Série de Cours sur la Théorie Conforme

Vladimir Dotsenko

To cite this version:

Vladimir Dotsenko. Série de Cours sur la Théorie Conforme. DEA. 2006. <cel-00092929>

HAL Id: cel-00092929

https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092929

Submitted on 12 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

COURS

SERIE DE COURS SUR LA THEORIE CONFORME.

Partie I : Théorie Conforme Minimale*

Vl.S.Dotsenko
LPTHE†
Université Pierre et Marie Curie, PARIS VI
Université Denis Diderot, PARIS VII
Boite 126, Tour 16, 1^{er} étage
4 place Jussieu
F-75252 Paris CEDEX 05, FRANCE

*Remerciements : Je suis très obligé à Marco Picco pour l'aide apportée à la rédaction de ces notes de cours.

†Unité Mixte de Recherche CNRS UMR 7589

Table des matières

Chapitre 1

1.1 Introduction.

Parmi les nombreuses théories décrites par la théorie conforme, on peut mentionner les suivantes :

– Théorie des fluctuations critiques aux points de transition de phases dans les systèmes statistiques bidimensionnels d'ordre 2 et plus élevés ; systèmes statistiques critiques plus généralement.

– Théories des champs quantiques sans masse, toujours en dimension 2.

– Théorie de la gravité quantique bidimensionnelle.

– Théorie des cordes quantiques pour un espace de dimension plus élevé, $D > 2$.

Dans la première partie de cette série de cours, je parlerai de la théorie conforme elle-même et analyserai en détail sa structure dans le cas de la théorie conforme minimale. Celle ci correspond aux classes de théories qui ne possèdent pas d'autres symétries que la symétrie conforme. A la fin de cette partie générale, je mentionnerai des applications aux problèmes statistiques bidimensionnels. Puis viendra l'exposition de la représentation d'un champ libre, toujours pour la théorie conforme minimale.

Dans la deuxième partie de ces cours, j'exposerai, cette fois sans beaucoup de détails, les théories conformes avec des symétries supplémentaires : théories basées sur des algèbres de courants (modèles de Wess-Zumino), sur l'algèbre W, sur l'algèbre des parafermions, les théories conformes supersymétriques. A la fin de cette partie, je présenterai les développement importants, comme ceux des théories produites comme "cosets" des théories de courants (des modèles de Wess-Zumino), des théories topologiques obtenues à partir de théories conformes supersymétriques $N = 2$, et le groupe de renormalisation et le théorème C de Zamolodchikov pour des théories conformes perturbées.

1.2 Conséquences les plus générales de la symétrie conforme.

Avant de commencer l'exposé sur la théorie conforme minimale bidimensionnelle, nous allons d'abord voir les conséquences de la symétrie conforme plus restreinte mais qui s'applique plus généralement, aux théories de dimension $D \geq 2$. Il s'agit des résultats de l'article de Polyakov [1] dans lequel celui ci avait proposé, pour la première fois, la symétrie conforme pour des fluctuations critiques, en plus de la symétrie d'échelle qui était déjà connue. Concrètement, il avait analysé les conséquences de cette symétrie pour les fonctions de corrélation.

Nous sommes dans le cadre d'une théorie critique, avec des opérateurs locaux

$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), ... \tag{1.2.1}$$

qui possèdent les dimensions critiques

$$\Delta_1, \Delta_2, ... \tag{1.2.2}$$

Comme exemple, on peut penser au modèle d'Ising au point critique. La fonction de partition de ce modèle est donnée par

$$Z(\beta) = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} exp\{-\beta \sum_{x,\alpha} \sigma_x \sigma_{x+\alpha}\} \tag{1.2.3}$$

avec $\beta = J/T$, J étant la constante de couplage des spins $\sigma_x, \sigma_{x+\alpha}$ et T la température ; les coordonnées x sont définies sur le réseau ; $x + \alpha$ correspondant aux deux sites voisins de x, α prenant deux valeurs, $\vec{1}$ et $\vec{2}$ dans le cas d'un réseau carré. Dans la limite du continu, on a les correspondances :

$$\sigma_x \to \sigma(x) \equiv \Phi_1(x) \tag{1.2.4}$$

$$\Delta_\sigma = \frac{1}{8} \tag{1.2.5}$$

$$\sigma_x \sigma_{x+\alpha} \to \varepsilon(x) \equiv \Phi_2(x) \tag{1.2.6}$$

$$\Delta_\varepsilon = 1 \tag{1.2.7}$$

$\sigma(x), \varepsilon(x)$ sont les opérateurs locaux de spin et de l'énergie de la théorie critique correspondante au modèle d'Ising au point de transition de phases. Leurs dimensions critiques (1.2.5),(1.2.7) sont connues par la solution exacte de Onsager, dans le cas du modèle bidimensionnel. Pour le modèle tridimensionnel, elles sont connues numériquement avec une assez grande précision. La théorie conforme correspondante au modèle d'Ising bidimensionnel sera présentée plus loin, avec les autres modèles statistiques.

Les dimensions critiques sont définies dans les fonctions de corrélation de deux opérateurs (on dit souvent les fonctions de corrélation à deux points) :

$$\langle \Phi_i(x) \Phi_i(x') \rangle = \frac{1}{|x - x'|^{2\Delta_i}} \tag{1.2.8}$$

La normalisation des opérateurs, qui en principe est arbitraire dans la théorie des champs, a été choisi ici pour avoir des fonctions à deux points proportionnelles à 1, comme dans l'éq.(1.2.8). Pour les systèmes statistiques, on a cette forme pour les fonctions de corrélations de deux opérateurs au point critique et dans la limite du continu, pour $|x - x'| \gg a$, a étant la taille élémentaire sur le réseau, c'est-à-dire la longueur d'un lien du réseau.

Donc pour le modèle d'Ising, on a :

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x')\rangle = \frac{1}{|x-x'|^2} \tag{1.2.9}$$

$$\langle \sigma(x)\sigma(x')\rangle = \frac{1}{|x-x'|^{1/4}} \tag{1.2.10}$$

La théorie critique est caractérisée premièrement par une suite d'opérateurs physiques locaux

$$\{\Phi_i(x)\} \tag{1.2.11}$$

et leur dimensions critiques

$$\{\Delta_i\} \tag{1.2.12}$$

On s'intéresse ensuite aux fonctions de corrélation de ces opérateurs, comme

$$\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3)\rangle \tag{1.2.13}$$

$$\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3)\Phi_4(x_4)\rangle \tag{1.2.14}$$

etc. La connaissance de ces fonctions donne une information tout à fait complète sur la théorie, sur les fluctuations critiques dans le cas du problème statistique. Ceci est donc l'objectif d'une théorie en général.

Nous commençons d'abord avec la transformation d'échelle. Les coordonnées d'un point de l'espace se transforment selon :

$$x_i \to \tilde{x}_i = \lambda x_i \tag{1.2.15}$$

On dit que la théorie possède la symétrie d'échelle si les fonctions de corrélation restent inchangées après la transformation suivante des opérateurs :

$$\Phi_i(x) \to \tilde{\Phi}_i(x) = (\lambda)^{\Delta_i}\Phi_i(\lambda x) \tag{1.2.16}$$

c.-à-d. l'argument x change sous la dilatation d'espace, mais en plus on multiplie chaque opérateur avec le facteur d'échelle $(\lambda)^{\Delta_i}$.

Pour la fonction à deux points, on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i(x)\Phi_i(x')\rangle &\to \langle \tilde{\Phi}_i(x)\tilde{\Phi}_i(x')\rangle \\ = \langle (\lambda)^{\Delta_i}\Phi_i(\lambda x)(\lambda)^{\Delta_i}\Phi(\lambda x')\rangle &= (\lambda)^{2\Delta_i}\langle \Phi(\lambda x)\Phi(\lambda x')\rangle \\ = (\lambda)^{2\Delta_i}\frac{1}{|\lambda x - \lambda x'|^{2\Delta_i}} &= \frac{1}{|x-x'|^{2\Delta_i}} \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

Elle reste bien inchangée. En fait, le raisonnement se fait dans le sens inverse : on demande la symétrie par rapport à la transformation des opérateurs (1.2.16) et ensuite on trouve que la forme (1.2.8) est la seule compatible. C.-à-d., la symétrie d'échelle fixe la forme des fonctions à deux points. Mais pas des fonctions à trois points et plus.

Pour la transformation d'échelle (1.2.15) on a

$$(dx^\mu)^2 \to (d\tilde{x}^\mu)^2 = \lambda^2 (dx^\mu)^2 \tag{1.2.18}$$

Cette forme locale, qui correspond aux dilatation des distances locales, se généralise en la transformation conforme. La transformation d'espace

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu(x) \tag{1.2.19}$$

est dite conforme si

$$(dx^\mu)^2 \to (d\tilde{x}^\mu)^2 = \lambda^2(x)(dx^\mu)^2 \tag{1.2.20}$$

Localement, on a transformation d'échelle, ou dilatation, mais le facteur de dilatation λ varie, en général, avec x et est différent pour des points d'espace différents.

Pour les opérateurs d'une théorie conforme on a, naturellement :

$$\Phi(x) \to \tilde{\Phi}(x) = (\lambda(x))^\Delta \Phi(\tilde{x}(x)) \tag{1.2.21}$$

Les transformations correspondantes aux translations, rotations

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + b^\mu + \Omega^{\mu\nu} x^\nu \tag{1.2.22}$$

(nous utilisons toujours la métrique euclidienne) et transformation d'échelle

$$\tilde{x}^\mu = \lambda x^\mu \tag{1.2.23}$$

sont conformes de façon triviale. Dans (1.2.22), (1.2.23), $b^\mu, \Omega^{\mu\nu}, \lambda$ sont des coefficients constants, ils ne dépendent pas de x. Pour (1.2.22), (1.2.23) la propriété (1.2.20) est évidente. En plus des transformations (1.2.22) et (1.2.23) dans l'espace de dimension D générale, il existe une transformation qui vérifie la condition de "conformité" (1.2.20). Elle est appelée la transformation conforme spéciale et se présente comme suit

$$\tilde{x}^\mu = \frac{\frac{x^\mu}{(x)^2} + \alpha^\mu}{(\frac{x^\mu}{(x)^2} + \alpha^\mu)^2} \tag{1.2.24}$$

ou, plus souvent, et de façon équivalente, comme

$$\frac{\tilde{x}^\mu}{(\tilde{x})^2} = \frac{x^\mu}{(x)^2} + \alpha^\mu \tag{1.2.25}$$

La structure de cette transformation est simple. On prend la transformation de l'inversion d'espace

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = \frac{x^\mu}{(x)^2} \tag{1.2.26}$$

combinée avec la translation par un vecteur α^μ, et on trouve (1.2.24).

Vérifions d'abord que l'inversion (1.2.26) est conforme, éq.(1.2.20).

$$d\tilde{x}^\mu = \frac{(x)^2 dx^\mu - 2x^\mu x^\nu dx^\nu}{(x)^4} \tag{1.2.27}$$

$$(d\tilde{x}^\mu)^2 = \frac{1}{(x)^8}((x)^4(dx)^2 - 4(x)^2 x^\mu dx^\mu x^\nu dx^\nu + 4(x)^2(x^\nu dx^\nu)^2) = \frac{1}{(x)^4}(dx^\mu)^2 \tag{1.2.28}$$

Ceci est bien de la forme (1.2.20) avec $\lambda(x) = \frac{1}{(x)^2}$. Maintenant, on combine l'inversion avec la translation :

$$\begin{aligned} x^\mu \to x_1^\mu &= \frac{x^\mu}{(x)^2} \\ x_2^\mu = x_1^\mu + \alpha^\mu &= \frac{x^\mu}{(x)^2} + \alpha^\mu \\ x_3^\mu \equiv \tilde{x}^\mu = \frac{x_2^\mu}{(x_2)^2} &= \frac{\frac{x^\mu}{(x)^2} + \alpha^\mu}{(\frac{x^\mu}{(x)^2} + \alpha^\mu)^2} \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

et on trouve l'éq.(1.2.24). Cette transformation est conforme comme la combinaison de deux transformations qui sont conformes. Il faut remarquer que la transformation conforme spéciale (1.2.24), (1.2.25) possède un paramètre vectoriel α^μ. Ceci correspond au fait que l'on peut effectuer l'inversion par rapport à n'importe quel point d'espace, pas seulement par rapport à $x = 0$.

Pour chercher les conséquences d'une symétrie, il est beaucoup plus pratique d'utiliser la forme infinitésimale d'une transformation correspondante. Ceci permet d'écrire les équations sous une forme linéaire dans le paramètre de transformation, forme beaucoup plus simple pour tirer des conséquences. Donc, il nous faut la forme infinitésimale de la transformation conforme spéciale (1.2.24), la forme linéaire en α^μ, pour α^μ petit. On la trouve de la façon suivante :

$$\tilde{x}^\mu = (\tilde{x})^2(\frac{x^\mu}{x^2} + \alpha^\mu) \tag{1.2.30}$$

$$\tilde{x}^\mu \equiv x^\mu + \delta x^\mu \tag{1.2.31}$$

$$x^\mu + \delta x^\mu \approx ((x)^2 + 2(x\delta x))(\frac{x^\mu}{(x)^2} + \alpha^\mu) \tag{1.2.32}$$

$$\delta x^\mu \simeq \frac{2(x\delta x)}{(x)^2} x^\mu + (x)^2 \alpha^\mu \tag{1.2.33}$$

On trouve $(x\delta x)$ en multipliant l'éq.(1.2.33) par x^μ :

$$(x\delta x) = 2(x\delta x) + (x)^2(\alpha x) \tag{1.2.34}$$

$$(x\delta x) = -(x)^2(\alpha x) \tag{1.2.35}$$

De (1.2.33) et (1.2.35) on trouve la forme infinitésimale de la transformation conforme spéciale :

$$\delta x^\mu = (x)^2\alpha^\mu - 2(\alpha x)x^\mu \tag{1.2.36}$$

Calculons $(d\tilde{x})^2$, toujours en gardant seulement les termes linéaires en α^μ :

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + (x)^2\alpha^\mu - 2(\alpha x)x^\mu \tag{1.2.37}$$

$$\begin{aligned} d\tilde{x}^\mu &= dx^\mu + 2(xdx)\alpha^\mu - 2(\alpha dx)x^\mu - 2(\alpha x)dx^\mu \\ &= dx^\mu(1-2(\alpha x)) + 2(xdx)\alpha^\mu - 2(\alpha dx)x^\mu \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

$$(d\tilde{x})^2 \approx (dx)^2(1-4(\alpha x)) + 4(xdx)(\alpha dx) - 4(\alpha dx)(xdx) \tag{1.2.39}$$

$$(d\tilde{x})^2 \approx (1-4(\alpha x))(dx)^2 \tag{1.2.40}$$

On a bien la forme conforme (1.2.20) avec

$$\lambda(x) \approx 1 - 2(\alpha x) \tag{1.2.41}$$

Nous rappelons que la transformation conforme spéciale était engendrée par l'inversion, qui est conforme. On peut se convaincre que dans l'espace de dimension $D > 2$, il n'y a pas d'autres transformations qui possèdent la propriété $(d\tilde{x})^2 = \lambda^2(x)(dx)^2$, à part des translations, rotations, dilatations et inversion $\rightarrow$ transformation conforme spéciale.

Etudions maintenant les conséquences de la transformation conforme spéciale, qui est supposée être la symétrie d'une théorie, pour les fonctions de corrélation. Prenons le cas de la fonction de trois opérateurs :

$$\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3)\rangle \equiv G(r_{12}, r_{13}, r_{23}) \tag{1.2.42}$$

$$r_{12} = |x_1 - x_2|, ... \tag{1.2.43}$$

Nous avons pris en compte la symétrie par rapport aux translations et rotations en supposant que la fonction de corrélation ne dépend que des trois distances r_{12}, r_{13}, r_{23}. Après une transformation conforme spéciale on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \langle \tilde{\Phi}_1(x_1)\tilde{\Phi}_2(x_2)\tilde{\Phi}_3(x_3)\rangle \\ &= \langle (\lambda(x_1))^{\Delta_1}\Phi_1(\tilde{x}(x_1))(\lambda(x_2))^{\Delta_2}\Phi_2(\tilde{x}(x_2))(\lambda(x_3))^{\Delta_3}\Phi_3(\tilde{x}(x_3))\rangle \\ &\approx (1-2\Delta_1(\alpha x_1))(1-2\Delta_2(\alpha x_2))(1-2\Delta_3(\alpha x_3)) \\ &\quad \times\langle \Phi_1(x_1+\delta x_1)\Phi_2(x_2+\delta x_2)\Phi_3(x_3+\delta x_3)\rangle \\ &= (1-2\Delta_1(\alpha x_1))(1-2\Delta_2(\alpha x_2))(1-2\Delta_3(\alpha x_3)) \\ &\quad \times G(r_{12}+\delta r_{12}, r_{13}+\delta r_{13}, r_{23}+\delta r_{23}) \end{aligned} \tag{1.2.44}$$

$$\begin{aligned} \delta G \equiv \tilde{G} - G &\approx (-2\Delta_1(\alpha x_1) - 2\Delta_2(\alpha x_2) - 2\Delta_3(\alpha x_3))G \\ &\quad + (\delta r_{12}\partial_{12}G + \delta r_{13}\partial_{13}G + \delta r_{23}\partial_{23}G) = 0 \end{aligned} \tag{1.2.45}$$

Nous utilisons la notation :

$$\frac{\partial}{\partial r_{12}} = \partial_{12}, ... \tag{1.2.46}$$

Ensuite :

$$\delta r_{12} = \delta|x_1 - x_2| = \frac{1}{r_{12}}(x_1 - x_2)^\mu(\delta x_1 - \delta x_2)^\mu \tag{1.2.47}$$

Par l'éq.(1.2.36) $\delta x_1^\mu = (x_1)^2\alpha^\mu - 2(\alpha x_1)x_1^\mu, ...$ Donc

$$\delta r_{12} = \frac{1}{r_{12}}(x_1 - x_2)^\mu((x_1)^2\alpha^\mu - 2(\alpha x_1)x_1^\mu - (x_2)^2\alpha^\mu + 2(\alpha x_2)x_2^\mu) \tag{1.2.48}$$

Après un petit calcul on trouve

$$\delta r_{12} = -((\alpha x_1) + (\alpha x_2))r_{12} \tag{1.2.49}$$

De la même manière on calcule $\delta r_{13}, \delta r_{23}$. L'équation (1.2.45) s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}(-2\Delta_1(\alpha x_1) - 2\Delta_2(\alpha x_2) - 2\Delta_3(\alpha x_3))G - ((\alpha x_1) + (\alpha x_2))r_{12}\partial_{12}G \\ -((\alpha x_1) + (\alpha x_3))r_{13}\partial_{13}G - ((\alpha x_2) + (\alpha x_3))r_{23}\partial_{23}G = 0\end{aligned} \tag{1.2.50}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}(\alpha x_1)(-2\Delta_1 G \quad &- \quad r_{12}\partial_{12}G - r_{13}\partial_{13}G) + (\alpha x_2)(-2\Delta_2 G - r_{12}\partial_{12}G - r_{23}\partial_{23}G) \\ &+ \quad (\alpha x_3)(-2\Delta_3 G - r_{13}\partial_{13}G - r_{23}\partial_{23}G) = 0\end{aligned} \tag{1.2.51}$$

Comme le paramètre vectoriel α^μ est arbitraire, on peut choisir :

1) α^μ orthogonal aux x_2^μ et x_3^μ,

Deuxième choix :

2) α^μ orthogonal aux x_1^μ et x_3^μ.

Et le troisième choix :

3) α^μ orthogonal aux x_1^μ et x_2^μ.

De cette manière on trouve que l'équation (1.2.51) ci-dessus pourrait être séparée sur les trois équations indépendantes :

$$-2\Delta_1 G - r_{12}\partial_{12}G - r_{13}\partial_{13}G = 0 \tag{1.2.52}$$

$$-2\Delta_2 G - r_{12}\partial_{12}G - r_{23}\partial_{23}G = 0 \tag{1.2.53}$$

$$-2\Delta_3 G - r_{13}\partial_{13}G - r_{23}\partial_{23}G = 0 \tag{1.2.54}$$

La solution de ce système d'équations est donnée par

$$G(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = \frac{A}{r_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} r_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2} r_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}} \tag{1.2.55}$$

A est une constante qu'on ne connaît pas, mais la dépendance sur les coordonnées r_{12}, r_{13}, r_{23} est définie complètement [1].

Pour les fonctions de corrélation de quatre opérateurs et plus, la symétrie par rapport à la transformation conforme spéciale pose des contraintes sur la forme des fonctions, mais elle ne les définit pas complètement comme dans le cas de la fonction de trois opérateurs. Pour plus de détails, consulter [1].

1.3 Exercices.

Exercice 1. Démontrer qu'en conséquence de la symétrie conforme spéciale, la fonction à deux points doit avoir la forme :

$$\langle \Phi_{\Delta_1}(x_1)\Phi_{\Delta_2}(x_2)\rangle = \frac{\delta_{\Delta_1,\Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}} \tag{1.3.1}$$

$$\delta_{\Delta_1,\Delta_2} = 1 \ \text{ pour } \ \Delta_1 = \Delta_2 \ \text{ et 0 autrement} \tag{1.3.2}$$

C-à-d. on a une sorte d'orthogonalité entre les opérateurs avec Δ différents.

Exercice 2. Démontrer que $\lambda(x)$ pour la transformation conforme speciale, éq.(1.2.24), est de la forme :

$$\lambda(x) = \frac{1}{1 + 2(\alpha x) + (x)^2(\alpha)^2} \tag{1.3.3}$$

Chapitre 2

2.1 Groupe conforme fini dans l'espace bidimensionnel.

Dans sa forme infinitésimale, la transformation conforme spéciale s'écrit :

$$\delta x^\mu = (x)^2 \alpha^\mu - 2(\alpha x) x^\mu \tag{2.1.1}$$

Passons aux coordonnées complexes $z, \bar{z}$ qui sont plus pratiques du point de vue de la transformation conforme, en $D = 2$. Notons :

$$z = x^1 + i x^2, \quad \bar{z} = x^1 - i x^2 \tag{2.1.2}$$

$$\alpha = \alpha^1 - i\alpha^2, \quad \bar{\alpha} = \alpha^1 + i\alpha^2 \tag{2.1.3}$$

Alors

$$(x)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 = z\bar{z} = |z|^2 \tag{2.1.4}$$

$$(\alpha x) = \alpha^1 x^1 + \alpha^2 x^2 = \frac{1}{2}(\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z}) \tag{2.1.5}$$

et on trouve, à partir de (2.1.1),

$$\delta z = \delta x^1 + i\delta x^2 = |z|^2 \bar{\alpha} - (\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z}) z$$

$$\delta z = -\alpha (z)^2 \tag{2.1.6}$$

De la même façon

$$\delta \bar{z} = -\bar{\alpha}(\bar{z})^2 \tag{2.1.7}$$

La forme finie de la transformation conforme spéciale est obtenue par intégration. Disons que α est la variation d'un paramètre fini A :

$$\alpha = \delta A \tag{2.1.8}$$

Alors

$$\delta z = -z^2 \delta A \tag{2.1.9}$$

Sous la transformation conforme spéciale on a :

$$\frac{dz}{dA} = -z^2 \tag{2.1.10}$$

Ensuite, on intègre cette équation :

$$\int_z^{\tilde{z}} \frac{dz}{z^2} = -\int_0^A dA \tag{2.1.11}$$

$$-\frac{1}{\tilde{z}} + \frac{1}{z} = -A \tag{2.1.12}$$

Finalement

$$\tilde{z} = \frac{z}{1 + zA} \tag{2.1.13}$$

qui est la forme finie de la transformation conforme spéciale.

Dans le groupe conforme, il y a en plus les transformations de translation, de rotation et de dilatation. Sous la forme infinitésimale, elles sont représentées par

$$\delta x^\mu = \beta^\mu + \omega^{\mu\nu} x^\nu \tag{2.1.14}$$

pour les translations et rotations, et par

$$\delta x^\mu = \gamma x^\mu \tag{2.1.15}$$

pour les dilatations. $\beta^\mu, \omega^{\mu\nu}, \gamma$ sont petits et en plus $\omega^{\mu\nu}$ est antisymétrique. Dans le cas bidimensionnel

$$\omega^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu}\omega \tag{2.1.16}$$

avec

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}, \;\; \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1 \tag{2.1.17}$$

En composantes, l'éq.(2.1.14) s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta x^1 &= \beta^1 + \omega x^2 \\ \delta x^2 &= \beta^2 - \omega x^1 \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Dans les coordonnées complexes, on obtient

$$\delta z \equiv \delta x^1 + i\delta x^2 = \beta - i\omega z \tag{2.1.19}$$

avec $\beta = \beta^1 + i\beta^2$ comme paramètre complexe et ω réel. En ajoutant à (2.1.19) la dilatation, éq.(2.1.15),

$$\delta z = \gamma z \tag{2.1.20}$$

on trouve

$$\delta z = \beta + (\gamma - i\omega)z \equiv \beta + \tau z \tag{2.1.21}$$

$\tau = \gamma - i\omega$ est un paramètre complexe, tout comme β. Dans l'éq. (2.1.21), on a ensemble la translation, la rotation et la dilatation, qui correspondent à quatre paramètres réels, ou à deux paramètres complexes, β et τ.

La transformation infinitésimale (2.1.21) est linéaire en z et la forme finie suit par des integrations simples. On peut écrire le résultat final sous la forme

$$\tilde{z} = az + b \tag{2.1.22}$$

où les paramètres a et b sont complexes et finis.

Rajoutons finalement la transformation conforme spéciale (2.1.13) aux transformations (2.1.22). Si on fait d'abord la transformation (2.1.22) et ensuite (2.1.13) on trouve

$$\tilde{z} = \frac{az + b}{1 + (az + b)A} = \frac{az + b}{1 + Ab + aAz} \tag{2.1.23}$$

Cette transformation est de la forme

$$\tilde{z} = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.1.24}$$

Il y a un paramètre complexe en plus dans (2.1.24) par rapport à (2.1.23). Mais il n'est pas pertinent parce qu'on peut, par exemple, diviser les deux parties de la fraction par d. D'habitude on utilise la paramétrisation (2.1.24) pour le groupe conforme bidimensionnel fini avec la condition supplémentaire

$$Det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 1 \tag{2.1.25}$$

qui nous laisse trois paramètres complexes libres, au lieu de quatre, tout comme dans (2.1.23).

La paramétrisation (2.1.24) est spécialement pratique car les transformations successives correspondent au produit des matrices correspondantes, formées des paramètres comme dans (2.1.25). En effet, il est facile de vérifier que si on fait d'abord la transformation

$$z_1 = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \tag{2.1.26}$$

et ensuite

$$z_2 = \frac{a_2 z_1 + b_2}{c_2 z_1 + d_2} \tag{2.1.27}$$

on obtient la transformation :

$$z_2 = \frac{a' z + b'}{c' z + d'} \tag{2.1.28}$$

avec les paramètres dans (2.1.28) qui sont obtenus par le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \tag{2.1.29}$$

La condition (2.1.25) est évidement préservée dans (2.1.29).

On peut constater que le groupe conforme fini dans $D = 2$ est équivalant au groupe $SL(2, C)$.

2.2 Transformation conforme générale en D=2. L'identité de Ward conforme pour les fonctions de corrélation.

Jusqu'à présent nous avons étudié le groupe conforme fini en dimension 2 qui est donné par des fonctions rationnelles des coordonnées complexes. Il est fini dans le sens que le nombre des paramètres, ou le nombre des transformations infinitésimales linéairement indépendantes, est fini. Ce groupe existe aussi dans les espaces de dimensions plus élevées, $D > 2$, comme nous l'avons vu dans le premier cours. L'espace bidimensionnel est spécial en ce sens où les fonctions rationnelles de la transformation (2.1.24) peuvent être remplacées par des fonctions analytiques générales et la transformation reste conforme. Le groupe, ou l'algèbre pour le cas des transformations infinitésimales, devient infini. En effet, si on transforme les coordonnées comme

$$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{\bar{z}} = \overline{f(z)} \tag{2.2.1}$$

avec $f(z)$ une fonction analytique quelconque, on trouve

$$|d\tilde{z}|^2 = |\frac{df(z)}{dz}|^2 |dz|^2 \tag{2.2.2}$$

qui est bien en accord avec la définition de conformité, voir cours 1,

$$(d\tilde{x}^\mu)^2 = (\lambda(x))^2 (dx^\mu)^2 \tag{2.2.3}$$

Dans (2.2.2) on a

$$(d\tilde{x}^\mu)^2 = |d\tilde{z}|^2, \quad (dx^\mu)^2 = |dz|^2$$

$$\lambda(z, \bar{z}) = |\frac{df(z)}{dz}| \tag{2.2.4}$$

Ce n'est qu'en dimension 2 que la métrique, dans des coordonnées complexes, se factorise sur dz et $d\bar{z}$:

$$(dx)^2 = dz d\bar{z} \tag{2.2.5}$$

ce qui permet de transformer z et $\bar{z}$ avec une fonction générale, en respectant la condition de conformité (2.2.3).

La théorie des champs conformes en dimension 2, basée sur l'algèbre conforme infinie, a été développée dans [2]. Nous allons présenter les résultats de cet article fondamental dans les trois cours qui suivent. Puis nous allons étudier les développements et généralisations de cette théorie.

Les opérateurs d'une théorie conforme bidimensionnelle se transforment naturellement selon

$$\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z, \bar{z}) \to \tilde{\Phi}_{\Delta,\bar{\Delta}}(z, \bar{z}) = (\frac{df(z)}{dz})^{\Delta} (\frac{\overline{df(z)}}{dz})^{\bar{\Delta}} \Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(f(z), \overline{f(z)}) \tag{2.2.6}$$

Comme dans le cas de la métrique éq.(2.2.2), la transformation conforme des opérateurs factorise sur des parties relatives à z et $\bar{z}$. Ceci permet d'avoir, en principe, des opérateurs avec des dimensions Δ et $\bar{\Delta}$ différentes. Nous verrons plus loin de tels opérateurs.

Comme nous avons déjà vu dans le cours 1, pour chercher les conséquences de la symétrie conforme pour des fonctions de corrélation, il faut définir la forme infinitésimale de la transformation conforme. Pour les coordonnées des points d'espace, on doit prendre

$$\tilde{z} = z + \alpha(z), \quad \tilde{\bar{z}} = \bar{z} + \overline{\alpha(z)} \tag{2.2.7}$$

au lieu de (2.2.1), avec $\alpha(z)$ une fonction analytique et qui est petite, infinitésimale. Mais alors se pose le problème suivant : il n'existe pas de fonction qui soit analytique dans tout le plan complexe et qui soit petite partout, sauf la fonction constante. Pour éviter ce problème, nous allons définir la transformation (2.2.7) dans une région D finie, voir Fig.1, disons dans le voisinage du point $z = 0$, avec $\alpha(z)$ analytique dans D, et nous allons mettre $\alpha(z) \equiv 0$ dans la partie extérieure à D. Cette manière de couper la fonction $\alpha(z)$ va produire des termes de bord, que nous allons examéner plus loin. La région D sera choisie pour contenir à l'intérieur les positions de tous les opérateurs d'une fonction de corrélation qu'on étudiera.

Une fonction analytique $\alpha(z)$ dans un domaine D contenant l'origine, $z = 0$, peut être développée en une série entière autour de $z = 0$:

$$\alpha(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n z^{n+1} \tag{2.2.8}$$

Comme les $|z|^{n+1}$ sont bornés dans D, on peut toujours choisir les coefficients $\{\alpha_n\}$ suffisamment petits pour rendre $\alpha(z)$ infinitésimale.

Les coefficients $\{\alpha_n\}$ sont les paramètres de la transformation conforme correspondante. Donc on a une symétrie qui est infinie, car décrite par un nombre infini de paramètres $\{\alpha_n\}$.

Pour les opérateurs on trouve, à partir de l'éq.(2.2.6), avec $f(z) = z + \alpha(z)$:

$$\tilde{\Phi}_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z}) = (1+\alpha'(z))^{\Delta}(1+\overline{\alpha'(z)})^{\bar{\Delta}}\Phi(z+\alpha(z), \bar{z}+\overline{\alpha(z)}) \tag{2.2.9}$$

(avec la notation, $\alpha'(z) \equiv d\alpha(z)/dz$). En gardant les termes d'ordre linéaire en $\alpha(z)$ (sur les coefficients $\{\alpha_n\}$) on trouve la variation correspondante :

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha(z)}\Phi(z,\bar{z}) &\equiv (\tilde{\Phi}(z,\bar{z}) - \Phi(z,\bar{z})) \\ &\approx (\Delta\alpha'(z) + \alpha(z)\partial_z + \bar{\Delta}\overline{\alpha'(z)} + \overline{\alpha(z)}\partial_{\bar{z}})\Phi(z,\bar{z}) \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Considérons maintenant une fonction de corrélation générale :

$$\langle \Phi_1(z_1,\bar{z_1})\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle \tag{2.2.11}$$

Supposons qu'elle soit donnée par une intégrale fonctionnelle sur un champ fondamental $\varphi(z,\bar{z})$, avec $\Phi_1, \Phi_2, ...,$ des opérateurs construits à partir du champ φ :

$$\langle \Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \frac{\int D\varphi e^{-A[\varphi]}\Phi_1\Phi_2...\Phi_N}{\int D\varphi e^{-A[\varphi]}} \tag{2.2.12}$$

$A[\varphi]$ est une action pour le champ φ. Effectuons la variation dans cette intégrale fonctionnelle du champ φ qui correspond à la transformation conforme de l'espace (des coordonnées $z, \bar{z}$) et des opérateurs. Le résultat, c.-à-d. la variation de l'intégrale (2.2.12), doit être égale à zéro, parce qu'il ne s'agit que d'un changement d'une variable d'intégration dans l'intégrale (fonctionnelle),

$$\varphi(z,\bar{z}) \to \tilde{\varphi}(z,\bar{z}) = \varphi(z,\bar{z}) + \delta\varphi(z,\bar{z}) \tag{2.2.13}$$

Mais d'autre part, on trouve deux termes : le premier est produit par la variation de l'action $A[\varphi]$ et le deuxième est dû à la variation des opérateurs - des "sources" dans l'intégrale (2.2.12), comp. éq.(2.2.10). La somme des deux termes doit être nulle. De cette manière, on trouve l'équation :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi[\alpha(\xi)\langle T_{zz}(\xi,\bar{\xi})\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle + \overline{\alpha(\xi)}\langle T_{\bar{z}z}(\xi,\bar{\xi})\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle] \\ -&\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\bar{\xi}[\overline{\alpha(\xi)}\langle T_{\bar{z}\bar{z}}(\xi,\bar{\xi})\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle + \alpha(\xi)\langle T_{z\bar{z}}(\xi,\bar{\xi})\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle] \\ &= \sum_{i=1}^{N}[\Delta_i\alpha'(z_i) + \alpha(z_i)\partial_i + \bar{\Delta}_i\alpha'(z_i) + \overline{\alpha(z_i)}\bar{\partial}_i]\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

La partie gauche de cette équation correspond au terme de bord

$$\langle\delta A[\phi]\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \frac{2}{\pi}\oint_C ds^\mu\alpha^\nu\langle T_{\mu\nu}\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{2.2.15}$$

(pour la définition de ds^μ voir Fig.2) qui est produit par la variation de l'action $A[\varphi]$, avec $\alpha(z)$, un paramètre (fonctionnel) de déformation conforme borné par C, Fig.1. Donc, même avec l'action $A[\varphi]$ qui est supposée d'être invariante conforme, on trouve des termes de bord car $\alpha(z)$ fait un saut sur C. La forme (2.2.15) est familière dans la dérivation des lois de conservation par le théorème de Noether pour une symétrie par rapport à la translation. [1]. $\alpha(z)$ joue le rôle d'un paramètre de translation, comp.éq.(2.2.7), mais ici la symétrie est encore plus souple, le paramètre de translation variant comme une fonction analytique (holomorphe) des coordonnées. Le coefficient $\frac{2}{\pi}$ devant l'intégrale (2.2.15) correspond à un choix particulier de normalisation de $T_{\mu\nu}$, ou de l'action $A[\varphi]$.

Les composantes du tenseur énergie – impulsion dans les coordonnées complexes, qui figurent dans l'éq.(2.2.14), sont liées aux composantes euclidiennes selon [2]

$$T_{zz} = (T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}) \tag{2.2.16}$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = (T_{11} - T_{22} + 2iT_{12}) \tag{2.2.17}$$

[1]Un exemple de la dérivation est donné dans l'Appendice de ce cours

[2]Les transformations standard des composantes de $T_{\mu\nu}$, qui suivent les changements des coordonnées, donneront, en effet, $T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{11} - T_{22} - 2iT_{12})$, etc. . Nous avons choisi de définir les composantes complexes T_{zz}, $T_{\bar{z}\bar{z}}$, $T_{z\bar{z}}$ comme dans les éqs.(2.1.16)-(2.1.18), pour s'accorder avec la définition utilisée habituellement dans la théorie conforme.

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = (T_{11} + T_{22}) \tag{2.2.18}$$

[Le passage entre l'expression (2.2.15) dans les composantes euclidiennes et la partie gauche de l'éq.(2.2.14) est proposé comme exercice à la fin de ce cours].

L'équation (2.2.14) est déjà l'identité de Ward, mais sous sa forme intégrale. Dans le cas de la symétrie conforme, on peut aller plus loin et obtenir l'identité de Ward sous une forme locale.

