduit immédiatement à $X_n(t) = X_n(0)\exp(s_n t)$, $j = 1, 2$. Éliminant $t$ on obtient $(X_1/X_1(0))^{1/s_1} = (X_2/X_2(0))^{1/s_2}$, soit $X_2 \propto X_1^{s_2/s_1}$. Deux situations distinctes se présentent suivant que $s_1$ et $s_2$ sont de même signe ou non. Lorsque $s_1$ et $s_2$ de même signe, les trajectoires ont une allure parabolique, la parabole

[4] Sauf exception, dans ce qui suit, on abandonne les primes et autres décorations pour simplifier les notations.

s'ouvrant dans la direction de la valeur propre la plus grande en module. On a affaire à un point fixe de type *nœud* (figure 1.7, en haut, à gauche). Quand, au contraire, $s_1$ et $s_2$ sont de signe opposé, les trajectoires ressemblent à des hyperboles s'approchant du point fixe dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre négative (direction stable) puis s'en écartant le long de l'autre direction propre. Il s'agit alors d'un *col* encore appelé *point selle*. (figure 1.7 en haut, à droite).

Lorsque les valeurs propres sont complexes, *i.e.*, $s^{(\pm)} = \sigma \pm i\omega$, il n'y a pas de vecteurs propres réels mais le problème est diagonalisable dans le complexifié: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_1 = (\sigma - i\omega) Z_1$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_2 = (\sigma + i\omega) Z_2$. Intégrant ce système et revenant dans la base formée des parties réelle et imaginaire des vecteurs propres du complexifié on trouve

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \exp(\sigma t)(X_1(0)\cos(\omega t) + X_2(0)\sin(\omega t))\,, \\ X_2(t) &= \exp(\sigma t)(-X_1(0)\sin(\omega t) + X_2(0)\cos(\omega t))\,, \end{aligned}$$

et les orbites spiralées de la figure 1.7 en bas, à gauche. Le point fixe est alors un *point spiral* encore appelé *foyer*, stable ou instable selon le signe de $\sigma = \frac{1}{2}(l_{11} + l_{22})$. Dans le cas marginal $\sigma = 0$ (cf. figure 1.3, droite), on parle de *point elliptique* ou de *centre*.

Attardons nous un instant sur le cas d'une racine réelle double. Lorsque $(l_{11} - l_{22})^2 + 4 l_{12} l_{21} = 0$ on obtient $s^{(\pm)} = \bar{s} = \frac{1}{2}(l_{11} + l_{22})$ et l'on ne trouve en général qu'une direction propre donnée par $\frac{1}{2}(l_{11} - l_{22})\tilde{X}_1 + l_{12}\tilde{X}_2 = 0$. Complétant la base propre par un vecteur linéairement indépendant, on met alors le système sous forme normale de Jordan,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_1 = \bar{s}\, X_1 + X_2\,, \tag{1.2.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_2 = \bar{s}\, X_2\,. \tag{1.2.12}$$

L'intégration de ce système conduit à $X_2(t) = X_2(0)\exp(\bar{s}t)$ puis à $X_1(t) = X_1(0)\exp(\bar{s}t) + X_2(0)\, t \exp(\bar{s}t)$. Le second terme en $t\exp(\bar{s}t)$ est qualifié de *séculaire*. Le point fixe est appelé *nœud impropre*. Les orbites s'obtiennent comme précédemment en éliminant $t$, ce qui conduit à $X_1 \propto X_2(\ln X_2 + C)$, où $C$ est une constante dépendant des conditions initiales. Ce comportement logarithmique (figure 1.7 en bas, à droite) rend compte du passage continu de l'allure d'un nœud à celle d'un foyer. Il peut également se faire que le système soit diagonalisable, *e.g.* si il est symétrique, $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ est alors proportionnel à l'identité ($l_{11} = l_{22}$ et $l_{12} = l_{21} = 0$) et toute direction du plan est naturellement direction propre. Ce cas, rare parce que non générique, n'est pas représenté.

En toute généralité, dans l'équation caractéristique (1.2.10) les quantités $S$ et $P$ sont fonctions des paramètres de contrôles. La bifurcation d'un nœud vers un col se produit le long du demi-axe $P = 0$, $S < 0$ de la figure 1.6. La déstabilisation d'un foyer correspond quant à elle au demi-axe $S = 0$, $P > 0$.

Notons encore que les points fixes du type *nœud* ou *foyer* sont généralement appelés *puits* s'ils sont stables et *sources* s'ils sont instables.[5] En dimension supérieure, la variété des situations augmente et la terminologie s'enrichit de termes composites. Par exemple, en dimension 3 un foyer–col sera caractérisé par une paire de valeurs propres complexes conjuguées $s_{1,2} = \sigma \pm i\omega$ et une valeur propre réelle $s_3$ telles que $\sigma s_3 < 0$. Pour les systèmes à temps discret on a une classification et une terminologie analogues, en tenant compte toutefois du fait que c'est le module des valeurs propres, plus petit ou plus grand que 1, qui rend compte de la stabilité, et que les trajectoires jouent à saute-mouton avec l'origine en cas de valeurs propres réelles négatives.

### 1.2.5 Petite illustration simple

À titre d'exemple considérons le système suivant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_1 = \mathcal{F}_1(X_1, X_2) = r X_1 + X_2 + X_1 X_2\,, \tag{1.2.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_2 = \mathcal{F}_2(X_1, X_2) = -X_2 - X_1^2\,. \tag{1.2.14}$$

[5] En anglais, nœud → *node*, col → *saddle*, foyer → *focus*, centre → *center*, puits → *sink* et source → *source* !

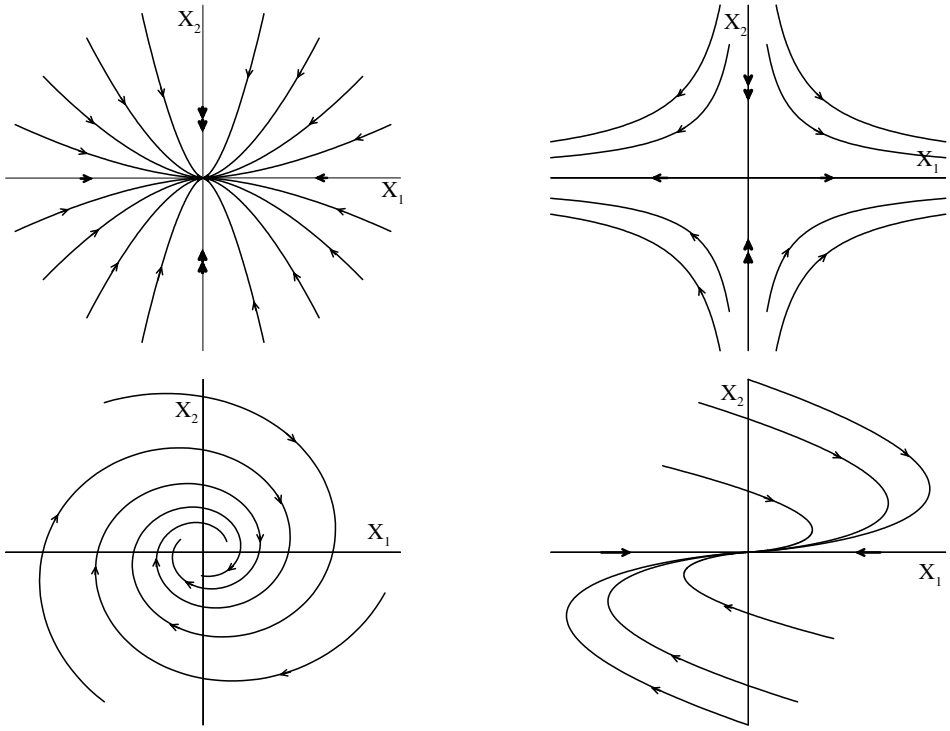



*Figure 1.7: En haut, à gauche: valeurs propres de même signe, nœud (stable ou instable, ici stable); à droite: valeurs propres de signe opposé, col ou point selle, toujours instable. En bas, à gauche: valeurs propres complexes conjuguées, $s = \sigma \pm \omega$, foyer (stable ou instable, ici stable avec $\sigma < 0$; à droite: deux valeurs propres réelles dégénérées dans le cas non diagonalisable, nœud impropre (ici stable).*

La quantité $r$ sert de paramètre de contrôle. La figure 1.8 illustre le portrait de phase du système pour $r = -3/16$. Quelques trajectoires issues de diverses conditions initiales ont été superposées au champ de vecteurs. Elles aboutissent toutes à l'un ou l'autre des deux points fixes $\mathbf{O}$ et $\mathbf{X}^{(-)}$, certaines se dirigent d'abord vers le point $\mathbf{X}^{(+)}$ puis s'en écartent pour rejoindre $\mathbf{O}$ ou $\mathbf{X}^{(-)}$. Les équations déterminant les points fixes, $F_1(X_1, X_2) = 0$ et $F_2(X_1, X_2) = 0$, conduisent à $X_1\left(X_1^2 + X_1 - r\right) = 0$ d'où, en plus de la racine triviale $X_1 = 0$, au plus deux racines non triviales. Pour $r = -3/16$, on a trouve en effet

$$\left[X_1^{(+)} = -1/4,\ X_2^{(+)} = -1/16\right] \quad \text{et} \quad \left[X_1^{(-)} = -3/4,\ X_2^{(-)} = -9/16\right].$$

Une simple observation du portrait de phase permet de conclure que $\mathbf{X}^{(-)}$ et $\mathbf{O}$ sont des *nœuds stables* et que $\mathbf{X}^{(+)}$ est un *col* (instable), ce que confirme un calcul de stabilité linéaire très simple.

Intéressons nous de plus près au point fixe $\mathbf{X}^{(+)}$. Dans l'espace tangent, la direction correspondant à la valeur propre stable sépare localement les conditions initiales qui s'écartent de $\mathbf{X}^{(+)}$ et vont vers $\mathbf{X}^{(-)}$ de celles qui vont vers l'origine. Lorsque l'approximation linéaire n'est plus valide il faut revenir au système non linéaire de départ. La détermination de l'ensemble des conditions initiales qui mènent à l'un ou à l'autre des deux points fixes localement stables, leurs *bassins d'attraction*, revêt une grande importance. Leur frontière est ici la *variété stable* du point fixe instable $\mathbf{X}^{(+)}$. Elle est formée de l'ensemble des trajectoires qui arrivent en $\mathbf{X}^{(+)}$ le long de sa direction stable. De la même façon on peut déterminer la *variété instable* de $\mathbf{X}^{(+)}$ comme l'ensemble des trajectoires qui en émergent le long de sa direction instable ou mieux, comme l'ensemble des trajectoires qui s'y rendent moyennant le renversement du sens du temps, $t \mapsto -t$, qui provoque l'échange "stable $\leftrightarrow$ instable".

Les variétés stables et instables des points fixes instables forment le "squelette" du champ de vecteurs. Cette structuration résulte du fait que la trajectoire passant par un point régulier —point où le champ de vecteur n'est pas nul— est unique: deux variétés stables (resp. instables) ne peuvent se couper car l'éventuel

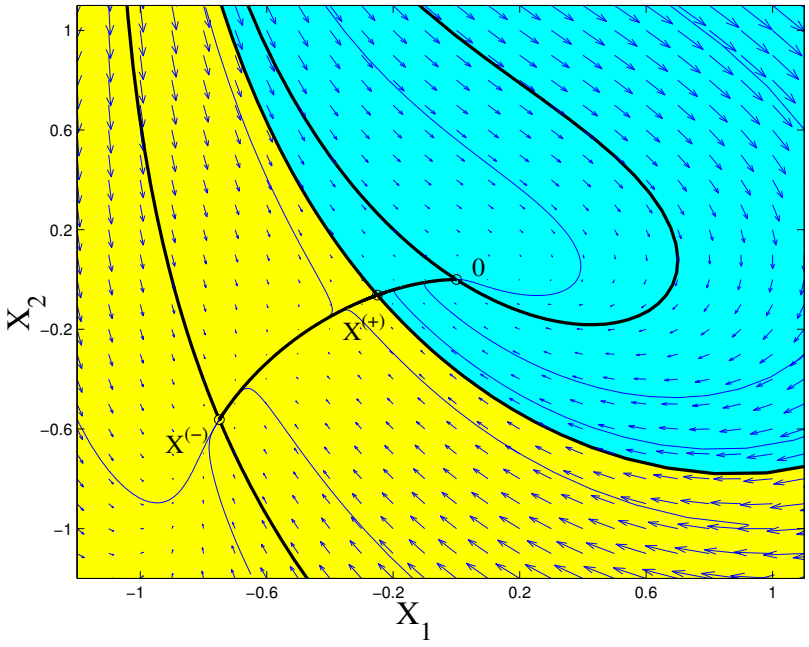



*Figure 1.8 : Champ de vecteurs du modèle (1.2.13–1.2.14) pour $r = -3/16$ avec indication de quelques trajectoires typiques. La position des points fixes $\mathbf{X}^{(-)}$, $\mathbf{X}^{(+)}$ et $\mathbf{O}$ est indiquée par des petits cercles. Les bassins d'attraction des nœuds stables $\mathbf{O}$ (gris foncé/bleu-vert) et $\mathbf{X}^{(-)}$ (gris clair/jaune) sont délimités par la variété stable du col $\mathbf{X}^{(+)}$. Sa variété stable rejoint $\mathbf{X}^{(-)}$ d'un côté et $\mathbf{O}$ de l'autre.*

point d'intersection aurait deux futurs (resp. passés) distincts.[6] Par contre rien n'interdit à une trajectoire de tendre vers un point fixe le long de sa variété stable pour $t \to +\infty$ et de venir ($t \to -\infty$) d'un point fixe le long de sa variété instable. Si le point fixe d'où elle vient est différent de celui où elle va on parle de trajectoire *hétérocline*, sinon de trajectoire *homocline*. Dans notre exemple, la variété instable de $\mathbf{X}^{(+)}$ est formée des deux trajectoires hétéroclines qui, de part et d'autre de ce point, rejoignent $\mathbf{X}^{(-)}$ et $\mathbf{O}$ qui sont les deux attracteurs du système pour cette valeur de $r$. $\mathbf{X}^{(+)}$, dont l'entrant est réduit à sa variété stable (de mesure nulle de l'espace des phases) est appelé *ensemble limite exceptionnel*.

Jusqu'à présent nous avons considéré notre petit système modèle dans un cas où il possédait trois points fixes. En fait, cette caractéristique dépend de la valeur du paramètre de contrôle $r$ que nous avons pris égal à $-3/16$. Pour $r < -1/4$, le système n'a qu'un point fixe, l'origine, qui reste un nœud stable. En $r = -1/4$ apparaît un point fixe double $\mathbf{X}^{(\pm)} = (-1/2, -1/4)$. Ce point fixe se présente comme un nœud pour $X_1 < -1/2$ et un col pour $X_1 > -1/2$. La bifurcation qui le fait apparaître est une bifurcation *nœud-col*. Pour $r > -1/4$ le point se dédouble en $\mathbf{X}^{(+)}$ et $\mathbf{X}^{(-)}$ conduisant à la situation que nous avons décrite précédemment. Celle-ci persiste jusqu'en $r = 0$ où l'on observe un échange de stabilité entre $\mathbf{X}^{(+)}$ et $\mathbf{O}$. Pour $r > 0$ l'origine est maintenant un col et $\mathbf{X}^{(+)}$ un nœud stable. La situation est résumée sur la figure 1.9, appelée *diagramme de bifurcation*. S'y trouve portée la position (en $X_1$) des différents points fixes $\mathbf{X}^{(\mathrm{f})}$ en fonction de $r$, une ligne continue indiquant un point fixe stable et une ligne tiretée un point fixe instable.

## 1.3 Dynamique effective

On peut valablement s'interroger sur l'intérêt des notions qui viennent d'être introduites. Celles-ci font en effet référence à des systèmes dynamiques à temps continu (systèmes différentiels) ou discret (itérations) à nombre très limité de degrés de liberté, alors que la Nature, au moins dans ses manifestations à l'échelle

[6] On notera que les trajectoires ne "traversent" pas un point singulier du champ de vecteurs mais y tendent asymptotiquement, donc que les variétés stables et instables qui y aboutissent ne s'y coupent pas même si on peut avoir l'impression d'un croisement.

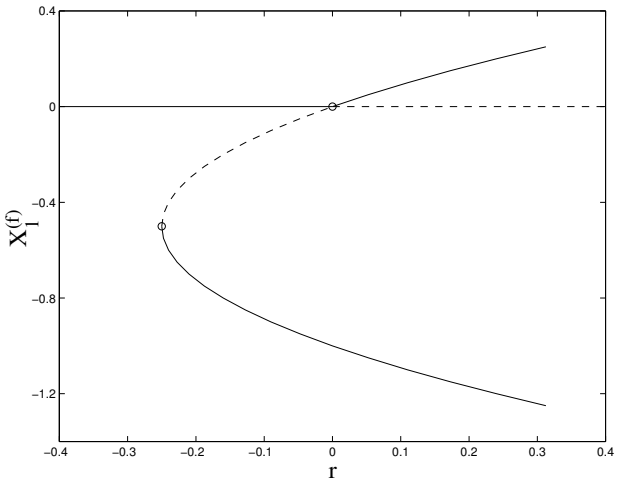



*Figure 1.9 : Diagramme de bifurcation du modèle (1.2.13–1.2.14).*

macroscopique, se laisse plutôt décrire par des champs continus (à une infinité de degrés de liberté) gouvernés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Une indication nous est fournie par la considération de la figure 1.8. On y remarque que l'essentiel de la dynamique aux temps longs se développe dans une étroite bande parabolique où siègent d'ailleurs les points fixes et où les flèches du champ de vecteurs sont très courtes, ce qui implique une évolution très lente. On observe également que les trajectoires initialisées loin de cette région la rejoignent rapidement (flèches longues) au cours d'une première phase d'évolution transitoire. L'origine de ce comportement est facile à comprendre. Dans la région qui nous intéresse ($X_{1,2}$ suffisamment petits) et pour des valeurs de paramètre de contrôle appropriées ($r \sim 0$), le taux d'évolution de $X_1$ est petit tandis que celui de $X_2$ reste fini. Supposant $X_1$ constant, on peut intégrer l'équation (1.2.14) approximativement pour trouver: $X_2(t) = X_2(0)\exp(-t) - X_1^2$. Excepté durant un transitoire de durée $\mathcal{O}(1)$, on peut admettre que $X_2$ a rejoint la valeur $-X_1^2$, supposée constante. Si $X_1$ varie lentement, le résultat reste valide en première approximation, de sorte que peut $X_2$ sembler rigidement lié $X_1$. L'équation de liaison (au sens de la mécanique) est donnée par $X_2 = -X_1^2$. La variable $X_2$ est dite *esclave* de $X_1$. Si c'est bien le cas, on peut ensuite remplacer $X_2$ par sa valeur dans l'équation (1.2.14), ce qui conduit à décrire la dynamique effective de la variable $X_1$ au moyen de l'équation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_1 = rX_1 - X_1^2 - X_1^3$. On a alors pratiqué l'*élimination adiabatique* de la variable esclave.

De la même façon, dans les milieux continus, les éventuels mécanismes d'instabilité telle que la convection naturelle dans un fluide uniforme chauffé par le bas, amplifient généralement de façon très sélective les perturbations. La dynamique des modes correspondants est lente. Ils sont dans la situation de la variable $X_1$. Au contraire, la dissipation tend à lisser les fluctuations de très courte longueur d'onde qui, comme $X_2$, peuvent être éliminées adiabatiquement. Cette analogie tient bien la route tant que le nombre de modes susceptibles d'être déstabilisés par les mécanismes physiques qui opèrent dans le système restent en suffisamment petit nombre. Généralement, ce nombre croît régulièrement à mesure que l'on écarte le système de la situation d'équilibre thermodynamique. Il est dès lors facile d'admettre que, corrélativement à l'augmentation du nombre de modes actifs, on puisse observer une dynamique de plus en plus complexe. C'est ce que nous allons commencer à décrire et que nous continuerons à faire au chapitre suivant.

### 1.3.1 Variété centrale

La procédure d'élimination, telle qu'elle vient d'être esquissée repose sur l'hypothèse que les taux d'évolution des deux variables $X_1$ et $X_2$ sont très différents. Cette séparation des échelles de temps se produit parce que le mode $X_1$ est sur le point de bifurquer ($s_1 \simeq 0$) et ne vaut que dans un voisinage limité de l'origine. Sa validité est donc asymptotique: limite des temps longs et voisinage de la bifurcation, tant dans l'espace des

phases que dans l'espace des paramètres.

Pour formuler de façon techniquement rigoureuse cette élimination adiabatique des modes esclaves, on suppose donc que l'on a affaire à un système structurellement instable présentant un point fixe $\mathbf{X}^{(\mathrm{f})}$ qui se déstabilise. L'espace tangent en ce point peut être décomposé en la somme directe d'un sous-espace stable $\mathbb{X}'_{\mathrm{s}}$ ($\mathcal{R}e(s) < 0$) et d'un sous-espace central $\mathbb{X}'_{\mathrm{c}}$ ($\mathcal{R}e(s) = 0$), aussi la technique d'extrapolation au régime non linéaire de ce point de vue linéaire s'appelle-t-elle la *restriction à la variété centrale*, présentée ici sommairement d'un point de vue plutôt formel.

Supposant que l'on ait $d_{\mathrm{c}}$ modes centraux $\mathbf{X}_{\mathrm{c}}$ et $d_{\mathrm{s}} = d - d_{\mathrm{c}}$ modes esclaves $\mathbf{X}_{\mathrm{s}}$ on part donc d'une décomposition du système $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{X} + \boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{X})$ en

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{c}}\mathbf{X}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}, \mathbf{X}_{\mathrm{s}})\,, \tag{1.3.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{s}}\mathbf{X}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\mathrm{s}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}, \mathbf{X}_{\mathrm{s}})\,, \tag{1.3.16}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{c,s}}$ sont les restrictions de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ aux sous-espaces $\mathbb{X}'_{\mathrm{c,s}}$, et où $\boldsymbol{\mathcal{N}}_{\mathrm{c,s}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}, \mathbf{X}_{\mathrm{s}})$ rendent compte des couplages non linéaires. Supposant, comme le suggère l'approche heuristique, que les modes esclaves vivent sur une variété lente définie par

$$\mathbf{X}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})\,, \tag{1.3.17}$$

on détermine l'équation fonctionnelle qui gouverne $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ en insérant (1.3.17) dans (1.3.16) et en substituant $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{c}}$ tiré de (1.3.15). Il vient

$$\boldsymbol{\partial\mathcal{H}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})\left[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{c}}\mathbf{X}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\mathrm{c}}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})\right)\right] = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}) + \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\mathrm{s}}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}\right)\right)\,,$$

où $\boldsymbol{\partial\mathcal{H}}$ dénote la matrice jacobienne de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Cette équation est ensuite résolue en représentant $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})$ au moyen d'une série formelle en puissances des composantes de $\mathbf{X}_{\mathrm{c}}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}) \equiv \sum_{n\geq 2} \boldsymbol{\mathcal{H}}_n(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})\,,$$

où $\boldsymbol{\mathcal{H}}_n(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})$ est un polynôme homogène de degré $n$ composé de monômes de la forme $\prod_{m=1}^{d_{\mathrm{c}}} X_m^{n_m}$, $n_m \geq 0$, $\sum_m n_m = n \geq 2$, affectés de coefficients à déterminer par identification.[7]

La *dynamique effective* gouvernant les composantes de $\mathbf{X}_{\mathrm{c}}$ est finalement obtenue par substitution dans (1.3.15) de l'expression trouvée pour $\boldsymbol{\mathcal{H}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{c}}\mathbf{X}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{\mathcal{N}}_{\mathrm{c}}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})\right) = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{c}}\mathbf{X}_{\mathrm{c}} + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{N}}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})\,.$$

Le résultat du calcul se présente lui aussi comme une série formelle:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{c}}\mathbf{X}_{\mathrm{c}} + \sum_{n\geq 2} \boldsymbol{\mathcal{N}}_n(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})\,,$$

où $\boldsymbol{\mathcal{N}}_n(\mathbf{X}_{\mathrm{c}})$ est un polynôme homogène de degré $n \geq 2$ en $\mathbf{X}_{\mathrm{c}}$.

### 1.3.2 Résonances et formes normales

Dans ce qui suit, nous supposons implicitement que la réduction à la variété centrale a été effectuée et nous abandonnons l'indice "c" devenu inutile. L'expression brute de la dynamique effective trouvée par la procédure qui vient d'être décrite peut ensuite être simplifiée par des changements de variables non linéaires *tangents à l'identité* de la forme

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \sum_{n\geq 2} \boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\bar{\mathbf{X}})\,, \tag{1.3.18}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\bar{\mathbf{X}})$ est un polynôme homogène de degré $n$ en $\bar{\mathbf{X}}$ dont les coefficients inconnus sont déterminés (généralement pas de façon unique) de manière à éliminer le maximum de monômes dans le développement.

[7] En toute généralité, la variété centrale n'est définie de façon unique qu'à condition de négliger des termes d'ordre exponentiellement petit, c'est ce qui est fait implicitement lorsqu'on cherche sa définition sous forme polynomiale.

Certains monômes, dits *résonnants*, ne peuvent être éliminés par de tels changements de variables. Considérons en effet un monôme particulier de degré $n$ présent dans l'équation d'évolution pour le mode $X_m$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_m - s_m X_m = g \prod_{m'=1}^{d} X_{m'}^{n_{m'}} , \tag{1.3.19}$$

avec $n_{m'} \geq 0$ et $\sum_m n_{m'} = n \geq 2$. Nous avons isolé les termes non linéaires au membre de droite de (1.3.19) pour les faire apparaître comme le forçage d'un problème linéaire. À l'ordre dominant, chaque amplitude $X_m$ varie alors comme $\exp(s_m t)$ et le monôme considéré comme $\exp\left[(\sum_{m'} n_{m'} s_{m'})\, t\right]$. Ce forçage entre donc bien en résonance avec la solution du problème linéaire formant le membre de gauche de (1.3.19) si

$$s_m = \sum_{m'=1}^{d} n_{m'} s_{m'} , \quad n_{m'} \geq 0 , \quad \sum_{m'=1}^{d} n_{m'} = n \geq 2 . \tag{1.3.20}$$

Le calcul montre que les monômes dont les ingrédients satisfont ces *conditions de résonance* résistent aux changements de variables tangents à l'identité définis par (1.3.18) alors que l'on peut faire disparaître les autres au moyen d'un tel changement. La procédure d'élimination des termes non résonnants est appelée *mise sous forme normale*. De façon remarquable la structure de cette forme normale ne dépend de celle du système que par la dimension de l'espace central et par la structure des relations (1.3.20) entre valeurs propres du problème linéarisé. Le degré $n$ d'un monôme apparaissant dans l'expression de la forme normale est appelé l'*ordre* de la résonance. Illustrons ce qui précède sur deux exemples fondamentaux pour une bonne compréhension de la suite.