D'abord, nous allons simplifier l'éq.(2.2.14) en tirant les conséquences pour les cas de certains $\alpha(z)$ spéciaux. Quand on prend, séparément,

$$1)\ \ \alpha(z) = a \tag{2.2.19}$$

et

$$2)\ \ \alpha(z) = b(z - z_0) \tag{2.2.20}$$

avec a, b, z_0 des paramètres constants (indépendants de z), on trouve, à partir de l'éq.(2.2.14),les lois de conservation correspondantes à la translation et à la dilatation :

$$1)\ \ \partial_{\bar{z}}\langle T_{zz}(z,\bar{z})\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = 0 \tag{2.2.21}$$

et

$$2)\ \ \langle T_{z\bar{z}}(z,\bar{z})\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = 0 \tag{2.2.22}$$

pour $z \neq z_i, i = 1, 2, ..., N$. [Nous laissons la démonstration comme exercice 2 de ce cours]. L'éq.(2.2.21) nous dit que dans les fonctions de corrélation en général la composante T_{zz} ne dépend pas de $\bar{z}$. Donc T_{zz} est un opérateur holomorphe. Évidemment, de la même façon on trouve que $T_{\bar{z}\bar{z}}$ est un opérateur antiholomorphe,

$$T_{zz} \equiv T(z), \quad T_{\bar{z}\bar{z}} \equiv \bar{T}(\bar{z}) \tag{2.2.23}$$

Par l'éq.(2.2.22)

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \tag{2.2.24}$$

Cette équation correspond à l'annulation de la trace de l'opérateur d'énergie-impulsion, comp.éq.(2.2.18), propriété bien connue pour les théories invariantes sous les dilatations.

En utilisant cette information partielle, obtenue de l'éq.(2.2.14), on peut réduire l'équation (2.2.14) elle-même en une forme plus simple. Comme $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$, et T_{zz} ne dépend que de z, $T_{\bar{z}\bar{z}}$ de $\bar{z}$, on observe que l'éq.(2.2.14) se découple en deux équations indépendantes (on peut considérer $\alpha(z)$ et $\overline{\alpha(z)}$ comme deux fonctions indépendantes) – la partie z et la partie $\bar{z}$. La partie z de (2.2.14) s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi \alpha(\xi)\langle T(\xi)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \sum_i(\alpha'(z_i)\Delta_i + \alpha(z_i)\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{2.2.25}$$

Évidemment, c'est une réduction importante. L'équation avec deux variables ξ et $\bar{\xi}$ et deux fonctions $\alpha(\xi)$ et $\overline{\alpha(\xi)}$, mélangées dans (2.2.14), s'est réduite en une equation en une variable ξ et une fonction analytique $\alpha(\xi)$. Dans un certain sens, on a une réduction dimensionnelle $2D \rightarrow 1D$.

L'équation (2.2.25), qui est encore intégrale, peut être réduite maintenant à une équation locale. Ecrivons la partie droite de (2.2.25) comme la somme des intégrales de contour :

$$\sum_{i=1}^{N}(\alpha(z_i)\partial_i + \alpha'(z_i)\Delta_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} d\xi\alpha(\xi)(\frac{\Delta_i}{(\xi - z_i)^2} + \frac{1}{\xi - z_i}\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{2.2.26}$$

–voir Fig.3, et ensuite les contours $\{C_i\}$ peuvent être déformés jusqu'à se réunir en un seul contour C qui entoure tous les points. L'équation (2.2.25) s'écrit alors comme

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\alpha(\xi)\langle T(\xi)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\alpha(\xi)\sum_{i=1}^{N}(\frac{\Delta_i}{(\xi - z_i)^2} + \frac{1}{\xi - z_i}\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{2.2.27}$$

On a une équation de la forme

$$\oint_C dz\alpha(z)f(z) = 0 \tag{2.2.28}$$

avec

$$f(z) = \langle T(z)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle - \sum_{i=1}^{N}(\frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i}\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{2.2.29}$$

et avec la fonction $\alpha(z)$ qui est arbitraire. C.-à-d. on demande que l'intégrale (2.2.28) soit nulle pour tous les choix de la fonction $\alpha(z)$. Alors, il faut que $f(z)$ soit nulle. Donc, dans (2.2.27) on peut enlever l'intégrale et on obtient ainsi l'identité de Ward pour les fonctions de corrélation sous sa forme locale :

$$\langle T(z)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \sum_{i=1}^{N}(\frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i}\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{2.2.30}$$

2.3 Exercices.

Exercice 1. Démontrer le passage entre l'expression (2.2.15) et la partie gauche de l'équation (2.2.14). Il faudra remarquer que, avec ds^μ défini dans la Fig.2, on a les relations : pour $dz = dx^1 + idx^2, ds = ds^1 + ids^2$ on a $ds = \frac{1}{i}dz, d\bar{s} = -\frac{1}{i}d\bar{z}$.

Exercice 2. Avec les choix de $\alpha(z)$ dans (2.2.19), (2.2.20) retrouver, à partir de l'éq.(2.2.14), les équations (2.2.21), (2.2.22). Il faudra modifier le chemin d'intégration

C appropriement, pour faire disparaître les termes de droite dans l'éq.(2.2.14). Ensuite, il faudra passer de l'intégrale sur le bord C vers l'intégrale dans le domaine D en utilisant les formules :

$$\frac{1}{2i}\oint_C dz \;\; F(z,\bar{z}) = \int_D d^2x \;\; \partial_{\bar{z}} F(z,\tilde{z}) \tag{2.3.1}$$

$$-\frac{1}{2i}\oint_C d\bar{z} \;\; F(z,\bar{z}) = \int_D d^2x \;\; \partial_z F \tag{2.3.2}$$

Ces équations suivent, en particulier, du théorème de Stokes, pour des intégrales, sous passage aux coordonnées complexes, dans le cas bidimensionnel.

Exercice 3. Pour que l'argument, basé sur l'équation (2.2.28), soit valable ($f(z) = 0$, si $\alpha(z)$ est arbitraire) il faut que tous les points singuliers de la fonction $f(z)$ soient à l'interieure du chemin C.

Préciser la vérification de cette condition pour $f(z)$ donnée par l'éq.(2.2.29). Donner les raisons pour cette condition.

Considérer un contre-exemple : si, initiallement, un des opérateur, Φ_N par exemple, se trouvait en-dehors du domaine D, borné par C, et on suivait les mêmes étapes, qu'est-ce qu'on trouverait à la place de l'équation (2.2.30) en se permettant d'enléver l'intégration dans l'éq.(2.2.27).

2.4 APPENDICE. Un exemple de la dérivation de l'équation $\delta A = \oint_C ds^\mu a^\nu T_{\mu\nu}$.

Prenons un exemple de la théorie d'un champ $\varphi(x)$ dont l'action est donnée par l'intégrale :

$$A[\varphi] = \int d^2x L(\varphi(x), \varphi_{,\mu}(x)) \tag{2.4.1}$$

Lagrangien L est supposé être une fonction locale de $\varphi(x)$ et de sa première dérivée $\varphi_{,\mu}(x) \equiv \partial_\mu \varphi(x)$. On admet L d'être invariant par rapport à la translation.

Dans cet exemple nous considérerons une théorie bidimensionnelle, ce qui permet de dresser des figures simples et suffisamment explicites.

Dans la Fig.51 est représentée une configuration particulière du champ $\varphi(x)$, dans une section unidimensionnelle. Réalisons maintenant une transformation de $\varphi(x)$ qui est induite par la translation de la coordonnée x :

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu(x) \tag{2.4.2}$$

où

$$a^\mu(x) = \begin{cases} a^\mu, & x^\mu \in D \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{2.4.3}$$

a^μ est un petit vecteur, constant pour $x \in D$. La région D, (où x^μ est translaté), est marquée dans la Fig.52 et sa section unidimensionnelle est également marquée dans la Fig.51. La transformation correspondante de $\varphi(x)$ sera de la forme :

$$\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x + a(x)) = \begin{cases} \varphi(x+a), & x \in D \\ \varphi(x), & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{2.4.4}$$

Le profil de la fonction $\tilde{\varphi}(x)$ est présenté dans la Fig.53. A cause de la discontinuité de la transformation de x^μ (2.4.2), (2.4.3), la fonction $\tilde{\varphi}(x)$, éq.(2.4.4) et Fig.53, est discontinue sur le bord du domaine D, la courbe C, Fig.52.

Par définition, la variation de l'action $A[\varphi]$ est donnée par :

$$\delta A[\varphi] = A[\tilde{\varphi}] - A[\varphi], \text{ ordre } a \tag{2.4.5}$$

Dans la différence à droite, seulement les termes linéaires en a (paramètre de la transformation) doivent être retenus. Avec cette convention, on trouve :

$$\begin{aligned} \delta A[\varphi] &= \int_D d^2x L(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}_{,\mu}(x)) - \int_d d^2x L(\varphi(x), \varphi_{,\mu}(x)) \\ &= \int_D d^2x L(\varphi(x+a), \varphi_{,\mu}(x+a)) - \int_D d^2x L(\varphi(x), \varphi_{,\mu}(x)) \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

En principe, on doit intégrer, dans les deux intégrales ci-dessus, sur tout le plan bidimensionnel (sur tout l'espace) mais, dans la différence, la contribution de la partie extérieure de D disparait (voir la forme de $\tilde{\varphi}(x)$, éq.(2.4.4)). Dans la première intégrale de l'éq. (2.4.6), au lieu de développer en a, nous préférons d'exprimer l'intégrale en fonction de la variable $\tilde{x} = x + a$. On trouve :

$$\delta A[\varphi] = \int_{\tilde{D}} d^2\tilde{x} L(\varphi(\tilde{x}), \varphi_{,\mu}(\tilde{x})) - \int_D d^2x L(\varphi(x), \varphi_{,\mu}(x)) \tag{2.4.7}$$

Après le passage à la variable $\tilde{x}$, la fonction qu'on intègre dans la première intégrale redevient la même qu'en deuxième, mais le domaine d'intégration change : $D \to \tilde{D}$, voir les Figs.54,55. Alors, en examinant la Fig.54, on doit conclure que, provenant de la différence de deux intégrales dans l'éq.(2.4.7), il y a deux contributions distinctes dans δA.

La première, que nous allons noter $\delta A_{reg.}$, la contribution régulière, est de la forme :

$$\delta A_{reg}[\varphi] = \int_{\delta D} d^2\tilde{x} L(\varphi(\tilde{x}), \varphi_{,\mu}(\tilde{x})) \tag{2.4.8}$$

Nous pouvons remplacer $\tilde{x}$ par x (ce n'est qu'un changement de notation). Ensuite, d^2x pourrait être explicité comme suit :

$$d^2x = \epsilon^{\mu\nu} dx^\nu a^\mu = ds^\mu a^\mu \tag{2.4.9}$$

– voir la Fig.55. On trouve :

$$\delta A_{reg}[\varphi] = \oint_C ds^\mu a^\mu L = \oint_C ds^\mu a^\nu \delta_{\mu\nu} L \tag{2.4.10}$$

La deuxième contribution dans δA est dûe à la discontinuité de $\varphi(\tilde{x})$ dans la première intégrale dans l'éq.(2.4.7), voir la Fig.54. Nous allons la noter $\delta A_{saut}[\varphi]$. Elle est de la forme :

$$\delta A_{saut}[\varphi] = \oint_C ds^\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}} \cdot \Delta\varphi \tag{2.4.11}$$

$\Delta\varphi$ est la discontinuité de $\varphi(\tilde{x})$ sur le bord du domaine $\tilde{D}$. Egalement, car l'integrale dans (2.4.11) est déjà d'ordre a, nous pouvons supprimer les tildes et intégrer sur le bord du domaine D, la courbe C, au lieu de $\tilde{C}$. On observe que :

$$\Delta\varphi = \varphi(x) - \varphi(x+a) \tag{2.4.12}$$

– comme on le voit clairement dans la Fig.53 ; x dans (2.4.12) est supposé d'être sur le bord du domaine D. Alors :

$$\Delta\varphi = -a^\mu \partial_\mu \varphi(x), \;\; \text{ordre } \; a \tag{2.4.13}$$

et on obtient :

$$\delta A_{saut}[\varphi] = \oint_C ds^\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}} \cdot (-a^\nu \partial_\nu \varphi(x)) \tag{2.4.14}$$

En mettant ensemble $\delta A_{reg}[\varphi]$, éq.(2.4.10), et $\delta A_{saut}[\varphi]$, éq.(2.4.14), on trouve :

$$\delta A[\varphi] = \oint_C ds^\mu a^\nu (\delta_{\mu\nu} L - \partial_\nu \varphi \cdot \frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}}) \tag{2.4.15}$$

En général, par définition du tenseur d'énergie - impulsion $T_{\mu\nu}$:

$$\delta A[\varphi] = \oint_C ds^\mu a^\nu T_{\mu\nu} \tag{2.4.16}$$

où la variation $\delta A[\varphi]$ est induite par la transformation de translation du champ $\varphi(x)$, – translation discontinue qui est limitée par le domaine D, du bord C. Avec l'expression dans l'éq.(2.4.15), nous pouvons constater que nous avons bien obtenu $\delta A[\varphi]$ de la forme générale dans l'éq.(2.4.16), avec :

$$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} L - \frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}} \cdot \partial_\nu \varphi \tag{2.4.17}$$

Chapitre 3

3.1 Opérateurs primaires et opérateurs descendants. Algèbre de Virasoro pour les composantes de $T(z), \{L_n\}$.

Dans le cours précédent, nous avons obtenu l'équation

$$\langle T(z)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \sum_{i=1}^{N}(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \qquad (3.1.1)$$

qui est l'identité de Ward conforme. Pour arriver à ce résultat, nous avons utilisé la règle de transformation conforme infinitésimale des opérateurs $\{\Phi_i\}$:

$$\delta\Phi_\Delta(z) = (\Delta\alpha'(z) + \alpha(z)\partial_z)\Phi(z) \qquad (3.1.2)$$

qui est liée avec la transformation des coordonnées d'espace $z \to \tilde{z} = z + \alpha(z)$, donc $\delta z = \alpha(z)$. Dans (3.1.2) nous avons supprimé la partie $\bar{z}$ de la transformation, comp. éq.(2.2.10), cours 2. Comme nous l'avons vu dans le cours 2, dans l'identité de Ward conforme pour les fonctions de corrélation, les parties z et $\bar{z}$ des variations correspondantes se séparent. On peut donc étudier séparément les transformations des secteurs z et $\bar{z}$. Dans la suite, nous allons nous occuper du secteur z des propriétés conformes des opérateurs, en supprimant le secteur $\bar{z}$ qui, en principe, va en parallèle. Ceci sera fait jusqu'à l'étude de la technique du calcul des fonctions de corrélation dans la partie du cours portant sur la représentation de la théorie conforme minimale par un champ libre. A ce point, il faudra reprendre la partie $\bar{z}$ également.

Les opérateurs de la théorie conforme se transformant selon (3.1.2) sont appelés les opérateurs primaires. Dans la théorie conforme, il y en a d'autres que nous allons voir plus loin.

La partie droite de l'éq.(3.1.1) peut être développée en série par rapport à $(z-z_1)$. Supposons que l'on s'intéresse à ce qui se passe quand z s'approche du point z_1, on veut donc le développement en série de puissances de $z - z_1$. On trouve :

$$\sum_{i=1}^{N}(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = (\frac{\Delta_1}{(z-z_1)^2} + \frac{1}{z-z_1}\partial_1)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle$$

$$+\sum_{i=2}^{N}((1+\frac{z-z_1}{z_1-z_i})^{-2}\frac{\Delta_i}{(z_1-z_i)^2}+(1+\frac{z-z_1}{z_1-z_i})^{-1}\frac{1}{z_1-z_i}\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{3.1.3}$$

Le premier terme est singulier quand $z-z_1 \to 0$ et le deuxième, qui est régulier, peut être développé en série infinie de puissances de $z-z_1$ positives.

Le développement (3.1.3) doit être comparé avec le développement de l'algèbre des opérateurs pour le produit $T(z)\Phi_1(z_1)$ dans la fonction de corrélation à gauche de l'éq.(3.1.1) :

$$\begin{aligned} T(z)\Phi_1(z_1) &= \frac{\Delta_1}{(z-z_1)^2}\Phi_1(z_1)+\frac{1}{z-z_1}\partial_1\Phi_1(z_1)+\Phi_1^{(-2)}(z_1) \\ &+ (z-z_1)\Phi_1^{(-3)}(z_1)+(z-z_1)^2\Phi_1^{(-4)}(z_1)+... \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Les deux premiers termes correspondent aux deux termes singuliers dans le développement (3.1.3), donc on les écrit explicitement. Les termes suivants dans (3.1.4) contiennent de nouveaux opérateurs

$$\{\Phi_1^{(-n)}\}, \;\; n=2,3,4,... \tag{3.1.5}$$

comme coefficients de la série, et dont les fonctions de corrélations avec le reste des opérateurs sont données par les termes correspondants du développement (3.1.3). Par exemple,

$$\langle\Phi_1^{(-2)}(z_1)\Phi_2...\Phi_N\rangle=\sum_{i=2}^{N}(\frac{\Delta_i}{(z_1-z_i)^2}+\frac{1}{z_1-z_i}\partial_i)\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{3.1.6}$$

Donc, pour le moment, la définition des opérateurs $\{\Phi^{(-n)}\}, n=2,3,4,...$, n'est pas explicite, mais on donne leurs fonctions de corrélation, comme dans (3.1.6).

Rappelons que ces opérateurs nouveaux, formant une suite infinie, proviennent du produit $T(z)\Phi_1(z_1)$, éq.(3.1.4). Ils sont appelés “opérateurs descendants” par rapport à l'opérateur primaire Φ_1 qui est à l'origine de toute la série. On peut mieux organiser la définition de ces opérateurs en introduisant le développement de l'opérateur $T(z)$ en une série formelle de Laurent autour du point z_1 :

$$T(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_1)^{n+2}}L_n(z_1) \tag{3.1.7}$$

avec des coefficients $L_n(z_1)$ qui sont les opérateurs définis par (3.1.7). Ce sont les composantes de $T(z)$ par rapport à la décomposition de $T(z)$ dans la série de Laurent.

Maintenant, quand on reprend le produit $T(z)\Phi_1(z_1)$, on trouve :

$$T(z)\Phi_1(z_1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_1)^{n+2}}L_n(z_1)\Phi_1(z_1) \tag{3.1.8}$$

et les opérateurs descendants $\Phi^{(-n)}$, éqs.(3.1.4),(3.1.5), apparaissent comme le résultat de l'application de $L_n(z_1)$ sur $\Phi_1(z_1)$,

$$\Phi_1^{(n)}(z_1)=L_n(z_1)\Phi_1(z_1) \tag{3.1.9}$$

Quand on compare l'éq.(3.1.8) avec l'éq.(3.1.4), cette dernière étant la conséquence de l'identité de Ward conforme, éq.(3.1.1), on trouve :

$$L_n(z_1)\Phi_1(z_1) = 0, \quad n > 0 \tag{3.1.10}$$

$$L_0(z_1)\Phi_1(z_1) = \Delta\Phi_1(z_1) \tag{3.1.11}$$

$$L_{-1}(z_1)\Phi_1(z_1) = \partial_{z_1}\Phi_1(z_1) \tag{3.1.12}$$

$$L_{-n}(z_1)\Phi_1(z_1) = \Phi^{(-n)}(z_1), \quad n = 2, 3, 4, ... \tag{3.1.13}$$

Les deux dernières équations correspondent aux opérateurs nouveaux provenant de l'opérateur primaire Φ_1 en appliquant $L_{-n}, n = 1, 2, 3, 4, ...$ Ainsi, on a en général, pour Φ_Δ un opérateur primaire quelconque, une suite infinie d'opérateurs descendants à partir du développement du produit $T(z')\Phi_\Delta(z)$:

$$T\Phi_\Delta \to \{\Phi_\Delta^{(-n)} = L_{-n}\Phi_\Delta,\ n \geq 1\} \tag{3.1.14}$$

Les opérateurs descendants sont différents des opérateurs primaires principalement par leurs transformations conformes. Ce point sera détaillé dans la deuxième partie de ce cours.

Ensuite, on peut faire appliquer un produit de $T(z'), T(z'')$ sur $\Phi_\Delta(z)$ et développer. On trouve une autre suite infinie d'opérateurs :

$$T(z')T(z'')\Phi_\Delta(z) \to \{\Phi_\Delta^{(-n_1,-n_2)}(z) = L_{-n_1}(z)L_{-n_2}(z)\Phi_\Delta(z)\} \tag{3.1.15}$$

En général, on applique à Φ_Δ les opérateurs L_{-n} et on trouve une famille infinie d'opérateurs descendants de Φ_Δ :

$$\{\Phi_\Delta^{(-n_1,-n_2,...,-n_k)} = L_{-n_1}L_{-n_2}...L_{-n_k}\Phi_\Delta\} \tag{3.1.16}$$

où $n_1, n_2, ...n_k$ sont des entiers positifs. Pour arriver à la classification des opérateurs de cette famille il faut, premièrement, trouver la règle de commutation des $\{L_{-n}\}$, qui sont les composantes de $T(z)$.

A partir de l'éq.(3.1.8), on peut définir $L_n(z)$ appliqué à $\Phi_\Delta(z)$, par l'intégrale :

$$L_n(z)\Phi_\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_z} d\xi(\xi - z)^{n+1}T(\xi)\Phi(z) \tag{3.1.17}$$

Le contour C_z entoure le point z, voir Fig.4. Alors $L_nL_m\Phi(z)$ est donné par l'intégrale double :

$$L_nL_m\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{C_2} d\xi_2 \oint_{C_1} d\xi_1(\xi_2 - z)^{n+1}(\xi_1 - z)^{m+1}T(\xi_2)T(\xi_1)\Phi(z) \tag{3.1.18}$$

– voir Fig.5. Pour simplifier les notations, nous allons parfois supprimer la dépendance des $\{L_n\}$ en z, s'ils sont définis par rapport au même point que Φ, comme dans (3.1.18). Avec la représentation intégrale (3.1.18), la commutation L_nL_m sera égale à la différence de deux intégrales doubles comme dans (3.1.18), avec l'ordre des contours échangé, voir Fig.6. Après la déformation des contours indiquée dans la Fig.6., on trouve pour la différence l'intégrale

$$[L_n, L_m]\Phi(z) = \oint_{C_z} d\xi_1(\xi_1 - z)^{m+1} \oint_{C_{\xi_1}} d\xi_2(\xi_2 - z)^{n+1} T(\xi_2)T(\xi_1)\Phi(z) \quad (3.1.19)$$

avec les contours C_z, C_{ξ_1} indiqués dans la Fig.6, à droite. Pour calculer l'intégrale à l'intérieur, sur ξ_2, il faut connaître le développement du produit de $T(\xi_2)T(\xi_1)$, mais uniquement pour les termes singuliers, quand $\xi_2 \to \xi_1$. Rappelons que nous avons trouvé des termes singuliers, explicitement, dans le produit $T(z)\Phi_1(z_1)$, éq.(3.1.4), en utilisant l'identité de Ward avec la fonction $\langle T(z)\Phi_1(z_1)...\rangle$ à gauche dans l'éq.(3.1.1). Nous l'avons obtenu en partant de la fonction $\langle \Phi_1 ...\rangle$ et en faisant la transformation conforme, voir cours 2. Pour avoir un produit $T(z)T(z')$ dans une fonction de corrélation générale c.-à-d. une fonction $\langle T(z)T(z')\Phi_1(z_1)...\rangle$ à gauche dans l'éq.(3.1.1), il faut commencer avec $\langle T(z')\Phi_1 ...\rangle$ et poursuivre comme dans le cours 2. Il faudra utiliser, en plus, la variation de $T(z')$ correspondant à la transformation conforme d'espace, $\delta z = \alpha(z)$. Elle est de la forme :

$$\delta T(z) = (2\alpha'(z) + \alpha(z)\partial_z)T(z) + \frac{c}{12}\alpha'''(z) \quad (3.1.20)$$

Le premier terme est le même que pour un opérateur primaire Φ_Δ, éq.(3.1.2), avec $\Delta = 2$ pour $T(z)$. Mais le terme $\sim \alpha'''$ est nouveau.

La dimension $\Delta = 2$ de T est naturelle, canonique. En effet, on obtient T par la variation de l'action d'une théorie par rapport aux translations, ou par rapport aux transformations conformes dans le cas d'une théorie invariante conforme :

$$\delta A = \frac{2}{\pi} \oint_C ds^\mu \alpha^\nu T_{\mu\nu} \quad (3.1.21)$$

– comp. éqs.(2.2.13),(2.2.14) du cours 2. Comme l'action A, et donc la variation δA, est sans dimension (voir l'intégrale fonctionnelle, éq.(2.2.12), cours 2.), on trouve par analyse des dimensions dans la partie droite de (3.1.21) que $\Delta(T) = 2$.

Pour justifier le terme $\sim \alpha'''(z)$ dans (3.1.20), il est plus simple de voir d'abord les conséquences. Il est suggéré comme exercice à la fin de ce cours de démontrer que en faisant la variation conforme pour $\langle T(z')\Phi_1 ...\rangle$ et en utilisant la variation $\delta T(z')$ dans la forme (3.1.20), on obtient l'identité de Ward suivante :

$$\begin{aligned}\langle T(z)T(z')\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle &= \frac{c/2}{(z-z')^4}\langle \Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \\ &+ \left(\frac{2}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'}\right)\langle T(z')\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\partial_i\right)\langle T(z')\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

La conséquence de l'éq.(3.1.22) est que

$$\langle T(z)T(z')\rangle = \frac{c/2}{(z-z')^4} \quad (3.1.23)$$

Effectivement, par l'éq.(3.1.1), on a $\langle T(z)\rangle = 0$ et il ne reste que le premier terme dans (3.1.22) à droite, dans le cas de la fonction $\langle T(z)T(z')\rangle$ à gauche. Donc, dans la théorie des champs conformes avec la fonction à deux points $\langle T(z)T(z')\rangle$ non nulle, ce qui est naturel, il faut que $c \neq 0$ et que le terme $\sim \alpha'''$ dans δT, éq.(3.1.20), soit présent. Conclusion : par sa transformation conforme, l'opérateur $T(z)$ est différent des opérateurs primaires. Nous allons voir plus loin que $T(z)$ se trouve parmi les opérateurs descendants de l'opérateur identité, $I = \Phi_\Delta,\ \ \Delta = 0$. On peut remarquer en plus que la modification de δT, éq.(3.1.20), par le terme $\sim \alpha'''$ est la seule possible telle que la transformation infinitésimale soit linéaire en $\alpha(z)$ tout en gardant la dimension canonique $\Delta = 2$ de δT.

Retournons maintenant au commutateur $[L_n, L_m]\Phi(z)$ c.-à-d. au calcul de l'intégrale dans l'éq.(3.1.19). Il nous faut des termes singuliers dans le développement du produit $T(\xi_2)T(\xi_1)$. De l'identité de Ward (3.1.22), on trouve :

$$\begin{aligned} T(z)T(z') &= \frac{c/2}{(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2}T(z') + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'}T(z') \\ &\quad + \text{Termes réguliers, quand } \ z \to z' \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

En utilisant ce développement, on peut calculer l'intégrale sur ξ_2 dans (3.1.19) par le théorème des résidus. On trouve :

$$\begin{aligned} [L_n, L_m]\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_z} d\xi_1 (\xi_1 - z)^{m+1} \frac{c}{12} n(n^2-1)(\xi_1 - z)^{n-2}\Phi(z) \\ &+ (n-m)\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_z} d\xi_1 (\xi_1 - z)^{n+m+1} T(\xi_1)\Phi(z) \\ &= \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n,-m}\Phi(z) + (n-m)L_{n+m}\Phi(z) \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Finalement, on peut enlever l'opérateur $\Phi(z)$ et on trouve l'algèbre de commutation des $\{L_n\}$:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m} \tag{3.1.26}$$

Elle est appelée l'algèbre de Virasoro. En physique, elle est apparue pour la première fois dans l'étude des modèles duaux et de la théorie des cordes quantiques au début des années 70 [3]. Le coefficient c du terme non-homogène est appelé la charge centrale de l'algèbre de Virasoro.

3.2 Un ensemble de remarques.

Remarque 1. Le cas de l'algèbre (3.1.26) avec $c = 0$ correspond à l'algèbre des reparamétrisations d'une fonction :

$$f(x) \to \tilde{f}(x) = f(x + \alpha(x)) \tag{3.2.1}$$

$$\alpha(x) = \sum_n a_n x^{n+1} \tag{3.2.2}$$

$$\delta f(x) = \alpha(x)\partial_x f(x) = \sum_n a_n x^{n+1}\partial_x f(x) \tag{3.2.3}$$

On définit

$$l_n = -x^{n+1}\partial_x \tag{3.2.4}$$

et on vérifie que

$$[l_n, l_m] = (m-n)x^{n+m+1}\partial_x = (n-m)l_{n+m} \tag{3.2.5}$$

Remarque 2. Les $\{L_n\}$ peuvent être considérés comme générateurs des transformations conformes.

On peut interpréter l'identité de Ward conforme comme définissant la transformation des opérateurs qui se trouvent dans la fonction de corrélation :

$$\delta_{\alpha(z)}\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\alpha(\xi)\langle T(\xi)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{3.2.6}$$

Le contour C entoure tous les opérateurs, comme dans la Fig.1. La variation de la fonction à gauche est celle produite par des variations des opérateurs : si on l'écrit comme la somme des termes qui sont les variations des opérateurs, éq.(3.1.2), on retrouve l'identité de Ward sous la forme de l'éq.(2.2.25) du cours 2 :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}(\alpha'(z_i)\Delta_i + \alpha(z_i)\partial_{z_i})\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\alpha(\xi)\langle T(\xi)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Ecrivons maintenant $\alpha(\xi)$ sous la forme d'une série

$$\alpha(\xi) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n\xi^{n+1} \tag{3.2.8}$$

(comp.éq.(2.2.8), cours 2) dans l'éq.(3.2.6). On trouve :

$$\delta_{\alpha(z)}\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{\infty} a_n\oint_C d\xi\xi^{n+1}\langle T(\xi)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{3.2.9}$$

Par définition, éq.(3.1.17),

$$L_n(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\xi^{n+1}T(\xi) \tag{3.2.10}$$

on a donc,

$$\delta_{\alpha(z)}\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{\infty} a_n\langle L_n(0)(\Phi_1\Phi_2...\Phi_N)\rangle \tag{3.2.11}$$

Les $\{L_n(0)\}$ sont définis par rapport à l'origine, $z = 0$, et ils agissent sur tous les opérateurs $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N$, qui se trouvent à l'intérieur du contour C. Les coefficients $\{a_n\}$ apparaissent dans l'éq.(3.2.11) comme les paramètres et les $L_n(0)$ comme les générateurs de la transformation conforme (infinitésimale) de la fonction $\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle$.

Remarque 3. Il faut distinguer la représentation locale de $\{L_n\}$ et la représentation non-locale.

Localement les $\{L_n\}$ sont définis par rapport à $\Phi_\Delta(z)$ comme

$$L_n\Phi_\Delta(z) \equiv L_n(z)\Phi_\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_z} d\xi(\xi - z)^{n+1}T(\xi)\Phi_\Delta(z) \tag{3.2.12}$$

avec le contour C_z qui n'entoure que (la position de) l'opérateur $\Phi_\Delta(z)$. Dans ce cas les $\{L_n\}$ agissent sur $\Phi_\Delta(z)$, qui est l'opérateur primaire, comme

$$\begin{aligned} L_n\Phi_\Delta &= 0; \;\; n > 0 \\ L_0\Phi_\Delta &= \Delta\Phi_\Delta \\ L_{-1}\Phi_\Delta &= \partial\Phi_\Delta \equiv \Phi_\Delta^{(-1)} \\ L_{-n}\Phi_\Delta &= \Phi_\Delta^{(-n)}; \;\; n \geq 2 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Les $\{L_{-n}\}, n \geq 1$ produisent des opérateurs descendants. (3.2.13) est la conséquence de l'identité de Ward (3.1.1) comme nous l'avons vu au début de ce cours ce qui est la même chose que le développement du produit $T(z')\Phi(z)$ par l'algèbre des opérateurs autour du point z, éq. (3.1.4). Donc, (3.2.13) est l'action locale de $\{L_n\}$ sur $\Phi_\Delta(z)$.

Dans la représentation non-locale des $\{L_n\}$, donc l'action non-locale des $\{L_n\}$ sur $\Phi_\Delta(z)$, les $\{L_n\}$ sont définis par rapport à un point qui est différent de la position de $\Phi_\Delta(z)$. Par exemple, par rapport à l'origine, $z = 0$, comme dans l'éq.(3.2.10). Le contour C peut entourer plusieurs opérateurs dans la définition non-locale des $\{L_n\}$, comme dans l'éq.(3.2.11) et Fig.1. Dans ce cas, on peut définir le commutateur :

$$\begin{aligned} [L_n, \Phi_\Delta(z)] \equiv [L_n(0), \Phi_\Delta(z)] = L_n(\Phi_\Delta(z)...) - \Phi_\Delta(z)L_n(...) \\ \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\xi^{n+1}\langle T(\xi)\Phi_\Delta(z)...\rangle - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} d\xi\xi^{n+1}\langle T(\xi)\Phi_\Delta(z)...\rangle \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Les deux intégrales sont différentes par les contours d'intégrations C et C' [C entoure le point z et C' ne l'entoure pas] voir Fig.7. L'intégrale sur le contour dans la figure à droite, Fig.7, est calculé dans la limite $\xi \to z$ et en utilisant le développement du produit $T(\xi)\Phi(z)$. On trouve :

$$\begin{aligned} [L_n(0), \Phi_\Delta(z)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C''} d\xi\xi^{n+1} \times [(\frac{\Delta}{(\xi - z)^2} + \frac{1}{\xi - z}\partial_z)\langle\Phi(z)...\rangle \\ +\text{Termes réguliers, quand } \xi \to z] = (\Delta(n+1)z^n + z^{n+1}\partial_z)\langle\Phi_\Delta(z)...\rangle \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

On a donc dans la représentation non-locale l'action de $L_n(0)$ sur $\Phi_\Delta(z)$ définie comme le commutateur :

$$[L_n(0), \Phi_\Delta(z)] = (\Delta(n+1)z^n + z^{n+1}\partial_z)\Phi_\Delta(z) \tag{3.2.16}$$

Remarque 4. Dans le cours 1, nous avons utilisé l'invariance des fonctions de corrélations par rapport à la transformation conforme spéciale pour, en particulier, fixer la forme de la fonction à trois points. Dans l'espace bidimensionnel, le groupe conforme fini (transformation conforme spéciale, plus dilatation, rotation et translation) est engendré par la transformation infinitésimale avec

$$\delta z = \alpha(z) = a_{-1} + a_0 z + a_{+1} z^2 \tag{3.2.17}$$

–voir éqs.(2.1.6),(2.1.21), cours 2. D'autre part dans ce cours, pour $\alpha(z)$ générale et donc pour la transformation conforme générale, nous avons obtenu, comme identité de Ward, la variation de la fonction de corrélation donnée par l'intégrale dans la partie droite de l'éq.(3.2.6). Il n'y a pas de contradiction entre les deux développement parce que pour $\alpha(z)$ de la forme (3.2.17), l'intégrale dans (3.2.6) est nulle. Effectivement, le contour C va autour de tous les opérateurs, Fig.1. Donc, il peut être déformé vers l'infini, comme indiqué dans la Fig.8 (il n'y a pas d'obstacles, d'opérateurs à l'extérieur de C). Pour $\xi \to \infty (\xi \gg |z_i - z_j|$ dans (3.2.6)) :

$$\langle T(\xi)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \propto \langle T(\xi)T(0)\rangle + O(\frac{1}{\xi^5}) = \frac{c/2}{\xi^4} + O(\frac{1}{\xi^5}) \tag{3.2.18}$$

et donc pour $\alpha(\xi) = a_{-1} + a_0\xi + a_{+1}\xi^2$, éq.(3.2.17), l'intégrale dans (3.2.6) s'annule. On retrouve l'invariance de la fonction $\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle$ par rapport aux transformations du groupe conforme fini, qui est un sous-groupe dans le cas de l'espace bidimensionnel. Mais en général, on a l'identité de Ward pour une fonction de corrélation, éq.(3.2.6), comme conséquence de la symétrie de la théorie, au lieu de l'invariance simple.

Remarque 5. Le contour C dans l'éq.(3.2.6) peut être "distribué" parmi les opérateurs $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N$, voir la Fig.9, et on trouve

$$\delta_{\alpha(z)}\langle\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_k} d\xi\alpha(\xi)\langle T(\xi)\Phi_1\Phi_2...\Phi_N\rangle \tag{3.2.19}$$

Chaque intégrale à droite correspond à la variation d'un opérateur à gauche. Ainsi on a la variation d'un seul opérateur représentée par l'intégrale :

$$\delta_{\alpha(z)}\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_z} d\xi\alpha(\xi)T(\xi)\Phi(z) \tag{3.2.20}$$

où C_z n'entoure que l'opérateur $\Phi(z)$, Fig.10.

Pour l'opérateur primaire $\Phi(z)$, on utilise le développement de $T(\xi)\Phi(z)$, éq.(3.1.4), pour calculer l'intégrale dans (3.2.20) et on retrouve la variation $\delta\Phi$, éq.(3.1.2), qui est en lait notre point de départ. Ceci veut dire que les équations (3.1.2), (3.1.4) sont bien les mêmes que les équations (3.1.10)-(3.1.13). Les éqs. (3.1.2), (3.1.4) peuvent servir comme définitions pour les opérateurs primaires tout comme les équations (3.1.10)-(3.1.13).

Maintenant on peut progresser un peu avec des équations obtenues en calculant les variations conformes des opérateurs descendants. Par exemple, pour l'opérateur $\Phi_\Delta^{(-1)}(z)$, on a, par l'éq.(3.2.20) :

$$\delta_{\alpha(z)}\Phi_\Delta^{(-1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_z} d\xi\alpha(\xi)T(\xi)\Phi_\Delta^{(-1)}(z) \tag{3.2.21}$$

Calculons d'abord le développement pour $T(\xi)\Phi_\Delta^{(-1)}(z)$:

$$\begin{aligned} T(\xi)\Phi_\Delta^{(-1)}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\xi-z)^{n+2}}L_nL_{-1}\Phi_\Delta(z) \\ &= \frac{1}{(\xi-z)^3}L_{+1}L_{-1}\Phi_\Delta(z) + \frac{1}{(\xi-z)^2}L_0L_{-1}\Phi_\Delta(z) \\ &+ \frac{1}{\xi-z}L_{-1}L_{-1}\Phi_\Delta(z) + \text{Termes réguliers} \\ &= \frac{2\Delta}{(\xi-z)^3}\Phi_\Delta(z) + \frac{\Delta+1}{(\xi-z)^2}\Phi_\Delta^{(-1)}(z) \\ &+ \frac{1}{\xi-z}\partial_z\Phi_\Delta^{(-1)}(z) + \text{Termes réguliers} \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Nous avons utilisé la décomposition (3.1.8) de $T(\xi)$, l'algèbre de Virasoro (3.1.26) pour $\{L_n\}$, les équations (3.1.10)-(3.1.13) pour l'action des $\{L_n\}$ sur l'opérateur primaire et le fait que $L_{-1} = \partial_z$ pour l'action sur n'importe quel opérateur – comme générateur de translation. En mettant le développement (3.2.22) dans l'intégrale (3.2.21), on trouve :

$$\delta_{\alpha(z)}\Phi_\Delta^{(-1)}(z) = \Delta\alpha''\Phi_\Delta(z) + (\Delta+1)\alpha'(z)\Phi_\Delta^{(-1)}(z) + \alpha(z)\partial_z\Phi^{(-1)}(z) \tag{3.2.23}$$

La variation est effectivement différente de celle des opérateurs primaires, éq. (3.1.2). Pour le cas particulier de $\Phi_\Delta^{(-1)}(z)$, on peut vérifier (3.2.23) plus directement en utilisant le fait que $L_{-1} = \partial_z$:

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha(z)}\Phi_\Delta^{(-1)}(z) &= \delta_{\alpha(z)}(\partial_z\Phi_\Delta(z)) = \partial_z\delta_{\alpha(z)}\Phi_\Delta(z) = \partial_z(\Delta\alpha'(z) + \alpha(z)\partial_z)\Phi_\Delta(z) \\ &= \Delta\alpha''(z)\Phi_\Delta(z) + (\Delta+1)\alpha'(z)\partial_z\Phi_\Delta(z) + \alpha(z)\partial_z^2\Phi_\Delta(z) \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

qui est identique à l'éq.(3.2.23).

Par la même méthode que celle exposés dans les éqs.(3.2.21), (3.2.22) on peut vérifier que pour $\Phi_\Delta^{(-2)}(z)$ on trouve :

$$\begin{aligned} \delta\Phi_\Delta^{(-2)}(z) = \frac{1}{3!}(4\Delta + \frac{c}{2})\alpha'''(z)\Phi_\Delta(z) + \frac{3}{2}\alpha''(z)\Phi_\Delta^{(-1)}(z) \\ +(\Delta+2)\alpha'(z)\Phi_\Delta^{(-2)}(z) + \alpha(z)\partial_z\Phi_\Delta^{(-2)}(z) \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

3.3 Exercices.

Exercice 1. Retrouver l'identité de Ward (3.1.22).

Exercice 2. Justifier l'éq.(3.2.18). L'analyse de cet exercice pourrait être reporter pour après le cours 5, où l'algèbre des opérateurs sera introduite. En plus de l'algèbre, il faudra utiliser l'orthogonalité entre les opérateurs primaires (comp. l'exercice 1 du cours 1) et, plus généralement, entre les opérateurs descendants, appartenant à des modules des opérateurs primaires différents (orthogonalité entre les "familles" d'opérateurs).

Exercice 3. Retrouver la variation conforme de $\Phi_{\Delta}^{(-2)}$, éq.(3.2.25).

Exercice 4. En utilisant la définition intégrale (3.1.17), démontrer que $I^{(-2)}(z) = T(z)$. $I^{(-2)}(z)$ est un descendant de l'opérateur $I(z) = \Phi_{\Delta}(z)$ avec $\Delta = 0$. En conséquence $I(z) \equiv 1$. Il est utile d'ajouter cet opérateur trival (une constante égale à 1) à la suite des opérateurs primaires. Il est appelé l'opérateur d'identité.

Chapitre 4

4.1 Analyse préliminaire des opérateurs descendants. Dégénérescences. Équations différentielles pour les fonctions de corrélation.

Dans le cours 3, nous avons obtenu une famille infinie d'opérateurs descendants de $\Phi_\Delta(z)$:

$$\{\Phi_\Delta^{(-n_1,-n_2,...,-n_k)} = L_{-n_1}L_{-n_2}...L_{-n_k}\Phi_\Delta(z)\} \tag{4.1.1}$$

où $n_1, n_2, ..., n_k$ sont des entiers positifs. Les opérateurs $\{L_n\}$ commutent entre eux selon l'algèbre de Virasoro, éq.(3.1.26), cours 3. Les opérateurs (4.1.1) forment la représentation de cette algèbre. L'ensemble des opérateurs (4.1.1) est appelé, dans la théorie des représentations, le module de Verma de l'algèbre de Virasoro.

Par commutation, les opérateurs indépendants dans (4.1.1) peuvent être rangés tel que

$$n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k \tag{4.1.2}$$

Ensuite, on peut vérifier en utilisant l'algèbre de Virasoro que les opérateurs (4.1.1), (4.1.2) sont "propres" par rapport à l'action de L_0 :

$$L_0\Phi_\Delta^{(-n_1,-n_2,...,-n_k)} = (N+\Delta)\Phi_\Delta^{(-n_1,-n_2...,-n_k)} \tag{4.1.3}$$

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i \tag{4.1.4}$$

En conséquence, les opérateurs peuvent être classifiés et arrangés selon les niveaux N, ou selon leurs dimensions par rapport à la dilatation qui est $N+\Delta$, voir Fig.11.

En général, pour des valeurs quelconques de Δ et c (charge centrale de l'algèbre de Virasoro) tous les opérateurs dans le module, définis par les éqs. (4.1.1), (4.1.2), Fig.11, sont indépendants. Mais pour des valeurs de Δ spécifiques et pour un c fixé, c.-à-d. pour des relations entre Δ et c spécifiques, on trouve des dégénérescences dans le module. Nous allons nous occuper dans la suite de la recherche des conditions de dégénérescence. Nous allons voir que les théories conformes qui possèdent des opérateurs Φ_Δ avec leurs modules dégénérés, correspondent aux systèmes physiques statistiques aux points critiques. Les dégénérescences correspondent donc en fait aux solutions physiques de la théorie conforme. On peut faire l'analogie avec l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, pour laquelle on a des solutions physiques et des solutions non physiques.

La dégénérescence consiste en une relation linéaire entre les opérateurs descendants (4.1.1), (4.1.2), dans un module d'un opérateur primaire Φ_Δ quelconque. Donc, nous sommes à la recherche de relations linéaires. Dans une théorie conforme invariante, les relations linéaires ne peuvent exister qu'entre les opérateurs d'un même niveau. En effet, supposons la relation suivante

$$A_1(z) + A_2(z) + A_3(z) = 0, \;\; \forall z \tag{4.1.5}$$

entre trois opérateurs quelconques. Sous une dilatation, l'équation (4.1.5) se transforme selon

$$(5) \rightarrow \lambda^{\Delta_1} A_1(\lambda z) + \lambda^{\Delta_2} A_2(\lambda z) + \lambda^{\Delta_3} A_3(\lambda z) = 0 \tag{4.1.6}$$

On retrouve la même équation si $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$. Donc, comme le niveau N correspond à la dimension $\Delta + N$ d'un opérateur descendant par rapport à la dilatation (par rapport à L_0, qui est le générateur de la dilatation), il faut que N soit le même pour A_1, A_2 et A_3.

Sur le niveau $N = 1$ du module de Φ_Δ, Fig.11, il n'y a que l'opérateur $\Phi_\Delta^{(-1)}(z) = L_{-1}\Phi_\Delta(z) = \partial_z \Phi_\Delta(z)$. La condition

$$\Phi_\Delta^{(-1)} = \partial_z \Phi_\Delta(z) = 0 \tag{4.1.7}$$

nous donne, comme solution, l'opérateur

$$\Phi_\Delta(z) = I = \text{const} \tag{4.1.8}$$

Il s'agit d'un opérateur z indépendant, donc $\Delta = 0$ et qui est appelé l'opérateur d'identité. Il est l'opérateur trivial qu'on doit avoir dans toutes les théories.

Au niveau $N = 2$, on peut essayer de mettre égale à zéro la combinaison linéaire

$$\chi_{(2)}(z) = L_{-2}\Phi_\Delta(z) + a L_{-1}^2 \Phi_\Delta(z) \tag{4.1.9}$$

avec a comme paramètre. Mais en plus de la condition que les opérateurs dans la combinaison soient du même niveau, ce qui est déjà le cas dans l'éq.(4.1.9), il faut que l'opérateur composé $\chi_{(2)}(z)$ possède les propriétés d'un opérateur primaire : il se transforme comme

$$\chi_{(2)}(z) \rightarrow (\frac{df}{dz})^\Delta \chi_{(2)}(f(z)) \tag{4.1.10}$$

ou, pour la transformation infinitésimale, comme

$$\chi_{(2)}(z) \rightarrow (1 + \Delta\alpha'(z) + \alpha(z)\partial_z)\chi_{(2)}(z) \tag{4.1.11}$$

La raison pour cette condition est la même que celle pour l'éq.(4.1.6) : il faut que l'équation $\chi_{(2)}(z) = 0$ reste vraie après la transformation conforme. Pour les transformations (4.1.10) ou (4.1.11), c'est le cas. Mais ce n'est pas le cas, en général, pour un opérateur descendant. Par exemple, $\Phi_{\Delta}^{(-2)} = L_{-2}\Phi_{\Delta}$ se transforme comme dans l'éq.(3.2.25), cours 3, et si on met $\Phi_{\Delta}^{(-2)} = 0$, cette équation change après la transformation. En bref, il faut que les équations, que l'on va imposer sur la théorie, soient invariantes conformes.

Comme nous l'avons expliqué dans le cours 3, la condition pour que l'opérateur soit primaire est qu'il soit annulé par L_n, avec n positif. Donc, il faut que

$$L_n\chi_{(2)}(z) = 0, \quad n > 0 \tag{4.1.12}$$

Par l'algèbre de Virasoro, il suffit que $\chi_{(2)}$ soit annulé par L_{+1} et L_{+2}. Le reste va suivre, par l'algèbre. Par exemple $L_3 = [L_2, L_1]$.

On arrive ainsi à deux équations :

$$L_{+1}(L_{-2}\Phi_{\Delta}(z) + aL_{-1}^2\Phi_{\Delta}(z)) = 0 \tag{4.1.13}$$

$$L_{+2}(L_{-2}\Phi_{\Delta}(z) + aL_{-1}^2\Phi_{\Delta}(z)) = 0 \tag{4.1.14}$$

Maintenant, commutant L_{+1} et L_{+2} vers Φ_{Δ}, on trouve, de l'éq.(4.1.13), le coefficient a :

$$a = -\frac{3}{2(2\Delta + 1)} \tag{4.1.15}$$

et de l'éq.(4.1.14), la relation entre Δ et c :

$$c = \frac{2\Delta(5 - 8\Delta)}{2\Delta + 1} \tag{4.1.16}$$

On peut maintenant écrire l'équation

$$L_{-2}\Phi_{\Delta}(z) - \frac{3}{2(2\Delta + 1)}L_{-1}^2\Phi_{\Delta}(z) = 0 \tag{4.1.17}$$

où, pour la théorie conforme avec c donné, la dimension conforme de l'opérateur $\Phi_{\Delta}(z)$ est fixée par l'éq.(4.1.16) : il y a deux solutions, donc deux Δ possibles dans l'éq.(4.1.17).

L'équation (4.1.17) signale la dégénérescence du module de Φ_{Δ} au niveau deux que nous avons réussi à imposer sans avoir brisé la symétrie conforme.

On peut faire le même exercice au niveau 3. La combinaison sera

$$\chi_{(3)} = L_{-3}\Phi_{\Delta} + aL_{-1}L_{-2}\Phi_{\Delta} + bL_{-1}^3\Phi_{\Delta} \tag{4.1.18}$$

Il s'agit maintenant d'un autre opérateur Φ_{Δ}, avec une autre dimension Δ. Les équations d'invariance conforme qui imposent que $\chi_{(3)}$ soit primaire :

$$L_{+1}\chi_{(3)} = 0 \tag{4.1.19}$$

$$L_{+2}\chi_{(3)} = 0 \tag{4.1.20}$$

définissent les coefficients

$$a = -\frac{2}{\Delta + 2} \tag{4.1.21}$$

$$b = \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)} \tag{4.1.22}$$

et donnent l'équation algébrique sur Δ :

$$\Delta^2 - \frac{7-c}{3}\Delta + \frac{2+c}{3} = 0 \tag{4.1.23}$$

Il y a deux solutions pour Δ, comme dans le cas du niveau 2, et il y aura deux opérateurs Φ_Δ pour lesquels on peux imposer l'équation de dégénérescence au niveau 3 :

$$L_{-3}\Phi_\Delta - \frac{2}{\Delta+2} L_{-1}L_{-2}\Phi_\Delta + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)} L_{-1}^3\Phi_\Delta = 0 \tag{4.1.24}$$

Avec ces deux exemples, aux niveaux 2 et 3, il est utile de voir les conséquences pour la théorie avant de présenter l'analyse générale sur des dégénérescences possibles dans les modules de Verma de l'algèbre de Virasoro.

Reprenons le cas du niveau 2, éq.(4.1.17). Nous allons voir que ceci donne l'équation différentielle pour les fonctions de corrélation de l'opérateur $\Phi_\Delta(z)$. Mettons l'équation (4.1.17) dans une fonction de corrélation avec d'autres opérateurs primaires quelconques. On trouve alors :

$$\begin{aligned} &\langle (L_{-2}\Phi_\Delta(z))\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \\ &= \frac{3}{2(2\Delta+1)}\langle (L_{-1}^2\Phi_\Delta(z))\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

L_{-1}^2 peut être remplacé tout de suite par ∂_z^2. Pour l'opérateur L_{-2}, afin de le transformer en un opérateur différentiel, il faut l'extraire de $\Phi_\Delta(z)$ et le faire agir sur le reste des opérateurs, opération qui ressemble à une intégration par partie. Ceci peut être fait, en utilisant la définition intégrale de L_{-2}, que l'on applique, localement, à $\Phi_\Delta(z)$:

$$L_{-2}\Phi_\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_z} d\xi(\xi - z)^{-1} T(\xi)\Phi_\Delta(z) \tag{4.1.26}$$

– voir éq.(3.1.17), cours 3. Ensuite, pour $L_{-2}\Phi_\Delta(z)$ dans la fonction de corrélation, on peut enlever le contour d'intégration C_z du point z et le faire passer autour des autres points, comme indiqué dans la Fig.12. On trouve, pour la fonction à gauche de l'éq.(4.1.25) :

$$\begin{aligned} &\langle (L_{-2}\Phi_\Delta(z))\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \\ = \;& \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_z} d\xi(\xi-z)^{-1}\langle T(\xi)\Phi_\Delta(z)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \\ = \;& \sum_{L=2}^{N}\frac{(-1)}{2\pi i}\oint_{C_k} d\xi(\xi-z)^{-1}\langle T(\xi)\Phi_\Delta(z)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

Le signe est négatif en face des intégrales à cause de l'orientation opposée des contours $C_2, C_3..., C_N$. L'intégrale sur C_∞ n'apparaît pas dans (4.1.27), car elle est égale à zéro, pour la même raison que dans l'éq.(3.2.18), cours 3, Fig.8. On peut calculer les intégrales sur les contours $C_2, C_3, ..., C_N$ en utilisant le développement du produit de $T(\xi)$ avec les opérateurs Φ_k correspondants :

$$T(\xi)\Phi_k(z_k) = (\frac{\Delta_k}{(\xi - z_k)^2} + \frac{1}{\xi - z_k}\partial_k)\Phi_k(z_k) + \text{Termes réguliers} \tag{4.1.28}$$

On trouve

$$\begin{aligned} & \langle (L_{-2}\Phi_\Delta(z)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \\ = & \sum_{k=2}^{N}(\frac{\Delta_k}{(z - z_k)^2} + \frac{1}{z - z_k}\partial_k)\langle\Phi_\Delta(z)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

En utilisant ce résultat pour l'éq.(4.1.25) on obtient une équation différentielle, linéaire, d'ordre 2, pour les fonctions de corrélation de l'opérateur $\Phi_\Delta(z)$, dont le module est dégénéré au niveau 2, avec d'autres opérateurs primaires :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2(2\Delta + 1)}\partial_z^2\langle\Phi_\Delta(z)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \\ = & \sum_{k=2}^{N}(\frac{\Delta_k}{(z - z_k)^2} + \frac{1}{z - z_k}\partial_k)\langle\Phi_\Delta(z)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)...\Phi_N(z_N)\rangle \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

De la même façon, à partir de l'équation (4.1.24) de dégénérescence au niveau 3 et pour un autre opérateur $\Phi_\Delta(z)$ dont la dimension est fixée par l'éq.(4.1.23), on va trouver une équation différentielle d'ordre 3 pour les fonctions de corrélation de cet opérateur.

4.2 Exercices.

Exercice 1. Retrouver $\chi_{(2)}$, éqs. (4.1.15) et (4.1.16).
Exercice 2. Retrouver $\chi_{(3)}$, éqs. (4.1.21),(4.1.22),(4.1.23).

Chapitre 5

5.1 Analyse générale, formule de Kac. Remarques préliminaires sur l'algèbre des opérateurs primaires.

Dans l'approche générale au problème de dégénérescence dans le module de Verma, on étudie un sous-espace d'opérateurs descendants qui se trouvent sur le même niveau N :

$$\{\Phi_{\Delta}^{\{-n_i\}} = L_{-n_1} L_{-n_2} ... L_{-n_k} \Phi_{\Delta}\} \tag{5.1.1}$$

$$n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = N \tag{5.1.2}$$

On introduit, formellement, un produit scalaire dans l'espace (5.1.1) et la matrice correspondante des produits scalaires :

$$\langle \Phi_{\Delta} | L_{+n_k} ... L_{+n_2} L_{+n_1} L_{-m_1} L_{-m_2} ... L_{-m_l} | \Phi_{\Delta} \rangle = M^{N}_{\{n_i\}\{m_j\}} \tag{5.1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{j=1}^{l} m_j = N \tag{5.1.4}$$

On calcule (5.1.3) avec l'algèbre de Virasoro en commutant les $\{L_{+n_i}\}$ à travers des $\{L_{-m_j}\}$ et en appliquant au $|\Phi_{\Delta}\rangle$ les opérateurs obtenus par commutation. Les dégénérescences du type

$$L_{+n}(\chi_{(N)} = \sum_{\{m_i\}} b_{\{-m_i\}} \Phi_{\Delta}^{\{-m_i\}}) = 0 \tag{5.1.5}$$

correspondent aux zéros du déterminant de la matrice (5.1.3) :

$$Det M^{(N)}(\Delta, c) = 0 \tag{5.1.6}$$

L'expression (5.1.6) est algébrique en Δ, c. Les zéros sont donnés par :

$$\Delta_{n',n} = \frac{(\alpha_- n' + \alpha_+ n)^2 - (\alpha_- + \alpha_+)^2}{4} \tag{5.1.7}$$

avec

$$\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, \quad \alpha_+\alpha_- = -1 \tag{5.1.8}$$

$$c = 1 - 24\alpha_0^2 \tag{5.1.9}$$

et les indices n', n, qui sont des entiers positifs, correspondent à toutes les factorisations possibles de N : $N = n \times n'$. [1]

Cette analyse générale des dégénérescences dans le module de Verma de l'algèbre de Virasoro a été effectuée dans les travaux [4, 5]. L'équation (5.1.7) est appelée la formule de Kac. La dégénérescence dans le module correspond à l'apparition parmi les descendants d'opérateurs spéciaux χ_N qui ont les propriétés conformes des opérateurs primaires : être annulé par application de L_n, $n > 0$, éq.(5.1.5). Ils sont appelés les vecteurs singuliers dans le module. Il faut remarquer en plus que ces vecteurs sont de norme nulle par rapport au produit scalaire (5.1.3).

Comme exemple, pour les niveaux 2, 3 et 4, on trouve, avec la formule de Kac (5.1.7), des valeurs de Δ pour lesquelles le module de Φ_Δ est dégénéré sur les niveaux correspondants :

$$N = 2 : \quad \Delta_{2,1},\ \Delta_{1,2} \tag{5.1.10}$$

$$N = 3 : \quad \Delta_{3,1},\ \Delta_{1,3} \tag{5.1.11}$$

$$N = 4 : \quad \Delta_{4,1},\ \Delta_{1,4},\ \Delta_{2,2} \tag{5.1.12}$$

Comme exercice, on peut faire le calcul explicite de $DetM$ pour $N = 2$ et retrouver l'équation (4.1.16), cours 4 dont $\Delta_{2,1}$ et $\Delta_{1,2}$ sont les deux solutions.

Nous avons vu, avec des exemples de dégénérescence des niveaux 2 et 3, que les fonctions de corrélation des opérateurs primaires correspondants, dont les modules sont dégénérés, obéissent à des équations différentielles linéaires. Donc, les fonctions de corrélation des opérateurs Φ_Δ, avec $\Delta = \Delta_{n',n}$ donnés par l'éq.(5.1.7), que nous allons noter aussi $\Phi_{n',n}$, peuvent en principe être calculées. Notons que pour $\Phi_{n',n}$ l'équation différentielle sera d'ordre $N = n' \times n$ car, en général, l'opérateur $L_{-1}^N \Phi_{n',n} = \partial^N \Phi_{n',n}$ intervient dans l'équation de dégénérescence au niveau N. Une technique efficace qui donne des solutions de ces équations sera présentée dans les cours 6-8.

Comme nous allons le voir, il est important que l'algèbre des opérateurs $\Phi_{n',n}$ soit fermée. Cela veut dire qu'on peut définir une théorie conforme particulière dans

[1] La notation $\Delta_{n',n}$ pour l'expression de droite de l'éq.(5.1.7) est celle qui a été utilisé dans les articles [7] et [15]. Dans le reste de la literature sur la théorie conforme et, en particulier, dans l'article fondateur [2], la même expression de droite dans (5.1.7) est notée $\Delta_{n,n'}$ (avec des indices n', n permutés). Cette confusion est accidentelle.

Comme, à partir du cours 6 et, partiellement, déjà du cours 5, la présentation dans ces notes suit beaucoup les références [7, 15], nous allons garder la notation de ces articles pour $\Delta_{n',n}$. Nous espérons que, une fois annoncée, cette petite différence avec le reste de la literature n'induira pas trop de confusion.

laquelle il n'y aura que les opérateurs primaires $\{\Phi_{n',n}\}$. La fermeture de l'algèbre de $\{\Phi_{n',n}\}$ peut déjà être observée avec des équations différentielles. Utilisant l'équation différentielle d'ordre 2 pour $\Phi_{1.2}$, nous allons faire un exercice avec le produit de $\Phi_{1.2}(z)\Phi_{k',k}(0)$ pour montrer que dans le développement de ce produit il n'y a pas d'autres opérateurs primaires que $\Phi_{k,k-1}$ et $\Phi_{k',k+1}$, donc des opérateurs de la même famille $\{\Phi_{n',n}\}$.

Pour poursuivre avec la démonstration, il faut d'abord donner la définition de l'algèbre des opérateurs primaires. La forme générale de cette algèbre s'obtient à partir du développement suivant :

$$\Phi_1(z,\bar{z})\Phi_2(0,0) = \sum_p \frac{D_{12}^p}{|z|^{2(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p)}}\{\Phi_p(0,0)$$

$$+z\beta_p^{(-1)}\Phi_p^{(-1)}(0,0) + \bar{z}\beta_p^{(\overline{-1})}\Phi_p^{(\overline{-1})}(0,0) + z\bar{z}\beta_p^{(-1)}\beta_p^{(\overline{-1})}\Phi_p^{(-1)(\overline{-1})}(0,0)$$

$$z^2(\beta_p^{(-1,-1)}\Phi_p^{(-1,-1)}(0,0) + \beta_p^{(-2)}\Phi_p^{(-2)}(0,0)) + ...\} \quad (5.1.13)$$

où $\Phi_p^{(-1)} = L_{-1}\Phi_p$, $\Phi_p^{(\overline{-1})} = \overline{L_{-1}}\Phi_p$, $\Phi^{(-1)(\overline{-1})} = L_{-1}\overline{L_{-1}}\Phi$, etc. Nous incluons également ici la partie $\bar{z}$ des opérateurs primaires pour donner la définition complète de l'algèbre. Φ_1, Φ_2, Φ_p sont des opérateurs primaires quelconques pour le moment, pas nécessairement des opérateurs dégénérés $\{\Phi_{n',n}\}$ (opérateurs avec des modules dégénérés, à proprement dire). Nous avons supposé dans (5.1.13) que Φ_1, Φ_2, Φ_p sont des opérateurs sans spin, (le spin étant défini par $s = \Delta - \bar{\Delta}$), donc $\Delta_1 = \bar{\Delta_1}$, $\Delta_2 = \bar{\Delta}_2, \Delta_p = \bar{\Delta}_p$. Dans les théories conformes minimales, que nous sommes en train de définir, c'est le cas pour tous les opérateurs primaires.

Dans la partie droite de l'éq.(5.1.13), nous avons une suite infinie d'opérateurs descendants de Φ_p qui correspondent à deux algèbres de Virasoro indépendantes, Vir et $\overline{Vir}$, pour z et $\bar{z}$.

Après avoir exposé la forme complète de l'algèbre, nous pouvons de nouveau supprimer la partie $\bar{z}$, en gardant le développement en z seulement. On a :

$$\Phi_1(z)\Phi_2(0) = \sum_p \frac{D_{12}^p}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}}\{\Phi_p(0) + z\beta_p^{(-1)}\Phi_p^{(-1)}(0)$$

$$+z^2(\beta_p^{(-1,-1)}\Phi_p^{(-1,-1)}(0) + \beta_p^{(-2)}\Phi_p^{(-2)}(0)) + ...\} \quad (5.1.14)$$

Les coefficients $\{\beta_p^{...}\}$, qui définissent la participation des descendants d'une famille de Φ_p dans le développement du produit $\Phi_1(z)\Phi_2(0)$, sont définis par la symétrie conforme seulement. Il suffit de comparer les transformations conforme de la partie gauche et de la partie droite de l'éq.(5.1.14) pour les définir. La démonstration de la technique du calcul des $\{\beta_p^{...}\}$ est donnée dans l'Appendice de ce cours. Par contre, pour définir les coefficients principaux de l'algèbre, $\{D_{12}^p\}$ dans (5.1.13), (5.1.14), qui définissent la participation des opérateurs primaires et de leurs familles de descendants, il faut savoir calculer les fonctions de corrélation. Cette technique sera exposée dans les cours 6-8. Pour le moment, même sans savoir comment calculer les coefficients $\{D_{12}^p\}$, on peut déjà définir la présence possible des opérateurs primaires particuliers dans le développement de $\Phi_1(z)\Phi_2(0)$ en faisant l'analyse de présence de termes non-analytiques

$$\sim (z)^{\gamma_p} \tag{5.1.15}$$

dans la fonction de corrélation de $\Phi_1(z)\Phi_2(0)$ avec d'autres opérateurs. Les termes du type (5.1.15) correspondent aux termes

$$\sim \frac{1}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}} \tag{5.1.16}$$

dans le développement (5.1.14) et donc ils signalent la présence d'opérateurs primaires $\{\Phi_p\}$. En effet, si on connaît Δ_1, Δ_2 et on a trouvé les exposants $\{\gamma_p\}$ des termes non-analytiques (5.1.15), on peut calculer $\{\Delta_p\}$par l'éq.(5.1.16).

Pour être plus précis, il faut observer qu'avec cette analyse on suppose qu'il n'y a pas dans la théorie de dimensions Δ_p et $\Delta_{p'}$ qui différent par des entiers. Sinon, on pourrait confondre les termes dominants (5.1.16) d'une famille dans le développement (5.1.14) avec des termes sous-dominants provenant des descendants d'une autre famille. Dans l'analyse qui suit nous supposerons que ce n'est pas le cas. Des remarques sur une algèbre avec une interférence entre les exposants seront données dans le cours 9.

La fonction de corrélation de $\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)$ avec deux autres opérateurs, disons $\Phi_3(z_3)\Phi_4(z_4)$,

$$F(z_1,z_2,z_3,z_4) = \langle\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)\Phi_4(z_4)\rangle \tag{5.1.17}$$

vérifie l'équation différentielle

$$\begin{aligned} a\partial^2_{z_1}F(z_1,z_2,z_3,z_4) = (&\frac{\Delta_2}{(z_{12})^2} + \frac{1}{z_{12}}\partial_{z_2} + \frac{\Delta_3}{(z_{13})^2} \\ &+\frac{1}{(z_{13})^2}\partial_{z_3} + \frac{\Delta_4}{(z_{14})^2} + \frac{1}{z_{14}}\partial_{z_4})F(z_1,z_2,z_3,z_4) \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

où $a = 3/2(2\Delta_1+1)$, voir éq.(4.1.30). Dans la limite $z_{12} \to 0$ et en gardant seulement les termes dominants, on trouve à partir de l'éq.(5.1.18)

$$a\partial^2_{z_1}F \approx (\frac{\Delta_2}{(z_{12})^2} + \frac{1}{z_{12}}\partial_2)F \tag{5.1.19}$$

On cherche ensuite la solution dans la forme

$$F \approx A(z_{12})^{\gamma} \tag{5.1.20}$$

et on obtient l'équation algébrique pour γ :

$$\frac{3\gamma(\gamma-1)}{2(2\Delta_1+1)} = \Delta_2 - \gamma \tag{5.1.21}$$

On pourra vérifier en exercice que pour $\gamma = -\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_p$, éq.(5.1.16), et pour $\Delta_1 = \Delta_{1,2}$, $\Delta_2 = \Delta_{k',k}$, voir la formule de Kac (5.1.7), on a deux solutions pour Δ_p :

$$\Delta_p = \Delta_{k',k-1} \;\text{ et }\; \Delta_{k',k+1} \tag{5.1.22}$$

De la même façon, mais en plus compliqué, à partir de $\chi_{(3)}$ et de l'équation correspondante pour les fonctions de corrélation de l'opérateur $\Phi_{1,3}$, on peut vérifier l'algèbre de $\Phi_{1,3}$ et $\Phi_{k',k}$:

$$\Phi_{1,3}\Phi_{k',k} \to \Phi_{k',k-2},\ \Phi_{k',k},\ \Phi_{k',k+2} \tag{5.1.23}$$

L'éq.(5.1.23) est souvent appelée "règle de fusion", pour les opérateurs $\Phi_{1,3}$ et $\Phi_{k',k}$ dans cet exemple. Pour l'algèbre, il faut en plus connaître les coefficients.

Plus généralement, on peut démontrer, en utilisant la forme réduite de l'équation différentielle correspondante, cf éq.(5.1.19), que pour $\Phi_{1,n}\Phi_{1,k}$ la règle de fusion sera :

$$\begin{aligned} \Phi_{1,n}\Phi_{1,k} \to \quad & \Phi_{1,n+k-1} \\ & \Phi_{1,n+k-3} \\ & - \\ & - \\ & - \\ & \Phi_{1,|n-k|+1} \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

Remarquons que si on définit les nouveaux paramètres comme $n = 2j_n + 1$ et si on note les opérateurs $\Phi_{1,n}$ comme Φ_{j_n}, alors la règle de fusion (5.1.24) prendra la forme de l'addition des moments angulaires du groupe $su(2)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{j_n}\Phi_{j_k} \to \quad & \Phi_{j_n+j_k} \\ & \Phi_{j_n+j_k-1} \\ & - \\ & - \\ & - \\ & \Phi_{|j_n-j_k|} \end{aligned} \tag{5.1.25}$$

En fait, il existe une connexion entre l'algèbre des opérateurs primaires des théories conformes minimales et les représentations du groupe $su(2)$. Mais nous n'allons pas développer ce sujet.

Encore plus généralement, pour le produit des opérateurs $\Phi_{n',n}$ et $\Phi_{k',k}$, on trouve la règle de fusion suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{n',n}\Phi_{k',k} \to \quad & \Phi_{n'+k'-1,n+k-1} \\ & \Phi_{n'+k'-3,n+k-1} \\ & - \\ & - \\ & - \\ & \Phi_{|n'-k'|+1,|n-k|+1} \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

On a ici le produit direct des règles de fusion (5.1.24), qui sont les même pour les indices (n', k') et (n, k). Par exemple :

$$\Phi_{3,3}\Phi_{3,3} \rightarrow \Phi_{5,5}, \Phi_{5,3}, \Phi_{5,1}, \Phi_{3,5}, \Phi_{3,3}, ..., \Phi_{1,1} \tag{5.1.27}$$

- voir Fig.13.

Comme il a été mentionné auparavant, le calcul des coefficients dans ces décompositions est le problème du calcul des coefficients de l'algèbre des opérateurs. Nous allons nous en occuper plus loin (cours 9). Il nous faudra néanmoins, pour la discussion qui suit sur les modèles statistiques correspondants, une information en plus sur l'algèbre des opérateurs dont la justification va venir plus tard. Pour des valeurs spéciales de la charge centrale c, données par l'expression

$$c = 1 - \frac{6(p - p')^2}{pp'} \tag{5.1.28}$$

où p, p' sont des entiers positifs premiers entre eux, la règle de fusion (5.1.26) sera tronquée par p et p' : si on fait le produit de deux opérateurs primaires $\{\Phi_{n',n}\}$ dont les indices appartiennent au tableau fini

$$\begin{aligned} 1 \leq n' \leq p' - 1 \\ 1 \leq n \leq p - 1 \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

- voir Fig.14, alors, dans le développement par l'algèbre et dans la règle de fusion correspondante (5.1.26), les opérateurs qui se trouvent au-dehors du tableau (5.1.29), Fig.14, n'apparaissent pas, car les coefficients correspondants de l'algèbre sont nuls. Il faut remarquer que ces valeurs de c correspondent aux valeurs rationnelles du paramètre α_+^2, éqs.(5.1.8),(5.1.9) :

$$\alpha_+^2 = \frac{p'}{p} \tag{5.1.30}$$

Comme conséquence, les théories correspondantes contiennent un nombre fini d'opérateurs primaires.

On peut renverser l'argument et demander qu'une théorie conforme quelconque possède un nombre fini d'opérateurs primaires. On trouve alors que la charge centrale c doit satisfaire à l'éq.(5.1.28).

En plus, les théories conformes minimales avec $p' = p + 1$ sont unitaires [6]. E_n physique statistique, cette propriété correspond à la positivité des fonctions

$$\langle \Phi_1(z_1\bar{z_1})\Phi_2(z_2, \bar{z_2})\Phi_2(z_3, \bar{z_3})\Phi_1(z_4, \bar{z_4})\rangle \tag{5.1.31}$$

pour tous les opérateurs primaires Φ_1 et Φ_2 d'une théorie. Il s'agit de la condition que la norme de tous les états (de tous les opérateurs, primaires et descendants) soit positive. Nous allons voir la manifestation de cette propriété plus loin, dans le cours 9.

5.2 Discussion sur les théories minimales et les systèmes statistiques correspondants.

Dans la série principale, celle qui est unitaire

$$p' = p + 1, \quad \alpha_+^2 = \frac{p+1}{p} \tag{5.2.1}$$

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)} \tag{5.2.2}$$

la première théorie correspond à

$$p' = 3, \quad p = 2 \tag{5.2.3}$$

$$c = 0 \tag{5.2.4}$$

et au tableau (d'opérateurs primaires) de taille

$$(p' - 1) \times (p - 1) = 2 \times 1 \tag{5.2.5}$$

- Fig.15. Les dimensions des opérateurs primaires sont données par la formule de Kac, éq.(5.1.7), qui, pour $(\alpha_+)^2 = p'/p$, prend la forme

$$\Delta_{n',n} = \frac{(pn' - p'n)^2 - (p' - p)^2}{4p'p} \tag{5.2.6}$$

Pour la série principale, $p' = p + 1$, les dimensions sont données par la formule

$$\Delta_{n',n} = \frac{(pn' - (p+1)n)^2 - 1}{4p(p+1)} \tag{5.2.7}$$

Donc pour la théorie avec $p' = 3$, $p = 2$, Fig.15, il n'y a que les opérateurs $\Phi_{1,1}$ et $\Phi_{2,1}$, dont les dimensions conformes sont zéro, par l'éq.(5.2.7). Ainsi, il n'y a dans la théorie que l'opérateur identité $I = \Phi_\Delta$, $\Delta = 0$ et la théorie est vide. Voir aussi l'exercice 5.

La théorie suivante et la première non triviale, toujours dans la série principale, est celle avec $(p', p) = (4, 3)$. Les tableaux des opérateurs et de leur dimensions conformes sont donnés dans la Fig.16. La charge centrale est égale à 1/2, par l'éq.(5.2.2). Cette théorie a été identifiée avec le modèle d'Ising bidimensionnel au point critique [2].