$\diamond$ $d = 1$. Il n'y a qu'une variable centrale et donc une seule valeur propre $s$. Quelque soit $n \geq 2$, (1.3.20) s'écrit $s = ns$, qui n'a pour solution que $s = 0$. Donc si $s = 0$ la dynamique effective contient *a priori* des termes de degré quelconque. Au contraire si $s \neq 0$, la condition de résonance n'est jamais satisfaite et l'on doit pouvoir éliminer tous les termes non linéaires, *i.e.* *linéariser* complètement la dynamique, c'est à dire passer de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = sX + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots$ à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y = sY$. Ceci amène à rappeler qu'en dehors d'un point de bifurcation, le système est structurellement stable et la dynamique localement triviale. Cependant, lorsqu'on cherche à déterminer effectivement les changements de variables qui permettent cette linéarisation on s'aperçoit qu'ils font apparaître des *petits dénominateurs*, typiquement en $1/s$, qui limitent considérablement la validité des développements en séries formelles. Cette propriété est générale. Plutôt que d'effectuer ces changements de variables, il devient plus raisonnable de conserver les termes non linéaires dominants et de considérer l'écart à la bifurcation, ici le terme $sX$ comme une perturbation de la forme normale correspondant à $s = 0$, soit ici

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots .$$

La singularité du problème apparaît alors liée au degré $n$ du terme résonnant dominant. On dit qu'elle a été *déployée*[8] par la perturbation. Si en toute généralité on s'attend à $n = 2$, le premier terme non linéaire peut, dans certains cas, être de degré plus élevé. Ceci résulte de conditions particulières au système considéré qui conduisent à $a_k \equiv 0$ pour $2 \leq k < n$. Cette spécificité définit un problème de codimension plus élevée nécessitant, pour son déploiement, des paramètres supplémentaires, cf. § 2.1.1.

$\diamond$ $d = 2$. Avec deux variables centrales et deux valeurs propres, l'équation (1.3.20) s'écrit $s_1 = n_1 s_1 + n_2 s_2$, $n_{1,2} \geq 0$, $n_1 + n_2 = n$. Intéressons nous au cas $n = 3$, La condition de résonance non triviale, obtenue pour $n_2 = 1$ et $n_1 = 1$ s'écrit: $s_2 = -s_1$, ce qui correspond à une paire de modes marginaux complexes conjugués: $s = \pm i\omega$. Dans le complexifié ($Z = X_1 + iX_2$) on montre alors que la forme normale s'écrit

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z = -i\omega Z - g|Z|^2 Z , \quad g \in \mathbb{C} , \tag{1.3.21}$$

[8] 'unfolded' en anglais.

autrement dit, on est capable d'éliminer tous les termes formellement quadratiques. Il n'est pas difficile de comprendre la structure de cette expression. En effet, associant $Z$ et $Z^*$ respectivement aux valeurs propres $-i\omega$ et $+i\omega$, on vérifie immédiatement que le terme $|Z^2|Z \equiv Z^2Z^*$ est le seul des termes formellement cubiques à entrer en résonance avec $Z$. La bifurcation associée à (1.3.21) sera étudiée plus loin, § 2.1.2.

À titre d'exercice on déterminera les formes normales correspondant (i) à $d = 2$, $n = 2$ et $s = 0$ valeur propre double, (ii) à $d = 3$, une valeur propre réelle $s = 0$ et une paire de valeurs propres complexes conjuguées $s = \pm i\omega$, et (iii) à $d = 4$, avec deux paires de valeurs propres complexes conjuguées $s = \pm i\omega_1$, et $s = \pm i\omega_2$.

# Chapitre 2

# De l'ordre au chaos

À la fin du chapitre précédent, nous nous sommes arrêtés juste après avoir déterminé la forme normale qu'adopte le système considéré à un point de bifurcation. Pour rendre compte de sa dynamique au voisinage de cette bifurcation, il faut encore déployer la singularité, c'est à dire à s'écarter des conditions critiques en considérant un système voisin décrit par la forme normale associée au problème et complétée de termes perturbateurs petits et de degré inférieur à l'ordre des termes résonnants. Plutôt que de partir directement d'un problème de dimension élevée, il est préférable d'augmenter cette dimension progressivement. Cela correspond à une étude du problème physique de départ dans une gamme de plus en plus large de paramètres de contrôle, conduisant à une augmentation du nombre de modes instables. La restriction à des intervalles de paramètres plus étroits fait alors apparaître les problèmes en dimensions inférieures comme des sous-problèmes dont l'étude est par suite incontournable.

## 2.1 Bifurcations de régimes réguliers

### 2.1.1 Bifurcations entre régimes indépendants du temps

Limitons nous au cas d'une seule variable ($d = 1$) et une singularité de degré $n$. La perturbation la plus générale à une singularité $\pm X^n$ autour d'un point fixe $X_{(\mathrm{f})}$ supposé ramené à l'origine s'obtient en ajoutant un polynôme de degré au plus égal à $n - 1$. Une translation de l'origine des $X$ permet toujours d'éliminer le terme de degré $n - 1$ de sorte que l'on arrive à

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = r_0 + r_1 X + \ldots + r_{n-2}X^{n-2} \pm X^n \,, \tag{2.1.1}$$

expression sur laquelle on remarque que la perturbation $r_0$ déplace le point fixe à l'origine et que les termes d'ordre pair brisent la symétrie $X \leftrightarrow -X$, deux circonstances qui peuvent ne pas être autorisées par la physique du problème. Nous nous restreindrons ici aux cas les plus significatifs, de degré $n = 2$, 3 et 5.

◇ $n = 2$. En toute généralité il vient

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = r_0 - X^2 \tag{2.1.2}$$

qui décrit une bifurcation *nœud-col* par coalescence d'une paire de points fixes de stabilité opposée (figure 2.1, gauche); le diagramme de bifurcation présente alors un *point tournant*. Si le problème impose la persistance du point fixe à l'origine, la translation qui élimine le terme de degré $n-1$ n'a plus lieu d'être. Le déploiement s'écrit alors

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = r_1 X - X^2 \tag{2.1.3}$$

qui traduit l'échange de stabilité entre le point fixe trivial $X = 0$ et le point non trivial $X = r_1$, généralement appelé bifurcation *trans-critique* (figure 2.1, droite).

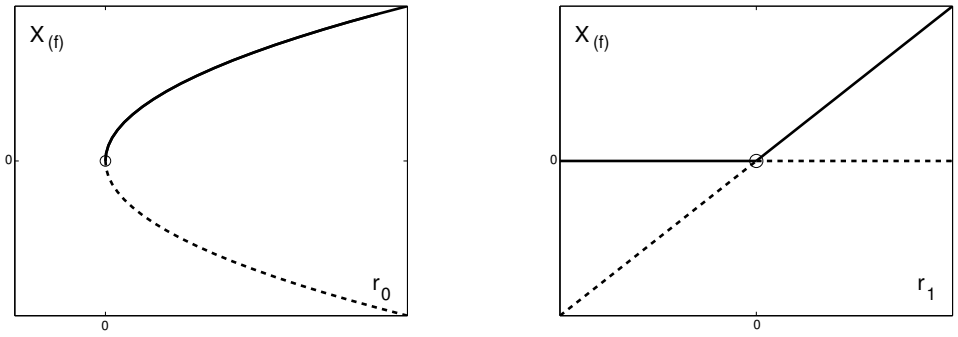



*Figure 2.1 : Déploiement de la singularité $-X^2$. À gauche: déploiement générique $\rightsquigarrow$ bifurcation nœud-col. À droite: déploiement non-générique préservant l'existence du point fixe $\rightsquigarrow$ bifurcation trans-critique.*

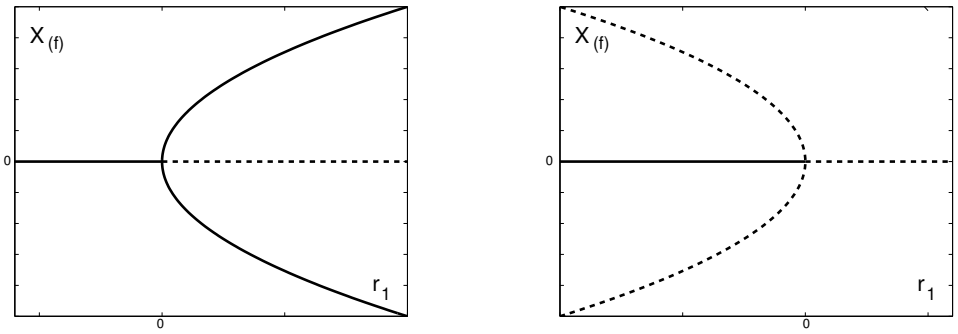



*Figure 2.2 : Bifurcation fourche super-critique (à gauche) et sous-critique (à droite).*

$\diamond$ $n = 3$. Partant de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = \pm X^3$, avant de passer au cas général considérons le déploiement qui préserve la parité:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = r_1 X \pm X^3 \tag{2.1.4}$$

décrivant une *bifurcation fourche* "parfaite". Pour $-X^3$ cette bifurcation est *super-critique*: une paire de points fixes non triviaux $\pm\sqrt{r_1}$ stables apparaissent pour $r_1 > 0$ (figure 2.2, gauche). Dans le cas opposé $+X^3$ elle est *sous-critique*et conduit à des points fixes non triviaux $\pm\sqrt{-r_1}$ instables (figure 2.2, droite).

Dans le cas général, il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = r_0 + r_1 X \pm X^3 \tag{2.1.5}$$

qui rend compte d'une bifurcation fourche *imparfaite* ($r_0$ fixé et $r_1$ variable, cas super-critique, figure 2.3, gauche). En cas de persistance du point fixe à l'origine, il faut prendre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = r_1 X + r_2 X^2 \pm X^3 \tag{2.1.6}$$

qui produit le diagramme de bifurcation de la figure 2.3 (droite). On notera localement la présence des éléments apparus pour $n = 2$, le point tournant décrit par (2.1.2) et la bifurcation trans-critique correspondant à (2.1.3).

$\diamond$ $n = 5$: Le déploiement restreint symétrique de $-X^5$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = r_1 X + r_3 X^3 - X^5 \tag{2.1.7}$$

est illustré sur la figure 2.4, avec $r_3 > 0$ fixé. On remarquera, ici aussi, la présence de points tournants décrits par (2.1.2) et de la bifurcation fourche sous-critique apparue dans le déploiement symétrique (2.1.4) avec le terme $+X^3$.

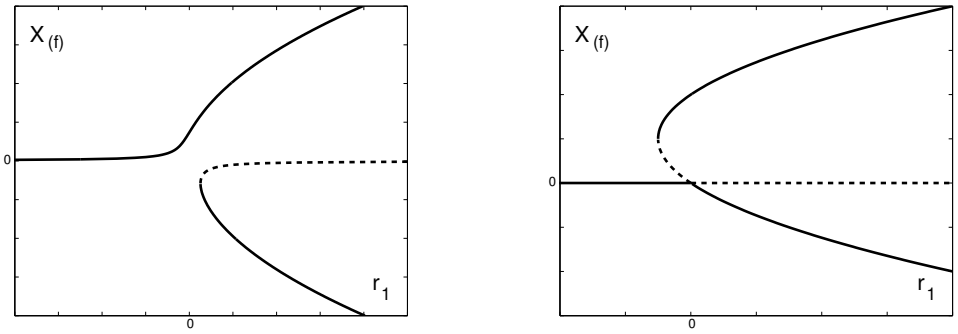



*Figure 2.3 : Déploiement de la singularité $-X^3$ dans le cas général (à gauche: fourche imparfaite) et avec persistance du point fixe à l'origine (à droite: fourche asymétrique).*

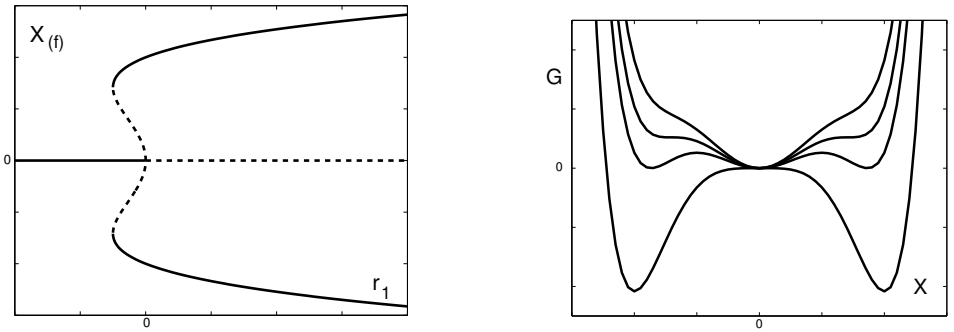



*Figure 2.4 : Déploiement de la singularité $-X^5$ avec $r_3 > 0$ fixé. À gauche: diagramme de bifurcation. À droite: potentiel $G = -\int F(X)dX$ correspondant aux différents cas.*

**Théorie des catastrophes.** La particularité du problème à une variable est de toujours dériver d'un potentiel (cf. §1.1.4). Dans le cas général d'un système gradient de dimension $d$, dérivant d'un potentiel $\mathcal{G}(X_1, \ldots, X_d)$, les trajectoires suivent les lignes de plus grande pente du potentiel et aboutissent à un de ses minima locaux, points fixes vérifiant $\partial\mathcal{G}/\partial X_m = 0$, $m = 1, \ldots, d$. L'objet de la *théorie des catastrophes* est l'étude des bifurcations entre régimes stationnaires dans ce cadre particulier. Pour les systèmes mettant en jeu au plus deux variables indépendantes, *i.e.* $d = 1$ ou 2, cette étude conduit à identifier sept catastrophes élémentaires. La dimension $p$ de l'espace des paramètres de contrôle $r_j$ qui permet de "déployer" la singularité du potentiel dépend de son degré. La table 2.1 présente les formes normales correspondantes. Le potentiel $\mathcal{G}$ y est décomposé en une partie singulière $\mathcal{G}_\mathrm{s}$ et une partie $\mathcal{G}_\mathrm{u}$ donnant le déploiement [6]. La correspondance avec la présentation précédente s'effectue en rappelant que pour $d = 1$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = \mathcal{F} = -\partial_X\mathcal{G}$. On retrouve ainsi la bifurcation nœud-col qui correspond à (2.1.2), maintenant appelée *pli*, tandis que la bifurcation imparfaite décrite par (2.1.5) porte le nom de *fronce*. Pour $d = 2$ on aura naturellement $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_1 = \mathcal{F}_1 = -\partial_{X_1}\mathcal{G}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_2 = \mathcal{F}_2 = -\partial_{X_2}\mathcal{G}$ dont il sera intéressant de dériver les expressions partant des données de la table.

### 2.1.2 Apparition de la périodicité

Pour obtenir des comportements limites dépendant du temps il faut relaxer la condition de gradient évoquée plus haut et donc passer en dimension $d \geq 2$. Pour $d = 2$, la dynamique reste simple, au plus périodique (théorème de Poincaré–Bendixon [3]). Examinons rapidement l'émergence d'un tel comportement périodique. Pour cela, considérons la bifurcation d'un point fixe stable. Génériquement celui-ci peut être soit un nœud (valeurs propres $s_{1,2}$ réelles négatives) soit un foyer (valeurs propres complexes conjuguées ($s_\pm = \sigma \pm i\omega$ avec $\sigma < 0$). Dans le premier cas, il est facile de voir que le problème peut être localement mis sous forme gradient et que la bifurcation produit un col. On peut alors se ramener à une dimension par élimination de la variable attachée à la seconde valeur propre qui reste négative (figure 2.5, haut). Dans le second cas, qui ne dérive pas d'un potentiel, le point fixe reste un foyer mais devient instable (figure 2.5, bas).

*Table 2.1 :* Les sept catastrophes élémentaires.

| $d$ | $p$ | $\mathcal{G}_{\rm s}$ | $\mathcal{G}_{\rm u}$ | Nom |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{3}X^3$ | $r_0X$ | Pli |
| 1 | 2 | $\frac{1}{4}X^4$ | $r_0X+\frac{1}{2}r_1X^2$ | Fronce |
| 1 | 3 | $\frac{1}{5}X^5$ | $r_0X+\frac{1}{2}r_1X^2+\frac{1}{3}r_2X^3$ | Queue d'aronde |
| 1 | 4 | $\frac{1}{6}X^6$ | $r_0X+\frac{1}{2}r_1X^2+\frac{1}{3}r_2X^3+\frac{1}{4}r_3X^4$ | Papillon |
| 2 | 3 | $X_1^3+X_2^3$ | $r_0X_1+r_1X_2+r_2X_1X_2$ | Ombilic hyperbolique |
| 2 | 3 | $\frac{1}{3}X_1^3-X_1X_2^2$ | $r_0X_1+r_1X_2+r_2(X_1^2+X_2^2)$ | Ombilic elliptique |
| 2 | 4 | $X_1^2X_2+\frac{1}{4}X_2^4$ | $r_0X_1+r_1X_2+r_2X_1^2+r_3X_2^2$ | Ombilic parabolique |

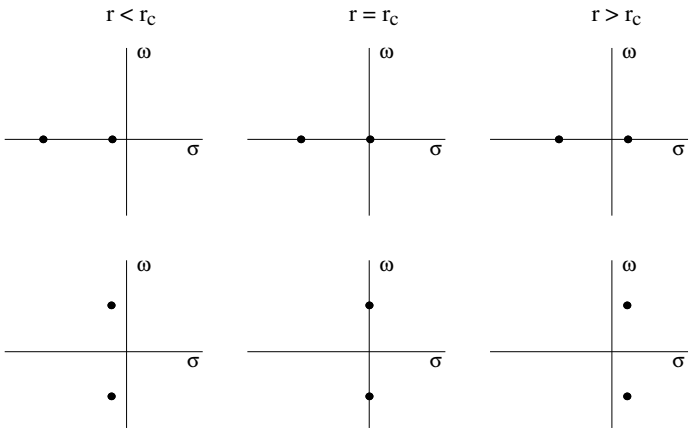



*Figure 2.5 : Bifurcations génériques d'un point fixe en dimension 2. En haut: nœud → col. En bas: foyer stable → instable. Voir Fig. 1.6.*

Considérons donc ce second cas. Loin du point fixe, il faut tenir compte des non linéarités. La forme normale tronquée à l'ordre le plus bas s'écrit[1]

$$\tfrac{\rm d}{{\rm d}t}Z=(\sigma-i\omega)Z-g|Z|^2Z\,, \tag{2.1.8}$$

avec $g=g'+ig''$. Le terme $\sigma Z$ ajouté au membre de droite de (1.3.21) est la perturbation décrivant l'écart à la criticalité, la partie réelle $\sigma$ de la valeur propre jouant le rôle de paramètre de contrôle $r$. L'étude de la bifurcation ne présente pas de difficulté en posant $Z=R\exp(i\phi)$. La dynamique du module $R$, découplée de celle de la phase $\phi$ ramène au problème (2.1.4) pour $R\geq 0$. Son étude montre que la bifurcation, dite *de Hopf*, est super-critique (resp. sous-critique) si $g'>0$ (resp. $g'<0$), auquel cas le point fixe non trivial $R_*=\sqrt{\sigma/g'}$ est stable (resp. instable). Lorsque $Z\neq 0$, l'équation pour $\phi(t)$ s'intègre après que $R(t)$ ait été déterminé. Dans le cas super-critique, durant le régime transitoire, les trajectoires spiralent vers l'origine pour $\sigma<0$ (figure 2.6, gauche) et, pour $\sigma>0$, rejoignent en spiralant un cercle de rayon $R_*$, appelé *cycle limite*, de l'intérieur ou de l'extérieur selon la position de la condition initiale par rapport au cercle (figure 2.6, droite). En régime asymptotique, $R$ ayant rejoint sa valeur finale $R_*$ on trouve $\phi=\phi_0-\tilde\omega t$ avec $\tilde\omega-\omega\propto R_*^2\sim\sigma$. Nous avons donc affaire à un régime périodique dont la pulsation est corrigée de la valeur originelle $\omega$ par la contribution des non linéarités (terme de "dispersion non linéaire"). Dans le cas sous-critique, le premier terme non linéaire n'assure pas la saturation de $R$ et des termes de degré plus élevé doivent être pris en compte dans (2.1.8). Le problème se ramène alors à (2.1.7) pour $R\geq 0$.

[1]Sur les réels, nous aurions obtenu: $\frac{\rm d}{{\rm d}t}X_1=(\sigma-g'R^2)X_1+(\omega-g''R^2)X_2$ et $\frac{\rm d}{{\rm d}t}X_2=-(\omega-g''R^2)X_1+(\sigma-g'R^2)X_2$ avec $R^2=X_1^2+X_2^2$.

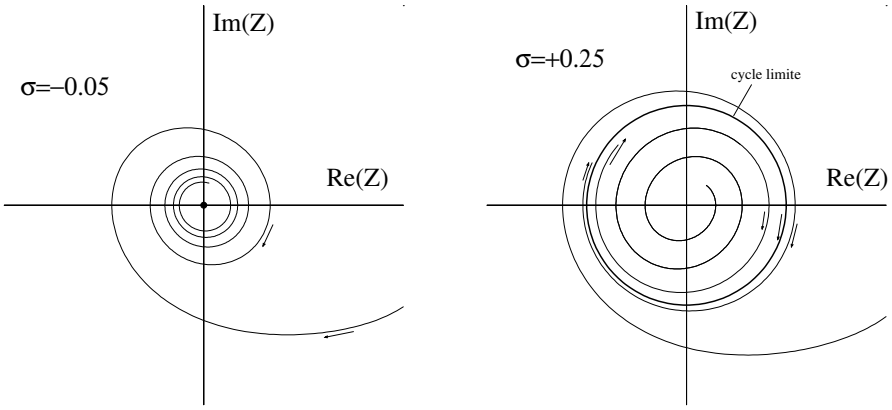



*Figure 2.6 : Bifurcation de Hopf d'un point fixe (cas super-critique) vers un cycle limite.*

### 2.1.3 Bifurcations ultérieures

Nous nous intéressons maintenant à l'étape qui suit l'apparition de la périodicité. La stabilité d'un cycle limite est le plus commodément étudiée en effectuant une section de Poincaré du flot et en considérant l'*application de premier retour* associée. Dans un espace de dimension $d$, la surface de section $\Sigma$ est de dimension $d-1$, cf. figure 2.7. Cette surface peut être choisie arbitrairement pourvu qu'elle intersecte l'ensemble limite considéré et que, dans un voisinage suffisamment grand de l'intersection, le champ de vecteur coupe la surface en formant un angle fini (condition de *transversalité*). On est donc ramené à des itérations à $d-1$ dimensions de la forme (1.1.3). Il s'agit donc essentiellement d'une stroboscopie de la dynamique à une période non pas fixée de extérieur par un forçage (1.1.2) mais déterminée par le système lui-même.

Au cycle limite étudié se trouve associé un point fixe de l'itération. La stabilité de ce point fixe est alors déterminée par le spectre de l'opérateur tangent et une bifurcation se produit lorsque des valeurs propres sortent du disque unité, cf. § 1.2.2, figure 1.5 (droite). Nous nous limitons au cas d'une bifurcation par une paire de valeurs propres complexes de module 1, ou par une valeur propre réelle, soit $+1$, soit $-1$, et nous supposons à chaque fois la bifurcation non dégénérée. Le problème est alors de codimension 1 puisque son déploiement ne fait intervenir que le module de la valeur propre dans le cas complexe et sa valeur absolue dans le cas réel.

Considérons d'abord le cas d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées. Sur la surface de section, la dynamique effective du système se développe alors sur une variété centrale bidimensionnelle obtenue en suivant une démarche parallèle à celle adoptée dans le cas du temps continu par élimination des modes

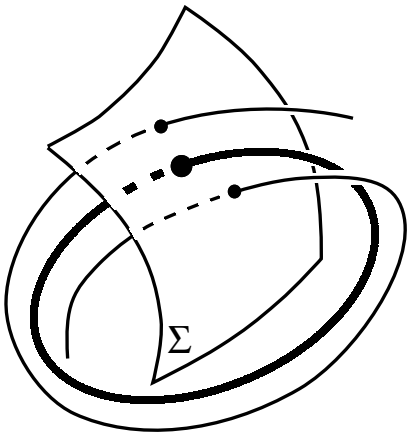



*Figure 2.7 : Section de Poincaré et application de retour.*

esclaves qui correspondent ici à $|\gamma_m| < 1$. On est donc ramené à une itération bidimensionnelle qu'il est préférable d'écrire en complexe:

$$Z_{k+1} = \gamma Z_k + \sum_{n\geq 2} \sum_{0\leq n'\leq n} g_{nn'} (Z_k)^{n-n'} (Z_k^*)^{n'} ,$$

Ici aussi on peut ensuite déterminer la forme normale de l'itération par des changements de variable non linéaires tangents à l'identité:

$$Z = \bar{Z} + \sum_{n\geq 2} \sum_{0\leq n'\leq n} c_{nn'} (\bar{Z}_k)^{n-n'} (\bar{Z}_k^*)^{n'} ,$$

éliminant les termes $(n, n')$ non résonnants dans le développement au membre de droite des choix appropriés des coefficients $c_{nn'}$. Dans d'un tel changement de variable, $g_{nn'}$ est transformé en $g_{nn'} + \left(\gamma - \gamma^{n-n'}(\gamma^*)^{n'}\right) c_{nn'}$. Les termes résonnants, ceux que l'on ne peut pas éliminer, vérifient donc

$$\gamma - \gamma^{n-n'}(\gamma^*)^{n'} = 0 , \quad \text{soit encore} \quad \gamma^{n-2n'-1} = 1 .$$

Les termes de degré impair vérifiant $n = 2n' + 1$, *i.e.* $|Z|^{2n'} Z$, ne peuvent donc jamais être éliminés. Des termes non triviaux dépendant de la valeur de $\gamma$ sont en outre présents lorsque $\gamma$ est racine de l'unité. Posons en effet $\gamma = \exp(2\pi i\alpha)$ et supposons $\alpha = p/q$ rationnel irréductible. Un petit calcul permet de vérifier que la condition de résonance est satisfaite par les combinaisons $(n, n')$ telles que $n = kq + 2n' + 1$, $k \in \mathbb{N}$, et naturellement $n \geq 2$, $0 \leq n' \leq n$. Le terme "le plus dangereux" est le terme de degré $n$ le plus bas possible, il est obtenu pour $k = -1$ et donc $n = n' = q - 1$, soit $(\bar{Z}^*)^{q-1}$. Passons en revue les différents cas en commençant par $\alpha \notin \mathbb{Q}$.[2]

◇ $\alpha \notin \mathbb{Q}$ soit $\alpha = p/q$ avec $q \to \infty$. La forme normale ne contient que les termes triviaux en $n = 2n' + 1$ soit $\sum_{n'=1}^{\infty} g_{2n'+1} |Z_k|^{2n'} Z_k$, ce que l'on peut éventuellement tronquer au delà du terme de plus bas degré, soit:

$$Z_{k+1} = \gamma Z_k + g_{31} |Z|^2 Z + \mathcal{O}(|Z|^5)$$

◇ Dans le cas $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, $q \geq 5$ le premier terme non trivial est $(Z^*)^{q-1}$ de degré $q - 1 \geq 4$, donc plus élevé que celui du premier terme trivial. À des termes $\mathcal{O}(|Z|^4)$ près, responsables du phénomène d'accrochage (voir plus loin), on est ramené au cas précédent. La résonance est bien là mais elle est *faible*.