En effet, d'une part dans la solution de Onsager, les exposants critiques de la chaleur spécifique $c(\tau) \sim |\tau|^{-\alpha}$, $\alpha = 0\,(\tau = (T - T_c)/T_c)$, ou de la longueur de corrélation $R(\tau) \sim |\tau|^{-\nu}$, $\nu = 1$, et de la magnétisation $M(\tau) \sim |\tau|^{\beta}$, $\beta = 1/8$ correspondent aux dimensions conformes de l'opérateur d'énergie ε, $\Delta_\varepsilon = 1/2$, et de spin σ, $\Delta_\sigma = 1/16$. Pour passer des dimensions conformes aux exposants critiques standards, on se sert des relations :

$$\nu = \frac{1}{d - \Delta_{\varepsilon,phys}} \tag{5.2.8}$$

$$\alpha = \frac{d - 2\Delta_{\varepsilon,phys}}{d - \Delta_{\varepsilon,phys}} \tag{5.2.9}$$

$$\beta = \frac{\Delta_{\sigma,phys}}{d - \Delta_{\varepsilon,phys}} \tag{5.2.10}$$

avec $d = 2$, dimension de l'espace et avec $\Delta_{\varepsilon,phys} = 2\Delta_\varepsilon$, $\Delta_{\sigma,phys} = 2\Delta_\sigma$, car $\Delta_{\varepsilon,phys} = \Delta_\varepsilon + \bar{\Delta}_\varepsilon$, $\Delta_{\sigma,phys} = \Delta_\sigma + \bar{\Delta}_\sigma$ et $\Delta = \bar{\Delta}$ pour ces deux opérateurs. D'autre part, pour la théorie conforme $(p', p) = (4, 3)$, $c = \frac{1}{2}$ on trouve les dimensions $\Delta_{1,2} = \Delta_{3,1} = 1/2$, $\Delta_{2,1} = \Delta_{2,2} = 1/16$ qui coïncident avec celles de l'énergie et du spin de modèle d'Ising, voir Fig.16.

En plus à partir de la solution de Onsager, on sait que le modèle d'Ising possède une représentation par des fermions libres. Donc, l'opérateur d'énergie-impulsion $T(z)$ peut être écrit sous la forme

$$T(z) \propto \Psi \partial_z \Psi \tag{5.2.11}$$

Il est connu que la théorie conforme des fermions libres sans masse possède la charge centrale $c = 1/2$ (voir l'exercice 8 du cours 6). Remarquons aussi que dans la représentation fermionique $\varepsilon = \bar{\Psi}\Psi$. Finalement, avec la théorie conforme, on peut obtenir les règles de fusion :

$$\varepsilon\varepsilon \to I, \ \varepsilon\sigma \to \sigma, \ \sigma\sigma \to I, \varepsilon \tag{5.2.12}$$

(voir plus bas) qui sont bien en accord avec les propriétés générales du modèle d'Ising.

Il est important de remarquer que dans le tableau correspondant à une théorie (p', p), chacune des valeurs des dimensions conformes apparaît deux fois. Les Figs.15 et 16 sont les exemples les plus simples pour les théories $(p', p) = (3, 2)$ et (4,3).

Dans la théorie conforme minimale, chaque opérateur primaire est caractérisé par sa dimension conforme Δ et on suppose qu'il n'existe pas plusieurs opérateurs différents avec la même dimension. Sinon, il devrait exister des symétries supplémentaires. Donc, il faut accepter que chaque opérateur physique, comme le spin dans le modèle d'Ising, soit représenté dans la théorie conforme correspondante par deux opérateurs conformes : $\Phi_{2,1}$ et $\Phi_{2,2}$ pour σ par exemple. Nous avons vu que les fonctions de corrélation de l'opérateur $\Phi_{2,1}$ avec d'autres opérateurs vérifient une équation différentielle du second ordre. Il y aura deux solutions indépendantes. Pour $\Phi_{2,2}$ ce sera une équation d'ordre quatre, avec quatre solutions. Pour que tout soit consistant, il faut que ce système de quatre solutions soit réductible et que parmi les quatre solutions, il y en ait deux qui coïncident avec les deux solutions de l'équation de deuxième ordre pour $\Phi_{2,1}$. Il est possible de vérifier que c'est vraiment le cas pour la théorie conforme particulière avec $c = \frac{1}{2}$, dans laquelle $\Delta_{2,2} = \Delta_{2,1}$.En acceptant les correspondances

$$\Phi_{2,1}, \ \Phi_{2,2} \sim \sigma \tag{5.2.13}$$

$$\Phi_{1,2}, \ \Phi_{3,1} \sim \varepsilon \tag{5.2.14}$$

$$\Phi_{1,1}, \ \Phi_{3,2} \sim I \tag{5.2.15}$$

il est possible de trouver les réductions des règles de fusion. Par exemple, pour le produit $\varepsilon\varepsilon$ on a, par la règle générale,

$$\Phi_{1,2}\Phi_{1,2} \rightarrow \Phi_{1,1}, \Phi_{1,3} \tag{5.2.16}$$

mais aussi

$$\Phi_{3,1}\Phi_{3,1} \rightarrow \Phi_{1,1}, \Phi_{3,1}, \Phi_{5,1} \tag{5.2.17}$$

Pour la consistance, il faut que les coefficients de $\Phi_{1,3}$ dans (5.2.16) et de $\Phi_{3,1}, \Phi_{5,1}$ dans (5.2.17) soient nuls. Donc, on trouve

$$\varepsilon\varepsilon \rightarrow I \tag{5.2.18}$$

De la même façon on trouve, toujours pour le modèle d'Ising,

$$\varepsilon\sigma \rightarrow \sigma \tag{5.2.19}$$

$$\sigma\sigma \rightarrow I, \varepsilon \tag{5.2.20}$$

Le deuxième modèle qui a été classé dans les théories conformes est le modèle de Potts à trois états, appelé aussi le modèle Z_3 [7]. Sur le réseau, le modèle Z_3 est défini comme le modèle d'Ising, avec la fonction de partition

$$Z(\beta) = \sum_{\{\vec{\sigma}\}} exp\{\beta \sum_{x,\alpha} \vec{\sigma_x}\vec{\sigma_{x+\alpha}}\} \tag{5.2.21}$$

mais les variables de spin $\{\vec{\sigma_x}\}$ prennent trois valeurs différentes, au lieu de deux, pour le cas du modèle d'Ising, voir Fig.17. Le modèle (5.2.21) possède un point de transition de phase d'ordre deux. Les exposants critiques sont identifiés avec ceux du modèle des hexagones durs, qui possède la même symétrie des rotations discrètes Z_3 et pour lequel la solution exacte avait été trouvée par Baxter, en 1980, [8]. Les exposants de la chaleur spécifique et de la magnétisation sont

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{9} \tag{5.2.22}$$

qui correspondent, par les relations (5.2.9) et (5.2.10), aux dimensions de l'opérateur d'énergie et de spin :

$$\Delta_{\varepsilon,phys} = \frac{4}{5}, \quad \Delta_{\sigma,phys} = \frac{2}{15} \tag{5.2.23}$$

$$\Delta_{\varepsilon} = \frac{2}{5}, \quad \Delta_{\sigma} = \frac{1}{15} \tag{5.2.24}$$

Il y a d'abord l'observation que la théorie conforme minimale avec $(p', p) = (6, 5)$ contient, dans son tableau des dimensions conformes $\{\Delta_{n'.n}\}$, les deux valeurs (5.2.24), voir Fig.18. On identifie $\Phi_{1.2}$ avec ε et $\Phi_{3.2}$ avec σ. Ensuite, avec cette hypothèse, on peut calculer les fonctions de corrélation et analyser l'algèbre des opérateurs. On particulier, on trouve les règles de fusion suivantes

$$\sigma\varepsilon \rightarrow \sigma, ... \tag{5.2.25}$$

$$\sigma\sigma \rightarrow I, \varepsilon, \sigma, ... \tag{5.2.26}$$

qui sont bien en accord avec les propriétés générales du modèle Z_3.

Finalement, des opérateurs parafermioniques ont été trouvés dans la théorie conforme en question [9]. Il était bien connu que ces opérateurs doivent exister dans le modèle Z_3, à partir de sa définition sur le réseau, éq.(5.2.21), Fig.17.

Pour conclure, nous donnons ici la liste des systèmes statistiques bidimensionnels pour lesquels des théories conformes correspondantes ont été identifiées. Cette liste restera évidement incomplète.

- Modèle de Potts à q états (toujours au point critique)

- Modèle de Potts tricritique à q états, $1 \leq q \leq 4$. Ces modèles peuvent être définis pour des valeurs de q continue, pas seulement pour des entiers.

- Modèle $O(N)$, $-2 \leq N \leq 2$; $O(N)$ est la symétrie du modèle par rapport aux rotations des spins vectoriels à N composantes. A nouveau, le modèle peut être défini pour N prenant des valeurs continues.

- Modèles RSOS et ses généralisations. RSOS est un modèle dont les variables de spin sont les hauteurs d'une interface qui sépare deux cristaux.

- Le problème de percolation critique, comme limite du modèle de Potts pour $q \rightarrow 1$.

- Le comportement critique des polymères comme limite du modèle $O(N)$ pour $N \rightarrow 0$.

- Les chemins auto-évitants critiques.

Les références sur ces applications et d'autres encore peuvent être trouvées, par exemple, dans l'article [10]. Des applications de la théorie conforme aux systèmes statistiques sur des géométries restreintes comme par exemple sur un cylindre et d'autres applications peuvent être trouvées dans [11]. Finalement, pour la relation entre les théories conformes et les modèles statistiques intégrables, on peut consulter l'article [12].

5.3 Exercices.

<u>Exercice 1.</u> Démontrer la régle de fusion :
$\Phi_{1,2}\Phi_{k',k} \rightarrow \Phi_{k',k-1}\Phi_{k',k+1}$

<u>Exercice 2.</u> Trouver des arguments pour les règles de fusion (5.2.19) et (5.2.20) du modèle d'Ising.

<u>Exercice 3.</u> Compléter les règles de fusion (5.2.25), (5.2.26) du modèle Z_3.

<u>Exercice 4.</u> En utilisant la transformation conforme $z = f(u) = e^{\frac{2\pi}{l}u}$ et la règle de transformation finie des opérateurs conformes primaires, éq.(2.2.6), cours 2, trouver la forme de la fonction de corrélation $\langle\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(u,\bar{u})\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(u',\bar{u'})\rangle$ sur un cylindre infini, de taille l, Fig.19. Démontrer ensuite que l'asymptote de cette fonction, pour $|u - u'| \gg l$, est $\sim exp\{-2\pi(\Delta + \bar{\Delta})\frac{|u-u'|}{l}\}$.

En plus, on peut démontrer, voir [13], que la correction principale de taille finie à $\log Z$, où Z est la fonction de partition d'un système statistique au point critique sur une bande de longueur L et de largeur l, avec $L \gg l$ et des conditions aux bords périodiques, est égale à $\frac{\pi c}{6}\frac{L}{l}$, c étant la charge centrale de la théorie conforme correspondante.

Exercice 5. D'après l'exercice 4 du cours 3, $I^{(-2)} = T(z)$. Démontrer que dans la théorie dite triviale, $p' = 3, p = 2 \rightarrow c = 0, T(z)$ est un opérateur descendant singulier (ou vecteur singulier) $\chi_{(2)}$, dans le module du I de cette théorie. Si c'est le cas, on peut poser $T(z) = 0$. Ceci signifie en plus que la théorie $p' = 3$, $p = 2$ est vide, après les annulations des descendants qui sont singuliers.

5.4 APPENDICE

La partie holomorphe de l'algèbre des opérateurs est donnée dans l'éq.(5.1.14), dont la forme générale peut être présentée comme

$$\Phi_1(z)\Phi_2(0) = \sum_p \frac{D_{12}^p}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}}\{(z)^{|\vec{k}|}\beta_p^{\{-\vec{k}\}}\Phi_p^{\{-\vec{k}\}}(0)\} \tag{5.4.1}$$

Nous utilisons les notations

$$|\vec{k}| = k_1 + k_2 + ..., \quad \beta^{\{-\vec{k}\}} = \beta^{(-k_1,-k_2,...)} \tag{5.4.2}$$

Pour simplifier les notations, la dépendance des coefficients $\beta_p^{\{-\vec{k}\}}$ sur les indices 1,2 des opérateurs Φ_1 et Φ_2 est supprimée.

Les coefficients $\beta_p^{\{-\vec{k}\}}$ peuvent être définis de la manière suivante. Appliquons l'opérateur $L_n,\ n \geq 1$, au produit $\Phi_1(z)\Phi_2(0)$:

$$L_n(\Phi_1(z)\Phi_2(0)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\xi^{n+1}T(\xi)\Phi_1(z)\Phi_2(0) \tag{5.4.3}$$

L'opérateur L_n est défini ici par rapport à l'origine, $L_n \equiv L_n(0)$. Il agit sur les deux opérateurs $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(0)$ entourés par le contour C, Fig.20.

Il y a deux possibilités. Dans la première, le contour C peut être déformé comme dans la Fig.21 et alors l'opérateur L_n agit séparément sur $\Phi_1(z)$ et sur $\Phi_2(0)$. Ceci donne

$$\begin{aligned} L_n(\Phi_1(z)\Phi_2(0)) &= (L_n\Phi_1(z))\Phi_2(0) + \Phi_1(z)(L_n\Phi_2(0)) \\ &= ((n+1)z^n\Delta_1 + z^{n+1}\partial_z)\Phi_1(z)\Phi_2(0) \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

($L_n\Phi_2(0)$ s'annule). Ensuite, on fait le développement du produit $\Phi_1(z)\Phi_2(0)$ par l'éq.(5.4.1). Ceci donne :

$$\begin{aligned} &L_n(\Phi_1(z)\Phi_2(0)) \\ &= ((n+1)z^n\Delta_1 + z^{n+1}\partial_z)\sum_p \frac{D_{12}^p}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}}\{\sum_{\vec{k}}(z)^{|\vec{k}|}\beta^{\{-\vec{k}\}}\Phi_p^{\{-\vec{k}\}}(0)\} \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

En particulier, pour les opérateurs L_{+1} et L_{+2} on trouve :

$$\begin{aligned} L_{+1}(\Phi_1(z)\Phi_2(0)) = \sum_p \frac{D_{12}^p}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}}\{&z(\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_p)\Phi_p(0) \\ &+z^2(\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_p + 1)\beta_p^{(-1)}\Phi_p^{(-1)}(0) + ...\} \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

$$L_{+2}(\Phi_1(z)\Phi_2(0)) = \sum_p \frac{D_{12}^p}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}}\{z^2(2\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_p)\Phi_p(0) + ...\} \tag{5.4.7}$$

Dans la seconde possibilité, on développe d'abord le produit $\Phi_1(z)\Phi_2(0)$ par l'éq.(5.4.1) et on applique L_n ensuite sur les termes du développement. Ceci donne l'équation :

$$L_n(\Phi_1(z)\Phi_2(0)) = \sum_p \frac{D_{12}^p}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}}\{\sum_{\{\vec{k}\}}(z)^{|\vec{k}|}\beta_p^{\{-\vec{k}\}}(L_n\Phi^{\{-\vec{k}\}}(0))\} \tag{5.4.8}$$

Pour L_{+1} et L_{+2} on trouve :

$$\begin{aligned} L_{+1}(\Phi_1(z)\Phi_2(0)) &= \sum_p \frac{D_{12}^p}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}}\{z\beta_p^{(-1)}2\Delta_p\Phi_p(0) \\ &\quad +z^2(\beta_p^{(-1,-1)}2(2\Delta_p+1) + 3\beta_p^{(-2)})\Phi_p^{(-1)}(0) + ...\} \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

$$\begin{aligned} L_{+2}(\Phi_1(z)\Phi_2(0)) &= \sum_p \frac{D_{12}^p}{(z)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}} \times \\ &\quad \{z^2(\beta_p^{(-1,-1)}6\Delta_p + \beta_p^{(-2)}(4\Delta_p + \frac{c}{2}))\Phi_p(0) + ...\} \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

(On calcule (5.4.9), (5.4.10) en utilisant les règles de commutations ; par exemple : $L_{+1}\Phi_p^{(-1)} = L_{+1}L_{-1}\Phi_p = 2L_0\Phi_p = 2\Delta_p\Phi_p$).

En comparant les équations (5.4.6), (5.4.7) avec (5.4.9), (5.4.10) on trouve les relations :

$$\beta_p^{(-1)}2\Delta_p = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_p \tag{5.4.11}$$

$$\beta_p^{(-1,-1)}2(2\Delta_p+1) + 3\beta_p^{(-2)} = (\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_p + 1)\beta^{(-1)} \tag{5.4.12}$$

$$\beta_p^{(-1,-1)}6\Delta_p + \beta_p^{(-2)}(4\Delta_p + \frac{c}{2}) = (2\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_p) \tag{5.4.13}$$

Ces équations déterminent $\beta_p^{(-1)}$, $\beta_p^{(-1,-1)}$, $\beta_p^{(-2)}$. Évidement, on peut progresser en comparant des termes plus élevés dans (5.4.6), (5.4.7) et (5.4.9), (5.4.10) pour déterminer plus de coefficients $\beta_p^{\{-\vec{k}\}}$. Il suffit des équations produites par L_{+1}, L_{+2}, le reste suit par commutation : par exemple $L_3 = [L_2, L_1]$.

Chapitre 6

6.1 Représentation d'un champ libre pour la théorie conforme minimale. Théorie avec $c = 1$.

Pour la théorie conforme minimale, présentée dans les cours 2-5, il existe une représentation par des opérateurs composés d'un champ libre $\varphi(z, \bar{z})$ [14]. La technique correspondante est très efficace pour trouver la solution de la théorie – principalement, pour le calcul des fonctions de corrélations et des coefficients de l'algèbre des opérateurs. En analogie avec la mécanique quantique, la représentation par des opérateurs d'un champ libre pourrait être comparée avec la représentation dans des variables propres de l'équation de Schrödinger d'un problème de mécanique quantique, variables dans lesquelles l'Hamiltonien est diagonal. Cette technique a été développée dans [15].

Dans la représentation d'un champ libre, aux opérateurs primaires de la théorie conforme sont associés des opérateurs exponentiels de $\varphi(z, \bar{z})$. Ils sont appelés les opérateurs de vertex :

$$\Phi_\Delta(z, \bar{z}) \sim V_\alpha(z, \bar{z}) = exp\{i\alpha\varphi(z, \bar{z})\} \tag{6.1.1}$$

où α est un paramètre qui va définir la dimension conforme Δ_α de l'opérateur $V_\alpha(z, \bar{z})$. $\varphi(z, \bar{z})$ est un champ libre, avec l'action

$$A[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \, \partial\varphi\bar{\partial}\varphi \tag{6.1.2}$$

Nous utilisons les notations : $x = (z, \bar{z}),\ \partial = \partial_z,\ \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$. La fonction de corrélation à deux points pour $\varphi(z, \bar{z})$ peut être définie par l'intégrale fonctionnelle :

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \frac{\int D\varphi \;\; e^{-A[\varphi]}\varphi(x)\varphi(x')}{\int D\varphi \;\; e^{-A[\varphi]}} \tag{6.1.3}$$

Avec cette définition, on trouve :

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = 2\log\frac{L^2}{|z - z'|^2} \tag{6.1.4}$$

– voir l'Appendice de ce cours pour les détails du calcul. L est la taille du système et apparaît dans $\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle$ à cause de la divergence infrarouge, voir l'Appendice.

La fonction à deux points pour l'opérateur de vertex $V_\alpha(x)$ et son conjugué $V_{-\alpha}(x')$ peut être calculée de la manière suivante :

$$\langle V_\alpha(x)V_{-\alpha}(x')\rangle = \langle e^{i\alpha\varphi(x)}e^{-i\alpha\varphi(x')}\rangle$$
$$= \langle e^{i\alpha(\varphi(x)-\varphi(x'))}\rangle = exp\{\frac{1}{2}\langle(i\alpha(\varphi(x)-\varphi(x')))^2\rangle\}$$
$$= exp\{-\frac{\alpha^2}{2}(\langle\varphi^2(x)\rangle + \langle\varphi^2(x')\rangle - 2\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle)\}$$
$$= exp\{-2\alpha^2(\log\frac{L^2}{a^2} - \log\frac{L^2}{|z-z'|^2})\}$$
$$= exp\{+2\alpha^2\log\frac{a^2}{|z-z'|^2}\} = \frac{(a)^{4\alpha^2}}{|z-z'|^{4\alpha^2}} \tag{6.1.5}$$

Nous avons utilisé ici d'abord la propriété de la distribution gaussienne : pour une variable aléatoire λ, avec la distribution

$$p(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\alpha\lambda^2} \tag{6.1.6}$$

on trouve

$$\langle e^{k\lambda}\rangle_{p(\lambda)} = exp\{\frac{1}{2}k^2\langle\lambda^2\rangle\} \tag{6.1.7}$$

k est une constante. Cette propriété se généralise à une combinaison linéaire, dans l'exponentielle, de variables gaussiennes et par conséquence à un champ libre qui possède la distribution gaussienne pour ses coefficients de développement dans la série de Fourrier, voir l'Appendice.

Ensuite, dans l'éq.(6.1.5) nous avons défini la fonction de corrélation de deux φ au même point comme

$$\langle\varphi^2(x)\rangle = \langle\varphi^2(x')\rangle = 2\log\frac{L^2}{a^2} \tag{6.1.8}$$

où a est un régulateur aux courtes distances.

Enfin, pour supprimer l'apparition du régulateur a dans le résultat final pour la fonction à deux points de l'opérateur de vertex, éq.(6.1.5), nous allons redéfinir $V_\alpha(x)$ comme

$$V_\alpha(x) = \frac{1}{(a)^{2\alpha^2}}e^{i\alpha\varphi(x)} \equiv : e^{i\alpha\varphi(x)} : \tag{6.1.9}$$

Il est possible de démontrer que cette définition correspond à l'ordre normal des modes de $\varphi(x)$ dans $V_\alpha(x)$, comme indiqué dans (6.1.9), si on utilise la définition ancienne, canonique, de la théorie des champs quantiques. Pour cette définition des opérateurs de vertex voir par exemple [3].

Pour la définition (6.1.9), on trouve

$$\langle V_\alpha(x)V_{-\alpha}(x')\rangle = \frac{1}{|z-z'|^{4\alpha^2}} \tag{6.1.10}$$

Si on compare (6.1.10) avec la fonction à deux points de l'opérateur primaire Φ_Δ :

$$\langle \Phi_\Delta(x)\Phi_\Delta(x')\rangle = \frac{1}{|z-z'|^{4\Delta}} = \frac{1}{(z-z')^{2\Delta}(\bar{z}-\bar{z}')^{2\Delta}} \tag{6.1.11}$$

on trouve que la dimension conforme de V_α et de $V_{-\alpha}$ est égale à

$$\Delta_\alpha = \Delta_{-\alpha} = \alpha^2 \tag{6.1.12}$$

Il faut remarquer que dans la représentation d'un champ libre de la théorie conforme minimale, pour chaque opérateur primaire Φ_Δ (et également pour les descendants) il correspond deux opérateurs de vertex(dans l'espace de Fock des opérateurs d'un champ libre) : V_α, avec $\Delta_\alpha = \alpha^2$, et son conjugué $V_{-\alpha}$. En plus, on a besoin de deux représentations pour écrire et calculer les fonctions de corrélation. Dans l'espace de Fock, il existe l'opération de conjugaison. Les fonctions de corrélation sont non-nulles seulement entre les opérateurs mutuellement conjugués. Donc, la conjugaison est un détail de la représentation dans l'espace de Fock, pas de la théorie conforme minimale elle-même.

La fonction de corrélation de plusieurs opérateurs de vertex peut être calculée de la même manière que dans l'éq.(6.1.5). On obtient :

$$\langle V_{\alpha_1}(x_1)V_{\alpha_2}(x_2)...V_{\alpha_k}(x_k)\rangle = \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i\alpha_j} \tag{6.1.13}$$

avec la condition $\sum \alpha_i = 0$. Si cette condition n'est pas satisfaite et dans la limite $L \gg |z_i - z_j|$, on trouve un facteur supplémentaire de la forme

$$\frac{1}{(L)^{2(\sum \alpha_i)^2}} \tag{6.1.14}$$

dans (6.1.13) et la fonction de corrélation s'annule quand on prend finalement la limite de $L \to \infty$. L nous sert pour régulariser des expressions intermédiaires, mais nous sommes intéressés, dans notre cours en tout cas, par la théorie conforme sur un plan infini. Donc pour que la fonction de corrélation des opérateurs de vertex soit non-nulle, on a la condition

$$\sum \alpha_i = 0 \tag{6.1.15}$$

L'opérateur d'énergie-impulsion pour la théorie avec l'action (6.1.2) s'écrit comme

$$T(z) \equiv T_{zz}(z) = -\frac{1}{4} :\partial_z\varphi(z)\partial_z\varphi(z): \tag{6.1.16}$$

L'ordre normal du produit $\partial_z\varphi\partial_z\varphi$ de deux opérateurs au même point correspond à la soustraction des divergences :

$$:\partial_z\varphi(z)\partial_z\varphi(z): := \lim_{z\to z'}[\partial_z\varphi(z)\partial_{z'}\varphi(z') - \langle\partial_z\varphi(z)\partial_{z'}\varphi(z')\rangle] \tag{6.1.17}$$

Il est possible de démontrer que la soustraction (6.1.17) correspond effectivement à l'ordre normal des modes des opérateurs $\partial\varphi\, \partial\varphi$, dans la méthode canonique de la théorie des champs quantiques.

Nous avons supprimé la dépendance de φ en $\bar{z}$, $\bar{z}'$ dans (6.1.16), (6.1.17), car en général les fonctions de corrélation de l'opérateur $\partial_z\varphi(z,\bar{z})$ ne dépendent pas de $\bar{z}$. Par exemple, avec le résultat (6.1.4) pour $\langle\varphi(z\bar{z})\varphi(z',\bar{z}')\rangle$, on trouve :

$$\langle\partial_z\varphi(z,\bar{z})\varphi(z'\bar{z}')\rangle = -\frac{2}{z-z'} \tag{6.1.18}$$

$$\langle\partial_z\varphi(z,\bar{z})\partial_{z'}\varphi(z',\bar{z}')\rangle = -\frac{2}{(z-z')^2} \tag{6.1.19}$$

Dans ce sens, l'opérateur T_{zz}, éq.(6.1.16), également ne dépend pas de $\bar{z}$.

On peut calculer ensuite le développement du produit des opérateurs $T(z)$ et $V_\alpha(z',\bar{z}')$, en faisant les contractions des champs libres par le théorème de Wick (exercice 2 de ce cours) :

$$\begin{aligned} T(z)V_\alpha(z',\bar{z}') &= -\frac{1}{4} : \partial_z\varphi(z)\partial_z\varphi(z) :: e^{i\alpha\varphi(z',\bar{z}')} : \\ &= \left(\frac{\Delta_\alpha}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'}\right) : e^{i\alpha\varphi(z',\bar{z}')} : + \text{Termes réguliers} \end{aligned} \tag{6.1.20}$$

où $\Delta_\alpha = \alpha^2$. En comparant ce développement avec celui pour $T(z)\Phi_\Delta(z')$ dans la théorie générale, éq.(3.1.4) du cours 3, on trouve que $V_\alpha(z',\bar{z}')$ est un opérateur primaire avec la dimension conforme Δ_α, par rapport à l'opérateur d'énergie-impulsion (6.1.16). Evidement, on trouve le même développement, avec le même Δ_α, pour l'opérateur de vertex conjugué $V_{-\alpha}(z',\bar{z}')$.

Il faut remarquer que $T(z)$, éq.(6.1.16), est déjà donné dans la forme normalisée pour que le coefficient du terme

$$\frac{1}{z-z'}\partial_{z'}V_\alpha(z',\bar{z}') \tag{6.1.21}$$

dans le développement (6.1.20) soit égale à 1 et donc en accord avec la normalisation de $T(z)$ dans la théorie générale, cours 2-5. Cette condition étant vérifiée, le coefficient du terme

$$\frac{1}{(z-z')^2}V_\alpha(z',\bar{z}') \tag{6.1.22}$$

est bien la dimension conforme de $V_\alpha(z',\bar{z}')$. Observons en plus que $\Delta_\alpha = \alpha^2$ dans (6.1.20) en accord avec Δ_α dans la fonction à deux points, $\langle V_\alpha V_{-\alpha}\rangle$, éqs. (6.1.10), (6.1.12).

On peut calculer ensuite la fonction à deux points pour $T(z)$. Avec $T(z)$ donné par l'éq.(6.1.16) et avec le résultat (6.1.19) pour $\langle\partial\varphi\partial\varphi\rangle$, on trouve :

$$\langle T(z)T(z')\rangle = \frac{1}{16}\langle : \partial_z\varphi(z)\partial_z\varphi(z) :: \partial_{z'}\varphi(z')\partial_{z'}\varphi(z')\rangle = \frac{1/2}{(z-z')^4} \tag{6.1.23}$$

En général, voir cours 2,

$$\langle T(z)T(z')\rangle = \frac{c/2}{(z-z')^4} \tag{6.1.24}$$

où c est la charge centrale de l'algèbre de Virasoro. Donc, nous avons

$$c = 1 \tag{6.1.25}$$

Conclusion : La théorie conforme est réalisée par des opérateurs composés d'un champ libre, avec T donné par l'éq.(6.1.16) et avec des opérateurs primaires représentés par des opérateurs de vertex, éq.(6.1.9). La théorie possède une charge centrale fixée de valeur $c = 1$.

6.2 Déformation de la théorie d'un champ libre vers la théorie conforme avec $c < 1$

.

Il existe une déformation de la théorie d'un champ libre qui permet de représenter une théorie conforme avec une charge centrale prenant des valeurs quelconques, dans l'intervalle $c < 1$. Nous allons la présenter maintenant.

L'opérateur d'énergie-impulsion est mis sous la forme :

$$T(z) = -\frac{1}{4} : \partial_z\varphi(z)\partial_z\varphi(z) + i\alpha_0\partial_z^2\varphi(z) \tag{6.2.1}$$

Comme les dimensions conformes de $\partial_z\varphi$ et $\partial_z^2\varphi$ sont

$$\Delta(\partial_z\varphi) = 1 \tag{6.2.2}$$

$$\Delta(\partial_z^2\varphi) = 2 \tag{6.2.3}$$

(voir exercice 4 du cours) l'opérateur $T(z)$, éq.(6.2.1), garde sa dimension canonique $\Delta(T) = 2$. Dans la dérivation standard de $T(z)$, par le théorème de Noether, le deuxième terme dans l'éq.(6.2.1) correspondra à une modification des conditions aux bords, c.-à-d. au comportement asymptotique de $\varphi(x)$ pour $x \to \infty$. La dérivation de $T(z)$, èq.(6.2.1), est présentée dans l'Appendice 2 du cours.

On calcule maintenant la fonction à deux points $\langle T(z)T(z')\rangle$, pour $T(z)$ dans l'éq.(6.2.1) et on trouve :

$$\langle T(z)T(z')\rangle = \frac{(1-24\alpha_0^2)}{2(z-z')^4} \tag{6.2.4}$$

Donc

$$c = 1 - 24\alpha_0^2 \tag{6.2.5}$$

comp.éq.(6.1.24).

Ensuite, pour le produit $T(z)V_\alpha(z',\bar{z}')$, on trouve :

$$T(z)V_\alpha(z',\bar{z}') = (-\frac{1}{4} : \partial_z\varphi(z)\partial_z\varphi(z) : +i\alpha_o\partial_z^2\varphi(z)) : e^{i\alpha\varphi(z',\bar{z}')} :$$
$$= (\frac{\Delta_\alpha}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'}) : e^{i\alpha\varphi(z',\bar{z}')} : +\text{Termes réguliers} \tag{6.2.6}$$

avec

$$\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha_0\alpha \tag{6.2.7}$$

Donc, la dimension conforme de l'opérateur de vertex $V_\alpha(z,\bar{z})$ a changé, quand on est passé à la théorie avec $T(z)$ modifié, éq.(6.2.1).

Observons que pour Δ_α donné par l'éq.(6.2.7), on a :

$$\Delta_{2\alpha_0-\alpha} = \Delta_\alpha \tag{6.2.8}$$

au lieu de $\Delta_{-\alpha} = \Delta_\alpha$ pour $\Delta_\alpha = \alpha^2$ dans la théorie standard. Pour la théorie conforme modifiée d'un champ libre $\varphi(z,\bar{z})$, il faut que la fonction à deux points d'un opérateur de vertex soit présentée par

$$\langle V_\alpha(x)V_{2\alpha_0-\alpha}(x')\rangle \tag{6.2.9}$$

au lieu de $\langle V_\alpha(x)V_{-\alpha}(x')\rangle$.

Nous avons vu dans le cours 1 que, du point de vue de la théorie conforme invariante, les fonctions à deux points $\langle\Phi_{\Delta_1}\Phi_{\Delta_2}\rangle$ sont non-nulles à condition que $\Delta_1 = \Delta_2$ (voir exercice du cours 1). Ici nous avons introduit une déformation à l'opérateur $T(z)$ d'un champ libre. Il faut ensuite réajuster (déformer) le reste de la théorie pour qu'elle soit en accord, à nouveau, avec les propriétés générales de la théorie conforme.

Quand on calcule la fonction à deux points (6.2.9), avec la technique exposée dans l'éq.(6.1.5), on trouve (dans la limite de $|x-x'| \ll L$) :

$$\langle V_\alpha(x)V_{2\alpha_0-\alpha}(x')\rangle = \frac{1}{|x-x'|^{4(\alpha^2-2\alpha_0\alpha)}}\frac{1}{(L)^{8\alpha_0^2}} \tag{6.2.10}$$

et la fonction va s'annuler dans la limite $L\to\infty$. Donc, on est obligé de modifier la définition des fonctions de corrélation des opérateurs de vertex. On définit :

$$\langle V_\alpha(x)V_{2\alpha_0-\alpha}(x')\rangle_{(-2\alpha_0)} = \lim_{R\to\infty}\{(R)^{16\alpha_0^2}\langle V_\alpha(x)V_{2\alpha_0-\alpha}(x')V_{-2\alpha_0}(R)\rangle_{(0)}\} \tag{6.2.11}$$

et on calcule :

$$\begin{aligned} &\langle V_\alpha(x)V_{2\alpha_0-\alpha}(x')\rangle_{(-2\alpha_0)} \\ = &\lim_{R\to\infty}\{(R)^{16\alpha_0^2}\frac{1}{|x-x'|^{4(\alpha^2-2\alpha_0\alpha)}|x-R|^{8\alpha\alpha_0}|x'-R|^{8\alpha_0(2\alpha_0-\alpha)}} \\ = &\frac{1}{|x-x'|^{4(\alpha^2-2\alpha\alpha_0)}} \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

Dans la définition (6.2.11) un opérateur supplémentaire est ajouté, $V_{-2\alpha_0}(R)$, que l'on place à l'infini.

On fait souvent référence à l'analogie entre les fonctions de corrélation des opérateurs de vertex et la fonction de partition du gaz de Coulomb classique, bi-dimensionnel. Dans cette analogie, l'opérateur $V_\alpha(x)$ correspond à la source qui met la charge α au point x. L'opérateur $V_{-2\alpha_0}(R), R \to \infty$, correspondra alors à la charge $-2\alpha_0$ à l'infini. Donc, dans la terminologie du gaz de Coulomb, la prescription (6.2.11) pour le calcul des fonctions de corrélation correspond à la représentation du gaz de Coulomb, pour la théorie conforme minimale, avec la charge de l'état du vide $-2\alpha_0$, qui est placée à l'infinie.

Pour la fonction de corrélation de plusieurs opérateurs de vertex on trouve, avec la prescription (6.2.11) :

$$\begin{aligned} & \langle V_{\alpha_1}(x_1)V_{\alpha_2}(x_2)...V_{\alpha_k}(x_k)\rangle_{(-2\alpha_0)} \qquad (6.2.13) \\ = & \lim_{R\to\infty}\{(R)^{16\alpha_0^2}\langle V_{\alpha_1}(x_1)V_{\alpha_2}(x_2)...V_{\alpha_k}(x_k)V_{-2\alpha_0}(R)\rangle_{(0)}\} = \prod_{i<j}|x_i - x_j|^{4\alpha_i\alpha_j} \end{aligned}$$

à condition que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 2\alpha_0 \tag{6.2.14}$$

Sinon la fonction s'annule. Donc l'opération de conjugaison des opérateurs de vertex, $V_\alpha \to V_{2\alpha_0-\alpha}$, au lieu de $V_\alpha \to V_{-\alpha}$, et la condition de neutralité (dans la terminologie du gaz de Coulomb) éq.(6.2.14), au lieu de éq.(6.1.15), sont également modifiées.

Conclusion : La théorie conforme est réalisée par des opérateurs composés de la théorie d'un champ libre, qui est déformée par la présence de la charge $-2\alpha_0$ à l'infini. $T(z)$ est donné par l'éq.(6.2.1) et les opérateurs primaire sont présentés par des opérateurs de vertex :

$$\Phi_\Delta \sim V_\alpha(x) \text{ et } V_{2\alpha_0-\alpha}(x) \tag{6.2.15}$$

avec

$$\Delta_\alpha = \Delta_{2\alpha_0-\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha_0\alpha \tag{6.2.16}$$

La charge centrale de la théorie est donnée par l'éq.(6.2.5). En plus, nous avons les règles de calcul des fonctions de corrélation, éqs.(6.2.11), (6.2.13).

Nous allons utiliser cette représentation pour le calcul des fonctions de corrélation des opérateurs primaires de la théorie conforme minimale, des fonctions à quatre opérateurs en particulier, qui permettent d'obtenir les coefficients D_{mn}^p de l'algèbre des opérateurs, voir cours 5, éq.(5.1.14). Les fonctions de corrélations dans l'éq.(6.2.13) sont correctes, mais elles correspondent à des cas particuliers, spécifiques dans le choix des opérateurs. En général, elles sont plus compliquées, comme nous allons le voir plus loin.

6.3 Exercices.

Exercice 1. Retrouver la fonction de corrélation de plusieurs opérateurs de vertex, éq.(6.1.13).

Exercice 2. Retrouver le développement du produit des opérateurs $T(z)V_\alpha(z', \bar{z}')$, éq.(6.1.20).

Exercice 3. Retrouver $\langle T(z)T(z')\rangle$, éq.(6.1.23).

Exercice 4. L'action d'une théorie des champs est sans dimension. Pour la théorie d'un champ libre, $A[\varphi] = \frac{1}{4\pi}\int d^2x \;\; \partial_z\varphi\partial_{\bar{z}}\varphi$, éq.(6.1.2) du cours. Donner des arguments pour justifier que $\Delta(\partial_z\varphi) = 1$, $\Delta(\partial_z^2\varphi) = 2$. (Répétons que la dimension d'un opérateur, en général, correspond à sa transformation d'échelle, la dilatation).

Exercice 5. Retrouver $\langle T(z)T(z')\rangle$, éq.(6.2.4).

Exercice 6. Retrouver le développement du produit des opérateurs $T(z)V_\alpha(z', \bar{z}')$, éq.(6.2.6).

Exercice 7. Retrouver le résultat (6.2.13) pour la fonction $\langle V_{\alpha_1}(x_1)V_{\alpha_2}(x_2)...V_{\alpha_k}(x_k)\rangle_{(-2\alpha_0)}$.

Exercice 8. En prenant $T(z)$ de la théorie de fermions libres, $T(z) \propto \Psi\partial_z\Psi$, fixer la constante de normalisation pour que

$$T(z)\Psi(z') = (\frac{\Delta_\Psi}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'})\Psi(z') + ... \tag{6.3.1}$$

avec $\Delta_\Psi = 1/2$, dimension canonique des fermions libres. Il faudra utiliser la fonction de corrélation (fonction de Green) $< \Psi(z)\Psi(z') >= 1/(z-z')$ et le théorème de Wick pour des champs libres. Calculer ensuite la fonction $< T(z)T(z') >$ et retrouver la charge centrale de la théorie.

6.4 APPENDICE 1. Calcul de la fonction $< \varphi(x)\varphi(x') >$.

Nous allons exposer deux techniques de calcul de la fonction à deux points $\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle$ pour un champ libre.

1ère méthode.

1.Dans l'intégrale fonctionnelle

$$\int D\varphi(x)\,\varphi(x')exp\{-\frac{1}{4\pi}\int d^2x\partial\varphi\bar{\partial}\varphi\} \tag{6.4.1}$$

Effectuons la variation

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + \delta\varphi(x) \tag{6.4.2}$$

Ceci donne :

$$\int D\varphi(x)exp\{-A[\varphi]\}(\delta\varphi(x') + \varphi(x')\frac{1}{2\pi}\int d^2x\,\delta\varphi(x)\partial\bar{\partial}\varphi(x)) = 0 \tag{6.4.3}$$

avec $A[\varphi] = -\frac{1}{4\pi}\int d^2x\,\partial\varphi\bar{\partial}\varphi$. En divisant l'éq.(6.4.3) par $\int D\varphi\, exp{-}A[\varphi]$ on trouve :

$$\delta\varphi(x') + \frac{1}{2\pi}\int d^2x\,\delta\varphi(x)\partial\bar{\partial}\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = 0 \tag{6.4.4}$$

Cette équation pourrait également être présentée comme :

$$\int d^2x\, \delta\varphi(x)[\delta^2(x-x') + \frac{1}{2\pi}\partial\bar{\partial}\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle] = 0 \tag{6.4.5}$$

Mais $\delta\varphi(x)$ est une fonction arbitraire. Donc, on peut enlever l'intégrale, ce qui donne :

$$-\partial\bar{\partial}\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = 2\pi\delta^2(x-x') \tag{6.4.6}$$

La solution de cette équation est :

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = 2\log\frac{const}{|z-z'|^2} \tag{6.4.7}$$

En effet :

$$-\partial\bar{\partial}(2\log\frac{const}{|z-z'|^2}) = -\bar{\partial}\partial(2\log\frac{const}{|z-z'|^2}) = 2\bar{\partial}\frac{1}{z-z'} = 2\pi\delta^2(x-x') \tag{6.4.8}$$

Démonstration de $\bar{\partial}\frac{1}{z} = \pi\delta^2(x)$.

$$\bar{\partial}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)\frac{1}{x_1+ix_2} = \frac{1}{2}(\partial_1+i\partial_2)\frac{x_1-ix_2}{|x|^2}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_1\frac{x_1}{|x|^2} + \partial_2\frac{x_2}{|x|^2}) + \frac{i}{2}(\partial_2\frac{x_1}{|x|^2} - \partial_1\frac{x_2}{|x|^2}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\frac{\vec{r}}{r^2} + \frac{i}{2}\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^2} \tag{6.4.9}$$

On vérifie que cette expression est nulle pour $\vec{r} \neq 0$. Ensuite, pour l'intégrale sur un petit disque autour de l'origine $\vec{r} = 0$, Fig.22, on trouve :

$$\int d^2x\vec{\nabla}\frac{\vec{r}}{r^2} = \oint d\vec{s}\frac{\vec{r}}{r^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi\vec{r}\frac{\vec{r}}{r^2} = 2\pi \tag{6.4.10}$$

$$\int d^2x\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^2} = \int d^2x\,\epsilon_{\mu\nu}\nabla_\mu\frac{r_\nu}{r^2} = \oint ds_\mu\epsilon_{\mu\nu}\frac{r_\nu}{r^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, r_\mu\epsilon_{\mu\nu}\frac{r_\nu}{r^2} = 0 \tag{6.4.11}$$

Ici $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$, $\epsilon_{12} = 1$. Donc

$$\vec{\nabla}\frac{\vec{r}}{r^2} = 2\pi\delta^{(2)}(x), \quad \vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^2} = 0 \tag{6.4.12}$$

Finalement :

$$\bar{\partial}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\frac{\vec{r}}{r^2} + \frac{i}{2}\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^2} = \pi\delta^{(2)}(x) \tag{6.4.13}$$

2ème méthode.

Calcul de l'intégrale fonctionnelle pour $\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle$ par la décomposition de $\varphi(x)$ en série de Fourier.

Considérons $\varphi(x)$ défini sur un domaine carré de taille $L\times L$, avec des conditions aux bords périodiques. Alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^2}\sum_{\vec{p}}\varphi_{\vec{p}}e^{i\vec{p}\vec{x}} \tag{6.4.14}$$

$$\varphi_{\vec{p}} = \int d^2x\varphi(x)e^{-i\vec{p}\vec{x}} \tag{6.4.15}$$

$$\int D\varphi(x) \to \prod_{\vec{p}} \int d\varphi_{\vec{p}} \tag{6.4.16}$$

avec $\vec{p} = (p_1, p_2),\ p_1 = \frac{2\pi}{L}m,\ p_2 = \frac{2\pi}{L}n$, où m, n sont des entiers :

$$-\frac{L}{2} < m \leq \frac{L}{2}, \quad -\frac{L}{2} < n \leq \frac{L}{2} \tag{6.4.17}$$

Pour l'action de la théorie $A[\varphi]$ on trouve :

$$A[\varphi] = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\, \partial\varphi\bar{\partial}\varphi = \frac{1}{16\pi}\int d^2x(\vec{\partial}\varphi)^2$$

$$= \frac{1}{16\pi L^2}\sum_{\vec{p}} \vec{p}^2\varphi_{\vec{p}}\varphi_{-\vec{p}} \tag{6.4.18}$$

Pour la fonction à deux points $\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle$, définie par l'intégrale fonctionnelle,éq.(6.1.3), on trouve :

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \frac{\int D\varphi exp\{-A[\varphi]\}\varphi(x)\varphi(x')}{\int D\varphi exp\{-A[\varphi]\}}$$

$$= \frac{\prod_{\vec{p}}(\int d\varphi_{\vec{p}} exp\{-\frac{1}{16\pi L^2}\vec{p}^2\varphi_{\vec{p}}\varphi_{-\vec{p}}\})\varphi(x)\varphi(x')}{\prod_{\vec{p}}(\int d\varphi_{\vec{p}} exp\{-\frac{1}{16\pi L^2}\vec{p}^2\varphi_{\vec{p}}\varphi_{-\vec{p}}\})} \tag{6.4.19}$$

Il faut préciser maintenant la mesure d'intégration fonctionnelle pour un champ $\varphi(x)$, éq.(6.4.16). D'abord, nous allons supprimer l'intégration sur le mode constant $\varphi_{\vec{p}=0}$. Elle n'existe que pour des conditions périodiques aux bords et elle provoque une divergence de l'intégrale (6.4.19). Ce problème est facilement régularisé en changeant les conditions aux bords. Nous allons procéder autrement : gardons les conditions périodiques, pour ne pas compliquer la forme de la décomposition dans la série de Fourier, mais supprimons le mode $\varphi_{\vec{p}=0}$. Dans la limite $|\vec{x} - \vec{x}'| \ll L$, L étant la taille du système, on trouve le même résultat, pour des définitions différentes de l'intégrale fonctionnelle sur $\varphi(x)$.

Notons en plus que pour $p \neq 0$ et pour $\varphi(x)$ prenant des valeurs réelles, on a :

$$\varphi_{-\vec{p}} = (\varphi_{\vec{p}})^* \tag{6.4.20}$$

– l'éq.(6.4.15). Donc on peut utiliser les définitions suivantes : pour

$$\varphi_{\vec{p}} = \varphi'_{\vec{p}} + i\varphi''_{\vec{p}}, \quad \varphi_{-\vec{p}} = \varphi'_{\vec{p}} - i\varphi''_{p} \tag{6.4.21}$$

($\varphi'_{\vec{p}} = Re\varphi_{\vec{p}}$, $\varphi''_{\vec{p}} = Im\varphi_{\vec{p}}$) la mesure d'intégration peut être écrite comme

$$\int D\varphi(x) \to \prod_{\vec{p}}\int d\varphi_{\vec{p}} \to \prod_{\vec{p}(p_1>0)}\int d\varphi_{\vec{p}}\int d\varphi_{-\vec{p}} \to \prod_{\vec{p}(p_1>0)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi'_{\vec{p}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi''_{\vec{p}} \tag{6.4.22}$$

et la série pour l'action $A[\varphi]$ prend la forme

$$\frac{1}{16\pi L^2}\sum_{\vec{p}} \vec{p}^2 \varphi_{\vec{p}}\varphi_{-\vec{p}} \to \frac{1}{8\pi L^2}\sum_{\vec{p}(p_1>0)} \vec{p}^2 \varphi_{\vec{p}}\varphi_{-\vec{p}}$$

$$= \frac{1}{8\pi L^2}\sum_{\vec{p}(p_1>0)} p^2((\varphi'_{\vec{p}})^2 + (\varphi''_{\vec{p}})^2) \tag{6.4.23}$$

Pour la fonction à deux points, éq.(6.4.19), on trouve maintenant :

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \frac{\prod_{\vec{p}(p_1>0)}(\int d\varphi'_{\vec{p}}\int d\varphi''_{\vec{p}} exp\{-\frac{1}{8\pi L^2}\vec{p}^2|\varphi_{\vec{p}}|^2)\varphi(x)\varphi(x')}{\prod_{\vec{p}(p_1>0)}(\int d\varphi'_{\vec{p}}\int d\varphi''_{\vec{p}} exp\{-\frac{1}{8\pi L^2}\vec{p}^2|\varphi_{\vec{p}}|^2\})} \tag{6.4.24}$$

En substituant la série (6.4.14) pour $\varphi(x)$, $\varphi(x')$ on trouve

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \frac{1}{L^4}\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{q}'}\langle\varphi_{\vec{q}}\varphi_{\vec{q}'}\rangle e^{i\vec{q}\vec{x}+i\vec{q}'\vec{x}'} \tag{6.4.25}$$

Par l'éq.(6.4.24)

$$\langle\varphi_{\vec{q}}\varphi_{\vec{q}'}\rangle = \delta_{\vec{q},-\vec{q}'}\langle\varphi_{\vec{q}}\varphi_{-\vec{q}}\rangle = \delta_{\vec{q},-\vec{q}'}\frac{8\pi L^2}{\vec{q}^2} \tag{6.4.26}$$

Donc

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \frac{8\pi}{L^2}\sum_{\vec{q}}\frac{1}{\vec{q}^2}e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \tag{6.4.27}$$

Observons ensuite que dans la somme (6.4.27)

$$(\Delta q_1)_{min} = (\Delta q_2)_{min} = \frac{2\pi}{L} \tag{6.4.28}$$

(voir l'éq.(6.4.17)). Alors, pour

$$|\vec{x} - \vec{x'}|(\Delta q)_{min} \sim \frac{|x - x'|}{L} \ll 1 \tag{6.4.29}$$

on peut remplacer la somme dans l'éq.(6.4.27) par l'intégrale :

$$d^2q \approx \Delta q_1 \times \Delta q_2 = \frac{(2\pi)^2}{L^2} \tag{6.4.30}$$

$$\sum_{\vec{q}}(...) = \frac{L^2}{(2\pi)^2}\sum_{\vec{q}}\Delta q_1 \times \Delta q_2(...) \approx \frac{L^2}{4\pi^2}\int d^2q(...) \tag{6.4.31}$$

Pour l'éq.(6.4.27) on trouve

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \frac{8\pi}{L^2}\times\frac{L^2}{4\pi^2}\int d^2q\frac{e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{q}^2} = \frac{2}{\pi}\int d^2q\frac{e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{q}^2} \tag{6.4.32}$$

L'intégrale diverge pour $|\vec{q}| \to 0$. Dans la somme (6.4.27) $|q|_{min} \sim \frac{1}{L}$ (le mode $\vec{q} = 0$ étant toujours exclu). On peut introduire, d'une façon effective, $|q|_{min}$ dans l'intégrale (6.4.32) en remplaçant $1/\vec{q}^2$ par $1/(\vec{q}^2 + m^2)$, avec $m \sim 1/L$. Ceci donne

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \frac{2}{\pi}\int d^2q \frac{e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{q}^2 + m^2} \approx \frac{2}{\pi}2\pi\int_m^{1/|\vec{x}-\vec{x}'|}\frac{qdq}{q^2} = 4\log\frac{L}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \qquad (6.4.33)$$

Dans ce calcul de l'intégrale, nous avons gardé le terme principal uniquement pour la limite de $m|x-x'| \sim |x-x'|/L \ll 1$. Dans ce sens le calcul est exact. L'éq.(6.4.33) pour $\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle$ correspond à celui de l'éq.(6.4.7). En plus, nous avons précisé la valeur de la constante dans (6.4.7).

6.5 APPENDICE 2. Calcul de l'opérateur $T(z) = -\frac{1}{4}(\partial\varphi)^2 + i\alpha_0\partial^2\varphi$ par la variation de l'action de la théorie d'un champ libre avec la charge à l'infini.

Dans la théorie avec la charge à l'infini, on calcule les fonctions de corrélation des opérateurs de vertex $V_\alpha(x)$ comme la limite dans l'éq.(6.2.13). Comme conséquence, la fonction à deux points non-nulle est

$$\langle V_\alpha(x)V_{2\alpha_0-\alpha}\rangle_{(-2\alpha_0)} = \frac{1}{|x-x'|}4(\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0) \qquad (6.5.1)$$

et la dimension conforme de l'opérateur $V_\alpha(x)$ sera égale à

$$\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 \qquad (6.5.2)$$

D'autre part, la règle de transformation conforme de $V_\alpha(x)$ doit être de la forme :

$$V_\alpha(z,\bar{z}) \to \tilde{V}_\alpha(z,\bar{z}) = |f'(z)|^{2\Delta_\alpha}V_\alpha(f(z),\overline{f(z)}) \qquad (6.5.3)$$

où $f(z)$ correspond aux transformation des points d'espace : $z \to \tilde{z} = f(z)$, $\bar{z} \to \tilde{\bar{z}} = \overline{f(z)}$. Donc, pour l'opérateur composé

$$V_\alpha(z,\bar{z}) =: exp\{i\alpha\varphi(z,\bar{z})\} : \qquad (6.5.4)$$

il faut définir la transformation de $\varphi(z,\bar{z})$ de façon à ce qu'elle donne (6.5.3) avec Δ_α défini par (6.5.2). Cette transformation est de la forme suivante :

$$\varphi(z,\bar{z}) \to \tilde{\varphi}(z,\bar{z}) = \varphi(f(z),\overline{f(z)}) + 2i\alpha_0\log f'(z) + 2i\alpha_0\log\overline{f'(z)} \qquad (6.5.5)$$

Effectivement, l'opérateur de vertex (6.5.4) pourrait être présenté dans la forme :

$$: exp\{i\alpha\varphi(z,\bar{z})\} := \frac{1}{(a)^{2\alpha^2}}exp\{i\alpha\varphi(z,\bar{z})\} \qquad (6.5.6)$$

où a est un régulateur aux courtes distances, voir l'éq.(6.1.9). Sous la transformation du champ $\varphi(z,\bar{z})$ (6.5.5) on trouve :

$$\frac{1}{(a)^{2\alpha^2}} exp\{i\alpha\varphi(z,\bar{z})\} \rightarrow \frac{1}{(a)^{2\alpha^2}} exp\{i\alpha\tilde{\varphi}(z,\bar{z})\}$$

$$= \frac{1}{(a)^{2\alpha^2}} exp\{i\alpha(\varphi(f(z),\bar{f}(z)) + 4i\alpha_0 \log|f'(z)|)\}$$

$$= \frac{1}{(a)^{2\alpha^2}} |f'(z)|^{-4\alpha\alpha_0} exp\{i\alpha\varphi(f(z),\overline{f(z)})\} \tag{6.5.7}$$

Pour remettre l'exponentiel dans la forme d'ordre normale, : $exp\{i\alpha\varphi(f(z),\overline{f(z)})\}$:, il faut qu'il soit multiplié par le facteur $1/(\tilde{a})^{2\alpha^2}$, où $\tilde{a}$ est un régulateur aux courtes distances pour des coordonnées $\tilde{z} = f(z)$. $\tilde{a}$ et a sont liés comme $|d\tilde{z}|$ et $|dz|$:

$$\tilde{a} = |\frac{df(z)}{dz}|a \tag{6.5.8}$$

On trouve :

$$\frac{1}{(a)^{2\alpha^2}} exp\{i\alpha\tilde{\varphi}(z,\bar{z})\} = |f'(z)|^{2(\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0)} \times \frac{1}{(\tilde{a})^{2\alpha_0^2}} exp\{i\alpha\varphi(f(z),\overline{f(z)})\}$$

$$= |f'(z)|^{2(\alpha^2-2\alpha\alpha_0)} \times : exp\{i\alpha\varphi(f(z),\overline{f(z)})\} : \tag{6.5.9}$$

qui correspond à

$$\tilde{V}_\alpha(z,\bar{z}) = |f'(z)|^{2\Delta_\alpha} \times V_\alpha(f(z),\overline{f(z)}) \tag{6.5.10}$$

Donc nous avons démontré que la transformation du champ $\varphi(z,\bar{z})$ dans l'éq.(6.5.5) génére la transformation correcte de l'opérateur de vertex $V_\alpha(z,\bar{z})$.

Conclusion : la règle de calcul des fonctions de correlation avec la charge à l'infini (6.2.13) a, pour conséquence, la règle de transformation du champ $\varphi(z,\bar{z})$ (6.5.5).

Dans le calcul qui suit, les formules d'intégration par parties dans les coordonnées complexes seront utiles. Elles sont de la forme :

$$\int_D d^2x \;\; g\bar{\partial}f = -\frac{i}{2}\oint_C dz \;\; gf - \int_D d^2x \;\; \bar{\partial}gf \tag{6.5.11}$$

$$\int_D d^2x \;\; g\partial f = \frac{i}{2}\oint_C d\bar{z} \;\; gf - \int_D d^2x \;\; \partial gf \tag{6.5.12}$$

Notre point de départ pour le calcul de l'opérateur $T(z)$ sera l'action

$$A[\varphi] = \frac{1}{4\pi}\int d^2x \;\; \partial\varphi\bar{\partial}\varphi \tag{6.5.13}$$

et la règle de transformation du champ $\varphi(z,\bar{z})$ (6.5.5), dont la forme infinitésimale, pour $f(z) = z + a(z)$, est la suivante :

$$\varphi(z,\bar{z}) \rightarrow \tilde{\varphi}(z,\bar{z}) \approx \varphi(f(z),\overline{f(z)}) + 2i\alpha_0(\partial a(z) + \bar{\partial}\overline{a(z)}) \tag{6.5.14}$$

Il est préférable, pour le calcul qui suit, de garder les arguments du champ $\varphi(f(z),\overline{f(z)}) \equiv \varphi(z+a(z),\bar{z}+\overline{a(z)})$ dans la forme non-développée.

Après la transformation (6.5.14), l'action $A[\varphi]$, (6.5.13) prend la forme :

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}[\varphi] = \frac{1}{4\pi}\int d^2x \;\; \partial_z\tilde{\varphi}(z,\bar{z})\bar{\partial}_z\tilde{\varphi}(z,\bar{z})\\
&\approx \frac{1}{4\pi}\int d^2x \;\; \partial_z(\varphi(f(z),\overline{f(z)}) + 2i\alpha_0(a'(z)+\overline{a'(z)}))\\
&\times\bar{\partial}_z(\varphi(f(z),\overline{f(z)}) + 2i\alpha_0(a'(z)+\overline{a'(z)}))\\
&\approx \frac{1}{4\pi}\int d^2x \;\; \partial_z\varphi(f,\bar{f})\bar{\partial}_z\varphi(f,\bar{f})\\
&+\frac{1}{4\pi}2i\alpha_0\int d^2x[\partial_z\varphi(z,\bar{z})\bar{\partial}_z(\partial_z a(z)+\bar{\partial}_z\overline{a(z)})\\
&+\partial_z(\partial_z a(z)+\bar{\partial}_z\overline{a(z)})\bar{\partial}_z\varphi(z,\bar{z})]
\end{aligned} \tag{6.5.15}
$$

Rappelons que $a(z)$ a été choisi comme une fonction analytique dans le domaine D et nulle en dehors de ce domaine, voir le cours 2 et la Fig.1. Dans ce cas il y aura, pour le premier intégrale dans (6.5.15), deux parties distinctes : un terme régulier et un terme de saut, à cause de la fonction δ produite sur le bord de D quand on prend la dérivation pour une fonction avec une discontinuité. Designons les termes correspondants comme $[\varphi]_{reg}$, $[\varphi]_{saut}$, pour la première intégrale dans (6.5.15), et $[2\alpha_0]$ pour la deuxième. On va voir que pour $[2\alpha_0]$ il n'y a que le terme de saut, car l'intégrale est déjà de l'ordre de $a(z)$.

La variation de l'action se présente par la différance $\tilde{A}[\varphi]-A[\varphi]$. On trouve :

$$
\begin{aligned}
&\delta A = (\tilde{A}-A) \approx \frac{1}{4\pi}\int_{\tilde{D}} d^2f \;\; \partial_f\varphi(f,\bar{f})\bar{\partial}_f\varphi(f,\bar{f})\\
&-\frac{1}{4\pi}\int_D d^2x \;\; \partial_z\varphi(z,\bar{z})\bar{\partial}_z\varphi(z,\bar{z}) + [\varphi]_{saut}\\
&+\frac{1}{4\pi}2i\alpha_0\int_D d^2x[\partial_z\varphi(z,\bar{z})\bar{\partial}_z(\partial_z a(z)+\bar{\partial}_z\overline{a(z)})\\
&+\bar{\partial}_z\varphi(z,\bar{z})\partial_z(\partial_z a(z)+\bar{\partial}_z\overline{a(z)})]
\end{aligned} \tag{6.5.16}
$$

Dans la première intégrale nous sommes passé aux coordonnées $f=\tilde{z}$. Ceci donne la même intégrale que pour $A[\varphi]$ (la deuxième intégrale dans (6.5.16)) sauf que le domaine D de définition de $a(z)$ est changé. Observons en plus qu'initialement on intégre sur tout le plan infini $\int d^2x$ dans les intégrales de $\tilde{A}[\varphi]$ et $A[\varphi]$, mais dans la différence $\tilde{A}[\varphi]-A[\varphi]$ la région où $a(z)=0$, disparait. Il ne reste finalement que l'intégrale sur une petite tranche δD, entre les bords des domaines $\tilde{D}$ et D (voir la Fig.55). On a :

$$
\delta A = [\varphi]_{reg} + [\varphi]_{saut} + [2\alpha_0] \tag{6.5.17}
$$

avec

$$
[\varphi]_{reg} = \frac{1}{4\pi}\int_{\delta D} d^2x \;\; \partial\varphi\bar{\partial}\varphi \tag{6.5.18}
$$

$$[2\alpha_0] = \frac{1}{4\pi} 2i\alpha_0 \int_D d^2x(\partial\varphi\bar{\partial}(\partial a + \bar{\partial}\bar{a}) + \bar{\partial}\varphi\partial(\partial a + \bar{\partial}\bar{a})) \tag{6.5.19}$$

Le terme de saut $[\varphi]_{saut}$ sera défini dans la suite. D'abord, pour le terme régulier $[\varphi]_{reg}$ on trouve :

$$[\varphi]_{reg} = \frac{-i}{8\pi} \oint_C (dz\bar{a} - d\bar{z}\ a)\partial\varphi\bar{\partial}\varphi \tag{6.5.20}$$

Nous avons utilisé :

$$\begin{aligned} d^2x &= -dx^1a^2 + dx^2a^1 \\ &= -\frac{dz + d\bar{z}}{2}\ \frac{a - \bar{a}}{2i} + \frac{dz - d\bar{z}}{2i}\ \frac{a + \bar{a}}{2} \\ &= -\frac{i}{2}(dz\bar{a} - d\bar{z}a) \end{aligned} \tag{6.5.21}$$

voir la Fig.55.

Pour le terme de saut, $[\varphi]_{saut}$, d'abord le saut de φ sur le bord est égale à

$$\begin{aligned} \Delta\varphi|_C &= (\varphi(x) - \varphi(f(x)))|_C \\ &= (\varphi(x) - \varphi(x + a(x)))|_C \\ &\approx -a^\mu\partial_\mu\varphi|_C = -(a\partial_z\varphi + \bar{a}\bar{\partial}_z\varphi)|_C \end{aligned} \tag{6.5.22}$$

Alors

$$\begin{aligned} [\varphi]_{saut} &\equiv [\frac{1}{4\pi}\int d^2x\ \partial\varphi\bar{\partial}\varphi]_{saut} = [\frac{1}{16\pi}\int d^2x(\partial_\mu\varphi)^2]_{saut} \\ &= \frac{2}{16\pi}\oint_C ds^\mu\partial_\mu\varphi\Delta\varphi = \frac{-i}{8\pi}\oint_C (dz\partial\varphi - d\bar{z}\bar{\partial}\varphi)\Delta\varphi \\ &= \frac{i}{8\pi}\oint_C (dz\partial\varphi - d\bar{z}\bar{\partial}\varphi)(a\partial\varphi + \bar{a}\bar{\partial}\varphi) \end{aligned} \tag{6.5.23}$$

Nous avons utilisé :

$$\begin{aligned} ds^\mu\partial_\mu\varphi &= \epsilon^{\mu\nu}dx_\nu\partial_\mu\varphi = dx_2\partial_1\varphi - dx_1\partial_2\varphi \\ &= \frac{dz - d\bar{z}}{2i}(\partial + \bar{\partial})\varphi - \frac{dz + d\bar{z}}{2}\ \frac{(\partial - \bar{\partial})}{-i}\varphi \\ &= -i(dz\partial\varphi - d\bar{z}\bar{\partial}\varphi) \end{aligned} \tag{6.5.24}$$

Ensemble, $[\varphi]_{reg}$, éq.(6.5.20), et $[\varphi]_{saut}$, éq. (6.5.23), contribuent par

$$[\varphi]_{reg} + [\varphi]_{saut} = \frac{i}{8\pi}\oint_C (dz\ a(\partial\varphi)^2 - d\bar{z}\bar{a}(\bar{\partial}\varphi)^2) \tag{6.5.25}$$

Ensuite, le terme $[2\alpha_0]$, l'éq.(6.5.19). Dans les composantes euclidiennes, il prend la forme :

$$[2\alpha_0] = \frac{1}{8\pi} 2i\alpha_0 \int d^2x\ \partial_\mu\varphi\ \partial_\mu(\partial_\nu a^\nu) \tag{6.5.26}$$

Nous avons utilisé :

$$\partial\varphi\ \bar\partial f + \bar\partial\varphi\ \partial f = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\ \partial_\mu f \tag{6.5.27}$$

où $f = \partial a + \bar\partial\bar a$. Dans (6.5.26) on intègre, en principe, sur tout le plan infini, sauf que $a(z)$ est égale à zéro à l'exterieur du domaine D. En conséquence, on peut intégrer par parties sans avoir des termes de bord. On trouve :

$$\begin{aligned}[2\alpha_0] &= -\frac{1}{8\pi}2i\alpha_0\int d^2x\ \varphi\partial_\mu^2\partial_\nu a^\nu \\ &= \frac{1}{8\pi}2i\alpha_0\int d^2x\ \partial_\nu\varphi\ \partial_\mu^2 a^\nu\end{aligned} \tag{6.5.28}$$

Passons de nouveau aux composantes complexes

$$\begin{aligned}[2\alpha_0] &= \frac{1}{8\pi}2i\alpha_0\int d^2x(\partial\varphi\ \partial_\mu^2 a + \bar\partial\varphi\ \partial_\mu^2\bar a) \\ &= \frac{4}{8\pi}2i\alpha_0\int d^2x(\partial\varphi\ \partial\bar\partial a + \bar\partial\varphi\ \bar\partial\partial\bar a) \\ &= \frac{-4}{8\pi}2i\alpha_0\int d^2x(\partial^2\varphi\ \bar\partial a + \bar\partial^2\varphi\ \partial\bar a)\end{aligned} \tag{6.5.29}$$

Pour arriver à la dernière ligne, nous avons intégré par parties encore une fois. Il est clair que l'intégrale (6.5.29) est concentrée seulement sur le bord de D, car ailleurs $\bar\partial a$ et $\partial\bar a$ sont nulles : il n'y a que la contribution de saut de $a(z)$ dans l'intégrale(6.5.29). On trouve :

$$\begin{aligned}[2\alpha_0] &= \frac{-4}{8\pi}2i\alpha_0\int d^2x(\partial^2\varphi\frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)a \\ &+\bar\partial^2\varphi\frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)\bar a) \\ &= \frac{-2}{8\pi}2i\alpha_0\oint_C((ds^1 + ids^2)\partial^2\varphi\Delta a \\ &+(ds^1 - ids^2)\bar\partial^2\varphi\ \Delta\bar a)\end{aligned} \tag{6.5.30}$$

avec les sauts $\Delta a = -a,\ \Delta\bar a = -a;\ ds^1 + ids^2 = ds = -idz,\ ds^1 - ids^2 = d\bar s = id\bar z.$ Finalement :

$$[2\alpha_0] = \frac{-2i}{8\pi}2i\alpha_0\oint_C(dz\ \partial^2\varphi\ a - d\bar z\bar\partial^2\varphi\ \bar a) \tag{6.5.31}$$

Par les équations (6.5.17), (6.5.25) et (6.5.31) on trouve :

$$\begin{aligned}\delta A &= [\varphi]_{reg} + [\varphi]_{saut} + [2\alpha_0] \\ &= \frac{i}{8\pi}\oint_C[dz\ a((\partial\varphi)^2 - 4i\alpha_0\partial^2\varphi) \\ &-d\bar z\bar a((\bar\partial\varphi)^2 - 4i\alpha_0\bar\partial^2\varphi)]\end{aligned} \tag{6.5.32}$$

En général, l'opérateur d'énergie - impulsion est défini par :

$$\begin{aligned}\delta A &= \frac{2}{\pi}\oint_C ds^\mu a^\nu T_{\mu\nu} \\ &= \frac{-i}{2\pi}\oint_C (dz\ aT_{zz} + dz\ \bar{a}T_{z\bar{z}} \\ &-d\bar{z}aT_{\bar{z}z} - d\bar{z}\bar{a}T_{\bar{z}\bar{z}})\end{aligned} \tag{6.5.33}$$

- voir le cours 2, éqs.(2.2.14), (2.2.15). En comparant avec le résultat de la variation (6.5.32), on trouve finalement :

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \tag{6.5.34}$$

$$T_{zz} = -\frac{1}{4}(\partial\varphi)^2 + i\alpha_0\partial^2\varphi \tag{6.5.35}$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = -\frac{1}{4}(\bar{\partial}\varphi)^2 + i\alpha_0\bar{\partial}^2\varphi \tag{6.5.36}$$

Chapitre 7

7.1 Première approche au calcul des fonctions de corrélation dans la théorie conforme minimale.

Après la description générale, donnée dans le cours 6, de la représentation du champ libre pour la théorie conforme minimale, nous allons nous intéresser maintenant aux techniques de calcul des fonctions de corrélation. Il existe deux approches différentes. Dans la première, on cherche à définir directement les fonctions de corrélation. Dans la seconde, on définit d'abord la partie holomorphe (partie z) des fonctions de corrélation, qui est appelée la fonction d'un bloc conforme, ou simplement le bloc conforme. On étudie les transformations de monodromie de ces fonctions analytiques et ensuite on construit, avec des blocs conformes, les formes quadratiques, invariantes par rapport aux transformations de monodromie. Ces formes invariantes correspondent aux fonctions de corrélation physiques.

La première approche est plus directe, mais la deuxième est plus générale. Elle s'applique également aux fonctions de corrélation d'une théorie conforme définie sur une surface de genre élevé, comme un tore, etc. Dans le cas d'un plan infini, ou d'une sphère, les deux approches donnent le même résultat. Nous allons commencer avec la description de la première approche.

En plus des opérateurs présentés dans le cours 6, il existe deux opérateurs de vertex spéciaux, avec $\Delta = \bar{\Delta} = 1$:

$$V_{+}(x) \equiv V_{\alpha_{+}}(x) =: e^{i\alpha_{+}\varphi(x)} : \tag{7.1.1}$$

$$V_{-}(x) \equiv V_{\alpha_{-}}(x) =: e^{i\alpha_{-}\varphi(x)} : \tag{7.1.2}$$

où α_{+}, α_{-} sont les deux solutions de l'équation

$$\Delta_{\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 = 1 \tag{7.1.3}$$

c'est-à-dire :

$$\alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1} \tag{7.1.4}$$

Les opérateurs (7.1.1), (7.1.2) sont très importants dans la technique de calcul des fonctions de corrélation pour la raison suivante. A cause des dimensions spéciales

$\Delta(V_\pm) = \bar{\Delta}(V_\pm) = 1$, on peut ajouter les opérateurs V_+, V_-, intégrés sur le plan infini, à l'action du champ $\varphi(x)$ en préservant l'invariance conforme :

$$A[\varphi] = \frac{1}{4\pi}\int d^2x \;\; \partial\varphi(x)\bar{\partial}\varphi(x) \tag{7.1.5}$$

$$\begin{aligned} A[\varphi] \to \tilde{A}[\varphi] &= \int d^2x\Big(\frac{1}{4\pi}\partial\varphi(x)\bar{\partial}\varphi(x) - \mu_- V_-(x) - \mu_+ V_+(x)\Big) \\ &= \int d^2x\Big(\frac{1}{4\pi}\partial\varphi(x)\bar{\partial}\varphi(x) - \mu_- : e^{i\alpha_-\varphi(x)} : -\mu_+ : e^{i\alpha_+\varphi(x)} :\Big) \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

Avec cette déformation, l'action reste invariante conforme. Comme notre seul critère pour la représentation de la théorie minimale conforme est de préserver l'invariance conforme, il nous faut toutes les généralisations possibles de la théorie du champ $\varphi(x)$ qui sont en accord avec ce principe. L'action $\tilde{A}[\varphi]$, éq.(7.1.6), est plus générale que celle dans l'éq.(7.1.5) et elle permet de calculer plus de fonctions de corrélation de la théorie conforme minimale. Effectivement, comme nous allons le voir, on peut toutes les calculer.