◇ Au contraire, pour $q \leq 4$, les termes non-triviaux sont à prendre en compte à l'ordre dominant et on parle de *résonance forte*. Pour $q = 4$, *i.e.* $\gamma = \pm i$, il vient

$$Z_{k+1} = \gamma Z_k + g_{31} |Z_k|^2 Z_k + g_{33} (Z_k^*)^3 + \mathcal{O}(|Z|^5) ,$$

et pour $q = 3$, soit $\gamma = \exp(\pm 2\pi i/3)$:

$$Z_{k+1} = \gamma Z_k + g_{22} (Z_k^*)^2 + g_{31} |Z_k|^2 Z_k + \mathcal{O}(|Z|^4) .$$

◇ Restent les cas $q = 2$, soit $\gamma = -1$, et $q = 1$, soit $\gamma = 1$. Ce sont précisément les cas particuliers écartés précédemment car ils se ramènent à des itérations réelles et donc à des variétés centrales unidimensionnelles. Dans le premier cas, la mise sous forme normale permet d'éliminer tous les termes de degré pair dans le développement, ce qui conduit à

$$X_{k+1} = -X_k + g_3 X_k^3 + g_5 X_k^5 + \dots ,$$

tandis que dans le second, tout subsiste:

$$X_{k+1} = X_k + g_2 X_k^2 + g_3 X_k^3 + \dots .$$

[2]Dans tout ce qui suit nous abandonnons les barres indiquant qu'il s'agit de quantités (variables et coefficients) relatives à la forme normale.

### 2.1.4 Quasi-périodicité et accrochages

Considérons tout d'abord la bifurcation d'un cycle limite par une paire de valeurs propres complexes non résonnante, soit $\{\gamma = \exp(2\pi i\alpha_0), \gamma^*\}$, $\alpha_0 \notin \mathbb{Q}$. À l'ordre le plus bas la forme normale s'écrit près du seuil:

$$Z_{k+1} = \gamma Z_k - g|Z_k|^2 Z_k \,. \tag{2.1.9}$$

Au voisinage de la criticalité, on peut écrire $\gamma = (1+r)\exp[2\pi i(\alpha_0 + \alpha' r)]$ où le terme $\alpha' r$ rend compte d'un éventuel changement de fréquence d'origine linéaire au voisinage du seuil. L'étude s'effectue de façon parallèle au cas de la bifurcation de Hopf à temps continu en posant $Z = \rho\exp(2\pi i\theta)$, ce qui conduit à l'itération

$$\rho_{k+1}^2 = |\gamma|^2\rho_k^2 - (\gamma g^* + \gamma^* g)\rho_k^4 + \mathcal{O}(\rho_k^6)$$

et à l'équation de point fixe

$$\rho_*^2 = (1+2r)\rho_*^2 - 2\tilde{g}\rho_*^4 \,, \tag{2.1.10}$$

avec $2\tilde{g} = \gamma g^* + \gamma^* g$. En plus de la solution triviale $\rho_* = 0$, stable pour $r < 0$ et instable pour $r > 0$, la solution non triviale $\rho_* = \sqrt{r/\tilde{g}}$ stable (resp. instable) pour pour $r > 0$ (resp. $r < 0$) pour $\tilde{g} > 0$ (resp. $\tilde{g} < 0$), correspondant à une bifurcation est *super-critique* (resp. *sous-critique*), cf figure 2.8.

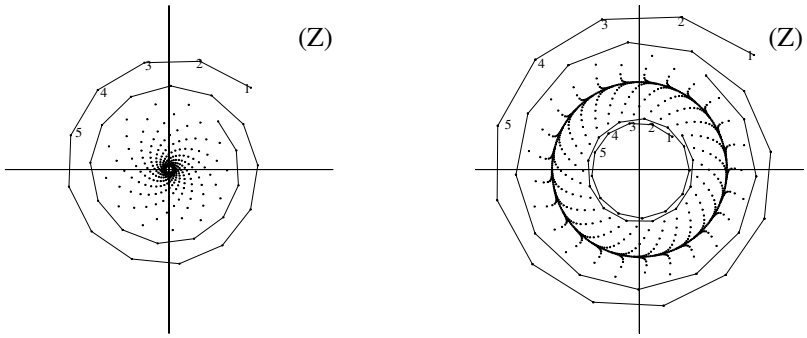



*Figure 2.8 : Bifurcation de Hopf super-critique d'une application de Poincaré: en dessous et au dessus du seuil, à gauche et à droite, respectivement.*

En régime asymptotique, les trajectoires du système à temps discret (2.1.9) rejoignent un cercle invariant de rayon $\rho_*$ et tournent sur ce cercle à vitesse constante. Le taux de rotation est obtenu en considérant l'évolution de $\theta$ après l'extinction du transitoire. La substitution de $\rho_*$ dans (2.1.9) conduit à

$$\exp(2\pi i\theta_{k+1}) = C\exp(2\pi i\theta_k)$$

où $C$, constante complexe de module 1, est obtenue par identification. Écrivons cette constante sous la forme $C = \exp(2\pi i\alpha_*)$, l'évolution de $\theta$ est alors donnée par:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_* \,.$$

et l'on peut montrer que $\alpha_* - \alpha_0 \sim \mathcal{O}(r)$. L'angle $\alpha_0$ a été supposé irrationnel mais quand $r$ varie, $\alpha_*$ prend des valeurs irrationnelles ou rationnelles.

Quand $\alpha_*$ est irrationnel, $\theta$ balaie le cercle unité uniformément. Revenant au système à temps continu dont l'itération décrit la section de Poincaré, on voit alors que les intersections successives de l'orbite avec la surface de section parcourent régulièrement le cercle de rayon $\rho_*$. Autrement dit, il faut imaginer la trajectoire s'enroulant sur un tore bidimensionnel $\mathbb{T}^2$ entourant le cycle limite qui bifurque, tore dont la section méridienne est le cercle de rayon $\rho_*$ centré sur le point fixe qui correspond à la trace sur la surface de Poincaré du cycle limite lui-même. Ce tore est stable si la bifurcation est super-critique. Physiquement cela correspond à un mouvement *quasi-périodique* à deux fréquences, les observables étant des fonctions bipériodiques du temps: $f(\omega t + \phi, \omega' t + \phi)$, où $f$ est une fonction périodique de période $2\pi$ en chacun de ses arguments, $\omega$ est la pulsation du cycle limite et $\omega' = \alpha_*\omega$ le seconde pulsation.

Si $\alpha_*$ prend une valeur rationnelle $p_*/q_*$ avec $q_* \geq 5$ la situation n'est pas fondamentalement changée car l'itération (2.1.10) qui gouverne le module n'est pas perturbée à l'ordre considéré. L'attracteur est alors une trajectoire fermée tracée sur le tore et le système fait $q_*$ tours le long du cycle pendant qu'il en fait $p_*$ dans la direction méridienne.

Le caractère rationnel ou non de $\alpha_*$ se détermine en mesurant le *nombre de rotation* défini par:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} (\theta_{k'+1} - \theta_{k'}) \,.$$

L'effet non trivial des non linéarités est de produire des accrochages de fréquence. L'itération d'Arnold

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha - (\kappa/2\pi)\sin(2\pi\theta_k) \,, \tag{2.1.11}$$

où $\alpha$ est taux de rotation nominal et $\kappa$ mesure des non linéarités, fournit un modèle simple du phénomène ne portant que sur la phase $\theta_k$ de $Z_k$. L'accrochage se traduit par une persistance de régime périodique $\alpha_* \in \mathbb{Q}$ constant sur des intervalles continus de valeurs de $\alpha$. La figure 2.9 illustre la situation correspondant à $\kappa = 1$ qui ne présente que des régimes accrochés (sauf sur un ensemble de mesure nulle de valeurs de $\alpha$). Le nombre de rotation présente des plateaux à toutes les valeurs rationnelles, les plus visibles correspondent à des valeurs rationnelles $\alpha_* = p_*/q_*$ avec $q_*$ assez petit.

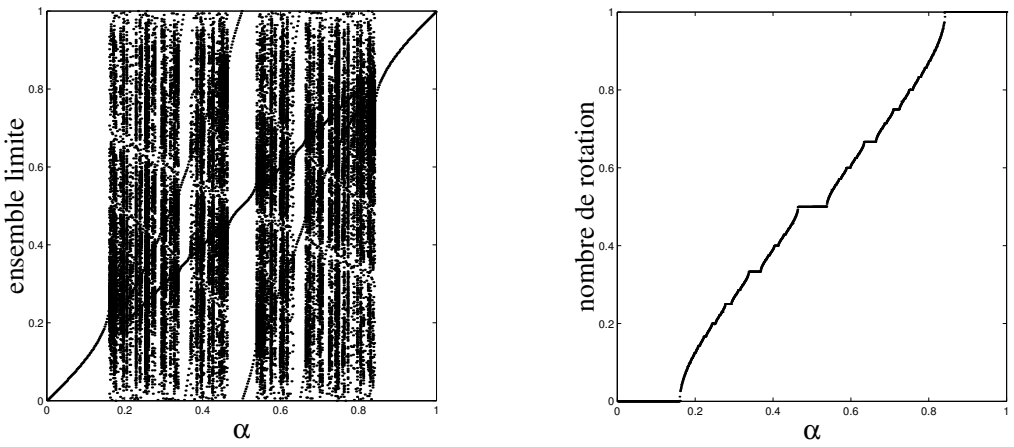



*Figure 2.9: Itération d'Arnold (2.1.11) pour $\kappa = 1$ et $\alpha$ variable sur $[0, 1]$. À gauche: ensemble des valeurs de $\theta$ explorées après élimination d'un transitoire (des lignes verticales continues indiquant un régime non accroché sont quasi-absentes). À droite: nombre de rotation fonction de $\alpha$; le graphe de la fonction est un escalier du diable.*

### 2.1.5 Résonances fortes

Ce qui précède ramène l'évolution à une dynamique sur un tore limite supposé persister même en présence de résonance forte. Cette hypothèse n'est en général pas tenable car les formes normales correspondant aux résonances fortes ne permettent pas de séparer l'évolution du module de $Z$ de celle de sa phase. Pire encore, les résonances $\gamma = 1$ et $\gamma = -1$ ramènent à des itérations réelles de sorte que le tore est en fait victime d'un collapsus (aplatissement). Limitons nous à ces deux derniers cas, les plus fréquents en pratique.

$\diamond$ Considérons tout d'abord le cas de la résonance forte pour $\gamma = 1$. La forme normale s'écrit

$$X_{k+1} = X_k - aX_k^2 + \ldots$$

Lever la condition de criticalité revient à changer la pente au point fixe. Il serait tentant de changer uniquement la dérivée à l'origine et de prendre $X_{k+1} = (1 + r)X_k - aX_k^2 + \ldots$, mais ceci correspond à un

simple échange de stabilité qui suppose la persistance du point fixe ($X_*(r-aX_*)=0 \rightsquigarrow X_*=0$ et $X_*=r/a$) qui n'est pas générique. Le déploiement de la singularité quadratique conduit en fait à

$$X_{k+1} = r + X_k - aX_k^2 + \dots ,$$

de sorte que l'équation de point fixe $X = r+X-aX^2$ n'a plus de solution pour $r/a<0$. Dans le cas contraire, on trouve deux points fixes $X_*^{(\pm)} = \pm(r/a)^{1/2}$ dont l'un est stable et l'autre instable (figure 2.10, gauche). Pour le système à temps continu de départ, cette bifurcation, dite *tangente*, correspond à la coalescence d'une paire de cycles limites de même période. Elle est le point de départ de l'un des scénarios intermittents.

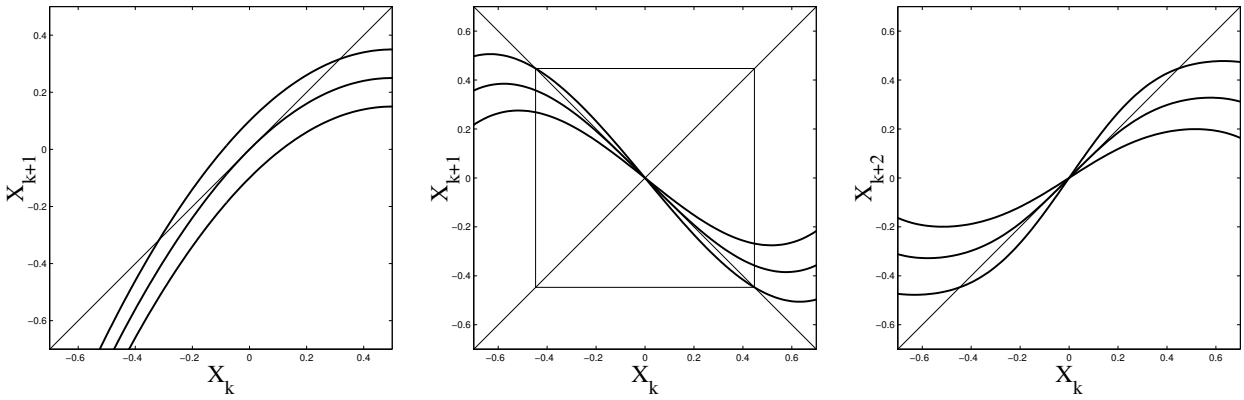



*Figure 2.10 : À gauche: bifurcation tangente, générique pour $\gamma=1$. Au centre et à droite: bifurcation par doublement de période pour $\gamma=-1$; au centre: $X_{k+1}=\mathcal{G}(X_k)$; à droite: $X_{k+2}=\mathcal{G}\circ\mathcal{G}(X_k)$).*

◇ Passons maintenant à la résonance 1:2 correspondant à la valeur propre $\gamma=-1$. La forme normale s'écrit

$$X_{k+1} = \mathcal{G}(X_k) = -(1+r)X_k + bX_k^3 + \dots$$

L'équation de point fixe $X_* = -(1+r)X_* + bX_*^3$, soit encore $(2+r-bX_*^2)X_*=0$, n'a pas d'autre racine que $X_*=0$ dans le voisinage[3] mais on peut noter que les itérés convergent vers l'origine ($r<0$) ou s'en écartent ($r>0$) avec une alternance de signe qui suggère d'étudier la convergence/divergence en prenant les itérés de deux en deux. Il vient donc

$$X_{k+2} = -(1+r)X_{k+1} + bX_{k+1}^3 \simeq (1+2r)X_k - 2bX_k^3 ,$$

dont les points fixes sont donnés par

$$X_* = (1+2r)X_* - 2bX_*^3 \quad \text{soit} \quad X_*(r-bX_*^2) = 0 .$$

Seule la solution non triviale $X_*^{(\pm)} = \pm(r/b)^{1/2}$ nous intéresse: elle forme une orbite périodique de $\mathcal{G}$ de période 2: $\mathcal{G}(X_*^{(+)}) = X_*^{(-)}$ et $\mathcal{G}(X_*^{(-)}) = X_*^{(+)}$. On montre facilement qu'elle est stable (resp. instable) si la bifurcation est *super-critique* (resp. *sous-critique*), *i.e.* $b>0$ (resp. $b<0$), cf. figure 2.10 (centre et droite, cas stable). Retournant au temps continu, le 2–cycle de l'itération correspond à un cycle limite de période $2T$ où $T$ est la période du cycle qui bifurque. Ceci justifie le terme *bifurcation par doublement de période*. On notera qu'il est essentiel que les trajectoires puissent jouer à saute-mouton sur la section de Poincaré sans pour autant se recouper, ce qui suppose que la variété sur laquelle bidimensionnelle s'inscrit le cycle qui se déstabilise ait la topologie du *ruban de Mœbius*, *i.e.*, non orientable. L'effet de la résonance forte 1:2 est donc d'écraser le tore sur lui même d'une façon particulièrement dramatique.

[3] Les autres solutions sont $\simeq \pm\sqrt{2/b} \sim \mathcal{O}(1)$.

## 2.2 Émergence de comportements complexes

### 2.2.1 Au delà de la régularité temporelle

La bifurcation d'un comportement stationnaire (point fixe) vers un comportement périodique (cycle limite) puis bipériodique (2-tore) constituent les premières étapes de la *transition vers la turbulence* selon Landau (1944, dans [15], p. 115) qui la décrit comme le résultat d'une cascade indéfinie de bifurcations de Hopf introduisant chacune une fréquence incommensurable avec les précédentes (figure 2.11, haut). L'idée sous-jacente est celle d'une *superposition* de mouvements élémentaires aboutissant à un comportement compliqué dont le caractère imprédictible résulte de notre incapacité à déterminer les phases des différents degrés de liberté qui s'accumulent.

Ruelle et Takens (1971, dans [15], p. 120) ont montré que cette multi-périodicité n'était pas robuste et que l'on devait plutôt s'attendre à rencontrer des comportements chaotiques après seulement quelques bifurcations, en pratique dès que 3 modes (fréquences) sont en *interaction* (figure 2.11, bas). Dans l'espace des phases, ce *chaos* se concrétise par l'apparition d'*attracteurs étranges* formés de trajectoires instables. La *sensibilité aux conditions initiales et aux petites perturbations* associée à cette instabilité (§ 2.3.1) permet de rendre compte de la décroissance exponentielle des corrélations caractéristiques de la turbulence, ce dont la multi-périodicité d'un $n$-tore n'est pas capable (préservation des "différences de phase" entre trajectoires issues de conditions initiales voisines).

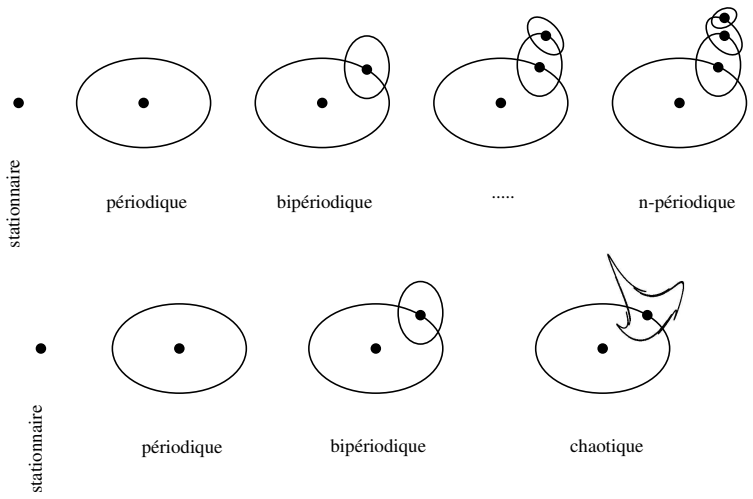



*Figure 2.11 : En haut: transition vers la turbulence par multi-périodicité selon Landau. En bas: scénario amendé par Ruelle et Takens.*

Pour concilier les effets d'étirement associés à l'instabilité, la contraction liée à la dissipation, et les processus typiquement non linéaires de repliement, les attracteurs étranges présentent généralement une structure *fractale* (§ 2.3.4) feuilletée organisée de façon hiérarchique.

Dans les systèmes à temps continu le chaos demande au moins $d = 3$ pour se développer. La figure 2.12 illustre le cas du modèle de Lorenz et du modèle de Rössler.

L'application de Poincaré étant par construction inversible et les itérations inversibles pouvant réciproquement servir de modèles d'applications de Poincaré de systèmes différentiels, le chaos demande donc au moins $d = 2$ pour un système dynamique à temps discret. L'exemple du modèle de Hénon est présenté sur la figure 2.13.

Si l'on relaxe la condition d'inversibilité, il est facile de construire des itérations unidimensionnelles qui soient chaotiques, l'itération dyadique $X_{k+1} = 2X_k \pmod 1$ et l'itération logistique $X_{k+1} = 4rX_k(1 - X_k)$ avec $r = 1$ en font partie, cf. figure 2.14. Comparer l'allure de l'itération (chaotique) en accent circonflexe, $X_{k+1} = 2X_k$ pour $0 < X_k < 0.5$ et $X_{k+1} = 2(1 - X_k)$ si $0.5 < X_k < 1$, et celle l'application de Lorenz

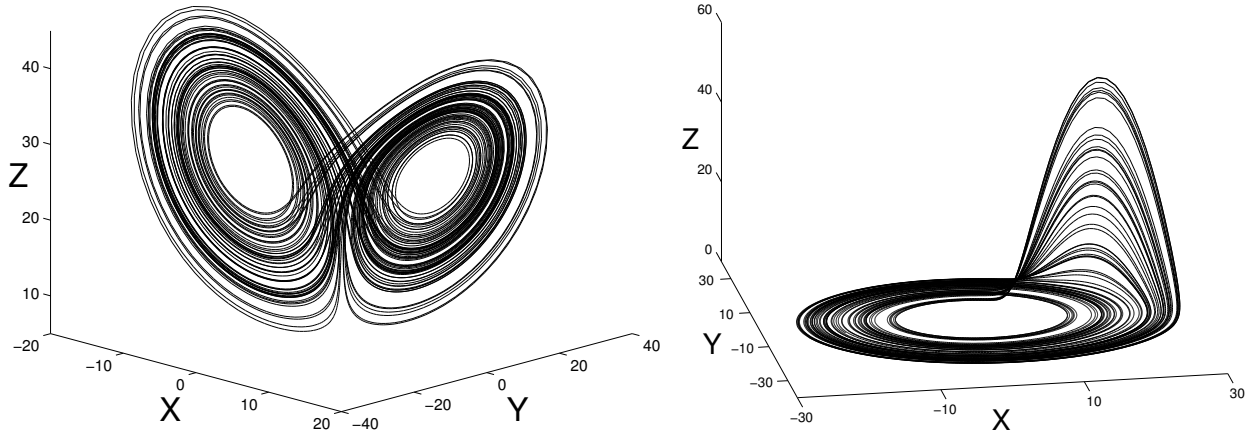



*Figure 2.12 : À gauche: modèle de Lorenz* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = \sigma(Y - X)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y = (r - Z)X - Y$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z = XY - bZ$, *pour* $\sigma = 10$, $b = 8/3$ *et* $r = 28$. *À droite: modèle de Rössler* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = -Y - Z$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y = X + aY$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z = b + (X - c)Z$, *pour* $a = 0.1$, $b = 0.1$ *et* $c = 18$.

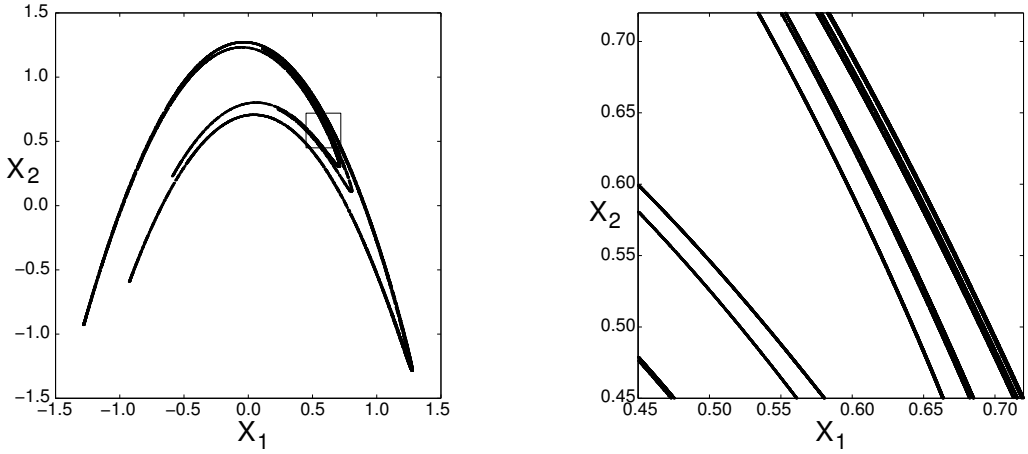



*Figure 2.13 : Modèle de Hénon,* $X_{1,k+1} = X_{2,k}$, $X_{2,k+1} = 1 - aX_{2,k}^2 + bX_{1,k}$. *À gauche: vue d'ensemble de l'attracteur pour* $a = 1.4$, $b = 0.3$. *À droite: agrandissement de la région encadrée mettant en évidence la structure fractale.*

(obtenue en portant les maxima successifs atteints par la coordonnée $Z$, chacun en fonction du précédent) permet de comprendre la nature du chaos qui s'installe.

### 2.2.2 Scénarios de transition vers le chaos

Plusieurs routes universelles vers le chaos ont été mises en évidence [7]. Les scénarios les plus simples démarrent sur la bifurcation de cycles limites. Comme nous l'avons vaguement indiqué plus haut, le scénario de Ruelle et Takens repose sur la succession d'un petit nombre de bifurcation de Hopf super-critiques. Le cas résonnant $\gamma = -1$ super-critique est le point de départ d'une cascade de doublements de période qui débouche sur le chaos, manifestant de remarquables propriétés d'échelle universelles. Les autres scénarios, à caractère généralement sous-critique, nécessitent l'introduction d'ingrédients plus globaux.

**La cascade sousharmonique.** La Figure 2.15 présente le diagramme de bifurcation de l'itération logistique

$$X \mapsto 4rX(1 - X). \tag{2.2.12}$$

Son point fixe non trivial $X_* = 1 - 1/4r$ bifurque en $r_0 = 3/4$ avec une valeur propre $\gamma = -1$. Cette bifurcation est la première étape d'une *cascade directe* de doublement de période, $T = 2^k$, $k = 1, \ldots, \infty$, à

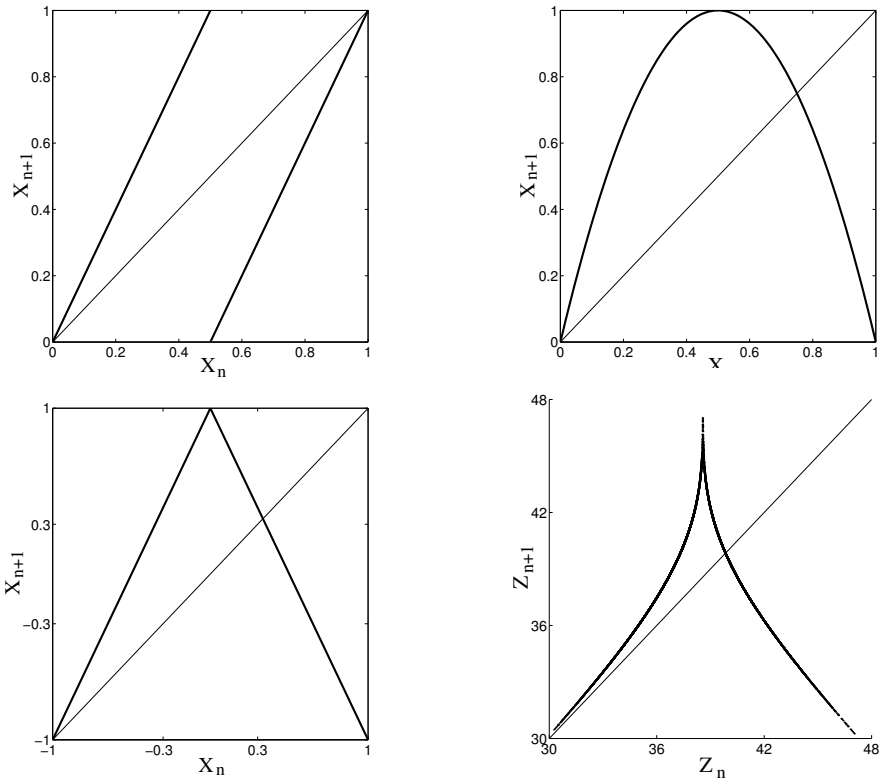



*Figure 2.14 : En haut: itération dyadique et itération logistique pour $r = 4$. En bas: itération en accent circonflexe et application de Lorenz pour $R = 28$.*

des seuils $r_k$ convergeant géométriquement vers $r_\infty = 0.89248\ldots$:

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta = 4.6692016\ldots\,,$$

où $\delta$ est appelée constante de Feigenbaum. Au delà de $r_\infty$ et jusqu'à $r = 1$, le chaos apparaît d'abord à l'intérieur de bandes qui se regroupent en une *cascade inverse* miroir de la cascade directe. On observe également un retour à la périodicité à l'intérieur de fenêtres en $r$ dont la plus large correspond à un régime périodique de période 3. Chaque fenêtre s'installe par intermittence de type I et disparaît par une crise externe (cf. ci-dessous). À l'intérieur d'une fenêtre, le système subit une cascade sousharmonique exactement semblable à la cascade principale.