Les fonctions de corrélations

$$\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)...\Phi_k(x_N)\rangle \tag{7.1.7}$$

peuvent étre présentées de la manière suivante :

$$\langle V_{\alpha_1}(x_1)V_{\alpha_2}(x_2)...V_{\alpha_k}(x_k)exp\{\mu_-\int d^2xV_-(x) + \mu_+\int d^2xV_+(x)\}\rangle_{(-2\alpha_0)} \tag{7.1.8}$$

Le calcul est fait en développant l'exponentielle dans les termes d'interaction $\mu_- \int d^2xV_-(x)$ et $\mu_+ \int d^2xV_+(x)$:

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)...\Phi_N(x_N)\rangle \\ &\propto \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{k!}\langle V_{\alpha_1}(x_1)V_{\alpha_2}(x_2)...V_{\alpha_N}(x_N)(\mu_-\int d^2yV_-(y))^l \\ &\times(\mu_+\int d^2w \;\; V_+(w))^k\rangle_{(-2\alpha_0)} \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

L'interaction est très spéciale dans cette théorie à cause de la condition

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i + l\alpha_- + k\alpha_+ = 2\alpha_0 \tag{7.1.10}$$

– comp. éq.(6.2.14), cours 6 : de la série (7.1.9), il ne reste qu'un seul terme, celui avec l et k définis par l'éq.(7.1.10). Tous les autres termes sont nuls. Donc

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)...\Phi_N(x_N)\rangle \propto \langle V_{\alpha_1}(x_1)V_{\alpha_2}(x_2)...V_{\alpha_N}(x_N) \\ &(\mu_-\int d^2yV_-(y))^l(\mu_+\int d^2wV_+(w))^k\rangle_{(-2\alpha_0)} \propto \prod_{i=1}^{l}\int d^2y_i\prod_{j=1}^{k}\int d^2w_j\langle V_{\alpha_1}(x_1) \\ &V_{\alpha_2}(x_2)...V_{\alpha_N}(x_N)V_-(y_1)...V_-(y_l)V_+(w_1)...V_+(w_k)\rangle_{(-2\alpha_0)} \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

A ce point, il faut faire quelques commentaires. Nous rappelons que les "charges" α_-, α_+, portées par les opérateurs de vertex V_-, V_+, sont définies par l'éq.(7.1.4), avec α_0 prenant des valeurs positives quelconques et correspondant à la charge centrale c de la théorie conforme selon la relation $c = 1 - 24\alpha_0^2$, éq.(6.2.5), cours 6. Nous supposons, et ceci sera justifié plus loin, que les charges $\{\alpha_i\}$, $i = 1, ..., N$, des opérateurs de vertex dans (7.1.8), (7.1.9), (7.1.11), correspondant aux opérateurs physiques $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N$, éq.(7.1.7),– sont quantifiées : elles prennent des valeurs multiples entières ou demi-entières en α_+ et α_-. Ainsi $\sum_{i=1}^N \alpha_i$, le premier terme dans l'éq.(7.1.10), est une combinaison linéaire de α_+, α_- avec des coefficients qui sont entiers ou demi-entiers, de même que le terme à droite dans l'éq. (7.1.10) $2\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$, voir éq.(7.1.4). Donc, toute l'expression dans (7.1.10) est une combinaison linéaire de α_+, α_-. Nous supposons ensuite que pour des valeurs de α_0 générales, il n'y aura pas de compensation entre α_+ et α_-, de façon que les nombres de α_+ et de α_- dans l'éq.(7.1.10) doivent s'accorder séparément. Dans ces conditions les nombres l et k sont définis par l'éq.(7.1.10) sans ambiguïté. Il y aura un seul terme dans la série (7.1.9) qui s'accorde avec (7.1.10), si $\sum_{i=1}^N \alpha_i$ contient α_+, α_- en multiple entiers et pas un seul terme, la fonction de corrélation $\langle \Phi_1 \Phi_2 ... \Phi_k \rangle$ s'annulant, si la somme $\sum_{i=1}^N \alpha_i$ contient soit α_+ soit α_- en multiple demi-entier.

La technique du calcul des fonctions de corrélation est donc définie pour α_0 prenant des valeurs générales. Les cas spéciaux où α_- est tel que le rapport α_+/α_-=- α_+^2 est un nombre rationnel et correspondant donc à des ambiguïtés dans (7.1.10), sont définis par la limite (par prolongement analytique) des résultats qui sont obtenus pour α_+^2 général.

Après avoir exposé ces règles générales, prenons un cas plus concret, celui de la fonction de corrélation de quatre opérateurs :

$$\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3)\Phi_4(x_4) \rangle \tag{7.1.12}$$

avec comme toujours la notation où x_1 représente $(z_1, \bar{z}_1)$, etc. En plus, en utilisant la symétrie des fonctions de corrélations par rapport à la transformation rationnelle

$$z \to \tilde{z} = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1 \tag{7.1.13}$$

on peut fixer la position de trois opérateurs. Le choix standard est

$$z_1 = 0, \quad z_2 = z, \quad z_3 = 1, \quad z_4 \to \infty \tag{7.1.14}$$

Dans la "jauge" (7.1.14), on a d'après l'expression générale (7.1.11) :

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_1(0)\Phi_2(z,\bar{z})\Phi_3(1)\Phi_4(\infty) \rangle \\
&\propto \prod_{i=1}^{l} \int d^2u_i \prod_{j=1}^{k} \int d^2v_j \langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z,\bar{z})V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty) \\
&\times V_-(u_1,\bar{u}_1)...V_-(u_l,\bar{u}_l)V_+(v_1,\bar{v}_1)...V_+(v_k,\bar{v}_k)\rangle_{(-2\alpha_0)}
\end{aligned} \tag{7.1.15}$$

Avec les notations : $\Phi_1(0) \equiv \Phi_1(0,0)$, $\Phi_2(1) \equiv \Phi_2(1,1)$, $\Phi_4(\infty) = \lim_{z_4,\bar{z}_4 \to \infty} \Phi_4(z_4,\bar{z}_4)$, et nous avons remplacé les coordonnées bidimensionnelles $\{y_i,\ w_j\}$ dans (7.1.11) par les variables complexes correspondantes : $\{y_i = (u_i,\ \bar{u}_i),\ \ w_j = (v_j,\ \bar{v}_j)\}$.

Le calcul de la fonction de corrélation des opérateurs de vertex dans l'éq. (7.1.15) s'effectue comme expliqué dans le cours 6, éq. (6.2.13). Détail supplémentaire, il faut réintroduire $z_4,\ \bar{z}_4 : V_{\alpha_4}(\infty) \to V_{\alpha_4}(z_4,\ \bar{z}_4)$, faire le calcul et puis prendre la limite $z_4, \bar{z}_4 \to \infty$. Dans la limite $z_4 \gg z,\ 1,\ u_1,\ v_j$, quand on remplace $|z_4 - z| \approx |z_4|$ etc., il y aura un facteur

$$\frac{1}{|z_4|^{4\Delta_{\alpha_4}}} \tag{7.1.16}$$

qui va sortir de l'intégrale (7.1.15). Nous allons le supprimer. Avec cette convention on trouve :

$$\langle \Phi_1(0)\Phi_2(z,\bar{z})\Phi_3(1)\Phi_4(\infty)\rangle \propto |z|^{4\alpha_1\alpha_2}|z-1|^{4\alpha_2\alpha_3}\prod_{i=1}^{l}\int d^2u_i \prod_{j=1}^{k}\int d^2v_j$$

$$\prod_{i=1}^{l}|u_i|^{4\alpha_-\alpha_1}|u_i-1|^{4\alpha_-\alpha_3}|u_i-z|^{4\alpha_-\alpha_2}\prod_{j=1}^{k}|v_j|^{4\alpha_+\alpha_1}|v_j-1|^{4\alpha_+\alpha_3}|v_j-z|^{4\alpha_+\alpha_2}$$

$$\prod_{i<i'}|u_i-u_{i'}|^{4\alpha_-^2}\prod_{j<j'}|v_j-v_{j'}|^{4\alpha_+^2}\prod_{i,j}|u_i-v_j|^{-4} \tag{7.1.17}$$

Il convient de faire encore quelques commentaires. Quand on calcule la fonction à quatre points avec des valeurs de $z_1,\ z_2,\ z_4$ choisies comme dans l'éq.(7.1.14), on trouve la partie principale de cette fonction. Ensuite, on peut toujours revenir, par des moyens élémentaires, aux valeurs de $z_1,\ z_2,\ z_4$ générales, comme expliqué dans les Appendices 1 et 2 de ce cours.

Avant d'expliquer comment on définit les intégrales dans l'q́.(7.1.17), il faut d'abord donner des précisions sur les valeurs possibles des paramètres $\{\alpha_i\}$ des opérateurs de vertex $\{V_{\alpha_i}\}$. Il suffit d'analyser le cas de la fonction de correlation à deux points d'un opérateur primaire $\Phi_\Delta(z,\bar{z})$. Nous allons admettre que $\bar{\Delta} = \Delta$.

En général, on doit avoir :

$$< \Phi_\Delta(z,\bar{z})\Phi_\Delta(z',\bar{z}') >= \frac{1}{|z-z'|}4\Delta \tag{7.1.18}$$

Dans la représentation par des opérateurs de vertex, on doit mettre soit V_α, soit $V_{2\alpha_0-\alpha} \equiv V_\alpha^+$, avec $\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha_0\alpha = \Delta$, pour les deux Φ_Δ dans (1). On aura deux formes possibles pour la fonction (1) :

$$< V_\alpha(z,\bar{z})V_\alpha^+(z',\bar{z}') >\equiv< V_\alpha(z,\bar{z})V_{\alpha^+}(z',\bar{z}') >\equiv< V_\alpha(z,\bar{z})V_{2\alpha_0-\alpha}(z',z^{-1}) > \tag{7.1.19}$$

$$< V_\alpha(z,\bar{z})V_\alpha(z',z^{-1})I^+(z_0\bar{z}_0) >\equiv< V_\alpha(z,\bar{z})V_\alpha(z',z^{-1})V_{2\alpha_0}(z_0,\bar{z}_0) > \tag{7.1.20}$$

Dans (7.1.20) nous avons projeté le produit $V_\alpha V_\alpha$ sur l'opérateur d'identité conjugué, I^+ (qui est positionné quelque part, en $z_0, \bar{z}_0$, la fonction de correlation ne dependra pas de sa position). Cette façon de déterminer la fonction à deux point pour $V_\alpha(z,\bar{z})$ et $V_\alpha(z',\bar{z}')$ s'accorde avec la nature "complexe" (que nous marquons par "+") de la représentation par des opérateurs de vertex (α^+ étant égale à $2\alpha_0 - \alpha$).

La troisième possibilité, de mettre $V_{\alpha^+}(z,\bar{z})$ et $V_{\alpha^+}(z',\bar{z}')$ pour $\Phi_\Delta(z,\bar{z})$ et $\Phi_\Delta(z',\bar{z}')$, ne serait pas différente du choix en (7.1.20), pour l'argument qui suit, car elle diffère essentiellement par un changement de notation pour α.

Avec la prèsentation de l'éq.(7.1.19) on trouve :

$$< V_\alpha(z,\bar{z})V_{2\alpha_0-\alpha}(z',\bar{z}') >= \frac{1}{|z-z'|}4\Delta_\alpha \tag{7.1.21}$$

($\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha_0\alpha$) en accord avec (7.1.18), à condition que $\Delta_\alpha = \Delta$.

Par contre, pour la représentation de l'éq.(7.1.20), on trouve, selon les règles établies dans ce chapitre :

$$< V_\alpha(z,\bar{z})V_\alpha(z',\bar{z}')V_{2\alpha_0}(z_0,\bar{z}_0) >= \frac{(\mu_-)^l}{l!}\cdot\frac{(\mu_+)^k}{k!}\cdot$$
$$< V_\alpha(z,\bar{z})V_\alpha(z',\bar{z}')V_{2\alpha_0}(z_0,\bar{z}_0)(\int d^2yV_-(y))^l(\int d^2\omega V_+(\omega))^k >_{(-2\alpha_0)} \tag{7.1.22}$$

Cette fonction de correlation est non-nulle à condition que

$$2\alpha + 2\alpha_0 + l\alpha_- + k\alpha_+ = 2\alpha_0 \tag{7.1.23}$$

Sinon :

$$\alpha = -\frac{l}{2}\alpha_- - \frac{k}{2}\alpha_+ \tag{7.1.24}$$

où l,k peuvent prendre des valeurs $0,1,2,....$ Egalement, cette condition pourrait être représentée dans la forme suivante :

$$\alpha = \alpha_{n',n} = \frac{1-n'}{2}\alpha_- + \frac{1-n}{2}\alpha_+ \tag{7.1.25}$$

où n',n prennent des valeurs 1,2,3,... .

A condition que α prenne une des valeurs de la liste (7.1.25), expression dans l'éq.(7.1.22) peut être mis en accord avec les éqs.(7.1.18), (7.1.21).

En effet, avec les transformations rationnelles des variables d'integration y,ω dans (7.1.22), on peut démontrer que l'expression de droite dans l'éq. (7.1.22) est de la forme suivante :

$$\frac{(N_\alpha)^2}{|z-z'|^{4\Delta_\alpha}} \tag{7.1.26}$$

où la constante, que nous avons noté $(N_\alpha)^2$, est donnée par l'intégrale multiple :

$$\frac{(\mu_-)^l}{l!}\cdot\frac{(\mu_+)^k}{k!} < V_\alpha(1,1)V_\alpha(0,0)V_{2\alpha_0}(\infty)(\int d^2\tilde{y}V_-(\tilde{y}))^l(\int d^2\tilde{\omega}V_+(\tilde{\omega}))^k >_{(-2\alpha_0)} \tag{7.1.27}$$

– indépendant de $z,\bar{z}$. Cette constante pourrait être absorbée dans la renormalisation des opérateurs de vertex :

$$V_\alpha(z,\bar{z}) = N_\alpha\tilde{V}_\alpha(z,\bar{z}), \quad V_\alpha(z',\bar{z}') = N_\alpha\tilde{V}(z',\bar{z}') \tag{7.1.28}$$

et en plus :

$$V_\alpha^+(z', \bar{z}') = N_\alpha^{-1} \tilde{V}_\alpha^+(z', \bar{z}') \tag{7.1.29}$$

De cette manière on retrouvera l'accord entre la fonction à deux points dans l'éq.(7.1.18) et ses deux representations par des opérateurs de vertex dans des éqs.(7.1.19) et (7.1.20).

En résumé : si on demande une équivalence des opérateurs de vertex V_α et $V_\alpha^+ = V_{2\alpha_0 - \alpha}$, en tant que deux représentations possibles d'un seul opérateur physique Φ_Δ, alors les valeurs de α admissibles sont contraintes à une suite discrète dans l'éq. (7.1.25). Sinon, la fonction à deux points dans la forme (7.1.20), (7.1.22) s'annule, en désaccord avec la fonction dans (7.1.19) et (7.1.21).

Les valeurs des dimensions conformes correspondantes

$$\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_{n',n}} = \alpha_{n',n}^2 - 2\alpha_0 \alpha_{n',n} = \frac{(\alpha_- n' + \alpha_+ n)^2 - (\alpha_- + \alpha_-)^2}{4} \tag{7.1.30}$$

reproduisent la formule de Kac pour des représentations dégénérées de algèbre de Virasoro, éq.(5.1.7) cours 5. Donc, nous avons trouvé la représentation par des opérateurs de vertex, avec α donné par l'éq.(7.1.25), pour tous les opérateurs primaires de la théorie conforme minimale, voir cours 4,5. En plus, nous avons la technique de calcul de leurs fonctions de corrélation.

Retournons à l'expression intégrale, éq.(7.1.17). Essayons de voir ce que celà donne dans le cas simple de la fonction

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_{n',n}(0) \Phi_{1,2}(z, \bar{z}) \Phi_{1,2}(1) \Phi_{n',n}(\infty) \rangle \\ &\propto \int d^2v \langle V_{\alpha_{n',n}}(0) V_{\alpha_{1,2}}(z, \bar{z}) V_{\alpha_{1,2}}(1) V_{\alpha^+_{n',n}}(\infty) V_+(v, \bar{v}) \rangle_{(-2\alpha_0)} \end{aligned} \tag{7.1.31}$$

où $\alpha_{n',n}, \; \alpha_{1,2}$ sont donnés par l'éq.(7.1.26) et $\alpha^+_{n',n}$ est la notation pour la charge de l'opérateur conjugué :

$$\alpha^+_{n',n} = 2\alpha_0 - \alpha_{n',n} = \frac{1 + n'}{2}\alpha_- + \frac{1 + n}{2}\alpha_+ \tag{7.1.32}$$

Avec la condition de neutralité, éq.(7.1.10), on vérifie que dans le cas de la fonction (7.1.31) $l = 0, \;\; k = 1$. Donc on a une seule insertion de l'opérateur $V_+(v, \bar{v})$ et une seule intégrale à faire.

Après le calcul de la fonction de corrélation des opérateurs de vertex dans l'éq.(7.1.31) on trouve :

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_{n',n}(0) \Phi_{1,2}(z, \bar{z}) \Phi_{1,2}(1) \Phi_{n',n}(\infty) \rangle \propto |z|^{4\alpha_{n',n}\alpha_{1,2}} |z - 1|^{4(\alpha_{1,2})^2} \\ &\times \int d^2v |v|^{4\alpha_{n',n}\alpha_+} |v - 1|^{4\alpha_{1,2}\alpha_+} |v - z|^{4\alpha_{1,2}\alpha_+} \end{aligned} \tag{7.1.33}$$

La partie non-triviale de la fonction de corrélation (7.1.31), (7.1.33) correspond donc à l'intégrale

$$I(z, \bar{z}) = \int d^2v |v|^{2a} |v - 1|^{2b} |v - z|^{2c} \tag{7.1.34}$$

avec $a = 2\alpha_{n',n}\alpha_+$, $b = c = 2\alpha_{1,2}\alpha_+$. Il est montré dans l'Appendice 2 que cette intégrale bidimensionnelle peut être écrite, dans la forme factorisée en parties holomorphe et antiholomorphe, comme la forme quadratique et diagonale des intégrales de contours :

$$I(z,\bar{z}) = \frac{s(b)s(a+b+c)}{s(a+c)}|I_1(z)|^2 + \frac{s(a)s(c)}{s(a+c)}|I_2(z)|^2 \tag{7.1.35}$$

où $s(a) = \sin \pi a$, etc., et

$$I_1(z) = \int_1^\infty dv (v)^a (v-1)^b (v-z)^c \tag{7.1.36}$$

$$I_2(z) = \int_0^z dv (v)^a (1-v)^b (z-v)^c \tag{7.1.37}$$

voir Fig.23.

Les intégrales $I_1(z)$, $I_2(z)$ correspondent à la représentation intégrale des fonctions hypergéométriques. En plus, elles correspondent aux deux solutions indépendantes de l'équation différentielle du deuxième ordre pour la partie holomorphe (pour la fonction de bloc conforme) de la fonction de corrélation

$$\langle \Phi_{n',n}(0)\Phi_{1,2}(z,\bar{z})\Phi_{1,2}(1)\Phi_{n',n}(\infty)\rangle \tag{7.1.38}$$

Nous avons rencontré cette équation dans le cours 4. Elle est due à l'opérateur $\Phi_{1,2}$ dont le module de Verma est dégénéré au niveau 2. Comme conséquence les fonctions de corrélation de $\Phi_{1,2}$ avec d'autres opérateurs obéissent à une équation différentielle d'ordre 2, voir cours 4.

Pour une généralisation directe de la technique exposée dans l'Appendice 2, il est possible de démontrer que dans le cas de la fonction de corrélation générale de 4 opérateurs, donnée par l'intégrale multiple dans l'éq.(7.1.17), on trouve une structure identique à celle de l'éq.(7.1.35) : l'intégrale multiple bidimensionnelle de l'éq.(7.1.17) peut être réduite à une forme quadratique et diagonale des intégrales de contours, voir [15]. Les intégrales de contours sont les représentations intégrales de généralisations particulières des fonctions hypergéométriques classiques. Elles correspondent aux solutions des équations différentielles de la théorie conforme minimale, voir cours 4. Nous allons voir d'autres exemples de ces intégrales de contours dans le cours qui suit.

7.2 Exercices.

Exercice 1. Calculer la fonction de corrélation des opérateurs de vertex dans l'éq.(7.1.15) et retrouver l'expression intégrale pour la fonction à quatre points dans l'éq.(7.1.17).

Exercice 2. Justifier que la forme explicite de l'opérateur descendant $V_\alpha^{(-1)}(z) = L_{-1}(z)V_\alpha(z)$ est donnée par : $i\alpha\partial_z\varphi(z\bar{z})\exp\{i\alpha(z,\bar{z})\}$:. Trouver ensuite la forme explicite des opérateurs descendants $V_\alpha^{(-1,-1)}(z,\bar{z})$ et $V_\alpha^{(-2)}(z,\bar{z})$.

7.3 APPENDICE 1.

Nous allons montrer comment on passe à la "jauge"

$$z_1 = 0, \;\; z_2 = z, \;\; z_3 = 1, \;\; z_4 \to \infty \tag{7.3.1}$$

tout en gardant tous les facteurs, pour une fonction de corrélation de quatre opérateurs qui nécessite l'insertion d'un seul opérateur $V_+(u, \bar{u})$ dans la représentation d'un champ libre, comme pour l'exemple de la fonction (7.1.31). La généralisation pour le cas de la fonction présentée par l'intégrale multiple sera immédiate.

Donc on a :

$$\begin{aligned}&\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2)\Phi_3(z_3, \bar{z}_3)\Phi_4(z_4, \bar{z}_4)\rangle \\ &\propto \int d^2v \langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1)V_{\alpha_2}(z_2, \bar{z}_2)V_{\alpha_3}(z_3, \bar{z}_3)V_{\alpha_4}(z_4, \bar{z}_4)V_+(v, \bar{v})\rangle_{(-2\alpha_0)}\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Par les règles générales

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_+ = 2\alpha_0 \tag{7.3.3}$$

Comme $2\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$, on trouve dans ce cas que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_- \tag{7.3.4}$$

D'abord on a

$$\langle \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\rangle \propto |z_{12}|^{4\alpha_1\alpha_2}|z_{13}|^{4\alpha_1\alpha_3}|z_{23}|^{4\alpha_2\alpha_3}|z_{14}|^{4\alpha_1\alpha_4}|z_{24}|^{4\alpha_2\alpha_4}|z_{34}|^{4\alpha_3\alpha_4} I_{1234} \tag{7.3.5}$$

où $z_{12} = z_1 - z_2$, etc. et

$$I_{1234} = \int d^2v |v - z_1|^{4\alpha_1\alpha_+}|v - z_2|^{4\alpha_2\alpha_+}|v - z_3|^{4\alpha_3\alpha_+}|v - z_4|^{4\alpha_4\alpha_+} \tag{7.3.6}$$

Ensuite, dans l'intégrale I_{1234} on fait trois changements de variable successifs.
1. $v = v' + z_1$

$$I_{1234} = \int d^2v' |v'|^{4\alpha_1\alpha_+}|v' - z_{21}|^{4\alpha_2\alpha_+}|v' - z_{31}|^{4\alpha_3\alpha_+}|v' - z_{41}|^{4\alpha_4\alpha_+} \tag{7.3.7}$$

Par rapport à la variable v', le point z_1 se trouve à 0 ($v = z_1$ correspond à $v' = 0$).
2. $v' = z_{31}v''$

$$\begin{aligned}I_{1234} \;\; &= \;\; |z_{13}|^{2+4\alpha_+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)} \\ &\times \int d^2v'' |v''|^{4\alpha_1\alpha_+}|v'' - \frac{z_{21}}{z_{31}}|^{4\alpha_2\alpha_+}|v'' - 1|^{4\alpha_3\alpha_+}|v'' - \frac{z_{41}}{z_{31}}|^{4\alpha_4\alpha_+}\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Par rapport à la variable v'', le point z_3 se trouve à 1 et z_1 reste à 0 (pour $z_1 = 0$, $v' = 0$ correspond à $v'' = 0$; $v' = z_{31}$ correspond à $v'' = 1$). En utilisant l'éq. (7.3.4) : $2 + 4\alpha_+(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 2 + 4\alpha_+\alpha_- = -2$ et en notant

$$\frac{z_{21}}{z_{31}} = \eta_2, \;\; \frac{z_{41}}{z_{31}} = \eta_4 \tag{7.3.9}$$

on met l'intégrale (7.3.8) sous la forme :

$$I_{1234} = |z_{31}|^{-2} \int d^2v''|v''|^{4\alpha_1\alpha_+}|v'' - \eta_2|^{4\alpha_2\alpha_+}|v'' - 1|^{4\alpha_3\alpha_+}|v'' - \eta_4|^{4\alpha_4\alpha_+} \tag{7.3.10}$$

3. $v'' = \eta_4 v'''/(v''' + \eta_4 - 1)$
($v'' = 0$ correspond à $v''' = 0$, $v'' = 1$ correspond à $v''' = 1$, $v'' = \eta_4$ correspond à $v''' = \infty$). Après un peu de calcul on trouve :

$$dv'' = \frac{\eta_4(\eta_4 - 1)}{(v''' + \eta_4 - 1)^2} dv''' \tag{7.3.11}$$

$$v'' - \eta_2 = \frac{(\eta_4 - \eta_2)}{(v''' + \eta_4 - 1)}(v''' - \frac{\eta_2(\eta_4 - 1)}{\eta_4 - \eta_2}) \tag{7.3.12}$$

$$v'' - 1 = \frac{(\eta_4 - 1)}{(v''' + \eta_4 - 1)}(v''' - 1) \tag{7.3.13}$$

$$v'' - \eta_4 = \frac{\eta_4(1 - \eta_4)}{(v''' + \eta_4 - 1)} \tag{7.3.14}$$

$$\begin{aligned} I_{1234} &= |z_{31}|^{-2}|\eta_4(\eta_4 - 1)|^2|\eta_4|^{4\alpha_1\alpha_+}|\eta_4 - \eta_2|^{4\alpha_2\alpha_+}|\eta_4 - 1|^{4\alpha_3\alpha_+} \\ &\quad \times|\eta_4(1 - \eta_4)|^{4\alpha_4\alpha_+} \int d^2v'''|v'''|^{4\alpha_1\alpha_+}|v''' - \frac{\eta_2(\eta_4 - 1)}{\eta_4 - \eta_2}|^{4\alpha_2\alpha_+}|v''' - 1|^{4\alpha_3\alpha_+} \\ &= |z_{31}|^{-2-4\alpha_+\alpha_4}|z_{14}|^{2+4(\alpha_1+\alpha_4)\alpha_+}|z_{34}|^{2+4(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_+} \\ &\quad \times|z_{24}|^{4\alpha_2\alpha_+} \int d^2v|v|^{4\alpha_1\alpha_+}|v - \eta|^{4\alpha_2\alpha_+}|v - 1|^{4\alpha_3\alpha_+} \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

où

$$v = v''', \quad \eta = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \tag{7.3.16}$$

Par l'éq.(7.3.5), on trouve :

$$\begin{aligned} \langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\rangle &\propto |z_{12}|^{4\alpha_1\alpha_2}|z_{13}|^{-2-4\alpha_+\alpha_4+4\alpha_1\alpha_3}|z_{23}|^{4\alpha_2\alpha_3} \\ &\quad |z_{14}|^{2+4(\alpha_1+\alpha_4)\alpha_++4\alpha_1\alpha_4}|z_{24}|^{4\alpha_2\alpha_++4\alpha_2\alpha_4}|z_{34}|^{2+4(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_++4\alpha_3\alpha_4} \\ &\quad \times \int d^2v|v|^{4\alpha_1\alpha_+}|v - \eta|^{4\alpha_2\alpha_+}|v - 1|^{4\alpha_3\alpha_+} \end{aligned} \tag{7.3.17}$$

Cette expression est bien de la forme de l'expression (7.1.33) du cours. Dans la limite de $z_4 \to \infty (z_4 \gg z_1, z_2, z_3)$ les facteurs en face de l'intégrale dans l'éq.(7.3.17) produisent un terme $|z_4|^{-4\Delta_4}$ en accord avec des arguments généraux, voir éq.(7.1.16). Pour $z_4 \to \infty$, $z_1 = 0$ et $z_3 = 1$, la variable η se réduit à z_2, comp. éq.(7.1.33).

Dans le cas général de la fonction dans l'éq.(7.1.17), on fait le même changement des variables d'intégration simultanément pour tous les $\{u_i, v_j\}$ et on arrive à l'expression avec un produit de facteurs semblable à celui de l'éq.(7.3.17) et avec la même variable η, éq.(7.3.16), dans l'intégrale (7.1.17).

Les facteurs devant l'intégrale et leurs exposants peuvent être vérifies, ou fixés indépendement du calcul de changement de variables présenté dans cet Appendice par l'analyse de l'algèbre des opérateurs (par analyse des exposants des singularités $\sim |z_{ij}|^{\gamma ij}$, dans les limites $z_i \to z_j$).

Tout simplement, une fois la fonction $< \Phi_1(0)\Phi_2(z,\bar{z})\Phi_3(1)\Phi_4(\infty) >$ est déterminée, pour retrouver cette fonction pour les positions des opérateurs générales, il suffit de remplacer les variables $z, \bar{z}$ de la fonction par $\eta, \bar{\eta}$, où

$$\eta = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \tag{7.3.18}$$

et de multiplier cette fonction par un facteur

$$\prod_{i<j}^{4} |zij|^{\gamma_{ij}} \tag{7.3.19}$$

avec des exposants γ_{ij} indéterminés initialement :

$$\begin{aligned} &< \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\Phi_3(z_3\bar{z}_3)\Phi_4(z_4,\bar{z}_4) > \\ &= \prod_{i<j}^{4} |z_{ij}|^{\gamma_{ij}} < \Phi_1(0)\Phi_2(\eta,\bar{\eta})\Phi_3(1)\Phi_4(\infty) > \end{aligned} \tag{7.3.20}$$

Ensuite, les exposants $\{\gamma_{ij}\}$ peuvent être définis en regardant les différentes limites de $z_{ij} \to 0$ (des limites vers 0 pour de couples de points i, j différentes). Les exposants qui apparaissent dans ces limites doivent s'accorder avec l'algèbre des opérateurs $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ – leurs règles de fusion. Ces règles doivent être déjà connues, dès que la fonction $< \Phi_1(0)\Phi_2(z,\bar{z})\Phi_3(1)\Phi_4(\infty) >$ est déterminée.

7.4 APPENDICE 2

Dans cet Appendice nous allons montrer la technique de factorisation de l'intégrale

$$I(z,\bar{z}) = \int d^2v|v|^{2a}|v-1|^{2b}|v-z|^{2c} \tag{7.4.1}$$

sur des intégrales de contours.

Il sera plus simple de faire la démonstration de cette technique d'abord pour l'intégrale

$$I_0 = \int d^2v|v|^{2a}|v-1|^{2b} \tag{7.4.2}$$

et ensuite de généraliser pour l'intégrale (7.4.1).

Dans les variables euclidiennes v_1, v_2 ($v = v_1 + iv_2,\ \bar{v} = v_1 - iv_2$) l'intégrale (7.4.2) prend la forme :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 (v_1^2 + v_2^2)^a ((v_1-1)^2 + v_2^2)^b \tag{7.4.3}$$

Nous tournons d'abord le contour d'intégration de v_2 vers l'axe imaginaire, dans le plan complexe de cette variable, voir Fig.24. Nous supposons que les valeurs des exposants a, b dans (7.4.3) sont telles que l'intégrale converge à l'∞. Dans ce cas, on peut tourner le contour sans changer le résultat de l'intégration. On a

$$v_2 \to ie^{-2i\epsilon}v_2 \approx i(1-2i\epsilon)v_2 \tag{7.4.4}$$

où 2ϵ est un petit angle qui sépare le contour (la droite) d'intégration et l'axe imaginaire, voir Fig.24. L'intégrale (7.4.3) prend la forme :

$$I_0 \approx i\int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \ \ (v_1^2 - v_2^2 e^{-4i\epsilon})^a ((v_1-1)^2 - v_2^2 e^{-4i\epsilon})^b \tag{7.4.5}$$

Nous passons ensuite aux variables

$$v_\pm = v_1 \pm v_2 \tag{7.4.6}$$

Pour l'intégrale on trouve :

$$\begin{aligned} I_0 \approx \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} & dv_+ (v_+ - i\epsilon(v_+ - v_-))^a (v_+ - 1 - i\epsilon(v_+ - v_-))^b \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} & dv_- (v_- + i\epsilon(v_+ - v_-))^a (v_- - 1 + i\epsilon(v_+ - v_-))^b \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

Pour arriver à cette expression, nous avons factorisé les deux termes dans l'intégrale (7.4.5) selon

$$v_1^2 - v_2^2 e^{-4i\epsilon} = (v_1 - v_2 e^{-2i\epsilon})(v_1 + v_2 e^{-2i\epsilon}) \tag{7.4.8}$$

$$(v_1-1)^2 - v_2^2 e^{-4i\epsilon} = (v_1 - 1 - v_2 e^{-2i\epsilon})(v_1 - 1 + v_2 e^{-2i\epsilon}) \tag{7.4.9}$$

et nous avons développé $e^{-2i\epsilon}$ en ϵ, en gardant le terme linéaire seulement, comme dans l'éq.(7.4.4).

L'intégrale (7.4.7) est presque factorisée en v_+ et v_-, sauf pour les petits termes $\epsilon(v_+ - v_-)$, qui définissent la façon dont nous prolongeons l'expression dans l'intégrale (7.4.7) autour des points singuliers. En particulier, supposons que $u_+\epsilon(-\infty,0)$. Alors le contour d'intégration de v_- va au-dessous des points singuliers $v_- = 0$ et $v_- = 1$. En effet, pour $v_- = 0$, $i\epsilon(v_+ - v_-) = i\epsilon v_+$. Comme v_+ est négatif, le petit terme imaginaire dans $(v_- + i\epsilon(v_+ - v_-))^a$ sera négatif, ce qui veut dire que le contour d'intégration sur v_- passe au-dessous du point $v_- = 0$, voir la Fig.25. Ensuite, pour $v_- = 1$, $i\epsilon(v_+ - v_-) = i\epsilon(v_+ - 1)$ reste négatif, toujours pour $v_+ \in (-\infty, 0)$. Donc le contour de v_- passe au-dessous du point $v_- = 1$, Fig.25.

Il est facile de vérifier que pour $u_+ \in (0,1)$, qui correspond à la deuxième intégrale dans la Fig.25, le contour de v_- va passer au-dessus du point $v_- = 0$ et au-dessous de $v_- = 1$, etc. L'intégrale (7.4.7) se présente comme la somme des produits des contours indiqués dans la Fig.25. Le première et le troisième terme s'annule car les contours d'intégration correspondants, sur v_-, peuvent être déformés vers l'infini et l'intégrale de v_- s'annule (nous avons supposé la convergence à l'infini). Il ne reste que le deuxième produit des intégrales dans la Fig.25. Après la déformation du contour de v_- indiquée dans la Fig.26, on trouve

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{i}{2}\int_0^1 dv_+(v_+)^a(1-v_+)^b(e^{i\pi b}-e^{-i\pi b})\int_1^\infty dv_-(v_-)^a(v_- -1)^b \\
&= \int_0^1 dv_+(v_+)^a(1-v_+)^b(-\sin(\pi b))\int_0^1 dv_-(v_-)^{-2-a-b}(1-v_-)^b \\
&= -\sin(\pi b)\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(2+a+b)}\frac{\Gamma(-1-a-b)\Gamma(1+b)}{\Gamma(-a)} \\
&= \pi\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)\Gamma(-1-a-b)}{\Gamma(-a)\Gamma(-b)\Gamma(2+a+b)} \qquad (7.4.10)
\end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons pris finalement la limite $\epsilon \to +0$ qui nous a servi seulement pour définir les contours d'intégration. L'intégrale de v_- sur C a été écrite comme

$$\int_C dv_-(v_-)^a(1-v_-)^b = (e^{i\pi b}-e^{-i\pi b})\int_1^\infty dv_-(v_-)^a(v_- -1)^b \qquad (7.4.11)$$

dans la limite où le rayon du petit cercle autour du point $v_- = 1$ tend vers zéro. Nous avons supposé la convergence de l'intégrale pour $v_- \to 1$ par conséquent l'intégrale sur le petit cercle s'annule dans la limite. Les phases sont définies d'une manière correspondante entre les parties v_+ et v_- : si l'intégrale

$$\int_0^1 dv_+(v_+)^a(1-v_+)^b \qquad (7.4.12)$$

est sans phase alors pour l'intégrale sur v_- on calcule les phases à partir de l'expression

$$(v_-)^a(1-v_-)^b \qquad (7.4.13)$$

qui est sans phase pour $0 < v_- < 1$, voir "le point de départ", phase zéro, indiqué dans la Fig.26. Finalement, pour arriver à la dernière expression dans l'éq.(7.4.10), nous avons utilisé les formules pour les fonctions $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z) \qquad (7.4.14)$$

$$\sin\pi z = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} \qquad (7.4.15)$$

Reprenons maintenant l'intégrale (7.4.1). Dans la technique de décomposition de cette intégrale en la somme des produits des intégrales de contours, il y aura un point singulier en plus : $v_+ = \bar{z}$ dans l'intégrale de v_+ et $v_- = z$ dans l'intégrale de v_-. Avec la procédure déjà expliquée, on arrive à la somme de deux produits des intégrales indiquées dans la Fig.27. Après les déformations des contours d'intégration de v_- montrées dans la Fig.28, on trouve l'intégrale (7.4.1) sous la forme :

$$\begin{aligned}
I(z,\bar{z}) = &-\sin(\pi a)\int_0^{\bar{z}} dv_+(v_+)^a(1-v_+)^b(\bar{z}-v_+)^c\int_{-\infty}^0 dv_-(-v_-)^a(1-v_-)^b(z-v_-)^c \\
&-\sin(\pi b)\int_{\bar{z}}^1 dv_+(v_+)^a(1-v_+)^b(v_+-\bar{z})^c\int_1^\infty dv_-(v_-)^a(v_- -1)^b(v_- -z)^c \qquad (7.4.16)
\end{aligned}$$

Cette somme de produits d'intégrales de contour peut encore être transformée vers une forme quadratique diagonale. Pour cela, on peut utiliser les relations linéaires suivantes :

$$s(a+c)\int_{-\infty}^{0} dv_-(...) = -s(c)\int_0^z dv_-(...) + s(b)\int_1^\infty dv_-(...) \tag{7.4.17}$$

$$-s(a+c)\int_{\bar z}^{1} dv_+(...) = s(a)\int_0^{\bar z} dv_+(...) + s(a+b+c)\int_1^\infty dv_+(...) \tag{7.4.18}$$

($s(c) = \sin(\pi c)$, etc.) qui sont obtenues comme indiqué dans les Figures 29 et 30. Par exemple, pour obtenir l'éq.(7.4.17), il faut multiplier la première équation dans la Fig.29 par le facteur de phase $e^{i\pi(a+c)}$, la deuxième par $e^{-i\pi(a+c)}$ et puis soustraire l'une de l'autre. En substituant les équations (7.4.17), (7.4.18) dans l'éq.(7.4.16), on trouve finalement

$$I(z,\bar z) = \frac{s(b)s(a+b+c)}{s(a+c)}|I_1(z)|^2 + \frac{s(a)s(c)}{s(a+c)}|I_2(z)|^2 \tag{7.4.19}$$

avec

$$I_1(z) = \int_1^\infty dv(v)^a(v-1)^b(v-z)^c \tag{7.4.20}$$

$$I_2(z) = \int_0^z dv(v)^a(1-v)^b(z-v)^c \tag{7.4.21}$$

Chapitre 8

8.1 Deuxième approche au calcul des fonctions de corrélation pour la théorie conforme minimale.

Dans la deuxième approche, on définit et on étudie d'abord les parties holomorphes des fonctions de corrélation, appelées les fonctions de blocs conformes ou simplement les blocs conformes. Dans un certain sens, elles sont des objets plus fondamentaux, du point de vue de la théorie conforme, que les fonctions de corrélation physiques.