**Intermittence et crises.** Contrastant avec le caractère local de la cascade sousharmonique, les autres scénarios nécessitent des hypothèses plus globales sur la structure de l'espace des phases.

L'*intermittence* suppose par exemple que le cycle limite de départ bifurque de façon sous-critique, qu'il n'y a pas d'attracteur à proximité et que la dynamique d'ensemble recycle les trajectoires dans son voisinage. Les expériences révéleront alors une alternance, apparemment aléatoire, d'*intermèdes laminaires* durant lesquels le système évolue de façon sensiblement identique à celle qui prévalait avant la bifurcation, et de *bouffées chaotiques* (figure 2.16). L'intermittence de type I, qui se produit à la résonance forte $\gamma = 1$, est bien décrite par une itération de la forme $X_{k+1} = r + X_k + aX_k^2$ au voisinage de $X = 0$, recollée à une transformation qui assure mélange et recyclage, telle l'itération dyadique, loin de $X = 0$.

L'intermittence de type II (resp. III) se produit en cas de bifurcation de Hopf (resp. sousharmonique) sous-critique, assortie d'une condition de recyclage près du cycle qui se déstabilise.

Les *crises* forment une autre classe de scénarios très fréquents, caractérisés par un changement de brutal de morphologie de l'attracteur. En une *crise externe* un attracteur chaotique entre en collision avec la variété stable d'un ensemble limite exceptionnel limitant le bassin d'attraction d'un autre attracteur. Avant la crise

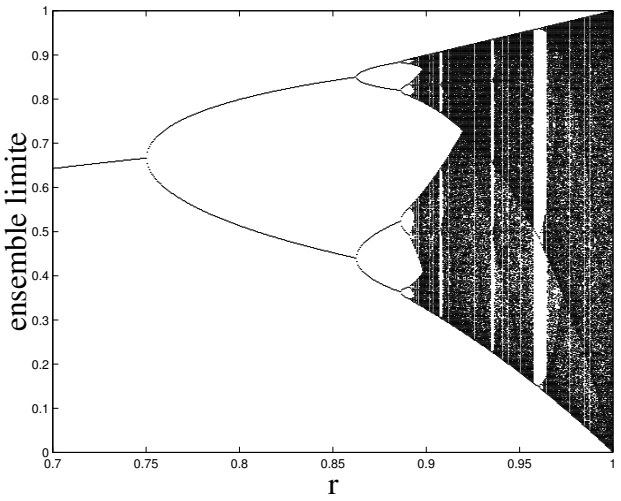



*Figure 2.15 : Cascade de doublement de période.*

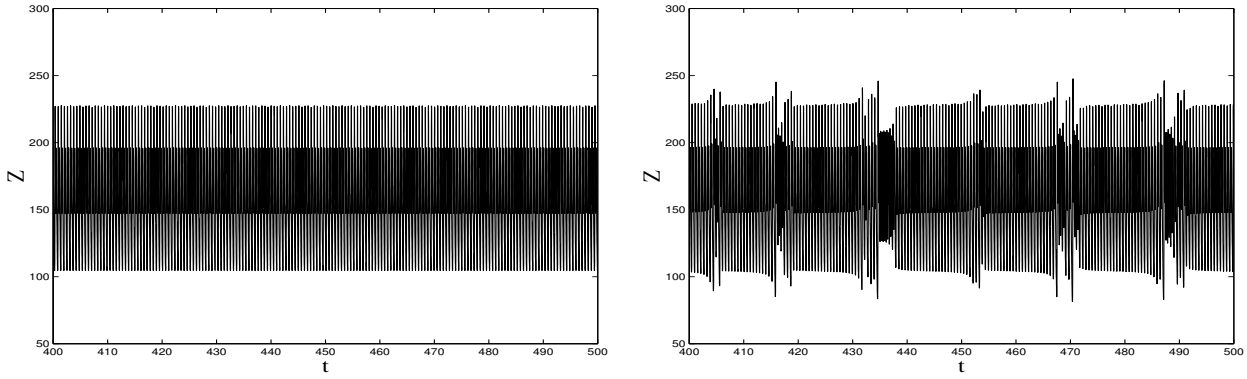



*Figure 2.16 : Intermittence de type I dans le modèle de Lorenz. À gauche: comportement périodique pour $R = 166.0$. À droite: comportement intermittent pour $R = 166.2$.*

le comportement chaotique du système persiste indéfiniment. Après la crise, l'ensemble limite chaotique n'est plus un attracteur. Une trajectoire initialisée dans son voisinage n'y reste que temporairement, durant ce que l'on appelle un *transitoire chaotique*, cf. figure 2.17. Une *crise interne* se traduit par l'élargissement soudain d'un attracteur par fusion de deux ou plusieurs composantes, se répondant souvent par une symétrie du système de départ. La dynamique, caractéristique de l'*intermittence de crise*, se traduit par des sauts, apparemment aléatoires entre composantes préalablement indépendantes. Ce comportement est illustré sur la figure 2.18 au moyen de l'itération $X_{k+1} = rX_k(1 - X_k^2)$ pour $r \simeq 3\sqrt{3}/2 \simeq 2.5981$.

## 2.3 Théorie du chaos

Après avoir décrit le développement de régimes temporellement de plus en plus complexes par accumulation de bifurcations, nous considérons maintenant la caractérisation directe des systèmes chaotiques. Nous commençons par l'extension de la notion de stabilité qui permet de mesurer le degré de chaos à l'aide de taux de croissance appropriés appelés *exposants de Lyapunov* § 2.3.1. Cette sorte de mesure est plutôt "longitudinale" en ce sens qu'elle s'effectue le long des trajectoires. Dans l'espace des phases, les attracteurs chaotiques présentent généralement une structure fractale qui correspond à une caractérisation "transverse" de la dynamique, § 2.3.4.

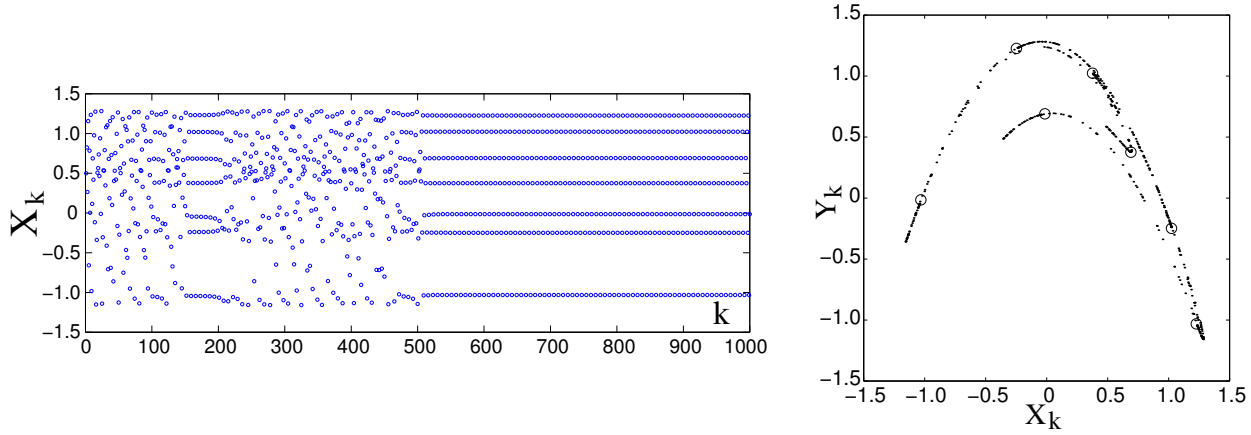



*Figure 2.17 : Transitoire chaotique du modèle de Hénon obtenu pour $a = 1.3$ et $b = 0.3$. À gauche: série chronologique de $X$ illustrant le transitoire de durée $\sim 500$. À droite: Dans l'espace des phases, le transitoire explore un répulseur chaotique de structure analogue à celle de l'attracteur obtenu pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avant de "trouver" la période 7 indiquée par les symboles $\circ$.*

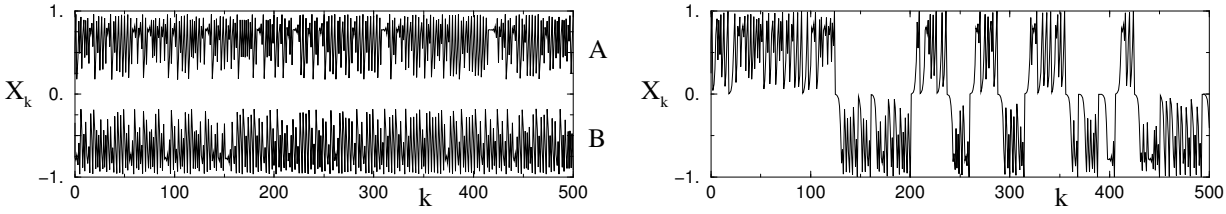



*Figure 2.18 : Intermittence de crise: Pour $r < r_c$ (à gauche, $r = 2.5$) le système est chaotique mais reste confiné à $X > 0$ (série chronologique A) ou $X < 0$ (série chronologique B), tandis que pour $r > r_c$ (à droite, $r = 2.6$) l'attracteur s'est élargi, restaurant statistiquement la symétrie inscrite dans le modèle.*

### 2.3.1 Divergence des trajectoires

L'imprédictibilité à long terme est la conséquence directe de la *sensibilité aux conditions initiales* [12]. On mesure le taux de divergence des trajectoires voisines à l'aide des *exposants de Lyapunov* qui étendent le concept de stabilité aux trajectoires apériodiques. Pour une itération unidimensionnelle, $X_{k+1} = \mathcal{G}(X_k)$, il est facile de montrer que le taux d'écartement à une trajectoire de référence $\{X_k, k = 0, \ldots\}$ est donné par

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum\nolimits_{k'=0}^{k-1} \ln\left(|\mathcal{G}'(X_{k'})|\right), \tag{2.3.13}$$

où $\mathcal{G}' \equiv d\mathcal{G}/dX$, et que l'on trouve $\gamma = \ln(2) > 0$ pour tous les exemples de la figure 2.14 (sauf l'application de Lorenz). Pour une itération $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ sur un espace de dimension $d$, on trouve tout un *spectre de Lyapunov* $\{\gamma_m, m = 1, \ldots, d\}$ que l'on obtient plus concrètement en étudiant le taux de croissance $\mu_m$, $m = 1, \ldots, d$, d'éléments de volumes de dimension $m$ croissante. On tire de cette étude $\gamma_m = \mu_m - \mu_{m-1}$. Par construction, le premier exposant, $\mu_1 \equiv \gamma_1$, est aussi le plus grand exposant de Lyapunov, celui que l'on déduit du taux d'évolution de la distance entre deux trajectoires voisines, norme de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}_k = \prod_{k'=0}^{k-1} \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{X}_{k'})\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}_0$. L'extension aux systèmes différentiels est immédiate.

La table 2.2 récapitule la situation, l'existence d'au moins un exposant de Lyapunov positif étant la définition la plus simple que l'on puisse donner au *chaos*. Sans entrer dans les détails, on ajoutera que l'*entropie*, qui mesure le degré de chaos global est égal à la somme de tous les exposants de Lyapunov positifs.

*Table 2.2 : Signature de Lyapunov des attracteurs.*

| Régime | Temps continu | Temps discret (section de Poincaré) |
|---|---|---|
| stationnaire (point fixe) | $- - - \cdots$ | $- - \cdots$ |
| périodique (cycle limite) | $0 - - \cdots$ | $- - \cdots$ |
| bipériodique (2-tore) | $0\,0 - \cdots$ | $0 - \cdots$ |
| chaotique (attracteur étrange) | au moins un $+$ *e.g.* $+\,0 - - \cdots$ | au moins un $+$ *e.g.* $+ - - \cdots$ |

### 2.3.2 Dynamique symbolique et chaos

Pour comprendre l'essence du chaos, il suffit de considérer l'itération dyadique $X_{k+1} = 2X_k \pmod 1$, cf. Fig. 2.14, gauche. Soit $X$ représenté par son développement binaire $[0.\sigma_1\sigma_2...]$ où $\sigma_n \in \{0\,;1\}$ est le $n$-ème digit, *i.e.* $X = \sum_{n\geq 1} \sigma_n 2^{-n}$. Le premier digit indique si $X$ appartient à $[0, 1/2[$ ou à $[1/2, 1[$; le second digit précise le sous-intervalle suivant, $[0, 1/4[$, $[1/4, 1/2[$, $[1/2, 3/4[$ ou $[3/4, 1[$. La multiplication par 2 décale le point d'un rang vers la droite dans la suite des digits. Les deux intervalles disjoints $[0, 1/2[$ et $[1/2, 1[$ forment une partition de $[0, 1[$ appelée *partition génératrice*.

La sensibilité aux conditions initiales découle de l'incertitude qui règne au delà d'un certain rang dans le développement binaire de la condition initiale en raison de la précision avec laquelle elle est connue expérimentalement. Cette imprécision interdit toute prédiction "à long terme" de la trajectoire, i.e. au delà d'un certain horizon de prédictibilité. Équivalente à un *décalage*, l'itération fait en effet "remonter" l'information contenue dans les digits de poids faible qui finit par dominer l'évolution. Tout se passe alors comme si la condition initiale était une suite de 0 et de 1 tirés à pile ou face.

Cette présentation suggère le fait très important qu'à côté de l'infinité non dénombrable de trajectoires apériodiques, on peut trouver une infinité dénombrable de trajectoires périodiques découlant du développement binaire des rationnels sur $[0, 1[$. Ces trajectoires particulières sont naturellement instables puisque sensibles au changement aléatoire des digits au delà d'un rang arbitrairement élevé de leur développement.

Ces propriétés sont typiques des attracteurs chaotiques. La principale difficulté est de déterminer une partition génératrice appropriée permettant la réduction de la dynamique à un décalage.

### 2.3.3 Ergodicité et probabilités

Empiriquement, les propriétés statistiques des trajectoires chaotiques sont généralement tirée de la *moyenne temporelle* d'une observable donnée $W$

$$\langle W \rangle_{\rm t} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} W_{k'}\,.$$

L'*ergodicité* [12] suppose que l'on puisse remplacer cette moyenne par une *moyenne d'ensemble* sur une mesure de probabilité $\rho(\mathbf{X})d\mathbf{X}$ portée par l'attracteur, soit

$$\langle W \rangle_{\rm e} = \int W(\mathbf{X})\rho(\mathbf{X})d\mathbf{X}\,.$$

la densité de probabilité $\rho(\mathbf{X})$ est définie opérationnellement par

$$\rho(\mathbf{X}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{k'})\,,$$

où $\delta$ est la distribution de Dirac. À une région donnée de l'espace, elle attribue donc un poids proportionnel au temps passé par une trajectoire arbitrairement longue dans cette région. La mesure de probabilité ainsi définie est appelée *mesure naturelle*. Elle est indépendante des conditions initiales et résiste aux perturbations infinitésimales apportées aux trajectoires individuelles. On peut en principe la déterminer empiriquement par comptage (*box counting*) en mesurant l'occupation relative d'un élément $B_m$ d'une partition de l'espace des phases en pavés de taille $\epsilon \to 0$, formellement:

$$\int_{B_m(\epsilon)} \rho(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \bar{\rho}_m(\epsilon)\,. \tag{2.3.14}$$

### 2.3.4 Propriétés fractales

En raison de l'instabilité des trajectoires, un attracteur étrange est porté "le long de" celles-ci par une variété continue dont la dimension topologique $d_\mathrm{t}$ est égale au nombre d'exposants de Lyapunov non négatifs. Cependant, les propriétés d'étirement (instabilité) de compression (dissipation) et de repliement (maintien des trajectoires à distance finie) caractéristiques de la dynamique procure à l'attracteur une structure transverse *fractale*. La transformation du boulanger dissipative fournit un modèle simple d'attracteur étrange. La transformation de base étire et comprime d'un même facteur 2 puis replie, donc conserve les aires (figure 2.19, gauche). Si l'on demande qu'elle comprime plus qu'elle n'étire, elle produit alors une structure fractale produit d'une variété continue par un ensemble de Cantor (figure 2.19, droite).

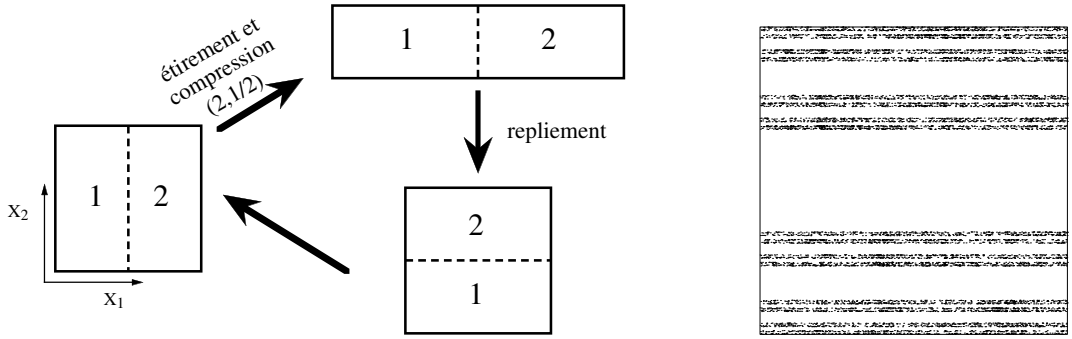



*Figure 2.19 : Transformation du boulanger. À gauche: processus élémentaire dans le cas conservatif. À droite: effet de la dissipation.*

Le procédé de construction de l'ensemble de Cantor est illustré sur la figure 2.20. Bien que de mesure nulle (sa longueur décroît comme $(2/3)^k$, $k$ étant le nombre d'opérations de base exécutées), c'est un ensemble non dénombrable (la représentation ternaire de ses points, *i.e.* sur l'ensemble $\{0;1;2\}$ ne contient jamais le digit 1, ce qui le met en correspondance biunivoque avec la représentation binaire sur $\{0;1\}$ des points de l'intervalle $[0,1]$, explicitement *via* $0 \leftrightarrow 0$ et $2 \leftrightarrow 1$). Malgré leur lacunarité, de tels ensembles "occupent de l'espace," ce que l'on va quantifier à l'aide de "dimensions."

D'un point de vue général [11], les ensembles fractals sont (statistiquement) invariant sous l'effet combiné de rotations, translations et dilatations. Leurs propriétés sont plus faciles à introduire quand la règle de construction de l'ensemble est donnée. Ainsi, la *dimension de similarité* est définie par $d_\mathrm{sim} = \ln(N_\varrho)/\ln(\varrho)$, où $N_\varrho$ est le nombre de fois où le motif de base est répété lorsqu'on dilate l'ensemble d'un facteur $\varrho$. Pour l'ensemble de Cantor triadique classique défini plus haut et illustré sur la figure 2.20 on trouve ainsi $d_\mathrm{sim} = \ln(2)/\ln(3)$.

Quand la règle n'est pas connue il faut procéder par comptage. La *dimension fractale* ou *capacité* est définie par:

$$d_\mathrm{f} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log\big(\mathcal{N}(\epsilon)\big)}{\log(1/\epsilon)}\,,$$

où $\mathcal{N}(\epsilon)$ est le nombre de pavés nécessaire pour recouvrir l'ensemble à la résolution $\epsilon$. Un ensemble est

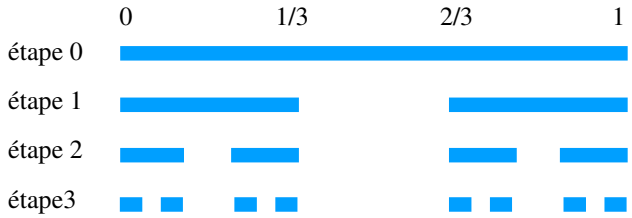



*Figure 2.20 : Construction de l'ensemble de Cantor triadique.*

dit "fractal" dès lors que $d_\mathrm{f} > d_\mathrm{t}$, ce qui exprime le fait qu'il semble occuper un espace plus grand que ce qu'indique sa dimension topologique.

La complexité des attracteurs chaotiques s'inscrit dans les propriétés *multifractales* de leur mesure naturelle $\rho(\mathbf{X})$. Celles-ci se déterminent à l'aide de *dimensions généralisées* $d_q$ calculées à partir de la densité empirique $\bar{\rho}_m(\epsilon)$ déterminée par comptage *via* (2.3.14):

$$d_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log\left(\sum_m \bar{\rho}_m^q\right)}{\log(\epsilon)}\,, \qquad -\infty < q < +\infty\,.$$

La dimension fractale $d_\mathrm{f}$ précédemment introduite est retrouvée pour $q = 0$. La limite $q \to 1$ définit la *dimension d'information* que l'on obtiendrait directement par

$$d_1 = d_\mathrm{I} = \lim_{\epsilon \to 0} \Big[\sum\nolimits_m \bar{\rho}_m \log(\bar{\rho}_m)\Big] \Big/ \log(\epsilon)\,.$$

La *dimension de corrélation* correspondant à $q = 2$ est déterminée empiriquement par la méthode de Grassberger et Procaccia qui étudie la variation du nombre de paires de points de l'attracteur séparés d'une distance $\Delta$ donnée

$$d_2 = \nu = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\log\left[C(\Delta)\right]}{\log(\Delta)}\,, \qquad C(\Delta) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum\nolimits_{n,n'} Y\Big(\Delta - \bar{\Delta}(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n'})\Big)\,,$$

où $\bar{\Delta}$ est une mesure des distances dans l'espace des phases et $Y$ telle que $Y(u) = 0$ pour $u < 0$, et 1 sinon (distribution de Heaviside).

De façon générale, on montre que $0 < d_\mathrm{min} \leq d_{q+1} \leq d_q \leq d_\mathrm{max} < d$. Une mesure de probabilité homogène est caractérisée par $d_q = d_\mathrm{f}$ pour tout $q$, alors que la mesure naturelle sur un attracteur chaotique typique vérifie plutôt $d_\mathrm{min} < d_\mathrm{max}$, ce qui permet de la qualifier de multifractale.

Du spectre des exposants de Lyapunov cumulés $\mu_m = \sum_{m'=1}^{m} \gamma_{m'}$ mesurant le taux de croissance des éléments de volume de dimension $m$, on peut définir la *dimension de Lyapunov* $d_\mathrm{L}$ par la formule de Kaplan et Yorke:

$$d_\mathrm{L} = \nu + \frac{\mu_\nu}{\mu_\nu - \mu_{\nu+1}} = \nu + \frac{1}{|\gamma_{\nu+1}|} \sum\nolimits_{m=1}^{\nu} \gamma_m$$

où $\nu$ est le plus grand entier tel que $\mu_\nu \geq 0$. Pour un attracteur chaotique en dimension 2 la formule donne simplement $d_\mathrm{L} = 1 + \gamma_1/|\gamma_2|$ (voir [12] pour plus de détails).

# Chapitre 3

# Dynamique non-linéaire appliquée

Ce chapitre comporte deux parties de volume très inégal. La première est dédiée à l'étude empirique des systèmes dynamiques et principalement au problème de la *reconstruction* de l'évolution par la méthode des retards de Takens (§3.1). La seconde partie est consacrée au *contrôle du chaos*, sujet qui a fait l'objet d'une attention toute particulière depuis le début des années 90. Introduisons cette seconde partie un peu plus en détail.

Dans un cadre linéaire, le problème du contrôle se résume à développer des stratégies systématiques utilisant des outils classiques en algèbre linéaire pour modifier le système considéré afin de contourner ses insuffisances, *i.e.* éviter l'amplification de modes d'instabilité qui, en se développant viendraient parasiter la réponse (nous présentons quelques rudiments de *contrôle linéaire* à un niveau plutôt formel dans un appendice, §3.5).

Dans le cas non linéaire, il faut en général fortement limiter ses ambitions. Vouloir obtenir une sortie déterminée consiste souvent plus simplement à chercher à préserver un régime permanent particulier. Ici, nous envisagerons le problème du contrôle non linéaire d'abord sous l'angle de la stabilité d'un régime forcé en étudiant les conditions de synchronisation d'un système esclave (réponse) à un système maître (entrée), §3.2. C'est dans ce cadre que des tentatives plus ambitieuses ont été développées mais que nous n'aborderons pas, *e.g.* l'utilisation du chaos pour communiquer et crypter des informations.

Dans de nombreux cas on a cependant affaire à un système fonctionnant de façon autonome pour une valeur nominale de ses paramètres de contrôle. Si l'état obtenu n'est pas celui que l'on recherche ou s'il ne résiste pas aux perturbations, en d'autres termes si ce n'est pas un point de fonctionnement stable du système étudié, il faut apporter en permanence des *corrections de trajectoire*. Le régime permanent souhaité est souvent un état périodique instable particulier comme il en existe beaucoup dans les systèmes non linéaires potentiellement chaotiques, cf. chapitre 2, §2.3.2. Comme dans le cas linéaire, il s'agit alors en général de déterminer des feed-backs appropriés. Deux approches se partagent le paysage. La première reste dans un cadre à temps continu et met en œuvre des *feed-backs retardés* [23] pour tenter de stabiliser d'une orbite périodique. La méthode, plutôt intuitive, consiste à rappeler en continu au système ce vers quoi il devrait tendre en lui injectant un signal proportionnel à l'écart entre ce qu'il vaut et ce qu'il valait à la période précédente, voir §3.3. La seconde passe dans un cadre à temps discret et travaille sur une stroboscopie du signal, c'est la "méthode OGY" devenue classique [25] qui, dans sa philosophie, est plus proche des théories de contrôle linéaire mais d'un autre côté fait un plus grand usage des résultats de la théorie des systèmes dynamiques en travaillant directement sur l'espace des phases du système, §3.4.

L'humilité requise lorsqu'on traite un problème donné dans son contexte non linéaire se traduit ici par le fait que l'on se contente souvent de stabiliser une orbite dont on ne maîtrise pas *a priori* toutes les caractéristiques et que l'on est en quelque sorte obligé d'attendre que le système veuille bien approcher de la région concernée de l'espace des phases (ce que le système fera en raison de l'ergodicité) avant d'entreprendre le contrôle proprement dit. Les stratégies de *ciblage* (en anglais "targeting"), s'appuyant sur une connaissance encore plus approfondie des systèmes chaotiques, ont été mises au point pour raccourcir cette phase

transitoire. À l'opposé, on peut également vouloir au contraire empêcher le système de rejoindre le bassin d'attraction d'une solution qui serait stable en l'absence de contrôle, pour le maintenir dans un état chaotique, *i.e.* rendre permanent un transitoire chaotique pour favoriser le mélange.

L'utilité de non linéarités tient à ce que généralement les réponses ne sont pas proportionnées aux signaux de contrôle. Notamment en raison de la sensibilité des systèmes chaotiques —ou même seulement potentiellement chaotiques— aux petites perturbations, on peut envisager des procédures de contrôle qui s'avèrent très économiques en termes d'énergie injectée dans le système. La réussite de la stratégie nécessite cependant des connaissances sur le système considéré qui vont bien au delà de ce qui serait nécessaire dans un cadre linéaire pour lequel on dispose d'outils solides. Lorsque le système n'est pas modélisé de façon abstraite par un modèle mathématique, une phase d'apprentissage est en général requise, phase concrètement très dépendante des méthodes d'étude empiriques que nous introduisons maintenant.

## 3.1 Approche empirique

### 3.1.1 La méthode des retards

Les expériences, aussi bien au laboratoire que sur ordinateur, permettent de rassembler de nombreuses données sur les systèmes étudiés. Ces données se présentent essentiellement sous forme de *série chronologique* d'une observable, c'est à dire d'une fonction $W = \mathcal{W}(\mathbf{X})$ des états $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ du système dans son espace des phases $\mathbb{X}$ de dimension $d$. La série est supposée régulièrement échantillonnée en temps soit $\{W_k, k = 0, 1, \ldots\}$, avec $W_k = \mathcal{W}\big(\mathbf{X}(t_k)\big)$, $t_k = k\tau$, $\tau$ étant l'inverse de la fréquence d'acquisition.

L'étude empirique du système physique étudié, *a priori* considéré comme un système dynamique de la forme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})$, pose des problèmes liés au fait que sa structure mathématique même —donc en particulier la dimension $d$ et la nature de la variété sur laquelle il évolue— n'est pas connue *a priori*, ni d'ailleurs l'expression de la relation qui définit l'observable $\mathcal{W}$.

Les techniques issues de la théorie des systèmes dynamiques pour traiter ce type de signal et obtenir des informations sur le système dérivent toutes de la méthode dite *des retards* [18,19]. De la suite d'observations $\{W_k\}$, on tire une représentation des états du système dans un pseudo-espace des phases $\mathbb{Y}$ dont les points $\mathbf{Y}_k$ correspondant à une trajectoire du système ont pour coordonnées des sous-suites[1]

$$\mathbf{Y}_k \mapsto [W_k; W_{k+\kappa_1}; ...; W_{k+\kappa_{d_\mathrm{e}-1}}] \tag{3.1.1}$$

de $d_\mathrm{e}$ mesures (*i.e.* $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{R}^{d_\mathrm{e}}$) prise dans une fenêtre de durée $\kappa_{d_\mathrm{e}}\tau$ glissant sur la suite d'observations. Les intervalles $\kappa_1$,..., $\kappa_{d_\mathrm{e}-1}$, sont la plupart du temps multiples du premier intervalle $\kappa_1$, *i.e.* $\kappa_2 = 2\kappa_1$,..., $\kappa_{d_\mathrm{e}-1} = (d_\mathrm{e} - 1)\kappa_1$, et $\kappa_1$ souvent pris égal à 1, de sorte que (3.1.1) s'écrit plus simplement

$$\mathbf{Y}_k \mapsto [W_k; W_{k+1}; ...; W_{k+d_\mathrm{e}-1}] \tag{3.1.2}$$

Le problème de la détermination optimale des $\kappa_n$ et de $d_\mathrm{e}$, appelée *dimension de plongement*, est examiné dans la section suivante.

En fait, nous n'avons pas accès aux variables primitives du système mais à des mesures faites sur lui. On ne peut donc pas accéder directement aux points de son espace des phases mais aux points d'un espace $\mathbb{Y}$ définis en toute généralité par (3.1.1) dont on aimerait qu'ils puissent déterminer univoquement les états $\mathbf{X}$ du système, et que de plus l'évolution décrite dans ce nouvel espace soit "équivalente" à celle décrite par le système dans son propre espace des phases $\mathbb{X}$. Ceci nous est suggéré par des théorèmes mathématiques.

[1] On représente traditionnellement un vecteur par une colonne de composantes, un tableau $d \times 1$, soit avec les conventions MatLab qui, dans les tableaux, séparent les éléments d'une ligne par des virgules et notent le passage à la ligne par un point-virgule: $\mathbf{V} \mapsto [V_1; V_2; ...]$. Une représentation en ligne (tableau $1 \times d$) est donc considérée en termes de tableaux comme la transposée de la représentation en colonnes $[V_1, V_2, ...] \equiv [V_1; V_2; ...]^\mathrm{t}$. Cette convention permet d'exprimer la définition du produit scalaire canonique en utilisant la règle usuelle des produits de matrices. Avec $\mathbf{V} \mapsto [V_1; ...]$, et $\mathbf{W} \mapsto [W_1; ...]$, on obtient en effet $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = [V_1; ...]^\mathrm{t}[W_1; ...] = \sum V_k W_k$. Le produit tensoriel de deux vecteurs $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$, est quant à lui représenté par un tableau $d \times d$ d'éléments $V_i W_j$ que l'on va pourvoir écrire $[V_1; ...][W_1; ...]^\mathrm{t}$.

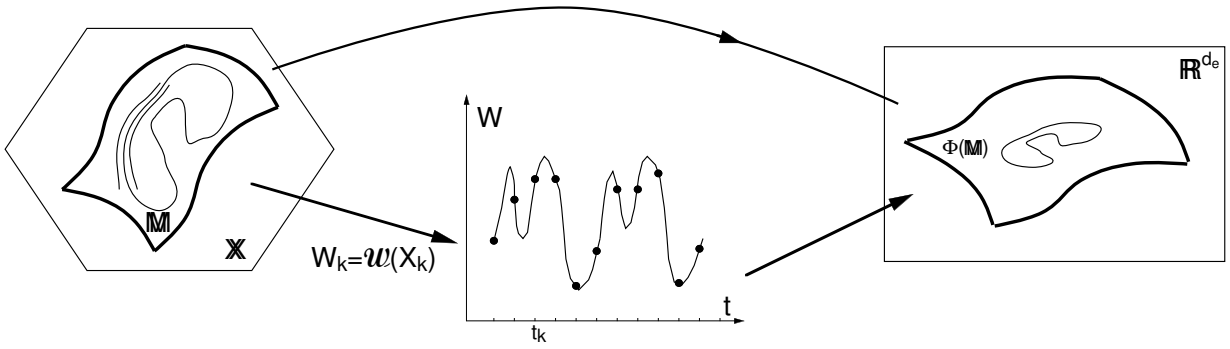



*Figure 3.1 : illustration du théorème de Takens.*

Ainsi, le théorème de Whitney nous assure que l'on peut plonger une variété différentiable $\mathbb{M}$ compacte de dimension $m$ dans un espace euclidien $\mathbb{R}^{2m+1}$ de dimension $2m+1$,[2] tandis que le théorème de Takens [16, (b)] nous dit que les $\mathbf{Y}_k$ définis par (3.1.1) où $\mathcal{W}$ est une fonction différentiable réalisent un plongement procurant une reconstruction fiable de la dynamique pourvu que le nombre $d_\mathrm{e}$ de données à prendre en considération soit suffisant, *i.e.* une *dimension de plongement* $d_\mathrm{e} \geq 2d+1$ (cf. figure 3.1).

De cette représentation de dimension $d_\mathrm{e}$, on doit ensuite pouvoir tirer des renseignements sur le système lui-même, et notamment caractériser son degré de chaos à l'aide de quantités telles que ses exposants de Lyapunov ou la dimension fractale de son attracteur.

Ce point de vue mathématique apparemment solide doit cependant être tempéré et céder la place à un point de vue empirique beaucoup moins assuré. D'une part, il n'est pas clair que les systèmes physiques qui nous intéressent satisfassent les conditions théoriques à remplir pour appliquer les théorèmes: du fait de la dissipation, la dynamique ne se développe que sur une partie compacte (de dimension effective basse et souvent fractale) de l'espace des phases du système (originellement de dimension infinie pour les milieux continus gouvernés par des équations aux dérivées partielles). D'autre part, ces systèmes sont toujours affectés par du "bruit," ce qui limite la précision des observations et gêne la reconstruction. En effet, si les délais invoqués plus haut sont *a priori* arbitraires, en tout cas rien dans l'énoncé précis du théorème ne vient les limiter, il doit être clair qu'une détermination sans ambiguïté de l'origine intrinsèque (chaos déterministe) ou extrinsèque (bruit) de l'éventuelle stochasticité observée va dépendre de la valeur des délais introduits. Des stratégies ont été développées pour déterminer de façon optimale les délais $\kappa$ et la dimension de plongement $d_\mathrm{e}$. C'est ce que nous allons discuter sommairement dans les deux sections suivantes, des informations plus détaillées pouvant être trouvées dans les références [18,19] et dans les chapitres appropriés de la majorité des livres consacrés à la dynamique non linéaire.

### 3.1.2 Fréquence d'acquisition et dimension de plongement

Il faut naturellement supposer qu'au départ l'observable est échantillonnée à une fréquence suffisamment élevée pour que l'information recueillie sur le système soit assez complète.

Pour déterminer l'intervalle $\kappa$ on peut tout d'abord faire appel à des techniques classiques en traitement du signal (matrice de covariance du signal $W_k$ et du signal décalé de $\kappa$, $W_{k+\kappa}$). Nous mentionnerons ici un critère d'essence moins linéaire portant sur l'information mutuelle contenue dans le signal. Partant de l'histogramme $\mathcal{P}(W)$ des valeurs de $W_k = W$ puis de celui, $\mathcal{P}_\kappa(W', W'')$, des couples $(W_k = W'; W_{k+\kappa} = W'')$, avec $\kappa = 1, 2, \ldots$. on définit l'information mutuelle par

$$I_\mathrm{mut}(\kappa) = \sum\nolimits_{W',W''} \mathcal{P}_\kappa(W', W'') \ln\left(\frac{\mathcal{P}_\kappa(W', W'')}{\mathcal{P}(W')\mathcal{P}(W'')}\right).$$

[2] À titre d'illustration, supposons qu'une courbe gauche (dimension 1) se présente en projection sur un plan (dimension 2) sous l'aspect d'un chiffre huit, pour résoudre sa structure, *i.e.* s'assurer qu'elle ne présente pas point double, il faut pouvoir changer d'angle de vue et donc se placer dans un espace de dimension au moins $2 \times 1 + 1 = 3$.

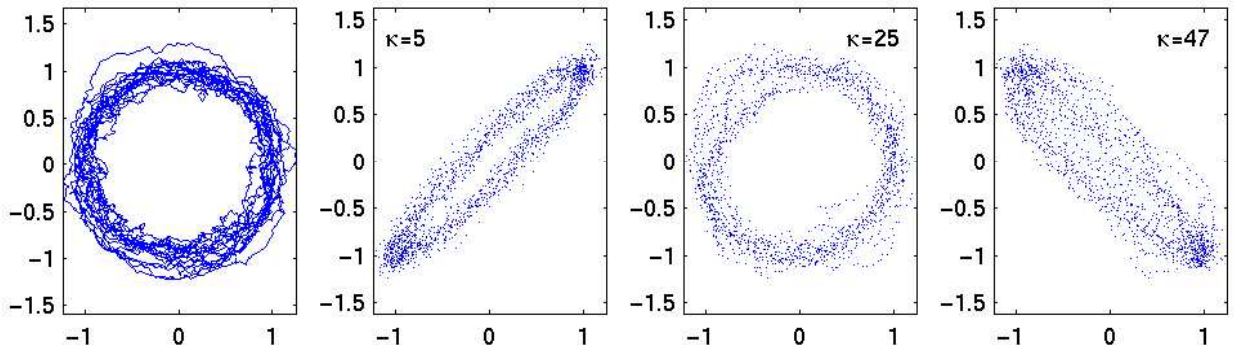



*Figure 3.2 : Panneau le plus à gauche: simulation de* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z = (1+i)Z - (1-i)|Z|^2Z + \zeta(t)$ *produisant un cycle limite bruité de période* $\pi$ *(schéma de Runge–Kutta du 2nd ordre, pas de temps* $\delta t = 0.01$*, bruit gaussien* $\zeta(t)$ *d'amplitude* $0.02$*, voir par exemple Press et al., "Numerical Recipes," Cambridge, 1986). Panneaux suivants: reconstruction de l'observable* $X(t) = \mathcal{R}e(Z(t))$ *avec un intervalle d'échantillonnage* $\tau = 0.03$ *et* $\kappa = 5$*,* $25$ *et* $47$*. On observe bien un optimum de reconstruction pour* $\kappa = 25$*, soit* $\Delta t = 0.75 \simeq \pi/4$*.*

Cette quantité mesure la redondance du signal, elle est élevée quand $\kappa$ est petit car les points de l'espace des phases sont très corrélés et connaître $W_k$ et $W_k + \kappa$ simultanément n'informe pas mieux que l'un ou l'autre séparément.[3] Au contraire, quand $\kappa \gg 1$, les points se décorrèlent, $\mathcal{P}_\kappa(W_k, W_{k+\kappa})$ se rapproche de $\mathcal{P}(W_k)\mathcal{P}(W_{k+\kappa})$, de sorte que l'information mutuelle tend vers zéro. L'information gagnée en considérant simultanément $W_k$ et $W_k + \kappa$ est alors la même que lors d'un tirage au hasard selon la loi de probabilité de $W_k$. Cependant si l'observable n'a pas été sous-échantillonnée, l'information mutuelle ne décroît pas de façon monotone mais présente un minimum pour une valeur intermédiaire[4] de $\kappa = \kappa_{\mathrm{opt}}$. C'est à ce minimum relatif, minimum de redondance, que la prise en considération simultanée de $W_k$ et $W_{k+\kappa_{\mathrm{opt}}}$ semble le mieux renseigner sur l'évolution du système (figure 3.2). Si l'information mutuelle décroît de façon monotone, il est à craindre que le bruit soit trop fort ou/et que l'observable ait été sous-échantillonnée au départ de sorte que des degrés de liberté effectifs en trop grand nombre et trop rapides mais significatifs n'aient pas été correctement pris en compte dans les mesures. Toute les méthodes que l'on peut mettre en œuvre ensuite sont alors vouées à l'échec. Pour une discussion plus poussée voir, *e.g.* [18].

Le paramètre $\kappa$ ayant été déterminé de façon supposée optimale, on rééchantillonne alors la série chronologique de $\kappa$ en $\kappa$ de façon à éliminer l'information redondante contenue dans les valeurs intermédiaires, trop fortement corrélées aux valeurs retenues.[5] Renumérotant l'enregistrement ainsi filtré nous supposerons $\kappa = 1$ et nous utiliserons directement la reconstruction (3.1.2). Il reste à déterminer la dimension de plongement $d_{\mathrm{e}}$ la plus appropriée. Une stratégie efficace pour la choisir, appelée *méthode des faux voisins*, est de considérer la reconstruction de la dynamique avec une dimension d'essai $\tilde{d}$, *i.e.* $[W_k; W_{k+1}; \ldots; W_{k+\tilde{d}-1}]$ et la reconstruction de dimension $(\tilde{d}+1)$ obtenue en ajoutant une composante $W_{k+\tilde{d}}$, puis de déterminer le nombre de faux voisins, c'est à dire le nombre de paires de points qui sont voisins en dimension $\tilde{d}$ mais qui ne le sont plus en dimension $\tilde{d}+1$, et d'augmenter $\tilde{d}$ jusqu'à ce que la fraction de faux voisins devienne négligeable. On aura alors convenablement "déplié" l'attracteur.

[3] Quand $\kappa = 0$, $W'' = W'$ de sorte que $\mathcal{P}_{\kappa=0}(W', W'') = \mathcal{P}(W')$. La quantité $I_{\mathrm{mut}}(0)$ n'est donc rien d'autre que l'information statistique $I = -\sum_W \mathcal{P}(W)\ln(\mathcal{P}(W))$ qui sert à la définition de la dimension d'information.

[4] Elle peut en présenter plusieurs mais seul le premier nous intéresse, les suivants étant handicapés par l'accumulation des effets du bruit.

[5] Pour être fiables, les calculs de dimension fractale par exemple supposent que le nombre de données satisfasse l'inégalité $d_{\mathrm{f}} \leq 2\log_{10}(n_{\mathrm{t}})$ où $n_{\mathrm{t}}$ est le nombre de données (Ruelle, 1990). Dans cette estimation, il est naturellement plus lucide de faire figurer le nombre qui résulte du rééchantillonnage que de faire état du nombre initial !

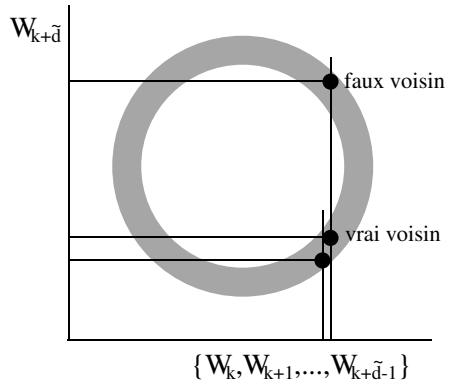



*Figure 3.3 : Comparaison de la reconstruction dans un espace de dimension $\tilde{d}$ de coordonnées $\mathbf{Y}_k = [W_k, \ldots, W_{k+\tilde{d}-1}]^{\mathrm{t}}$, figuré ici par l'axe horizontal, et une reconstruction dans l'espace de dimension $\tilde{d}+1$ obtenue en ajoutant la coordonnée $W_{k+\tilde{d}}$.*

## 3.2 Synchronisation de systèmes dynamiques

### 3.2.1 Systèmes forcés: cas général

L'idée de contrôle s'exprime tout d'abord (et plutôt brutalement!) à travers celle de forçage. Avant toute chose, on peut déjà dire que la réussite de l'opération va s'apprécier à l'aune de la stabilité globale de la réponse, avant même de savoir ce qu'est précisément cette réponse. En effet, le contrôle est clairement en échec si le même forçage ne conduit pas à une réponse unique résistant aux petites perturbations. Supposant le temps continu et écrivant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t)\,, \tag{3.2.3}$$

on étend facilement l'approche utilisée pour un forçage régulier (indépendant du temps ou périodique) en déterminant l'équation gouvernant la distance entre deux trajectoires voisines par linéarisation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\delta}\mathbf{X} = \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(0)}\boldsymbol{\delta}\mathbf{X} \tag{3.2.4}$$

où $\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(0)}$ est mis pour $\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}(t), t)$, matrice jacobienne de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ calculée le long de la trajectoire de référence $\mathbf{X}^{(0)}(t)$ solution de (3.2.3) fonction de la condition initiale $\mathbf{X}^{(0)}(0) = \mathbf{X}_0$.

Dans les cas examinés auparavant, on avait affaire à des problèmes à coefficients soit constants (stabilité d'un point fixe) soit périodiques (analyse de Floquet de la stabilité d'un cycle limite). Ici, la matrice jacobienne $\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(0)}$ peut avoir une dépendance temporelle arbitraire. Le problème est exactement le même que pour la recherche des exposants de Lyapunov d'un système autonome. La réponse est donc linéairement stable si le plus grand exposant de Lyapunov tiré de (3.2.4) est strictement négatif. Cette approche, reposant sur une linéarisation, est locale; le problème de la stabilité globale de la solution trouvée et donc aussi celui de l'étendue de son bassin d'attraction sont autrement plus formidables.

### 3.2.2 Systèmes couplés

Dans ce qui suit, nous nous limitons au cas où le forçage résulte du couplage du système considéré avec un système autonome extérieur. Nous adoptons donc maintenant le point de vue suggéré dans la remarque à la fin de §1.1.2, qui consiste à exprimer l'évolution du système considéré $\mathbf{X}$ comme "réponse" à une "excitation" externe $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ gouvernée par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(\mathrm{e})} = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{e})}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,. \tag{3.2.5}$$

Le système $\mathbf{X}$ forcé par $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ s'écrit alors formellement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,. \tag{3.2.6}$$

Dans cette expression, $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ est mis pour une réalisation particulière $\mathbf{X}_0^{(\mathrm{e})}(t)$ du forçage. Cette approche dérive directement de l'idée que contrôler le système $\mathbf{X}$ revient à essayer de lui dicter un comportement déduit de celui d'un autre système, ici noté $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$, supposé autonome mais dont la "phase" fixée par ailleurs, *i.e.* dépend de l'état qui initialise son évolution. Nous mettons le mot "phase" entre guillemets car ceci n'a un sens bien clair qui pour un forçage périodique (une phase) et à la rigueur multi-périodique (un nombre fini de phases). Dans le cas d'un forçage chaotique, lorsque le système en $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ a rejoint son attracteur, *i.e.* pour une trajectoire particulière issue d'une condition initiale $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}(t_0)$ supposée prise en $t_0 \to -\infty$, sa sensibilité aux conditions initiales et aux petites perturbations interdit que l'on puisse donner une valeur reproductible à la phase: deux expériences distinctes mais préparées de la même façon ne peuvent être réalisées avec le même forçage considéré comme fonction explicite du temps.

Il n'y a rien de changé quant à la notion de stabilité introduite plus haut. On doit étudier

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\delta}\mathbf{X} = \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}\,,$$

où n'interviennent que les dérivations par rapport aux composantes de $\mathbf{X}$ dans l'expression de la matrice jacobienne $\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$ calculée le long des trajectoires de référence en $\mathbf{X}_{\mathrm{ref}}$ et en $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{ref}}$. Ceci permet de déterminer tout un spectre d'*exposants de Lyapunov conditionnels*. Le qualificatif "conditionnel" est ajouté pour bien montrer qu'à ce stade on ne s'intéresse pas au système autonome complet $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}\}$ mais seulement au sous-système forcé, et donc pas à la sensibilité des trajectoires relativement aux conditions initiales en $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ et aux perturbations de la trajectoire correspondante gouvernée par (3.2.5). La stabilité locale de la réponse (en $\mathbf{X}$) au forçage suppose que le plus grand exposant de Lyapunov conditionnel soit négatif.

Ceci conduit immédiatement à considérer le cas deux systèmes identiques d'états $\mathbf{X}^{(1)}$ et $\mathbf{X}^{(2)}$ couplés à un même système forçant d'état $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(\mathrm{e})} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{e})}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,,\\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(1)} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,,\\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(2)} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,.
\end{aligned}$$

L'introduction du second système, jumeau du premier, contourne la difficulté mentionnée plus haut de réaliser deux expériences séparées mais identiques du point de vue de $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ en cas de forçage chaotique. Par définition, le plus grand exposant de Lyapunov (conditionnel) détermine l'évolution de la distance entre les deux trajectoires initialement voisines $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{X}$. Transposé au cas présent, cet exposant rend donc compte du taux de croissance de la distance (supposée infinitésimale) $\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}\|$ entre les trajectoires des deux sous-systèmes. Lorsqu'il est positif, ceux-ci s'écartent exponentiellement. Lorsqu'il est négatif, la distance tend vers zéro quand $t$ tend vers l'infini, de sorte que les deux systèmes évoluent de façon synchrone sous l'effet du couplage (sans que l'on dise quoi que ce soit de l'évolution comparée du système maître et de ses esclaves).

La démonstration ne vaut *a priori* que si les conditions initiales des deux sous-systèmes sont assez voisines (stabilité locale). Si l'attracteur du système forcé est unique, après extinction d'un transitoire, ceux-ci peuvent effectivement évoluer de façon synchrone. Si le système forcé admet plusieurs attracteurs, cette synchronisation ne peut, au mieux, se produire que pour des conditions initiales appartenant au même bassin d'attraction. De toute façon, pour prouver de telles assertions à caractère global il faudrait être techniquement capable de généraliser l'approche en termes de fonctions de Lyapunov au cas non linéaire, non autonome.

### 3.2.3 Synchronisation de systèmes identiques

En pratique, nous sommes plus particulièrement intéressés, non pas par le cas de deux sous-systèmes qui feraient la même chose (incontrôlée) sous l'influence d'un forçage particulier mais plutôt par celui d'un système dont le comportement serait dicté par un système de structure compatible avec une *synchronisation*

*à l'identique*: $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}(t)$ à tout instant. Une première façon d'assurer cette compatibilité consiste à coupler deux systèmes de même structure et d'en identifier un, d'état $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ comme système de commande,

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(\mathrm{e})} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,, \tag{3.2.7}$$

l'autre, d'état $\mathbf{X}$, étant gouverné

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,, \tag{3.2.8}$$

avec un couplage $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$ garantissant la possibilité de synchronisation à l'identique, soit $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \equiv 0$, *e.g.* un feed-back $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}) = K(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})} - \mathbf{X})$.

Une seconde stratégie consiste à toujours partir de deux systèmes de structure initialement identiques, soit (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(\mathrm{e})} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$ et (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})$. Elle repose sur la substitution dans le système esclave (2) de certaines variables correspondantes du système maître (1). La substitution peut être partielle ou totale: $X_i(t) \mapsto X_i^{(\mathrm{e})}(t)$ pour un $i$ particulier à certains endroits du système (2) ou lors de toutes les apparitions de cette variable. Pour l'instant, nous écrirons formellement

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{mod}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}) \tag{3.2.9}$$

sans plus préciser le lien exact entre $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{mod}}$ car la variété des possibilités est grande (nous y reviendrons). Ce type de *liaison* qui réalise un couplage de nature différente de celui obtenu par (3.2.8) autorise aussi, par construction, la synchronisation à l'identique puisqu'on est encore ramené à l'intégration en parallèle de deux systèmes identiques partant d'une même condition initiale.

Dans la suite nous garderons (3.2.7,3.2.9) comme expression formelle du problème considéré, observant que l'on peut écrire (3.2.6) sous la forme (3.2.8) avec le choix particulier $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{mod}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$, avec $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}) \equiv 0$ par construction puisque $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{mod}}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$.

**Synchronisation forte/faible.** Procédant au calcul du plus grand exposant de Lyapunov conditionnel (donc du système en $\mathbf{X}$ forcé) on doit donc étudier le comportement de l'équation aux variations

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\delta}\mathbf{X} = \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{mod}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}\,. \tag{3.2.10}$$

Il reste à préciser la trajectoire en $\mathbf{X}$ que l'on considère. Si l'on s'intéresse à la synchronisation à l'identique, possible par construction du modèle (3.2.7,3.2.9), la matrice jacobienne $\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{mod}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$ fait intervenir une trajectoire de référence en $\mathbf{X}_{\mathrm{ref}}(t) \equiv \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{ref}}(t)$ par hypothèse. Si le plus grand exposant de Lyapunov du système modifié relatif à cette trajectoire de référence est négatif (le plus grand exposant de Lyapunov relatif à cette même trajectoire mais pour le système extérieur $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{e})}$ est quant à lui positif si elle est chaotique), la synchronisation à l'identique est (localement) stable. C'est un régime observable possible. Si au contraire il est positif, les perturbations à la trajectoire correspondante sont amplifiées et le système couplé adopte un autre régime où $\mathbf{X}$ n'est plus synchronisé avec $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$.

Comme lors de l'étude générale des systèmes couplés où $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{e})}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$ n'entretenait aucun lien particulier avec $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$, il se peut que le plus grand exposant du système soit négatif pour des trajectoires de référence en $\mathbf{X}$ autres que $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$. Ce caractère négatif exprime simplement le fait que deux trajectoires $\mathbf{X}(t)$ et $\mathbf{X}'(t)$ soumises au même forçage $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}(t)$, initialement suffisamment voisines, convergent asymptotiquement l'une vers l'autre mais cela n'implique pas que ces trajectoires convergent vers le forçage imposé. Reproduisant le raisonnement fait alors on en déduit que les deux systèmes

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(1)} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{mod}}(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,, \tag{3.2.11}$$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(2)} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{mod}}(\mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(\mathrm{e})})\,. \tag{3.2.12}$$

admettent une solution synchrone localement stable mais que cette solution évolue différemment du forçage. Pour distinguer les deux types de synchronisation, on appelle *synchronisation forte* la synchronisation entre un maître et son esclave et *synchronisation faible* ou *généralisée* la synchronisation de deux esclaves d'un même maître, sans que ceux-ci évoluent à l'image de ce dernier.

**Variété de synchronisation.** Considérons la synchronisation forte de deux systèmes identiques couplés et notons $d$ leur dimension La dimension du système complet est $2d$ et la condition de synchronisation s'écrit $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$, soit $d$ relations. L'ensemble limite correspondant, stable ou instable, s'inscrit donc sur une sous-variété d'une variété de synchronisation de dimension $d$ de l'espace des phases.