Les moyennes (les fonctions de corrélation) des opérateurs de vertex d'un champ libre

$$\langle V_1 V_2 ... V_N \rangle_{(-2\alpha_0)} = \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i \alpha_j} \tag{8.1.1}$$

peuvent être factorisées sur des parties z et $\bar{z}$, holomorphe et antiholomorphe.

$$\langle V_1 V_2 ... V_N \rangle_{(-2\alpha_0)} = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2\alpha_i \alpha_j} \prod_{i<j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{2\alpha_i \alpha_j} \tag{8.1.2}$$

Nous allons supprimer la partie en $\bar{z}$ et garder la partie en z seulement. Donc, formellement

$$V_{\alpha_i}(z_i, \bar{z}_i) \to V_{\alpha_i}(z) \tag{8.1.3}$$

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) ... V_{\alpha_N}(z_N) \rangle_{(-2\alpha_0)} = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2\alpha_i \alpha_j} \tag{8.1.4}$$

Les opérateurs de vertex

$$V_\alpha(z, \bar{z}) =: e^{i\alpha\varphi(z,\bar{z})} : \tag{8.1.5}$$

ne se factorisent pas, en tant qu'opérateurs, d'une façon explicite. Mais leurs moyennes sont factorisables. Donc on peut définir les moyennes des opérateurs formels $V_{\alpha_i}(z_i)$.

Au lieu des intégrales bidimensionnelles que nous avons vu dans le cours précédent, on définit des intégrales de contours. Dans cette approche il y a deux opérateurs intégraux principaux :

$$Q_- = \oint_C du\ V_-(u), \quad Q_+ = \oint_C dv\ V_+(v) \tag{8.1.6}$$

Comme $\Delta(V_\pm) = 1$, les opérateurs $Q_\pm$ sont invariants par rapport aux transformation conformes. En effet :

$$\delta_{\alpha(u)} V_\pm(u) = (\alpha'(u)\Delta_\pm + \alpha(u)\partial_u)V_+(u) = (\alpha'(u) + \alpha(u)\partial_u)V_\pm(u) = \partial_u(\alpha(u)V_\pm(u))$$
$$\delta_{\alpha(z)} Q_\pm = \delta_{\alpha(z)} \oint_C du\ V_\pm(u) = \oint_C du\ \delta_{\alpha(u)} V_\pm(u) = \oint_C du\ \partial_u(\alpha(u)V_\pm(u)) = 0 \tag{8.1.7}$$

Donc on trouve l'invariance, dès lors que le contour C est fermé.

Les fonctions de blocs conformes générales sont données par des moyennes :

$$\begin{aligned}&\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)...V_{\alpha_N}(z_N)(Q_-)^l(Q_+)^k\rangle_{(-2\alpha_0)}\\ &= \prod_{i=1}^{l}\oint_{C_i} du_i \prod_{j=1}^{k}\oint_{S_j} dv_j \langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)...V_{\alpha_N}(z_N)\\ &\times V_-(u_1)...V_-(u_l)V_+(v_1)...V_+(v_k)\rangle_{(-2\alpha_0)}\end{aligned} \tag{8.1.8}$$

avec la contrainte, voir cours 7,

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i + l\alpha_- + k\alpha_+ = 2\alpha_0 \tag{8.1.9}$$

Pour le bloc conforme de quatre opérateurs, et avec le choix

$$z_1 = 0, \quad z_2 = z, \quad z_3 = 1, \quad z_4 \to \infty \tag{8.1.10}$$

on obtient l'intégrale multiple suivante :

$$\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty)(Q_-)^l(Q_+)^k\rangle_{(-2\alpha_0)} = (z)^{2\alpha_1\alpha_2}(z-1)^{2\alpha_2\alpha_3}I(z)$$
$$I(z) = \prod_{i=1}^{l}\oint_{C_i} du_i \prod_{j=1}^{k}\oint_{S_j} dv_j \prod_{i=1}^{l}(u_i)^{2\alpha_-\alpha_1}(u_i-1)^{2\alpha_-\alpha_3}(u_i-z)^{2\alpha_-\alpha_2}\prod_{i<i'}(u_i-u_{i'})^{2\alpha_-^2}$$
$$\times\prod_{j=1}^{k}(v_j)^{2\alpha_+\alpha_1}(v_j-1)^{2\alpha_+\alpha_3}(v_j-z)^{2\alpha_+\alpha_3}\prod_{j<j'}(v_j-v_{j'})^{2\alpha_+^2}\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{k}(u_i-v_j)^{-2} \tag{8.1.11}$$

Reprenons le cas simple, avec un seul contour. Dans ce cas.

$$\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty)Q_+\rangle_{(-2\alpha_0)} = (z)^{2\alpha_1\alpha_2}(z-1)^{2\alpha_2\alpha_3}I(z) \tag{8.1.12}$$

$$I(z) = \oint_C dv(v)^a(v-1)^b(v-z)^c \tag{8.1.13}$$

avec

$$a = 2\alpha_+\alpha_1, \;\; b = 2\alpha_+\alpha_3, \;\; c = 2\alpha_+\alpha_2 \tag{8.1.14}$$

Ici, tout comme dans le cas général, éq.(8.1.11), il faut choisir le contour C. On obtient des fonctions $I(z)$ différentes pour des choix différents de contours. Il faut alors fixer la base des configurations indépendantes de contours.

Premièrement il faut que le contour soit fermé et non-trivial. Les exemples d'un contour fermé mais trivial et d'un contour non-trivial mais non-fermé sont donnés respectivement dans les Figures 31 et 32 (pour le contour dans la Fig.32, observons que quand on fait un prolongement analytique de la fonction $f(v) = (v)^a(v-1)^b(v-z)^c$ le long de C dans l'intégrale (8.1.13), cette fonction gagne un facteur de phase $e^{2\pi i(a+c)}$; donc le contour n'est pas fermé). Pour le premier, Fig.31, l'intégrale (8.1.12) sera égale à zéro. Pour le deuxième, Fig.32, la variation δQ_+, éq.(8.1.7), sera donnée par des termes de bord et donc elle va intervenir dans la transformation conforme de la fonction du bloc conforme, éq.(8.1.12), ce qui est inacceptable. L'insertion de l'opérateur Q_+ dans (8.1.12) ne doit pas modifier les propriétés du bloc conforme par rapport aux transformations conformes : ses variations doivent être définies seulement par des opérateurs de vertex $V_{\alpha_1}(0), \; V_{\alpha_2}(z), \; V_{\alpha_3}(1), \; V_{\alpha_4}(\infty)$, qui représentent des opérateurs physiques de la fonction de corrélation.

Un exemple de contour non-trivial et fermé sur la surface de Riemann de la fonction $f(v) = (v)^a(v-1)^b(v-z)^c$ est présenté dans la Fig.33. Mais lorsque l'intégrale (8.1.13) converge près des points $v = 0$ et $v = z$ (c.-à-d. pour $a > -1, \; c > -1$), alors la figure pittoresque dans la Fig.33 peut être réduite à un contour plus simple, celui de la Fig.34. Les intégrales correspondantes aux contours des Figs.33 et 34 sont proportionnelles l'une à l'autre avec un coefficient qui est en fait un facteur de phases (il est proposé comme un exercice à la fin du cours de trouver ce coefficient de proportionnalité).

<u>Résumé</u> : La convergence de l'intégrale aux points $v = 0$ et $v = z$ pour le contour de la Fig.34 est équivalent à la fermeture du contour : l'opérateur intégral Q_+ sera conforme invariant car les termes de bord, dans le calcul de variation, éq.(8.1.7), s'annulent dans le cas de convergence. Nous allons supposer la convergence dans la suite. Pour d'autres valeurs des exposants, celles pour lesquelles les intégrales ne convergent pas, les fonctions correspondantes seront définies par un prolongement analytique à partir du domaine de valeurs de $a, \; b, \; c$ où les intégrales convergent.

Notons par $I_2(z)$ la fonction définie par l'intégrale (8.1.13) avec le contour donné dans la Fig.34 :

$$I_2(z) = \int_0^z dv (v)^a (1-v)^b (z-v)^c \tag{8.1.15}$$

Un deuxième contour indépendant peut être choisi comme dans la Fig.35. Donc une deuxième fonction indépendante est définie par l'intégrale :

$$I_1(z) = \int_1^\infty dv (v)^a (v-1)^b (v-z)^c \tag{8.1.16}$$

(Nous avons choisi de noter la première intégrale, éq.(8.1.15), comme $I_2(z)$ et la deuxième, éq.(8.1.16), comme $I_1(z)$ pour être en accord avec les notations de [15]).

Il est montré dans l'Appendice 2 du cours 7, voir aussi les Figs.29,30, que les intégrales pour les deux autres choix possibles du contour, Figs.36 et 37, peuvent être décomposées dans des combinaisons linéaires des intégrales de la base $I_1(z),\ I_2(z)$. Donc il y a deux fonctions indépendantes. Elles correspondent aux deux solutions indépendantes de l'équation différentielle de la théorie générale, voir cours 4.

Transformation de monodromie. Les fonctions $I_1(z),\ I_2(z)$ possèdent une monodromie non-triviale par rapport au prolongement analytique autour des points $0,\ 1$ (et ∞).

Démonstration.

Notons par g_0 la transformation de monodromie de $I_1(z),\ I_2(z)$ qui correspond au prolongement analytique de z autour du point 0, comme indiqué dans les Figs.38, 39. Quand on tourne z autour de 0, les facteurs $(v)^a$ et $(z-v)^c$ vont suivre pour le cas de l'intégrale (8.1.15), Fig.38. Donc la fonction $I_2(z)$ gagne un facteur de phase, après un tour complet de z :

$$I_2(z) \to I_2^{(g_0)}(z) = e^{2\pi i(a+c)} I_2(z) \tag{8.1.17}$$

Pour le cas de l'intégrale (8.1.16), Fig.39, aucun des facteurs ne va tourner. Donc :

$$I_1(z) \to I_1^{g_0}(z) = I_1(z) \tag{8.1.18}$$

Ainsi, on a la transformation diagonale :

$$\begin{pmatrix} I_1^{(g_0)}(z) \\ I_2^{(g_0)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(a+c)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \end{pmatrix} \tag{8.1.19}$$

Notons ensuite par g_1 la transformation de monodromie de $I_1(z),\ I_2(z)$ qui correspond au prolongement analytique de z autour du point 1, comme indiqué dans les Figs.40, 41. Les intégrales pour les contours obtenus peuvent être finalement décomposées dans les intégrales de la base, $I_1(z),\ I_2(z)$, Figs.35, 34. Après un peu d'algèbre avec les contours, on trouve les combinaisons linéaires qui correspondent aux transformations de monodromie non-diagonales :

$$\begin{pmatrix} I_1^{(g_1)}(z) \\ I_2^{(g_1)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_1)_{11} & (g_1)_{12} \\ (g_1)_{21} & (g_1)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \end{pmatrix} \tag{8.1.20}$$

Les éléments $(g_1)_{ij}$ sont calculés explicitement dans l'Appendice de ce cours.

En général

$$g_0 : \quad I_i(z) \to I_i^{(g_0)}(z) = \sum_j (g_0)_{ij} I_j(z) \tag{8.1.21}$$

$$g_1 : \quad I_i(z) \to I_i^{(g_1)}(z) = \sum_j (g_1)_{ij} I_j(z) \tag{8.1.22}$$

Les matrices $\hat{g}_0$ et $\hat{g}_1$ sont les générateurs du groupe de transformations de monodromie des fonctions $I_1(z),\ I_2(z)$.

Fonctions de corrélation physiques.

En mettant ensemble les blocs conformes holomorphe et antiholomorphe, les fonctions de corrélation physiques doivent prendre la forme générale suivante :

$$G(z,\bar{z}) = \sum_{i,j} X_{ij} I_i(z) \overline{I_j(z)} \tag{8.1.23}$$

($G(z,\bar{z})$ sera en fait la partie principale de la fonction de corrélation ; en plus il y aura un facteur $|z|^{4\alpha_1\alpha_2}|z-1|^{4\alpha_2\alpha_3}$, voir éq.(8.1.12)). Si on effectue simultanément les prolongements analytiques de $\{I_i(z)\}$ et de $\{\overline{I_j(z)}\}$, soit autour de 0 ou autour de 1, la fonction $G(z,\bar{z})$ va changer en général. Pour $G(z,\bar{z})$ qui représente la fonction de corrélation physique, on demande l'invariance par rapport aux transformations de monodromie. Cette condition fixe les coefficients $\{X_{ij}\}$ dans la forme quadratique, éq.(8.1.23).

Dans la base des intégrales $I_1(z),\ I_2(z)$, éqs.(8.1.16), (8.1.15), la transformation g_0 est diagonale. Donc pour que $G(z,\bar{z})$ soit g_0 invariante, il faut que $X_{12} = X_{21} = 0$. Notons $X_{11} = X_1$ et $X_{22} = X_2$. Alors

$$G(z,\bar{z}) = \sum_i X_i |I_i(z)|^2 \tag{8.1.24}$$

Le rapport X_1/X_2 est défini par la condition d'invariance par rapport à g_1. Mais il est plus simple de procéder différemment. Il existe une base diagonale pour g_1. Elle est donnée par les intégrales

$$\tilde{I}_2 = \int_z^1 dv(v)^a(1-v)^b(v-z)^c \tag{8.1.25}$$

$$\tilde{I}_1 = \int_{-\infty}^0 dv(-v)^a(1-v)^b(z-v)^c \tag{8.1.26}$$

(voir les Figs.36,37). Dans cette base, la transformation g_1 prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_1^{(g_1)}(z) \\ \tilde{I}_2^{(g_1)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(b+c)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1(z) \\ \tilde{I}_2(z) \end{pmatrix} \tag{8.1.27}$$

(Exercice 2 de ce cours). Par contre, la transformation g_0 est non-diagonale. Les intégrales des deux bases sont liées par des relations linéaires :

$$I_i(z) = \sum_j \alpha_{ij} \tilde{I}_j(z) \tag{8.1.28}$$

$$\tilde{I}_i(z) = \sum_j (\alpha^{-1})_{ij} I_j(z) \tag{8.1.29}$$

où

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{s(b+c)} \begin{pmatrix} s(a) & -s(c) \\ -s(a+b+c) & -s(b) \end{pmatrix} \tag{8.1.30}$$

$$(\alpha^{-1})_{ij} = \frac{1}{s(a+c)} \begin{pmatrix} s(b) & -s(c) \\ -s(a+b+c) & -s(a) \end{pmatrix} \tag{8.1.31}$$

($s(a) = \sin \pi a$). Les éléments de $(\alpha^{-1})_{ij}$ sont définis dans l'Appendice 2 du cours 7, voir les éqs.(7.4.17), (7.4.18). Après la substitution de (8.1.28) dans (8.1.24) on trouve :

$$G(z,\bar{z}) = \sum_{i,j,k} X_i \alpha_{ij} \alpha_{ik} \tilde{I}_j(z) \overline{\tilde{I}_k(z)} \equiv \sum_{i,j} \tilde{X}_{jk} \tilde{I}_j(z) \overline{\tilde{I}_k(z)} \tag{8.1.32}$$

$$\tilde{X}_{jk} = \sum_i X_i \alpha_{ij} \alpha_{ik} \tag{8.1.33}$$

Maintenant, comme g_1 est diagonale, l'invariance de $G(z,\bar{z})$ sous g_1 impose que $\tilde{X}_{jk}$ soit diagonale. Donc, par l'éq.(8.1.33), on trouve l'équation sur $\{X_i\}$:

$$\sum_i X_i \alpha_{ij} \alpha_{ik} = 0, \text{ pour } j \neq k \tag{8.1.34}$$

Avec $\{\alpha_{ij}\}$ dans l'éq.(8.1.30) on trouve :

$$\frac{X_1}{X_2} = -\frac{\alpha_{21}\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{12}} = \frac{s(a+b+c)s(b)}{s(a)s(c)} \tag{8.1.35}$$

Finalement, par l'éq.(8.1.24),

$$G(z,\bar{z}) \propto s(b)s(a+b+c)|I_1(z)|^2 + s(a)s(c)|I_2(z)|^2 \tag{8.1.36}$$

Dans cette approche du calcul des fonctions de corrélation, la constante de normalisation de $G(z,\bar{z})$ reste arbitraire. Donc on est en accord avec le résultat du calcul dans le cours 7, l'éq.(7.1.35), sauf pour le facteur commun $1/s(a+c)$. La constante de normalisation pourrait être fixée finalement par l'analyse de l'algèbre des opérateurs (cf. cours 9).

Cette technique se généralise directement vers le cas général des intégrales multiples. Par exemple, dans le cas de la fonction de corrélation dont les blocs conformes sont donnés par des intégrales doubles

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \rangle &\sim \int_{C_1} dv_1 \int_{C_2} dv_2 \langle V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(z) V_{\alpha_3}(1) V_{\alpha_4}(\infty) V_+(v_1) V_+(v_2) \rangle \qquad (8.1.37) \\ &\sim \int_{C_1} dv_1 \int_{C_2} dv_2 (v_1)^a (v_2)^a (v_1-1)^b (v_2-1)^b (v_1-z)^c (v_2-z)^c (v_1-v_2)^g \end{aligned}$$

on peut choisir comme base les trois intégrales avec les configurations des contours indiquées dans la Fig.42. Dans cette base, g_0 est diagonal et g_1 est non-diagonal. Ensuite on fait tout comme avant. La base duale des intégrales $\{\tilde{J}_i(z)\}$ est présentée dans la Fig.43. La solution de l'équation (8.1.34) peut être présentée, dans le cas le plus général d'une base de N intégrales indépendantes, comme :

$$\frac{X_k}{X_N} = \frac{\alpha_{NN}(\alpha^{-1})_{Nk}}{(\alpha^{-1})_{NN}\alpha_{kN}} \tag{8.1.38}$$

$k = 1, 2, ..., N$. Donc, dans cette approche, il s'agit finalement de calculer les éléments de la matrice α_{ij} des éqs.(8.1.28), (8.1.29) de la transformation entre les deux bases des intégrales qui représentent les fonctions de bloc conforme d'une fonction de corrélation.

En particulier, les intégrales doubles, éq.(8.1.37), Figs.42,43, représentent les blocs conformes de la fonction de corrélation

$$\langle \Phi_{n',n}(0)\Phi_{1,3}(z,\bar{z})\Phi_{1,3}(1)\Phi_{n',n}(\infty)\rangle \tag{8.1.39}$$

Elles correspondent aux trois solutions indépendantes de l'équation différentielle du troisième ordre pour l'opérateur $\Phi_{1,3}(z,\bar{z})$, voir cours 4. Pour le calcul des fonctions de corrélation de quatre opérateurs primaires généraux de la théorie conforme minimale, voir [15] (voir aussi le cours 9).

Les deux approches du calcul des fonctions de corrélation exposées dans les cours 7 et 8 sont équivalentes pour la théorie définie sur un plan infini. Dans le cas des géométries avec un genre plus élevé, à commencer avec la théorie sur un tore, c'est l'approche des intégrales de contour qui se généralise le mieux. Cette généralisation a été établie dans l'article [16]. Dans ce travail, une analyse de type BRST a été donnée pour les vecteurs singuliers dans les modules des opérateurs de vertex $V_{\alpha_{n',n}}(z)$. Cette analyse est basée sur l'analyse purement mathématique des modules de $V_{\alpha_{n',n}}(z)$ qui a été effectuée, pour la première fois, dans le travail [17].

8.2 Exercices.

Exercice 1. Trouver le coefficient de proportionnalité entre les intégrales (8.1.13) correspondantes aux contours C dans les Figs.33 et 34.

Exercice 2. Justifier la forme (8.1.27) de la transformation g_1 dans la base $\{\tilde{I}_i(z)\}$.

Exercice 3. Avec les résultats pour $L_{-1}^2 V_\alpha$ et $L_{-2}V_\alpha$ obtenus dans l'exercice 2 du cours 7, trouver la forme explicite de l'opérateur $\chi_2 = L_{-2}V_\alpha + aL_{-1}^2 V_\alpha$, avec $a = -3/2(2\Delta_\alpha + 1)$, voir les équations (4.1.9), (4.1.15) du cours 4. Vérifier ensuite que pour $\alpha = \alpha_{1,2} = -\alpha_+/2$ ($\alpha_{n',n} = \frac{1-n'}{2}\alpha_+ + \frac{1-n}{2}\alpha_-$, éq.(7.1.26) du cours 7) $\chi_2 = 0$. Ceci veut dire que dans la représentation du champ libre de la théorie conforme minimale, l'annulation du vecteur singulier χ_2, dans le module de $V_{\alpha_{1,2}}$, est automatique. Ceci explique pourquoi les intégrales de contours obtenues dans ce cours à partir des opérateurs de vertex sont automatiquement les solutions des équations différentielles que nous avons vu dans la théorie générale, voir cours 4. L'analyse générale des modules de $V_{\alpha_{n',n}}$ est donnée dans les travaux [17, 16].

8.3 APPENDICE.

Le contour de $I_2^{(g_1)}(z)$, Fig.40, peut être présenté comme dans la Fig.44. Alors, on trouve :

$$I_2^{(g_1)}(z) = \int_0^z dv(...) + e^{i\pi c}\int_z^1 dv(...) - e^{i\pi(c+2b)}\int_z^1 dv(...)$$

$$= \int_0^z dv(...) - 2ie^{i\pi(c+b)}s(b) \int_z^1 dv(...) \tag{8.3.1}$$

Il faut ensuite utiliser la décomposition

$$\int_z^1 dv(...) = -\frac{s(a)}{s(a+c)} \int_0^z dv(...) - \frac{s(a+b+c)}{s(a+c)} \int_1^\infty dv(...) \tag{8.3.2}$$

voir l'éq.(7.4.17) du cours 7. On trouve finalement :

$$I_2^{(g_1)}(z) = 2i\frac{s(b)s(a+b+c)}{s(a+c)}e^{i\pi(b+c)}I_1(z) + (1 + 2i\frac{s(a)s(b)}{s(a+b)}e^{i\pi(b+c)})I_2(z) \tag{8.3.3}$$

Pour $I_1^{(g_1)}(z)$, on peut présenter son contour dans la Fig.41 comme indiqué dans la Fig.45. On trouve :

$$I_1^{(g_1)}(z) = (e^{i\pi b} - e^{i\pi(b+2c)}) \int_z^1 dv(...) + \int_1^\infty dv(...)$$
$$= -2ie^{i\pi(b+c)}s(c)(-\frac{s(a)}{s(a+c)} \int_0^z dv(...) - \frac{s(a+b+c)}{s(a+c)} \int_1^\infty dv(...)) + \int_1^\infty dv(...)$$
$$= (2i\frac{s(c)s(a+b+c)}{s(a+c)}e^{i\pi(b+c)} + 1)I_1(z) + 2i\frac{s(a)s(c)}{s(a+c)}e^{i\pi(b+c)}I_2(z) \tag{8.3.4}$$

Chapitre 9

9.1 Méthode directe du calcul des coefficients de l'algèbre des opérateurs primaires.

L'algèbre des opérateurs est de la forme :

$$\Phi_{n',n}(z,\bar{z})\Phi_{m,m'}(0,0) = \sum_{p',p} \frac{D^{(p',p)}_{(n',n)(m',m)}}{|z|^{2(\Delta_{n',n}+\Delta_{m',m}-\Delta_{p',p})}} \times \{\Phi_{p',p}(0,0) + ...\} \qquad (9.1.1)$$

– comp. éq.(5.1.13) du cours 5. Dans le cas de la théorie conforme minimale, les opérateurs primaires sont tous sans spin, $\Delta - \bar{\Delta} = 0$. Ça explique les valeurs doubles des exposants de $|z|$ dans (9.1.1) : $\bar{\Delta}_{n',n} = \Delta_{n',n}$, $\Delta_{m',m} = \Delta_{m',n}$, $\bar{\Delta}_{p',p} = \Delta_{p',p}$. Dans cette algèbre complète, les opérateurs $\{\Phi_{1,n}\}$ forment une sous-algèbre (voir l'analyse préliminaire dans le cours 5, en particulier l'éq.(5.1.24)). C'est également le cas pour des opérateurs $\{\Phi_{n',1}\}$. Pour simplifier l'écriture, par la suite nous allons analyser cette sous-algèbre et nous allons noter les opérateurs $\Phi_{1,n}$ comme Φ_n. Alors l'éq.(9.1.1) prend la forme :

$$\Phi_n(z,\bar{z})\Phi_m(0) = \sum_p \frac{D^p_{n,m}}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}} \times \{\Phi_p(0) + ...\} \qquad (9.1.2)$$

Nous avons encore simplifié l'écriture en mettant $\Phi_m(0)$ pour $\Phi_m(0,0)$. Dans la suite, nous allons mettre également $\Phi_n(1)$ pour $\Phi_n(1,1)$ et $\Phi_p(\infty)$ pour $\Phi_p(\infty,\infty)$.

Observons tout d'abord que :

$$\Phi_n(z,\bar{z})\Phi_m(0,0)\Phi_p(\infty,\infty) >$$

$$\equiv \lim_{|z'|\to\infty} \{|z'|^{4\Delta_p} < \Phi_n(z,\bar{z})\Phi_m(0)\Phi_p(z',\bar{z}') >\} = \frac{D^p_{n,m}}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}} \qquad (9.1.3)$$

Ce résultat suit de l'éq.(9.1.2) : il faut multiplier les deux parties de cette équation par $\Phi_p(z',\bar{z}')$ et de prendre la moyenne. Nous avons utilisé l'orthogonalité des opérateurs primaires :

$$< \Phi_{\tilde{p}}(0)\Phi_p(z',\bar{z}') >= \frac{\delta_{\tilde{p},p}}{|z|^{4\Delta_p}} \qquad (9.1.4)$$

C'est à dire, orthogonalité des opérateurs primaires avec des dimensions conformes différentes, voir le cours 1 ; dans la théorie conforme minimale, par sa définition, il n'y a pas d'opérateurs primaires différents avec des dimensions égales, synonyme d'absence des symétries additionnelles. Observons que la normalisation par 1 des fonctions à deux points $< \Phi_{\Delta}(z,\bar{z})\Phi_{\Delta}(0) >= 1/|z|^{4\Delta}$ a été notre choix dès le début. Observons encore que la contribution des opérateurs descendants, à gauche dans l'éq. (9.1.2), est supprimée par la limite $|z'| \to \infty$ dans l'éq. (9.1.3).

De l'éq.(9.1.3) il suit que les constantes de structure de l'algèbre (9.1.2), les coefficients D^p_{nm}, sont symétriques dans ses indices. On peut les écrire, également, comme D_{nmp}. Cette symétrie est la conséquence du choix de normalisation par 1 des fonctions à deux points.

Le résultat dans l'éq.(9.1.3) pourrait être présenté dans la forme :

$$< \Phi_n(1)\Phi_m(0)\Phi_p(\infty) = D^p_{nm} \equiv D_{nmp} \tag{9.1.5}$$

Du côté de représentation par des opérateurs de vertex d'un champ $\varphi(z,\bar{z})$, l'éq.(9.1.2) prendra la forme :

$$V_n(z,\bar{z})V_m(0) = \sum_p \frac{C^p_{nm}}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}}\{V_p(0)+...\} \tag{9.1.6}$$

et l'éq.(9.1.3) apparaîtra comme :

$$< V_n(z,\bar{z})V_m(0)V^+_p(\infty) >= \frac{C^p_{nm}}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}} \tag{9.1.7}$$

qui pourrait être également mis en forme :

$$< V_n(1)V_m(0)V^+_P(\infty) >= C^p_{nm} \tag{9.1.8}$$

Pour obtenir (9.1.7), nous avons multiplié par $V^+_p(\infty) \equiv V_{2\alpha_0-\alpha_{1,p}}(\infty)$ les deux parties de l'éq.(9.1.6) et nous avons pris la moyenne. En plus, nous avons utilisé le fait que :

$$< V_p(0)V^+_p(z',\bar{z}') >= \frac{1}{|z'|^{4\Delta_p}}, \quad < V_p(0)V^+_p(\infty) >= 1 \tag{9.1.9}$$

– voir les cours 6, 7. Les moyennes dans les éqs(9.1.7), (9.1.8), (9.1.9) sont définies par la théorie du champ $\varphi(z,\bar{z})$ avec l'action complète, l'éq.(7.1.6) du cours 7.

Pour faire le lien entre les constantes C^p_{nm}, pour lesquels il existe la méthode du calcul, et les constantes $D^p_{nm} \equiv D_{nmp}$ de l'algèbre (9.1.2), il faudra déterminer la normalisation des opérateurs de vertex, dans le context de la théorie du champ φ.

La normalisation des opérateurs individuels se manifeste dans les fonctions à deux points. Pours les opérateurs Φ_n, notre choix de normalisation est :

$$< \Phi_n(z,\bar{z})\Phi_n(0) >= \frac{1}{|z|^{4\Delta_n}}, \quad < \Phi_n(1)\Phi_n(0) >= 1 \tag{9.1.10}$$

– comp. éq.(9.1.4).

Précisons encore une fois, que nous cherchons à trouver les coefficients de l'algèbre (9.1.2), D^p_{nm}. Ces coefficients sont définis, de la façon non-ambigue, une fois la normalisation des opérateurs individuels est admise.

Pour la fonction à deux points des opérateurs de vertex nous avons soit :

$$< V_n(z,\bar{z})V_n^+(0) >\equiv< V_{\alpha_{1,n}}(z,\bar{z})V_{2\alpha_0-\alpha_{1,n}}(0) >= \frac{1}{|z|^{4\Delta_n}} \tag{9.1.11}$$

$$< V_n(1)V_n^+(0) >= 1 \tag{9.1.12}$$

soit :

$$\begin{aligned} & < V_n(z,\bar{z})V_n(0)I^+(\infty) > \qquad (9.1.13)\\ = \ & < V_{\alpha_{1,n}}(z,\bar{z})V_{\alpha_{1,n}}(0)V_{2\alpha_0}(\infty)(\int d^2vV_+(v,\bar{v}))^k >_{(-2\alpha_0)}= \frac{(N_n)^2}{|z|^{4\Delta_n}} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (N_n)^2 &= < V_n(1)V_n(0)V_{2\alpha_0}(\infty) > \qquad (9.1.14)\\ &= \frac{1}{k!} < V_{\alpha_{1,n}}(1)V_{\alpha_{1,n}}(0)V_{2\alpha_0}(\infty)(\int d^2vV_+(v,\bar{v}))^k >_{(-2\alpha_0)} \end{aligned}$$

– comp. l'analyse des fonctions à deux points dans le cours 7.

La constante qui apparait comme un coefficient de proportionalité dans l'éq. (9.1.14) et qui est donnée par l'intégrale multiple dans l'éq.(9.1.15), doit être associée avec la normalisation des opérateurs de vertex $V_n(z,\bar{z})$ et $V_n(0)$ dans l'éq.(9.1.14) (il est facile de se convaincre que la normalisation de l'opérateur $I^+(\infty) = V_{2\alpha_0}(\infty)$, à gauche dans l'éq.(9.1.14), est égale à 1).

D'autre part, l'éq.(9.1.12), pour la fonction $< V_nV_n^+ >$, signifie que la normalisation de l'opérateur de vertex conjugé est égale à $(N_n)^{-1}$. En résumé, si on note $N(V)$ la constante de normalisation de l'opérateur V, alors les équations (9.1.12), (9.1.14) témoignent que :

$$N(V_n) = N_n \tag{9.1.15}$$

$$N(V_n^+) = N_n^{-1} \tag{9.1.16}$$

– le carré de la constante N_n se calcule par l'intégrale multiple dans l'éq.(9.1.15). Par les règles établies dans le cours 6,7, la multiplicité d'intégrale (nombre des opérateurs d'écran) $k = n-1$.

Remarquons que, par rapport au cours 7, nous avons mis les constantes μ_-, μ_+ égale à 1, dans l'action du champ φ, éq.(7.1.6). Sinon, leur participation dans les formules pour les constantes de normalisation serait évidante et plutôt triviale.

Une fois la normalisation des opérateurs de vertex est établie nous pouvons utiliser les règles des correspondances :

$$V_n = N_n \cdot \Phi_n \tag{9.1.17}$$

pour passer des fonctions de correlation des opérateurs de vertex à des fonctions de correlation des opérateurs $\{\Phi_n\}$, de la théorie conforme dans sa forme générale (cours 1-5).

Avec la fonction de trois opérateurs de vertex dans l'éq.(9.1.8) on obtient :

$$N_n N_m N_p^{-1} < \Phi_n(1)\Phi_m(0)\Phi_p(\infty) >= C_{nm}^p \tag{9.1.18}$$

Autrement dit :

$$< \Phi_n(1)\Phi_m(0)\Phi_p(\infty) >= N_n^{-1} N_m^{-1} N_p C_{nm}^p \tag{9.1.19}$$

En comparant avec l'éq.(9.1.5), on trouve :

$$D_{nm}^p \equiv D_{nmp} = N_n^{-1} N_m^{-1} N_p C_{nm}^p \tag{9.1.20}$$

Nous allons donner finalement la forme plus explicite pour des intégrales multiples que définissent les constantes de droite de l'éq.(9.1.20).

D'après l'éq.(9.1.15) et les résultats obtenus pour les fonctions de correlation des opérateurs de vertex dans les cours 6,7, le carré de la constante N_n se calcule par l'intégrale suivante :

$$(N_n)^2 = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^{k} \int d^2 v_i \times \prod_{i=1}^{k} |v_i|^{4\alpha_+ \alpha_n} |v_i - 1|^{4\alpha_+ \alpha_n} \times \prod_{i<j}^{k} |v_i - v_j|^{4\alpha_+^2} \tag{9.1.21}$$

où $\alpha \equiv \alpha_{1,n} = \frac{1-n}{2}\alpha_+$; $k = n-1$ (nombre des opérateurs d'écran nécessaires pour la fonction de correlation dans l'éq.(9.1.15). La constante C_{nm}^p est définie par la fonction de correlation dans l'éq. (9.1.8). L'expression intégrale correspondante est de la forme :

$$\begin{aligned} C_{nm}^p &=< V_n(1) V_m(0) V_p^+(\infty) >= \tfrac{1}{\tilde{k}!} < V_n(1) V_m(0) V_p^+(\infty) (\textstyle\int d^2 v V_+(v,\bar{v}))^{\tilde{k}} >_{(-2\alpha_0)} \\ &= \tfrac{1}{\tilde{k}!} \textstyle\prod_{i=1}^{\tilde{k}} \int d^2 v_i \times \prod_{i=1}^{\tilde{k}} |v_i|^{4\alpha_m \alpha_+} |v_i - 1|^{4\alpha_n \alpha_+} \times \prod_{i<j}^{\tilde{k}} |v_i - v_j|^{4\alpha_+^2} \end{aligned} \tag{9.1.22}$$

où $\alpha_m \equiv \alpha_{1,m} = \frac{1-m}{2}\alpha_+$, $\alpha \equiv \alpha_{1,n} = \frac{1-n}{2}\alpha_+$;

$$\tilde{k} = \frac{n+m-p-1}{2} \tag{9.1.23}$$

α_p^+, qui rentre dans le calcul du nombre des opérateurs d'écran $\tilde{k}$, nécessaire pour la fonction de correlation dans (9.1.22), est égale à :

$$\alpha_{1,p}^+ = 2\alpha_0 - \alpha_{1,p} = 2\alpha_0 - \frac{1-p}{2}\alpha_+ \tag{9.1.24}$$

Les intégrales multiples dans (9.1.21) et dans (9.1.22) s'expriment par des produits des fonctions Γ de Euler. La formule pour les intégrales de ce type a été établi dans le deuxième article de [15]. Elle est de la forme :

$$\frac{1}{k!} \prod_{i=1}^{k} \int d^2 v_i \times \prod_{i=1}^{k} |v_i|^{2a} |v_i - 1|^{2b} \times \prod_{i<j}^{k} |v_i - v_j|^{4\rho} = \pi^k \left(\frac{\Gamma(1-\rho)}{\Gamma(\rho)}\right)^k \tag{9.1.25}$$

$$\times \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma((j+1)\rho)}{\Gamma(1-(j+1)\rho)} \frac{\Gamma(1+a+j\rho)\Gamma(1+b+j\rho)}{\Gamma(-a-j\rho)\Gamma(-b-j\rho)} \frac{\Gamma(-1-a-b-(k-1+j)\rho)}{\Gamma(2+a+b+(k-1+j)\rho)}$$

En utilisant la formule (9.1.26) pour des intégrales (9.1.21) et (9.1.22), on peut obtenir les expressions suivantes pour des constantes dans l'éq.(9.1.20), sa partie droite :

$$\begin{aligned} C_{nm}^{p} &= \prod_{j=0}^{\tilde{k}-1} \frac{\Gamma(j+1)\rho)}{\Gamma(1-(j+1)\rho)} \qquad (9.1.26)\\ &\times \frac{\Gamma(1-\rho(n-1-j)\Gamma(1-\rho(m-1-j))}{\Gamma(\rho(n-1-j))\Gamma(\rho(m-1-j))} \frac{\Gamma(-1+\rho(\rho+1+j))}{\Gamma(2-\rho(\rho+1+j))} \end{aligned}$$

$$\tilde{k} = \frac{n+m-p-1}{2} \qquad (9.1.27)$$

$$(N_n)^2 = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(1-j\rho)\Gamma(-1+(1+j)\rho)}{\Gamma(j\rho)\Gamma(2-(1+j)\rho)} \qquad (9.1.28)$$

Dans ces équations $\rho = \alpha_+^2$. Par rapport à la définition intégrale de ces constantes dans les éqs.(9.1.21), (9.1.22), nous avons supprimé, (en donnant les formules (9.1.27), (9.1.28)), les facteurs du type :

$$\pi^k \left(\frac{\Gamma(1-\rho)}{\Gamma(\rho)} \right)^k \qquad (9.1.29)$$

Ces facteurs se simplifient multuellement dans le produit de l'éq.(9.1.20).