Examinons par exemple le cas du forçage par remplacement total d'une variable $X_1$ du système forçant noté '(e)' dans l'autre, et appelons $\mathbf{X}_\perp$ l'ensemble des autres variables. La dynamique du système forçant est alors naturellement gouvernée par

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_1^{(\mathrm{e})} = \mathcal{F}_1(X_1^{(\mathrm{e})}, \mathbf{X}_\perp^{(\mathrm{e})}), \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_\perp^{(\mathrm{e})} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_\perp(X_1^{(\mathrm{e})}, \mathbf{X}_\perp^{(\mathrm{e})}),$$

et cette du système forcé ($X_1(t) \equiv X_1^{(\mathrm{e})}(t)$)

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_\perp = \boldsymbol{\mathcal{F}}_\perp(X_1^{(\mathrm{e})}, \mathbf{X}_\perp),$$

La dynamique du système dont les variables sont $X_1^{(\mathrm{e})}$, $\mathbf{X}_\perp^{(\mathrm{e})}$ et $\mathbf{X}_\perp$ se déploie dans un espace de dimension $2d-1$, sous-variété de l'espace des phases originel de dimension $2d$. La synchronisation quand elle a lieu se traduit par $\mathbf{X}_\perp(t) = \mathbf{X}_\perp^{(\mathrm{e})}(t)$ soit $d-1$ conditions, ce qui définit une sous-variété de dimension $2d-1-(d-1) = d$. La stabilité de la solution synchronisée correspond à la stabilité de la variété de synchronisation vis à vis de perturbations transverses (dans $d-1$ directions).

La substitution de variable peut également n'être que partielle, $X_1^{(\mathrm{e})}$ ne remplaçant pas $X_1$ partout où cette dernière variable apparaît dans le système forcé. Dans ce cas, $X_1$ reste une variable du problème et la dimension du système couplé $2d$. La synchronisation à l'identique est bien évidemment toujours possible. Elle se traduit par $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ soit $d$ relations. La dimension de la variété de synchronisation est toujours $d$ mais l'espace transverse est maintenant lui aussi de dimension $d$.

Revenons au cas général de deux sous-systèmes identiques et considérons le problème de leur synchronisation faible. On peut dire qu'après élimination des transitoires la réponse en $\mathbf{X}$ au temps $t$ est conditionnée par l'état de $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ au même instant, de sorte que l'on peut formellement écrire $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}^{(\mathrm{e})})$, ce qui définit une variété de synchronisation non triviale (dont on ne sait pas déterminer l'expression analytique).

Comme dans le cas des systèmes couplés généraux, la synchronisation faible est plus apparente si l'on considère un système constitué de trois éléments: un maître et deux esclaves identiques. En plus d'un régime complètement désynchronisé, on peut donc observer les deux régimes possibles de synchronisation. Prenons en effet le système (3.2.5,3.2.11,3.2.12). Sa dimension est $3d$. Le spectre de Lyapunov conditionnel est dégénéré 2 fois: par raison de symétrie on a en effet un spectre par sous-système esclave. Si le plus grand exposant de Lyapunov correspondant à la trajectoire de référence du système en $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$, soit $\mathbf{X}^{(1)}(t) = \mathbf{X}^{(2)}(t) \equiv \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$ (possible par construction), est négatif, la solution complètement synchronisée est localement stable. La variété de synchronisation correspondante, triviale, définie par $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(\mathrm{e})} = \mathbf{X}^{(2)}$, donc de dimension $3d - 2d = d$, est attractive (la dimension de l'attracteur du système est égale à la dimension de celui du système maître en $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$). Dans le cas contraire (exp. de Lyapunov positif) elle est instable mais il peut se faire que l'exposant conditionnel maximal d'une autre trajectoire $\mathbf{X}^{(1)}(t)$ sous l'influence du même forçage $\mathbf{X}^{(\mathrm{e})}(t)$ soit négatif. La solution où les deux esclaves sont synchronisés $\mathbf{X}^{(1)}(t) = \mathbf{X}^{(2)}(t) \not\equiv \mathbf{X}^{(\mathrm{e})}$, est alors localement stable. La dynamique se développe sur une variété de synchronisation de dimension $2d$. On peut envisager d'utiliser l'existence d'une relation fixe mais non triviale du type précédent entre maître et esclave pour crypter/décrypter des messages.

Ce qui vient d'être décrit vaut aussi bien pour le système à temps continu que nous avons utilisé pour introduire le problème que pour un système à temps discret. Illustrons le phénomène à l'aide d'applications logistiques couplées. Nous partons donc de:

$$\begin{aligned} X_{n+1}^{\mathrm{e}} &= \mathcal{G}(X_n^{\mathrm{e}}), \\ X_{n+1}^{(1)} &= (1-k)\mathcal{G}(X_n^{(1)}) + k\mathcal{G}(X_n^{\mathrm{e}}), \\ X_{n+1}^{(2)} &= (1-k)\mathcal{G}(X_n^{(2)}) + k\mathcal{G}(X_n^{\mathrm{e}}), \end{aligned}$$

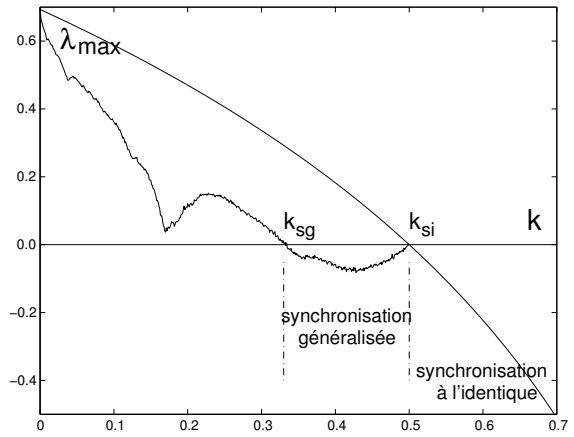



*Figure 3.4 : Exposant de Lyapunov conditionnel pour les itérations logistiques couplées de façon unidirectionnelle.*

avec

$$\mathcal{G}(X) = 4X(1-X)\,,$$

la constante de couplage vérifiant $0 \leq k \leq 1$.

L'exposant de Lyapunov de l'itération logistique calculé selon la formule (2.3.13) vaut ln(2). Il est facile de calculer de la même façon l'exposant de Lyapunov conditionnel du système (j), $j = 1, 2$, pour la trajectoire synchronisée à l'identique. On trouve immédiatement que chaque dérivée est multipliée par $(1-k)$ et donc pour l'exposant de Lyapunov: $\lambda_{\rm si} = \ln(2) + \ln(1-k)$ (l'indice 'si' signifiant 'synchronisation à l'identique'). Ce dernier s'annule donc pour $k = k_{\rm si} = 1/2$. Pour $k > 1/2$ il est négatif et la solution synchronisée est stable. Pour $k < 1/2$ elle est instable. Pour d'autres trajectoires il faut faire le calcul en simulant l'évolution à partir d'une condition initiale arbitraire. La figure 3.4 présente le résultat. On y observe que l'exposant conditionnel est positif pour $k < k_{\rm sg} \simeq 0.33$ (indice 'sg' pour synchronisation généralisée) et négatif au delà.

La figure 3.5 présente $\mathbf{X}^{(1)}$ fonction de $\mathbf{X}^{(e)}$ (haut) et $\mathbf{X}^{(2)}$ fonction de $\mathbf{X}^{(1)}$ (bas) pour différentes valeurs de $k$ après élimination d'un long transitoire. Pour $k = 0.10$, notablement inférieur à $k_{\rm sg}$, les deux esclaves évoluent séparément de façon chaotique. La tendance à la synchronisation généralisée s'observe pour $k = 0.31$ (fuseau de points autour de la diagonale $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(2)}$. Le cas $k = 0.42$ correspond au maximum de stabilité

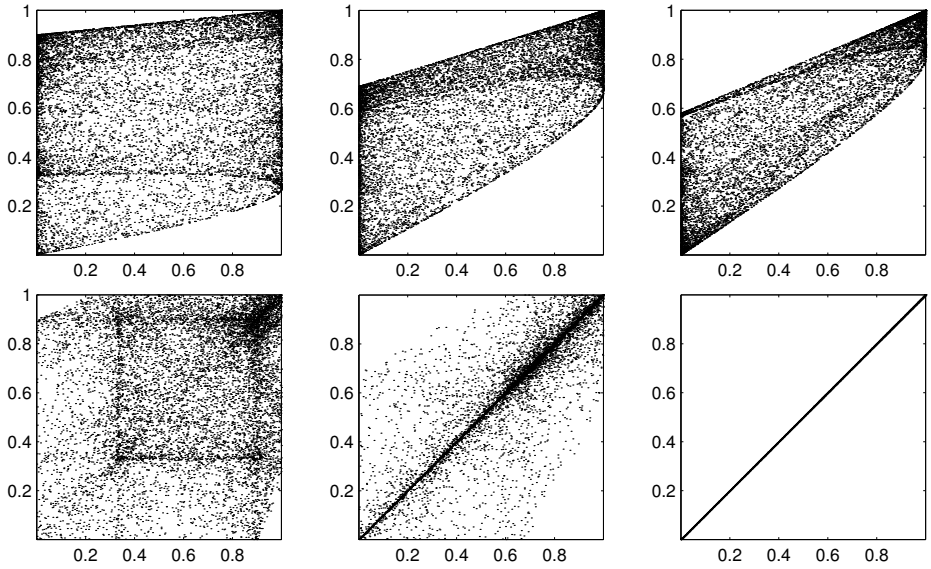


*Figure 3.5 : Trajectoires dans l'espace des phases du système d'équations logistiques couplées de façon unidirectionnelle. De gauche à droite: $k = 0.10$, 0.31, 0.42; en haut: $X_k^{(1)}$ fonction de $X_k^{(e)}$; en bas: $X_k^{(2)}$ fonction de $X_k^{(1)}$.*

de la synchronisation généralisée. On observera que la projection de l'attracteur dans le plan $(\mathbf{X}^{(e)}, \mathbf{X}^{(1)})$ change très continûment avec l'intensité du couplage et ne manifeste rien de particulier à l'apparition de la synchronisation généralisée. La synchronisation forte $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(e)}$ obtenue pour $k > 1/2$ n'a pas été représentée. Le caractère global des synchronisations observées est un fait d'expérience qui n'est pas démontrable par l'approche locale suivie jusqu'à présent. L'unicité de l'attracteur du système maître-esclave en est une condition nécessaire.

**Remarque : couplage bidirectionnel de sous-systèmes identiques.** Il est conceptuellement facile de passer du couplage unidirectionnel (sans "retour d'état," *one-way*) au couplage mutuel (*two-way*). Le système global est alors composé de deux (ou plusieurs) sous-systèmes en quelque sorte remis sur un pied d'égalité, même si le couplage n'est pas symétrique ou si les sous-systèmes ne sont pas strictement identiques. On s'écarte alors encore plus du domaine strict du contrôle pour retourner à celui des systèmes dynamiques en général. Pour une assemblée de $N$ sous-systèmes éventuellement différents,[6] la dimension totale est $d = \sum_{j=1}^{N} d_j$, où $d_j$ est la dimension du sous-système $(j)$. Si les sous-systèmes sont identiques, on garde la notion de variété de synchronisation à l'identique pourvu que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(j)} = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{(j)}(\mathbf{X}^{(j)}, \{\mathbf{X}^{(j')}\}), \qquad j, j' = 1, \ldots N,$$

admette la solution particulière $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(j)}$, $j = 2, \ldots N$, ce qui est trivialement réalisé si

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(j)}(\mathbf{X}, \{\mathbf{Y} = \mathbf{X}\}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}).$$

Un exemple simple est fourni par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(j)} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(j)}) + C\sum_{j \neq j}(\mathbf{X}^{(j')} - \mathbf{X}^{(j)}),$$

où $C$ est une constante de couplage, ce qui définit un système globalement couplé. Pour des sous-systèmes disposés en anneau couplés "par diffusion" on aurait de même:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(j)} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(j)}) + C(\mathbf{X}^{(j+1)} - 2\mathbf{X}^{(j)} + \mathbf{X}^{(j-1)}), j = 1, \ldots N,$$

$j \pm 1$ étant pris modulo $N$. En cas de *synchronisation à l'identique*, la dynamique asymptotique se développe alors sur une variété définie par $N-1$ conditions de la forme $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(j)}$, $j = 2, \ldots N$. Si $d$ est la dimension d'un sous-système et si l'on a $N$ sous-systèmes, la dimension de l'espace des phases est $Nd$ et l'on a $(N-1)d$ relations, ce qui définit bien une variété de dimension $d$, sur laquelle la dynamique est gouvernée par $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. La stabilité de l'état synchronisé se discute relativement aux fluctuations dans l'espace transverse de dimension $(N-1)d$. Lorsqu'il est stable, l'attracteur du système complet est alors totalement inscrit sur la variété de synchronisation.

## 3.3 La méthode du feed-back retardé

L'idée de stabiliser une période en forçant le système par un signal d'écart décalé dans le temps de la période cherchée est, dans sa philosophie, assez différente de ce qui a été considéré jusqu'à présent. C'est la raison pour laquelle nous commencerons par énoncer quelques généralités sur les systèmes à retard, §3.3.1. Celles-ci seront utiles pour mieux comprendre la théorie sous-jacente à la méthode, §3.3.2, même si, et c'est là son principal attrait pour les applications, on peut la faire fonctionner sans modèle *a priori* des phénomènes que l'on cherche à contrôler.

[6] Ici, $N$ est supposé petit, voire très petit, *e.g.* seulement 2. Le cas $N$ grand est du ressort de la physique statistique et ne sera pas abordé dans ce qui suit.

### 3.3.1 Systèmes à retard

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des systèmes dont l'évolution dépend exclusivement de l'instant présent. Introduisant des interactions retardées, nous supposons que la vitesse $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}$ dépend de $\mathbf{X}$ évalué au temps $t$ ainsi qu'à un instant antérieur $t-T$:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}\big(\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t-T)\big)\,. \tag{3.3.13}$$

Le problème ainsi posé requiert pour condition initiale la donnée de $\mathbf{X}$ sur tout un intervalle $[-T, 0]$. Pour s'en convaincre il suffit d'écrire son approximation aux différences finies par un schéma d'Euler explicite du premier ordre:

$$\mathbf{X}(t_{k+1}) = \mathbf{X}(t_k) + \delta t\, \boldsymbol{\mathcal{F}}\big(\mathbf{X}(t_k), \mathbf{X}(t_{k-n})\big)\,, \tag{3.3.14}$$

où $t_k = t_0 + k\,\delta t$ et $T = n\,\delta t$: cette itération ne peut démarrer que si l'on donne une suite de $n+1$ valeurs, $\mathbf{X}(t_0)$, $\mathbf{X}(t{-}1)$,..., $\mathbf{X}(t_{-n})$. Les états $\mathbf{X}(t_0)$ et $\mathbf{X}(t_{-n})$ sont nécessaires au calcul de $\mathbf{X}(t_1)$. Le calcul de $\mathbf{X}(t_2)$ va nécessiter la connaissance de $\mathbf{X}(t_1)$ juste calculé et de $\mathbf{X}(t_{-n+1})$, etc. Le nombre de degrés de liberté étant égal au nombre de valeurs requises pour spécifier une trajectoire, on peut donc dire que le système différentiel à retard est de dimension infinie puisqu'à la limite $\delta t \to 0$, $n$ tend vers l'infini à $T$ fixé.

En fait le nombre effectif de degrés de liberté est beaucoup plus petit. Ceci résulte de la cohérence temporelle introduite par l'opérateur différentiel lui-même, similaire dans ses effets à la cohérence spatiale à l'œuvre dans les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. Par souci de simplicité nous discuterons cette propriété dans le cas scalaire où (3.3.13) est pris sous la forme:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = -X(t) + \mathcal{F}\big(X(t-T)\big)\,. \tag{3.3.15}$$

Le premier terme au membre de droite rend compte d'une relaxation linéaire de $X$ vers la valeur d'équilibre $X=0$ avec un temps de relaxation normé à l'unité. L'allure typique du terme de forçage retardé $\mathcal{F}(X)$, essentiellement non-linéaire, est présentée sur la figure 3.6.

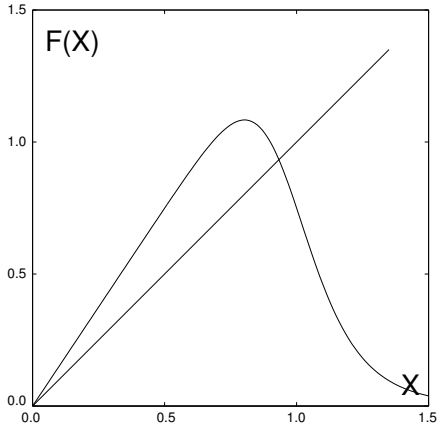



*Figure 3.6 : Allure typique du membre de droite d'un système retardé (3.3.15), par exemple le modèle de pathologie sanguine dû à Mackey et Glass: $\mathcal{F}(X) = aX/(1+X^\alpha)$, ici avec $a = 1.5$ et $\alpha = 10$.*

Examinons la stabilité des solutions stationnaires, points fixes de (3.3.15) solutions de $X_\mathrm{f} = \mathcal{F}(X_\mathrm{f})$. Insérant $X = X_\mathrm{f} + \delta X$ dans (3.3.15), au premier ordre en $\delta X$, on obtient

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta X = -\delta X + g\,\delta X(t-T) \tag{3.3.16}$$

avec $g = \partial_X \mathcal{F}(X_\mathrm{f})$.[7] On peut chercher la solution sous la forme

$$\delta X(t) = \delta X(0)\, \exp(st)$$

[7] On notera pour la suite que $X_\mathrm{f}$ et $g$ sont indépendants de $T$.

avec $s$ solution de

$$s = -1 + g\,\exp(-sT)\,. \tag{3.3.17}$$

En dépit du fait qu'il s'exprime à l'aide d'une seule variable dépendante, le problème est de dimension infinie de sorte qu'il faut supposer $s$ complexe *a priori*. Posant $s = s' + is''$, et séparant partie réelle et partie imaginaire, on récrit (3.3.17) sous la forme

$$s' = -1 + g\exp(-s'T)\cos(s''T)\,, \tag{3.3.18}$$

$$s'' = -g\exp(-s'T)\sin(s''T)\,. \tag{3.3.19}$$

Le problème qui se pose maintenant est relatif à l'existence de solutions avec $s' \geq 0$ lorsque $T$ augmente.

$\diamond$ Considérons tout d'abord le cas d'un mode *stationnaire* ($s'' = 0$). L'équation (3.3.19) est identiquement satisfaite alors que l'équation (3.3.18) se réduit à $s' = -1 + g\exp(-s'T)$. Le retard $T$ étant fixé, il facile de voir graphiquement qu'il n'existe de solution $s' \geq 0$ que si $g > 1$. Pour des fonctions de retard $\mathcal{F}$ qui ont l'allure de celle illustrée sur la figure 3.6, il est clair que le point fixe trivial $X_{\rm f} = 0$ est instable alors que le point fixe non trivial, avec $g < 0 < 1$, est stable (vis à vis d'un mode stationnaire car $s'' = 0$ par hypothèse).

$\diamond$ Examinons maintenant le cas d'un mode *oscillant* ($s'' \neq 0$). Un raisonnement analogue au précédent montre que, pour des racines complexes, (3.3.18) implique $|s' + 1| < |g|\exp(-s'T)$, de sorte qu'il ne peut y avoir de racines avec $s' > 0$ si $|g| < 1$. Au contraire si $g < -1$ des modes instables oscillants peuvent exister. Les points de bifurcation sont donnés par $s' = 0$, soit

$$1 = g\cos(s''T) \quad \text{et} \quad s'' = -g\sin(s''T)\,,$$

dont les solutions s'écrivent:

$$s''T = \pm\arccos(1/g) + 2k\pi \qquad \text{avec} \quad s'' = \mp g\sin(\arccos(1/g))\,.$$

$g$ étant donné (cf. note 7) tel que $-1 < 1/g < 0$, la condition $T > 0$ conduit à ne retenir qu'une seule série de solutions:

$$T_k = \frac{\arccos(1/g) + 2k\pi}{|g|\sin(\arccos(1/g))}\,. \tag{3.3.20}$$

Travaillant à $T$ croissant on rencontre la première instabilité pour $k = 0$, valeur à laquelle nous nous limiterons dans ce qui suit. Il est facile de montrer que ce mode neutre est le point de départ d'une branche instable. La variation du taux de croissance de ce mode instable est plus facile à obtenir en variant $g$ à $T$ constant et suffisamment grand. En effet, les solutions en $T$ de (3.3.17) correspondant aux modes instables devraient être tels que $s'T$ reste sensiblement constant pour que le terme exponentiel ne "tue" pas le membre de droite de (3.3.18) car sinon on aurait $s' \sim -1$, ce qui contredirait l'hypothèse $s' > 0$. À des corrections d'ordre $1/T$ près, le problème pour $g' = g + \delta g$ et $s' \neq 0$ est donc le même que celui pour $g$ sauf qu'il faut remplacer $g$ par $(g + \delta g)\exp(-s'T)$. La persistance d'une solution $(g + \delta g, s' > 0, s'', T_k)$ dérivant par continuité d'un mode neutre donné conduit donc directement à la condition $g = (g + \delta g)\exp(-s'T)$, qui donne

$$s'T \simeq \log(1 + \delta g/g) \simeq \delta g/g\,,$$

*i.e.* le taux de croissance s'annule et change de signe comme $\delta g$.

Le diagramme de bifurcation, les exposants de Lyapunov et l'entropie peuvent être déterminés expérimentalement sur des modèles concrets, tels celui de la figure 3.6. Dans la limite $T$ grand, on observe une croissance linéaire du nombre d'exposants positifs, chacun variant comme $1/T$, comportement que l'on peut relier de façon heuristique aux propriétés des modes linéairement instables étudiées plus haut. En effet, de (3.3.20), $g$ étant fixé, on peut voir que le nombre de modes linéairement instables croît linéairement avec le retard $T$ mais que le taux de croissance varie comme $1/T$ quand $T$ augmente, ce qui est dû au fait que la dynamique décrite par (3.3.13) place une contrainte sévère sur la solution puisqu'elle force une relation entre la valeur de $X$ en des instants éloignés dans le temps, ce qui tempère la tendance à diverger. Transposant l'argument aux exposants de Lyapunov, on en déduit immédiatement que l'entropie reste sensiblement constante avec $T$ puisque c'est la somme de $\sim T$ exposants positifs variant tous comme $1/T$.

### 3.3.2 La méthode de Pyragas

Cette introduction relative à la stabilité d'un point fixe d'un système à retard à temps continu va maintenant être étendue au cas des orbites périodiques, non pas en toute généralité mais seulement dans le contexte particulier d'un système admettant une orbite périodique instable auquel une correction sera appliquée au moyen d'un forçage fonction d'une observable mesurée à un instant antérieur. Ceci va permettre de développer une méthode de stabilisation des orbites instables cachées au sein d'un attracteur chaotique.

Comparativement à la méthode OGY étudiée plus loin, son principal intérêt est de reposer sur la détermination d'une observable sans connaissance *a priori* sur le système considéré et ne pas nécessiter de traitement préliminaire très sophistiqué des données. Nous nous intéresserons ici plutôt aux conditions dans lesquelles cette méthode peut "marcher" (cf. contribution de W. Just, Ch. 2 de [32]).

Soit donc un système autonome décrit par

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})\,, \tag{3.3.21}$$

et une observable $\mathcal{W}(\mathbf{X})$ produisant une série chronologique

$$W(t) = \mathcal{W}\big(\mathbf{X}(t)\big) \tag{3.3.22}$$

qui va servir au contrôle. Nous supposons en outre que le système non contrôlé admet une orbite périodique instable $\mathbf{X}^{(0)}(t)$ de période $T$, *i.e.* $\mathbf{X}^{(0)}(t+T) \equiv \mathbf{X}^{(0)}(t)$, où ici, comme la suite de cette section, le "(0)" en exposant indique une propriété associée au système non corrigé.

Le signal de contrôle $f(t)$ déterminé à partir de la mesure $W(t)$ doit être nul dès que le système suit l'orbite désirée et modifier le système de départ de façon appropriée en proportion de l'écart. Traduisant le principe de la méthode décrit plus haut, on peut donc prendre simplement une correction proportionnelle à $(W(t) - W(t-T))$. Formellement, cette correction est en fait une fonctionnelle définie sur l'espace des phases, soit

$$Kf(t;T) = K[\mathcal{W}(\mathbf{X}(t)) - \mathcal{W}(\mathbf{X}(t-T))] \tag{3.3.23}$$

où l'on a explicitement mis en évidence un paramètre de gain $K$ et le fait que la correction fait intervenir la mesure de l'observable $W$ en deux instant séparés de $T$. Ce choix n'est qu'une forme particulièrement simple d'une expression plus générale

$$f(t) = \int_0^\infty \phi(t')[\mathcal{W}(\mathbf{X}(t-t')) - \mathcal{W}(\mathbf{X}(t-T-t'))]\mathrm{d}t', \tag{3.3.24}$$

où $\phi$ est un noyau intégral venant pondérer la correction sur un voisinage de l'instant courant $t$, le choix $\phi(t) = \delta(t)$ restituant l'expression antérieure. Au stade où nous nous plaçons, il est d'ailleurs loisible d'imaginer des feed-backs arbitrairement compliqués pour autant qu'ils préservent la trajectoire périodique choisie, *i.e.* $f \equiv 0$ si $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}^{(0)}(t)$ (voir plus loin).

Il resterait à dire comment ce signal agit sur le système, par exemple en modifiant l'une des composantes du champ de vecteurs. Comme le but est de développer une stratégie de contrôle aussi indépendante que possible de la modélisation concrète du système considéré, nous en resterons au niveau formel et nous écrirons le système corrigé simplement sous la forme

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}; K, T, f)\,, \tag{3.3.25}$$

où $K$ et $T$ sont là pour rappeler les deux paramètres de la modification et $f$ sa dépendance fonctionnelle. Dans la suite nous omettrons ces mentions explicites, l'indice 'm' suffisant à rappeler leur présence.

Par construction on a donc

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{(0)} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}^{(0)}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(0)})$$

puisque $\mathbf{X}^{(0)}$ est périodique de période $T$ et que la correction s'annule ($f \equiv 0$). On va s'intéresser au voisinage de cette solution et supposer de petit écarts, donc $|f|$ petit, ce qui permet de linéariser le problème.

Par hypothèse, $\mathbf{X}^{(0)}$ est solution instable du problème de départ. Le spectre du linéarisé de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ autour de $\mathbf{X}^{(0)}$ admet donc au moins un multiplicateur de Floquet $\gamma^{(0)}$ en dehors du disque unité ou, de façon équivalente, au moins un exposant de Floquet $s^{(0)} = \sigma^{(0)} + i\omega^{(0)}$ tel que $\gamma^{(0)} = \exp(s^{(0)}T)$, à partie réelle $\sigma^{(0)}$ positive (cf. §1.2.3 et plus particulièrement p. 8). Nous supposerons que la dimension effective du problème est suffisamment basse pour que la solution ne soit instable que vis à vis d'un seul mode. La question qui se pose est alors de savoir à quelle condition on peut rendre stable la solution $\mathbf{X}^{(0)}$ du problème corrigé en $(K, T, f)$.

Soit $\boldsymbol{\delta}\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^{(0)}$ une petite perturbation, il vient

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\delta}\mathbf{X} &= \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}^{(0)})\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{X} \\ &\quad + K\,\partial_f\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}^{(0)})\,[\partial_{\mathbf{X}}\mathcal{W}(\mathbf{X}^{(0)})(\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}(t) - \boldsymbol{\delta}\mathbf{X}(t-T))], \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}$ représente la matrice jacobienne de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}$ calculée le long de $\mathbf{X}^{(0)}(t)$. Ce problème se présente sous la forme d'un système différentiel linéaire à retard dont les coefficients dépendent du temps à travers $\mathbf{X}^{(0)}(t)$. Se guidant sur l'étude de la stabilité du point fixe, §3.3.1, on cherche la solution sous la forme $\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}(t) = \mathbf{U}(t)\exp(st)$, $\mathbf{U}$ périodique de période $T$, comme pour une analyse de Floquet ordinaire. On trouve:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{U} + s\mathbf{U} = \Big\{\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}^{(0)}) + K\big[1 - \exp(-sT)\big]\partial_f\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}^{(0)})\partial_{\mathbf{X}}\mathcal{W}(\mathbf{X}^{(0)})\Big\}\,\mathbf{U}\,, \tag{3.3.26}$$

Supposons calculés les exposants de Floquet du problème, soit $s(K) = \sigma(K) + i\omega(K)$. Ceux-ci seront solution d'une équation de la forme:

$$s(K) \equiv \sigma(K) + i\omega(K) = \mathcal{H}(K\big(1 - \exp(-sT)\big)) \tag{3.3.27}$$

car $K\big(1 - \exp(-sT)\big)$ est la combinaison par laquelle le retard $T$, l'intensité $K$ et le taux de croissance $s$ interviennent au membre de droite de (3.3.26). En l'absence de contrôle, *i.e.* $K = 0$, on retrouve le problème initial $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}; K \equiv 0, T, f) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})$. On doit donc avoir $\mathcal{H}(0) = s^{(0)} = \sigma^{(0)} + i\omega^{(0)}$, avec $\sigma^{(0)} > 0$ (orbite périodique de référence supposée instable). Le but de la correction est de diminuer la partie réelle $\sigma(K)$ en écartant $K$ de zéro jusqu'à la rendre négative. Admettant que l'on puisse développer $s(K)$ en série de Taylor, au premier ordre on obtient

$$s \equiv \sigma + i\omega = \sigma^{(0)} + i\omega^{(0)} - gK\big[1 - \exp(-(\sigma + i\omega)T)\big], \tag{3.3.28}$$

où le coefficient $g = g' + ig''$, *a priori* complexe, rend compte des particularités de la dynamique le long de l'orbite de référence et de l'effet de la correction $f$ (le signe $-$ devant $g$ est introduit par commodité). Empiriquement, on peut déterminer $\sigma^{(0)}$ et $\omega^{(0)}$ en étudiant le voisinage de l'orbite de référence et tirer les paramètres $g'$ et $g''$ des effets d'une petite correction $K$.

Nous nous limiterons au cas où la variété instable de l'orbite périodique est unidimensionnelle en section de Poincaré. En pratique, ce cas est assez fréquent dans les systèmes de basse dimensionnalité. En effet, en dimension deux le critère de Bendixon stipule qu'il ne peut y avoir de cycle limite totalement inclus dans une région de l'espace des phases où la divergence du champ de vecteurs ne change pas de signe. Ceci s'étend aisément en dimension plus élevée et conduit à l'absence de tores invariants pour les systèmes dissipatifs dont le jacobien reste négatif dans toute la région de l'espace des phases d'intérêt (*i.e.* partout pour le modèle de Lorenz en dimension trois, la divergence du champ de vecteur étant constante et négative dans tout l'espace). Or qui dit 'tore invariant' suppose l'instabilité du cycle par une paire d'exposants complexes conjugués. Si le motif invoqué rend la chose peu fréquente, il devient légitime de se limiter à la considération d'un mode instable réel.

Particularisons donc maintenant le cas d'une orbite périodique instable selon une seule direction, soit $\gamma^{(0)} = \pm 1$, ou encore $\omega^{(0)} = 0$ ou $\pi/T$, ce qui simplifie le problème en annulant la partie imaginaire de $g$ dans (3.3.28), la rapproche de (3.3.17) vue lors de l'étude de la stabilité d'un point fixe, et permet de l'étudier de façon parallèle. À ce stade, il est intéressant de passer à des variables adimensionnées en prenant $T$ pour

échelle de temps, donc en effectuant les changements $\sigma T \mapsto \sigma$, $\sigma^{(0)} T \mapsto \sigma^{(0)}$, $\omega T \mapsto \omega$, $\omega^{(0)} T \mapsto \omega^{(0)}$ et en renommant la constante de couplage $Kg'T \mapsto K$. Séparant partie réelle et partie imaginaire nous obtenons:

$$\sigma = \sigma^{(0)} - K(1 - \exp(-\sigma)\cos(\omega)), \tag{3.3.29}$$

$$\omega = \omega^{(0)} - K\exp(-\sigma)\sin(\omega). \tag{3.3.30}$$

Examinons tout d'abord le cas $\omega^{(0)} = 0$. Pour $K$ petit, l'équation (3.3.30) n'admet que la solution évidente $\omega = 0$. Par report dans (3.3.29) on obtient $\sigma = \sigma^{(0)} - K(1 - \exp(-\sigma))$ qui n'a de solution que pour $\sigma > 0$; il n'apparaît donc pas possible de stabiliser une orbite sujette à une instabilité synchrone. On notera cependant que ce type d'orbite s'introduit en général par bifurcation nœud-col qui génère en même temps une orbite jumelle stable sur la même variété. Pour résoudre le problème, il suffit d'obliger le système à suivre cette orbite stable voisine!

Considérons maintenant le cas $\omega^{(0)} = \pi$, l'orbite de référence a donc subi une bifurcation sousharmonique. Posant $\omega = \pi + \delta\omega$, nous pouvons récrire (3.3.29,3.3.30) sous la forme

$$\sigma = \sigma^{(0)} - K[1 + \exp(-\sigma)\cos(\delta\omega)], \tag{3.3.31}$$

$$\delta\omega = K\exp(-\sigma)\sin(\delta\omega). \tag{3.3.32}$$

La solution évidente de (3.3.32), $\delta\omega = 0$ permet maintenant de résoudre (3.3.31) pour $\sigma = 0$. Augmentant $K$ on diminue $\sigma$ qui atteint zéro pour $K = K_{\rm inf} = \sigma^{(0)}/2$ et devient négatif au delà: l'orbite est stabilisée. Si l'on continue à augmenter $K$, $\sigma$ décroît jusqu'à une valeur en dessous de laquelle l'équation n'a plus de solution réelle. Ceci se voit plus facilement en résolvant en $K$ fonction de $\sigma$ plutôt que l'inverse:

$$K = \frac{\sigma^{(0)} - \sigma}{1 + \exp(-\sigma)} \equiv \frac{\exp\sigma(\sigma^{(0)} - \sigma)}{\exp(\sigma) + 1}.$$

En effet, lorsque $\sigma$ négatif augmente en valeur absolue, $K$ passe par un maximum positif avant de décroître vers zéro lorsque $\sigma \to -\infty$. Ce maximum est atteint pour $\sigma := \bar\sigma$ racine de $\bar\sigma + \exp(\bar\sigma) = \sigma^{(0)} - 1$ et vaut $\bar K = \exp(\bar\sigma)$, soit $\bar\sigma = \ln(\bar K)$. Cette perte de solution réelle ne veut pas dire qu'il n'y a plus de solution du tout mais que le système (3.3.31,3.3.32) doit être considéré avec $\delta\omega \neq 0$, i.e. des racines complexes. En $K = \bar K$ apparaissent des oscillations amorties (car $\bar\sigma < 0$): le nœud stable devient foyer stable passant par le stade de nœud impropre. Le taux d'amplification, négatif, de ces oscillations augmente quand $K$ augmente. En $K = K_{\rm sup}$ il devient positif, de sorte qu'elles divergent exponentiellement, le foyer est devenu instable. En ce point le cycle limite échappe au contrôle. À la bifurcation on a $\sigma = 0$ et $\delta\omega \neq 0$ de sorte qu'il faut revenir à (3.3.31,3.3.32) pour trouver $K = K_{\rm sup}$ avec un $\delta\omega$ correspondant non trivial, soit à résoudre:

$$0 = \sigma^{(0)} - K[1 + \cos(\delta\omega)], \qquad \delta\omega = K\sin(\delta\omega),$$

où encore:

$$\sigma^{(0)} = \frac{\delta\omega}{\tan\left(\frac{1}{2}\delta\omega\right)}, \qquad K_{\rm sup} = \frac{\delta\omega}{\sin(\delta\omega)}\,.$$

L'orbite est donc contrôlable pour $K_{\rm inf} < K < K_{\rm sup}$, le taux d'amortissement étant maximum lorsque $K$ atteint la valeur $\bar K$ où la relaxation devient oscillante. L'intervalle sur lequel le contrôle est possible n'est non vide que si $\bar\sigma < 0$. Revenant à la condition qui fixe $\bar\sigma$ on observe que $\bar\sigma = 0$ est obtenu pour $\sigma^{(0)} = 2$. La stabilisation est donc possible si le taux d'instabilité relative de l'orbite de référence est suffisamment modéré, *i.e.* $\sigma^{(0)} < 2$. Ceci signifie que, sur un tour d'orbite, les perturbations n'ont pas été trop fortement amplifiées car il faut se souvenir que $\sigma^{(0)}$ a été mis à l'échelle par $T$ tout au long de ce calcul.

Des stratégies ont été développées pour tenter de stabiliser des orbites trop instables relativement à leur durée. Elles consistent principalement à rappeler le système vers ce qu'il valait non seulement à la période précédente mais également à des périodes antérieures. Ceci peut être réalisé en introduisant dans l'expression (3.3.24) de $f$ un noyau $\phi$ de la forme $\phi(t') = \sum_{n=0,\ldots} a_n \delta(t - nT)$.

Un autre problème résulte de l'ajustement de la durée du retard à la période de l'orbite instable. Nous avons supposé jusqu'à présent que celui-ci était réalisé exactement. Ce n'est qu'à cette condition que l'orbite

considérée solution de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X})$ est aussi une solution de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X})$ pour $K \neq 0$. Gardant $T$ pour valeur de la période du cycle considéré, si le forçage est réalisé avec un retard $T'$ légèrement différent de $T$, on comprend aisément que, par continuité, le problème corrigé $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}; K, T', f)$ va admettre une solution périodique légèrement modifiée, de période $\Theta(K, T')$, qui tend continûment vers le cycle de référence considéré quand $T'$ tend vers $T$. En outre, toujours par continuité, si le feed-back stabilise ce cycle de référence, pour $T' \simeq T$ il stabilisera aussi la solution périodique du système (mal) corrigé.

## 3.4 La méthode OGY

L'exposé suit en gros le chapitre introductif écrit par Grebogi et Lai dans [32]. En toute généralité, l'instabilité de l'état d'un système se traduit par divergence des trajectoires voisines, quelle que soit la nature de l'état en question, stationnaire, périodique ou chaotique. Pour contrer cette instabilité, il suffit, toutes les fois où le système s'écarte de l'état considéré de lui appliquer une pichenette qui le ramène là où on l'attend. L'idée sous-jacente à la méthode de Ott, Grebogi et Yorke (OGY) est de déterminer cette perturbation de la trajectoire comme si elle résultait d'une variation du paramètre de contrôle [25].

**Illustration du principe.** À titre d'exemple simple, examinons le cas du maintien des trajectoires d'un système à temps discret unidimensionnel,

$$X_{k+1} = \mathcal{F}(X_k; r)\,,$$

au voisinage d'un point fixe instable $X_*$ correspondant à une valeur nominale $r_*$ du paramètre de contrôle, *i.e.*

$$X_* = \mathcal{F}(X_*; r_*)\,.$$

Considérons une trajectoire qui s'est approchée très de près de $X_*$ à un certain l'instant $k$, soit $X_k \simeq X_*(r_*)$. À l'itération suivante $X_{k+1}$ s'en est un peu écarté mais lui reste assez proche. Le contrôle de la trajectoire consiste alors à pousser $X_{k+1}$ sur $X_*$, *i.e.* $X_{k+1} - X_* = 0$, au moyen d'une petite variation du paramètre de contrôle. Les écarts au point fixe et la correction étant supposés petits, il est légitime de linéariser le problème. L'itération qui fait passer de $k$ à $k+1$ est exécutée pour une valeur $r_* + \delta r$ du paramètre de contrôle, elle déplace donc légèrement le point fixe: $X_* \to X_* + \delta X_*$. Ce décalage est facile à expliciter par un calcul au premier ordre. Il vient:

$$X_* + \delta X_* = \mathcal{F}(X_* + \delta X_*; r_* + \delta r) = \mathcal{F}(X_*; r_*) + \delta X_*\, \partial_X \mathcal{F}(X_*; r_*) + \delta r\, \partial_r \mathcal{F}(X_*; r_*)\,.$$

Utilisant le fait que par hypothèse $X_* = \mathcal{F}(X_*; r_*)$, on obtient:

$$\delta X_* = \frac{\partial_r \mathcal{F}(X_*; r_*)}{1 - \partial_X \mathcal{F}(X_*; r_*)}\, \delta r\,,$$

ce que l'on récrit de façon un peu plus compacte $\delta X_* = (\partial_r X_*)\delta r$. L'itération conduit à:

$$X_{k+1} = X_* + \delta X_* + \partial_X \mathcal{F}(X_* + \delta X_*; r_* + \delta r)[X_k - (X_* + \delta X_*)]$$

que l'on désire rendre égal à $X_*$. Effectuant les développements limités appropriés, on trouve à l'ordre le plus bas:

$$X_{k+1} = X_* + (\partial_r X_*)\delta r + \partial_X \mathcal{F}_*[X_k - X_* - (\partial_r X_*)\delta r]\,, \tag{3.4.33}$$

où $\partial_X \mathcal{F}_* \equiv \partial_X \mathcal{F}(X_*; r_*)$ et $\partial_r X_* \equiv \partial_r X_*(r_*)$ sont les deux paramètres décrivant l'effet des perturbations respectivement dans l'espace des phases et dans l'espace du paramètre de contrôle au voisinage du point fixe considéré $X_*$.

Imposer $X_{k+1} - X_* = 0$ conduit immédiatement à la règle donnant la correction

$$\delta r = \frac{(X_k - X_*)\partial_X \mathcal{F}_*}{[\partial_X \mathcal{F}_* - 1]\partial_r X_*}\,, \tag{3.4.34}$$

Des termes d'ordre supérieurs ayant été négligés, l'itération qui fait passer de $X_k$ avec $X_{k+1}$ avec $r = r_* + \delta r$ ne ramène pas exactement $X_{k+1}$ sur $X_*$ de sorte que l'on doit recommencer pour le pas suivant. La correction $\delta r$ devient fonction de $k$, *i.e.* $\delta r_k$, et l'on continue le contrôle jusqu'à la convergence. En pratique si le problème de l'instabilité du point fixe se pose, c'est parce que les trajectoires physiques sont sensibles au bruit, car en l'absence de bruit, une fois que la trajectoire a été guidée vers le point fixe l'équation qui donne la correction de paramètre de contrôle nous dit simplement de le laisser à sa valeur nominale. Au contraire, en présence de bruit il s'introduit à chaque itération une petite "erreur" d'origine extrinsèque ($X_k \mapsto X_k + \xi_k$) amplifiée par l'instabilité. C'est la répétition de ces erreurs qui empêche la convergence du schéma de correction et nécessite son maintien, entraînant une réponse non triviale à chaque pas. Dans le cas d'une itération chaotique, la stratégie décrite peut s'appliquer à la stabilisation d'une période instable quelconque et pas seulement la période période 1 considérée jusqu'ici. La transposition en est immédiate. En raison de l'ergodicité, le voisinage de cette période finit toujours par être visité. On applique alors le contrôle quand la trajectoire entre dans ce voisinage. En présence de bruit, si une fluctuation aléatoire l'en fait sortir on arrête le contrôle pour le reprendre quand elle y revient.

Le temps pris par le système pour approcher la période instable de suffisamment près peut être assez long si le voisinage choisi est très étroit. D'un autre côté, il ne peut pas être pris trop large car les termes d'ordre supérieur négligés lors du calcul de la correction peuvent ne pas avoir l'effet escompté de rapprocher la trajectoire de son objectif.

**Contrôle en dimension 2.** L'application concrète de la stratégie générale s'avère moins triviale dès la dimension 2. Considérons donc une application

$$\mathbf{X}_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}_k; r)\,,$$

où $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}$ et cherchons tout d'abord à stabiliser un point fixe instable $\mathbf{X}_*$ pour une valeur nominale $r_*$ du paramètre de contrôle. L'équation qui correspond à (3.4.33) s'écrit maintenant

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_* + \partial_r \mathbf{X}_* \delta r + \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\mathcal{F}}_* (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_* - \partial_r \mathbf{X}_* \delta r)\,, \tag{3.4.35}$$

où $\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\mathcal{F}}_* \equiv \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}_*; r_*)$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ au point fixe nominal et où $\partial_r \mathbf{X}_* \equiv \partial_r \mathbf{X}_*(r_*)$ est un vecteur calculé pour $r = r_*$ qui rend compte du déplacement du point fixe $\mathbf{X}_*$ sous l'effet d'un petit changement de paramètre.

Vouloir annuler $\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*$ avec un seul paramètre libre $\delta r_k$ n'est pas possible puisque nous avons deux conditions à satisfaire, une pour chaque composante en $\mathbf{X}$. Or, en dimension 2, le jacobien d'un système localement dissipatif au voisinage d'un point fixe est en module $< 1$. Si ce dernier est instable, le jacobien étant égal au produit des valeurs propres, ce ne peut être qu'un col avec deux valeurs propres réelles, $\lambda_\mathrm{s}$ et $\lambda_\mathrm{u}$, respectivement stable ($|\lambda_\mathrm{s}| < 1$) et instable ($|\lambda_\mathrm{u}| > 1$), et donc deux variétés, stable et instable, unidimensionnelles, cf. figure 3.7. L'idée mise en œuvre par Ott, Grebogi et Yorke [24,25], est de demander que l'itéré soit projeté sur la variété stable du point fixe, et de l'y maintenir à l'aide de corrections ultérieures de sorte que les itérés successifs convergent vers lui (s'il n'en sont pas écartés par le bruit, ce à quoi le contrôle doit aussi remédier).

En fait, on en demande pas que le transformé de $\mathbf{X}_k$ par l'itération (évaluée avec $r + \delta r$) soit sur la variété stable (non linéaire) de $\mathbf{X}_*$ mais seulement sur le sous-espace linéaire engendré par $\mathbf{X}_\mathrm{s}$, vecteur propre associé à la valeur propre stable $\lambda_\mathrm{s}$, $\mathbf{X}_\mathrm{u}$ étant le vecteur propre associé $\lambda_\mathrm{u}$, valeur propre instable de la matrice jacobienne $\partial_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\mathcal{F}}_*$. Il faut donc écrire que la projection du vecteur $\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*$ sur le vecteur $\mathbf{W}_\mathrm{u}$ perpendiculaire à $\mathbf{X}_\mathrm{s}$ est nulle, ce qui conduit à:

$$0 = \mathbf{W}_\mathrm{u} \left[\partial_r \mathbf{X}_* \delta r + \partial_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\mathcal{F}}_* (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_* - \partial_r \mathbf{X}_* \delta r)\right]$$

soit

$$\delta r = \frac{\mathbf{W}_\mathrm{u} \left[\partial_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\mathcal{F}}_* (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)\right]}{\mathbf{W}_\mathrm{u} \left[(\partial_X \boldsymbol{\mathcal{F}}_* - \boldsymbol{\mathcal{I}}) \partial_r \mathbf{X}_*\right]}\,, \tag{3.4.36}$$

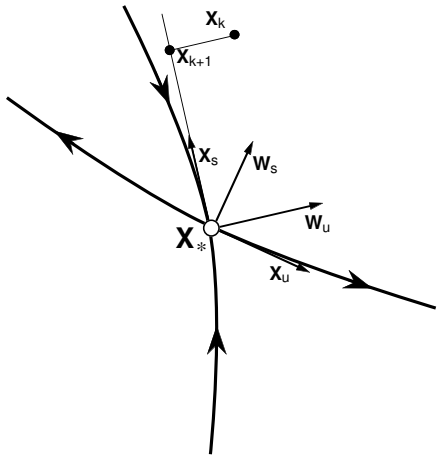



*Figure 3.7: Voisinage d'un point fixe instable et principe de la méthode OGY.*

où $\mathcal{I}$ est l'opérateur identité. Lorsqu'on diagonalise un opérateur qui n'est pas autoadjoint pour le produit scalaire canonique, la base de vecteurs propres associée n'est pas orthogonale. On peut construire une base bi-orthogonale $(\mathbf{X}_\lambda, \mathbf{W}_\lambda)$ dont les vecteurs, convenablement normalisés, vérifient $\mathbf{X}_{\lambda_1}\mathbf{W}_{\lambda_2} = \delta(\lambda_1, \lambda_2)$, avec $\delta(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ si $\lambda_1 = \lambda_2$ et $= 0$ sinon. Les $\mathbf{X}_\lambda$ sont les vecteurs propres du problème aux valeurs propres initial et les $\mathbf{W}_\lambda$ ceux du problème adjoint. Sur $\mathbb{R}$ l'opérateur adjoint est représenté par la matrice transposée de celle qui représente le problème direct. Le $\mathbf{W}_\mathrm{u}$ solution du problème adjoint (en $\partial_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^\mathrm{t}$) est précisément le vecteur dont nous avons besoin dans l'algorithme de contrôle. Pour retrouver la forme sous laquelle la relation (3.4.36) est généralement présentée dans la littérature, il faut raisonner en termes de vecteurs "lignes" et de vecteurs "colonnes" (cf. note 1) et donc dans le cas présent en termes de vecteurs propres "à gauche" (dont les transposés sont les $\mathbf{W}$)[8] et de vecteurs propres "à droite" (les $\mathbf{X}_\lambda$). La matrice jacobienne peut alors s'écrire $\partial_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}_*; r_*) = \lambda_\mathrm{u}\mathbf{X}_\mathrm{u}\otimes\mathbf{W}_\mathrm{u} + \lambda_\mathrm{s}\mathbf{X}_\mathrm{s}\otimes\mathbf{W}_\mathrm{s}$. Utilisant les propriétés d'orthogonalité des $\mathbf{X}_{\mathrm{s,u}}$ et $\mathbf{W}_{\mathrm{s,u}}$ pour calculer les produits scalaires on trouve en particulier $\mathbf{W}_\mathrm{u}(\lambda_\mathrm{u}\mathbf{X}_\mathrm{u}\otimes\mathbf{W}_\mathrm{u} + \lambda_\mathrm{s}\mathbf{X}_\mathrm{s}\otimes\mathbf{W}_\mathrm{s}) = \lambda_\mathrm{u}\mathbf{W}_\mathrm{u}$, ce qui permet de récrire (3.4.36) sous la forme

$$\delta r = \frac{\lambda_\mathrm{u}\mathbf{W}_\mathrm{u}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)}{(\lambda_\mathrm{u} - 1)\mathbf{W}_\mathrm{u}\partial_r\mathbf{X}_*} \tag{3.4.37}$$

Ce calcul place $\mathbf{X}_{k+1}$ au voisinage du bon rail qui doit le conduire jusqu'au point fixe. Il faut continuer jusqu'à la convergence, ce qui définit une suite de signaux de contrôle $\delta r_k$ comme dans le cas unidimensionnel. Ici encore on n'applique la correction que lorsque la trajectoire s'approche suffisamment près du point fixe et on la supprime si, sous l'effet du bruit, elle s'en est trop écartée. Puisque la variété stable guide la trajectoire vers le point fixe, on voit qu'il est possible de définir ce voisinage principalement en termes de distance à cette variété, en première approximation simplement déduite de la valeur du produit scalaire $\mathbf{W}_\mathrm{u}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)$. Naturellement le temps nécessaire à la trajectoire sera d'autant plus long en moyenne que le voisinage sera choisi petit. Pour stabiliser une trajectoire vers une solution périodique de plus longue durée, la méthode consiste à rappeler la trajectoire vers la variété stable du point suivant dans la période. La mise en œuvre devient assez lourde car il faut déterminer les variétés stables en tous les points de la période nominale.

**Contrôle en dimension $> 2$.** En dimension $d > 2$, si la variété instable du point fixe considéré est unidimensionnelle, l'algorithme est inchangé car la condition d'orthogonalité à $\mathbf{W}_\mathrm{u}$ définit un sous-espace tangent de dimension $d-1$ et les corrections introduites *via* le calcul du produit scalaire $\mathbf{W}_\mathrm{u}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)$ conduisent encore le système vers le point fixe nominal. En fait, la solution proposée jusqu'à présent au problème du contrôle peut être vue comme un cas particulier d'une méthode générale de contrôle linéaire où

[8] Les vecteurs $\mathbf{W}$ sont souvent qualifiés de *contravariants*. Ceci est à relier au fait qu'ils sont définis plutôt comme des vecteurs de l'espace dual à travers $\mathbf{W}^\mathrm{t}\boldsymbol{\mathcal{L}} = \lambda\mathbf{W}^\mathrm{t}$, transposée de $\boldsymbol{\mathcal{L}}^\mathrm{t}\mathbf{W} = \lambda\mathbf{W}$. Dans le cas complexe l'adjoint est obtenu par transposition + conjugaison complexe.

la règle particulière (3.4.37) remplacée par une règle plus générale

$$\delta r_k = -\mathbf{K}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)$$

Écrivant en toute généralité la dynamique linéarisée au voisinage du point fixe sous la forme classique en contrôle linéaire:

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_* = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*) + \mathbf{B}\delta r_k \,,$$

où, ici, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_*$ et $\mathbf{B} = \partial_r \boldsymbol{\mathcal{F}}_*$, on sait que le système est stabilisable, c'est à dire que l'on peut trouver un bouclage statique qui fasse s'amortir toutes les (petites perturbations) s'il est commandable, c'est à dire si la matrice $[\,\mathbf{B}\,,\,\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{B}\,,\,...\,,\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{d-1}\mathbf{B}\,]$ est de rang $d$. Il faut alors choisir $\mathbf{K}$ de sorte que

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_* = (\boldsymbol{\mathcal{A}} - \mathbf{B}\mathbf{K})(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)$$

définisse une itération convergente (valeurs propres de l'application tangente toutes inférieures à 1 en module). La section suivante est une introduction aux méthodes classiques à mettre en œuvre dans ce contexte.

## 3.5 Appendice: Contrôle linéaire dans l'espace des états

**Problématique.** L'idée de contrôle développée en automatique est essentiellement d'obtenir d'un système donné $\{\mathbf{X} \in \mathbb{X}, \boldsymbol{\mathcal{F}}\}$ une *sortie* $\mathbf{Y}$ déterminée en lui injectant une *entrée* $\mathbf{U}$ bien choisie. Dans une formulation à temps continu, ceci s'écrit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{F}}\big(\mathbf{X}, \mathbf{U}\big)\,, \tag{3.5.38}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \boldsymbol{\mathcal{H}}\big(\mathbf{X}, \mathbf{U}\big)\,, \tag{3.5.39}$$

expressions dans lesquelles il est implicitement entendu que la variable dynamique $\mathbf{X}$ caractérisant l'état du système et la variable $\mathbf{U}$ servant au contrôle sont évaluées au temps $t$.