9.2 Analyse de l'algèbre des opérateurs.

D'abord, par les règles de fusion. Dans les formules (9.1.20), (9.1.27), (9.1.28) qui définissent les coefficients principaux D_{nm}^{p} de l'algèbre des opérateurs, éq.(5.1.13) du cours 5, on a la valeur minimale de $\tilde{k}$, $\tilde{k}_{min} = 1$. Par l'éq.(9.1.27) ceci correspond, pour n, m donnés, à

$$p_{max} = n + m - 1 \qquad (9.2.1)$$

La valeur maximale de $\tilde{k}$ est définie par le produit

$$\prod_{j=0}^{\tilde{k}-2} \frac{1}{\Gamma(\rho(n-1-j))\Gamma(\rho(m-1-j))} \qquad (9.2.2)$$

dans l'expression (9.1.27) pour C_{nm}^{p}. $\tilde{k}_{max} = min(n,m)$, dans le sens que pour $k > k_{max}$ on trouve $1/\Gamma(0)$ dans (9.2.2) et le coefficient C_{nm}^{p} s'annule à cause de $\Gamma(0) = \infty$. Alors

$$p_{min} = |n-m| + 1 \qquad (9.2.3)$$

On retrouve les règles de fusion qui ont été annoncées dans le cours 5,

$$\Phi_{1,n}\Phi_{1,m} \rightarrow \Phi_{1,n+m-1}$$

$$\begin{array}{r}\Phi_{1,n+m-3}\\ -\\ -\\ -\\ \Phi_{1,|n-m|+1}\end{array} \tag{9.2.4}$$

Pour des valeurs de ρ rationnelles

$$\rho \equiv (\alpha_+)^2 = \frac{d'}{d} \tag{9.2.5}$$

la règle de fusion (9.2.4) est tronquée par une valeur maximale définie par :

$$p_{max} = min(d-1,\ n+m-1) \tag{9.2.6}$$

Prenons l'exemple de la théorie avec $\rho = 4/3$ qui correspond au modèle d'Ising, voir cours 5. Par la règle générale, éq.(9.2.4),

$$\Phi_{1,2}\Phi_{1,2} \sim D^1_{22}\Phi_{1,1} + D^3_{22}\Phi_{1,3} \tag{9.2.7}$$

Mais le coefficient D^3_{22} s'annule à cause du facteur

$$\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(2-\rho(1+j)) \tag{9.2.8}$$

dans N_p. Pour $\rho = 4/3$ et pour $p = 3$, on trouve $\Gamma(2-\frac{4}{3}(1+2)) = \Gamma(-2) = \infty$ dans (9.2.8) et alors $(N_p)^{-1}$ dans l'éq.(1.2.19) s'annule. Cette troncation des règles de fusion est en accord avec le tableau des opérateurs primaires dans la Fig.16. De la même manière, on vérifie la troncation de la fusion de deux opérateurs $\Phi_{1,3}$ dans la théorie avec $\rho = 6/5$, qui correspond au modèle Z_3, voir cours 5 et la Fig.18. Par la règle générale :

$$\Phi_{1,3}\Phi_{1,3} \sim D^1_{33}\Phi_{1,1} + D^3_{33}\Phi_{1,3} + D^5_{33}\Phi_{1,5} \tag{9.2.9}$$

Toujours à cause du facteur (N_p), pour $\rho = 6/5,\ p = 5$, le coefficient D^5_{33} s'annule.

En général, dans les théories avec ρ rationnel, les troncations des règles de fusion s'effectuent de manière plus sophistiquée que celle expliquée au-dessus. Par exemple, dans le cas la théorie conforme $\rho = 4/3$ (modèle d'Ising), on trouve :

$$\Phi_{3,1}\Phi_{3,1} \sim D^1_{33}\Phi_{1,1} + D^3_{33}\Phi_{3,1} + D^5_{33}\Phi_{5,1} \tag{9.2.10}$$

Pour les opérateurs $\{\Phi_{n,1}\}$ les coefficients D^p_{nm} sont les même que pour les opérateurs $\{\Phi_{1,n}\}$, éq.(9.3.46), sauf pour un remplacement partout de ρ par $\rho' = (\alpha_-)^2 = 1/\rho$. Donc, pour $\rho' = 3/4$, on trouve que le coefficient D^3_{33} dans (9.2.10) s'annule, mais que $D^5_{33} \neq 0$, ce qui est en désaccord avec le tableau des opérateurs dans la Fig.16. Finalement on trouve que l'opérateur $\Phi_{5,1}$ découple, comme il convient, mais avec l'intervention de l'opérateur descendant du niveau 2 dans le module de l'opérateur $\Phi_{3,1}$. On vérifie d'abord que dans la théorie $\rho = 4/3$, $\Delta_{5,1} - \Delta_{3,1} = 2$. Donc il y aura interférence de $\Phi_{5,1}$ avec les descendants de $\Phi_{3,1}$. Ensuite on prend $\rho' = 3/4 + \epsilon$ et on analyse la limite $\epsilon \to 0$. On trouve que D^3_{33} tend vers zéro, mais que $\beta_3^{(-1,-1)}$, $\beta_3^{(-2)}$ divergent en donnant un résultat fini pour le produit $D^3_{33}(\beta_3^{(-1,-1)}\Phi_{3,1}^{(-1,-1)} + \beta_3^{(-2)}\Phi_{3,1}^{(-2)})$. On peut démontrer que ceci induit la compensation entre $\Phi_{5,1}$ et un opérateur descendant $\Phi_{3,1}^{(-2)} - \frac{3}{2(2\Delta_{3,1}+1)}\Phi_{3,1}^{(-1,-1)}$ du module de $\Phi_{3,1}$. [On peut observer en plus que la norme d'un état correspondant à l'opérateur $V_{\alpha_{5,1}}$, qui est égale à $(N_{5,1})^2 \equiv (N_5)^2$, éq.(9.3.47), est négative ; en général, dans l'analyse BRST [16] des modules de $V_{\alpha_{n',n}}$, les opérateurs de vertex se trouvant en-dehors du tableau principal (Fig.16 dans le cas de la théorie $\rho = 4/3$) correspondent aux fantômes].

Une propriété très importante de l'algèbre des opérateurs, éq. (5.1.14) cours 5, est celle de l'associativité. Pour un produit de trois opérateurs, on doit avoir

$$(\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2))\ \Phi_3(x_3) = \Phi_1(x_1)\ (\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3)) \tag{9.2.11}$$

où, à gauche, on développe d'abord le produit $\Phi_1\Phi_2$ et ensuite on développe le produit de Φ_3 avec le résultat du développement de $\Phi_1\Phi_2$; à droite, on développe d'abord le produit $\Phi_2\Phi_3$, puis Φ_1 sur le résultat du développement de $\Phi_2\Phi_3$.

Dans notre calcul, cette propriété est automatique et elle se manifeste dans les deux présentations possibles pour les fonctions de corrélation de quatre opérateurs :

$$\begin{aligned}&\langle\Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_s(1)\Phi_t(\infty)\rangle\\ &\propto \sum_p X_p|I_p(z)|^2 = \sum_q \tilde{X}_p|\tilde{I}_q(z)|^2\end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Dans la première présentation, on utilise la base des intégrales (9.3.7), Figs.46,47, dans la seconde, la base des intégrales associées aux Figs.48,49. La première présentation correspond au développement, par l'algèbre des opérateurs, d'abord du produit $\Phi_n\Phi_m$, puis de Φ_s sur le résultat et ensuite de Φ_t avec le résultat (En fait, dans la dernière étape on fait une projection du résultat du développement de $\Phi_n\Phi_m\Phi_s$ sur $\Phi_t(\infty)$), voir les éqs.(9.3.24)-(9.3.31) et la Fig.50, partie gauche. La deuxième correspond au développement d'abord du produit $\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_s(1)$, puis de $\Phi_n(0)$ avec le résultat et la projection sur $\Phi_t(\infty)$ finalement. Les fonctions $I_p(z)$ et $\tilde{I}_q(z)$ correspondent aux sommes des contributions dans les développement des opérateurs descendants d'une famille : de l'opérateur Φ_p, dans la première présentation et de l'opérateur Φ_q dans la deuxième. Les deux présentations de la fonction de corrélation dans l'éq.(9.2.12), Fig.50, sont dites duales l'une de l'autre. Observons qu'avec les fonctions de bloc conforme normalisées comme dans l'éq.(9.3.11), la fonction de corrélation (9.2.12) prend la forme :

$$\begin{aligned}&\langle\Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_s(1)\Phi_t(\infty)\rangle\\ &\propto \sum_p D^p_{nm}D^p_{st}|F_p(z)|^2 = \sum_q D^q_{ms}D^q_{nt}|\tilde{F}_q(z)|^2\end{aligned} \tag{9.2.13}$$

($\tilde{F}_q(z)$ est normalisée par : $\tilde{F}_q(z) = (1-z)^{\gamma_q}(1 + b_1(1-z) + ...)$, comp.l'éq.(9.3.11)).

Finalement, pour voir la positivité (unitarité) de la série principale des théories conformes minimales, celle avec

$$(\alpha_+)^2 = \frac{d+1}{d} \tag{9.2.14}$$

($d = 3, 4, 5, ...$) – voir les remarques dans le cours 5, éqs.(5.4.6), (5.4.6), il faut utiliser le résultat pour les coefficients de l'algèbre des opérateurs généraux, $\{\Phi_{n',n}\}$:

$$(D^{(p',p)}_{(n',n)(m',m)})^2 = (C^{(p',p)}_{(n',n)(m',m)})^2 N^{-2}_{n',n} N^{-2}_{m',m} N^{2}_{p',p} \tag{9.2.15}$$

où

$$\begin{aligned}(N_{n',n})^2 \quad &= \quad \prod_{i=1}^{n'-1}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(i-\rho j)^2}{(1+i-\rho(1+j))^2} \qquad (9.2.16)\\ &\times \quad \prod_{i=1}^{n'-1}\frac{\Gamma(1-i\rho')\Gamma(-1+\rho'(1+i))}{\Gamma(i\rho')\Gamma(2-\rho'(1+i))}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\Gamma(1-j\rho)\Gamma(-1+\rho(1+j))}{\Gamma(j\rho)\Gamma(2-\rho(1+j))}\end{aligned}$$

et les coefficients $C^{(p',p)}_{(n',n)(m',m)}$ peuvent être trouvés dans [15]. En analysant l'expression (9.2.17), on trouve que tous les coefficients $(N_{n',n})^2$, $(N_{m',m})^2$, $(N_{p',p})^2$ dans (9.2.15) sont positifs seulement pour les théories (9.2.14) et avec les indices n et n' satisfaisant :

$$1 \leq n' \leq d, \;\; 1 \leq n \leq d-1 \tag{9.2.17}$$

et de même pour (m', m), (p', p). Dans ce cas, les coefficients $D^{(p',p)}_{(n',n)(m',m)}$ sont réels et les fonctions symétriques

$$\begin{aligned}&\langle\Phi_{n',n}(0)\Phi_{m',m}(z)\Phi_{m',m}(1)\Phi_{n',n}(\infty)\rangle\\ &\qquad \propto \sum_p (D^{(p',p)}_{(n',n)(m',m)})^2 |F_{(p',p)}(z)|^2 \qquad (9.2.18)\end{aligned}$$

sont définies positives (cf. l'éq.(5.2.1), cours 5).

9.3 APPENDICE. Méthode indirecte du calcul des coefficients de l'algèbre des opérateurs primaires, qui utilise l'analyse des fonctions de correlation de quatre opérateurs.

Nous allons présenter et analyser dans ce cours la sous-algèbre d'opérateurs $\{\Phi_{1,n}\}$, ou $\{\Phi_{n,1}\}$. Le cas général de l'algèbre des opérateurs $\{\Phi_{n',n}\}$ peut être consulté dans les travaux [15]. Pour simplifier les équations, nous allons parfois utiliser la notation Φ_n pour un opérateur $\Phi_{1,n}$.

Dans ce dernier cours de la partie consacrée à la théorie conforme minimale, la plupart des résultats seront énoncés sans démonstration de leur dérivation. En principe, ils peuvent tous être retrouvés soit par la généralisation des méthodes présentées dans les cours précédents, soit en consultant les travaux [15]. Le but sera de présenter les structures et les propriétés générales de la solution de la théorie conforme minimale et non pas les détails du calcul.

Prenons l'exemple suffisamment significatif de la fonction de corrélation

$$\langle\Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_m(1)\Phi_n(\infty)\rangle \tag{9.3.1}$$

avec $\Phi_n \equiv \Phi_{1,n}$, etc. Et supposons en plus que $m \leq n$. Dans la représentation du champ libre, nous allons avoir, pour cette fonction, des intégrales de contours de la fonction de corrélation des opérateurs de vertex avec $m-1$ insertions de l'opérateur V_+ :

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{m-1}\int_{C_j} dv_j \langle V_{\alpha_{1,n}}(0)V_{\alpha_{1,m}}(z)V_{\alpha_{1,m}}(1)V_{\bar{\alpha}_{1,n}}(\infty)V_+(v_1)...V_+(v_{m-1})\rangle_{(-2\alpha_0)}\\ &= (z)^{2\alpha_{1,n}\alpha_{1,m}}(z-1)^{2\alpha_{1,m}^2}J_{\{C_j\}}(z)\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

$$J_{\{C_j\}}(z) = \prod_{j=1}^{m-1}\int_{C_j} dv_j \prod_{j=1}^{m-1}(v_j)^a(v_j-1)^b(v_j-z)^c\prod_{j<j'}^{m-1}(v_j-v_{j'})^{2\rho} \tag{9.3.3}$$

où $a = 2\alpha_+\alpha_{1,n}$, $b = c = 2\alpha_+\alpha_{1,m}$, $\rho = \alpha_+^2$. Rappelons que $\bar{\alpha}_{1,n} = 2\alpha_0 - \alpha_{1,n}$ (voir l'éq.(7.1.32) du cours 7).

L'expression

$$G(z,\bar{z}) = \frac{s(b)s(a+b+c)}{s(a+c)}|I_1(z)|^2 + \frac{s(a)s(c)}{s(a+c)}|I_2(z)|^2 \tag{9.3.4}$$

que nous avons obtenu dans les cours 7,8 pour la partie principale de la fonction de corrélation $\langle\Phi_n\Phi_2\Phi_2\Phi_n\rangle$ se généralise, pour la fonction (9.3.1), de la façon suivante :

$$G(z,\bar{z}) = \sum_{p=1}^{m} X_p^m|I_p^{(m)}(z)|^2 \tag{9.3.5}$$

avec

$$\begin{aligned}X_p^{(m)} &= \prod_{j=0}^{p-2} s((j+1)\rho)\frac{s(1+a+j\rho)s(1+c+j\rho)}{s(2+a+c+(p-2+j)\rho)}\\ &\times\prod_{i=0}^{m-p-1} s((j+1)\rho)\frac{s(1+b+j\rho)s(-1-a-b-c-2\rho(m-2)+j\rho)}{s(-a-c-2\rho(m-2)+(m-p-1+j)\rho)}\end{aligned} \tag{9.3.6}$$

Remarquons que pour les expressions avec des produits, il faut utiliser la règle $\prod_{j=0}^{-1}(...) = 1$, comme par exemple dans le cas de $X_1^{(m)}$ ou $X_m^{(m)}$. Les intégrales

$\{I_p^{(m)}(z)\}$ sont définies de la façon suivante :

$$I_p^{(m)}(z) = \int_1^\infty dv_1 \int_1^{v_1} dv_2 ... \int_1^{v_{m-p-1}} dv_{m-p} \int_0^z dv_{m-p+1} \int_0^{v_{m-p+1}} dv_{m-p+2} ... \int_0^{v_{m-2}} dv_{m-1}$$
$$\times \prod_{j=1}^{m-1} (v_j)^a \prod_{j=1}^{m-p} (v_j - 1)^b (v_j - z)^c \prod_{j=m-p+1}^{m-1} (1 - v_j)^b (z - v_j)^c \prod_{j<j'}^{m-1} (v_j - v_{j'})^{2\rho} \quad (9.3.7)$$

voir aussi la Fig.46. Ces intégrales sont liées avec les intégrales de contours $\{J_p^{(m)}(z)\}$, éq.(9.3.3), Fig.(47), par les facteurs de phase :

$$J_p^{(m)}(z) = \lambda(\rho) I_p^{(m)}(z) \quad (9.3.8)$$

$$\lambda(\rho) = \prod_{j=1}^{m-p} \frac{s(j\rho)}{s(\rho)} \prod_{j=1}^{p-1} \frac{s(j\rho)}{s(\rho)} \quad (9.3.9)$$

voir[15].

Pour faire le lien avec l'algèbre des opérateurs, on a besoin des fonctions (de bloc conforme) normalisées comme :

$$(z)^{2\alpha_{1,n}\alpha_{1,m}} (z-1)^{2\alpha_{1,m}^2} I_p^{(m)}(z) = N_p^{(m)} F_p^{(m)}(z) \quad (9.3.10)$$

$$z \to 0, \;\; F_p^{(m)}(z) = (z)^{\gamma_p} (1 + a_1 z + a_2 z^2 + ...) \quad (9.3.11)$$

Nous avons rajouté le facteur $(z)^{2\alpha_{1,n}\alpha_{1,m}}(z-1)^{2\alpha_{1,m}^2}$ devant les intégrales, voir l'éq.(9.3.2), pour que les exposants $\{\gamma_p\}$ dans l'éq.(9.3.11) soient liés directement avec les dimensions conformes des opérateurs, voir l'analyse des exposants dans le cours 5, éqs.(5.1.16),(5.1.17).

Il est facile de vérifier à partir de l'éq.(9.3.7) que la constante de normalisation $N_p^{(m)}$ dans l'éq.(9.3.10) est donnée par le produit des intégrales :

$$N_p^{(m)} = \int_1^\infty dv_1 \int_1^{v_1} dv_2 ... \int_1^{v_{m-p-1}} dv_{m-p} \prod_{j=1}^{m-p} (v_j)^{a+c+2\rho(p-1)} (v_j - 1)^b \prod_{j<j'}^{m-p} (v_j - v_{j'})^{2\rho}$$
$$\times \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 ... \int_0^{s_{p-2}} ds_{p-1} \prod_{j=1}^{p-1} (s_j)^a (1 - s_j)^c \prod_{j<j'}^{p-1} (s_j - s_{j'})^{2\rho} \quad (9.3.12)$$

Remarquons que la première intégrale est ramenée à la même forme que la deuxième par un changement des variables $v_j \to 1/v_j$. Les intégrales de ce type ont été calculées par A.Selberg [18]. Le calcul par une méthode différente de ces intégrales et d'autres intégrales plus générales est présenté dans l'Appendice de [15]. En particulier :

$$j_k(\alpha, \beta; \rho) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{k-1}} dt_k \prod_{j=1}^k (t_j)^\alpha (1 - t_j)^\beta \prod_{j<j'}^k (t_j - t_{j'})^{2\rho}$$
$$= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma((j+1)\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(1 + \alpha + j\rho)\Gamma(1 + \beta + j\rho)}{\Gamma(2 + \alpha + \beta + (k - 1 + j\rho))} \quad (9.3.13)$$

$\Gamma(z)$ est la fonction Γ de Euler. En utilisant ce résultat, on trouve :

$$\begin{aligned} N_p^{(m)} &= j_{m-p}(2-a-b-c-2\rho(m-2), b; \rho) j_{p-1}(a, c; \rho) \\ &= \prod_{j=0}^{m-p-1} \frac{\Gamma((j+1)\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(-1-a-b-c-2\rho(m-2)+j\rho)\Gamma(1+b+j\rho)}{\Gamma(-a-c-2\rho(p-1)-j\rho)} \\ &\times \prod_{j=0}^{p-1} \frac{\Gamma((j+1)\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(1+a+j\rho)\Gamma(1+c+j\rho)}{\Gamma(2+a+c+(p-2+j)\rho)} \end{aligned} \tag{9.3.14}$$

Avec les fonctions de bloc conforme $\{F_p^{(m)}(z)\}$ définies par les éqs.(9.3.10), (9.3.11), la fonction de corrélation $G(z,\bar{z})$ se présente sous la forme :

$$G(z,\bar{z}) = \sum_{p=1}^{m} S_p^{(m)} |F_p^{(m)}(z)|^2 \tag{9.3.15}$$

où

$$\begin{aligned} S_p^{(m)} &= X_p^{(m)} (N_p^{(m)})^2 (\Gamma(\rho))^{2(m-1)} \\ &= \prod_{j=0}^{p-2} \frac{\Gamma((j+1)\rho)}{\Gamma(1-(j+1)\rho)} \frac{\Gamma(1+a+j\rho)\Gamma(1+c+j\rho)}{\Gamma(-a-j\rho)\Gamma(-c-j\rho)} \frac{\Gamma(-1-a-c-(p-2+j)\rho)}{\Gamma(2+a+c+(p-2+j)\rho)} \\ &\times \prod_{j=0}^{m-p-1} \frac{\Gamma((j+1)\rho)}{\Gamma(1-(j+1)\rho)} \frac{\Gamma(1+b+j\rho)\Gamma(-1-a-b-c-2\rho(m-2)+j\rho)}{\Gamma(-b-j\rho)\Gamma(2+a+b+c+2\rho(m-2)-j\rho)} \\ &\times \frac{\Gamma(1+a+c+2\rho(m-2)-(m-p-1+j)\rho)}{\Gamma(-a-c-2\rho(m-2)+(m-p-1+j)\rho)} \end{aligned} \tag{9.3.16}$$

Pour arriver aux expressions (9.3.15), (9.3.16), nous avons utilisé les éqs.(9.3.6) et (9.3.14), la relation $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/s(z)$ et nous avons changé la normalisation de $G(z,\bar{z})$ par un facteur $(\Gamma(\rho))^{2(m-1)}$.

Pour le cas de la fonction $\langle \Phi_n \Phi_m \Phi_m \Phi_n \rangle$, éq.(9.3.1), et sa représentation par des intégrales dans les éqs.(9.3.2), (9.3.3), nous avons

$$\alpha = 2\alpha_+ \alpha_{1,n} = (1-n)\alpha_+^2 \equiv (1-n)\rho \tag{9.3.17}$$

$$b = c = (1-m)\rho \tag{9.3.18}$$

Pour ces valeurs de paramètres, on trouve, après des transformations considérables des produits,

$$S_p^{(m)} \equiv S_p(n,m;m,\bar{n}) = C_{nm}^p C_{m\bar{n}}^{\bar{p}} \tag{9.3.19}$$

$$C_{nm}^p = \prod_{j=0}^{k-2} \frac{\Gamma((j+1)\rho)}{\Gamma(1-(j+1)\rho)} \frac{\Gamma(1-\rho(n-1-j)\Gamma(1-\rho(m-1-j))}{\Gamma(\rho(n-1-j))\Gamma(\rho(m-1-j))} \frac{\Gamma(-1+\rho(p+1+j))}{\Gamma(2-\rho(p+1+j))} \tag{9.3.20}$$

$$C_{m\bar{n}}^{\bar{p}} = \prod_{j=0}^{\tilde{k}-2} \frac{\Gamma((j+1)\rho)}{\Gamma(1-(j+1)\rho)} \frac{\Gamma(1-\rho(m-1-j))\Gamma(-1+\rho(n+1+j))\Gamma(1-\rho(p-1-j))}{\Gamma(\rho(m-1-j))\Gamma(2-\rho(n+1+j)\Gamma(\rho(p-1-j))} \tag{9.3.21}$$

où

$$k = \frac{n+m-p+1}{2}, \;\; \tilde{k} = \frac{p+m-n+1}{2} \tag{9.3.22}$$

Le fait que les coefficients $S_p^{(m)}$ dans l'éq.(9.3.15) factorise sur un produit de C_{nm}^p et $C_{m\bar{n}}^{\bar{p}}$, éq.(9.3.19), est en accord avec l'algèbre des opérateurs que nous allons discuter tout de suite. La différence entre C_{nm}^p et $C_{m\bar{n}}^{\bar{p}}$ est produite par l'utilisation de l'opérateur de vertex conjugué $V_{\bar{\alpha}_{1,n}}(\infty)$ dans l'éq.(9.3.2) pour représenter $\Phi_n(\infty)$ dans l'éq.(9.3.1). Cette asymétrie, qui existe dans la représentation des opérateurs primaires par des opérateurs de vertex, sera expliquée un peu plus loin.

Pour $z \to 0$

$$F_p^{(m)}(z) \approx (z)^{\gamma_p} = (z)^{-(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)} \tag{9.3.23}$$

voir les éqs.(9.3.10), (9.3.11) et les remarques préliminaires sur l'algèbre des opérateurs primaires dans le cours 5. Pour la fonction $\langle\Phi_n\Phi_m\Phi_m\Phi_n\rangle$, éq.(9.3.1), on trouve, pour $z \to 0$:

$$\begin{aligned} &\langle\Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_n(1)\Phi_m(\infty)\rangle \propto G(z,\bar{z}) \\ &= \sum_p S_p(n,m;m,\bar{n})|z|^{-2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}(1+0(z,\bar{z})) \end{aligned} \tag{9.3.24}$$

comme conséquence des éqs.(9.3.15) et (9.3.23). Il faut comparer ce développement avec l'algèbre des opérateurs.

Pour $z \to 0$ et pour le produit des opérateurs

$$\Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_m(1)\Phi_n(\infty) \tag{9.3.25}$$

qu'on trouve dans la fonction (9.3.1), (9.3.25), on développe d'abord le produit $\Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})$:

$$\Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z}) = \sum_p \frac{D_{nm}^p}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}}(\Phi_p(0)+O(z,\bar{z})) \tag{9.3.26}$$

voir l'éq.(5.1.14) du cours 5. Comme $z_4,\ \bar{z}_4 \to \infty$, il faut ensuite appliquer $\Phi_m(1)$ au produit (9.3.26) et faire le développement :

$$\begin{aligned} \Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_m(1) &= \sum_p \frac{D_{nm}^p}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}}(\Phi_p(0)\Phi_m(1)+...) \\ &= \sum_p \frac{D_{nm}^p}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}} \sum_q \frac{D_{pm}^q}{|1|^{2(\Delta_p+\Delta_m-\Delta_q)}}(\Phi_q(0)+...) \\ &= \sum_p \sum_q \frac{D_{nm}^p D_{pm}^q}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}}(\Phi_q(0)+...) \end{aligned} \tag{9.3.27}$$

Finalement, on applique $\Phi_m(z_4, \bar{z}_4)(z_4, \bar{z}_4 \to \infty)$ et on fait la moyenne :

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_m(1)\Phi_n(z_4,\bar{z}_4)\rangle \\
&= \sum_p \sum_q \frac{D^p_{nm} D^q_{pm}}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}} (\langle \Phi_q(0)\Phi_n(z_4,\bar{z}_4)\rangle + ...) \\
&= \sum_p \frac{D^p_{nm} D^n_{pm}}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}} (\frac{1}{|z_4|^{4\Delta_n}} + ...)
\end{aligned} \tag{9.3.28}$$

Nous supprimons le facteur $1/|z_4|^{4\Delta_n}$, comme nous l'avons fait en définissant la fonction $G(z, \bar{z})$, pour trouver :

$$\begin{aligned}
G(z,\bar{z}) &\propto \langle \Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_m(1)\Phi_n(\infty)\rangle \\
&= \sum_m \frac{D^p_{nm} D^n_{pm}}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}} (1 + ...)
\end{aligned} \tag{9.3.29}$$

Nous avons utilisé dans (9.3.28)

$$\langle \Phi_q(0)\Phi_n(z_4,\bar{z}_4)\rangle = \delta_{q,n} \frac{1}{|z_4|^{4\Delta_4}} \tag{9.3.30}$$

En comparant (9.3.29) avec (9.3.24) on trouve :

$$S_p(n,m;m,\bar{n}) \propto D^p_{nm} D^n_{pm} \tag{9.3.31}$$

ou encore

$$C^p_{nm} C^{\bar{p}}_{m\bar{n}} \propto D^p_{nm} D^n_{pm} \tag{9.3.32}$$

Il faut observer qu'avec la normalisation (9.3.30) des fonctions à deux points, les coefficients de l'algèbre des opérateurs D^p_{nm} sont symétriques dans les indices n, m et p. Pour le voir, le plus facile est d'appliquer au développement (9.3.26) un troisième opérateur, disons Φ_k, et de prendre la moyenne. Alors on trouve

$$\langle \Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_k(1)\rangle = \frac{D^k_{nm}}{|z|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_p)}} (1 + O(z,\bar{z})) \tag{9.3.33}$$

En comparant ce développement avec le résultat général pour la fonction à trois points, cours 1, on trouve

$$\langle \Phi_n(z_1,\bar{z}_1)\Phi_m(z_2,\bar{z}_2)\Phi_k(z_3,\bar{z}_3)\rangle = \frac{D^k_{nm}}{|z_{12}|^{2(\Delta_n+\Delta_m-\Delta_k)}|z_{23}|^{2(\Delta_m+\Delta_k-\Delta_n)}|z_{13}|^{2(\Delta_n+\Delta_k-\Delta_m)}} \tag{9.3.34}$$

d'où on déduit la symétrie de D^k_{nm}. Donc, la partie droite de l'éq.(9.3.32) peut être présentée comme $(D^p_{nm})^2$.

Ensuite, pour que la proportionnalité dans l'éq.(9.3.32) devienne une égalité, il faut normaliser de façon adéquate la fonction $G(z, \bar{z})$, éqs.(9.3.5), (9.3.15), qui est définie par des intégrales à partir des opérateurs de vertex correspondants de la représentation d'un champ libre, éq.(9.3.2). Il n'est pas encore assuré que la normalisation des opérateurs de vertex représentant les opérateurs primaires $\{\Phi_n\}$ de la théorie conforme minimale soit en accord avec la normalisation de l'éq.(9.3.30). A cause des interactions, qui sont présentes par l'insertion des opérateurs $\{V_+(v_j)\}$, l'éq.(9.3.2), les opérateurs de vertex $V_{\alpha_{1,n}}(0),\ V_{\alpha_{1,m}}(z,\bar{z}),\ V_{\alpha_{1,m}}(1),\ V_{\bar{\alpha}_{1,n}}(\infty)$ peuvent acquérir des normalisations non-triviales $N_n, N_m, N_m, N_{\bar{n}}$, de façon que

$$G(z,\bar{z}) = N_n N_m N_m N_{\bar{n}} \langle \Phi_n(0)\Phi_m(z,\bar{z})\Phi_m(1)\Phi_n(\infty)\rangle \tag{9.3.35}$$

et par conséquence

$$S_p(n,m;m,\bar{n}) = C^p_{nm} C^{\bar{p}}_{m\bar{n}} = A N_n N_m N_m N_{\bar{n}} (D^p_{nm})^2 \tag{9.3.36}$$

où A est une constante quelconque qui ne dépend pas de $n, m, \bar{n}$.

Remarquons qu'avec notre technique du calcul

$$\langle V_{\alpha_{1,n}}(z_1,\bar{z}_1) V_{\bar{\alpha}_{1,n}}(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \frac{1}{|z_{12}|^{4\Delta_{1,n}}} \tag{9.3.37}$$

D'autre part, avec l'hypothèse des normalisations non-triviales des opérateurs de vertex, on doit avoir

$$\langle V_{\alpha_{1,n}}(z_1,\bar{z}_1) V_{\bar{\alpha}_{1,n}}(z_2,\bar{z}_2)\rangle = N_n N_{\bar{n}} \langle \Phi_n(z_1,\bar{z}_1)\Phi_n(z_2,\bar{z}_2)\rangle = N_n N_{\bar{n}} \frac{1}{|z_{12}|^{4\Delta_{1,n}}} \tag{9.3.38}$$

Donc,

$$N_n N_{\bar{n}} = 1 \tag{9.3.39}$$

et l'équation (9.3.36) se réduit à

$$S_p(n,m;m,\bar{n}) = C^p_{nm} C^{\bar{p}}_{m\bar{n}} = A(N_m)^2 (D^p_{nm})^2 \tag{9.3.40}$$

Il reste encore à supprimer le facteur $(N_m)^2$ (et le coefficient indéfini A), qui est caché quelque part dans les expressions (9.3.20), (9.3.21) des coefficients $C^p_{nm},\ C^{\bar{p}}_{m\bar{n}}$. Pour cela, il suffit de diviser $S_p(n,m;m,\bar{n})$ par

$$S_1(m,m;n,\bar{n}) = C^1_{mm} C^{\bar{1}}_{n\bar{n}} \tag{9.3.41}$$

où $p = 1$ correspond à l'opérateur d'identité I. Remarquons qu'on a 1 et $\bar{1}$ dans les coefficients (9.3.41) car dans la représentation par des opérateurs de vertex, il y a deux opérateurs d'identité :

l'opérateur d'identité simple

$$I = V_0 = 1,\ \ \alpha = \alpha_{1,1} = 0,\ \ \Delta_{\alpha=0} = 0 \tag{9.3.42}$$

et l'opérateur d'identité conjugué, non-trivial

$$\tilde{I} = V_{2\alpha_0}(z,\bar{z}),\ \ \alpha = \alpha_{\overline{1,1}} = 2\alpha_0,\ \ \Delta_{2\alpha_0} = 0 \tag{9.3.43}$$

Il est facile de justifier dans l'éq.(9.3.41),

$$C^{1}_{mm} = (N_m)^2, \ \ C^{\bar{1}}_{n\bar{n}} = 1 \tag{9.3.44}$$

Finalement, au lieu des règles de proportionnalité (9.3.31), (9.3.32) on trouve :

$$(D^p_{nm})^2 = \frac{S_p(n,m;m,\bar{n})}{S_1(m,m;n,\bar{n})} = \frac{C^p_{nm}C^{\bar{p}}_{m\bar{n}}}{C^1_{mm}} \tag{9.3.45}$$

(En exercice, justifier que $D^1_{nm} = \delta_{n,m}$. Justifier ensuite les éqs.(9.3.44), (9.3.45)). Avec des transformations considérables sur les produits dans les expressions (9.3.20), (9.3.21) pour C^p_{nm}, $C^{\bar{p}}_{m,\bar{n}}$, on peut écrire les carrés des coefficients de l'algèbre des opérateurs sous la forme :

$$(D^p_{nm})^2 = (C^p_{nm})^2 N_n^{-2} N_m^{-2} (N_p)^2 \tag{9.3.46}$$

Les coefficients C^p_{nm} sont définis dans l'éq.(9.3.20), et N^2_n, N^2_m, N^2_p sont donnés par

$$(N_s)^2 = \prod_{j=1}^{s-1} \frac{\Gamma(1-j\rho)\Gamma(-1+(1+j)\rho)}{\Gamma(j\rho)\Gamma(2-(1+j)\rho)} \tag{9.3.47}$$

Rappelons que pour les expressions avec des produits, il faut utiliser la règle $\prod_{j=1}^{0}(...) = \prod_{j=0}^{-1}(...) = 1$, voir le commentaire après l'éq.(9.3.6).

Il faut encore remarquer que (9.3.46) est une des formes possibles parmi plusieurs pour écrire les coefficients D^p_{nm}. Par exemple, la symétrie de D^p_{nm} par rapport aux permutations des indices n, m, p n'est pas explicite dans la forme (9.3.46).

Bibliographie

[1] A. M. Polyakov, *ZhETP Pis. Red.* **12** (1970) 538.

[2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov et A. B. Zamolodchikov, *J. Stat. Phys.* **34** (1984) 763 ; *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 333.

[3] S. Mandelstam, *Phys. Rep.* **13C** (1974) 259.

[4] V. G. Kac, *Lecture Notes in Physics* **94** (1979) 441.

[5] B. L. Feigin et D. B. Fuks, *Functional Anal. Appl.* **16** (1982) 114.

[6] D. Friedan, Z. Qiu et S. Shenker, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 1575.

[7] Vl. S. Dotsenko, *J. Stat. Phys.* **34** (1984) 781 ; *Nucl. Phys.* **235** (1984) 54.

[8] R. J. Baxter, *J. Phys.* **A13** (1980) L61.

[9] V. A. Fateev et A. B. Zamolodchikov, *Sov. Phys. JETP* **62** (1985) 215.

[10] B. Duplantier, *Physica* **D38** (1989) 71.

[11] J. L. Cardy, *Phase Transitions and Critical Phenomena* **11**, C. Domb, J. L. Lebowitz eds., *Academic Press, N.Y.* (1987).

[12] P. Di Francesco, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 407.

[13] H. W. J. Blote, J. L. Cardy et M. P. Nightingale, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 742 ; I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 746.

[14] B. L. Feigin et D. B. Fuks, (1983) non publié.

[15] Vl. S. Dotsenko et V. A. Fateev, *Nucl. Phys.* **B240** (1984) 312 ; **B251** (1985) 691 ; *Phys. Lett.* **B154** (1985) 291 ; Vl. S. Dotsenko, *Adv.Stud. in Pure Math.* **16** (1988) 123.

[16] G. Felder, *Nucl. Phys* **B317** (1989) 215 ; *Nucl. Phys* **B324** (1989) 548(E).

[17] B. L. Feigin et D. B. Fuks, *Functional Anal. Appl.* **17** (1983) 241 ; Topology, Proceedings, Leningrad 1982, L. D. Faddeev, A. A. Maleev (eds), *Lect. Notes in Math.* 1060, (Springer, Berlin, 1984).

[18] A. Selberg, *Norsk Mat. Tidsskrift* **26** (1944) 71