La dimension du système est $d$. Les signaux d'entrée $\mathbf{U}$ et de sortie $\mathbf{Y}$ sont de dimensions respectives $d'$ et $d''$. Lorsque $d' = d'' = 1$, on parle de système SISO (= Single-Input/Single-Output) et pour $d' > 1$, $d'' > 1$ de système MIMO (= Multiple-Input/Multiple-Output).

Les états du système, les signaux d'entrée et de sortie, appartiennent alors à des espace vectoriels $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{d'}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{d''}$, et les fonctions $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ sont des opérateurs linéaires:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{X} + \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}\,, \tag{3.5.40}$$

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mathcal{C}}\mathbf{X} + \boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{U}\,, \tag{3.5.41}$$

représentés par des matrices $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ constantes, respectivement de dimensions $d \times d$, $d \times d'$, $d'' \times d$ et $d'' \times d'$. L'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ne joue pas de rôle dynamique et n'est introduit ici que pour maintenir un certain parallélisme dans la formulation, en accord avec la définition non linéaire (3.5.39).

Dans la configuration (3.5.40,3.5.41), le système est dit fonctionner en *boucle ouverte*. Le fonctionnement en *boucle fermée* correspond, quant à lui, à une réintroduction partielle de l'état du système dans le signal d'entrée

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{X} + \mathbf{U}' \tag{3.5.42}$$

qui conduit à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = (\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{F}})\mathbf{X} + \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}'\,, \tag{3.5.43}$$

$$\mathbf{Y} = (\boldsymbol{\mathcal{C}} + \boldsymbol{\mathcal{D}}\boldsymbol{\mathcal{F}})\mathbf{X} + \boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{U}'\,. \tag{3.5.44}$$

Le principal problème de la théorie du contrôle linéaire consiste à déterminer le bouclage $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ introduit par (3.5.42) qui confère au système (3.5.43,3.5.44) les meilleures propriétés de suivi/stabilité possibles dans un sens à définir. Ce problème fait classiquement appel aux notions d'*accessibilité* des états (ou *commandabilité*),

d'*observabilité* et, naturellement de *stabilité*. Ces notions sont les versions particularisées au contrôle de notions plus générales dérivées de celles introduites au chapitre 1 qu'il s'agit d'appliquer à des systèmes tels que (3.5.38,3.5.39), (3.5.40,3.5.41)

Nous nous limiterons au cas des systèmes à temps continu, qui plus est linéaires. La transposition au cas du temps discret, de la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k)\,, & (3.5.45)\\ \mathbf{Y}_k &= \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k)\,, & (3.5.46) \end{aligned}$$

ou leur version linéaire

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{X}_k + \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}_k\,, & (3.5.47)\\ \mathbf{Y}_k &= \boldsymbol{\mathcal{C}}\mathbf{X}_k + \boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{U}_k\,. & (3.5.48) \end{aligned}$$

est assez immédiate (*i.e.* fonctions exponentielles converties en séries géométriques).

**Commandabilité et accessibilité.** Un système dynamique est dit *commandable au temps t* si pour tout état initial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, et tout état final $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_\mathrm{f}$, on sait déterminer un signal d'entrée $\mathbf{U}(t')$, $0 \leq t' \leq t$ tel que $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_\mathrm{f}$. Il est *commandable* s'il est commandable pour au moins un temps $t$. La définition s'étend immédiatement au cas discret. L'état $\mathbf{X}_\mathrm{f}$ est donc *accessible* partant de $\mathbf{X}_0$ moyennant l'application de la commande $\mathbf{U}(t)$.

On dira d'autre part que le système étudié est *observable* si de l'histoire de l'entrée $\mathbf{U}(t')$ et de la sortie $\mathbf{Y}(t')$ sur l'intervalle $[0, t]$ on peut "remonter" à l'état initial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$.

Deux états initiaux $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ sont indistinguables si pour tout $t \geq 0$, les sorties $\mathbf{Y}_1(t)$ et $\mathbf{Y}_2(t)$ sont identiques pour toute entrée $\mathbf{U}(t)$ admissible. Le système sera donc observable si il existe une entrée admissible qui permet de distinguer les états initiaux sur la base d'une détermination des sorties pour au moins un instant $t$. Dit d'une autre façon, le système est observable si les sorties du système correspondant à une même entrée mais partant de deux conditions initiales différentes sont différentes. Il est intéressant de réfléchir à la relation entre les notions introduites ici et la problématique développée à propos de l'approche empirique des systèmes dynamiques succinctement abordée au début du chapitre 2.

**Évolution et stabilité.** Étendant les notions introduites aux chapitres précédents, on dira qu'un système est *stable* s'il rejoint son état de base lorsqu'il n'est soumis à aucune entrée (toute perturbation tend vers zéro quand $t$ tend vers l'infini). En toute généralité, c'est à dire relativement à un système non linéaire du type (3.5.38), on peut naturellement attribuer un sens *global* à cette définition. En général on se contente d'un sens *local*, le système étant linéarisé autour de son état de base, ce qui conduit à une expression de la forme (3.5.40) à laquelle nous nous limiterons ici.

Pour intégrer le système (3.5.40) en boucle ouverte il faut préciser la fonction d'entrée $\mathbf{U}(t)$ et la condition initiale en $t_0 = 0$, soit $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Effectuons le changement de variable $\mathbf{X} = \exp(t\boldsymbol{\mathcal{A}})\mathbf{Z}$. Le système (3.5.40) s'écrit alors

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{Z} = \exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U} \qquad (3.5.49)$$

qui s'intègre pour donner

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}(0) + \int_0^t \exp(-t'\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}(t')\mathrm{d}t'\,.$$

avec $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{X}_0$ d'après l'expression du changement de variable. Revenant à $\mathbf{X}$ nous obtenons donc

$$\mathbf{X}(t) = \exp(\boldsymbol{\mathcal{A}}t)\mathbf{X}_0 + \int_0^t \exp[(t-t')\boldsymbol{\mathcal{A}}]\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}(t')dt'$$

qui permet de passer à $\mathbf{Y}(t) = \boldsymbol{\mathcal{C}}\mathbf{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{U}(t)$.

**Réponse et fonction de transfert.** Du point de vue pratique, on cherche en effet à déterminer la réponse en $\mathbf{Y}$ à l'excitation en $\mathbf{U}$. Ceci conduit à définir la réponse impulsionnelle par

$$\begin{aligned} t<0: &\qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)=0\,,\\ t\geq 0: &\qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)=\boldsymbol{\mathcal{C}}\exp(t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{B}}+\boldsymbol{\mathcal{D}}\delta(t)\,. \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\mathbf{Y}(t)=\int_0^t \mathrm{d}t'\boldsymbol{\mathcal{G}}(t-t')\boldsymbol{\mathcal{U}}(t')\,.$$

De $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)$ on passe alors à la *fonction de transfert* par transformation de Laplace:

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)=\int_0^\infty \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\exp(-st)dt\,.$$

Lorsqu'on intègre le problème aux valeurs initiales avec $\mathbf{X}(0)=0$ par transformée de Laplace on obtient:

$$\begin{aligned} s\widehat{\mathbf{X}}(s) &= \boldsymbol{\mathcal{A}}\widehat{\mathbf{X}}(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}\widehat{\mathbf{U}}(s)\,,\\ \widehat{\mathbf{Y}}(s) &= \boldsymbol{\mathcal{C}}\widehat{\mathbf{X}}(s)+\boldsymbol{\mathcal{D}}\widehat{\mathbf{U}}(s)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$(s\boldsymbol{\mathcal{I}}-\boldsymbol{\mathcal{A}})\widehat{\mathbf{X}}(s)=\boldsymbol{\mathcal{B}}\widehat{\mathbf{U}}(s)$$

et par suite:

$$\widehat{\mathbf{Y}}(s)=\left[\boldsymbol{\mathcal{C}}\,\frac{1}{s\boldsymbol{\mathcal{I}}-\boldsymbol{\mathcal{A}}}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}+\boldsymbol{\mathcal{D}}\right]\widehat{\mathbf{U}}(s)\equiv\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)\widehat{\mathbf{U}}(s)\,.$$

On déduit la réponse fréquentielle de la transformée de Laplace $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)$ en posant $s=i\omega$.

**Stabilité et stabilisabilité.** Revenant aux notions introduites au chapitre 1, p. 7 on dit bien entendu que le système linéaire non forcé

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}=\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{X}$$

est *stable* si toutes les valeurs propres de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ont toutes leurs parties réelles négatives (propriété de Hurwitz).

Considérant maintenant le système forcé

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}=\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{X}+\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}\,,$$

on dira par extension qu'il est *stabilisable* si l'on peut trouver un bouclage

$$\mathbf{U}=\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{X}$$

tel que le système

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}=(\boldsymbol{\mathcal{A}}+\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{F}})\mathbf{X}$$

soit stable.

Clairement, dans le contexte linéaire qui nous intéresse ici, revenant aux notions générales de stabilité introduites au chapitre 1, p. 6, il suffit de prendre pour jauge la distance à l'origine et de rechercher les fonctionnelles de Lyapunov $\mathcal{M}$ à déterminer comme des formes quadratiques définies positives:

$$\mathcal{M}(\mathbf{X})=\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}\mathbf{X}\quad\text{avec}\quad\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{\mathcal{Q}},$$

vérifiant ensuite $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{M}\leq 0$, soit une dérivée elle-même forme quadratique définie négative: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{M}=\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}'\mathbf{X}$ avec $\boldsymbol{\mathcal{Q}}'^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{\mathcal{Q}}'$. Par substitution, on trouve

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{M}=[\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}\mathbf{X}]+[\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}]=\mathbf{X}^{\mathrm{t}}[\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}+\boldsymbol{\mathcal{Q}}\boldsymbol{\mathcal{A}}]=\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}'\mathbf{X}.$$

Ceci devant être valide pour tout $\mathbf{X}$ on en déduit l'équation dite *de Lyapunov*:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}+\boldsymbol{\mathcal{Q}}\boldsymbol{\mathcal{A}}=\boldsymbol{\mathcal{Q}}'\,.$$

**Accessibilité et observabilité.** Considérons maintenant les problèmes d'accessibilité (de commandabilité) et d'observabilité. Un critère opérationnel d'accessibilité du système $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ (*i.e.* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{X} + \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}$) est donné par le rang de la *matrice de commandabilité* de Kalman[9]

$$[\,\boldsymbol{\mathcal{B}}\,,\,\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}\,,\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^2\boldsymbol{\mathcal{B}}\,,\,....\,,\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{d-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\,]\,, \tag{3.5.50}$$

de dimension $d \times (dd')$ avec $d = \dim(\mathbf{X})$ et $d' = \dim(\mathbf{U})$. Le système est commandable si cette matrice est de rang maximum, *i.e.* $= d$.

Une démonstration possible du critère de Kalman découle de l'observation que l'obstruction à l'accessibilité, en linéaire comme en non linéaire, tient à l'existence d'intégrales premières non triviales. Une intégrale première est une fonction scalaire de $\mathbf{X}$ et de $t$, $\mathcal{H}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{R}$ qui reste constante tout au long de la trajectoire, soit:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}(\mathbf{X}(t), t) = \partial_t\mathcal{H}(\mathbf{X}(t), t) + [\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathcal{H}(\mathbf{X}(t), t)]\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}(t) = 0\,.$$

Une intégrale première est triviale si elle est constante sur tout l'espace pour tout temps, sa connaissance n'apporte rien. Au contraire si elle est non triviale, de deux choses l'une, (i) ou bien sa valeur au point où l'on veut faire arriver le système est la même que celle de la condition initiale $\mathbf{X}_0$ et il n'y a pas de problème, (ii) ou bien sa valeur est différente et le problème problème est impossible, le point désiré est inaccessible au système partant de $\mathbf{X}_0$. En toute généralité, les états accessibles sont ceux qui appartiennent à une sous-variété de l'espace des états appelé le *sous-espace commandable*, caractérisés par une valeur de l'intégrale première considérée identique à celle du point que l'on désire atteindre.

Revenons au contexte linéaire et admettons l'existence, indépendamment de toute commande, d'une intégrale première non triviale $\mathcal{H}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{H}(\exp(t\boldsymbol{\mathcal{A}})\mathbf{Z}, t) = \mathcal{H}'(\mathbf{Z}, t) = \text{Cste}$. Par hypothèse la dérivée de cette quantité est identiquement nulle, soit[10]

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}'(\mathbf{Z}, t) &= \partial_t\mathcal{H}'(\mathbf{Z}, t) + [\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z}, t)]\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{Z} \\ &= \partial_t\mathcal{H}'(\mathbf{Z}, t) + [\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z}, t)]\exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U} \equiv 0\,.\end{aligned} \tag{3.5.51}$$

Considérant la trajectoire qui passe par $\mathbf{Z}$ au temps $t$ sous l'effet d'une commande nulle $\mathbf{U} \equiv 0$, on en déduit $\partial_t\mathcal{H}'(\mathbf{Z}, t) \equiv 0$, de sorte que $\mathcal{H}'$ ne dépend pas de $t$ et se réduit à une pure fonction de $\mathbf{Z}$, $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(\mathbf{Z})$. L'équation (3.5.51) se réduit donc à

$$[\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z})]\exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U} \equiv 0$$

qui, devant être valide indépendamment de l'entrée $\mathbf{U}$, conduit à

$$[\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z})]\exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{B}} \equiv 0$$

Dérivant cette relation par rapport à $t$ on trouve

$$\{\partial_{\mathbf{Z}}[\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z})]\exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}\}\exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{A}}^k\boldsymbol{\mathcal{B}} - [\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z})]\exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}} \equiv 0\,,$$

également valide pour $\mathbf{U} = 0$, soit simplement

$$[\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z})]\exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}} \equiv 0\,.$$

Il vient de même après $k$ dérivations:

$$[\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z})]\exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{A}}^k\boldsymbol{\mathcal{B}} \equiv 0\,,$$

[9] Les virgules sont là pour visualiser la juxtaposition en ligne des blocs conformément à la convention MatLab selon laquelle les éléments d'une ligne, qu'ils soient des scalaires ou des tableaux, sont séparés par des virgules (ou des espaces) et les lignes entre elles par des points-virgules pour former des colonnes. $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est une matrice $d \times d$, tout comme $\boldsymbol{\mathcal{A}}^k$; $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est une matrice $d \times d'$ les $d$ blocs $\boldsymbol{\mathcal{A}}^k\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $k = 0, ..., d-1$, sont donc chacun de taille $d \times d'$, de sorte que la matrice de commandabilité est bien de taille $d \times (dd')$.

[10] Dans ce qui suit, les notations ne sont cohérentes que si l'on considère $[\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z}, t)]$ comme un vecteur ligne, ce que nous ferons sans état d'âme pour éviter d'introduire un formalisme tensoriel rigoureux.

et, pour $t = 0$

$$[\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}'(\mathbf{Z})]\boldsymbol{\mathcal{A}}^k\boldsymbol{\mathcal{B}} \equiv 0 \quad \text{pour tout } k \geq 0\,.$$

Si le système admet une intégrale première non triviale ($\partial_{\mathbf{Z}}\mathcal{H}' \not\equiv 0$), il doit exister un vecteur $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ vérifiant $\mathbf{H}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}^k\boldsymbol{\mathcal{B}}) = 0$ pour tout $k \geq 0$. Dans un premier temps on montre qu'il suffit de ne considérer les conditions trouvées précédemment que pour $k = 0, 1, ..., d-1$. Si le rang est maximal, *i.e.* $= d$, il n'y a pas d'intégrale première non triviale venant empêcher la commandabilité. Si non, il existe de telles intégrales et la condition finale choisie n'est pas atteignable dès lors qu'elle correspond à une valeur de l'intégrale première différente de celle relative à la condition initiale. Le système n'est pas commandable.

Illustrons la construction de la matrice de commandabilité sur le cas où il n'y a qu'une seule entrée. La matrice $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est alors réduite à un seul vecteur colonne, de même que les matrices $\boldsymbol{\mathcal{A}}^k\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Notons $D_{kk'}$ la composante $k$ du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{k'-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $k' \geq 1$. Les conditions trouvées précédemment s'écrivent alors $\sum_k H_k D_{kk'} = 0$ et l'on voit qu'il n'y a pas de solution $\mathbf{H}$ non triviale si le rang de la matrice est $d$. Revenant en arrière on comprend que cela implique que les seules intégrales premières sont triviales. Si au contraire le rang de la matrice est strictement inférieur à $d$, il existe des vecteurs $\mathbf{H}$ qui répondent à la question. Prenant pour $\mathcal{H}'$ une forme linéaire construite sur l'un de ces vecteurs, *i.e.* $\mathcal{H}'(\mathbf{Z}) = \mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{Z}$, on obtient que $\mathcal{H}'$ est conservée par l'évolution et, revenant aux variables primitives $\mathbf{X}$ que $\mathcal{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{H}^{\mathrm{t}} \exp(-t\boldsymbol{\mathcal{A}})\mathbf{X}$ est une intégrale première non triviale. Autrement dit les trajectoires résident dans des hyperplans perpendiculaires à $\mathbf{H}$.

Une autre propriété importante des systèmes commandables est l'existence de bouclages $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ qui permettent de fixer arbitrairement (éventuellement par paires conjuguées) les valeurs propres du système $\boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{F}}$. L'importance de cette propriété tient au fait que l'on est alors capable de maîtriser les trajectoires en les corrigeant par un bouclage statique $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Considérons en effet une trajectoire de référence du système $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$, $\mathbf{X}_{\mathrm{r}}$ en réponse à une commande $\mathbf{U}_{\mathrm{r}}$ et la trajectoire actuelle $\mathbf{X}_{\mathrm{a}}$ en réponse à une commande $\mathbf{U}_{\mathrm{a}}$. On a donc séparément

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{r}} &= \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{X}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}_{\mathrm{r}} \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{a}} &= \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{X}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{U}_{\mathrm{a}} \end{aligned}$$

L'erreur ($\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\mathrm{a}} - \mathbf{X}_{\mathrm{r}}, \delta\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\mathrm{a}} - \mathbf{U}_{\mathrm{r}}$) est alors gouvernée par

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\delta\mathbf{X} + \boldsymbol{\mathcal{B}}\delta\mathbf{U}$$

Définissant le bouclage $\delta\mathbf{U} = -\boldsymbol{\mathcal{F}}\delta\mathbf{X}$ on obtient

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\mathbf{X} = (\boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{F}})\delta\mathbf{X}$$

et s'il l'on sait construire un bouclage $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ tel que $\boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{F}}$ ait toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative, ce qui est possible si le système $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ est commandable, on assure le suivi de la trajectoire de référence car l'erreur décroît alors exponentiellement vers zéro.

À la différence de la commandabilité, liée aux caractéristiques des matrices $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ du système (3.5.41), l'observabilité fait est associée aux matrices $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Cette propriété est duale de la commandabilité, ce qui se traduit par un critère dual de (3.5.50). Avec $d'' = \dim(\mathbf{Y})$ et toujours $d = \dim(\mathbf{X})$, utilisant la convention MatLab (cf. note 9) on définit la matrice d'observabilité par

$$[\,\boldsymbol{\mathcal{C}}\,;\,\boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\,;\,\boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{\mathcal{A}}^2\,;\,...\,;\,\boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{d-1}\,]\,.$$

Les matrices $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ étant de dimensions respectives $d'' \times d$ et $d \times d$, cette matrice est donc formée d'une colonne de $d$ blocs de dimension $d'' \times d$, soit au total une dimension $dd'' \times d$. L'observabilité est acquise si (et seulement si) la matrice correspondante est de rang maximal, *i.e.* $= d$. Dans le cas où l'observable n'a qu'une composante ($d'' = 1$), $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est une matrice ligne et la matrice d'observabilité une matrice $d \times d$.

De façon générale, lorsque le rang des matrices de commandabilité et d'observabilité ne sont pas maximaux, on peut décomposer l'espace en plusieurs sous-espaces orthogonaux, commandable–observable, commandable–non-observable non-commandable–observable et non-commandable–non-observable. Par une

un changement de base analogue à celui qui fait passer à la forme de Jordan de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, les indices 'c' et 'o', signifiant commandable et observable, $\bar{\text{c}}$ et $\bar{\text{o}}$ leurs contraires, on peut écrire le système (3.5.40) sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{co}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\mathrm{c}\bar{\mathrm{o}}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\bar{\mathrm{c}}\mathrm{o}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{\bar{\mathrm{c}}\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{co}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{c}\bar{\mathrm{o}}} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{23} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\bar{\mathrm{c}}\mathrm{o}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{43} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\bar{\mathrm{c}}\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{co}} \\ \mathbf{X}_{\mathrm{c}\bar{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{X}_{\bar{\mathrm{c}}\mathrm{o}} \\ \mathbf{X}_{\bar{\mathrm{c}}\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\mathrm{co}} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\mathrm{c}\bar{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}\,,$$

$$\mathbf{Y} = [\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{co}}\,;\,0\,;\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\bar{\mathrm{c}}\mathrm{o}}\,;\,0\,] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{co}} \\ \mathbf{X}_{\mathrm{c}\bar{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{X}_{\bar{\mathrm{c}}\mathrm{o}} \\ \mathbf{X}_{\bar{\mathrm{c}}\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix}\,.$$

La méthode OGY est une application de ces techniques classiques adaptées au cas des systèmes dynamiques à temps discret.

# Bibliographie


[1] R.H. Abraham, C.D. Shaw, *Dynamics. The Geometry of Behavior*, 2nd Edition (Addison-Wesley, Reading, 1992).

[2] G.L. Baker, J.P. Gollub, *Chaotic Dynamics, an Introduction*, 2nd Edition (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996).

[3] J. Guckenheimer, Ph. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1983).

[4] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).

[5] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, *Chaos, an Introduction to Dynamical Systems* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1996).

[6] T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications* (Pitman, London, 1978).

[7] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos, an Introduction* (VCH, Weinheim, 1988).

[8] P. Manneville, "Nonlinear physics and complexity," chapitre 17 de *AIP Physics Desk Reference*, E.R. Cohen *et al.* éds. (Springer/AIP Press, 2003).

[9] P. Manneville, *Instabilités, chaos et turbulence* (Éditions de l'École polytechnique, à paraître en 2004).

[10] P. Manneville, "Dynamique non linéaire et chaos" les notes du cours donné dans le cadre du DEA de Physique des Liquides, Université Paris VI et École polytechnique, `http://www.ladhyx.polytechnique.fr/people/~pops/dnlc.pdf`.

[11] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1982).

[12] J.P. Eckmann, D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors," Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 617–656.

[13] Hao Bai-lin, ed., *Directions in Chaos* (World Scientific, Singapour), plusieurs volumes publiés à partir de 1987.

[14] P. Cvitanović, ed., *Universality in Chaos* (Adam Hilger, Bristol, 1989).

[15] Hao Bai-lin, ed. *Chaos II* (World Scientific, Singapore, 1990).

[16] (a) N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, R.S. Shaw, "Geometry from a time series," Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 712–716. (b) F. Takens, "Detecting strange attractors in turbulence," Lect. Notes Math. **898** (1981) 366.

[17] N. Hall, ed. *the NewScientist Guide to Chaos* (Penguin Books, London, 1992)

[18] H.D.I. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1996).

[19] H. Kanz, Th. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge Nonlinear Science Series 7 (Cambridge University Press, 1997)

[20] D.S. Broomhead, G.P. King, "Extracting qualitative dynamics from experimental data," Physica D **20** (1986) 217–236.

[21] R. Vautard, P. Yiou, M. Ghil, "Singular spectrum analysis: a toolkit for short, noisy chaotic signals," Physica D **58** (1992) 95–126.

[22] E.L. Allgower, K. Georg, *Numerical continuation methods, an introduction* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).

[23] K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback," Phys. Lett. A **170** (1992) 421–428.

[24] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, "Controlling chaos," Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1196–1199.

[25] T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, "Using small perturbations to control chaos," Nature **363** (1993) 411–417.

[26] W. Just, "Principles of time delayed feedback control," chap. 2 de [32], et références citées.

[27] E. Roubine, *Introduction à la théorie de la communication. Tome I: Signaux non aléatoires* (Masson, 1979).

[28] P. Rouchon, *Analyse et commande de systèmes dynamiques: première partie: systèmes dynamiques, commandabilité et observabilité*, Majeure de Mathématiques Appliquées, École polytechnique, 1999.

[29] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control* (Prentice Hall, 1996).

[30] V.N. Afanas'ev, V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, *Mathematical theory of control system design* (Kluwer, Dordrecht, 1996).

[31] H. Nijmeijer, A. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems* (Springer, New York, 1990).

[32] H.G. Schuster, ed. *Handbook of chaos control* (Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 1999).

# Index


accessibilité, 52
application au temps $\tau$, 2
attracteur étrange, 26

bifurcation, 5
    de Hopf, 20
    imparfaite, 18
    sousharmonique, 25
    super/sous-critique, 18, 23, 25
    tangente, 25
    trans-critique, 17
boucle ouverte/fermée, 52
box counting, 32

capacité (≡ dimension fractale), 32
cascade sousharmonique, 27
chaos, 30
commandabilité, 52
contrôle linéaire, 52
crise, 28
cycle limite, 5, 20

degré de liberté, 1
décalage, 31
décomposition de Kalman (contrôle), 55
déploiement de singularité, 15
dimension de plongement, 35
dimension fractale, 32
dimensions généralisées, 33
doublement de période, 9, 25
dynamique qualitative, 4
dynamique symbolique, 31

élimination des modes esclaves, 13
ensemble limite, 5
entrant/sortant (d'un ensemble limite), 5
entropie, 30
équation aux différences, 2
équation de Lyapunov, 54
ergodicité, 31
escalier du diable, 24
espace des phases, 1
exposant de Lyapunov, 29
    conditionnel, 39

faux voisins (méthode des), 37
fonction de transfert, 54
forme normale, 14
fourche (bifurcation), 18
fractal, 26, 32
fronce (catastrophe), 19

Hopf (bifurcation), 20

instabilité
    synchrone/sousharmonique, 9
intermittence, 28
itération, 2

Landau *vs.* Ruette–Takens, 26

mesure naturelle, 32
méthode des retards, 35
méthode de Lyapunov, 6
moyenne d'ensemble, 31
moyenne temporelle, 31
multifractral, 33
multiplicateur de Floquet, 8

nœud col (bifurcation), 17
nombre de rotation, 24

observabilité, 53
OGY ≡ Ott–Grebogi–Yorke (contrôle), 49
orbite, 4

partition génératrice, 31
pli (catastrophe), 19
point fixe, 4
point non-errant, 5
portrait de phases, 4
premier retour (application), 21
problème aux valeurs initiales, 1
propriété SCI (≡ Sensibilité aux Conditions Initiales), 26
Pyragas (méthode de contrôle), 46

quasi-périodique (régime), 23

reconstruction de Takens, 34
régime
    permanent/transitoire, 4
résonance, 14
    faible/forte, 22
    ordre de, 15
ruban de mœbius, 25

série chronologique, 35
sous-critique (bifurcation), 18
sousharmonique (bifurcation, 25
stabilité, 5, 53
    asymptotique, conditionnelle, *etc.*, 6
    locale (linéaire)/globale, 5–7
    linéaire, 7
stabilité structurelle, 5
synchronisation
    forte (à l'identique), 40, 43
    faible (généralisée), 40
système
    à temps continu, 1
    à temps discret, 2
    autonome/forcé, 2
    conservatif/dissipatif, 3
    contractant/conservatif/dilatant, 3
système (flot) gradient, 4

théorie des catastrophes, 4, 19
trans-critique (bifurcation), 17
transition vers la turbulence (théorie), 26
transitoire chaotique, 29

variable d'état, 1
variété centrale, 14
variété de synchronisation, 41